

Universidad de Granada  
Departamento de Estadística e I.O



---

**ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS  
ESPACIO-TEMPORALES MEDIANTE  
MODELOS FUNCIONALES DE  
SERIES TEMPORALES**

---

**Tesis doctoral**

**Román Salmerón Gómez  
Granada, 2008**





Universidad de Granada  
Departamento de Estadística e I.O



**ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS  
ESPACIO-TEMPORALES MEDIANTE  
MODELOS FUNCIONALES DE  
SERIES TEMPORALES**

**Tesis doctoral**

**Román Salmerón Gómez  
Granada, 2008**



Román Salmerón Gómez

**ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS  
ESPACIO-TEMPORALES MEDIANTE  
MODELOS FUNCIONALES DE  
SERIES TEMPORALES**

Memoria de tesis presentada por  
Román Salmerón Gómez para optar al grado  
de Doctor por la Universidad de Granada.

Fdo. Román Salmerón Gómez

Vº Bº  
Directores de tesis

Fdo. Dra. Dña. M<sup>a</sup>. Dolores Ruiz Medina



Quisiera expresar mi agradecimiento a la directora de esta memoria, la profesora María Dolores Ruiz Medina, sin cuya dirección, la realización de este trabajo nunca hubiera sido posible.

Con carácter especial, a los profesores Ramón Gutiérrez Jáimez, Andrés González Carmona y Josefa Linares Pérez, por despertar en mí el interés por la docencia y la investigación. Asimismo, quisiera agradecer al profesor Jose Miguel Angulo Ibáñez su colaboración. No puedo olvidar en estos agradecimientos al director del Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, el profesor Rafael Herrerías Pleguezuelo, quien me ha brindado la oportunidad de poner en práctica mis conocimientos.

También me gustaría agradecer el apoyo y ayuda recibida por mis compañeros y amigos Nuria, Lina, Ramón, Paco y Jose María y a cuantas personas me han prestado su colaboración y amistad.

Gracias a mis padres Román y Toñi, a mis hermanos David y Alberto, a mi tío Antonio y a mi novia Arancha por estar siempre a mi lado, y por hacerme sentir que siempre lo estarán.



A MI FAMILIA  
LA PRESENTE Y LA FUTURA



# Índice

Introducción	XVII
<b>I Modelos estadísticos espacio-temporales</b>	<b>1</b>
<b>1. Técnicas de aproximación ortogonal</b>	<b>3</b>
1.1. Reducción de la dimensión en modelos geoestadísticos . . . . .	4
1.1.1. Análisis EOF . . . . .	4
1.1.2. Análisis POP . . . . .	9
1.1.3. Análisis <i>wavelet</i> . . . . .	12
1.2. Reducción de la dimensión en modelos de datos funcionales . .	13
1.2.1. FPCA . . . . .	14
<b>2. Modelos en tiempo discreto y espacio continuo</b>	<b>17</b>
2.1. Formulación geoestadística . . . . .	18
2.2. Formulación en términos de espacios de de Banach . . . . .	23
2.2.1. Procesos autorregresivos Banach-valuados . . . . .	23
<b>3. Técnicas de filtrado</b>	<b>27</b>
3.1. Filtrado de Kalman espacio-temporal . . . . .	27
3.1.1. Proyección de las ecuaciones de Kalman . . . . .	28
3.1.2. Estimación de los parámetros del modelo . . . . .	29
3.2. Filtrado no lineal espacio-temporal . . . . .	33

<b>II</b>	<b>Series autorregresivas Hilbertianas</b>	<b>37</b>
<b>4.</b>	<b>Modelos ARH(1): Diagonalización y Filtrado de Kalman</b>	<b>39</b>
4.1.	El modelo ARH(1) . . . . .	40
4.2.	Análisis POP de dimensión infinita . . . . .	41
4.3.	Familias de operadores de autocorrelación . . . . .	43
4.4.	Aplicación al problema de filtrado y extrapolación . . . . .	45
4.4.1.	Filtrado de Kalman . . . . .	46
4.5.	Ejemplos numéricos . . . . .	48
4.5.1.	Autocorrelación exponencial . . . . .	50
4.5.2.	Autocorrelación gamma . . . . .	57
4.5.3.	Autocorrelación Cauchy . . . . .	62
<b>5.</b>	<b>Modelos ARH(p): Diagonalización y Filtrado de Kalman</b>	<b>71</b>
5.1.	El modelo ARH(p) . . . . .	72
5.2.	Descomposición espectral múltiple . . . . .	72
5.2.1.	Caso particular . . . . .	74
5.3.	Operadores de autocorrelación . . . . .	74
5.4.	Filtrado de Kalman en modelos ARH(p) . . . . .	76
5.5.	Ejemplos numéricos . . . . .	79
5.5.1.	Autocorrelación exponencial . . . . .	80
5.5.2.	Autocorrelación gamma . . . . .	85
5.5.3.	Autocorrelación Cauchy . . . . .	92
<b>III</b>	<b>Estimación máximo-verosimil y líneas futuras</b>	<b>103</b>
<b>6.</b>	<b>Combinación del filtrado de Kalman y el algoritmo E.M.</b>	<b>105</b>
6.1.	Algoritmo EM . . . . .	106
6.1.1.	Descripción del algoritmo EM . . . . .	106
6.2.	Formulación del algoritmo EM a partir de datos funcionales . . . . .	107
6.2.1.	Valores iniciales . . . . .	107

<i>ÍNDICE</i>	III
6.2.2. Algoritmo EM para modelos ARH(1) . . . . .	111
6.2.3. Algoritmo EM para modelos ARH(p) . . . . .	117
6.3. Ejemplos numéricos . . . . .	119
<b>7. Líneas de investigación futura</b>	<b>135</b>
<b>IV Apéndice</b>	<b>141</b>
<b>A. Código Fuente</b>	<b>143</b>
A.1. Código del capítulo 4 . . . . .	143
A.2. Código del capítulo 5 . . . . .	153
A.3. Código del capítulo 6 . . . . .	161



# Índice de gráficos

4.1. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 349$ (verde) y $M = 407$ (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	52
4.2. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 407$ (centro) y $M = 349$ (derecha), en el tiempo $t = 5$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	53
4.3. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 407$ (centro) y $M = 349$ (derecha), en el tiempo $t = 10$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	53
4.4. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 407$ (centro) y $M = 349$ (derecha), en el tiempo $t = 15$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	54
4.5. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 407$ (centro) y $M = 349$ (derecha), en el tiempo $t = 20$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	54
4.6. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 349$ (verde) y para $M = 407$ (rojo), con innovaciones coloreadas. . . . .	55
4.7. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 407$ (centro) y $M = 349$ (derecha), en el tiempo $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	56
4.8. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 407$ (centro) y $M = 349$ (derecha), en el tiempo $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	56
4.9. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 407$ (centro) y $M = 349$ (derecha), en el tiempo $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	56

- 4.10. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. 57
- 4.11. Autocorrelación Gamma ARH(1). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 291$  (verde) y  $M = 367$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 59
- 4.12. Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 59
- 4.13. Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 59
- 4.14. Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 60
- 4.15. Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 60
- 4.16. Autocorrelación Gamma ARH(1). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 291$  (verde) y para  $M = 367$  (rojo), con innovaciones coloreadas. . . . . 61
- 4.17. Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . 62
- 4.18. Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . 62
- 4.19. Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . 63
- 4.20. Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. . 63
- 4.21. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 97$  (verde) y para  $M = 274$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . 65

4.22. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 65

4.23. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 65

4.24. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 66

4.25. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 66

4.26. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 97$  (verde) y para  $M = 274$  (rojo), con innovaciones coloreadas. . . . . 67

4.27. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . 68

4.28. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . . 68

4.29. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . . 68

4.30. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. . . 69

5.1. Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 359$  (verde) y  $M = 411$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . 83

5.2. Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 83

5.3. Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 83

5.4.	Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 411$ (centro) y $M = 359$ (derecha), en el tiempo $t = 15$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	84
5.5.	Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 411$ (centro) y $M = 359$ (derecha), en el tiempo $t = 20$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	84
5.6.	Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 359$ (verde) y para $M = 411$ (rojo), con innovaciones coloreadas. . . . .	86
5.7.	Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 411$ (centro) y $M = 359$ (derecha), en el tiempo $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	87
5.8.	Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 411$ (centro) y $M = 359$ (derecha), en el tiempo $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	87
5.9.	Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 411$ (centro) y $M = 359$ (derecha), en el tiempo $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	87
5.10.	Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 411$ (centro) y $M = 359$ (derecha), en el tiempo $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	88
5.11.	Autocorrelación Gamma ARH(2). Errores cuadráticos funcionales para $M = 291$ (verde) y $M = 367$ (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	90
5.12.	Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 367$ (centro) y $M = 291$ (derecha), en el tiempo $t = 5$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	90
5.13.	Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 367$ (centro) y $M = 291$ (derecha), en el tiempo $t = 10$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	90
5.14.	Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 367$ (centro) y $M = 291$ (derecha), en el tiempo $t = 15$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	91
5.15.	Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para $M = 367$ (centro) y $M = 291$ (derecha), en el tiempo $t = 20$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	91

5.16. Autocorrelación Gamma ARH(2). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 291$  (verde) y para  $M = 367$  (rojo), con innovaciones coloreadas. . . . . 93

5.17. Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . 94

5.18. Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . 94

5.19. Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . 94

5.20. Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. . 95

5.21. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 97$  (verde) y para  $M = 274$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . 97

5.22. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 97

5.23. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 97

5.24. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 98

5.25. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . . 98

5.26. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 97$  (verde) y para  $M = 274$  (rojo), con innovaciones coloreadas. . . . . 99

5.27. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . 100

- 5.28. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 100
- 5.29. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 100
- 5.30. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 101
- 6.1. Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Representación error cuadrático funcional para  $M = 302$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 121
- 6.2. Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Representación error cuadrático funcional para  $M = 27$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 123
- 6.3. Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Representación error cuadrático funcional para  $M = 189$ , con innovaciones coloreadas. 124
- 6.4. Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 302$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 125
- 6.5. Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 302$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 126
- 6.6. Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 302$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 126
- 6.7. Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 302$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 127
- 6.8. Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 27$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 127
- 6.9. Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 27$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 128
- 6.10. Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 27$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 128

6.11. Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 27$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 129

6.12. Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 189$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 129

6.13. Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 189$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 130

6.14. Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 189$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 130

6.15. Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 189$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas. . . . . 131

6.16. Predicción para el proceso exponencial en el tiempo  $t = 21$ . . . 131

6.17. Predicción para el proceso exponencial en el tiempo  $t = 22$ . . . 131

6.18. Predicción para el proceso Cauchy en el tiempo  $t = 21$ . . . . 132

6.19. Predicción para el proceso Cauchy en el tiempo  $t = 22$ . . . . 132

6.20. Predicción para el proceso gamma en el tiempo  $t = 21$ . . . . 132

6.21. Predicción para el proceso gamma en el tiempo  $t = 22$ . . . . 133



# Índice de tablas

4.1. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 349$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	51
4.2. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 407$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	52
4.3. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 349$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	54
4.4. Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 407$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	55
4.5. Autocorrelación Gamma ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 291$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	58
4.6. Autocorrelación Gamma ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 367$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	58
4.7. Autocorrelación Gamma ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 291$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	60
4.8. Autocorrelación Gamma ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 367$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	61
4.9. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 97$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	64
4.10. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 274$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	64
4.11. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 97$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	66
4.12. Autocorrelación Cauchy ARH(1). Error cuadrático funcional para $M = 274$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	67

5.1. Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 359$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	81
5.2. Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 411$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	82
5.3. Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 359$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	85
5.4. Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 411$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	86
5.5. Autocorrelación Gamma ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 291$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	89
5.6. Autocorrelación Gamma ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 367$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	89
5.7. Autocorrelación Gamma ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 291$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	92
5.8. Autocorrelación Gamma ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 367$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	93
5.9. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 97$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	96
5.10. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 97$ ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ). . . . .	96
5.11. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 97$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	98
5.12. Autocorrelación Cauchy ARH(2). Error cuadrático funcional para $M = 274$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	99
6.1. Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Error cuadrático funcional para $M = 302$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	121
6.2. Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Error cuadrático de las estimaciones de los parámetros. . . . .	122
6.3. Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Error cuadrático funcional para $M = 27$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	122
6.4. Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Error cuadrático de las estimaciones de los parámetros. . . . .	122
6.5. Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Error cuadrático funcional para $M = 189$ , con innovaciones coloreadas. . . . .	123

6.6. Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Error cuadrático de las estimaciones de los parámetros. . . . . 124



# Introducción

---

## Resultados de la tesis

En la presente memoria titulada *Análisis Estadístico de datos Espacio-Temporales mediante Modelos Funcionales de Series Temporales* se aportan nuevas herramientas para la resolución de los problemas de estimación paramétrica funcional, filtrado y extrapolación en el contexto de series autorregresivas hilbertianas (ARH) para el análisis de secuencias de datos funcionales espaciales.

Concretamente, los resultados obtenidos en esta tesis han sido:

- a) La derivación de una versión escalar de la ecuación de estados funcional que define los modelos ARH( $p$ ),  $p \geq 1$ , mediante la formulación infinito-dimensional del análisis *Principal Oscillation Pattern* (**POP**), desarrollado previamente en el contexto de series temporales ordinarias. Dicha formulación proporciona en el caso ARH(1) (ver capítulo 4) la diagonalización de la ecuación de estados en términos de la descomposición espectral del operador de autocorrelación. En el caso ARH( $p$ ), con  $p > 1$  (ver capítulo 5), se obtiene la diagonalización de la ecuación de estados en términos de la descomposición espectral múltiple del espacio de parámetros multidimensional.
- b) La implementación del filtrado de Kalman en los modelos ARH(1) y ARH( $p$ ),  $p > 1$ , a partir de la descomposición **POP** derivada para procesos autorregresivos hilbertianos. Más concretamente, dicha implementación se obtiene mediante la proyección en los sistemas de bases de Riesz duales implicados de los operadores que definen los momentos de orden

dos condicionados a la información muestral funcional (ver capítulos 4 y 5).

- c) La obtención de estimadores máximo-verosímiles para los parámetros funcionales involucrados en la formulación de los modelos ARH( $p$ ),  $p \geq 1$ . El cálculo de estos estimadores se obtiene a partir de la combinación del filtrado y suavizamiento de Kalman con el algoritmo EM (ver capítulo 6).

Los objetivos de esta tesis se inscriben en los de la línea de investigación que se desarrolla en el Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Granada dentro del Proyecto Nacional de Investigación MODELIZACIÓN Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE CARACTERÍSTICAS LOCALES Y PROPIEDADES DE MEMORIA PARA DATOS ESPACIO-TEMPORALES MTM2005-08597.

## Antecedentes del tema

En las últimas décadas se ha producido un desarrollo importante de la Estadística Espacio-Temporal, dada la necesidad de analizar la evolución temporal del comportamiento espacial de magnitudes aleatorias que son de interés en estudios desarrollados en diversas áreas aplicadas tales como Medio-Ambiente, Geofísica, Biología y Medicina (ver, por ejemplo, Cressie y Huang [16]; Holden et al. [49]; Huang y Cressie [50]; Lohmann y Bohn [56]; Nychka et al. [69]; Ruiz-Medina et al. [77]; Stroud et al. [91]; Wikle y Cressie [104]; Wikle et al. [105]). En particular, en el contexto geoestadístico, se ha producido un avance importante en la derivación de modelos flexibles para el procesamiento y análisis estadístico de datos espacio-temporales. Los enfoques adoptados se fundamentan esencialmente en la Estadística Espacial, dado su auge previo en este contexto. La mayor parte de los modelos se introducen inicialmente bajo la hipótesis de estacionariedad en el tiempo (ver, por ejemplo, Handcock y Wallis [45]; Haslett y Raftery [46]; Pfeifer y Deutsch [70]; Stoffer [90]). Posteriormente, se amplía la clase de modelos al caso no estacionario (Gelfand, Ghosh, Knight y Sirmans [34]; Guttorp, Meiring y Sampson [41]; Higdon [48]; Lavine y Lozier [55]; Renshaw y Särkkä [75]; Smith y Robinson [87]; Waller, Carlin, Xia y Gelfand [98]; Wikle, Berliner y Cressie [103]). Otras aproximaciones en un contexto de espacio de estados se pueden ver, por ejemplo, en Bogaert [6]; Epperson [30]; Glasbey, Graham y Hunter [36]; Huang y Cressie [50]; Mardia, Goodall, Redfern y Alonso [61]; Ruiz-Medina,

Alonso, Angulo y Bueso [77]; Ruiz-Medina y Angulo [78]; Sansó y Guenni [84] y Wikle y Cressie [104]. Uno de los objetivos primordiales en el diseño de modelos geoestadísticos espacio-temporales es la representación de los diferentes niveles de interacción espacio-temporal que caracterizan la estructura de dependencia de magnitudes definidas en el espacio y tiempo. En este sentido, se ha desarrollado una extensa literatura dedicada a la introducción de modelos de covarianza espacio-temporales separables y no separables, en el caso de modelos definidos en tiempo y espacios continuos (ver, por ejemplo, De Iaco, Myers, Posa [22]; Ma [58], [59], [60]; Gneiting [38]; Porcu, Mateua, Zinib y Pini [71]; Stein [89]), así como a la formulación de funciones y núcleos de autocorrelación, en el caso de modelos definidos en tiempo discreto y espacio continuos (ver Huang y Cressie [50]; Ruiz-Medina, Alonso, Angulo y Bueso [77]; Ruiz-Medina y Angulo [78]; Wikle [101], [102] y Wikle y Cressie [104], entre otros). En esta memoria se analizarán diferentes modelos de interacción espacio-temporal desde la perspectiva funcional, es decir, considerando diferentes familias de operadores de autocorrelación, caracterizados en términos de sus propiedades espectrales puntuales.

Por otra parte, dado el avance de las nuevas tecnologías, que ha permitido el diseño de sofisticados dispositivos para la medición y procesamiento de información, se ha incrementado el número de situaciones donde se dispone de información muestral funcional. Este hecho se ha reflejado en un importante avance, relativamente reciente, de la Estadística Funcional (ver, por ejemplo, Clarkson, Fraley, Gu y Ramsay [13]; Diggle, Liang y Zeger [25]; Eubank y LaRiccia [29]; Ferraty y Vieu [33]; Ramsay y Silverman [74]). De hecho, en la última década, se ha desarrollado una extensa literatura en relación con el diseño de métodos de estimación y contraste a partir de datos funcionales (ver Abramovich y Angelini [1]; Abramovich, Antoniadis, Sapatinas y Vidakovic [2]; Fan y Lin [32]; Godtliebseu, Chu, Sorbye y Torheim [39]; Hall, Poskitt y Presnell [44]; Müller, H.G. [66]; Müller y Stadtmüller [67]; Nan y Nowak [68]; Yao [106]; Yao, Müller y Wang [107], entre otros). En particular, un enfoque apropiado para la derivación de modelos flexibles para el análisis de secuencias de datos funcionales es la teoría de series temporales funcionales, introducida en el contexto de procesos Banach y Hilbert-valuados (ver Bosq [7]). En este ámbito, existen resultados recientes sobre estimación paramétrica funcional, así como sobre extrapolación y filtrado (ver, por ejemplo, Bosq [8]; Damon y Guillas [19]; Guillas [42]; Mas [62]). Las dificultades surgidas en el desarrollo de la Inferencia Funcional residen en la elevada dimensión de los problemas que se plantean. Por tanto, con frecuencia, se han de aplicar transformaciones ortogonales o biortogonales para la adecuada codificación de información. Las transformaciones usuales codifican la información en el

dominio espectral discreto. Este es el caso de las transformaciones implicadas en las descomposiciones *Empirical orthogonal Function* (**EOF**), *Principal Oscillation Pattern* (**POP**) y *Functional Principal Component* (**FPC**) (ver Bretherton et al. [11], Glahn [35], Hasselmann [47], Lorenz [57], Preisendorfer [72], Ramsay y Silverman [74], Ruiz-Medina, Alonso, Angulo y Bueso [77], Storch et al. [95] y [94], entre otros). Alternativamente, se puede utilizar el dominio de la transformada *wavelet* que proporciona una codificación localizada a diferentes niveles de resolución (ver, por ejemplo, Ruiz-Medina, Angulo y Fernández-Pascual [79]; Ruiz-Medina y Angulo [78]; Ruiz-Medina [76]; Ruttimann [82]; Solo, Brown y Long [88], entre otros). La transformada *wavelet* ha sido utilizada en el contexto funcional esencialmente en el análisis de secuencias de imágenes, especialmente en Medicina. En relación con las transformaciones discretas asociadas a la teoría espectral de operadores, en el contexto funcional, el análisis de componentes principales funcional (**FPCA**) es una de las herramientas más utilizadas en el procesamiento de información muestral funcional. Sin embargo, en el caso de secuencias de datos funcionales generadas mediante modelos  $ARH(p)$ ,  $p \geq 1$ , dicho análisis no proporciona una versión diagonal de la ecuación de estados funcional, lo que dificulta la implementación de algoritmos de estimación en este contexto. Este hecho motivó el inicio del trabajo desarrollado en la presente memoria, donde se obtienen versiones escalares de las ecuaciones de estados funcionales que definen los modelos  $ARH(1)$  y  $ARH(p)$ ,  $p > 1$ , que permiten la implementación del filtrado de Kalman y el algoritmo EM a partir de secuencias de datos funcionales.

## Estructura de la memoria

Esta memoria se ha organizado en tres partes. Una primera parte donde se resumen resultados previos sobre el análisis de datos espacio-temporales desde la perspectiva Geoestadística y Funcional. Una segunda parte donde se describen las contribuciones derivadas en relación con la diagonalización de modelos  $ARH(p)$ ,  $p \geq 1$ , y su aplicación a la implementación de algoritmos de filtrado, extrapolación y suavizamiento. Una última parte donde se muestran los resultados obtenidos en relación con la estimación paramétrica por máxima verosimilitud de modelos  $ARH(p)$ ,  $p \geq 1$ .

A continuación se resumen los contenidos de estas tres partes:

1. La primera parte consta de los capítulos 1, 2 y 3. En el capítulo 1 se hace referencia a las distintas técnicas usadas para la discretización ortogonal de modelos espacio-temporales basadas en la elección de una base apropiada de funciones que conduce, mediante truncamiento de dicha base, a una aproximación finito-dimensional de la ecuación de estados. Las técnicas usadas se encuadran dentro de dos ambientes distintos. Por un lado se presentan los métodos utilizados habitualmente en la Estadística Espacio-Temporal, dirigidos al análisis de variabilidades, métodos **EOF** y **POP**. Por otra parte, se describen los utilizados en la Estadística Funcional, el **FPCA** y la transformada *wavelet*. En el capítulo 2 se presentan los enfoques fundamentales utilizados en la formulación de modelos de interacción espacio-temporal. En el capítulo 3 se resume la implementación del filtrado de Kalman para modelos estadísticos espacio-temporales lineales y se comenta brevemente la metodología planteada en las técnicas **EKF** y **UKF** para el filtrado de modelos no lineales en el contexto de datos espacio-temporales.
2. La segunda parte consta de los capítulos 4 y 5. En dichos capítulos se resumen respectivamente las aportaciones derivadas en relación con la formulación de una versión funcional del *Principal Oscillation Pattern Analysis* unidimensional, en el caso  $ARH(1)$ , y multidimensional, en el caso  $ARH(p)$ ,  $p > 1$ , para la obtención de una versión escalar de las ecuaciones de estados funcionales que definen los modelos  $ARH(1)$  y  $ARH(p)$ ,  $p > 1$ . Ejemplos de operadores de autocorrelación que forman parte del espacio de parámetros funcional considerado, cuyos elementos admiten una descomposición espectral en términos de bases de Riesz duales, son asimismo formulados, describiendo sus propiedades espectrales. Finalmente, se obtiene la implementación del filtrado de Kalman en modelos  $ARH(1)$  y  $ARH(p)$ ,  $p > 1$ . Los resultados obtenidos se ilustran con ejemplos numéricos, donde se generan secuencias de datos funcionales espaciales con dinámica autorregresiva, afectados por ruido funcional aditivo, a partir de los cuales se implementa el filtrado de Kalman, en términos de la descomposición **POP** del proceso Hilbert-valuado de interés. Se estudian diferentes ejemplos correspondientes a diferentes familias de operadores de autocorrelación o modelos funcionales de interacción espacio-temporal.
3. La tercera parte consta del capítulo 6 y el capítulo 7. En el capítulo 6 se describe la implementación del algoritmo E.M. en combinación con la recursión *forward* y *backward* de Kalman para la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros funcionales involucrados en la for-

mulación de los modelos ARH(1) y ARH( $p$ ),  $p > 1$ . Se trata asimismo el problema de inicialización del algoritmo E.M. funcional planteado, proponiéndose diferentes alternativas en la introducción de los valores iniciales del algoritmo, a partir de la formulación funcional de estimadores de momentos para los parámetros implicados. Nuevamente, los resultados se ilustran con ejemplos numéricos donde se resuelve el problema de filtrado, extrapolación y estimación paramétrica a partir de secuencias de datos funcionales espaciales generadas mediante modelos ARH. Finalmente, en el capítulo 7, se exponen los problemas abiertos que serán abordados en un futuro inmediato en relación con la investigación desarrollada en la realización de esta memoria. Más concretamente, se describen brevemente tres líneas de trabajo futuro relacionadas con el estudio de modelos Autorregresivos Banach-valuados y Funcionales Lineales Generales en el contexto de espacios de Besov fraccionarios y multifraccionarios, para el análisis estadístico de fractalidad, memoria larga, etc., en el espacio y tiempo, planteándose la derivación de métodos de extrapolación y filtrado, estimación paramétrica funcional y contraste de hipótesis en el contexto de dichos modelos.

---

# PARTE I

## Modelos estadísticos espacio-temporales

---



# CAPÍTULO 1

---

## Técnicas de aproximación ortogonal

---

Para resolver el problema de dimensionalidad asociado a los modelos espacio-temporales que se describirán en el capítulo 2, se introducen en este capítulo las aproximaciones ortogonales usuales formuladas en el análisis estadístico de dichos modelos. Dichas aproximaciones se basan en la descomposición espectral discreta de los operadores que definen la estructura de dependencia espacio-temporal. Más concretamente, se considera la proyección en los sistemas de autofunciones del operador de covarianza espacial y de los operadores de autocorrelación asociados a la formulación geoestadística y funcional de los modelos estudiados.

## 1.1. Reducción de la dimensión en modelos geoestadísticos

En el tratamiento estadístico de datos espacio-temporales se presenta como objetivo esencial la reducción de la dimensión inherente al problema (ya que esto permitirá resolver los problemas estadísticos planteados en este contexto, tales como la implementación de algoritmos de predicción mínimo cuadrática). En este sentido, se han desarrollado diferentes metodologías para un procesamiento eficiente de la información muestral. En la sección 1.1.1 se introducirá el análisis *Empirical Orthogonal Function* (**EOF**), en la sección 1.1.2 el análisis *Principal Oscillation Pattern* (**POP**), para finalizar en la sección 1.1.3 con el análisis *wavelet*.

### 1.1.1. Análisis EOF

El análisis **EOF**, descrito, por ejemplo, en Wikle [102] en relación con el tratamiento estadístico de modelos espacio-temporales geofísicos, coincide con la descomposición en autovalores y autovectores de la matriz de covarianza espacial. Por tanto, en el caso de estacionariedad en el tiempo, el análisis **EOF** es equivalente al análisis de Componentes Principales de la estructura de covarianza que modeliza la dependencia espacial en cada instante temporal. En esta sección, se formula la versión continua de dicho análisis para el proceso espacio-temporal subyacente, es decir, el desarrollo de Karhunen-Loève espacial en cada corte temporal. Posteriormente, se introduce el análisis **EOF** que proporciona la descomposición ortogonal óptima de la estructura empírica de dependencia espacial dada por los datos espacio-temporales.

#### Formulación continua: Karhunen-Loève

Sea  $X$  un proceso espacial continuo medido en intervalos de tiempo discretos. El objetivo es encontrar una descomposición ortonormal óptima de dicho proceso espacio-temporal. Se considera en primer lugar que  $X$  admite una representación como suma de una serie en términos de una base ortonor-

mal de funciones espaciales y un conjunto numerable de series temporales incorreladas. Se tiene pues

$$X(s, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(t) \phi_k(s), \quad (1.1)$$

donde se supone que  $\text{Var}(a_1(t)) > \text{Var}(a_2(t)) > \dots$  y  $\text{Cov}[a_i(t), a_j(t)] = 0$  para todo  $i \neq j$ .

Se supone asimismo que  $E[X(s, t)] = 0$ , y se define la función de covarianza espacial como  $C_0^X(s, r) = E[X(s, t)X(r, t)]$ , que no es necesariamente estacionaria en el espacio, pero se asume invariante en el tiempo.

Puesto que el proceso,  $X$ , tiene media cero, a partir de (1.1)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} E[a_k(t)] \phi_k(s) = 0,$$

con lo cual

$$E[a_k(t)] = 0, \quad \forall k,$$

y entonces

$$\text{Cov}[a_i(t), a_j(t)] = E[a_i(t)a_j(t)], \quad \forall i, j.$$

Por tanto, se obtiene

$$E[a_i(t)a_j(t)] = \begin{cases} \text{Var}(a_k(t)) & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ en otro caso } \end{cases} \quad (1.2)$$

Además, puesto que

$$\begin{aligned} X(s, t) \cdot X(r, t) &= \left( \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(t) \phi_k(s) \right) \left( \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(t) \phi_m(r) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} a_k(t) a_m(t) \phi_k(s) \phi_m(r), \end{aligned}$$

se tiene entonces

$$\begin{aligned}
 C_0^X(s, r) &= \mathbb{E}[X(s, t)X(r, t)] \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{E}[a_k(t)a_m(t)]\phi_k(s)\phi_m(r) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \text{Var}(a_k(t))\phi_k(s)\phi_k(r) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \phi_k(s)\phi_k(r),
 \end{aligned}$$

donde se ha usado (1.2) y la estacionariedad en el tiempo de la función de covarianza.

Por tanto, se obtiene la siguiente descomposición de la función de covarianza

$$C_0^X(s, r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \phi_k(s)\phi_k(r). \quad (1.3)$$

Dicha descomposición conduce, bajo condiciones apropiadas que permitan permutar la suma con la integral, a la siguiente ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\begin{aligned}
 \int_D C_0^X(s, r)\phi_m(s)ds &= \int_D \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \phi_k(s)\phi_k(r) \right) \phi_m(s)ds \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \phi_k(r) \left( \int_D \phi_k(s)\phi_m(s)ds \right) \\
 &= \lambda_m \phi_m(r).
 \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la ortonormalidad de las autofunciones

$$\int_D \phi_k(s)\phi_l(s)ds = \begin{cases} 1 & , \text{ si } k = l \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases} .$$

Por tanto,  $\{\phi_k : k = 1, \dots, +\infty\}$  y  $\{\lambda_k : k = 1, \dots, +\infty\}$  son, respectivamente, las autofunciones y autovalores asociados a  $C_0^X$ , y el desarrollo ortogonal obtenido coincide con el desarrollo de Karhunen-Loève espacial del proceso  $X$  en cada corte temporal.

Recíprocamente, la compacidad del operador integral definido por el núcleo de covarianza garantiza la completitud del sistema de autofunciones asociado. Se tiene entonces que el proceso,  $X$ , admite un desarrollo en términos

de dicho sistema, satisfaciendo

$$\begin{aligned}
 \int_D X(s, t) \phi_k(s) ds &= \int_D \left( \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(t) \phi_m(s) \right) \phi_k(s) ds \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(t) \left( \int_D \phi_m(s) \phi_k(s) ds \right) \\
 &= a_k(t), \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

donde se a tenido en cuenta, una vez más, la ortonormalidad de las autofunciones. A partir de (1.4)

$$\begin{aligned}
 a_i(t) a_k(t) &= \left( \int_D X(r, t) \phi_i(r) dr \right) \left( \int_D X(s, t) \phi_k(s) ds \right) \\
 &= \int_D \int_D X(r, t) X(s, t) \phi_i(r) \phi_k(s) dr ds \\
 &= \int_D \phi_k(s) \left( \int_D X(r, t) X(s, t) \phi_i(r) dr \right) ds,
 \end{aligned}$$

y entonces, tomando esperanzas, usando la ecuación integral de Fredholm y la ortonormalidad de las autofunciones

$$\begin{aligned}
 E[a_i(t) a_k(t)] &= \int_D \phi_k(s) \left( \int_D E[X(r, t) X(s, t)] \phi_i(r) dr \right) ds \\
 &= \int_D \phi_k(s) \left( \int_D C_0^X(s, r) \phi_i(r) dr \right) ds \\
 &= \int_D \phi_k(s) \lambda_i \phi_i(s) ds \\
 &= \lambda_i \int_D \phi_k(s) \phi_i(s) ds \\
 &= \begin{cases} \lambda_i & , \text{ si } i = k \\ 0 & , \text{ en otro caso } \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Esto es, las series de tiempo son incorreladas, con varianza igual al correspondiente autovalor

$$E[a_i(t) a_k(t)] = \delta_{ik} \lambda_k, \text{ donde } \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = k \\ 0 & , \text{ en otro caso } \end{cases} .$$

Si el desarrollo (1.1) se trunca en el término  $M$ -ésimo, se obtiene la aproximación finito-dimensional

$$X_M(s, t) = \sum_{k=1}^M a_k(t) \phi_k(s).$$

## Análisis EOF

La versión continua del análisis **EOF** es la más realista desde un punto de vista físico, sin embargo, es raramente considerada en las aplicaciones. Esto es debido a la naturaleza discreta de los datos observados y a la dificultad añadida de resolver la ecuación integral de Fredholm. Seguidamente se introducen los elementos básicos, en el contexto de la Estadística espacio-temporal, del análisis **EOF**, que proporciona la versión empírica del desarrollo ortogonal descrito en la sección anterior.

Para cada instante de tiempo  $t \geq 0$ , y para  $k = 1, \dots, N$ , se considera

$$\begin{aligned} X(t) &= (X(s_1, t), \dots, X(s_N, t))^T \\ \psi_k &= (\psi_k(s_1), \dots, \psi_k(s_N))^T \\ a_k(t) &= \psi_k^T X(t), \end{aligned}$$

donde  $s_1, \dots, s_N$  representan el conjunto de localizaciones espaciales observables. Los vectores  $\psi_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , se definen mediante la condición de maximización de la varianza de la combinación lineal  $a_k(t) = \psi_k^T X(t)$ , para  $k = 1, \dots, N$ , sujetos a las restricciones de ortogonalidad  $\psi_k^T \psi_k = 1$  y  $\text{Cov}[a_k(t), a_j(t)] = 0$ , para todo  $k \neq j$ , respectivamente. Las combinaciones lineales aleatorias así definidas permiten identificar la mayor variación que se produce en el vector de variables aleatorias. Los valores de dichas combinaciones se hallan controlados por la normalización de los elementos de la base de funciones empíricas construida.

Todo esto es equivalente a resolver el problema de maximización

$$\max_{\Psi^T \Psi = 1} N^{-1} \Psi^T X^T X \Psi, \quad (1.5)$$

donde  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ . Denotando por  $C_0^X = E[X(t)X(t)^T] = N^{-1} X^T X$ , la ecuación (1.5) puede reescribirse como

$$\max_{\Psi^T \Psi = 1} \Psi^T C_0^X \Psi. \quad (1.6)$$

Según se indica, por ejemplo, en Ramsay y Silverman [74], el problema de maximización (1.6) se resuelve encontrando la solución al sistema

$$C_0^X \Psi = \Lambda \Psi, \quad (1.7)$$

donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  con  $\lambda_i = \text{Var}(a_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Equivalentemente, se trata de calcular los autovalores y autovectores de la matriz de

covarianza asociada. Por tanto, la solución se obtiene de la descomposición espectral de  $C_0^X$ , dada por  $C_0^X = \Psi\Lambda\Psi^T$ .

En el contexto geoestadístico, una estimación usual de la matriz  $C_0^X$ , basada en el método de los momentos, viene dada por la matriz cuyos elementos se definen como sigue

$$\hat{c}_0^X(s_i, s_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X(s_i, t) - \hat{\mu}_X(s_i, t))(X(s_j, t) - \hat{\mu}_X(s_j, t))^T, \quad (1.8)$$

para  $i, j = 1, \dots, N$ , donde  $\hat{\mu}_X(s_i, t)$  se define como

$$\hat{\mu}_X(s_i, t) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X(s_i, t), \quad i = 1, \dots, N.$$

### 1.1.2. Análisis POP

En el análisis **POP** se supone que el campo subyacente a los datos tiene una estructura autorregresiva temporal. La principal diferencia entre el análisis **POP** y otras descomposiciones espacio-temporales es que los autovectores no son ortonormales. De hecho se define en términos de sistemas de vectores biortogonales. A continuación se describe el análisis **POP** para datos espacio-temporales según se introduce en Wikle [102], donde se considera la siguiente ecuación de estados con dinámica autorregresiva de orden uno

$$X(s, t) = BX(s, t - 1) + \eta(s, t), \quad (1.9)$$

donde  $B$  es una matriz real de orden  $N$  (probablemente no simétrica), siendo  $N$ , como antes, el número de localizaciones espaciales observables en cada corte temporal. El vector aleatorio  $\eta$  es usualmente un término de error, que frecuentemente se supone ruido blanco, tal que

$$E[\eta(s, t)X(s, t)^T] = 0, \quad (1.10)$$

$$E[\eta(s, t)] = 0, \quad (1.11)$$

$$E[\eta(s, t)\eta(s, \tau)^T] = \begin{cases} C^\eta & , t = \tau \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases} . \quad (1.12)$$

La matriz real  $B$ , de (1.9), admite (ver, por ejemplo, Wikle [102]), una

descomposición de la forma

$$B = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{d_i} \phi_i \psi_i^T,$$

donde  $d_i = \psi_i^T \phi_i$ , siendo  $\phi_i$  el vector singular izquierdo de  $B$ , y  $\psi_i$  el vector singular derecho, correspondientes a la raíz latente  $\lambda_i$ , para  $i = 1, \dots, N$ .

Denotando entonces por  $D = \text{diag} \left( \frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_N} \right)$ ,  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$  y  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} Id_{N \times N} &= \Phi \Phi^{-1} (\Psi^T)^{-1} \Psi^T \\ &= \Phi (\Psi^T \Phi)^{-1} \Psi^T \\ &= \Phi D^{-1} \Psi^T \\ &= (\phi_1 \dots \phi_N) \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{d_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^T \\ \vdots \\ \psi_N^T \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i \psi_i^T}{d_i}, \end{aligned}$$

donde  $Id_{N \times N}$  es la matriz identidad de orden  $N$ . Por tanto, considerando que

$$a_i(t) = \frac{\psi_i^T X(s, t)}{d_i}, \quad (1.13)$$

se obtiene

$$X(s, t) = Id_{N \times N} X(s, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i \psi_i^T}{d_i} X(s, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i. \quad (1.14)$$

Los sistemas de vectores  $\{\phi_i\}$  y  $\{\psi_i\}$  son biortogonales

$$\psi_i^T \phi_j = \delta_{i,j} d_i.$$

La reducción de la dimensión se obtiene considerando un orden de truncamiento  $M$  inferior al número de localizaciones espaciales observables  $N$ .

### Estimación mediante análisis POP

Para la aplicación práctica del análisis **POP**, se debe estimar la matriz  $B$  de (1.9).

Multiplicando (1.9) por la derecha por  $X(s, t - 1)^T$

$$X(s, t)X(s, t - 1)^T = BX(s, t - 1)X(s, t - 1)^T + \eta(s, t)X(s, t - 1)^T,$$

y tomando esperanzas

$$\begin{aligned} E[X(s, t)X(s, t - 1)^T] &= BE[X(s, t - 1)X(s, t - 1)^T] \\ &\quad + E[\eta(s, t)X(s, t - 1)^T] \\ &= BE[X(s, t - 1)X(s, t - 1)^T], \end{aligned}$$

se obtiene,

$$C_1^X = BC_0^X, \quad (1.15)$$

donde se ha usado (1.10) y

$$\begin{aligned} C_1^X &= E[X(s, t)X(s, t - 1)^T], \\ C_0^X &= E[X(s, t - 1)X(s, t - 1)^T]. \end{aligned}$$

Si  $C_0^X$  es no singular, se obtiene entonces

$$B = C_1^X(C_0^X)^{-1}. \quad (1.16)$$

Por tanto, se define el siguiente estimador de  $B$

$$\hat{B} = \hat{C}_1^X(\hat{C}_0^X)^{-1},$$

donde  $\hat{C}_0^X$  es la matriz dada en la ecuación (1.8) y  $\hat{C}_1^X$  es una matriz cuyos elementos vienen dados por

$$\hat{c}_1^X(s_i, s_j) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (X(s_i, t) - \hat{\mu}_X(s_i, t))(X(s_j, t-1) - \hat{\mu}_X(s_j, t-1))^T,$$

para  $i, j = 1, \dots, N$ . La descomposición espectral singular de  $\hat{B}$  proporciona estimaciones,  $\hat{\phi}_j$  y  $\hat{\psi}_j$ , para los vectores izquierdos y derechos, así como para los valores singulares,  $\hat{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

### 1.1.3. Análisis *wavelet*

Como alternativa a las descomposiciones ortogonales descritas anteriormente, asociadas al espectro discreto de los operadores de covarianza y autocorrelación, se tiene la transformada *wavelet* de un proceso, que proporciona una descomposición localizada y a diferentes niveles de resolución de las propiedades de dicho proceso. En la formulación de dicha descomposición se parte del siguiente concepto de análisis multirresolución.

**Definición 1.1.1** UNA APROXIMACIÓN MULTIRESOLUCIÓN DE  $L^2(\mathbb{R}^n)$  SE DEFINE COMO UNA SUCESIÓN CRECIENTE,  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ , DE SUBESPACIOS LINEALES CERRADOS DE  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , QUE SATISFACE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

- I)  $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$  Y  $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$  ES DENSO EN  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .
- II)  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}, \forall x \in \mathbb{R}^n$  Y  $j \in \mathbb{Z}$ .
- III)  $f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0, \forall x \in \mathbb{R}^n$  Y  $k \in \mathbb{Z}^n$ .
- IV) EXISTE UNA FUNCIÓN  $g(\cdot) \in V_0$  TAL QUE LA SUCESIÓN  $\{g(x - k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$  ES UNA BASE DE RIESZ DE  $V_0$ .

□

Existen diferentes construcciones de bases de *wavelets* de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (ver, por ejemplo, Meyer, 1992) a partir de la base de Riesz referida en la definición anterior, que permite la generación de una base de  $V_0$ , dada mediante translaciones y dilataciones de la función de escalamiento, 'wavelet padre'. A partir de la cual, mediante diferentes filtros, se generan las *wavelets* básicas. Un método usual empleado en la construcción de una base de *wavelets* multidimensional es el producto tensorial. Una base ortonormal de *wavelets* de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  proporciona la siguiente descomposición de dicho espacio

$$L^2(\mathbb{R}^n) = V_0 \oplus \sum_{j=0}^{\infty} W_j,$$

siendo  $W_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , los espacios generados mediante traslaciones de las diferentes dilataciones de las *wavelets* básicas. Para un proceso espacio-temporal  $Y$ , se define su transformada *wavelet* espacial mediante la secuencia de variables aleatorias

$$\{Y_{\mathbf{k}}(t) : \mathbf{k} \in \Gamma_0\} \cup \left\{ Y_{j,\mathbf{k}}(t) : \mathbf{k} \in \tilde{\Gamma}_j, j \in \mathbb{N} \right\},$$

donde

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{k}}(t) &= \int_D Y_t(\mathbf{z}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad \mathbf{k} \in \Gamma_0, \\ Y_{j,\mathbf{k}}(t) &= \int_D Y_t(\mathbf{z}) \psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Gamma}_j, j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

siendo  $\{\phi_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \Gamma_0\}$  una base ortogonal de funciones de escalamiento, con soporte compacto dado por el dominio de observación  $D$  del proceso de interés  $Y$ , que generan el espacio  $V_0$ , donde se obtiene el borrador aleatorio espacial de  $Y_t$ , para cada  $t \geq 0$ . Asimismo,  $\{\psi_{j,\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \tilde{\Gamma}_j\}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , representan las bases de *wavelets* con soporte compacto que generan los espacios  $W_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , donde se proyecta la variabilidad local espacial de  $Y_t$  a diferentes niveles de resolución, para cada  $t \geq 0$ . Dependiendo de las condiciones satisfechas por  $Y$  se tiene una definición en media cuadrática o muestral de su transformada *wavelet*.

## 1.2. Reducción de la dimensión en modelos de datos funcionales

En esta sección se presenta, de forma breve, el método *Functional Principal Components Analysis* (**FPCA**) desarrollado, por Ramsay y Silverman [74], dentro del análisis de datos funcionales. Se trata de una técnica enfocada a modelizar datos procedentes de sistemas dinámicos dados en términos de un conjunto de funciones básicas, las cuales pueden ser de naturaleza muy variada (constantes, monomios, polinomios, poligonos, etc.). Resumiendo, el **FPCA** forma parte de una colección de técnicas estadísticas de análisis de datos funcionales enfocadas al análisis de curvas, superficies, etc.

Dicho método permite observar, a partir de los datos, las principales características que definen la función a partir de la cual se obtuvieron los mismos. Quizás sea ésta la principal razón por la que este método fue considerado

en primer lugar para el análisis de los datos funcionales. Al igual que en la literatura clásica sobre el estudio de las matrices de varianza-covarianza y/o correlación, el **FPCA** se basa en el estudio de la estructura de covarianza.

La idea básica que caracteriza el análisis de datos funcionales consiste en considerar los datos observados como funciones desde el punto de vista de la estructura intrínseca a los datos más que a su forma explícita, en lugar de como un conjunto de observaciones individuales. Si bien, en la práctica se obtienen pares  $(s, t)$ , donde  $s$  hace referencia a la localización observada y  $t$  al instante de tiempo en el que se ha realizado dicha observación, con lo que realmente se obtienen conjuntos de datos discretos. Es decir, aunque los valores observados sean discretos, dichos valores reflejan una variación que indica que son obtenidos a partir de la evaluación de una función.

### 1.2.1. FPCA

A continuación se define el análisis de Componentes Principales, introducido en la sección 1.1.1 en el contexto de procesos espacio-temporales, para datos funcionales. Como ya se ha indicado, el objetivo del **FPCA** es encontrar un conjunto de  $M$  funciones ortonormales, de forma que la proyección de la función en este conjunto reproduzca lo mejor posible el comportamiento de dicha función.

Sea  $\{\phi_k, k \in \mathbb{N}\}$  un conjunto de funciones, linealmente independientes, capaces de aproximar cualquier función mediante una combinación lineal que use un número adecuado,  $M$ , de las mismas. Así, la función  $x$ , que genera la secuencia de datos funcionales, dados por curvas, admite el siguiente desarrollo lineal

$$x(t)(\cdot) = \sum_{k=1}^M c_k \phi_k(t), \quad (1.18)$$

en términos de  $M$  funciones  $\phi_k$ .

Sea  $v(t, t')$  la función de covarianza muestral de los datos funcionales observados dada por

$$v(t, t') = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)x_i(t'), \quad (1.19)$$

donde  $x_i(t)$  representa el dato funcional temporal observado en el tiempo  $t$  para la  $i$ -ésima réplica, con  $i = 1, \dots, N$ .

Cada una de las funciones buscadas,  $\phi_k$ , verifica (ver Ramsay y Silverman [74]) la ecuación

$$\int v(t, t')\phi(t)dt = \lambda\phi(t'), \quad (1.20)$$

donde  $\lambda$  es un autovalor definido a partir de la ecuación integral (1.20), dada en términos de la transformada integral  $V$  de la función  $\phi$ . En realidad,  $V$  coincide con el operador de covarianza dado por

$$V\phi(\cdot) = \int v(\cdot, t)\phi(t)dt. \quad (1.21)$$

Por tanto, a partir de (1.20) y (1.21), se puede formular la ecuación

$$V\phi = \lambda\phi, \quad (1.22)$$

donde, de acuerdo al contexto presentado,  $\phi$  es una autofunción. La definición puntual de las autofunciones a partir de la ecuación funcional (1.22), se obtiene en el caso de operadores  $V$  traza. En otro caso, se obtiene una definición débil de dichas autofunciones.

Adviértase, que salvo notación, la ecuación (1.22) del **FPCA** es análoga a la ecuación (1.7), presentada en la sección 1.1.1, del análisis convencional de Componentes Principales.

En Ramsay y Silverman [74] se presentan distintos métodos para resolver el problema planteado en (1.22). En todos los casos se convierte, de forma aproximada, el problema de análisis funcional continuo en otro equivalente de análisis matricial de autovalores y autofunciones.



# CAPÍTULO 2

---

## Modelos en tiempo discreto y espacio continuo

---

En este capítulo se introducen los elementos básicos que intervienen en la formulación de modelos estadísticos espacio-temporales en el contexto geoes-tadístico y en el contexto funcional, desde la perspectiva de los modelos de series temporales. Más concretamente, en la sección 2.1, se introducen modelos estadísticos para datos espacio-temporales con dinámica autorregresiva de orden uno afectados por ruido coloreado aditivo espacio-temporal. Se distinguen dos casos que corresponden a la representación de la interacción espacio-temporal en términos de una función o de un núcleo. En la sección 2.2, se describen los modelos autorregresivos de series temporales funcionales, donde la interacción espacio-temporal se representa en términos de los operadores de autocorrelación.

## 2.1. Formulación geoestadística

En el ámbito geoestadístico, en el contexto espacio-temporal, un modelo usual en la representación de la información muestral es el modelo aditivo con efectos aleatorios dado por

$$Z(s, t) = Y(s, t) + \epsilon(s, t), \quad (2.1)$$

donde  $s \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ , siendo  $D$  el dominio de localizaciones considerado,  $t \in \{t_1, \dots, t_T\}$  el conjunto de instantes donde se dispone de información muestral espacial, y denotando por  $\epsilon$  el ruido aditivo asociado a la observación del proceso espacio-temporal de interés  $Y$ , que se supone incorrelado con dicho proceso. En esta sección se describe el planteamiento seguido en Wikle y Cressie [104] para la definición del proceso de interés  $Y$ . Más concretamente, se supone que dicho proceso satisface la ecuación de estados

$$Y(s, t) = \int_D w_s(u)Y(u, t-1)du + \vartheta(s, t), \quad (2.2)$$

donde se denota por  $\vartheta$  el proceso innovación y por  $w_s(u)$ ,  $s \in D$ , las funciones que modelizan la interacción entre el proceso de interés  $Y$  en la localización  $u$  en el tiempo  $t-1$  y el proceso de interés  $Y$  en la localización  $s$  y tiempo  $t$ , para cada  $s \in D$ . Se requiere que  $w_s(u)$ ,  $s \in D$ , satisfaga

$$\int_D w_s(u)du = \alpha_s, \quad \forall s \in D, \quad (2.3)$$

donde  $\alpha_s$ ,  $s \in D$ , son parámetros desconocidos verificando  $|\alpha_s| < 1$  para asegurar la estacionariedad en el tiempo. El modelo (2.2) es una extensión del modelo dado por Huang y Cressie [16], quienes asumen que  $w_s(u)$ ,  $s \in D$ , son funciones delta de Dirac.

Para la implementación de técnicas de filtrado y extrapolación a partir del modelo de observación (2.1), se requiere resolver el problema de dimensionalidad asociado a dicho modelo. En Wikle y Cressie [104] se opta por la proyección de dicho modelo en una base ortonormal. Específicamente, bajo las condiciones necesarias (ver sección 1.1) para que  $Y$  admita un desarrollo ortogonal en términos de una base ortonormal de  $L^2(D)$  en cada corte temporal, se tiene entonces la siguiente descomposición de  $Y$

$$Y(s, t) = Y_M(s, t) + \xi(s, t), \quad (2.4)$$

donde  $\xi(s, t)$  representa la variación espacial a pequeña escala que no tiene estructura temporal dinámica (parte residual del desarrollo espacial de  $Y$ ) e  $Y_M$  representa el proceso definido en términos de las primeras  $M$  funciones de la base ortonormal considerada. Es decir,

$$Y_M(s, t) = \sum_{k=1}^M \phi_k(s) a_k(t), \quad (2.5)$$

para  $s \in D$ ,  $t \in \{1, 2, \dots\}$  y donde  $a_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, M$ , son variables aleatorias, definidas mediante la proyección en media cuadrática del proceso de interés,  $Y$ , en la base ortonormal  $\{\phi_i(\cdot), i = 1, 2, \dots\}$  considerada.

Asimismo, el proceso  $Y_M$  viene definido mediante una ecuación similar a la ecuación de estados (2.2)

$$Y_M(s, t) = \int_D w_s(u) Y_M(u, t-1) du + \nu(s, t), \quad (2.6)$$

donde  $\nu$  representa la proyección espacial de  $\vartheta$  en las  $M$  funciones de la base ortonormal considerada.

Bajo ciertas condiciones, la función  $w_s$  (ver ecuación (2.2)), que describe la interacción espacio-temporal, admite una representación en términos de las funciones básicas como sigue:

$$w_s(u) = \sum_{l=1}^{+\infty} b_l(s) \phi_l(u), \quad (2.7)$$

para  $s, u \in D$  y donde  $\{b_l(s) : l = 1, 2, \dots\}$  son funciones de la localización  $s$ .

Adviértase que si  $w_s(\cdot) \in \overline{\text{sp}}\{\phi_l : l = 1, 2, \dots\}$ , suponiendo convergencia de la serie, y usando la ortonormalidad de las funciones básicas, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_D w_s(u) \phi_l(u) du &= \int_D \left( \sum_{m=1}^{+\infty} b_m(s) \phi_m(u) \right) \phi_l(u) du \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} b_m(s) \left( \int_D \phi_m(u) \phi_l(u) du \right) \\ &= b_l(s). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.5) y (2.7) en (2.6), y haciendo uso de la propiedad de ortonormalidad, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Y_M(s, t) &= \int_D \left( \sum_{l=1}^{+\infty} b_l(s) \phi_l(u) \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^M \phi_k a_k(t-1) \right) du + \nu(s, t) \\
 &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^M b_l(s) a_k(t-1) \cdot \left( \int_D \phi_l(u) \phi_k(u) du \right) + \nu(s, t) \\
 &= \sum_{k=1}^M b_k(s) a_k(t-1) + \nu(s, t).
 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$Y_M(s, t) = b(s)^T a(t-1) + \nu(s, t), \quad (2.9)$$

donde  $b(s) = (b_1(s), \dots, b_M(s))_{M \times 1}^T$  y  $a(t-1) = (a_1(t-1), \dots, a_M(t-1))_{M \times 1}^T$ .

Con la notación anterior, (2.5) puede escribirse como

$$Y_M(s, t) = \Phi(s)^T a(t), \quad (2.10)$$

donde  $\Phi(s) = (\phi_1(s), \dots, \phi_M(s))_{M \times 1}^T$ ; y sustituyendo (2.10) en (2.9), se obtiene

$$\Phi(s)^T a(t) = b(s)^T a(t-1) + \nu(s, t). \quad (2.11)$$

Además, introduciendo (2.10) en (2.4)

$$Y(s, t) = \Phi(s)^T a(t) + \xi(s, t), \quad (2.12)$$

y entonces, el modelo de observación (2.1) puede escribirse también como

$$Z(s, t) = \Phi(s)^T a(t) + \xi(s, t) + \epsilon(s, t). \quad (2.13)$$

Se consideran las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$E[\epsilon(s, t) \cdot Y(r, \tau)] = 0, \quad \forall s, r, t, \tau, \quad (2.14)$$

$$E[\epsilon(s, t) \cdot \epsilon(r, \tau)] = 0, \quad \forall s, r, t \neq \tau, \quad (2.15)$$

$$E[\xi(s, t) \cdot \xi(r, \tau)] = 0, \quad \forall s, r, t \neq \tau, \quad (2.16)$$

$$E[\nu(s, t) \cdot \nu(r, \tau)] = 0, \quad \forall s, r, t \neq \tau, \quad (2.17)$$

$$E[\epsilon(s, t) \cdot \nu(r, \tau)] = 0, \quad \forall s, r, t, \tau, \quad (2.18)$$

$$E[\epsilon(s, t) \cdot \xi(r, \tau)] = 0, \quad \forall s, r, t, \tau, \quad (2.19)$$

$$E[\nu(s, t) \cdot \xi(r, \tau)] = 0, \quad \forall s, r, t, \tau, \quad (2.20)$$

$$E[\xi(s, t) \cdot Y_M(r, t)] = 0, \quad \forall s, r, t, \quad (2.21)$$

$$E[\nu(s, t) \cdot Y_M(r, t-1)] = 0, \quad \forall s, r, t. \quad (2.22)$$

Como consecuencia de (2.14) y (2.21), y teniendo en cuenta (2.10) y (2.12), se obtiene respectivamente:

$$\begin{aligned} E[a_i(t)\xi(s, t)] &= 0, & \forall s, t, r, & \quad i = 1, \dots, M, \\ E[a_i(t)\epsilon(s, t)] &= 0, & \forall s, t, r, & \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Si la información muestral disponible viene dada por  $N \times T$  datos en las localizaciones  $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  y en los tiempos  $\{1, 2, \dots, T\}$ , se puede escribir (2.11) como un sistema de  $N$  ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Phi(s_1)^T a(t) &= b(s_1)^T a(t-1) + \nu(s_1, t), \\ \Phi(s_2)^T a(t) &= b(s_2)^T a(t-1) + \nu(s_2, t), \\ &\vdots \\ \Phi(s_N)^T a(t) &= b(s_N)^T a(t-1) + \nu(s_N, t), \end{aligned}$$

esto es, se obtiene una ecuación para cada localización,  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Cuya expresión matricial viene dada por

$$\Phi a(t) = Ba(t-1) + \nu(t), \quad (2.23)$$

donde  $\nu(t) = (\nu(s_1, t), \dots, \nu(s_N, t))_{N \times 1}^T$ ,  $\Phi = (\Phi(s_1), \dots, \Phi(s_N))_{N \times M}^T$  y  $B = (b(s_1), \dots, b(s_N))_{N \times M}^T$ .

Asumiendo que  $N \geq M$  y que  $(\Phi^T \Phi)^{-1}$  es no singular, multiplicando por la izquierda por  $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$  en (2.23), se obtiene

$$a(t) = Ha(t-1) + J\nu(t), \quad (2.24)$$

donde  $J_{N \times M} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$  y  $H_{M \times M} = J \cdot B$ .

Una extensión de la formulación (2.2) se obtiene cuando la familia de funciones de interacción espacio-temporal  $w_s(u)$ ,  $s \in D$ , admiten una representación funcional en términos de un núcleo, introduciéndose entonces la ecuación de estados (2.2) como una ecuación integral (ver, por ejemplo, Wikle, [100] y [101], donde se considera la implementación espectral de tales modelos, que permite introducir familias paramétricas en términos de un conjunto reducido de parámetros que se pueden adecuar a complicadas dinámicas). El proceso de interés,  $Y$ , se define entonces como sigue

$$Y(s, t) = \int_D k(s, r)g(Y(r, t-1))dr, \quad (2.25)$$

donde  $Y(s, t)$  representa al proceso espacio-temporal en la localización espacial  $s$  en el tiempo  $t$ ,  $g(\cdot)$  es alguna función, posiblemente no lineal, del proceso de interés,  $Y$ , y  $k(s, r)$  recibe el nombre de núcleo de redistribución, que describe como se relaciona el proceso,  $Y$ , en un tiempo previo en la localización  $r$ , con el mismo proceso en la localización  $s$ , en el tiempo siguiente. La función  $g(Y(r, t))$  describe el crecimiento del proceso en alguna localización,  $r$ , entre los tiempos  $t$  y  $t + 1$ . En definitiva, la ecuación integral en diferencias finitas (2.25) describe como se distribuye el crecimiento en el espacio.

A menudo, se considera que  $g(\cdot)$  es lineal y que el núcleo de redistribución no cambia con la localización espacial, si bien, depende de la diferencia de localizaciones. En este caso, se puede reescribir (2.25) como la convolución

$$Y(s, t) = g'(0) \int_D k(s - r)Y(r, t - 1)dr, \quad (2.26)$$

donde  $g'(\cdot)$  denota la primera derivada de  $g(\cdot)$ .

Diferentes elecciones de núcleos conducen a diferentes comportamientos dinámicos, tales como velocidad o dispersión. Al mismo tiempo, comportamientos dinámicos complicados o difusos pueden ser modelados alterando el núcleo. El interés fundamental de estos modelos es representar la propagación de medidas a través del espacio y del tiempo. Asimismo se puede considerar que  $g$  es la identidad y parametrizar el núcleo de interacción espacio-temporal haciéndolo pertenecer a una familia de modelos

$$Y(s, t) = \int_D k(s, r, \theta_s)Y(r, t - 1)dr + \nu(s, t), \quad (2.27)$$

donde  $\nu$  es un proceso espacial de ruido. Esta formulación coincide con la introducida en Brown *et al.* [12]. En dicho trabajo se formulan modelos estadísticos espacio-temporales, en términos de núcleos de interacción espacio-temporal homogéneos, generados a partir de las leyes infinitamente divisibles y que, bajo ciertas condiciones sobre el proceso de innovación, aproximan a modelos de evolución definidos en tiempo y espacio continuos.

La ecuación de estados (2.27) se puede reescribir en términos de un operador de interacción espacio-temporal  $K$  con núcleo  $k$ . Es decir,

$$Y(s, t) = K[Y](r, t - 1) + \nu(s, t). \quad (2.28)$$

Esta formulación conecta con la formulación funcional descrita en la próxima sección 2.2 y ha sido introducida, por ejemplo, en los trabajos de Ruiz-Medina

*et al.* [77] y Ruiz-Medina y Angulo [77], bajo el enfoque de la teoría de campos aleatorios generalizados. Bajo dicho enfoque,  $K$  se define como un operador lineal satisfaciendo ciertas condiciones.

## 2.2. Formulación en términos de espacios de de Banach

Es habitual considerar las observaciones de los procesos como un conjunto de datos a los que aplicar las técnicas estadísticas clásicas, si bien, un enfoque más rico, es aquel que introduce la información muestral en términos de la observación de trayectorias del proceso, que pueden ser interpretadas como realizaciones de variables aleatorias evaluadas en espacios de funciones con una determinada estructura y propiedades. En esta sección, se introduce este segundo enfoque desde la perspectiva de espacios de Banach. En particular, en los capítulos 4 y 5 se considerará esta perspectiva en el caso particular de espacios de Hilbert, es decir, de procesos Hilbert-valorados.

### 2.2.1. Procesos autorregresivos Banach-valorados

Las variables aleatorias que constituyen la serie funcional se definen sobre un espacio probabilístico base  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  y toman valores en un espacio de funciones  $B$  con estructura de Banach. A continuación se describen los elementos que intervienen en la formulación de procesos autorregresivos Banach-valorados de orden 1 y de orden  $p$ .

#### El modelo ARB(1)

Se considera que el modelo de observación (2.1) se define en términos de funciones espacio-temporales. Más concretamente, se considera que el ruido de observación  $\epsilon$  es un proceso Banach-valorado, cuyas componentes son incorreladas, satisfaciendo

$$E [ \|\epsilon_t\|_B^2 ] = \sigma_\epsilon^2 < \infty.$$

El proceso de interés,  $Y$ , satisface asimismo la siguiente ecuación funcional

$$Y_t(s) - \mu = \mathcal{A}(Y_{t-1}(s) - \mu) + \nu_t(s), \quad s \in D, \quad (2.29)$$

donde  $\mu \in H$  es la media del proceso de interés,  $D$  es el dominio considerado,  $\mathcal{A}$  es un operador sobre  $B$ , referido, en este contexto, como operador de autocorrelación, y  $\nu_t \in B$ ,  $t \geq 0$ , es un proceso Banach-valuado, incorrelado con  $Y_t \in B$ ,  $t \geq 0$ , verificando

a)  $E[\|\nu_t\|_B^2] = \sigma_\nu^2 < \infty$ .

b)  $\nu_t$  es una sucesión de variables aleatorias incorreladas.

Se supone que  $Y$  es estacionario en el tiempo. Por tanto,

- $E[Y_t] = \mu(\cdot) \equiv \mu$ , para cualquier  $t \geq 0$ , es decir, la superficie que define la media es constante en el tiempo.
- $R_{Y_t, Y_{t+h}} = R_{Y_0, Y_h} = R_Y = E[Y_0 \otimes Y_h]$ , para cualquier  $h$  positivo, es decir, el operador que define la estructura de segundo orden de  $Y$  no depende del tiempo.

En el desarrollo de futuros capítulos, se considerará que  $Y$  está centrado.

Un estimador usual del operador covarianza viene dado por

$$\widehat{R}_Y^n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \langle Y_i, y \rangle, \quad y \in B, \quad n > 1. \quad (2.30)$$

Se verifica que este estimador es insesgado, esto es,  $E[\widehat{R}_Y^n] = R_Y$ . Además, si  $E[\|Y_0\|^4]$  es finita, entonces

$$\|\widehat{R}_Y^n - R_Y\|_{\mathcal{N}} \rightarrow 0, \quad (2.31)$$

donde la convergencia es casi segura y  $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$  denota a la norma nuclear, definida como

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{N}} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|,$$

siendo  $\{\lambda_j, j \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de números reales que tiende a cero.

### El modelo ARB(p)

La estructura markoviana implícita en los modelos ARB(1) conlleva algunos límites a la hora de su adaptación a los modelos reales. Por este motivo, se introduce una clase de modelos más amplia y flexible, los modelos ARB(p).

Dado un espacio separable de Banach,  $B$ , se dice que el proceso de interés,  $Y$ , es un proceso autorregresivo Banach-valuado de orden  $p$ , ARB( $p$ ), si satisface la siguiente ecuación de estados

$$Y_t(s) = \mathcal{A}_1 Y_{t-1}(s) + \cdots + \mathcal{A}_p Y_{t-p}(s) + \nu_t(s), \quad s \in D, \quad (2.32)$$

donde  $\nu_t$  es un proceso Banach-valuado satisfaciendo, como antes,

a)  $E[\|\nu_t\|_B^2] = \sigma_\nu^2 < \infty$ .

b)  $\nu_t$  es una sucesión de variables aleatorias incorreladas.

Los operadores  $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p)$  se definen sobre el espacio de Banach  $\bigotimes_{j=1}^p B$  verificando pertenecer a la bola unidad del espacio  $\mathcal{L}\left(\bigotimes_{j=1}^p B\right)$  de operadores acotados sobre el autoproducto tensorial de  $B$  de orden  $p$ .

Considerando

$$\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \cdots & \mathcal{A}_{p-1} & \mathcal{A}_p \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_t = \begin{pmatrix} \nu_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $I$  denota el operador identidad, la ecuación (2.32) se puede reescribir como

$$\mathbf{Y}_t(s) = \mathcal{A}\mathbf{Y}_{t-1}(s) + \boldsymbol{\nu}_t(s), \quad s \in D. \quad (2.33)$$

Bajo la condición  $\|(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p)\|_{\mathcal{L}(\bigotimes_{j=1}^p B)} < 1$ , la ecuación (2.33) admite una solución estacionaria.



# CAPÍTULO 3

---

## Técnicas de filtrado

---

El filtrado de Kalman, introducido por Rudolf Kalman [54] en 1960, supuso un gran avance con respecto a las técnicas de filtrado existentes. Se trata de una técnica de filtrado lineal, formada por un conjunto de ecuaciones recursivas, enfocada a realizar una estimación del proceso de interés eliminando la perturbación que le afecta. Para controlar el error que se comete en dicha estimación, se exige que la varianza del error cuadrático sea mínima. En este capítulo se describe brevemente la implementación del filtrado de Kalman a partir de datos espacio-temporales. Asimismo, se incluyen las formulaciones *Unscented Kalman filter* (**UKF**) y *Extended Kalman filter* (**EKF**) para el filtrado de sistemas no lineales.

### 3.1. Filtrado de Kalman espacio-temporal

En esta sección se describe la implementación introducida en Wikle y Cressie [104] del filtrado de Kalman en el espacio y tiempo para la estimación

de valores de procesos espacio-temporales. Dicha implementación se basa en la aproximación ortogonal descrita en la sección 1.1.1 para los modelos espacio-temporales introducidos en la sección 2.1.

### 3.1.1. Proyección de las ecuaciones de Kalman

Dada la aproximación ortogonal (2.24) de la ecuación de estados que define los modelos geoestadísticos introducidos en la sección 2.1, las ecuaciones de filtrado de Kalman se plantearán en términos de los coeficientes aleatorios que definen el desarrollo ortogonal del proceso de interés  $Y$ . Más concretamente, puesto que  $Y_M(s, t) = \Phi(s)^T a(t)$ , se formula el filtrado de Kalman para la estimación del vector de coeficientes aleatorios,  $a(t)$ , dada la información muestral espacial disponible hasta ese instante  $t$ . Equivalentemente, se pretende calcular

$$\hat{a}_{t|t} = E[a(t)|Y(t), \dots, Y(1)], \quad (3.1)$$

para  $t \geq 1$ . El error de predicción viene dado entonces por

$$P_{t|t} = E[(a(t) - \hat{a}_{t|t}) \cdot (a(t) - \hat{a}_{t|t})^T]. \quad (3.2)$$

Siguiendo la recursión de Kalman, las cantidades anteriores se obtienen, para  $t \geq 1$ , como sigue

$$\hat{a}_{t|t} = \hat{a}_{t|t-1} + K(t)[Y(t) - \Phi \hat{a}_{t|t-1}], \quad (3.3)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K(t)\Phi P_{t|t-1}, \quad (3.4)$$

donde

$$K(t) = P_{t|t-1}\Phi^T[R + V + \Phi P_{t|t-1}\Phi^T]^{-1}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{t|t-1} &= E[a(t)|Y(t-1), \dots, Y(1)] \\ &= H\hat{a}_{t-1|t-1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} P_{t|t-1} &= \text{Var}(a(t)|Y(t-1), \dots, Y(1)) \\ &= HP_{t-1|t-1}H^T + JQJ^T, \end{aligned} \quad (3.7)$$

siendo  $Y(t) = (Y(s_1, t), \dots, Y(s_N, t))^T$ ,  $R = \text{Var}(\epsilon(t))$ ,  $V = \text{Var}(\xi(t))$ ,  $\nu(t) = (\nu(s_1, t), \dots, \nu(s_N, t))^T$ ,  $Q = \text{Var}(\nu(t))$  y  $\epsilon(t) = (\epsilon(s_1, t), \dots, \epsilon(s_N, t))^T$ .

Los valores iniciales considerados son  $\hat{a}_{0|0} = 0$  y  $P_{0|0} = JC_0^{Y_M}J^T$ . En la práctica, la matriz  $C_0^{Y_M}$  debe estimarse a partir de los datos.

### 3.1.2. Estimación de los parámetros del modelo

El filtrado de Kalman formulado en la sección anterior proporciona predicciones óptimas asumiendo que se conocen las covarianzas  $R$ ,  $V$  y  $Q$ , así como la matriz de estados  $H$ , es decir,  $\Phi$  y  $B$ . Las funciones  $\Phi$  se pueden elegir de forma que sean completas y ortonormales, sin embargo, hay que estimar las restantes matrices. Para ello se usará el método de los momentos.

#### Estimación de las covarianzas del modelo: $R$ , $V$ y $Q$

Se comenzará con la estimación de la matriz  $R$ . En (2.15) se consideró que el error de medida es ruido blanco, así que se verifica que

$$E[\epsilon(s, t)\epsilon(r, t)] = \begin{cases} 0 & , s \neq r \\ \sigma_\epsilon^2 & , s = r \end{cases} .$$

Por tanto,  $R = \sigma_\epsilon^2 Id_{N \times N}$ , esto es,  $\sigma_\epsilon^2$  es el parámetro a estimar.

El variograma empírico obtenido por el método de los momentos viene dado por

$$2\hat{\gamma}(h, t) = \frac{1}{|N(h)|} \sum_{N(h)} [Y(s_i, t) - Y(s_j, t)]^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad (3.8)$$

donde  $N(h) = \{(s_i, s_j) : s_i - s_j = h; i, j = 1, \dots, N\}$  y  $|N(h)|$  es el número de pares distintos de  $N(h)$ .

La estimación de  $R$  se calcula a partir del comportamiento local del variograma estimado en cero. Más concretamente, si denotamos por  $\hat{\sigma}_\epsilon^2$  el límite en cero del variograma empírico, el estimador de  $R$  viene dado por

$$\hat{R} = \hat{\sigma}_\epsilon^2 Id_{N \times N}.$$

La estimación de  $V$  se calcula a partir de la descomposición espectral de  $C_0^Y = \text{Cov}[Y(t), Y(t)]$ , basada en  $\Phi$ . Más concretamente, puesto que  $C_0^{Y_M} = \Phi J C_0^Y J^T \Phi^T$ , la matriz de covarianza residual asociada al proceso  $\xi$  viene entonces dada por

$$V = C_0^Y - C_0^{Y_M}.$$

Se obtiene así la siguiente aproximación empírica de  $V$

$$\hat{V} = \hat{C}_0^Y - \hat{C}_0^{Y_M},$$

donde  $\hat{C}_0^{Y_M} = \Phi J \hat{C}_0^Y J^T \Phi^T$ , y siendo  $\hat{C}_0^Y$  la estimación de la matriz  $C_0^Y$  que se calculará a continuación.

Se necesita estimar  $V$  para cualquier localización, y  $\hat{V}$  solo da estimaciones de la covarianza del proceso  $\xi$  en localizaciones espaciales donde se disponen de datos. Se consideran familias paramétricas de funciones de covarianza espacialmente estacionarias e isotrópicas, esto es,

$$\text{Cov}[\xi(s, t), \xi(r, t)] = c_\xi(\|s - r\|, \theta),$$

donde  $\theta$  es un vector de parámetros del modelo, los cuales han sido obtenidos como pesos del ajuste por mínimos cuadrados de  $c_\xi(\|h\|, \theta)$  sobre su homólogo:

$$\hat{c}_\xi(h) \equiv \frac{1}{|N(h)|} \sum_{N(h)} \hat{\xi}(s_i) \hat{\xi}(s_j),$$

donde  $\hat{\xi}(s_i, s_j)$  es el elemento  $(i, j)$  de  $\hat{V}$ ,  $N(h) = \{(s_i, s_j) : \|s_i - s_j\| \in T(h)\}$ ,  $|N(h)|$  es el número de elementos distintos de  $N(h)$  y  $T(h)$  es una región de tolerancia alrededor de  $h$ .

De esta forma, la estimación final para  $\hat{V}$  viene dada por

$$\left( c_\xi(\|s_i - s_j\|, \hat{\theta}) \right)_{i,j=1,\dots,N}.$$

Finalmente, para la aproximación de  $Q$ , se estimará  $JQJ^T$  de acuerdo a las ecuación de estados derivada para la implementación del filtrado de Kalman. Específicamente, multiplicando por la izquierda por  $J_{M \times N} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$ , la ecuación

$$\nu(t) = \Phi a(t) - B a(t - 1),$$

se transforma en

$$\begin{aligned} J\nu(t) &= a(t) - J B a(t - 1) \\ &= a(t) - H a(t - 1). \end{aligned}$$

Tomando varianzas en la expresión anterior se obtiene

$$\text{Var}(J\nu(t)) = \text{Var}(a(t) - H a(t - 1)). \quad (3.9)$$

Adicionalmente, puesto que

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(J\nu(t)) &= J\text{Var}(\nu(t))J^T \\
 &= JQJ^T. \\
 \text{Var}(a(t) - Ha(t-1)) &= \text{Var}(a(t)) + \text{Var}(Ha(t-1)) \\
 &\quad - 2\text{Cov}[a(t), Ha(t-1)] \\
 &= E[a(t)a(t)^T] + H\text{Var}(a(t-1))H^T \\
 &\quad - \text{Cov}[a(t), Ha(t-1)] - \text{Cov}[Ha(t-1), a(t)] \\
 &= E[a(t)a(t)^T] + HE[a(t-1)a(t-1)^T]H^T \\
 &\quad - E[a(t)a(t-1)^T]H^T - HE[a(t-1)a(t)^T]. \\
 E[a(t)a(t)^T] &= JE[(Z(t) - \xi(t) - \epsilon(t))(Z(t) - \xi(t) - \epsilon(t))^T]J^T \\
 &= J(C_0^Z - V - R)J^T, \tag{3.10} \\
 E[a(t)a(t-1)^T] &= JE[(Z(t) - \xi(t) - \epsilon(t))(Z(t-1) \\
 &\quad - \xi(t-1) - \epsilon(t-1))^T]J^T \\
 &= JC_1^Z J^T, \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de las condiciones (2.14) a (2.22), de (2.13), así como de que  $C_0^Z = \text{Cov}[Z(t), Z(t)]$  y  $C_1^Z = \text{Cov}[Z(t), Z(t-1)]$ , se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
 JQJ^T &= J[C_0^Z - V - R]J^T - JC_1^Z J^T H^T \\
 &\quad - HJ(C_1^Z)^T J^T + HJ[C_0^Z - V - R]J^T H^T. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

La estimación de  $Q$  se deriva pues de la estimación obtenida de  $J\hat{Q}J^T$ , tras sustituir las estimaciones para  $C_0^Z$ ,  $C_1^Z$ ,  $V$ ,  $R$  y  $H$  en (3.12). A continuación se obtienen las estimaciones de  $C_0^Z$ ,  $C_1^Z$  y  $H$ .

## Estimación de la matriz B

Se parte de la ecuación

$$Y(s, t) = b(s)^T a(t-1) + \nu(s, t) + \xi(s, t),$$

derivada de la proyección del proceso de interés y del núcleo de interacción espacio-temporal en una base ortonormal de funciones apropiada, según se indica en la secciones 1.1 y 2.1 al sustituir (2.11) en (2.4). Denotando por  $N$  el número de localizaciones observables,  $s_1, \dots, s_N$ , se obtiene la expresión matricial

$$Y(t) = Ba(t-1) + \nu(t) + \xi(t), \tag{3.13}$$

donde, siguiendo la notación de capítulos anteriores,  $\nu(t)$  y  $\xi(t)$  denotan los vectores cuyas componentes son los valores de los procesos  $\nu$  y  $\xi$ , respectivamente, en las localizaciones observables y en el instante  $t$ , con  $t \geq 1$ .

Multiplicando por la derecha por  $Y(t-1)^T$ , y tomando esperanzas, la ecuación (3.13) se transforma en

$$\begin{aligned} E[Y(t)Y(t-1)^T] &= BE[a(t-1)Y(t-1)^T] \\ &= BE[a(t-1)(\Phi a(t-1) + \nu(t-1))^T] \\ &= BJ[C_0^Z - V - R]J^T\Phi^T, \end{aligned}$$

donde se ha usado (2.12), (3.10) y las condiciones de ortogonalidad (2.21) y (2.22).

Denotando por  $C_1^Y = E[Y(t)Y(t-1)^T]$ , y puesto que como consecuencia de (2.14),  $C_1^Z = C_1^Y$ , se obtiene que

$$C_1^Z = BJ[C_0^Z - V - R]J^T\Phi^T.$$

Multiplicando por la derecha por  $J^T$  se tiene entonces

$$\begin{aligned} C_1^Z J^T &= BJ[C_0^Z - V - R]J^T\Phi^T J^T \\ &= BJ[C_0^Z - V - R]J^T\Phi^T\Phi(\Phi^T\Phi)^{-1} \\ &= BJ[C_0^Z - V - R]J^T. \end{aligned}$$

Puesto que  $J[C_0^Z - V - R]J^T$  es no singular y existe su inversa, la matriz  $B$  puede calcularse a partir de la ecuación

$$B = C_1^Z J^T [J[C_0^Z - V - R]J^T]^{-1}. \quad (3.14)$$

Luego, basándose en las estimaciones  $\hat{C}_1^Z$ ,  $\hat{C}_0^Z$ ,  $\hat{V}$  y  $\hat{R}$ , se deriva la expresión

$$\hat{B} = \hat{C}_1^Z J^T [J[\hat{C}_0^Z - \hat{V} - \hat{R}]J^T]^{-1}, \quad (3.15)$$

y por tanto

$$\hat{H} = J\hat{B}.$$

### Estimación de $C_0^Z$ , $C_1^Z$ y $C_0^Y$

Las estimaciones de las matrices  $C_0^Z$ ,  $C_1^Z$  y  $C_0^Y$ , mediante el método de los momentos, vienen dadas por

- $\hat{C}_0^Z = (\hat{c}_0(s_i, s_j))_{i,j=1,\dots,N}$  donde

$$\hat{c}_0(s_i, s_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Z(s_i, t) - \hat{\mu}_Z) (Z(s_j, t) - \hat{\mu}_Z)^T,$$

y

$$\hat{\mu}_Z = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T Z(s_i, t).$$

- $\hat{C}_1^Z = (\hat{c}_1(s_i, s_j))_{i,j=1,\dots,N}$  donde

$$\hat{c}_1(s_i, s_j) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (Z(s_i, t-1) - \hat{\mu}_Z) (Z(s_j, t) - \hat{\mu}_Z)^T.$$

- $\hat{C}_0^Y = \hat{C}_0^Z - \hat{R}$ .

## 3.2. Filtrado no lineal espacio-temporal

En esta sección se resumen brevemente los elementos que intervienen en la formulación de versiones extendidas del filtrado de Kalman espacio-temporal para la estimación de sistemas no lineales (para más información ver Cressie, Irwin y Johannesson [15]).

En el enfoque no lineal se consideran el siguiente modelo de observación y ecuación de estados

$$\begin{aligned} Z(s, t) &= HX(s, t) + \epsilon(s, t), \\ X(s, t) &= g(s, t; X(t-1)) + \nu(s, t), \end{aligned}$$

donde  $H$  es la matriz de observación,  $X$  representa al proceso de interés, descrito normalmente por un conjunto de ecuaciones diferenciales,  $Z$  representa el proceso observado, es decir, un conjunto de datos medidos en un dominio espacio-temporal y,  $\epsilon$  y  $\nu$ , son errores aleatorios asociados al modelo de observación y a la ecuación de estados, respectivamente.

El objetivo es estimar la función no lineal

$$g(s, t; X(t)) = \int \delta(r_{s,w}) f(w|s, X(t)) dw, \quad (3.16)$$

donde  $r_{s,w}$  es la distancia entre las localizaciones  $s$  y  $w$ , y  $f(w|s, X(t))$  la función de densidad condicional de probabilidad del valor del proceso  $X$  en la localización de interés  $w$  condicionado al estado del proceso  $X$  en el tiempo  $t$  y la localización  $s$ . Además, se denotará por  $Z_i(t)$  la  $i$ -ésima observación que informa sobre la localización del fenómeno de interés,  $X$ , en el tiempo  $t$ .

Considerando observaciones igualmente espaciadas, se denota por  $Z_{1:t} = (Z(1), Z(2), \dots, Z(t))$ , al conjunto de todas las observaciones que se poseen sobre tal fenómeno hasta el tiempo  $t$ . Entonces, condicionando a tales observaciones, una posible estimación de la función (3.16) es:

$$\begin{aligned}\hat{g}(s, t; Z_{1:t}) &= E[g(s, t; X(t)) | Z_{1:t}] \\ &= \int g(s, t; X(t)) p(X(t) | Z_{1:t}) dX(t),\end{aligned}\quad (3.17)$$

donde  $p(X(t) | Z_{1:t})$  es la densidad de  $X$  en el tiempo  $t$ , condicionada a los datos pasados y actuales. La estimación (3.17) minimiza el riesgo de Bayes basado en la función de pérdida dada por el error cuadrático medio.

La estimación del estado del proceso,  $X$ , en el tiempo  $t$ , viene dada por

$$\hat{X}(t) = E[X(t) | Z_{1:t}],\quad (3.18)$$

de forma que una estimación alternativa de la función no lineal a estimar puede obtenerse sustituyendo (3.18) en (3.16), con lo cual

$$\tilde{g}(s, t; Z_{1:t}) = g(s, t; \hat{X}(t)).\quad (3.19)$$

Adviértase que el estimador  $\tilde{g}$  es diferente del estimador  $\hat{g}$ . Mientras que (3.17) es un estimador insesgado en el sentido  $E[\hat{g}] = E[g]$ , el estimador dado en (3.19) es generalmente sesgado.

Aunque (3.17) tiene buenas propiedades, como la ya indicada de optimalidad bajo función pérdida dada por el error cuadrático medio, calcular tal estimador normalmente es complicado. El principal problema consiste en la evaluación de la densidad condicional del proceso,  $X$ , dados todos los datos espaciales hasta el tiempo  $t$ ,  $p(\cdot | Z_{1:t})$ .

Existen distintos métodos para el análisis de modelos no lineales, siendo el **EKF**, quizás, el más usado. Dicho método consiste en la linealización del sistema y la posterior aplicación del filtrado de Kalman al sistema linealizado. Desafortunadamente, el **EKF** no proporciona aproximaciones correctas

para las medias, varianzas y covarianzas del estado desconocido  $X(t)$ , ya que la estimación no es óptima puesto que las variables son generalmente no gaussianas, y por consiguiente, la estimación de los dos primeros momentos no proporciona una densidad de probabilidad.

Los enormes esfuerzos computacionales requeridos son otra desventaja para el **EKF**, y numerosos esquemas del **EKF** han sido desarrollados para su adaptación a problemas de elevada dimensión. Entre los esquemas propuestos por Cohn y Todling [17], destacan dos, considerados igual de eficientes. El primero basado en la descomposición parcial, en valores singulares, de la covarianza del error. Mientras que el segundo generaliza al anterior mediante la descomposición del modelo original en términos de los autovalores y autofunciones de la matriz de covarianzas.

Otra extensión interesante del filtrado de Kalman espacio-temporal es el **UKF**. Aquí, en lugar de linealizar el sistema, se escogen observaciones de  $X(t)$  supuesto que los valores espaciales de  $X(t - 1)$  son conocidos. Las realizaciones espaciales de  $X(t)$  se generan a partir de los autovectores de la matriz de varianzas condicionada de  $X(t)$  dado  $X(t - 1)$ . Entonces, se combinan los datos  $Z_{1:t}$  con tales realizaciones generadas para dar aproximaciones de la media y varianza de  $X(t)$ .

Este resultado tiene una serie de ventajas sobre el **EKF**. Por ejemplo, la distribución del proceso subyacente,  $X$ , no se aproxima mediante la función no lineal que describe la evolución de  $X(t)$  a partir de  $X(t - 1)$ , como en el **EKF**, lo cual permite al **UKF** incorporar información sobre la asimetría y curtosis de la distribución, mejorando la precisión. También se pueden calcular las medias y varianzas de  $X(t)$  usando operaciones matriciales y vectoriales estándar, sin necesidad de usar el jacobiano, al contrario que en el **EKF**. Todo esto sugiere que el **UKF** es más rentable computacionalmente que el **EKF**.



---

## PARTE II

# Series autorregresivas Hilbertianas

---



# CAPÍTULO 4

---

## Modelos ARH(1): Diagonalización y Filtrado de Kalman

---

Como se puso de manifiesto en el capítulo anterior, el análisis estadístico de datos espacio-temporales requiere transformaciones ortogonales que permitan reducir la elevada dimensión de los problemas que se plantean en este análisis (ver Ruiz-Medina y Angulo [78], Wikle y Cressie [104], Wikle [101] y [102]). Trabajaremos en un contexto de espacio de estados. Más concretamente, nos centraremos en el análisis de secuencias de datos funcionales espaciales desde la perspectiva proporcionada por los modelos de series autorregresivas hilbertianas. Por tanto, se investigarán transformaciones espectrales que diagonalicen la ecuación de estados funcional que define estos modelos. En este capítulo se estudia el caso de modelos autorregresivos hilbertianos de orden uno, ARH(1), y en el próximo capítulo se extenderán los resultados obtenidos al caso ARH( $p$ ),  $p > 1$ .

Específicamente, en este capítulo, se obtiene una versión escalar de la ecuación de estados funcional que define los modelos ARH(1), en términos de las autofunciones derechas e izquierdas que intervienen en la descomposición espectral del operador de autocorrelación. Dicha descomposición proporciona una representación integral del operador de autocorrelación en términos de su espectro puntual y las bases de Riesz duales definidas por los sistemas de autofunciones derechos e izquierdos. Se obtiene así una versión funcional del análisis *Principal Oscillation Pattern* (**POP**) usualmente aplicado en el contexto de series temporales ordinarias.

La proyección de la ecuación de estados funcional en el sistema derecho de autofunciones, junto con las proyecciones en dicho sistema de los momentos de segundo orden condicionados a los datos funcionales espaciales, permitirá la implementación del filtrado de Kalman para series funcionales autorregresivas. Se estudian asimismo diferentes familias de modelos funcionales de autocorrelación que admiten la descomposición espectral considerada. Los resultados de este capítulo se recogen en el trabajo de Ruiz-Medina, Salmerón y Angulo [80].

## 4.1. El modelo ARH(1)

Sea  $H$  un espacio separable de Hilbert de funciones definidas sobre un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , con el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ , y con la norma asociada  $\| \cdot \|_H$ . Se define  $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$  como un proceso estacionario Hilbert-valuado sobre el espacio probabilístico base  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  satisfaciendo

$$Y_t(s) = \mathcal{A}Y_{t-1}(s) + \nu_t(s), \quad s \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

donde  $\nu$  es un ruido blanco hilbertiano, en sentido fuerte, es decir, una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre  $H$  satisfaciendo

$$E[\|\nu_t\|_H^2] = \sigma_\nu^2 < \infty, \quad (4.2)$$

(ver, por ejemplo, Bosq [8], y de forma más amplia, Bosq [7]). Se supone asimismo que el proceso  $\nu$  es incorrelado con la condición inicial  $Y_0$ . El operador de autocorrelación  $\mathcal{A}$  es un operador acotado definido sobre un dominio denso en  $H$ . En el caso de que el operador,  $\mathcal{A}$ , admita una expresión integral, en términos de un núcleo homogéneo, estable frente a autoconvoluciones, el modelo (4.1) permite la aproximación de modelos de evolución definidos en

tiempo y espacio continuos, bajo ciertas condiciones sobre la distribución del proceso  $\nu$  (ver Brown et al. [12]).

## 4.2. Análisis POP de dimensión infinita

Sea  $\mathcal{A}$  el operador de autocorrelación del modelo (4.1), que representa la interacción espacio-temporal en el caso en el que  $D$  es un dominio espacial. Se supone que  $\mathcal{A}$  y su adjunto  $\mathcal{A}^*$  satisfacen las siguientes autoecuaciones

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\psi_i &= \lambda_i\psi_i, & i \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{A}^*\phi_i &= \lambda_i\phi_i, & i \in \mathbb{N},\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde  $\{\psi_i, i \in \mathbb{N}\}$  y  $\{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}$  son los respectivos sistemas de autofunciones izquierdos y derechos asociados al espectro puntual  $\{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}$  de los operadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^*$ . Es decir,  $\mathcal{A}$  es un operador espectral no simétrico (ver, por ejemplo, Dautray y Lions [21] y Dunford y Schwartz [27]). Se asume que los sistemas  $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$  y  $\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$  satisfacen la condición de biortogonalidad

$$\Phi^*\Psi = I,\tag{4.4}$$

siendo  $I$  el operador identidad, y  $\Phi$  y  $\Psi$  los operadores proyección asociados a los sistemas  $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$  y  $\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$ , respectivamente. Equivalentemente, los sistemas  $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$  y  $\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$  constituyen bases de Riesz duales.

El operador  $\mathcal{A}$  admite entonces la siguiente descomposición espectral

$$\mathcal{A} = \Psi\Lambda\Phi^*,\tag{4.5}$$

siendo  $\Lambda$  el operador diagonal definido mediante la sucesión de autovalores  $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ , que definen el espectro puntual de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^*$ . Equivalentemente,  $\mathcal{A}$  admite una representación integral dada por

$$\mathcal{A}Y_t(s) = \int_D k_{\mathcal{A}}(s, y)Y_{t-1}(y)dy,\tag{4.6}$$

en términos del núcleo

$$k_{\mathcal{A}}(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \psi_i(x) \phi_i(y).\tag{4.7}$$

**Nota 4.2.1** *Adviértase que la descomposición en valores singulares de  $\mathcal{A}$ , es decir, la descomposición espectral del operador autoadjunto  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ , no coincide con la descomposición anterior. Puesto que el sistema de autoecuaciones que define la descomposición en valores singulares de  $\mathcal{A}$  viene dado por*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^*\tilde{\psi}_i &= \lambda_i^2\tilde{\psi}_i, & i \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{A}\tilde{\phi}_i &= \lambda_i^2\tilde{\phi}_i, & i \in \mathbb{N},\end{aligned}\tag{4.8}$$

y  $\mathcal{A}$  satisfaciendo (4.4) y (4.5) no satisface (4.8).  $\square$

Teniendo en cuenta las identidades (4.4) y (4.5), la ecuación (4.1) proyectada en el sistema de autofunciones derecho se reescribe como

$$\Phi^*Y_t(s) = \Lambda\Phi^*Y_{t-1}(s) + \Phi^*\nu_t(s), \quad s \in D.$$

Denotando por  $a(t) = \Phi^*Y_t$  y  $b(t) = \Phi^*\nu_t$ , las proyecciones aleatorias, coeficientes **POP**, de los procesos  $Y$  y  $\nu$  en el instante  $t$ , respectivamente, se tiene

$$a(t) = \Lambda a(t-1) + b(t).\tag{4.9}$$

Es decir, se obtiene la siguiente diagonalización de (4.1)

$$a_j(t) = \lambda_j a_j(t-1) + b_j(t), \quad j \in \mathbb{N},\tag{4.10}$$

en términos de los coeficientes aleatorios funcionales

$$\begin{aligned}a_j(t) &\underset{\text{m.c.}}{=} \int_D Y_t(x)\phi_j(x)dx, & t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}, \\ b_j(t) &\underset{\text{m.c.}}{=} \int_D \nu_t(x)\phi_j(x)dx, & t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N},\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde m.c. denota la igualdad en media cuadrática, suponiendo que se dan las condiciones necesarias para la definición de las integrales anteriores en el sentido de la media-cuadrática. Las proyecciones aleatorias de los procesos involucrados en el sistema derecho de autofunciones también serán referidos como coeficientes **POP**.

**Nota 4.2.2** *En el caso de la descomposición en valores singulares del operador  $\mathcal{A}$ , la ecuación de estados (4.1) es diagonalizada como sigue*

$$a_j^L(t) = \sigma_j a_j^R(t-1) + b_j^L(t), \quad j \in \mathbb{N},\tag{4.12}$$

en términos de

$$\begin{aligned} a_j^L(t) & \underset{\text{m.c.}}{=} \int_D Y_t(x) \tilde{\psi}_j(x) dx, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}, \\ a_j^R(t) & \underset{\text{m.c.}}{=} \int_D Y_t(x) \tilde{\phi}_j(x) dx, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}, \\ b_j^L(t) & \underset{\text{m.c.}}{=} \int_D \nu_t(x) \tilde{\psi}_j(x) dx, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde las series temporales izquierdas  $a_j^L(\cdot)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , y derechas  $a_j^R(\cdot)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , asociadas al proceso de interés,  $Y$ , intervienen simultáneamente en dicha diagonalización. Sin embargo, ésta descomposición no es atractiva computacionalmente pues no proporciona un sistema de ecuaciones escalares similar al caso de series ordinarias autorregresivas de orden uno. Por tanto, la implementación de algoritmos de estimación y su interpretación no es inmediata a partir de dicha descomposición.  $\square$

### 4.3. Familias de operadores de autocorrelación

En la presente sección, se introducen algunas familias de operadores que admiten la descomposición espectral asociada a la versión funcional del análisis **POP** descrito en la sección anterior, es decir, que satisfacen las ecuaciones (4.3) y (4.4).

Dado un operador compacto autoadjunto  $\mathcal{C}$  sobre un espacio de funciones de Hilbert separable  $H$ . Entonces, a partir del teorema de Hilbert-Schmidt (ver, por ejemplo, Dautray y Lions [21]), dicho operador admite la siguiente descomposición espectral

$$\mathcal{C} = \Gamma \Lambda \Gamma^*,$$

equivalentemente, admite la siguiente representación integral

$$\mathcal{C}f(x) = \left\langle \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \gamma_i(x) \gamma_i(\cdot), f(\cdot) \right\rangle_H, \quad \forall f \in H,$$

donde  $\{\gamma_i, i \in \mathbb{N}\}$  es una base ortonormal de autofunciones de  $H$ .

Sea  $\mathcal{T}$  un operador lineal definido de  $H$  en un subespacio denso  $\tilde{H}$  de  $H$ , con  $[\mathcal{T}^{-1}]^*$  definido entonces desde  $H$  sobre  $\tilde{H}^*$ , que es el espacio dual de  $\tilde{H}$ . Esto es,  $\mathcal{T}$  genera una forma bilineal cerrada sobre  $H$  (ver, Da Prato y Zabczyk [20]). Dada una base ortonormal  $\{\gamma_i, i \in \mathbb{N}\}$ , las bases  $\{\mathcal{T}\gamma_i, i \in \mathbb{N}\}$  y  $\{[\mathcal{T}^{-1}]^*\gamma_i, i \in \mathbb{N}\}$  son bases de Riesz duales (ver, por ejemplo, Da Prato y Zabczyk [20]). Se tiene entonces que el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{T}\mathcal{C}\mathcal{T}^{-1} \\ &= \mathcal{T}\Gamma\Lambda([\mathcal{T}^{-1}]^*\Gamma)^* , \end{aligned}$$

satisface las ecuaciones (4.3) y (4.4).

### Casos especiales y ejemplos

Se considera a continuación el caso en el que  $H = L^2(D)$ , con  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , y  $\tilde{H} = \bar{H}^s(D)$  es el espacio de Sobolev de orden  $s \in \mathbb{R}_+$  constituido por funciones con soporte compacto contenido en  $\bar{D}$ . Por lo tanto, su espacio de Hilbert dual viene dado por  $\tilde{H}^* = H^{-s}(D)$ , el espacio de restricciones sobre  $D$  (ver Triebel [92]). En este contexto, el operador,  $\mathcal{A}$  se puede definir como un operador integro-diferencial de orden fraccionario.

En el caso de  $D$  un dominio compacto en  $\mathbb{R}^n$ , aplicando el teorema de Mercer, se tiene que el operador  $\mathcal{C}$  puede definirse como un operador integral en sentido débil o fuerte, dependiendo de la velocidad de convergencia a cero de los autovalores que constituyen su espectro puntual. Si el núcleo de dicho operador es semidefinido positivo,  $\mathcal{C}$  coincide con el operador de covarianza de un proceso espacial gaussiano sobre  $\mathbb{R}^n$ . El operador  $\mathcal{T}$  puede definirse, por ejemplo, como una función racional positiva de un operador diferencial elíptico y auto-adjunto de orden  $r$  entero (ver Ramm [73]) o fraccional (ver Angulo [3]) sobre  $L^2(D)$ . Esto es,

$$\mathcal{T} = \frac{P(\mathcal{L})}{Q(\mathcal{L})},$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios positivos de órdenes  $p$  y  $q$ , respectivamente, que satisfacen

$$\begin{aligned} 0 < c_1 \leq P(\lambda)(1 + |\lambda|^2)^{-p/2} \leq c_2, \\ 0 < c_3 \leq Q(\lambda)(1 + |\lambda|^2)^{-q/2} \leq c_4, \end{aligned} \tag{4.14}$$

para  $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^n$  y para ciertas constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ , con  $(q - p) \cdot r = s$ .

En particular, posibles ejemplos del operador  $\mathcal{C}$  podrían ser los siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 f(x) &= \int_D \prod_{i=1}^n \min\{x_i, y_i\} f(y) dy, \quad \forall f \in L^2(D), \\ \mathcal{C}_2 f(x) &= \int_D \exp\left\{-\frac{\|x - y\|^2}{k}\right\} f(y) dy, \quad k > 0, \quad \forall f \in L^2(D), \\ \mathcal{C}_3 f(x) &= \int_D \mathcal{F}^{-1}[\exp\{-|\lambda|^\beta\}] (\|x - y\|) f(y) dy, \quad \beta > 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y donde  $\mathcal{F}^{-1}$  representa la transformada inversa de Fourier, mientras que posibles elecciones para el operador  $\mathcal{T}$  son:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \frac{1}{[1 + (-\Delta)]^{s/2}}, \quad s \in \mathbb{R}_+, \\ \mathcal{T}_2 &= \frac{1}{(-\Delta)^{\alpha/2} [1 + (-\Delta)]^{\beta/2}}, \quad \alpha + \beta \leq n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \\ \mathcal{T}_3 &= g(\mathcal{T}_2), \quad \text{siendo } g \text{ una función continua,} \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $(-\Delta)$  representa el operador de Laplace negativo.

## 4.4. Aplicación al problema de filtrado y extrapolación

El truncamiento de las representaciones discretas deducidas en la sección 4.2 conduce a una formulación finito-dimensional de la ecuación de estados (4.1). Diferentes tipos de truncamiento conducen a diferentes aproximaciones del proceso  $Y$ , así como de la ecuación funcional que satisface dicho proceso. Por ejemplo, en el caso de operadores espectrales compactos, se usan filtros para eliminar los valores singulares menores con el objetivo de obtener estabilidad en el modelo (ver, por ejemplo, Vogel y Wade [96]). En definitiva, el procesamiento de información funcional mediante el modelo ARH(1) se ha proyectado en un espacio finito-dimensional, lo que facilita la implementación de algoritmos de filtrado y extrapolación tales como el filtrado de Kalman.

Denotando por  $M$  el número de coeficientes **POP** considerados después del truncamiento, se obtiene, a partir de las ecuaciones (4.10), la siguiente formulación vectorial truncada de (4.9)

$$a(t)_{M \times 1} = \Lambda_{M \times M} a(t-1)_{M \times 1} + b(t)_{M \times 1}, \quad (4.17)$$

donde, para cada tiempo  $t \geq 0$ ,

$$a(t)_{M \times 1} = (a_1(t), \dots, a_M(t))^T,$$

$$b(t)_{M \times 1} = (b_1(t), \dots, b_M(t))^T.$$

Por  $\Lambda_{M \times M}$  se denota ahora una matriz diagonal de orden  $M \times M$  cuyos elementos son los autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Para  $j = 1, \dots, M$ , y para cada tiempo  $t$ ,  $a_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , representa los coeficientes funcionales **POP** dados en la ecuación (4.11),  $b_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , también se define como en (4.11).

#### 4.4.1. Filtrado de Kalman

A continuación se describe la implementación del filtrado de Kalman en términos de la descomposición **POP** funcional introducida en la sección 4.2. Se distinguirán dos pasos en la formulación de dicho filtrado. En el primero, formulación *forward*, se computan de forma recursiva la esperanza y varianza de los coeficientes **POP**, para cada tiempo. Mientras que en el segundo, formulación *backward*, se corrigen dichos valores.

##### Formulación *forward* del filtrado de Kalman

Para cada tiempo  $t$ , básicamente se estiman los coeficientes **POP** que satisfacen la ecuación de estados (4.17). En cada paso, se considera el sistema de autofunciones izquierdos para construir la superficie suavizada, basada en la información muestral funcional del *pasado*. Se procede entonces a la mejora del suavizamiento de dicha superficie, incorporando la información muestral funcional del *presente* afectada por ruido espacial aditivo, controlada por el operador de ganancia.

El modelo de observación considerado viene dado por

$$Z_t = Y_t + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.18)$$

donde  $Y_t \in H$  y  $\epsilon_t \in H$ , para todo  $t = 1, \dots, T$ , siendo  $\epsilon$  ruido blanco hilbertiano, en sentido fuerte, incorrelado con el proceso de interés,  $Y$ .

A partir de (4.17), las ecuaciones de filtrado de Kalman para el cálculo del estimador óptimo  $\hat{a}_{t|t}$  de  $a(t)$ , se formulan recursivamente, para  $t \geq 1$ , como sigue

$$\hat{a}_{t|t} = \hat{a}_{t|t-1} + K_t [Y_t - \Psi \hat{a}_{t|t-1}], \quad (4.19)$$

donde

$$\hat{a}_{t|t-1} = \Lambda \hat{a}_{t-1|t-1},$$

siendo  $\hat{a}_{t|t} = E[a(t)|Y_t, \dots, Y_1]$  y  $\hat{a}_{t|t-1} = E[a(t)|Y_{t-1}, \dots, Y_1]$ . El operador  $\Psi$  asocia con cada secuencia de proyecciones, sistema de coeficientes funcionales **POP**, la correspondiente superficie definida mediante la combinación lineal de las imágenes de las funciones  $\psi_1, \dots, \psi_M$  sobre el dominio  $D$ , cuyos pesos son dichas proyecciones.

Para cada  $t \geq 0$ , el operador ganancia, es decir, el operador que define el efecto de suavizamiento sobre los datos funcionales espaciales, se define como

$$K_t = P_{t|t-1} \Psi^* [R + \Psi P_{t|t-1} \Psi^*]^{-1}, \quad (4.20)$$

donde  $R = \{\text{Var}(\epsilon_t(s)), s \in D\}$ , es la varianza del ruido de la observación, y

$$\begin{aligned} P_{t|t-1} &= \text{Var}[a(t)|Y_{t-1}, \dots, Y_1] \\ &= \Lambda P_{t-1|t-1} \Lambda^T + \Phi^* R_\nu \Phi. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior  $P_{t|t} = E[(a(t) - \hat{a}_{t|t})(a(t) - \hat{a}_{t|t})^T]$  y  $R_\nu$  es el operador de covarianza espacial del proceso funcional de innovación  $\nu$ .

Finalmente, el error cuadrático medio funcional viene dado por

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t \Psi P_{t|t-1}. \quad (4.21)$$

Los valores iniciales considerados en la implementación de esta versión del filtrado de Kalman son el vector aleatorio  $a(0) = (a_1(0), \dots, a_M(0))_{M \times 1}^T$ , constituido por la sucesión truncada de coeficientes **POP** de la condición aleatoria inicial  $Y_0 = Y(0, \cdot)$ , y la matriz de covarianzas asociada a dicho vector, es decir,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_{0|0} &= a(0), \\ P_{0|0} &= E[\Phi^* Y_0 (\Phi^* Y_0)^*] \\ &= \Phi^* R_{Y_0} \Phi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

**Nota 4.4.1** *El operador  $K_t$  actúa como un filtro que codifica la información, es decir, la entrada de dicho filtro viene dada en términos de las superficies que hacen referencia a las localizaciones espaciales (ecuaciones (4.19) y (4.21)). Sin embargo, la salida es resumida en términos de los coeficientes **POP**. Por lo tanto, el efecto de suavizamiento llevado a cabo por  $K_t$  sobre los datos funcionales en (4.19) es medido en (4.21) en términos de la varianza de las estimaciones.*  $\square$

Para completar el filtrado anterior, la formulación *backward* o de suavizamiento, corrige la estimación obtenida de los coeficientes **POP** y su varianza como sigue:

$$\begin{aligned} E[a(t-1)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}] &= \hat{a}_{t-1|t-1} \\ &+ J_{t-1} \cdot \left[ E[a(t)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}] - \hat{\Lambda} \hat{a}_{t-1|t-1} \right], \\ \text{Var}[a(t-1)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}] &= P_{t-1|t-1} \\ &+ J_{t-1} \cdot \text{Var}[a(t)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}] \cdot J_{t-1}^T, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $J_{t-1} = P_{t-1|t-1} \hat{\Lambda}^T (P_{t|t-1})^{-1}$ .

## 4.5. Ejemplos numéricos

En esta sección, se ilustran los resultados obtenidos en relación con la implementación del filtrado de Kalman en términos de la descomposición funcional **POP**. Más concretamente, se aplica la formulación anterior del algoritmo de Kalman para resolver el problema de filtrado a partir de una secuencia de datos funcionales espaciales, generados mediante un modelo ARH(1) afectado por ruido funcional aditivo.

Para la generación de la condición aleatoria inicial  $Y_0$ , que se supone gaussiana, se considera el operador integral  $R_{Y_0}^{1/2}$ , con núcleo

$$r(z; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \theta}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\|z\|^2}{2 \cdot \theta} \right\}, \quad (4.24)$$

aplicado a un proceso espacial,  $L^2(D)$ –valuado, de ruido blanco, con  $D \subset \mathbb{R}^2$ . La varianza de dicho proceso es proporcional al máximo autovalor que define la norma del operador de autocorrelación  $\mathcal{A}$  del modelo ARH(1) subyacente a los datos. Esta elección de la varianza del ruido que genera la condición inicial, se realiza para garantizar la estabilidad del estimador funcional de momentos de  $\mathcal{A}$  (ver Mas [62]). El proceso de innovación,  $\nu$ , se genera en cada tiempo, de forma independiente, mediante la aplicación del operador integral  $R_\nu^{1/2}$ , con núcleo

$$s(z; \beta) = \frac{15}{16 \cdot \sqrt{6}} \cdot \left(1 + \frac{z}{3}\right)^{-7/2}, \quad (4.25)$$

a un proceso de ruido blanco gaussiano. También se considera el caso en el que  $R_\nu^{1/2}$  es un operador diagonal, proporcional al operador identidad, multiplicado por  $\sigma_\nu$ , la varianza del proceso. El ruido de observación  $\epsilon$  se considera ruido blanco gaussiano independiente del proceso de interés,  $Y$ , con varianza  $\sigma_\epsilon$  satisfaciendo

$$\sigma_\epsilon < \left[ \sup_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{\lambda_{\mathbf{k}}} \right) \right]^{-1},$$

siendo  $\lambda_k, k \in \mathbb{N}^2$ , el espectro puntual empírico de la traza sobre el dominio de observación  $D$  del operador de covarianza espacial  $R_Y$  del proceso de interés,  $Y$ . Esta condición garantiza la estabilidad de la solución funcional al problema de estimación lineal mínimo cuadrática del proceso de interés (ver Kato, 1995, sobre teoría de perturbación de operadores lineales).

Se consideran asimismo tres familias paramétricas de operadores para la representación de la interacción espacio-temporal, es decir, para la definición del operador de autocorrelación  $\mathcal{A}$ . Dichas familias se definen en términos de operadores integrales con los siguientes núcleos

- Núcleo exponencial:

$$k(z; \alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \exp \left\{ -\frac{\|z\|}{\alpha} \right\}, \quad (4.26)$$

- Núcleo gamma:

$$k(z; \gamma) = \frac{1}{\gamma^2} \cdot \|z\| \cdot \exp \left\{ -\frac{\|z\|}{\gamma} \right\}, \quad (4.27)$$

- Núcleo Cauchy:

$$k(z; \delta) = \frac{1}{\delta \cdot \pi \left[ 1 + \left( \frac{\|z\|+7}{\delta} \right)^2 \right]}. \quad (4.28)$$

En las ecuaciones anteriores se denota por  $\|z\|$  la distancia entre localizaciones espaciales. Los parámetros escalares  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  definen la contracción o dilatación de los núcleos gaussiano, exponencial, gamma y Cauchy, respectivamente. La elección de dichos parámetros siguen las directrices dadas en Mas [62] para la convergencia de las estimaciones del modelo.

Se considera pues la generación de los datos funcionales espaciales a partir de la ecuación

$$Y_t = \mathcal{A}Y_{t-1} + \nu_t, \quad t \geq 0, \quad (4.29)$$

en seis casos, que respectivamente corresponden a las tres familias de modelos de interacción espacio-temporal, dadas por (4.26)-(4.28), en combinación con los dos modelos de innovaciones definidos a partir del operador  $R_\nu^{1/2}$ , en el caso integral, dado por la ecuación (4.25), y en el caso diagonal.

### 4.5.1. Autocorrelación exponencial

En primer lugar se describen los resultados numéricos obtenidos en la implementación del filtrado de Kalman a partir de (4.29) cuando el parámetro funcional  $\mathcal{A}$  viene dado por

$$\mathcal{A}(\phi)(x) = \int_D k(x-y)\phi(y)dy,$$

con  $k$  definido por (4.26).

Para el caso en el que  $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ , se considera

$$\sigma_\nu = \left[ \frac{0,65}{N\sqrt{2 \cdot \pi}} \right]^{1/2},$$

siendo  $N$  el parámetro que define el número de localizaciones espaciales que intervienen en la discretización del dominio base  $D$ . En este caso,  $N = 441$ , observadas en  $T = 20$  tiempos. Se consideran asimismo los valores  $\theta = 1$  y

Tabla 4.1: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 349$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	5.1240609e-004	11	5.1773840e-004
2	4.7553097e-004	12	4.7125688e-004
3	4.2752807e-004	13	5.1634146e-004
4	5.0161712e-004	14	4.8246357e-004
5	4.9467247e-004	15	5.4387119e-004
6	4.8446889e-004	16	4.9241273e-004
7	5.4662735e-004	17	4.5873500e-004
8	5.3081076e-004	18	4.4468351e-004
9	5.2603123e-004	19	4.5358954e-004
10	5.5174087e-004	20	5.3727249e-004

$\alpha = \frac{1}{2}$  en la generación de la condición inicial y definición del operador  $\mathcal{A}$ , respectivamente.

La implementación del filtrado de Kalman se realizará considerando los órdenes de truncamiento  $M = 349$  y  $M = 407$  en la descomposición **POP** del proceso de interés. Dichos órdenes, respectivamente, corresponden a un 85% y 95% de la variabilidad total del núcleo que define el operador de autocorrelación exponencial,  $\mathcal{A}$ . La calidad de la estimaciones obtenidas se mide en términos del error cuadrático funcional (E.C.F.) dado por

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left( Y_t(i, j) - \hat{Y}_t(i, j) \right)^2. \quad (4.30)$$

para los instantes de tiempo  $t = 1, \dots, 20$ , considerados. Las tablas 4.1 y 4.2 muestran dichos errores para los órdenes de truncamiento  $M = 349$  y  $M = 407$ , respectivamente. Adicionalmente, en el gráfico 4.1 se representan los errores cuadráticos funcionales, para  $M = 349$  (línea verde) y  $M = 407$  (línea roja) en cada tiempo. Se observa en ambos casos una estabilización en el tiempo del error cuadrático funcional.

Para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , se ilustran los resultados en los gráficos

Tabla 4.2: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 407$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	4.9620214e-004	11	5.0803653e-004
2	4.5943363e-004	12	4.5704732e-004
3	4.0625354e-004	13	5.1049589e-004
4	4.8750930e-004	14	4.4695328e-004
5	4.8282879e-004	15	5.1760220e-004
6	4.6559867e-004	16	4.7673825e-004
7	5.1197412e-004	17	4.4359751e-004
8	5.0918922e-004	18	4.3363676e-004
9	5.1177103e-004	19	4.3336520e-004
10	5.2050198e-004	20	5.0049430e-004

Gráfico 4.1: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 349$  (verde) y  $M = 407$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

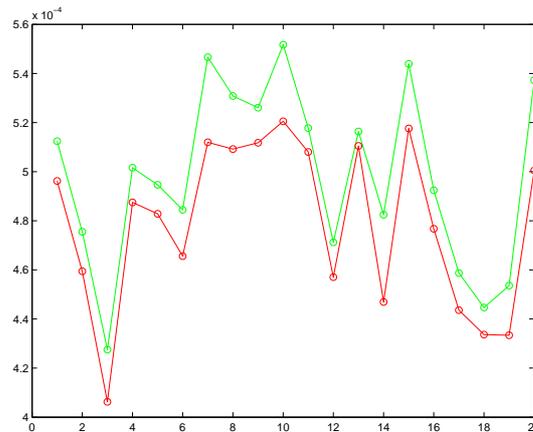


Gráfico 4.2: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

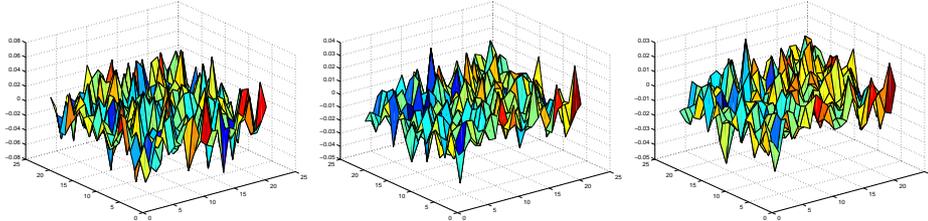
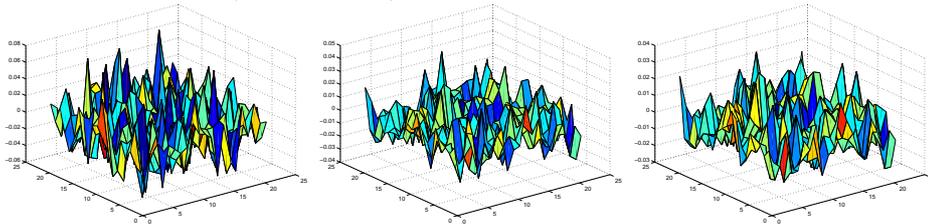


Gráfico 4.3: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).



4.2-4.5, donde se muestran las realizaciones espaciales del proceso de interés (izquierda) y de sus estimaciones funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha).

A continuación se muestran los resultados obtenidos para los parámetros y órdenes de truncamiento seleccionados anteriormente en el caso de innovaciones generadas a partir del operador  $R_\nu^{1/2}$  dado por la ecuación (4.25). Las tablas 4.3 y 4.4 muestran los errores cuadráticos funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 349$  y  $M = 407$ , respectivamente, en los 20 instantes de tiempo considerados. Su representación viene dada en el gráfico 4.6.

Los gráficos 4.7-4.10 muestran nuevamente las realizaciones espaciales del proceso de interés (izquierda) y sus estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), respectivamente.

Gráfico 4.4: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

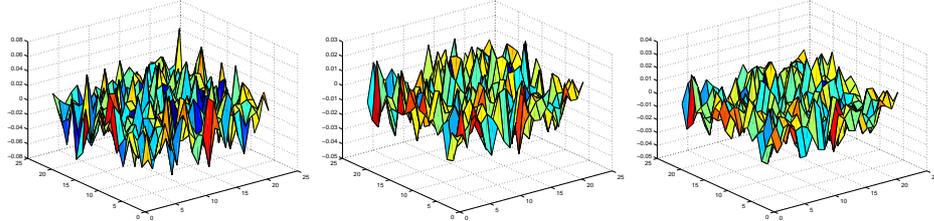


Gráfico 4.5: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

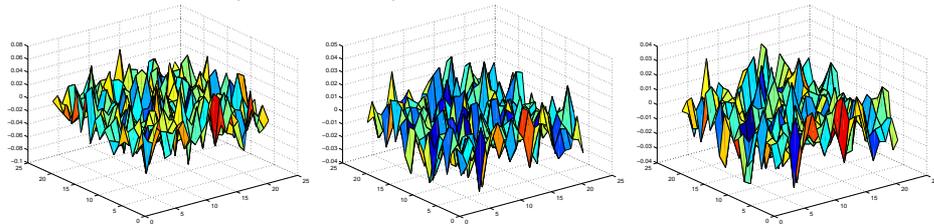


Tabla 4.3: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 349$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	3.3306843e-004	11	2.8444306e-004
2	2.7944927e-004	12	3.0659804e-004
3	3.1740128e-004	13	2.8347720e-004
4	3.0240261e-004	14	3.0433877e-004
5	3.0280151e-004	15	3.1467490e-004
6	3.7134072e-004	16	3.1668205e-004
7	2.9783785e-004	17	3.2490461e-004
8	3.5445685e-004	18	3.2122978e-004
9	3.1713606e-004	19	3.2479232e-004
10	2.9506531e-004	20	2.9664285e-004

Tabla 4.4: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 407$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	3.3306689e-004	11	2.8440076e-004
2	2.7943732e-004	12	3.0678078e-004
3	3.1722534e-004	13	2.8342349e-004
4	3.0280860e-004	14	3.0386522e-004
5	3.0233103e-004	15	3.1474926e-004
6	3.7140666e-004	16	3.1616386e-004
7	2.9783646e-004	17	3.2439171e-004
8	3.5434624e-004	18	3.2071523e-004
9	3.1657153e-004	19	3.2467169e-004
10	2.9496445e-004	20	2.9665845e-004

Gráfico 4.6: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 349$  (verde) y para  $M = 407$  (rojo), con innovaciones coloreadas.

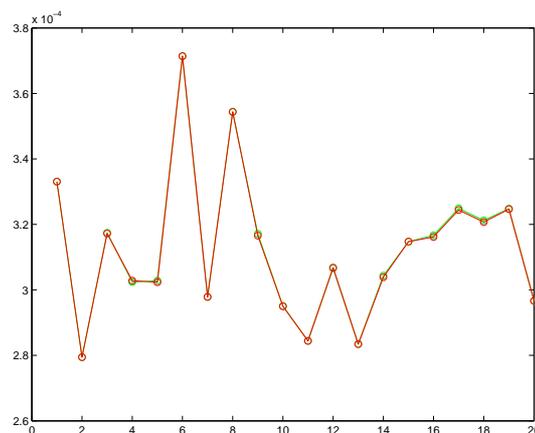


Gráfico 4.7: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.

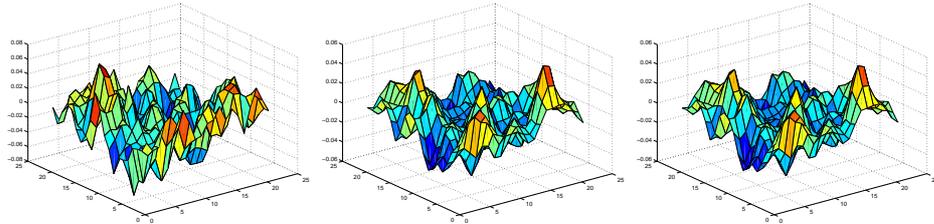


Gráfico 4.8: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.

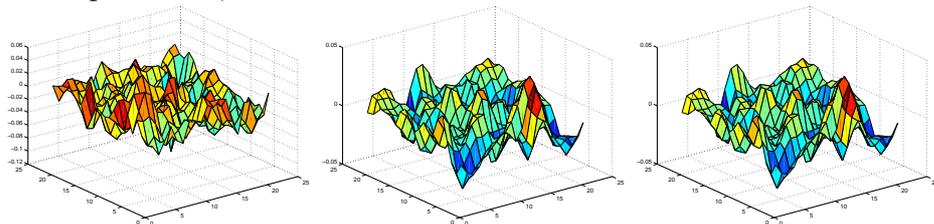


Gráfico 4.9: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

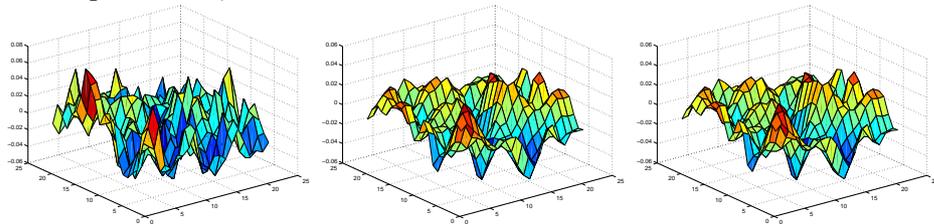
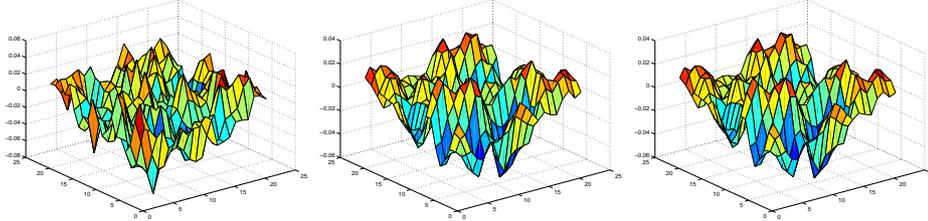


Gráfico 4.10: Autocorrelación Exponencial ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 407$  (centro) y  $M = 349$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.



### 4.5.2. Autocorrelación gamma

En esta sección se muestran los resultados numéricos referentes a la implementación del filtrado de Kalman para la estimación de procesos ARH(1), en el caso de operador de autocorrelación  $\mathcal{A}$  dado por el núcleo gamma (4.27). Se consideran los valores de los parámetros  $\theta = 1$  y  $\gamma = \frac{1}{4}$ . Para el caso de innovaciones generadas a partir del operador  $R_\nu^{1/2} = \left[ \frac{0,75}{N\sqrt{2 \cdot \pi}} \right]^{1/2} I$ , en las tablas 4.5 y 4.6 se muestran los errores cuadráticos funcionales en los 20 instantes de observación, para los órdenes de truncamiento  $M = 291$  y  $M = 367$ , respectivamente. Asimismo, su representación se muestra en el gráfico 4.11. Nuevamente, los órdenes de truncamiento seleccionados corresponden a un 85% y 95% de la variabilidad total del núcleo gamma que en este caso define el operador de autocorrelación  $\mathcal{A}$ . En los gráficos 4.12-4.15, se muestra, como antes, para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , las realizaciones espaciales del proceso de interés (izquierda) y sus estimaciones funcionales para los órdenes de truncamiento considerados  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha).

En el caso de innovaciones generadas a partir del operador  $R_\nu^{1/2}$  dado por la ecuación (4.25), las tablas 4.7 y 4.8 muestran los errores cuadráticos funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 291$  y  $M = 367$ , respectivamente, considerando los mismos valores de los parámetros  $\theta = 1$  y  $\gamma = \frac{1}{4}$ . Su representación se muestra en el gráfico 4.16.

Para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , los gráficos 4.17-4.20 muestran las realizaciones espaciales del proceso de interés (izquierda) y sus estimaciones funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$

Tabla 4.5: Autocorrelación Gamma ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 291$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	6.7465914e-004	11	6.3003633e-004
2	7.0450235e-004	12	6.7856941e-004
3	6.4315570e-004	13	6.5076963e-004
4	7.1798447e-004	14	6.2649008e-004
5	6.0332078e-004	15	7.1442464e-004
6	7.1558832e-004	16	6.9486712e-004
7	6.4471468e-004	17	6.6389827e-004
8	7.7228185e-004	18	7.0502301e-004
9	7.1055905e-004	19	5.8812753e-004
10	6.7651648e-004	20	7.3907837e-004

Tabla 4.6: Autocorrelación Gamma ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 367$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	6.4181673e-004	11	6.2205115e-004
2	6.9330803e-004	12	6.6039554e-004
3	6.0520946e-004	13	6.1033937e-004
4	6.9588159e-004	14	6.1140053e-004
5	5.5698514e-004	15	6.7470878e-004
6	6.9262224e-004	16	6.6921763e-004
7	6.2113629e-004	17	6.2764531e-004
8	7.4297613e-004	18	6.7772122e-004
9	6.9212022e-004	19	5.7346689e-004
10	6.2071164e-004	20	7.0319841e-004

Gráfico 4.11: Autocorrelación Gamma ARH(1). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 291$  (verde) y  $M = 367$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

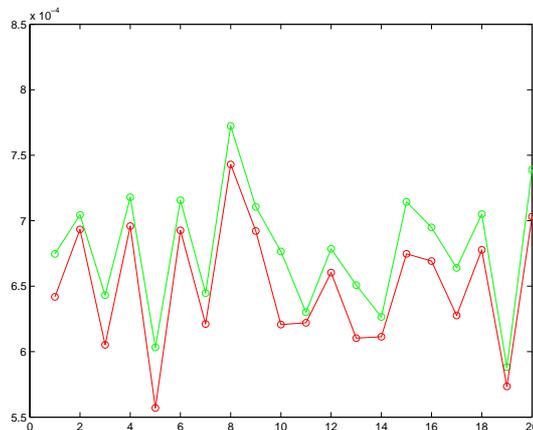


Gráfico 4.12: Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

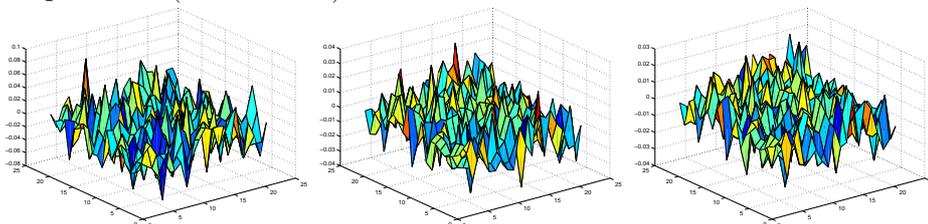


Gráfico 4.13: Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

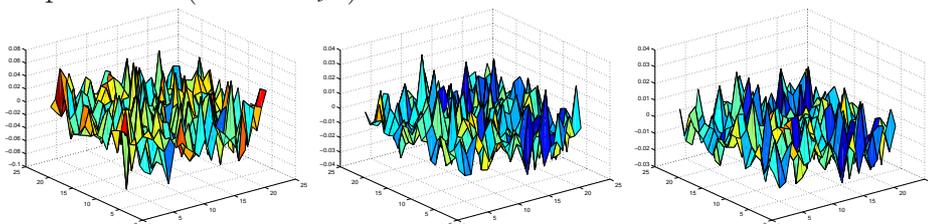


Gráfico 4.14: Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

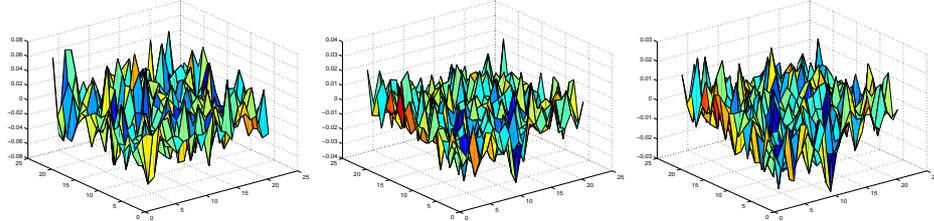


Gráfico 4.15: Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

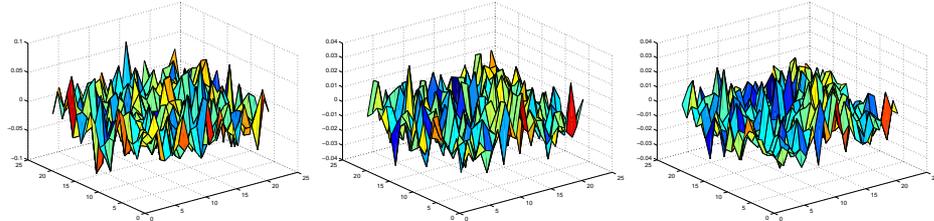


Tabla 4.7: Autocorrelación Gamma ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 291$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	4.5382601e-004	11	4.9936759e-004
2	4.5242564e-004	12	4.4790807e-004
3	4.0440831e-004	13	4.1460804e-004
4	3.6143697e-004	14	3.4892060e-004
5	4.7740234e-004	15	3.8401155e-004
6	3.6373137e-004	16	4.3420698e-004
7	4.6233795e-004	17	4.2442896e-004
8	4.7882739e-004	18	4.7452482e-004
9	3.9827114e-004	19	3.6269594e-004
10	3.3146711e-004	20	3.8656408e-004

Tabla 4.8: Autocorrelación Gamma ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 367$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	4.5326899e-004	11	4.9487762e-004
2	4.5246620e-004	12	4.4507164e-004
3	3.9374277e-004	13	4.1146038e-004
4	3.5851244e-004	14	3.4698914e-004
5	4.6763071e-004	15	3.9034636e-004
6	3.6086678e-004	16	4.3774399e-004
7	4.6121316e-004	17	4.1647392e-004
8	4.8036997e-004	18	4.7569568e-004
9	4.0004985e-004	19	3.5975416e-004
10	3.1410937e-004	20	3.9189397e-004

Gráfico 4.16: Autocorrelación Gamma ARH(1). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 291$  (verde) y para  $M = 367$  (rojo), con innovaciones coloreadas.

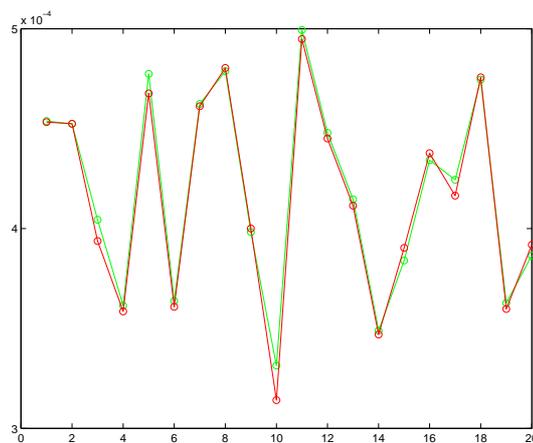


Gráfico 4.17: Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.

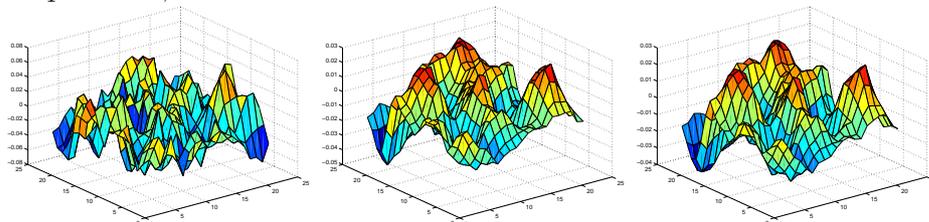
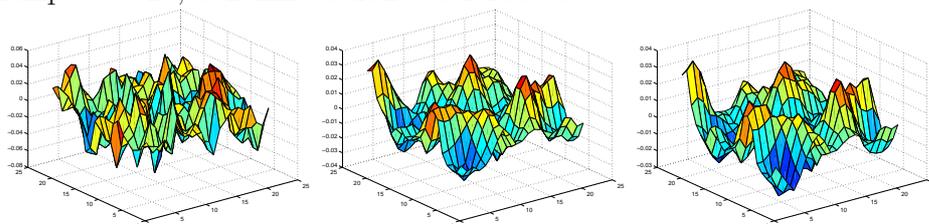


Gráfico 4.18: Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.



(derecha).

### 4.5.3. Autocorrelación Cauchy

Finalmente, en esta sección se ilustran los resultados obtenidos para modelos ARH(1) con operador de autocorrelación integral  $\mathcal{A}$  definido mediante el núcleo (4.28) con  $\delta = \frac{1}{2}$ . En este caso, el 85% y 95% de la variabilidad total de dicho núcleo viene dado por los órdenes de truncamiento  $M = 97$  y  $M = 274$ , respectivamente. Para innovaciones con operador de covarianza  $R_\nu = \left[ \frac{0,85}{N\sqrt{2 \cdot \pi}} \right]^{1/2} I$ , las tablas 4.9 y 4.10 muestran los errores cuadráticos funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 97$  y  $M = 274$ , respectivamente. Asimismo, sus representaciones se muestran en el gráfico 4.21. Al igual que en los casos anteriores, el error cuadrático funcional se estabiliza cuando el tiempo avanza. Adicionalmente, en los gráficos 4.22-4.25, para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , se muestra las realizaciones del proceso espacial

Gráfico 4.19: Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

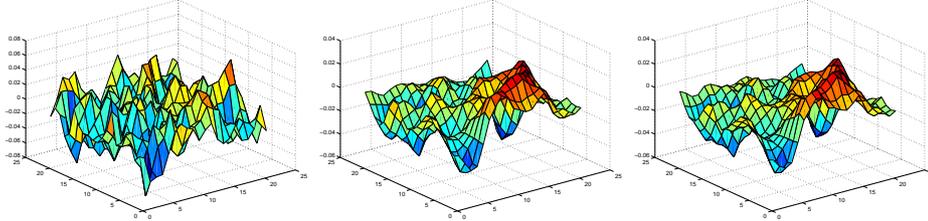
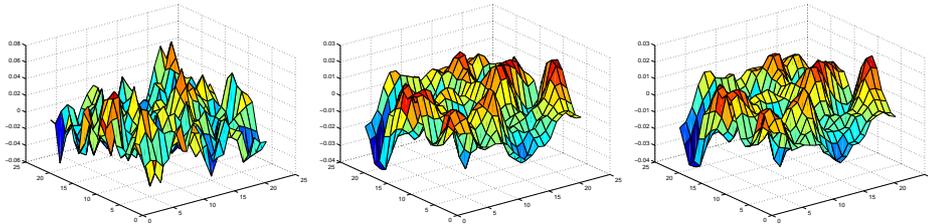


Gráfico 4.20: Autocorrelación Gamma ARH(1). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.



(izquierda), y las estimaciones funcionales de dicho proceso, tras aplicar el filtrado de Kalman en términos de las series de coeficientes **POP** truncadas, para  $M = 274$  (centro) y  $M = 97$  (derecha).

Finalmente, se muestra la calidad de las estimaciones obtenidas en el caso de innovaciones generadas a partir del operador  $R_\nu^{1/2}$  dado por la ecuación (4.25). Más concretamente, en las tablas 4.11 y 4.12 se dan los errores cuadráticos funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 97$  y  $M = 274$ , respectivamente. Su representación viene dada en el gráfico 4.26 con línea verde para  $M = 97$  y línea roja para  $M = 274$ . Al igual que en los casos anteriores, para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , los gráficos 4.27-4.30 muestran las realizaciones espaciales del proceso original (izquierda) y las estimaciones funcionales del mismo para los órdenes de truncamiento  $M = 274$  (centro) y  $M = 97$  (derecha).

Tabla 4.9: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 97$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	6.2356776e-004	11	7.0452871e-004
2	5.9973587e-004	12	6.2511715e-004
3	6.9734320e-004	13	6.6441759e-004
4	7.4307482e-004	14	7.1904423e-004
5	6.9870547e-004	15	6.3759340e-004
6	6.8419821e-004	16	6.1889128e-004
7	6.2622606e-004	17	6.4759494e-004
8	6.0285785e-004	18	5.9818909e-004
9	6.7677737e-004	19	6.6644012e-004
10	7.2374039e-004	20	6.6594057e-004

Tabla 4.10: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 274$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	5.8179044e-004	11	6.3459446e-004
2	5.5802828e-004	12	5.5599813e-004
3	6.2699675e-004	13	5.8270728e-004
4	6.5982601e-004	14	6.5086835e-004
5	6.1235642e-004	15	5.5867817e-004
6	5.9687186e-004	16	5.9434756e-004
7	5.7234122e-004	17	6.2397803e-004
8	5.7575388e-004	18	5.6440879e-004
9	6.2701668e-004	19	6.1850003e-004
10	6.6048252e-004	20	6.3023213e-004

Gráfico 4.21: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 97$  (verde) y para  $M = 274$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

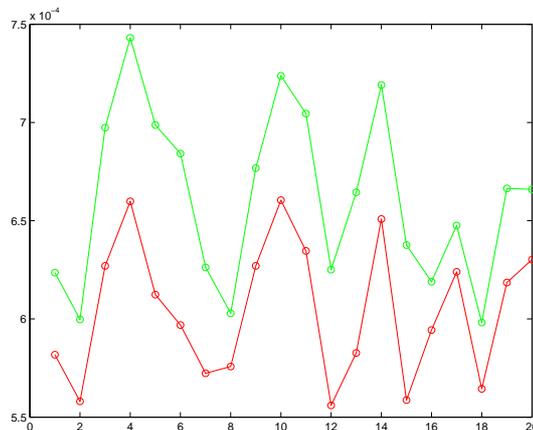


Gráfico 4.22: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

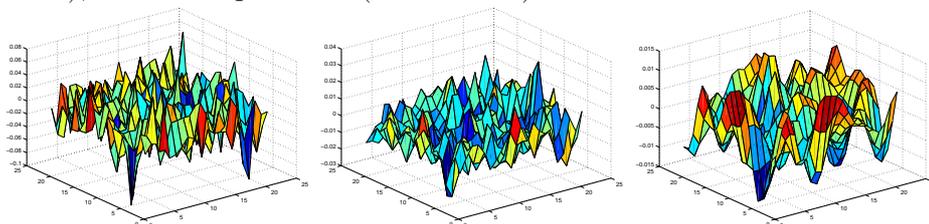


Gráfico 4.23: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

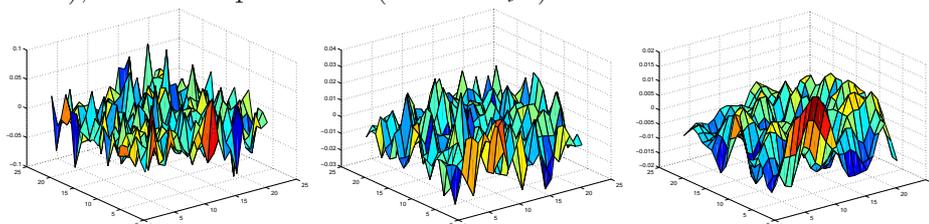


Gráfico 4.24: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

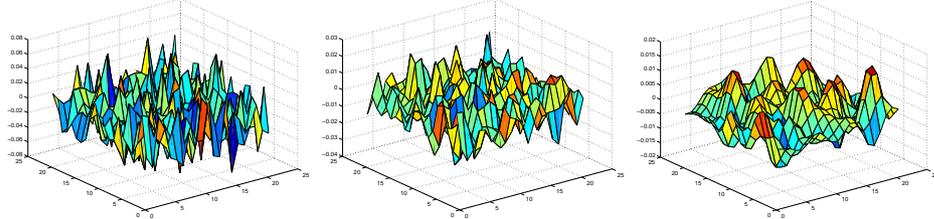


Gráfico 4.25: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

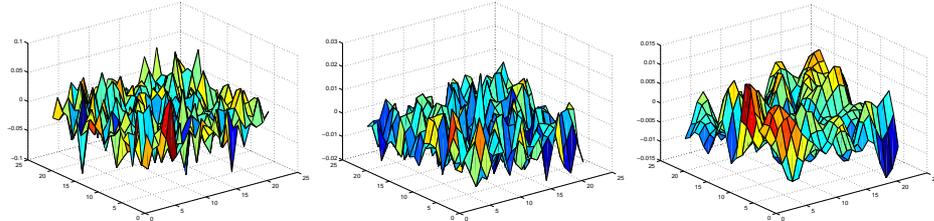


Tabla 4.11: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 97$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	4.0361237e-004	11	3.6934488e-004
2	3.6028977e-004	12	3.3843911e-004
3	3.0900959e-004	13	4.3117929e-004
4	3.4440126e-004	14	3.6344616e-004
5	3.4512718e-004	15	3.1591246e-004
6	3.5746173e-004	16	4.1321517e-004
7	3.9398272e-004	17	3.7011475e-004
8	3.3457909e-004	18	3.6152597e-004
9	3.3633172e-004	19	3.7678966e-004
10	3.7293479e-004	20	3.4702231e-004

Tabla 4.12: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Error cuadrático funcional para  $M = 274$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	3.7944856e-004	11	3.5437591e-004
2	3.4234832e-004	12	3.2429887e-004
3	2.9689886e-004	13	4.1522771e-004
4	3.2628949e-004	14	3.4087719e-004
5	3.3095847e-004	15	3.1349187e-004
6	3.5663733e-004	16	3.9176459e-004
7	3.8198884e-004	17	3.5786075e-004
8	3.1762132e-004	18	3.4901355e-004
9	3.1896698e-004	19	3.7209633e-004
10	3.5155834e-004	20	3.3945065e-004

Gráfico 4.26: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 97$  (verde) y para  $M = 274$  (rojo), con innovaciones coloreadas.

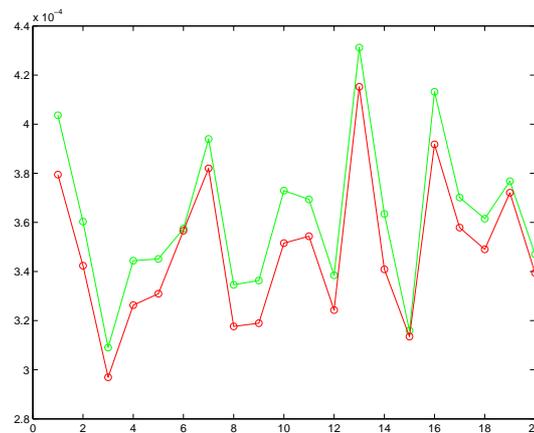


Gráfico 4.27: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.

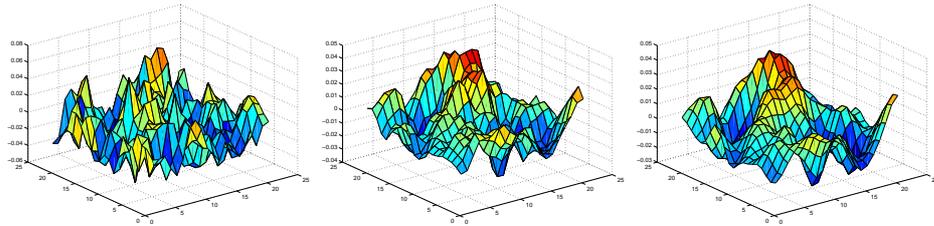


Gráfico 4.28: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.

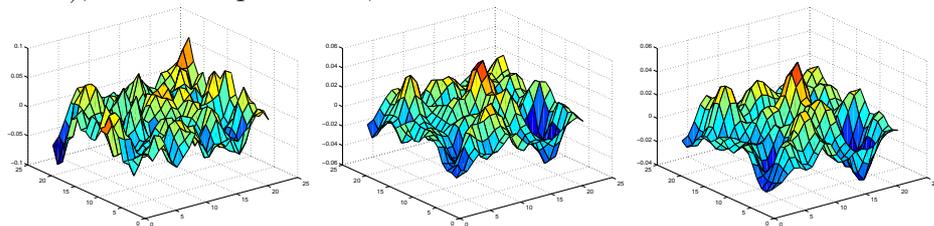


Gráfico 4.29: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

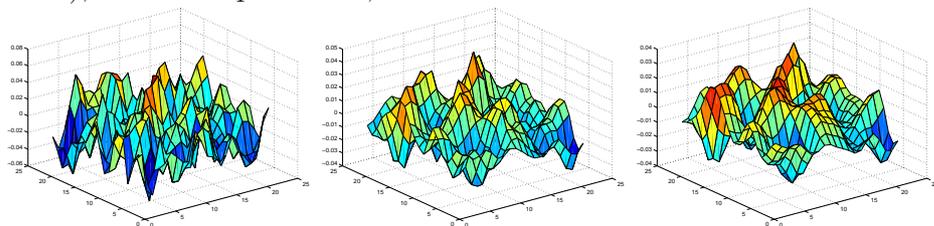
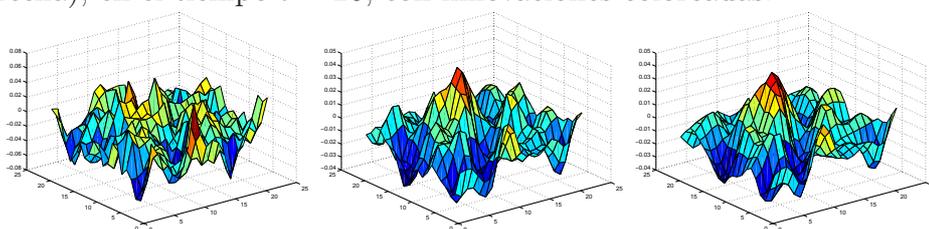


Gráfico 4.30: Autocorrelación Cauchy ARH(1). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.





# CAPÍTULO 5

---

## Modelos ARH( $p$ ): Diagonalización y Filtrado de Kalman

---

En este capítulo se extienden los resultados del capítulo anterior para modelos ARH(1) al contexto de modelos ARH( $p$ ), con autocorrelación de orden  $p \geq 2$ . Aunque estos modelos proporcionan una mayor flexibilidad en la representación de dinámicas temporales en datos funcionales, desde el punto de vista técnico, surgen nuevas dificultades en su tratamiento dada la mayor complejidad del espacio paramétrico funcional que caracteriza la estructura de dependencia en el espacio y tiempo. A partir de la descomposición multi-espectral del espacio de parámetros funcional, se obtiene la diagonalización de la ecuación de estados que representa la estructura Markoviana de orden  $p$ . La implementación del filtrado de Kalman se realiza entonces en términos de una versión vectorial de la ecuación de estados, obtenida en términos de las proyecciones **POP** de los procesos implicados. Los resultados de este capítulo se recogen en el trabajo de Salmerón y Ruiz-Medina [83].

## 5.1. El modelo ARH(p)

Sea  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  un proceso con valores en el espacio  $H$ , esto es,  $Y_t \in H$ , para todo  $t \in \mathbb{N}$ , siendo  $H$  un espacio de Hilbert, separable, de funciones definidas sobre un dominio  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se supone que  $Y$  satisface la siguiente ecuación

$$Y_t(s) = \mathcal{A}_1 Y_{t-1}(s) + \cdots + \mathcal{A}_p Y_{t-p}(s) + \nu_t(s), \quad t \in \mathbb{N}, \quad s \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

siendo  $\{\nu_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ , como en el caso ARH(1), un ruido blanco hilbertiano, en sentido fuerte, que se supone incorrelado con las condiciones iniciales  $Y_0^1, \dots, Y_0^p$ . Se supone asimismo que las condiciones iniciales son variables aleatorias  $H$ -valuadas, con momentos de segundo orden finitos, es decir, con operador covarianza en la clase de operadores traza sobre el espacio de Hilbert  $H$ . Los parámetros funcionales  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , definidos sobre  $H$ , representan la interacción espacio-temporal de orden  $p$ , asociada a la estructura de dependencia del modelo (5.1). Se asume que el operador vectorial  $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p)$  pertenece a la clase de operadores acotados sobre  $\bigotimes_{k=1}^p H$ , es decir

$$(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p) \in \mathcal{L} \left( \bigotimes_{k=1}^p H \right).$$

Para garantizar la estacionariedad de  $Y$ , el operador multidimensional  $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p)$  se considera en el círculo unidad de  $\mathcal{L} \left( \bigotimes_{k=1}^p H \right)$ . La factorización multiespectral de dicho operador se formula en la sección siguiente.

## 5.2. Descomposición espectral múltiple

Se supone que los parámetros funcionales  $\mathcal{A}_k$ , para  $k = 1, \dots, p$ , verifican las siguientes autoecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k \psi_{ik} &= \lambda_{ik} \psi_{ik}, & i \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{A}_k^* \phi_{ik} &= \lambda_{ik} \phi_{ik}, & i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Equivalentemente, dichos operadores admiten la factorización espectral

$$\mathcal{A}_k = \Psi_k \Lambda_k \Phi_k^*, \quad k = 1, \dots, p, \quad (5.3)$$

donde  $\Lambda_k$  denota al operador diagonal dado por la sucesión de autovalores  $\lambda_{ik}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , que definen el espectro puntual de  $\mathcal{A}_k$ , para  $k = 1, \dots, p$ . Los operadores  $\Psi_k$  y  $\Phi_k$  representan la proyección en los subespacios de  $H$  y su dual  $H^*$ , generados por las bases de Riesz duales definidas en términos de los sistemas de autofunciones izquierdo  $\{\psi_{ik} : i \in \mathbb{N}\}$  y derecho  $\{\phi_{ik} : i \in \mathbb{N}\}$ , asociados a las autoecuaciones que satisfacen los operadores  $\mathcal{A}_k$  y  $\mathcal{A}_k^*$ , para  $k = 1, \dots, p$ . La condición de dualidad o biortogonalidad de las bases implicadas se refleja en la siguiente identidad satisfecha por los operadores proyección

$$\Phi_k^* \Psi_k = I, \quad k = 1, \dots, p. \quad (5.4)$$

Se exige adicionalmente la condición

$$\Phi_k^* \Psi_l = \mathbf{0}, \quad \text{for } k \neq l, \quad (5.5)$$

con  $I$  y  $\mathbf{0}$  los operadores identidad y nulo sobre  $H$ , respectivamente.

A partir de (5.3), (5.4) y (5.5), se obtiene entonces, mediante proyección en el sistema de autofunciones derecho  $\bigoplus_{k=1}^p \Phi_k^*$ , la siguiente diagonalización de la ecuación de estados (5.1)

$$\bigoplus_{k=1}^p \Phi_k^* Y_t(s) = \bigoplus_{k=1}^p \Lambda_k \Phi_k^* Y_{t-k}(s) + \bigoplus_{k=1}^p \Phi_k^* \nu_t(s). \quad (5.6)$$

Equivalentemente, para  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=1}^p a_{jk}(t) = \sum_{k=1}^p \lambda_{jk} a_{jk}(t-k) + \sum_{k=1}^p \nu_{jk}(t),$$

donde

$$a_{jk}(t) \underset{\text{m.c.}}{=} \int_D Y_t(x) \phi_{jk}(x) dx, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad k = 1 \dots p, \quad (5.7)$$

$$\nu_{jk}(t) \underset{\text{m.c.}}{=} \int_D \nu_t(x) \phi_{jk}(x) dx, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad k = 1 \dots p, \quad (5.8)$$

son los coeficientes **POP** de los procesos  $Y$  y  $\nu$  respecto de los sistemas de autofunciones derechos  $\{\phi_{jk}, j \in \mathbb{N}\}$ ,  $k = 1, \dots, p$ .

### 5.2.1. Caso particular

En la implementación del filtrado de Kalman se considerará el caso en el que los sistemas de autofunciones derechos e izquierdos asociados a los espectros puntuales de los operadores  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  coinciden. Esta suposición implica una relación funcional entre dichos operadores en virtud del teorema de Representación Espectral (ver, por ejemplo, Dautray y Lions [21]). Por tanto, bajo la condición  $\Phi_k = \Phi$  y  $\Psi_k = \Psi$ , para  $k = 1, \dots, p$ , se tiene que los sistemas derecho e izquierdo asociados a dichos operadores generan el espacio  $H$ , es decir, constituyen bases de Riesz duales de dicho espacio. Se tiene entonces la siguiente diagonalización de la ecuación de estados (5.1)

$$a_j(t) = \sum_{k=1}^p \lambda_{jk} a_j(t-k) + \nu_j(t), \quad (5.9)$$

en términos de los coeficientes **POP**

$$a_j(t) \underset{\text{m.c.}}{=} \int_D Y_t(x) \phi_j(x) dx, \quad t \geq 0, \quad j \in N, \quad (5.10)$$

$$b_j(t) \underset{\text{m.c.}}{=} \int_D \nu_t(x) \phi_j(x) dx, \quad t \geq 0, \quad j \in N, \quad (5.11)$$

donde  $\{\lambda_{jk}, j \in \mathbb{N}\}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , denotan, como antes, las secuencias de autovalores que definen los espectros puntuales de los operadores  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , respectivamente.

## 5.3. Operadores de autocorrelación

En esta sección se proporcionan algunos ejemplos de familias de operadores de autocorrelación que satisfacen las ecuaciones (5.3)-(5.5). Equivalentemente, se introducen algunos ejemplos de familias de operadores que admiten la factorización espectral múltiple descrita en la sección anterior.

Se consideran una familia de operadores  $\mathcal{C}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , compactos y autoadjuntos definidos sobre el espacio de Hilbert  $H$ . A partir del teorema de Hilbert-Schmidt (ver, por ejemplo, Dautray y Lions [21]) se tiene la siguiente factorización

$$\mathcal{C}_k = \Gamma_k \Lambda_k \Gamma_k^*, \quad k = 1, \dots, p.$$

Suponiendo que  $\Gamma_k = \Gamma$ , para  $k = 1, \dots, p$ , se obtiene entonces la siguiente representación integral para dichos operadores

$$\mathcal{C}_k f(x) = \left\langle \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_{ik} \gamma_i(x) \gamma_i(\cdot), f(\cdot) \right\rangle_H, \quad \forall f \in H, \quad k = 1, \dots, p. \quad (5.12)$$

Adviértase que, según se ha comentado anteriormente, la condición  $\Gamma_k = \Gamma$ , para  $k = 1, \dots, p$ , se satisface, por ejemplo, cuando los operadores  $\mathcal{C}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , se pueden expresar como funciones continuas de un único operador base  $K$  definido sobre  $H$ .

Para construir un ejemplo del espacio paramétrico funcional asociado a la familia de operadores de autocorrelación que satisfacen las ecuaciones (5.3) y (5.4), se seguirá la misma metodología que en el caso ARH(1), considerando un operador lineal acotado  $\mathcal{T}$  definido de  $H$  en un subespacio denso  $\tilde{H}$  de  $H$ . El operador  $[\mathcal{T}^{-1}]^*$  viene dado pues de  $H$  en  $\tilde{H}^*$ , el espacio dual de  $\tilde{H}$ . Se supone adicionalmente que  $\mathcal{T}$  genera una forma bilineal cerrada sobre  $H$  (ver, por ejemplo, Da Prato y Zabczyk [20]). La familia de operadores de autocorrelación dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &= \mathcal{T} \mathcal{C}_k \mathcal{T}^{-1} \\ &= \mathcal{T} \Gamma \Lambda_k ([\mathcal{T}^{-1}]^* \Gamma)^*, \quad k = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

satisfacen entonces las ecuaciones (5.3)-(5.5).

### Caso especial y ejemplos

Al igual que en la sección 4.3, si  $H = L^2(D)$ , para  $D$  un dominio compacto de  $\mathbb{R}^n$ , se considera la representación integral (5.12) de los operadores  $\mathcal{C}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , y se define el operador  $\mathcal{T}$  de  $L^2(D)$  en  $H^s(D)$ , para un cierto  $s > 0$ , siendo, como antes,  $H^s(D)$  el espacio de Sobolev fraccionario de orden  $s$ , constituido por restricciones de funciones al dominio  $D$ . Casos especiales del operador  $\mathcal{T}$  se construyen, por ejemplo, en términos de la clase de funciones racionales positivas de un operador diferencial o pseudodiferencial elíptico y autoadjunto  $\mathcal{L}$  de orden entero o fraccionario  $r$  sobre  $L^2(D)$

$$\mathcal{T} = \frac{P(\mathcal{L})}{Q(\mathcal{L})},$$

siendo  $P$  y  $Q$  polinomios positivos de órdenes  $p$  y  $q$ , respectivamente, satisfaciendo

$$\begin{aligned} 0 < c_1 &\leq P(\lambda)(1 + |\lambda|^2)^{-p/2} \leq c_2, \\ 0 < c_3 &\leq Q(\lambda)(1 + |\lambda|^2)^{-q/2} \leq c_4, \end{aligned} \quad (5.13)$$

para  $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , y para ciertas constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ , con  $(q - p)r = s$  (ver Ramm [73]; Angulo, Ruiz-Medina y Anh [3]).

Para  $D = \mathbb{R}^n$ , ejemplos de operadores de autocorrelación  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , pueden ser definidos a partir del teorema de Representación Espectral (ver Dautray and Lions [21], pp. 119, 126, 140, y Ramm [73], pp. 145-148) considerando

$$\mathcal{C}_k = g_k(\mathcal{M}), \quad k = 1, \dots, p,$$

para  $\mathcal{M}$  un operador construido en el dominio espectral a partir de una función positiva y continua de  $|\lambda|$  con caída rápida y siendo  $g_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , funciones que satisfacen las condiciones de momentos necesarias para garantizar que los operadores  $\mathcal{C}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , son bicontinuos de  $H^{-s}(D)$  en  $\bar{H}^s(D)$  para  $s > n/2$ , denotando, como antes,  $\bar{H}^s(D)$  el espacio de Sobolev fraccionario de orden  $s > 0$ , constituido por funciones con soporte compacto contenido en  $\bar{D}$ .

## 5.4. Filtrado de Kalman en modelos ARH(p)

Para la implementación del filtrado de Kalman se considera la proyección de la ecuación de estados funcional (5.1) en el sistema de autofunciones derecho truncado. Se obtiene entonces la siguiente expresión matricial, que involucra los operadores diagonales espectrales  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , asociados a la factorización de los operadores de autocorrelación  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ :

$$a(t) = \Lambda_1 a(t - 1) + \Lambda_2 a(t - 2) + \dots + \Lambda_p a(t - p) + b(t), \quad (5.14)$$

donde, para un orden de truncamiento  $M$ ,

$$\begin{aligned} a(t - k)_{M \times 1} &= (a_1(t - k), \dots, a_M(t - k))^T, \quad k = 0, \dots, p, \\ b(t)_{M \times 1} &= (b_1(t), \dots, b_M(t))^T, \end{aligned}$$

siendo, para  $j = 1, \dots, M$ ,  $a_j(t)$  y  $b_j(t)$  los coeficientes **POP** definidos mediante las ecuaciones (5.10) y (5.11), respectivamente.

La ecuación (5.14) puede reescribirse vectorialmente como sigue

$$\underline{a}(t) = \underline{\Lambda} \underline{a}(t-1) + \underline{b}(t), \quad (5.15)$$

donde,

$$\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ a(t-1) \\ \vdots \\ a(t-(p-1)) \end{pmatrix}_{pM \times 1}, \quad \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{pM \times 1},$$

$$\underline{a}(t-1) = \begin{pmatrix} a(t-1) \\ a(t-2) \\ \vdots \\ a(t-(p-1)) \\ a(t-p) \end{pmatrix}_{pM \times 1},$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \dots & \Lambda_{p-1} & \Lambda_p \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{pM \times pM},$$

siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad de orden  $M \times M$  y  $\mathbf{0}$  una matriz de ceros del mismo orden.

En la ecuación (5.15), la matriz de transición  $\underline{\Lambda}$  define la dinámica del proceso de interés,  $Y$ , en términos de las submatrices  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , asociadas a los espectros puntuales de los operadores de autocorrelación,  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ . La estructura de dependencia del proceso de innovación proyectado se define en términos de la matriz

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{Q} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{pM \times pM}, \quad (5.16)$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= E[b(t)_{M \times 1} b(t)_{1 \times M}^T] \\ &= \Phi_M^* R_\nu \Phi_M. \end{aligned}$$

Una vez más, se considera que la información muestral se obtiene a partir de la observación del proceso  $Z$  relacionado con el proceso de interés  $Y$  mediante la siguiente ecuación, para cada  $t \geq 0$ ,

$$Z_t = Y_t + \epsilon_t, \quad (5.17)$$

donde  $\epsilon$  representa, como anteriormente, ruido de observación incorrelado con  $Y$ , que se supone ruido blanco hilbertiano, en sentido fuerte, es decir,  $\epsilon$  es un proceso Hilbert-valuado, cuyas componentes son independientes satisfaciendo

$$E[\|\epsilon_t\|_H^2] = \sigma_\epsilon^2 < \infty. \quad (5.18)$$

En la práctica, puesto que los valores observados de  $Z$  corresponden al dominio  $D_{\text{OBS}} \subset D$ , es decir, para  $t = 1, \dots, T$ ,

$$Z_t(s) = Y_t(s) + \epsilon_t(s), \quad s \in D_{\text{OBS}} \subset D, \quad (5.19)$$

se aplican técnicas de suavizamiento para obtener una calidad 'suficiente' de las funciones espaciales que definen los datos funcionales en cada corte temporal.

Las ecuaciones del filtrado de Kalman se implementan a partir de la ecuación diagonal vectorial (5.15), proporcionando una estimación recursiva  $\hat{\underline{a}}_{t|t}$  de  $\underline{a}(t)$  dada por

$$\hat{\underline{a}}_{t|t} = \hat{\underline{a}}_{t|t-1} + K_t [Y_{t,\omega} - \underline{\Psi} \hat{\underline{a}}_{t|t-1}], \quad (5.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\underline{a}}_{t|t-1} &= \underline{\Lambda} \hat{\underline{a}}_{t-1|t-1}, \\ \underline{\Psi} &= ((\Psi_1)_M, (\Psi_2)_M, \dots, (\Psi_p)_M), \end{aligned}$$

siendo  $(\Psi_i)_M = \Psi_M$ , para  $i = 1, \dots, p$ , con  $\Psi_M$  el operador izquierdo asociado a la descomposición **POP** truncada de los operadores  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , que proporciona, para cada conjunto de  $M$  proyecciones aleatorias sobre el sistema de autofunciones derecho (coeficientes **POP**), la correspondiente superficie definida por la combinación lineal de las imágenes de las funciones  $\psi_1, \dots, \psi_M$  sobre el dominio  $D$ , cuyos pesos son dichas proyecciones.

Para cada  $t \geq 0$ , el operador ganancia se define en términos del operador  $\underline{\Psi}$ , anteriormente introducido, como sigue

$$K_t = P_{t|t-1} \underline{\Psi}^* [R + \underline{\Psi} P_{t|t-1} \underline{\Psi}^*]^{-1}, \quad (5.21)$$

siendo  $R$  la traza sobre el dominio observable del operador de covarianza espacial del ruido de observación,  $\epsilon$ , y definiendo  $P_{t|t-1}$ , el operador de covarianza *a-priori* (adaptado) del error de estimación funcional, como

$$P_{t|t-1} = \underline{\Lambda}P_{t-1|t-1}\underline{\Lambda}^* + \underline{Q}, \quad (5.22)$$

donde  $\underline{Q}$  viene dada por (5.16).

La estimación del operador de covarianza del error cuadrático funcional viene dado por

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t \underline{\Psi} P_{t|t-1}. \quad (5.23)$$

Finalmente, se consideran los siguientes valores iniciales

$$\begin{aligned} \hat{a}_{0|0} &= (\Phi_M^* Y_0^1, \dots, \Phi_M^* Y_0^p)_{pM \times 1}^*, \\ P_{0|0} &= \text{diag} \left( \Phi_M^* R_{Y_0^1} \Phi_M, \dots, \Phi_M^* R_{Y_0^p} \Phi_M \right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde  $\text{diag}(\cdot)$  denota a una matriz diagonal y  $R_{Y_0^k}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , son los operadores de covarianza de las variables aleatorias  $H$ -valuadas que definen las condiciones aleatorias iniciales  $Y_0^k$ ,  $k = 1, \dots, p$ .

Para completar el filtrado anterior, al igual que en la sección 4.4.1, se realiza una formulación *backward* o de suavizamiento, en la que se actualiza la estimación de los coeficientes **POP** y su varianza como sigue:

$$\begin{aligned} E[\underline{a}(t-1)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}] &= \hat{a}_{t-1|t-1} \\ &+ \underline{J}_{t-1} \cdot \left[ E[\underline{a}(t)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}] - \hat{\underline{\Lambda}} \hat{a}_{t-1|t-1} \right], \\ \text{Var}[\underline{a}(t-1)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}] &= P_{t-1|t-1} \\ &+ \underline{J}_{t-1} \cdot \text{Var}[\underline{a}(t)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}] \cdot \underline{J}_{t-1}^T, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde  $\underline{J}_{t-1} = P_{t-1|t-1} \hat{\underline{\Lambda}}^T (P_{t|t-1})^{-1}$ .

## 5.5. Ejemplos numéricos

A continuación se ilustran los resultados obtenidos sobre la implementación del filtrado de Kalman para modelos con dinámica autorregresiva de

orden  $p$ , para  $p \geq 2$ , en el caso particular en el que  $p = 2$ ,  $\Psi_k = \Psi$  y  $\Phi_k = \Phi$ , para  $k = 1, 2$ . Equivalentemente, se considera la ecuación de estados

$$Y_t(s) = \mathcal{A}_1 Y_{t-1}(s) + \mathcal{A}_2 Y_{t-2}(s) + \nu_t(s), \quad t \geq 0, \quad s \in D, \quad (5.26)$$

donde la descomposición **POP** de los operadores  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, 2$ , viene dada entonces por

$$\mathcal{A}_k = \Psi \Lambda_k \Phi^*, \quad k = 1, 2.$$

Al igual que en el capítulo anterior, se consideran tres familias de modelos para la representación de la autocorrelación de orden dos. Es decir, se considera que la interacción espacio-temporal se representa en términos de los operadores integrales  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  con núcleos paramétricos homogéneos e isotrópicos definidos a partir de las distribuciones exponencial, gamma y Cauchy. Se distinguen, asimismo, para cada modelo paramétrico bidimensional de autocorrelación, dos casos correspondientes a la estructura diagonal o coloreada del operador que genera el proceso Hilbert-valuado que define las innovaciones del modelo ARH(2).

### 5.5.1. Autocorrelación exponencial

En primer lugar vamos a considerar el caso en el que los operadores de autocorrelación se definen en términos de un núcleo exponencial, es decir,

$$\mathcal{A}_i(\phi)(x) = \int_D k_i(x-y)\phi(y)dy, \quad i = 1, 2,$$

siendo

$$k_i(z; \alpha_i) = \frac{1}{\alpha_i} \exp \left\{ -\frac{\|z\|}{\alpha_i} \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Se consideran los valores de los parámetros  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  y  $\alpha_2 = \frac{2}{5}$ . Al igual que en la sección 4.5, las condiciones aleatorias iniciales  $Y_0^1$  e  $Y_0^2$  se generan como variables aleatorias Hilbert-valuadas gaussianas independientes a partir del operador integral  $R_{Y_0^i}^{1/2}$ ,  $i = 1, 2$ , con núcleo

$$r(z; \theta_i) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \theta_i}} \exp \left\{ -\frac{\|z\|^2}{2 \cdot \theta_i} \right\}, \quad z \in D,$$

siendo  $\theta_i = 1$ , para  $i = 1, 2$ . Se considera nuevamente que en la discretización del dominio espacial  $D$  para la generación de los datos funcionales espaciales

Tabla 5.1: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 359$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	1.5960695e-003	11	1.7098307e-003
2	1.6043694e-003	12	1.7951231e-003
3	1.7616126e-003	13	1.5747790e-003
4	1.4642326e-003	14	1.6040393e-003
5	1.7536707e-003	15	1.6265534e-003
6	1.4968470e-003	16	1.2773809e-003
7	1.8742052e-003	17	1.6605907e-003
8	1.6961446e-003	18	1.5579324e-003
9	1.6006569e-003	19	1.6329357e-003
10	1.6782950e-003	20	1.5906581e-003

$N = 441$ . Dichos datos funcionales espaciales se definen perturbando el proceso de interés  $Y$  con ruido de observación aditivo  $\epsilon$ . El ruido de observación se simula como en la sección 4.5, es decir, se considera ruido blanco gaussiano, independiente del proceso de interés, con varianza  $\sigma_\epsilon$  satisfaciendo

$$\sigma_\epsilon < \left[ \sup_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{\lambda_{\mathbf{k}}} \right) \right]^{-1},$$

siendo  $\lambda_k, k \in \mathbb{N}^2$ , el espectro puntual de la traza empírica sobre  $D_{OBS}$  del operador de covarianza espacial  $R_Y$  del proceso de interés  $Y$ .

Tras aplicar el filtrado de Kalman a los datos funcionales espaciales generados, en términos de la descomposición **POP** del proceso de interés, las tablas 5.1 y 5.2 proporcionan los errores cuadráticos funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 359$  y  $M = 411$ , respectivamente, para el caso en el que el proceso Hilbert-valuado  $\nu$  se define a partir de ruido  $L^2(D)$ -valuado, en términos del operador  $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ , donde

$$\sigma_\nu = \left[ \frac{0,65}{N\sqrt{2 \cdot \pi}} \right]^{1/2}.$$

Tabla 5.2: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 411$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	1.4499100e-003	11	1.5797232e-003
2	1.5097188e-003	12	1.6574293e-003
3	1.6831987e-003	13	1.4430845e-003
4	1.4204498e-003	14	1.5505154e-003
5	1.6302282e-003	15	1.4469766e-003
6	1.4554675e-003	16	1.2341193e-003
7	1.5826984e-003	17	1.5737648e-003
8	1.5068466e-003	18	1.5537094e-003
9	1.5373231e-003	19	1.5165218e-003
10	1.5539821e-003	20	1.4542742e-003

En el gráfico 5.1 se muestran, para cada tiempo, los errores cuadráticos funcionales. Se puede observar que cuando aumenta el tiempo, el error cuadrático medio funcional permanece estable. Al mismo tiempo, como es esperable, los errores cuadráticos funcionales decrecen cuando crece el orden de truncamiento.

Para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , los gráficos 5.2-5.5 muestran a la izquierda, el proceso original, y la estimación funcional del mismo, para los órdenes de truncamiento  $M = 411$  y  $M = 359$ , en el centro y en el lado derecho de cada figura. Dichos truncamientos corresponden, respectivamente, al 85 % y 95 % de la variabilidad global de los núcleos que definen los operadores integrales de autocorrelación  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ .

La variabilidad global se obtiene a partir del  $\max(M_1, M_2)$ , siendo  $M_1$  y  $M_2$  los truncamientos que determinan en cada núcleo una variabilidad del  $x$  %. De esta forma, dicho máximo será el valor que determina, como mínimo, una variabilidad del  $x$  % en ambos operadores.

A continuación se muestran los resultados obtenidos tras aplicar el filtrado de Kalman para núcleos de interacción espacio-temporal exponenciales en el caso en el que el proceso Hilbert-valuado  $\nu$  se genera a partir del operador

Gráfico 5.1: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 359$  (verde) y  $M = 411$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

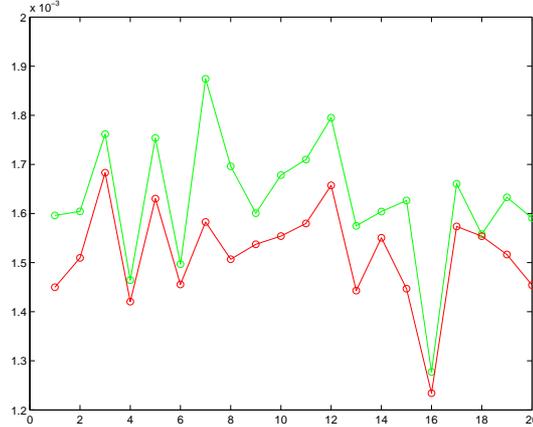


Gráfico 5.2: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

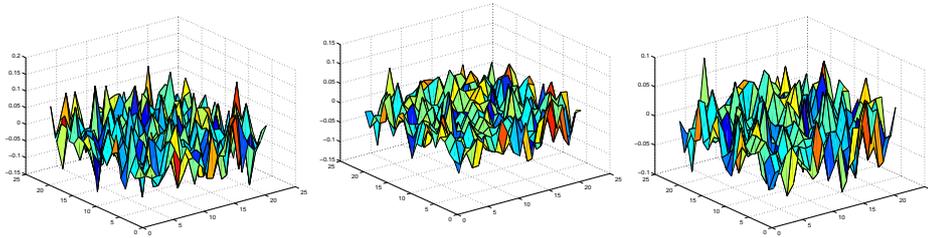


Gráfico 5.3: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

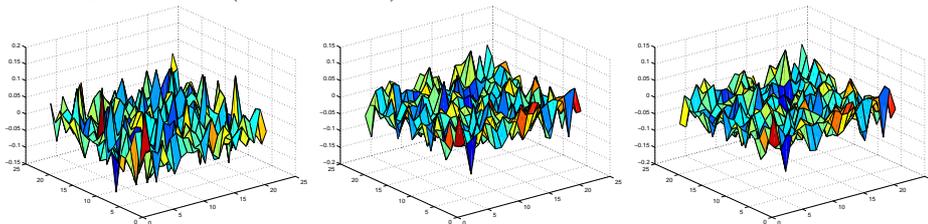


Gráfico 5.4: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

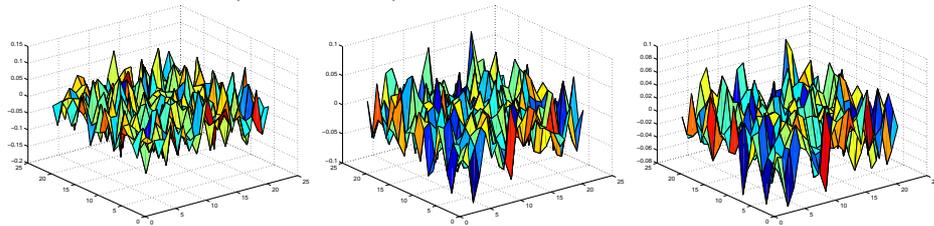


Gráfico 5.5: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

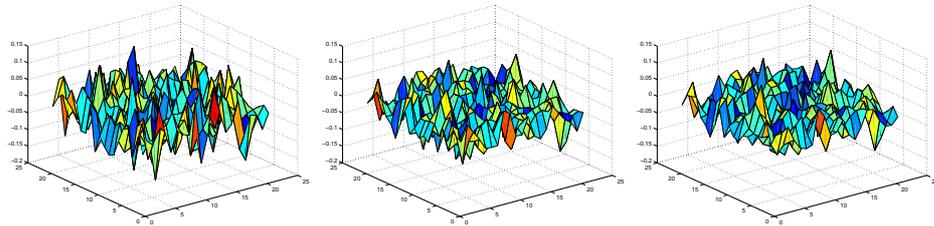


Tabla 5.3: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 359$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	3.4953073e-004	11	4.5176393e-004
2	4.5874064e-004	12	5.7829706e-004
3	4.5509213e-004	13	4.6001616e-004
4	3.7829075e-004	14	5.1219768e-004
5	4.7624231e-004	15	5.8464150e-004
6	4.0053539e-004	16	4.7068478e-004
7	4.1379064e-004	17	4.6967926e-004
8	4.4976228e-004	18	4.7969291e-004
9	4.9157136e-004	19	5.3342454e-004
10	4.6443220e-0044	20	4.8458272e-004

integral  $R_\nu^{1/2}$  con núcleo

$$s(z; \beta) = \frac{15}{16 \cdot \sqrt{6}} \cdot \left(1 + \frac{z}{3}\right)^{-7/2}. \quad (5.27)$$

Las tablas 5.3 y 5.4 muestran los errores cuadráticos funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 359$  y  $M = 411$ , respectivamente. Asimismo, el gráfico 5.6, proporciona su representación para  $M = 359$  (línea verde) y  $M = 411$  (línea roja), para los 20 tiempos de observación. En este caso, se puede apreciar que el error cuadrático funcional prácticamente coincide para ambos truncamientos. Nuevamente, para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , se representa en los gráficos 5.7-5.10 las realizaciones espaciales del proceso original (izquierda), y su estimación funcional para los órdenes de truncamiento  $M = 411$  y  $M = 359$ , en el centro y en el lado derecho de cada figura, respectivamente.

### 5.5.2. Autocorrelación gamma

En esta sección se muestran los resultados obtenidos para procesos ARH(2) con parámetros funcionales de autocorrelación definidos mediante operadores

Tabla 5.4: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 411$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	3.4960095e-004	11	4.5233059e-004
2	4.5849201e-004	12	5.7895230e-004
3	4.5464709e-004	13	4.6075605e-004
4	3.7807189e-004	14	5.1158114e-004
5	4.7653305e-004	15	5.8452752e-004
6	4.0058669e-004	16	4.7158058e-004
7	4.1389386e-004	17	4.6954559e-004
8	4.4944670e-004	18	4.7996373e-004
9	4.9113513e-004	19	5.3337032e-004
10	4.6458905e-004	20	4.8451447e-004

Gráfico 5.6: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 359$  (verde) y para  $M = 411$  (rojo), con innovaciones coloreadas.

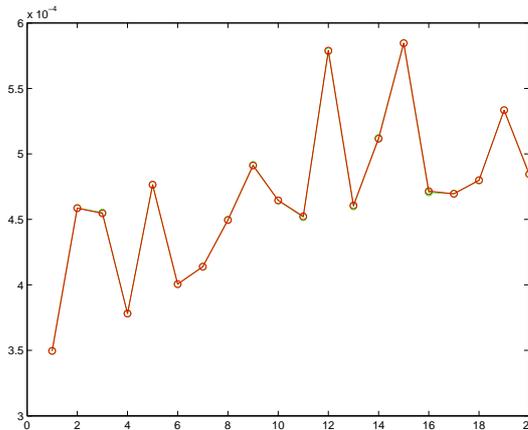


Gráfico 5.7: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.

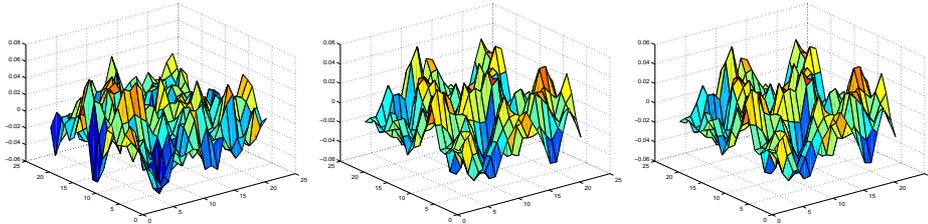


Gráfico 5.8: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.

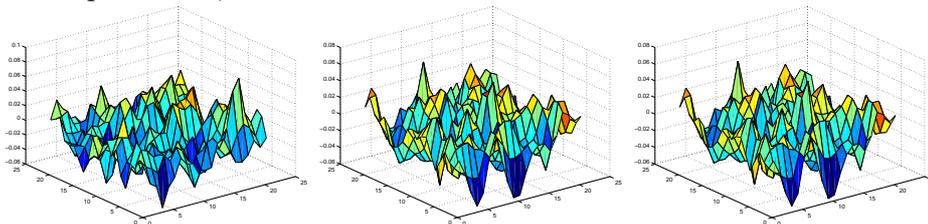


Gráfico 5.9: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

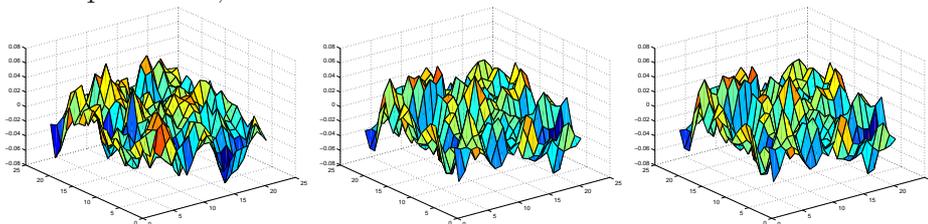
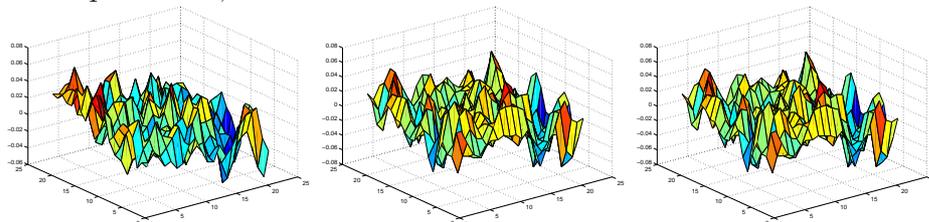


Gráfico 5.10: Autocorrelación Exponencial ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 411$  (centro) y  $M = 359$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.



integrales con núcleo

$$k(z; \gamma_i) = \frac{1}{\gamma_i^2} \cdot \|z\| \cdot \exp \left\{ -\frac{\|z\|}{\gamma_i} \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Los valores de los parámetros considerados son  $\gamma_1 = \frac{1}{2}$  y  $\gamma_2 = \frac{2}{5}$ . Las condiciones iniciales aleatorias y el ruido de observación se generan como en la sección anterior. La discretización del dominio espacial viene dada nuevamente por el parámetro  $N = 441$  localizaciones espaciales.

Para el caso de innovaciones con operador de covarianza diagonal, con  $\sigma_\nu = \left[ \frac{0,75}{N\sqrt{2} \cdot \pi} \right]^{1/2}$ , las tablas 5.5 y 5.6 proporcionan los errores cuadráticos funcionales asociados a las estimaciones obtenidas, tras aplicar el filtrado de Kalman, para los órdenes de truncamiento  $M = 291$  y  $M = 367$ , respectivamente.

En el gráfico 5.11 se muestran, para cada tiempo, los errores cuadráticos funcionales. Como en los casos anteriores, se observa la estabilización del error cuadrático funcional cuando avanza el tiempo, así como el decrecimiento de dicho error cuando aumenta el orden de truncamiento.

Para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , en los gráficos 5.12-5.15, se muestran las realizaciones espaciales del proceso original (izquierda) y su estimación funcional para los órdenes de truncamiento  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha). Dichos truncamientos cubren, como en los casos anteriores, un 85 % y 95 % de la variabilidad global de los núcleos asociados a los operadores de autocorrelación  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ .

Finalmente, en el caso de innovaciones coloreadas, las tablas 5.7 y 5.8

Tabla 5.5: Autocorrelación Gamma ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 291$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	1.7459165e-003	11	1.7925346e-003
2	1.8901009e-003	12	2.0384016e-003
3	1.7369055e-003	13	1.6991542e-003
4	1.7632543e-003	14	1.8054188e-003
5	1.7531353e-003	15	1.7525190e-003
6	1.7266098e-003	16	1.8148768e-003
7	1.7215011e-003	17	1.8489729e-003
8	1.8634738e-003	18	1.8012181e-003
9	1.8057497e-003	19	1.7454689e-003
10	1.5777408e-003	20	1.8803573e-003

Tabla 5.6: Autocorrelación Gamma ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 367$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	1.5958985e-003	11	1.6133558e-003
2	1.7131674e-003	12	1.8797974e-003
3	1.5801515e-003	13	1.5767137e-003
4	1.5903407e-003	14	1.5561389e-003
5	1.6484811e-003	15	1.6336497e-003
6	1.6110808e-003	16	1.6948252e-003
7	1.5621275e-003	17	1.6893239e-003
8	1.7269167e-003	18	1.5741664e-003
9	1.6297234e-003	19	1.5575608e-003
10	1.4664235e-003	20	1.6850468e-003

Gráfico 5.11: Autocorrelación Gamma ARH(2). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 291$  (verde) y  $M = 367$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

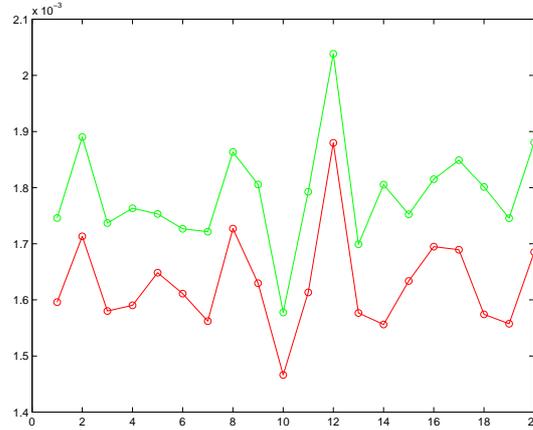


Gráfico 5.12: Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

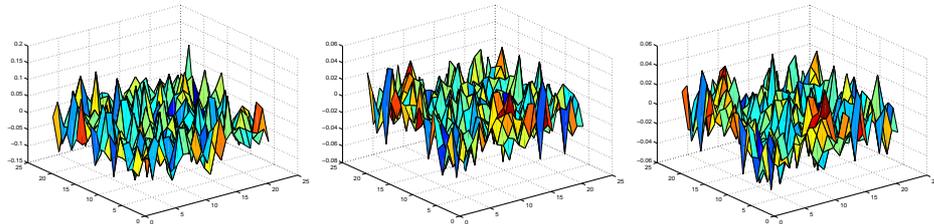


Gráfico 5.13: Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

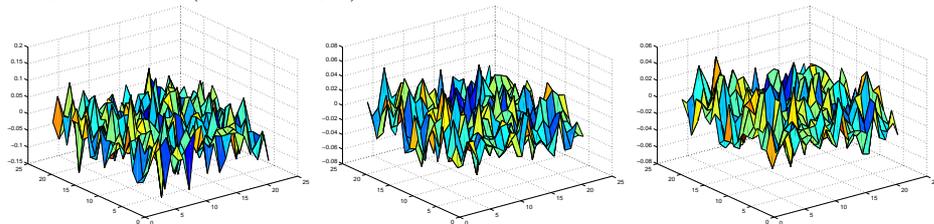


Gráfico 5.14: Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

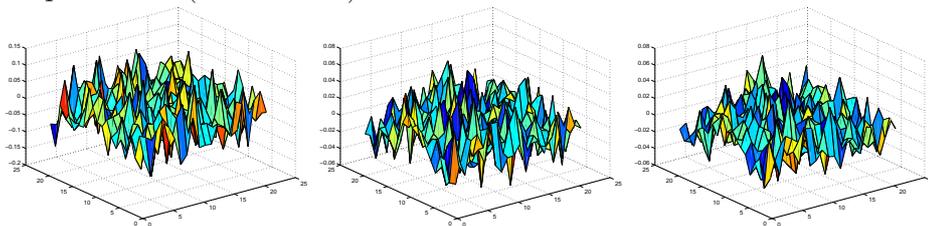


Gráfico 5.15: Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

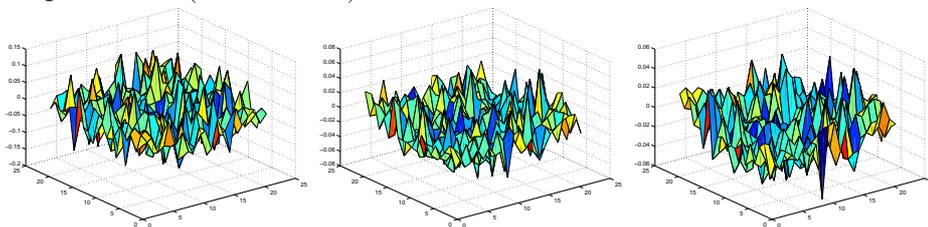


Tabla 5.7: Autocorrelación Gamma ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 291$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	4.2756620e-004	11	4.0912644e-004
2	3.8555106e-004	12	4.2665786e-004
3	4.7031854e-004	13	3.1420889e-004
4	4.0048324e-004	14	3.6837219e-004
5	3.7082862e-004	15	3.4752558e-004
6	4.0115914e-004	16	3.9310928e-004
7	3.8126569e-004	17	3.8645876e-004
8	3.9002477e-004	18	4.1966618e-004
9	4.0808747e-004	19	4.3726839e-004
10	3.4392851e-004	20	4.1080119e-004

muestran los errores cuadráticos funcionales asociados a las estimaciones obtenidas, tras aplicar el filtrado de Kalman en términos de coeficientes **POP**, para los órdenes de truncamiento  $M = 291$  y  $M = 367$ , respectivamente. El gráfico 5.16 proporciona la representación gráfica de dichos errores para los órdenes de truncamiento considerados en los instantes de tiempo de observación.

Para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , los gráficos 5.17-5.20 muestran las realizaciones espaciales del proceso original y su estimación funcional para los órdenes de truncamiento considerados,  $M = 291$  y  $M = 367$ , respectivamente.

### 5.5.3. Autocorrelación Cauchy

En esta sección se ilustran los resultados obtenidos sobre la implementación del filtrado de Kalman, a partir de la descomposición **POP**, para modelos ARH(2) definidos en términos de los operadores de autocorrelación  $\mathcal{A}_1$

Tabla 5.8: Autocorrelación Gamma ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 367$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	4.2537790e-004	11	4.0256928e-004
2	3.8490540e-004	12	4.2124207e-004
3	4.5432386e-004	13	3.1591135e-004
4	3.9875182e-004	14	3.5701378e-004
5	3.6661071e-004	15	3.4854312e-004
6	3.9612782e-004	16	3.9472346e-004
7	3.7617473e-004	17	3.8614251e-004
8	3.8928076e-004	18	4.2007733e-004
9	4.0147799e-004	19	4.2689531e-004
10	3.3725882e-004	20	4.1173727e-004

Gráfico 5.16: Autocorrelación Gamma ARH(2). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 291$  (verde) y para  $M = 367$  (rojo), con innovaciones coloreadas.

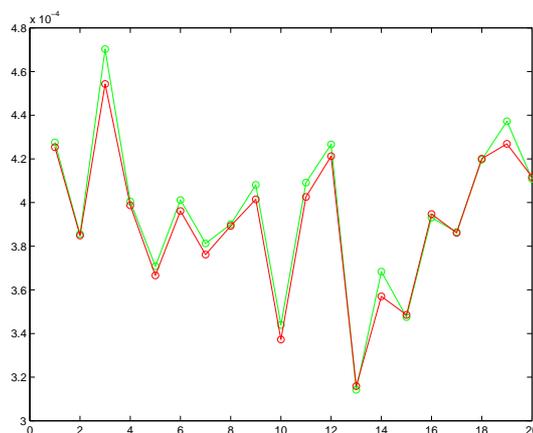


Gráfico 5.17: Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.

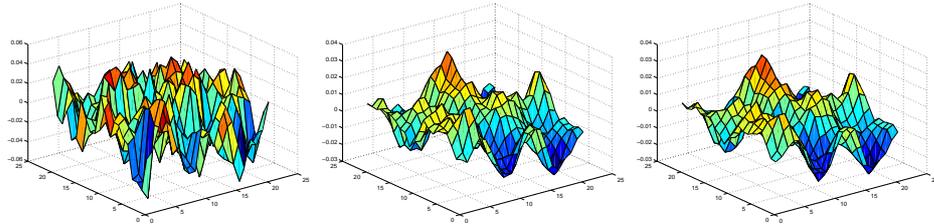


Gráfico 5.18: Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.

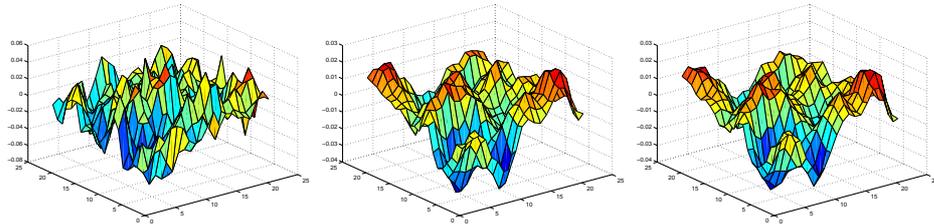


Gráfico 5.19: Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

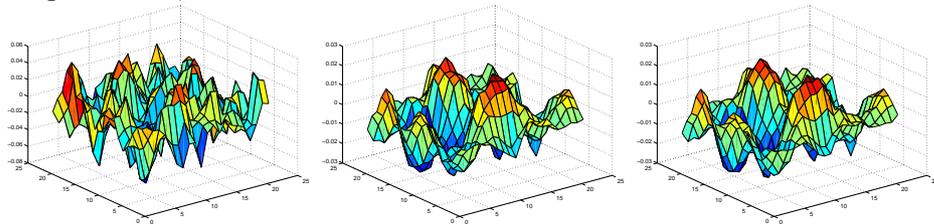
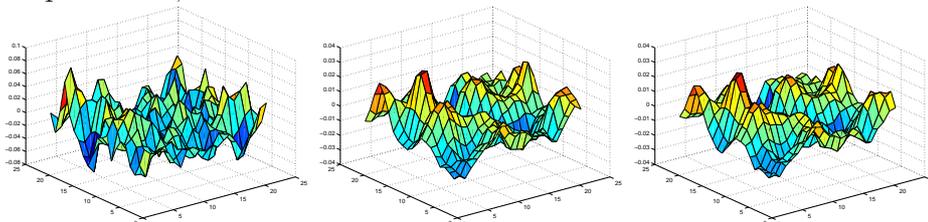


Gráfico 5.20: Autocorrelación Gamma ARH(2). Proceso original (izquierda) y estimaciones funcionales para  $M = 367$  (centro) y  $M = 291$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.



y  $\mathcal{A}_2$  con núcleos

$$k_i(z; \delta_i) = \frac{1}{\delta_i \cdot \pi \left[ 1 + \left( \frac{\|z\|+7}{\delta_i} \right)^2 \right]}, \quad i = 1, 2,$$

siendo  $\delta_1 = \frac{1}{4}$  y  $\delta_2 = \frac{1}{5}$ . En este caso, los órdenes de truncamiento vienen dados por  $M = 97$  y  $M = 274$ , que cubre en ambos núcleos el 85% y el 95% de la variabilidad global. La generación de los datos funcionales espaciales, se realiza, al igual que antes, sobre una rejilla regular de dimensiones  $21 \times 21$ , considerando 20 tiempos de observación, con los mismos parámetros y operadores involucrados en la generación de las condiciones iniciales y del ruido de observación. Las tablas 5.9 y 5.10 muestran los errores cuadráticos funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 97$  y  $M = 274$ , respectivamente, para innovaciones generadas en términos del operador  $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ , donde  $\sigma_\nu = \left[ \frac{0,85}{N\sqrt{2 \cdot \pi}} \right]^{1/2}$ . Su representación viene dada en el gráfico 5.21. Los gráficos 5.22-5.25 muestran las trayectorias espaciales del proceso original (izquierda) y su estimación funcional para los órdenes de truncamiento  $M = 274$  (centro) y  $M = 97$  (derecha), en los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ .

Finalmente, se muestran los resultados obtenidos para autocorrelación tipo Cauchy e innovaciones generadas a partir del operador  $R_\nu^{1/2}$  dado por la ecuación (5.27). Las tablas 5.11 y 5.12 muestran los errores cuadráticos funcionales para los órdenes de truncamiento  $M = 97$  y  $M = 274$ , respectivamente. En el gráfico 5.26 se muestra su representación. Las realizaciones espaciales del proceso de interés en los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , así como su estimación funcional, para los órdenes de truncamiento  $M = 274$  y  $M = 97$ , se muestran en los gráficos 5.27-5.30.

Tabla 5.9: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 97$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	1.9371713e-003	11	2.0053758e-003
2	1.8684818e-003	12	2.1266081e-003
3	1.9289128e-003	13	2.0575438e-003
4	2.0169317e-003	14	2.1753813e-003
5	1.7822778e-003	15	1.9699351e-003
6	1.7817578e-003	16	2.0589627e-003
7	1.7932503e-003	17	2.0301767e-003
8	1.9782959e-003	18	1.8636596e-003
9	1.8613766e-003	19	1.7866287e-003
10	2.0256018e-003	20	2.1829314e-003

Tabla 5.10: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 97$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	1.5850816e-003	11	1.6817531e-003
2	1.5589186e-003	12	1.7390160e-003
3	1.6005386e-003	13	1.7095279e-003
4	1.6945611e-003	14	1.7852773e-003
5	1.4801001e-003	15	1.6278658e-003
6	1.4409625e-003	16	1.7669946e-003
7	1.5044778e-003	17	1.6759068e-003
8	1.6267201e-003	18	1.4584384e-003
9	1.5121739e-003	19	1.4608093e-003
10	1.6806394e-003	20	1.7490399e-003

Gráfico 5.21: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 97$  (verde) y para  $M = 274$  (rojo) ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

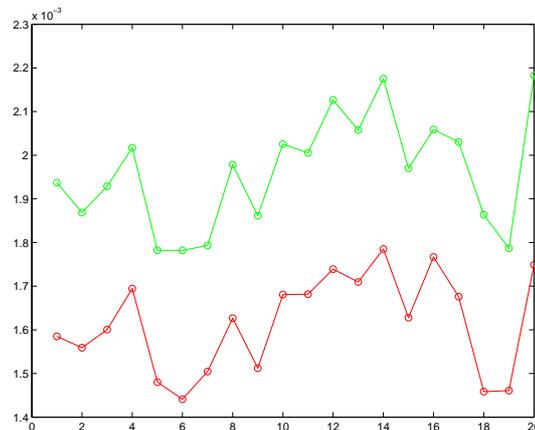


Gráfico 5.22: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

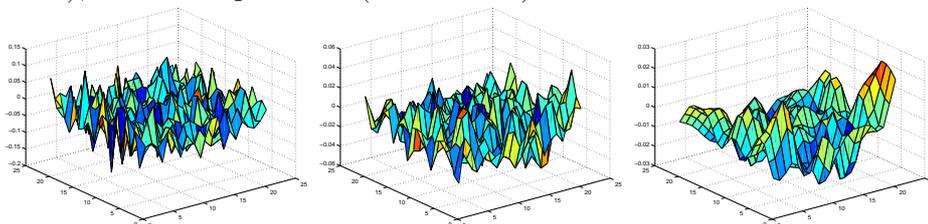


Gráfico 5.23: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

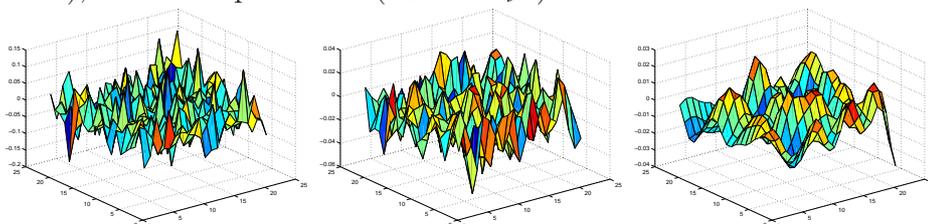


Gráfico 5.24: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

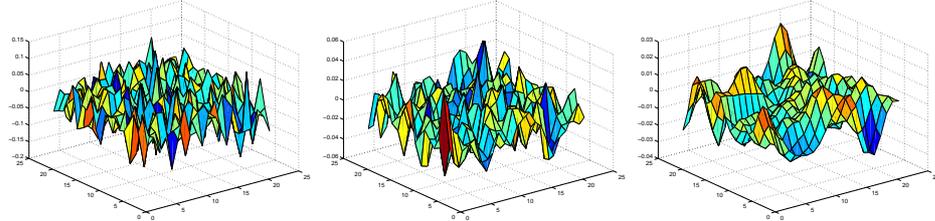


Gráfico 5.25: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$  ( $R_\nu^{1/2} = \sigma_\nu I$ ).

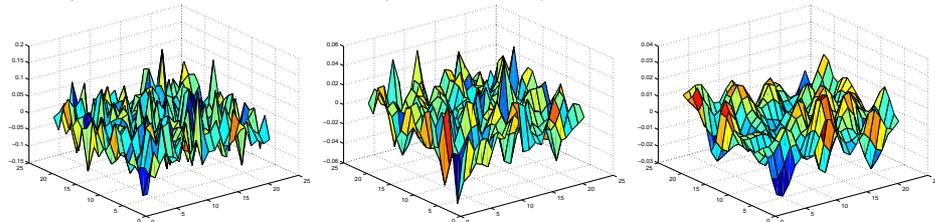


Tabla 5.11: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 97$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	3.6896515e-004	11	3.7392222e-004
2	3.3517390e-004	12	3.4780958e-004
3	3.8233765e-004	13	3.7206144e-004
4	3.0094519e-004	14	4.6673150e-004
5	3.9657062e-004	15	3.5322793e-004
6	3.5869694e-004	16	3.5791809e-004
7	4.6412525e-004	17	3.9305967e-004
8	3.5948204e-004	18	4.0520725e-004
9	4.0864829e-004	19	4.4229755e-004
10	3.5074277e-004	20	4.0727483e-004

Tabla 5.12: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Error cuadrático funcional para  $M = 274$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	3.5172280e-004	11	3.6502124e-004
2	3.3399769e-004	12	3.3797356e-004
3	3.6762848e-004	13	3.6382757e-004
4	2.9133853e-004	14	4.5634845e-004
5	3.8518514e-004	15	3.3019639e-004
6	3.5896159e-004	16	3.5087055e-004
7	4.5580905e-004	17	3.7720207e-004
8	3.4592088e-004	18	3.8075645e-004
9	3.8510458e-004	19	4.3153213e-004
10	3.4241130e-004	20	3.9386436e-004

Gráfico 5.26: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Errores cuadráticos funcionales para  $M = 97$  (verde) y para  $M = 274$  (rojo), con innovaciones coloreadas.

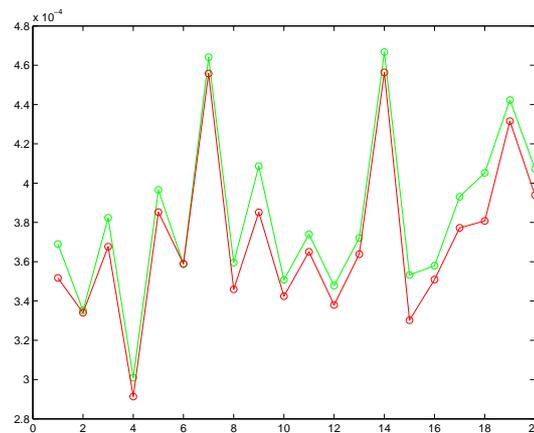


Gráfico 5.27: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.

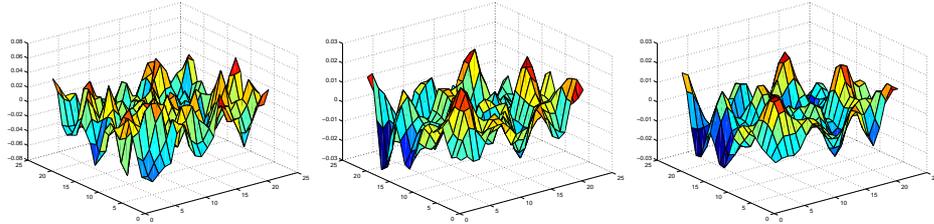


Gráfico 5.28: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.

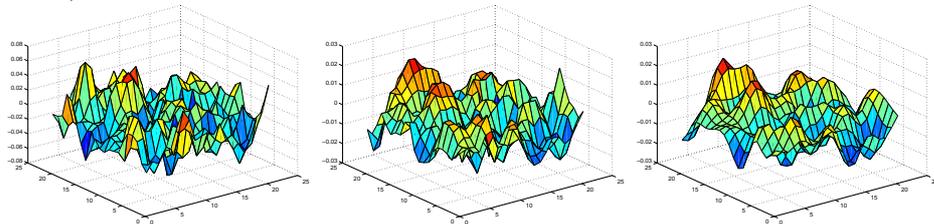


Gráfico 5.29: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

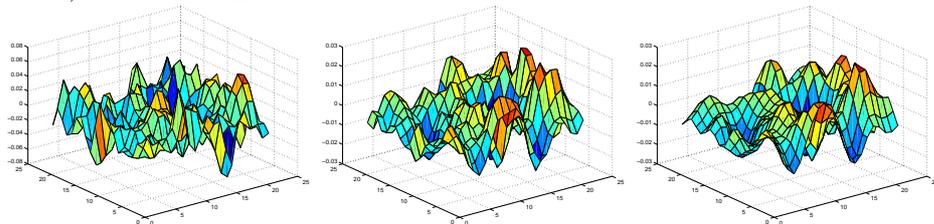
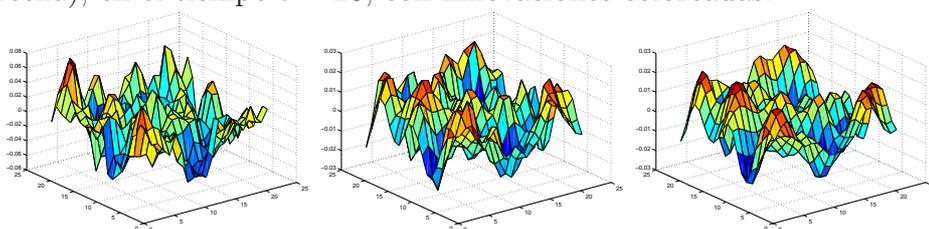


Gráfico 5.30: Autocorrelación Cauchy ARH(2). Proceso Cauchy original (izquierda) y proceso estimado, para  $M = 274$  (centro) y para  $M = 97$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.





---

## PARTE III

# Estimación máximo-verosímil y líneas futuras

---



# CAPÍTULO 6

---

## Combinación del filtrado de Kalman y el algoritmo E.M.

---

En el presente capítulo, se estudia el problema de estimación de los parámetros funcionales, operadores de autocorrelación y de covarianza, involucrados en la formulación de modelos ARH( $p$ ),  $p \geq 1$ . En la literatura reciente, este problema ha sido ampliamente estudiado, diseñándose, principalmente, estimadores basados en el método de los momentos, así como en la aplicación de métodos de proyección para el cálculo de dicho estimadores. En este capítulo, a partir de un diseño del algoritmo EM, se obtienen aproximaciones de los estimadores por máxima verosimilitud de los parámetros funcionales involucrados en los modelos ARH( $p$ ),  $p \geq 1$ . En el algoritmo EM diseñado, se utiliza el filtrado y suavizamiento de Kalman para el cálculo del valor esperado de la verosimilitud (*Expectation step*), y se aplican técnicas estándar para distribuciones gaussianas multivariantes para la maximización de la verosimilitud esperada (*Maximization step*). Los resultados de este capítulo se hallan recogidos en el trabajo de Ruiz-Medina y Angulo [81].

## 6.1. Algoritmo EM

En esta sección se hace una breve descripción de la filosofía y pasos que constituyen el planteamiento general del algoritmo EM para el cálculo de estimadores por máxima verosimilitud a partir de datos incompletos.

### 6.1.1. Descripción del algoritmo EM

El algoritmo de *Expectación-Maximización*, más conocido como algoritmo EM, fue presentado en 1977 por Dempster, Laird y Rubin [23]. Aunque el método había sido ya propuesto con anterioridad en muchas ocasiones por otros autores, la publicación de 1977 generaliza el método y supone un punto de partida para el desarrollo del mismo. Dicho algoritmo constituye una herramienta iterativa para obtener la estimación máximo verosímil de los parámetros desconocidos de la distribución de probabilidades de una variable aleatoria. Cada iteración del algoritmo consta de dos pasos respectivamente referidos como *Expectation step*, para el cálculo de la verosimilitud esperada, y *Maximization step*, para la maximización de la verosimilitud esperada. Su formulación se describe brevemente a continuación (ver por ejemplo, Dempster et al. [23], McLachlan y Krishnan [64]).

La principal aplicación de este algoritmo, según se ha comentado anteriormente, es la estimación por máxima verosimilitud a partir de datos incompletos. Se considera entonces la muestra dividida en un vector de datos incompletos (observable) y un vector de datos no observable. Se requiere una transformación apropiada  $F$  que relacione el vector de datos observados (incompletos) con el vector de datos completo. En el paso *Expectation* se utilizará la función de densidad de probabilidad  $f_{\mathcal{Z}}(z; \Theta)$  asociada al conjunto de datos completos, siendo

$$\mathcal{Z} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

el vector de datos completos, constituido por el vector  $\mathcal{Y}$  de datos faltantes junto con el vector  $\mathcal{X}$  de datos observados. Por tanto,

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{Z}}(z; \Theta) &= f_{\mathcal{Z}}(x, y; \Theta) \\ &= f_{\mathcal{X}}(x; \Theta) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y; x, \Theta). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Se calcula entonces la esperanza condicionada de la verosimilitud  $\mathcal{L}(\Theta; \mathcal{Z}) = f_{\mathcal{Z}}(x, y; \Theta)$  de los datos completos, con respecto a los datos faltantes, dados

los datos incompletos u observados. En la evaluación de este paso se irán utilizando diferentes valores  $\Theta^{(i)}$ , calculados en las diferentes iteraciones,  $i$ , de este algoritmo, a partir de unos valores iniciales. Equivalentemente, se calcula la verosimilitud esperada condicionada

$$Q(\Theta, \Theta^{(i-1)}) = E_{\Theta^{(i-1)}} [\ln \mathcal{L}(\Theta; \mathcal{Z}) | \mathcal{X}]. \quad (6.2)$$

Finalmente, se calculan los estimadores de los parámetros desconocidos que maximizan la función (6.2).

Estos dos pasos se desarrollan de forma iterativa tantas veces como sea necesario. Se verifica (ver, por ejemplo, Collins [18]) que la función de verosimilitud no decrece en cada iteración, con lo cual, el algoritmo converge a un máximo local de la función de verosimilitud, y entonces se tiene garantizada una solución al problema planteado.

## 6.2. Formulación del algoritmo EM a partir de datos funcionales

En esta sección se formula un algoritmo EM a partir de datos funcionales espaciales para la estimación de los operadores (parámetros funcionales) involucrados en la formulación de modelos ARH(p),  $p \geq 1$ . Se comienza abordando el problema de inicialización del algoritmo mediante estimadores paramétricos funcionales basados en el método de los momentos.

### 6.2.1. Valores iniciales

Para obtener la convergencia al máximo de la función de verosimilitud es fundamental una elección adecuada de los parámetros iniciales. En el caso ARH(1), los valores iniciales que a continuación se proponen son estimadores de los operadores de covarianza y covarianza cruzada  $R_{Z_0}$  y  $R_{Y_0 Y_1} = R_{Z_0 Z_1}$  obtenidos a partir del método de los momentos.

En el caso en el que el operador de covarianza del ruido de observación es proporcional al operador identidad, el estimador inicial  $\hat{\sigma}_\epsilon$  del elemento que

define la diagonal principal de tal operador se obtiene a partir de los datos, considerando el efecto 'pepita' (*nugget effect*) del variograma empírico en un entorno de cero (ver, por ejemplo, Cressie [14]). El operador de covarianza espacial  $R_{Y_0}$  del proceso de interés  $Y$  se estima entonces como

$$\widehat{R}_{Y_0} = \widehat{R}_{Z_0} - \widehat{\sigma}_\epsilon.$$

Puesto que el operador de covarianza espacial  $R_{Y_0}$  del proceso de interés  $Y$  y el operador de covarianza cruzada  $R_{Y_0Y_1}$  se definen mediante la ecuación

$$\begin{aligned} R_{Y_0}(\phi) &= E[Y_0 \langle Y_0, \phi \rangle_H], \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(R_{Y_0}), \\ R_{Y_0Y_1}(\phi) &= E[Y_0 \langle Y_1, \phi \rangle_H], \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(R_{Y_0Y_1}), \end{aligned}$$

siendo  $\mathcal{D}(A)$  el dominio de funciones donde actúa el operador  $A$ . Los estimadores funcionales, basados en el método de los momentos, de los operadores  $R_{Y_0}$  y  $R_{Y_0Y_1}$  vienen dados por

$$\widehat{R}_{Y_0} = \frac{1}{T} \left[ \sum_{i=1}^T Z_i \otimes Z_i \right] - \left[ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Z_i \right] \otimes \left[ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Z_i \right] - \widehat{\sigma}_\epsilon^2 Id, \quad (6.3)$$

$$\widehat{R}_{Y_0Y_1} = \frac{1}{T-1} \left[ \sum_{i=1}^{T-1} Y_i \otimes Y_{i+1} \right] - \left[ \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^{T-1} Y_i \right] \otimes \left[ \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^{T-1} Y_{i+1} \right]. \quad (6.4)$$

En la ecuación anterior,  $\widehat{\sigma}_\epsilon^2$  denota, como antes, el estimador inicial de  $\sigma_\epsilon^2$ , basada en el efecto 'pepita' del semivariograma empírico funcional

$$\widehat{\gamma}(\Delta t) = \frac{1}{2N(\Delta t)} \sum_{i,j \in S(\Delta t)} \|Y_{t_i} - Y_{t_j}\|_H^2, \quad (6.5)$$

siendo

$$S(\Delta t) = \{(i, j) \mid |t_i - t_j| = \Delta t\},$$

y  $N(\Delta t)$  el número de pares en  $S(\Delta t)$ .

El estimador funcional (6.5), basado en el método de los momentos en el contexto de variables aleatorias Hilbert-valuadas, posee propiedades similares al estimador clásico del variograma propuesto por Matheron [63]. Puesto que  $2\widehat{\gamma}(\Delta t)$  proporciona el estimador, varianza muestral, para  $E\|Y(\Delta t)\|_H^2$ , la varianza de la variable Hilbert-valuada  $Y(\Delta t) = Y_{t+\Delta t} - Y_t$ , los valores

de  $\hat{\gamma}(\Delta t)$ , cuando  $\Delta t$  tiende a cero, proporcionan una aproximación de la cantidad  $E[\|\epsilon_t\|_H^2] \prec \sigma_\epsilon^2$ . Esto es

$$\begin{aligned} E\|Y(\Delta t)\|_H^2 &= E\|Y_{t+\Delta t} - Y_t\|_H^2 + E\|\epsilon_{t+\Delta t} - \epsilon_t\|_H^2 \\ &\quad + 2E\langle Y_{t+\Delta t} - Y_t, \epsilon_{t+\Delta t} - \epsilon_t \rangle_H \\ &\sim 2E\|\epsilon_t\|_H^2 \prec 2\sigma_\epsilon^2, \quad \text{cuando } \Delta t \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

A partir de las ecuaciones (6.3) y (6.4) se definen las siguientes estimaciones del operador diagonal  $\Lambda$  asociado al espectro puntual del operador de autocorrelación, así como del operador de covarianza espacial  $R_\nu$  del proceso de innovación proyectado en el sistema de autofunciones derecho

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= \Phi^* \hat{R}_{Y_0 Y_1} \hat{R}_{Y_0}^{-1} \Psi, \\ \Phi^* \hat{R}_\nu \Phi &= \Phi^* \hat{R}_{Y_0} \Phi - \Phi^* \hat{R}_{Y_0 Y_1} \Phi \hat{\Lambda}^T \\ &\quad - \hat{\Lambda} \Phi^* \hat{R}_{Y_0 Y_1}^* \Phi + \hat{\Lambda} \Phi^* \hat{R}_{Y_0} \Phi \hat{\Lambda}^T, \end{aligned} \quad (6.7)$$

denotando por  $\Phi$  y  $\Psi$ , como antes, los operadores proyección sobre los subespacios generados por los sistemas de autofunciones derechos e izquierdos, respectivamente. Cuando tales autofunciones son desconocidas, se pueden considerar los sistemas derechos e izquierdos empíricos asociados a la diagonalización **POP** del estimador  $\hat{\mathcal{A}}$  definido mediante la identidad

$$\hat{\mathcal{A}} = \hat{R}_{Y_0 Y_1} \hat{R}_{Y_0}^{-1}.$$

Para el cálculo de dicho estimador se aplicarán métodos numéricos de proyección para la inversión estable de  $\hat{R}_{Y_0}$  (ver, por ejemplo, Bosq [7] y Guillas [42]). Específicamente, se proyectará el estimador  $\hat{\mathcal{A}}^T = \hat{R}_{Y_0 Y_1}^T [\hat{R}_{Y_0}^T]^{-1}$ , basado en las observaciones funcionales espaciales asociadas a los  $T$  tiempos de observación considerados, en el subespacio de dimensión finita generado por las autofunciones asociadas a  $\hat{R}_{Y_0}^T$ , obteniéndose

$$\hat{\mathcal{A}}^T = \hat{\Phi}_M \hat{R}_{Y_0 Y_1}^T (\hat{R}_{Y_0}^{T,M})^{-1} \hat{\Phi}_M,$$

donde  $\hat{\Phi}_M$  denota ahora el operador de proyección sobre el subespacio de  $H$  generado por  $M$  autofunciones empíricas y

$$\hat{R}_{Y_0}^{T,M} = \sum_{j=1}^M \hat{\lambda}_j \hat{\phi}_j \otimes \hat{\phi}_j,$$

siendo  $\{\hat{\lambda}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  el sistema de autovalores asociados con el sistema de autofunciones empíricas  $\{\hat{\phi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  (ver Bosq [7] y Guillas [42], por ejemplo, donde

se estudian valores óptimos de  $M$  para la consistencia de  $\hat{\mathcal{A}}^T$  y la estabilidad de dicho estimador).

En el caso en el que el ruido de observación tiene operador de covarianza no diagonal, la proyección de dicho operador,  $R_\epsilon$ , sobre el sistema de autofunciones de  $R_{Y_0}$  viene dada por

$$\Phi^* R_\epsilon = \Phi^* R_{Z_0} - \tilde{\Lambda} \Phi^*, \quad (6.8)$$

puesto que

$$\Phi^* R_{Y_0} = \tilde{\Lambda} \Phi^*,$$

si se tiene en cuenta que  $R_{Y_0} = \Phi \tilde{\Lambda} \Phi^*$  y  $\Phi^* \Phi = I$ , siendo  $I$ , como antes, el operador identidad, y  $\tilde{\Lambda}$  el operador diagonal definido a partir del espectro puntual de  $R_{Y_0}$ . Un estimador de  $R_\epsilon$  se obtiene entonces sustituyendo en (6.8), los operadores  $\Phi$  y  $\Lambda$  por los correspondientes operadores empíricos y el operador  $R_{Z_0}$  por su estimación, basada en el método de los momentos.

En el caso ARH( $p$ ),  $p \geq 1$ , los valores iniciales y estimadores funcionales basados en el método de los momentos se definen de forma similar. Específicamente, el estimador funcional inicial del operador de covarianza espacial del proceso de interés  $Y$  se define, al igual que en el caso ARH(1), a partir del estimador funcional, basado en el método de los momentos, del operador de covarianza espacial  $R_Z$  del proceso de observación  $Z$  y del estimador del operador de covarianza del ruido de observación. Las estimaciones funcionales de los operadores de covarianza cruzada en los diferentes retardos se definen asimismo mediante la identidad

$$\hat{R}_{Y_0 Y_k} = \frac{1}{T-k} \left[ \sum_{i=1}^{T-k} Y_i \otimes Y_{i+k} \right] - \left[ \frac{1}{T-k} \sum_{i=1}^{T-k} Y_i \right] \otimes \left[ \frac{1}{T-k} \sum_{i=1}^{T-k} Y_{i+k} \right], \quad (6.9)$$

para  $k = 1, \dots, p$ . Finalmente, los estimadores iniciales de  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p$  se obtienen, a partir de los estimadores anteriores, en la misma línea de los estimadores de momentos de los parámetros de autorregresión en modelos AR( $p$ ), a partir de la formulación vectorial ARH(1).

Nótese que en este capítulo y en los anteriores se ha utilizado la notación  $T$  para la trasposición de vectores y matrices. Asimismo, se ha utilizado la notación  $T$  para el número de tiempos de observación. Finalmente, se

ha utilizado en esta sección la notación  $\hat{B}^T$  para indicar el estimador del operador  $B$  basado en la información muestral funcional espacial recogida en los  $T$  tiempos de observación.

### 6.2.2. Algoritmo EM para modelos ARH(1)

En esta sección se diseña un algoritmo EM para la estimación de los parámetros funcionales que definen el modelo ARH(1). Considerando nuevamente el modelo de observación

$$Z_t = Y_t + \epsilon_t,$$

definido en términos del proceso de interés  $Y$  satisfaciendo (4.1), perturbado por el proceso Hilbertiano  $\epsilon_t$  de ruido. Se considera el vector de datos funcionales completo definido como la fusión del vector funcional no observable y el vector funcional de datos incompletos observados. Tras la proyección del proceso de interés y del ruido de observación sobre el sistema derecho de autofunciones, el vector de datos completos  $X$  se define como la fusión de los vectores funcionales  $a = \Phi_M^* Y$  y  $e = \Phi_M^* \epsilon$ , esto es

$$\begin{aligned} X^T &= [a^T e^T] \\ &= [\Phi_M^* Y_0(\cdot), \Phi_M^* Y_1(\cdot), \dots, \Phi_M^* Y_T(\cdot); \Phi_M^* \epsilon_1(\cdot), \dots, \Phi_M^* \epsilon_T(\cdot)]^T, \end{aligned}$$

denotando, como antes, por  $\Phi_M$  el operador proyección sobre el subespacio generado por las  $M$  autofunciones derechas asociadas con los  $M$  primeros valores singulares y siendo  $T$  el número de instantes de tiempo donde se observan los datos funcionales espaciales.

Se supone que el proceso de innovación  $\nu$  es un proceso Hilbert-valuado gaussiano, para cada  $t > 0$ ,  $b(t) = \Phi_M^* \nu_t$  se distribuye entonces según una normal multivariante con vector de medias nulo y con matriz de covarianzas dada por  $\Phi_M^* R_\nu \Phi_M$ , siendo  $R_\nu$  el operador de covarianza espacial asociado a la sucesión estacionaria  $\{\nu_t, t \in \mathbb{N}\}$ . El ruido de observación se supone también un proceso Hilbert-valuado gaussiano. Se tiene entonces que su proyección  $e(t) = \Phi_M^* \epsilon_t$  se distribuye según una normal multivariante con vector de medias nulo y con matriz de covarianzas dada por  $\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M$ , siendo  $R_\epsilon$  el operador de covarianza espacial asociado a la sucesión estacionaria  $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ . Por tanto, bajo la condición de normalidad de las condiciones iniciales, el proceso de interés  $Y$  y el proceso de observación  $Z$  son procesos gaussianos.

Equivalentemente,

$$\Phi_M^*(Y_t(\cdot) - \mathcal{A}Y_{t-1}(\cdot)) \sim N(\mathbf{0}, \Phi_M^* R_\nu \Phi_M).$$

Y puesto que

$$\Phi_M^*(Y_t(\cdot) - \mathcal{A}Y_{t-1}(\cdot)) = a(t) - \Lambda_M a(t-1),$$

denotando  $J(t) = a(t) - \Lambda_M a(t-1)$ , se tiene

$$f_J(j; \mathcal{A}, R_\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Phi_M^* R_\nu \Phi_M|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{J(t)^T (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} J(t)}{2} \right\}.$$

Similarmente, puesto que

$$e(t) \sim N(0, \Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M),$$

se tiene

$$f_\epsilon(e; R_\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{e(t)^T (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} e(t)}{2} \right\},$$

donde  $e(t) = \Phi_M^* \epsilon_t$ .

Por tanto, para una muestra aleatoria de tamaño  $T$ ,

$$\begin{aligned} f_J(J_1(\cdot), \dots, J_T(\cdot); \mathcal{A}, R_\nu) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi|\Phi_M^* R_\nu \Phi_M|}\right)^T} \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T J(i)^T (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} J(i) \right\}. \\ f_\epsilon(e_1(\cdot), \dots, e_T(\cdot); R_\epsilon) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi|\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M|}\right)^T} \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T e(i)^T (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} e(i) \right\}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

De esta forma, puesto que  $\epsilon$  es independiente de  $Y$ ,

$$f_{J,\epsilon}(j; \Theta) = f_J(j; \Theta_1) \cdot f_\epsilon(e; \Theta_2), \tag{6.11}$$

donde  $\Theta = (\mathcal{A}, R_\nu, R_\epsilon)^T = (\Theta_1, \Theta_2)$ , siendo  $\Theta_1 = (\mathcal{A}, R_\nu)$  y  $\Theta_2 = R_\epsilon$  los parámetros funcionales que caracterizan las densidades de  $\nu$  y  $\epsilon$ .

Aplicando el logaritmo neperiano en la ecuación (6.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \ln f_{J,\epsilon}(j, e) &= \ln f_J(j; \Theta_1) + \ln f_\epsilon(e; \Theta_2) \\ &= C - \frac{T}{2} [\ln |\Phi_M^* R_\nu \Phi_M| + \ln |\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M|] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T J(i)^T (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} J(i) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T e(i)^T (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} e(i), \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde  $C$  es una constante independiente del vector de parámetros funcionales  $\Theta$ . La ecuación anterior se obtiene bajo la suposición de que  $T$  es suficientemente grande, lo que permite considerar despreciable la contribución de las condiciones iniciales aleatorias.

Teniendo en cuenta que

$$J(i)_{1 \times M}^T ([\Phi_M^* R_\nu \Phi_M]^{-1})_{M \times M} J(i)_{M \times 1},$$

es de dimensión  $1 \times 1$ , entonces se verifica que

$$\sum_{i=1}^T J(i)^T (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} J(i) = \text{traza} \left( \sum_{i=1}^T J(i)^T (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} J(i) \right).$$

Por otro lado, dadas dos matrices cualesquiera  $X$  e  $Y$ , de dimensiones adecuadas, se verifica

$$\text{traza}(XY) = \text{traza}(YX).$$

Entonces, llamando  $X_{1 \times M} = J(i)^T$  e  $Y_{M \times 1} = (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} J(i)$ , se verifica que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T J(i)^T (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} J(i) &= \text{traza} \left( \sum_{i=1}^T (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} J(i) J(i)^T \right) \\ &= \text{traza} \left( (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^T J(i) J(i)^T \right] \right), \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 J(i)J(i)^T &= (a(i) - \Lambda_M a(i-1)) (a(i) - \Lambda_M a(i-1))^T \\
 &= (a(i) - \Lambda_M a(i-1)) (a(i)^T - a(i-1)^T \Lambda_M^T) \\
 &= a(i)a(i)^T - a(i)a(i-1)^T \Lambda_M^T \\
 &\quad - \Lambda_M a(i-1)a(i)^T + \Lambda_M a(i-1)a(i-1)^T \Lambda_M^T,
 \end{aligned}$$

se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
 \text{traza} \left( (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^T (a(i)a(i)^T - a(i)a(i-1)^T \Lambda_M^T \right. \right. \\
 \left. \left. - \Lambda_M a(i-1)a(i)^T + \Lambda_M a(i-1)a(i-1)^T \Lambda_M^T) \right] \right).
 \end{aligned}$$

De forma totalmente análoga, se obtiene

$$\sum_{i=1}^T e(i)^T (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} e(i) = \text{traza} \left( (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^T e(i)e(i)^T \right] \right).$$

Por tanto, la ecuación (6.12) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 \ln f_{J,\epsilon}(j, e; \Theta) &= C - \frac{T}{2} [\ln |\Phi_M^* R_\nu \Phi_M| + \ln |\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M|] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{traza} \left( (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^T (a(i)a(i)^T \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - a(i)a(i-1)^T \Lambda_M^T - \Lambda_M a(i-1)a(i)^T \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Lambda_M a(i-1)a(i-1)^T \Lambda_M^T) \right] \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{traza} \left( (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^T e(i)e(i)^T \right] \right). \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

La esperanza condicionada a los datos incompletos viene entonces dada por

$$\begin{aligned}
 E_{\hat{\Theta}^{(l)}} [\ln f_{J,\epsilon}(j, e; \Theta) | Z] &= C - \frac{T}{2} [\ln |\Phi_M^* R_\nu \Phi_M| + \ln |\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M|] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{traza} \left( (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} [C_Y - B_Y \Lambda_M^T - \Lambda_M B_Y^T \right. \\
 &\quad \left. + \Lambda_M A_Y \Lambda_M^T] \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{traza} \left( (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} C_e \right), \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

donde  $\hat{\Theta}^{(l)}$  denota la estimación de  $\Theta$  tras  $l$  iteraciones y

$$\begin{aligned} C_Y &= \sum_{i=1}^T \mathbb{E} [(a(i)a(i)^T | Z)], \\ B_Y &= \sum_{i=1}^T \mathbb{E} [a(i)a(i-1)^T | Z], \\ A_Y &= \sum_{i=1}^T \mathbb{E} [a(i-1)a(i-1)^T | Z], \\ C_e &= \sum_{i=1}^T \mathbb{E} [e(i)e(i)^T | Z]. \end{aligned}$$

Diferenciando, teniendo en cuenta la regla de la cadena, con respecto a  $\Phi_M^* R_\nu \Phi_M$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\hat{\Theta}^{(l)}} [\ln f_{J,\epsilon}(j, e; \Theta) | Z]}{\partial (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)} &= \frac{\partial}{\partial (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)} \left( -\frac{T}{2} \ln |\Phi_M^* R_\nu \Phi_M| \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \text{traza} ((\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} D_Y) \right) \\ &= -\frac{T}{2} (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} (-(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} D_Y (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1}), \end{aligned}$$

siendo  $D_Y = C_Y - B_Y \Lambda_M^T - \Lambda_M B_Y^T + \Lambda_M A_Y \Lambda_M^T$ , y donde se ha usado que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \ln |X| &= X^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial X} \text{traza} (X^{-1} A) &= -X^{-1} A X^{-1}. \end{aligned}$$

Igualando a cero

$$0 = -\frac{T}{2} (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} - \frac{1}{2} (-(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} D_Y (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1}),$$

y despejando  $\Phi_M^* R_\nu \Phi_M$

$$\widehat{\Phi_M^* R_\nu \Phi_M} = \frac{C_Y - B_Y \widehat{\Lambda}_M^T - \widehat{\Lambda}_M B_Y^T + \widehat{\Lambda}_M A_Y \widehat{\Lambda}_M^T}{T}. \quad (6.15)$$

De forma análoga, diferenciando con respecto a  $\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M$ , se obtiene

$$\widehat{\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M} = \frac{C_e}{T}. \quad (6.16)$$

Finalmente, diferenciando con respecto a  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Lambda} E_{\hat{\Theta}^{(v)}} [\ln f_{J,\epsilon}(j, e; \Theta) | Z] &= \frac{\partial}{\partial \Lambda} (\text{traza}((\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} D_Y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \Lambda} (-\text{traza}((\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} B_Y \Lambda_M^T) \\ &\quad - \text{traza}((\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \Lambda_M B_Y^T) \\ &\quad + \text{traza}((\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \Lambda_M A_Y \Lambda_M^T)) \\ &= -(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} B_Y - [(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1}]^T B_Y \\ &\quad + [(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1}]^T \Lambda_M A_Y^T \\ &\quad + (\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \Lambda_M A_Y, \end{aligned}$$

donde se han aplicado las siguientes propiedades de la diferenciación matricial en relación con la traza

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \text{traza}(AX) &= A, \\ \frac{\partial}{\partial X} \text{traza}(AXB) &= A^T B^T, \\ \frac{\partial}{\partial X} \text{traza}(AXBX^T) &= A^T X B^T + AXB. \end{aligned}$$

Y puesto que  $\Phi_M^* R_\nu \Phi_M$  y  $A_Y$  son simétricas

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} E_{\hat{\Theta}^{(v)}} [\ln f_{J,\epsilon}(j, e; \Theta) | Z] = -2(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} B_Y + 2(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \Lambda_M A_Y.$$

Igualando a cero

$$0 = -2(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} B_Y + 2(\Phi_M^* R_\nu \Phi_M)^{-1} \Lambda_M A_Y,$$

y despejando  $\Lambda$

$$\widehat{\Lambda}_M = B_Y A_Y^{-1}. \quad (6.17)$$

Por tanto, se obtienen los siguientes estimadores

$$\widehat{\Lambda}_M = B_Y A_Y^{-1} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_M^* \widehat{R}_\nu \widehat{\Phi}_M &= \frac{C_Y - B_Y \widehat{\Lambda}_M^T - \widehat{\Lambda}_M B_Y^T + \widehat{\Lambda}_M A_Y \widehat{\Lambda}_M^T}{T} \\ &= \frac{C_Y - B_Y (A_Y^{-1})^T B_Y^T - B_Y A_Y^{-1} B_Y^T + B_Y A_Y^{-1} A_Y (A_Y^{-1})^T B_Y^T}{T} \\ &= \frac{C_Y - B_Y A_Y^{-1} B_Y^T}{T}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\widehat{\Phi}_M^* \widehat{R}_\epsilon \widehat{\Phi}_M = \frac{C_\epsilon}{T}. \quad (6.20)$$

### 6.2.3. Algoritmo EM para modelos ARH(p)

Sea  $Y_t(\cdot)$  el dato espacial en el tiempo  $t$  dado por la superficie  $\{Y_t(s) : s \in D \subseteq \mathbb{R}^n\}$ , que define la realización del proceso espacio-temporal de interés  $Y$  sobre un espacio de Hilbert  $H$ . Se asume que dicho proceso satisface una ecuación de estados como la dada en (5.1), esto es

$$Y_t(s) = \mathcal{A}_1 Y_{t-1}(s) + \cdots + \mathcal{A}_p Y_{t-p}(s) + \nu_t(s), \quad t \in \mathbb{N}, \quad s \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (6.21)$$

denotando, como antes, por  $\nu$  ruido blanco hilbertiano, en sentido fuerte, incorrelado con las condiciones iniciales y, por  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , los operadores de autocorrelación asociados a la estructura Markoviana de orden  $p$ .

En el diseño del algoritmo EM para la estimación de los parámetros funcionales involucrados en la definición del modelo (6.21), se parte, bajo la hipótesis de normalidad de los procesos involucrados, de la siguiente expresión de la log-verosimilitud asociada, para  $T$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \ln f_Z(z; \Theta) &= C - \frac{T}{2} [\ln |\underline{Q}| + \ln |\underline{R}_\epsilon|] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \underline{J}(i)^T \underline{Q}^{-1} \underline{J}(i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T e(i)^T \underline{R}_\epsilon^{-1} e(i), \end{aligned} \quad (6.22)$$

siendo  $\underline{J}(t) = \underline{a}(t) - \underline{\Lambda} \underline{a}(t-1)$  y definiéndose  $\underline{Q}$  como en el capítulo 5, es

decir,

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} \Phi_M^* R_\nu \Phi_M & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{pM \times pM}. \quad (6.23)$$

De forma análoga,  $\underline{R}_\epsilon = E[\underline{e}(t) \cdot \underline{e}(t)^T]$  siendo, para  $t = 1, \dots, T$ ,

$$\underline{e}(t) = \begin{pmatrix} \Phi_M^* \epsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La esperanza condicional  $E_{\hat{\Theta}(t)} [\ln f_{J,\epsilon}(j, e; \Theta) | Z]$  a los datos funcionales observados o incompletos viene dada entonces por

$$\begin{aligned} E_{\hat{\Theta}(t)} [\ln f_{J,\epsilon}(j, e; \Theta) | Z] &= C - \frac{T}{2} [\ln |\underline{Q}| + \ln |\underline{R}_\epsilon|] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{traza} \left( \underline{Q}^{-1} [\underline{C}_Y - \underline{B}_Y \underline{\Lambda}_M^T - \underline{\Lambda}_M \underline{B}_Y^T \right. \\ &\quad \left. - \underline{\Lambda}_M \underline{A}_Y \underline{\Lambda}_M^T] \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{traza} (\underline{R}_\epsilon^{-1} \underline{C}_\epsilon), \end{aligned} \quad (6.24)$$

siendo

$$\begin{aligned} \underline{C}_Y &= \sum_{i=1}^T E [(\underline{a}(i) \underline{a}(i)^T | Z)], \\ \underline{B}_Y &= \sum_{i=1}^T E [\underline{a}(i) \underline{a}(i-1)^T | Z], \\ \underline{A}_Y &= \sum_{i=1}^T E [\underline{a}(i-1) \underline{a}(i-1)^T | Z], \\ \underline{C}_\epsilon &= \sum_{i=1}^T E [(\underline{e}(i) \underline{e}(i)^T | Z)]. \end{aligned}$$

Finalmente, diferenciando la ecuación (6.24) respecto a los parámetros funcionales  $\underline{\Lambda}$ ,  $\underline{Q}$  y  $\underline{R}_\epsilon$  e igualando a cero, se obtiene, de forma similar al caso

ARH(1), las siguientes expresiones para los estimadores máximo verosímiles

$$\widehat{\underline{\Lambda}}_M = \underline{B}_Y \underline{A}_Y^{-1}. \quad (6.25)$$

$$\widehat{\underline{Q}} = \frac{\underline{C}_Y - \underline{B}_Y \underline{A}_Y^{-1} \underline{B}_Y^T}{T}, \quad (6.26)$$

$$\widehat{\underline{R}}_\epsilon = \frac{\underline{C}_e}{T}. \quad (6.27)$$

### 6.3. Ejemplos numéricos

En esta sección se ilustran los resultados derivados sobre la implementación, en términos de la descomposición **POP**, del filtrado de Kalman combinado con el algoritmo EM en el caso de datos funcionales espaciales.

Se asume que la dinámica del proceso de interés  $Y$  se define en términos de un modelo ARH(1), considerando, como en los capítulos anteriores, los siguientes modelos de interacción espacio-temporal:

- Núcleo exponencial:

$$k(z; \alpha) = \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{\|z\|}{\alpha} \right\}, \quad (6.28)$$

- Núcleo Cauchy:

$$k(z; \delta) = \frac{1}{\delta \cdot \pi \left[ 1 + \left( \frac{\|z\|+7}{\delta} \right)^2 \right]}, \quad (6.29)$$

- Núcleo gamma:

$$k(z; \gamma) = \frac{1}{\gamma^2} \cdot \|z\| \cdot \exp \left\{ -\frac{\|z\|}{\gamma} \right\}, \quad (6.30)$$

donde  $\|z\|$  denota la distancia entre localizaciones espaciales y donde se consideran los valores  $\alpha = 1/4$ ,  $\delta = 1/8$  y  $\gamma = 1/4$  para los parámetros escalares que caracterizan los núcleos exponencial, Cauchy y gamma, respectivamente.

Para la generación de la condición aleatoria inicial,  $Y_0$ , se considera el operador integral  $R_{Y_0}^{1/2}$  con núcleo dado en (4.24), donde  $\theta = 1$ . El proceso de innovación  $\nu$  se genera en cada tiempo, de forma independiente, mediante la aplicación del operador integral  $R_\nu^{1/2}$ , con núcleo dado en (4.25), a un proceso de ruido blanco gaussiano.

Los órdenes de truncamiento considerados son  $M = 302$ ,  $M = 27$  y  $M = 189$  que corresponden a un 70% de la variabilidad global de cada uno de los tres núcleos de interacción espacio-temporal definidos mediante los valores de los parámetros considerados. Tras aplicar el filtrado de Kalman y el algoritmo EM, los errores cuadráticos funcionales (E.C.F.) obtenidos en la estimación de  $Y$  se muestran en las tablas 6.1, 6.3 y 6.5, y en los gráficos 6.1-6.3. Asimismo, los errores cometidos en la estimación paramétrica funcional de  $Q$  y  $\Lambda$  en los tres casos considerados, exponencial, Cauchy y gamma, se muestran en las tablas 6.2, 6.4 y 6.6, respectivamente, donde se ha utilizado las siguientes normas:

$$\text{Norm}_Q = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left( Q(i, j) - \widehat{Q}(i, j) \right)^2, \quad (6.31)$$

$$\text{Norm}_\Lambda = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left( \Lambda(i, j) - \widehat{\Lambda}(i, j) \right)^2, \quad (6.32)$$

para medir la calidad de las estimaciones.

Finalmente, en los gráficos 6.4-6.15 se muestran, para los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$ , la generación del proceso original (izquierda) y su estimación funcional (derecha), tras aplicar el filtrado de Kalman en combinación con el algoritmo EM, para los casos de autocorrelación exponencial, Cauchy y gamma y para los órdenes de truncamiento  $M = 302$ ,  $M = 27$  y  $M = 189$  considerados.

Tabla 6.1: Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Error cuadrático funcional para  $M = 302$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	1.0609578e-004	11	9.7021629e-005
2	1.0802199e-004	12	1.1758838e-004
3	1.1836048e-004	13	1.0557433e-004
4	9.0032371e-005	14	1.1000962e-004
5	1.1550080e-004	15	1.1837104e-004
6	9.4714942e-005	16	9.9220283e-005
7	1.0303610e-004	17	1.0003954e-004
8	1.1447429e-004	18	1.0469035e-004
9	9.0836444e-005	19	1.1593244e-004
10	1.1467383e-004	20	1.0180597e-004

Gráfico 6.1: Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Representación error cuadrático funcional para  $M = 302$ , con innovaciones coloreadas.

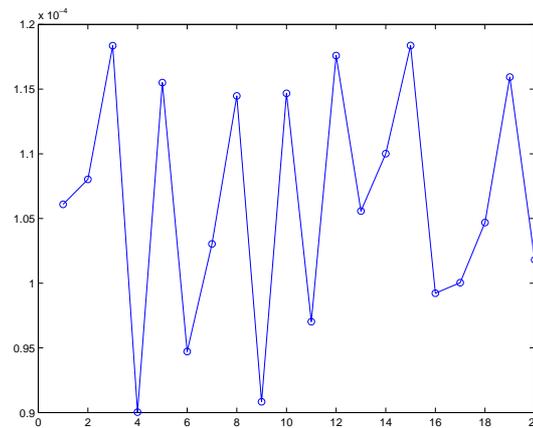


Tabla 6.2: Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Error cuadrático de las estimaciones de los parámetros.

Norm <sub>Q</sub>	6.5788189e-011
Norm <sub>Λ</sub>	1.2232725e-003

Tabla 6.3: Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Error cuadrático funcional para  $M = 27$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	3.8633849e-004	11	4.7126235e-004
2	3.2002153e-004	12	3.5947620e-004
3	3.1460721e-004	13	3.6487348e-004
4	3.3101287e-004	14	3.1647493e-004
5	4.5721135e-004	15	3.8358482e-004
6	3.4232064e-004	16	3.4470637e-004
7	4.2222182e-004	17	3.1067202e-004
8	4.0162494e-004	18	3.6475424e-004
9	3.0979520e-004	19	3.5581826e-004
10	2.8128415e-004	20	3.1258761e-004

Tabla 6.4: Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Error cuadrático de las estimaciones de los parámetros.

Norm <sub>Q</sub>	6.6384164e-009
Norm <sub>Λ</sub>	1.1038872e-003

Gráfico 6.2: Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Representación error cuadrático funcional para  $M = 27$ , con innovaciones coloreadas.

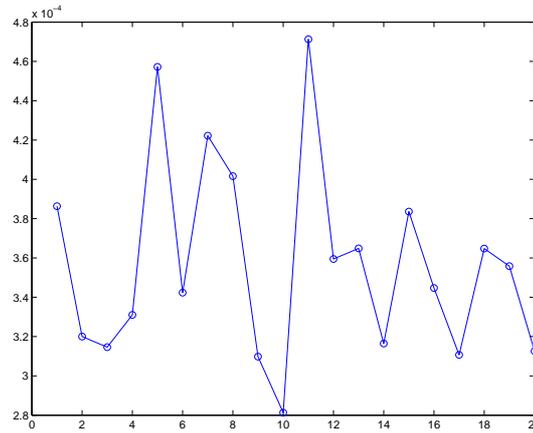


Tabla 6.5: Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Error cuadrático funcional para  $M = 189$ , con innovaciones coloreadas.

Tiempo	E.C.F.	Tiempo	E.C.F.
1	1.7559666e-004	11	1.5694052e-004
2	1.6089854e-004	12	1.8497456e-004
3	1.8680586e-004	13	1.7938984e-004
4	1.8063102e-004	14	1.7150696e-004
5	1.6365525e-004	15	1.7331228e-004
6	1.9072604e-004	16	1.9631501e-004
7	1.7011051e-004	17	1.8403796e-004
8	1.8295049e-004	18	1.7305969e-004
9	1.8140135e-004	19	1.5940839e-004
10	1.6229867e-004	20	1.6049036e-004

Gráfico 6.3: Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Representación error cuadrático funcional para  $M = 189$ , con innovaciones coloreadas.

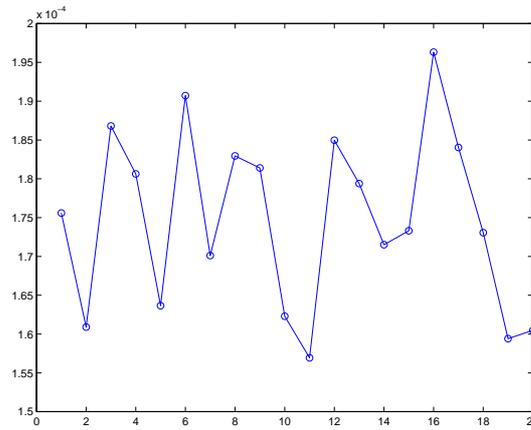
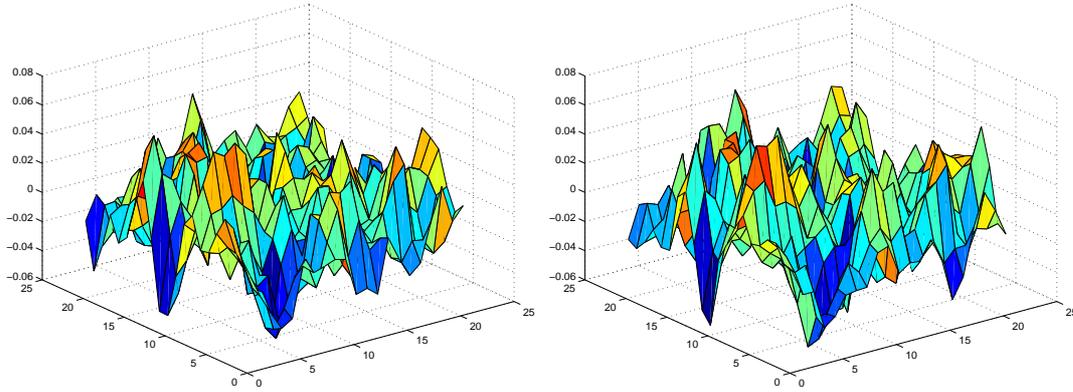


Tabla 6.6: Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Error cuadrático de las estimaciones de los parámetros.

Norm <sub>Q</sub>	1.3369085e-008
Norm <sub>Λ</sub>	9.2010352e-004

Gráfico 6.4: Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 302$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.



Finalmente, se muestran también los resultados de predicción en los gráficos 6.16-6.21, teniendo en cuenta la ecuación

$$\hat{Y}_{t+1} = \Psi \cdot \hat{a}_{t+1|t}, \quad (6.33)$$

donde  $\hat{a}_{t+1|t} = \Lambda \cdot \hat{a}_{t|t}$ .

Gráfico 6.5: Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 302$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.

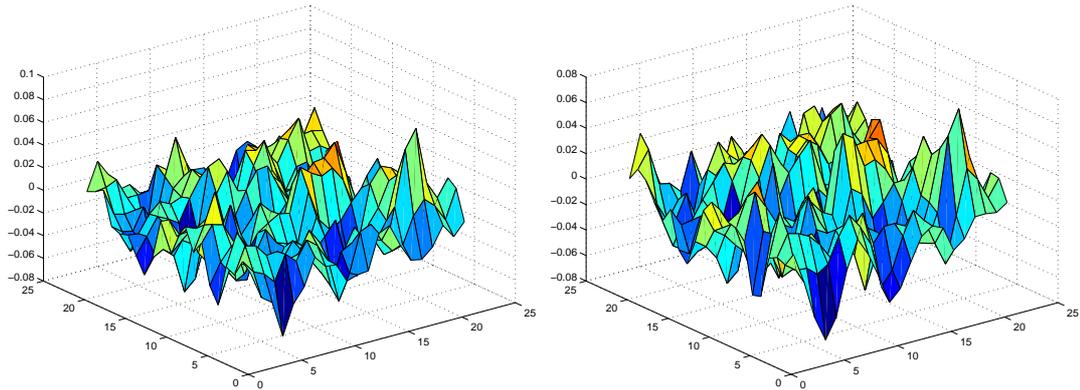


Gráfico 6.6: Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 302$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

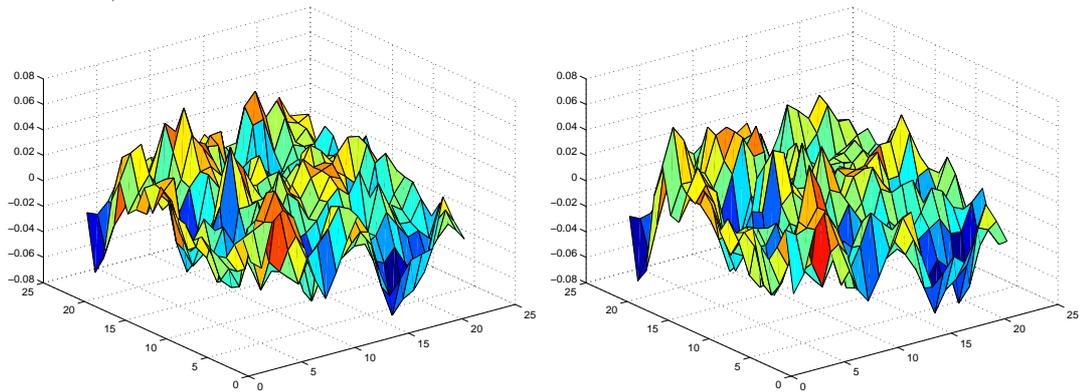


Gráfico 6.7: Autocorrelación Exponencial ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 302$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.

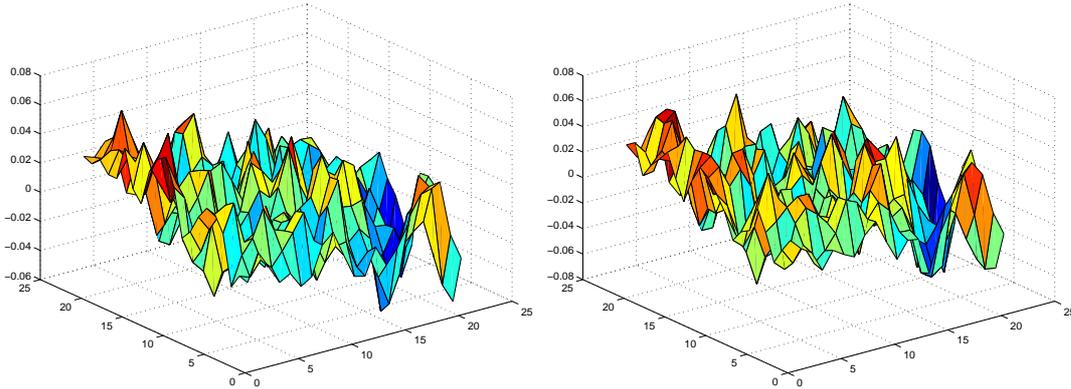


Gráfico 6.8: Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 27$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.

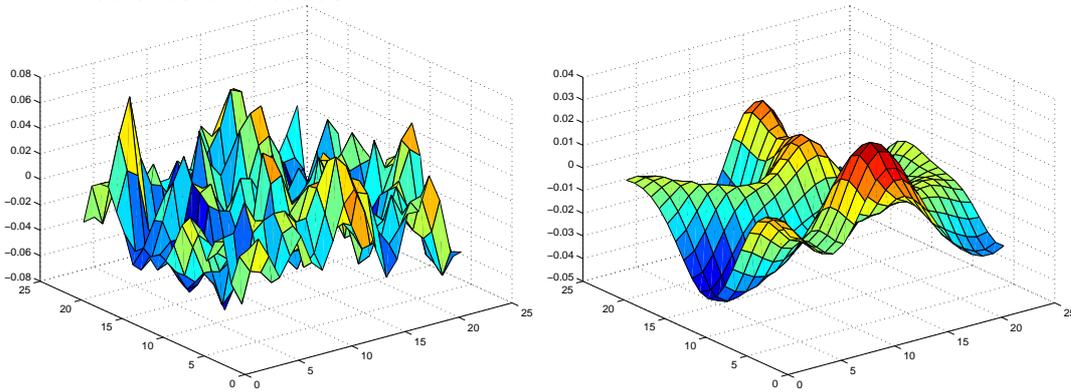


Gráfico 6.9: Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 27$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.

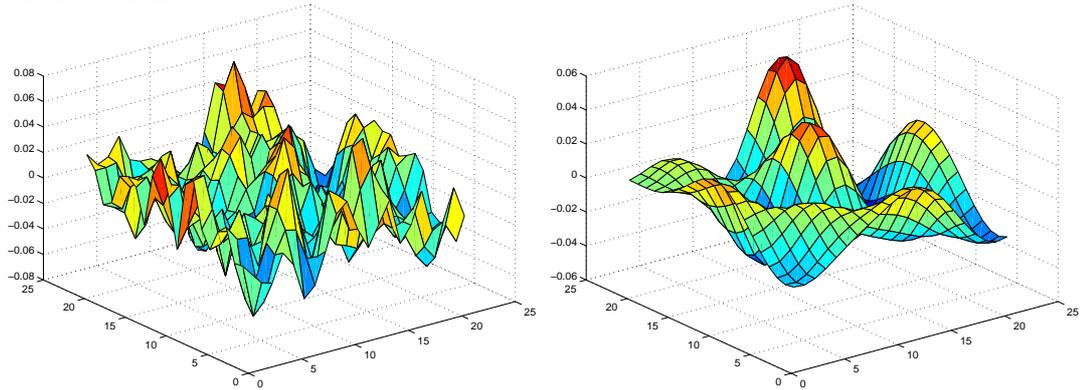


Gráfico 6.10: Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 27$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

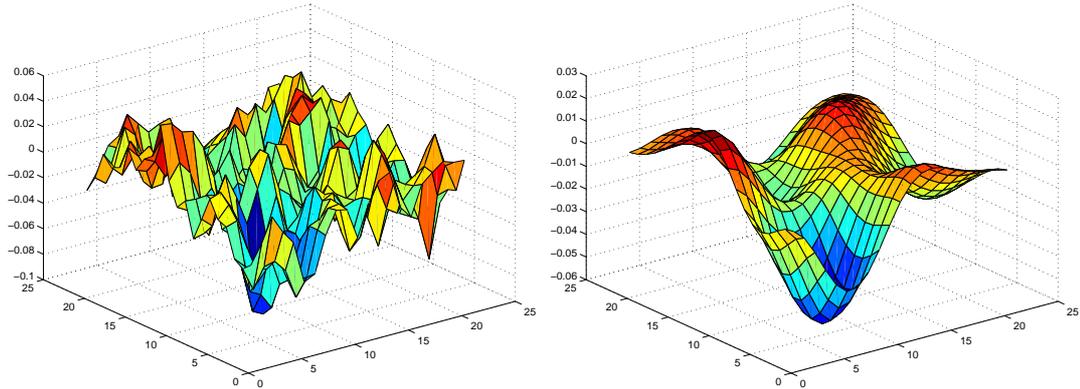


Gráfico 6.11: Autocorrelación Cauchy ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 27$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.

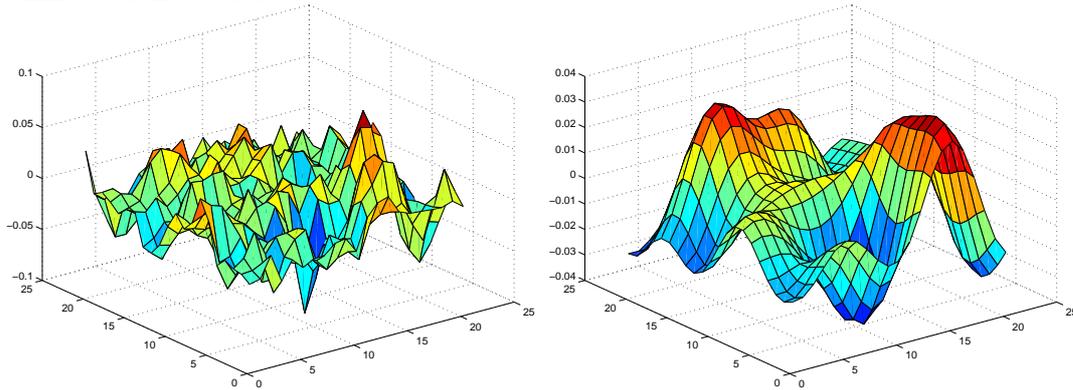


Gráfico 6.12: Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 189$  (derecha), en el tiempo  $t = 5$ , con innovaciones coloreadas.

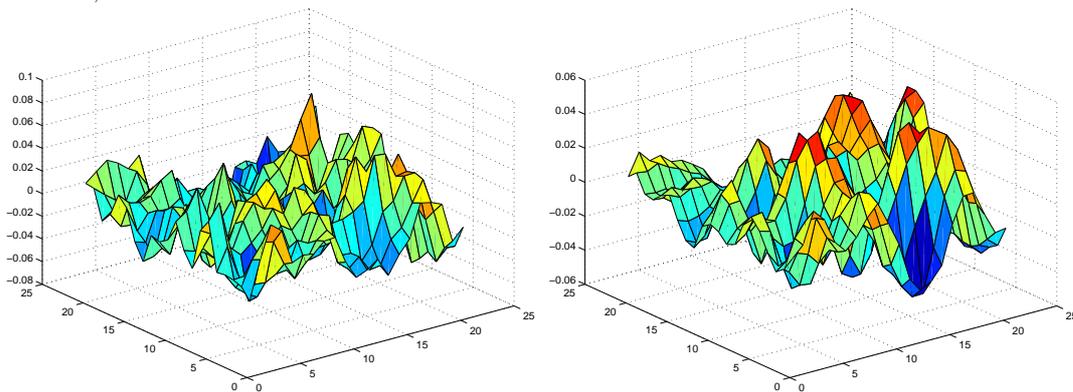


Gráfico 6.13: Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 189$  (derecha), en el tiempo  $t = 10$ , con innovaciones coloreadas.

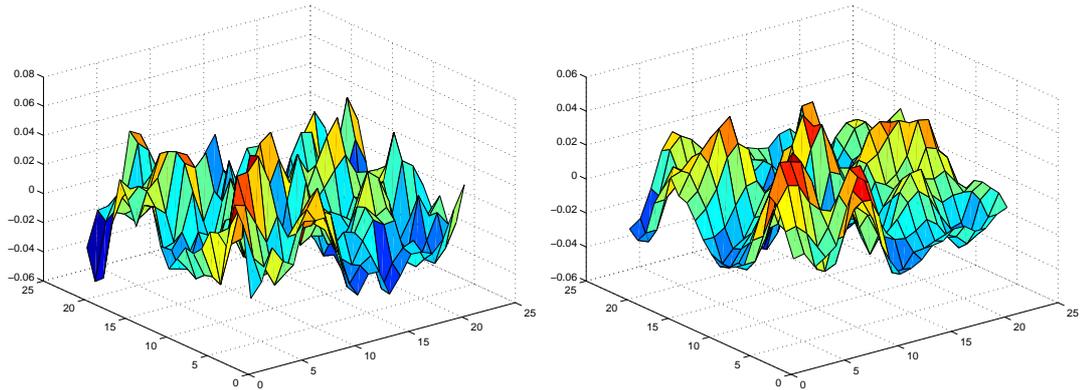


Gráfico 6.14: Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 189$  (derecha), en el tiempo  $t = 15$ , con innovaciones coloreadas.

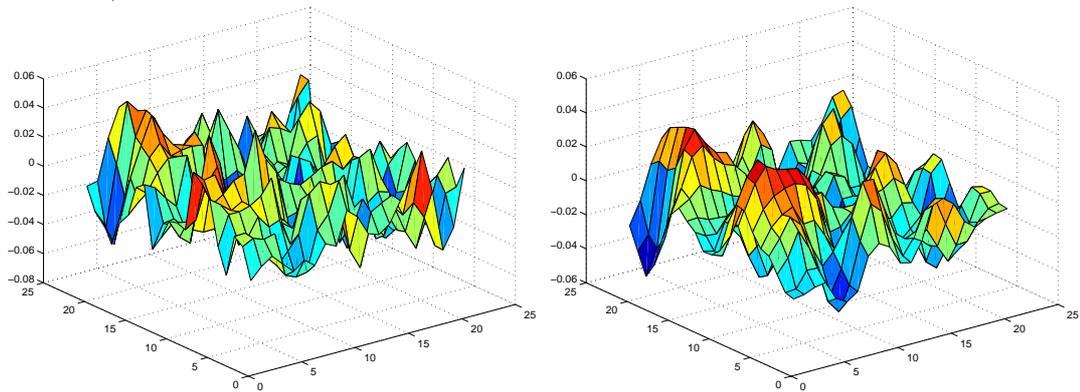


Gráfico 6.15: Autocorrelación Gamma ARH(1)-EM. Proceso original (izquierda) y estimación funcional para  $M = 189$  (derecha), en el tiempo  $t = 20$ , con innovaciones coloreadas.

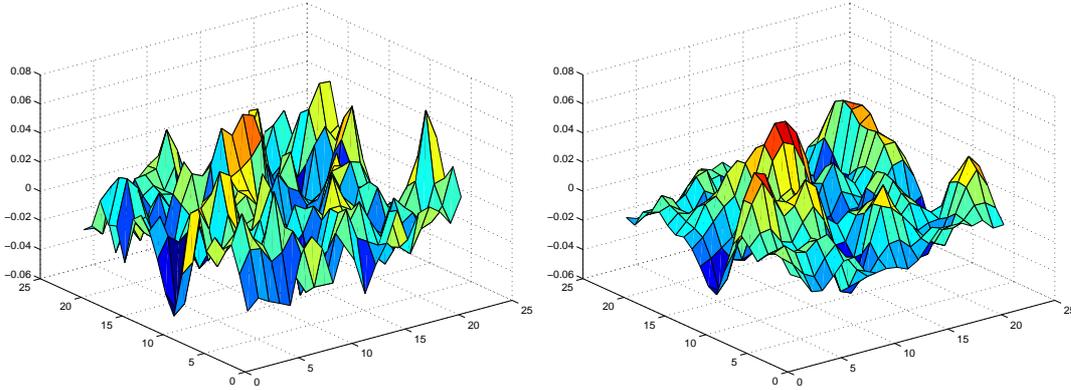


Gráfico 6.16: Predicción para el proceso exponencial en el tiempo  $t = 21$ .

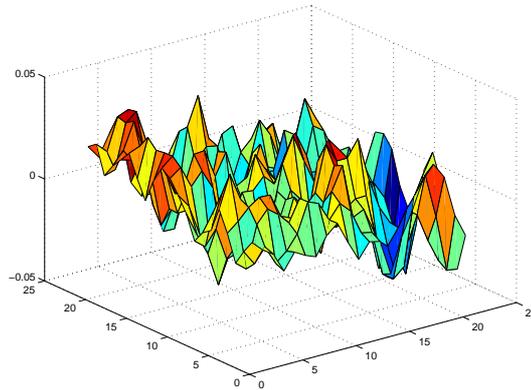


Gráfico 6.17: Predicción para el proceso exponencial en el tiempo  $t = 22$ .

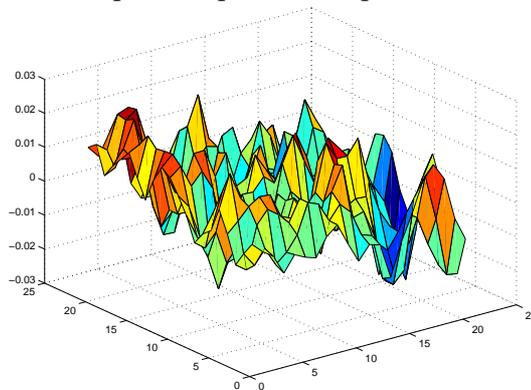


Gráfico 6.18: Predicción para el proceso Cauchy en el tiempo  $t = 21$ .

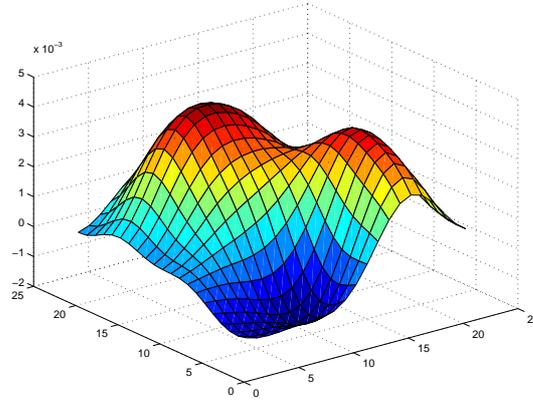


Gráfico 6.19: Predicción para el proceso Cauchy en el tiempo  $t = 22$ .

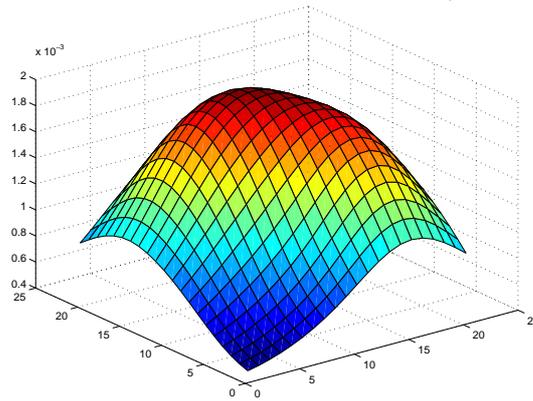


Gráfico 6.20: Predicción para el proceso gamma en el tiempo  $t = 21$ .

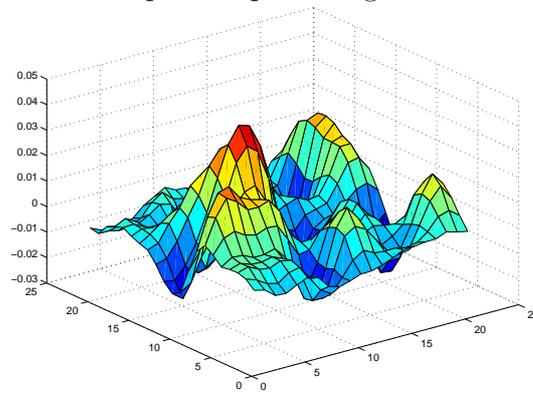
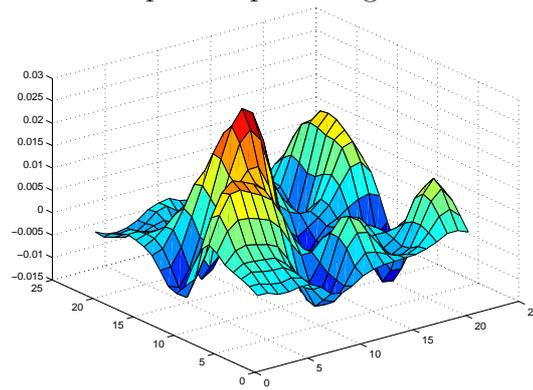


Gráfico 6.21: Predicción para el proceso gamma en el tiempo  $t = 22$ .





# CAPÍTULO 7

---

## Líneas de investigación futura

---

En este capítulo se describen los problemas que se abordarán en un futuro inmediato en relación con la investigación desarrollada en la realización de esta tesis. Las líneas de trabajo futuras se desarrollarán en el ámbito de la Estadística Funcional para el análisis estadístico de procesos espacio-temporales con alta variabilidad local, autosimilaridad, fractalidad, heterogeneidad y estructuras de dependencia fuerte en el espacio y/o tiempo. Más concretamente, se pretenden desarrollar métodos de estimación e inferencia apropiados para el análisis de series de datos funcionales espaciales que presentan las características locales y de dependencia mencionadas. Dado que el desarrollo de la Estadística Funcional se ha focalizado fundamentalmente en el análisis de curvas, y en ocasiones, en el análisis de superficies regulares, el desarrollo de los objetivos que se plantean a continuación requiere la derivación y aplicación de nuevas herramientas en el ámbito probabilístico y estadístico.

Los objetivos que se perseguirán en la investigación futura se relacionan con los campos de trabajo que se enuncian a continuación y se describirán brevemente en las próximas secciones.

- Procesos autorregresivos en espacios de Banach y procesos lineales generales en espacios funcionales.
- Implementación de algoritmos de extrapolación y filtrado y métodos de estimación paramétrica funcional para modelos ARB.
- Formulación de contrastes hipótesis para la identificación y comparación de modelos de series funcionales.

## Procesos ARB y procesos funcionales lineales generales

Los resultados derivados en esta memoria se han desarrollado en el contexto de procesos autorregresivos hilbertianos. Este contexto permite trabajar con las herramientas clásicas de la Teoría Espectral de operadores sobre un espacio de Hilbert. De hecho, los resultados derivados se basan en la descomposición espectral de operadores no simétricos (los operadores de autocorrelación) sobre espacios de Hilbert, en términos de bases de Riesz duales. Sin embargo, para el análisis de características de alta variabilidad local, fractalidad, etc., los espacios de Besov fraccionarios y multifraccionarios ofrecen un escenario mucho más rico y con mayores posibilidades (e.g. los espacios de Hölder-Zigmund, constituidos por funciones no diferenciables con módulos de continuidad fraccionarios). Este hecho motiva extender los resultados obtenidos al contexto de modelos autorregresivos Banach-valorados para el análisis de secuencias de datos funcionales espaciales con características de fractalidad, autosimilaridad, heterogeneidad, etc. Por otra parte, para el análisis de estructuras funcionales con dependencia fuerte, los modelos lineales funcionales generalizados nos permiten salir del ámbito markoviano. Por tanto, será de interés el análisis de dichos modelos considerando familias apropiadas de operadores de autocorrelación (núcleos con colas pesadas), que permitan incluir dependencia fuerte en el espacio y tiempo. Como alternativa a los métodos espectrales hilbertianos, para la implementación de herramientas estadísticas en los dos ámbitos señalados, se utilizará fundamentalmente la transformada *wavelet*, o de forma, más general, la descomposición atómica, puesto que ambas ofrecen un análisis localizado a diferentes niveles de resolución muy apropiado para las características de singularidad que se pretenden analizar. Adicionalmente, las técnicas *thresholding*, desarrolladas en el

ámbito de la transformada *wavelet* discreta, permiten la resolución de problemas de dimensionalidad de una forma selectiva y no lineal, concentrando la información relevante en un número reducido de nodos o coeficientes *wavelet* que configuran una red irregular, de acuerdo a las propiedades de la señal que se describe (*wavelet sparsity*). Este hecho permitirá abordar el problema de dimensionalidad inherente a las secuencias de datos funcionales espaciales analizadas.

Otro aspecto interesante que se abordará en relación con la modelización y análisis de secuencias de datos funcionales espaciales en espacios singulares, es la definición de modelos funcionales interpoladores entre las características de variación local suaves e irregulares, así como entre diferentes niveles de dependencia espacio-temporal. En relación con la interpolación de comportamientos locales, se utilizará nuevamente los modelos funcionales autorregresivos en espacios de Besov fraccionarios. En relación con la interpolación de estructuras de dependencia, se considerarán diferentes familias paramétricas de operadores de autocorrelación y covarianza espacial, cuyos parámetros de forma, y en particular de caída, permitan recorrer desde los modelos de dependencia débil hasta los modelos de dependencia fuerte, con colas pesadas (ver Salmerón y Ruiz-Medina [83] para el caso ARH(p)).

## **Algoritmos de extrapolación y filtrado y estimación paramétrica funcional para modelos ARB y LPH**

Como objetivo inmediato, se planteará el estudio de las propiedades asintóticas de los estimadores máximo-verosímiles derivados en el capítulo 6, para la aproximación de los parámetros funcionales involucrados en la formulación de modelos ARH. Para ello, será fundamental la selección de una norma apropiada.

En el contexto de modelos ARB, para procesos Besov-valorados, la implementación del filtrado de Kalman se realizará en términos de bases de *wavelets* construidas para espacios de Besov. Alternativamente, se definirán predictores funcionales basados en el operador u operadores de autocorrelación. Específicamente, en la línea de los resultados de Bosq [7], un predictor

funcional para procesos ARB puede definirse en términos de un estimador consistente del operador de autocorrelación. En el libro de Bosq [7], se formula dicho estimador a partir de la estimación, basada en el método de los momentos, de los operadores de covarianza espacial y cruzada. En nuestro caso, se planteará la definición de un predictor funcional basado en la estimación por máxima verosimilitud del operador de autocorrelación. Dicho estimador se obtendrá a partir de la implementación previa del filtrado de Kalman, en términos de bases de *wavelets*, en combinación con el algoritmo EM. Se extenderá asimismo el estudio realizado para el caso de modelos ARH, sobre las propiedades asintóticas de los estimadores funcionales máximo-verosimiles calculados, al contexto de modelos ARB. Una vez más, un aspecto clave en dicho estudio es la elección de normas apropiadas.

Finalmente, predictores autorregresivos funcionales locales, a partir de la estimación local, tipo núcleo, basada en la transformada *wavelet* continua, de los operadores de covarianza espacial y cruzado serán también planteados en el contexto de modelos ARB (ver Bosq [7] para el caso ARH(p)).

La extensión de los resultados anteriores al contexto de procesos funcionales lineales generales se realizará a partir de su reformulación Markoviana, tipo ARH(1), en términos de las matrices infinito-dimensionales de operadores.

## Contrastes de hipótesis para la identificación y comparación de modelos funcionales

Este aspecto no ha sido abordado en esta memoria y constituye una línea de trabajo bastante abierta, puesto que en el ámbito de la Estadística de series funcionales, especialmente para el análisis de secuencias de datos funcionales espaciales, la teoría de contraste de hipótesis se halla escasamente desarrollada. En el libro de Bosq [7], por ejemplo, sólo se plantea un test de independencia. En general, los principales resultados han sido derivados en el contexto del análisis estadístico de curvas. Así, se tiene, por ejemplo, que en el contexto de series temporales, test para curvas fueron inicialmente planteados en Shumway [86] y Brillinger [9], [10], entre otros. En el contexto no paramétrico, se puede mencionar el trabajo de Hall y Hart [43], donde un test *bootstrap* para la detección de diferencias entre dos funciones media

es planteado. En Eubank and Hart [28], y Eubank y LaRiccia [29] un test de ajuste es formulado basado en validación cruzada. En Inglot y Ledwina [52], y Ledwina [53] se proponen métodos alternativos para la formulación de test de ajuste en el contexto funcional. Los trabajos de Fan [31] y Fan and Lin [32] proporcionan una metodología basada en el test adaptativo de Neyman y la transformada *wavelet thresholding* para la detección de diferencias significativas a partir de datos funcionales dados por curvas. Finalmente, mencionaremos los trabajos de Abramovich y Angelini [1], y Abramovich, Antoniadis, Sapatinas y Vidakovic [2], entre otros, sobre la formulación de métodos de contraste para el análisis funcional de la varianza.

En el contexto de modelos ARH(1), en Ruiz-Medina [76], se formula un test para la comparación de modelos autorregresivos hilbertianos a partir de secuencias de datos funcionales espaciales. Dicha formulación se inspira en la metodología propuesta en Fan [31] y Fan and Lin [32] para la detección de diferencias significativas entre curvas. Esta metodología será también extendida al contexto de modelos ARH(p) y ARB(p). En relación con el diseño de test de ajuste, se formularán estadísticos funcionales de mínimo contraste en el dominio de la transformada *wavelet*, que permitirán el planteamiento de contrastes de ajuste a partir de secuencias de datos funcionales espaciales, en el contexto de modelos ARH y ARB.



---

---

# Apéndice

---

---



---

## Apéndice A

# Código Fuente

---

A continuación se presenta el código fuente diseñado para los ejemplos numéricos, que se desarrollan como ilustración de los resultados derivados. Dicho código está escrito en lenguaje **MATLAB** (*Matrix Laboratory*), programa de análisis numérico, creado por *The MathWorks* en 1984, orientado a matrices y vectores. Este *software*, muy utilizado en universidades y centros de investigación, contiene *Toolboxes* relacionados con el problema tratado, si bien, se ha tenido que crear un código fuente propio para la adecuada adaptación al entorno considerado de las herramientas que ofrece **MATLAB**.

### A.1. Código del capítulo 4

El código usado para la generación de los ejemplos del capítulo 4 es el siguiente:

```
1 clear all;

3 N1 = 20;
  N2 = N1 + 1;
5 n2 = N2^2;
  alcance1 = 1/2;
7 nucleoexponencial = 0;
  nucleocauchy = 0;
9
```

```

11   for i=1:N2
      P(i)=i;
12   end
13
14   for k=1:N2
15     for l=1:N2
16       for i=1:N2
17         for j=1:N2
18           z1=P(k)-P(i);
19           z2=P(l)-P(j);
20           z=(z1^2+z2^2);
21           if nucleoexponencial == 1
22             CovX(k,l,i,j) = (1/alcance1)*
23               exp(-z^(1/2)/alcance1);
24           elseif nucleocauchy == 1
25             CovX(k,l,i,j) = 1/((alcance1/2) *
26               pi * (1 + ((z^(1/2) + 7)/
27                 (alcance1/2))^2));
28           else
29             CovX(k,l,i,j) = (1/alcance1^2) * z
30               * exp(-z^(1/2)/alcance1);
31           end
32         end
33       end
34     end
35   end
36
37   h=1;
38   m=1;
39   for k=1:N2
40     for l=1:N2
41       for i=1:N2
42         for j=1:N2
43           E(h,m) = CovX(k,l,i,j);
44           m=m+1;
45         end
46       end
47     end
48     m=1;
49     h=h+1;
50   end

```

---

```

51 end
53 V = svd(E);
   for J=1:n2
55     for I=1:n2
           if I==J
57             Sreales(I,J)= V(I);
           else
59             Sreales(I,J) = 0;
           end
61     end
   end
63 Sreales = 0.85 * (1/max(V)) * Sreales;

65 Orto = orth(E);
   reescalamiento = 15;
67 Ireales = reescalamiento*Orto;
   Dreales = (1/reescalamiento)*Orto;
69 NIET = Ireales * Sreales * Dreales';

71 alcance2 = 1;
   for k=1:N2
73     for l=1:N2
           for i=1:N2
75             for j=1:N2
                   z1=P(k)-P(i);
77                   z2=P(l)-P(j);
                   z=(z1^2+z2^2);
79                   CovX2(k,l,i,j) = (1/sqrt(2*pi*alcance2))
                           *exp(-z/(2*alcance2));
81                   CovX3(k,l,i,j) = (15/(16*sqrt(6)))
                           *(1+z/3)^(-7/2);
83             end
           end
85     end
   end

87 h=1;
89 m=1;
   for k=1:N2
91     for l=1:N2

```

---

```

    for i=1:N2
93         for j=1:N2
            NCI(h,m) = CovX2(k,l,i,j);
95            IC(h,m) = CovX3(k,l,i,j);
            m=m+1;
97         end
        end
99         m=1;
            h=h+1;
101    end
end
103
mu = zeros(n2,1);
105 sigma = eye(n2);

107 ji = mvnrnd(mu,sigma,1);

109 Y0 = (1/(n2^(1/2)))*(NCI*ji');

111 CovarianzaY0 = (1/n2)*NCI*NCI';

113 T = 20;
    INN = 0;
115 muinn = zeros(n2,1);
    if INN == 1
117         varianzanu = max(max(Sreales))/
            (n2*sqrt(2*pi*alcance2));
119         sigmainn = varianzanu * eye(n2);
    else
121         sigmainn = (1/n2) * IC * IC';
    end
123 nu = mvnrnd(muinn,sigmainn,T);

125 R = ((max(max(Sreales)))^2/(4*(n2)^(1/2)
        *sqrt(2*pi*alcance2))) * eye(n2);
127 epsilon = mvnrnd(mu,R,T);

129 [Y, Z] = GeneracionProcesos(T, n2, NIET, Y0, nu,
        Dreales, epsilon);
131
    for i=1:T

```

---

```

133     for J1=1:N2
134         for J2=1:N2
135             Ymalla(J1, J2, i) = Y(N2*(J1-1)+J2, i);
136         end
137     end
138     M = Ymalla(:, :, i);
139     surf(M);
140     saveas(gcf, ['Yorig', num2str(i), '.eps'], 'psc2');
141     saveas(gcf, ['Yorig', num2str(i), '.jpg'], 'jpg');
142 end
143
144 truncamientos = [0.85 0.95];
145 numerotruncamientos = 2;
146
147 for w = 1:numerotruncamientos
148
149     extremo1 = truncamientos(w) - 0.005;
150     extremo2 = truncamientos(w) + 0.005;
151
152     truncamiento = truncar(Sreales, extremo1, extremo2);
153     save(['truncamiento', num2str(w), '.txt'],
154         'truncamiento', '-ascii');
155
156     if truncamiento ~= 0
157         SrealesTrunc = Sreales(1:truncamiento,
158             1:truncamiento);
159         IrealesTrunc = Ireales(:, 1:truncamiento);
160         DrealesTrunc = Dreales(:, 1:truncamiento);
161
162         P0 = DrealesTrunc' * CovarianzaY0 * DrealesTrunc;
163         a0 = zeros(truncamiento, 1);
164
165         Q = DrealesTrunc' * sigmainn * DrealesTrunc;
166
167         POPCIN = DrealesTrunc' * Y0;
168
169         Yestimada = EcuFK(T, SrealesTrunc, P0, Q, R,
170             IrealesTrunc, a0, Z);
171
172     for i=1:T
173         Error=0;

```

---

```

    for J1=1:N2
175     for J2=1:N2
            Ymallaest(J1,J2,i) =
177             Yestimada(N2*(J1-1)+J2,i);
            Error = Error + ((Ymalla(J1,J2,i) -
179             Ymallaest(J1,J2,i))^2)/n2;
        end
181     end
    EF(i) = Error;
183     M = Ymallaest(:, :, i);
    surf(M);
185     saveas(gcf, ['Yest', num2str(i), 'trunc',
            num2str(w), '.eps'], 'psc2');
187     saveas(gcf, ['Yest', num2str(i), 'trunc',
            num2str(w), '.jpg'], 'jpg');
189     end
    Errorfuncional = EF';
191     save(['errorfuncional', num2str(w), '.txt'],
        'Errorfuncional', '-ascii');
193     plot(1:T, Errorfuncional, 'bo-');
    saveas(gcf, ['errorfuncional', num2str(w), '.eps'],
195         'psc2');
    saveas(gcf, ['errorfuncional', num2str(w), '.jpg'],
197         'jpg');

199     end

201     end

203     errorfuncional1 = load('errorfuncional1.txt');
    errorfuncional2 = load('errorfuncional2.txt');
205     plot(1:T, errorfuncional1, 'go-', 1:T, errorfuncional2,
        'ro-')
207     saveas(gcf, ['comparacionerrorfuncional.eps'], 'psc2');
    saveas(gcf, ['comparacionerrorfuncional.jpg'], 'jpg');
```

En primer lugar, en las líneas 3 a 8, se determina el número de puntos de la rejilla, el núcleo de interacción espacio-temporal y el valor del parámetro,  $\alpha$ ,  $\gamma$  o  $\delta$ , que caracteriza el núcleo de interacción espacio-temporal seleccionado (mediante la variable **alcance1**).

A continuación, en las líneas 10 a 51, se generan los valores del núcleo de interacción espacio-temporal elegido sobre la rejilla espacial. Así, si la variable **nucleoexponencial** toma el valor 1, la autocorrelación es exponencial. Si la variable anterior toma cualquier otro valor distinto de 1 y la variable **nucleocauchy** toma el valor 1, entonces la autocorrelación es tipo Cauchy. Y finalmente, si las variables **nucleoexponencial** y **nucleocauchy** toman valores distintos al 1, la autocorrelación es tipo gamma.

Desde la línea 53 hasta la 69 se define el operador de autocorrelación propiamente dicho. Más concretamente se genera un operador cuyo espectro puntual coincide con el espectro puntual del núcleo de interacción espacio-temporal seleccionado (exponencial, Cauchy o gamma) y cuya factorización espectral viene dada en términos de bases de Riesz duales, generadas a partir de una matriz ortogonal (**Orto**) convenientemente reescalada.

Desde la línea 71 a la 102 se generan los valores de dos núcleos espaciales homogéneos tipo gaussiano y t-Student que definirán los operadores integrales involucrados en la generación de la condición inicial aleatoria y del proceso de innovación en el caso coloreado. Se generán así en las líneas siguientes la condición inicial aleatoria y el proceso de innovación en los dos casos: Caso diagonal (la variable **INN** toma el valor 1) y coloreado (la variable **INN** no toma el valor 1).

Finalmente, desde las líneas 125 a 127 se genera el ruido de observación.

La función *GeneracionProcesos*, en la línea 129, proporciona los valores del proceso de interés, en los tiempos dados por la variable  $T$ . En dicha función se generan, de forma recursiva, siguiendo la ecuación de estados del modelo ARH(1), los valores del proceso  $Y$  a partir de la condición inicial aleatoria y del proceso de innovación previamente generados. Los valores generados del proceso de interés se reordenan por tiempos en la rejilla espacial, salvándose (líneas 132 a 142).

Para la implementación del filtrado de Kalman, en las líneas 144 y 145 se dan a conocer los truncamientos que se van a realizar. En las líneas 152 a 154 se calcula, mediante la función *truncar*, el valor que corresponde a cada truncamiento, que será utilizado en el filtrado de Kalman, función *EcuFK*, línea 169. Aunque previamente se establecen los distintos valores iniciales.

Una vez que se tiene el proceso de interés,  $Y$ , estimado, se procede a calcular el error funcional medio cometido en cada tiempo, a la vez que se

representa y almacena dicha estimación (líneas 172 a 201). Finalmente, en las líneas 203 a 208, se representan de forma conjunta los errores funcionales correspondientes a cada truncamiento.

En el código anterior se hace referencia a una serie de funciones, que se describen a continuación.

La primera función que aparece es *GeneracionProcesos*, donde se genera el proceso de interés y el modelo de observación. El código de dicha función es el siguiente:

```

function [Y, Z] = GeneracionProcesos(T, n2, NIET,
2     Y0, nu, Dreales, epsilon)

4 for i=1:T
    if i == 1
6         Y(:,1) = (1/n2^(1/2))*NIET*Y0 + nu(1,:)';
           POPCREALES(:,1) = Dreales'*Y(:,1);
8         Z(:,1) = Y(:,1) + epsilon(1,:)';
    else
10        Y(:,i) = (1/n2^(1/2))*NIET*Y(:,i-1) + nu(i,:)';
           POPCREALES(:,i) = Dreales'*Y(:,i);
12        Z(:,i) = Y(:,i) + epsilon(i,:)';
    end
14 end

```

La siguiente función es *truncar*, cuyo código fuente es:

```

function [truncamiento] = truncar(Sreales, extremo1,
2     extremo2)

4 S = Sreales;
  [filas, columnas] = size(S);
6
  total = 0;
8 for i=1:filas
    total = S(i,i) + total;
10 end

12 parcial = 0;
   parar = 0;
14 indice = 1;

```

---

```

16 while parar == 0
    parcial = S(indice , indice) + parcial;
18
    variabilidad = parcial/total;
20
    if ((extremo1 < variabilidad) & (variabilidad < extremo2))
22        truncamiento = indice;
        parar = 1;
24    else
        indice = indice + 1;
26    end

28    if indice > filas
        char('Problemas_con_el_truncamiento.')
30        parar = 1;
        truncamiento = 0;
32    end
end

```

La función *truncar* devuelve el valor del truncamiento,  $M$ , esto es, busca el valor  $M$  que define el  $x\%$  de la variabilidad total. Equivalentemente, los primeros  $M$  autovalores determinan el  $x\%$  dado de la variabilidad total del núcleo de interacción espacio-temporal considerado.

Dado el porcentaje  $x$  y siendo  $v_M$  la variabilidad dada por los primeros  $M$  autovalores, el valor buscado,  $M$ , será el primero que verifica la siguiente desigualdad

$$x - 0,005 < v_M < x + 0,005.$$

Adviértase que se considera una desigualdad, puesto que es poco probable que se produzca la igualdad, que sería lo deseable. Es más, es posible que no exista un valor que verifique la desigualdad anterior, en tal caso, esta función devuelve el valor cero y un mensaje de error en pantalla, de forma que para el truncamiento en cuestión no se realiza filtrado alguno. De igual forma, es posible que exista más de un valor posible para  $M$ . En tal caso, la función construida solo considerará el menor.

Finalmente, en la última función, *EcuFK*, se implementan las ecuaciones del filtrado de Kalman.

```

1 function [Yestimada] = EcuFK(T, SrealesTrunc , P0, Q,

```

```

    R, IrealesTrunc , a0 , Z)
3
for i=1:T
5
    if i==1
7        P(:, :, i) = SrealesTrunc * P0 * SrealesTrunc '
            + Q;
9    else
        P(:, :, i) = SrealesTrunc * P(:, :, i-1) *
11        SrealesTrunc ' + Q;
    end
13
    if det(inv(R + IrealesTrunc * P(:, :, i) *
15        IrealesTrunc ')) < 10^(-10)
        K(:, :, i) = P(:, :, i) * IrealesTrunc ' * pinv(R +
17        IrealesTrunc * P(:, :, i) * IrealesTrunc ');
    else
19        K(:, :, i) = P(:, :, i) * IrealesTrunc ' * inv(R +
        IrealesTrunc * P(:, :, i) * IrealesTrunc ');
21    end
23
    P(:, :, i+1) = P(:, :, i) - K(:, :, i) * IrealesTrunc
        * P(:, :, i);
25
    if i==1
27        clear a;
        a(:, i) = SrealesTrunc * a0;
29    else
        a(:, i) = SrealesTrunc * a(:, i-1);
31    end
33
    a(:, i+1) = a(:, i) + K(:, :, i) * (Z(:, i) -
        IrealesTrunc * a(:, i));
35
    Yestimada(:, i) = IrealesTrunc * a(:, i+1);
37
    POPCES(:, i) = a(:, i+1);
39 end
```

## A.2. Código del capítulo 5

En los comentarios que se van a realizar sobre el código fuente del capítulo 5, sólo se refieren las partes nuevas o modificadas respecto al código desarrollado para el capítulo 4, aunque se presente a continuación todo el código fuente usado.

```

1  clear all;

3  N1 = 20;
   N2 = N1 + 1;
5  n2 = N2^2;
   alcance1 = 1/2;
7  alcance2 = alcance1 * 0.8;
   nucleoexponencial = 0;
9  nucleocauchy = 1;

11 for i=1:N2
    P(i)=i;
13 end

15 for k=1:N2
    for l=1:N2
17        for i=1:N2
            for j=1:N2
19                z1=P(k)-P(i);
                z2=P(l)-P(j);
21                z=(z1^2+z2^2);
                if nucleoexponencial == 1
23                    CovX1(k,l,i,j) = exp(-z^(1/2)/
                        alcance1);
25                    CovX2(k,l,i,j) = exp(-z^(1/2)/
                        alcance2);
27                elseif nucleocauchy == 1
                    CovX1(k,l,i,j) = 1/((alcance1/2)
29                        * pi * (1 + ((z^(1/2) + 7)/
                        (alcance1/2))^2));
31                    CovX2(k,l,i,j) = 1/((alcance2/2)
                        * pi * (1 + ((z^(1/2) + 7)/
33                        (alcance2/2))^2));

```

```

35         else
36             CovX1(k,l,i,j) = (1/alcance1^2)
37                 * z * exp(-z^(1/2)/alcance1);
38             CovX2(k,l,i,j) = (1/alcance2^2)
39                 * z * exp(-z^(1/2)/alcance2);
40         end
41     end
42 end
43 end
44
45 h=1;
46 m=1;
47 for k=1:N2
48     for l=1:N2
49         for i=1:N2
50             for j=1:N2
51                 E1(h,m) = CovX1(k,l,i,j);
52                 E2(h,m) = CovX2(k,l,i,j);
53                 m=m+1;
54             end
55         end
56         m=1;
57         h=h+1;
58     end
59 end
60
61 V1 = svd(E1);
62 V2 = svd(E2);
63 for J=1:n2
64     for I=1:n2
65         if I==J
66             Sreales1(I,J)= V1(I);
67             Sreales2(I,J)= V2(I);
68         else
69             Sreales1(I,J) = 0;
70             Sreales2(I,J) = 0;
71         end
72     end
73 end
74 Sreales1 = 0.85 * (1/max(V1)) * Sreales1;

```

---

```

75 Sreales2 = 0.85 * (1/max(V2)) * Sreales2;

77 Orto = orth(E1);
   reescalamiento = 15;
79 Ireales = reescalamiento*Orto;
   Dreales = (1/reescalamiento)*Orto;
81 NIET1 = Ireales * Sreales1 * Dreales';
   NIET2 = Ireales * Sreales2 * Dreales';
83

85 alcance3 = 1;
   alcance4 = 1;
87 for k=1:N2
   for l=1:N2
89     for i=1:N2
   for j=1:N2
91         z1=P(k)-P(i);
           z2=P(l)-P(j);
93         z=(z1^2+z2^2);
           CovX3(k,l,i,j) = (1/sqrt(2*pi*alcance3))
95             *exp(-z/(2*alcance3));
           CovX4(k,l,i,j) = (1/sqrt(2*pi*alcance4))
97             *exp(-z/(2*alcance4));
           CovX5(k,l,i,j) = (15/(16*sqrt(6)))
99             *(1+z/3)^(-7/2);
101     end
   end
103 end

105 h=1;
   m=1;
107 for k=1:N2
   for l=1:N2
109     for i=1:N2
   for j=1:N2
111         NCI1(h,m) = CovX3(k,l,i,j);
           NCI2(h,m) = CovX4(k,l,i,j);
113         IC(h,m) = CovX5(k,l,i,j);
           m=m+1;
115     end
   end

```

---

```

    end
117     m=1;
        h=h+1;
119     end
end
121
mu = zeros(n2,1);
123 sigma = eye(n2);

125 ji1 = mvnrnd(mu, sigma, 1);
    Y01 = (1/(n2^(1/2)))*(NCI1*ji1 ');
127
    ji2 = mvnrnd(mu, sigma, 1);
129 Y02 = (1/(n2^(1/2)))*(NCI2*ji2 ');

131 CovarianzaY0 = (1/n2)*NCI1*NCI1';

133 T = 20;
    INN = 0;
135 muinn = zeros(n2,1);
    if INN == 1
137         varianzanu = max(max(Sreales1+Sreales2))
            /(n2*sqrt(2*pi*alcance2));
139         sigmainn = varianzanu * eye(n2);
    else
141         sigmainn = (1(n2) * IC * IC');
    end
143 nu = mvnrnd(muinn, sigmainn, T);

145 R = ((max(max(Sreales1)))^2/(4*(n2)^(1/2)*sqrt(2*pi
        *alcance3))) * eye(n2);
147 epsilon = mvnrnd(mu,R,T);

149 [Y, Z] = GeneracionProcesos(T, n2, NIET1, NIET2, Y01,
        Y02, nu, Dreales, epsilon);

151 for i=1:T
153     for J1=1:N2
        for J2=1:N2
155         Ymalla(J1, J2, i) = Y(N2*(J1-1)+J2, i);
        end
    end

```

---

```

157     end
      M = Ymalla(:, :, i);
159     surf(M);
      saveas(gcf, ['Yorig', num2str(i), '.eps'], 'psc2');
161     saveas(gcf, ['Yorig', num2str(i), '.jpg'], 'jpg');
end
163
      truncamientos = [0.85 0.95];
165     numero truncamientos = 2;

167     for w = 1:numero truncamientos

169         extremo1 = truncamientos(w) - 0.005;
          extremo2 = truncamientos(w) + 0.005;

171         truncamiento1 = trincar(Sreales1, extremo1,
173             extremo2);
          truncamiento2 = trincar(Sreales2, extremo1,
175             extremo2);
          truncamiento = max([truncamiento1, truncamiento2]);
177         save(['truncamiento', num2str(w), '.txt'],
              'truncamiento', '-ascii');

179         if truncamiento ~ = 0
181             SrealesTrunc1 = Sreales1(1:truncamiento,
                1:truncamiento);
183             SrealesTrunc2 = Sreales2(1:truncamiento,
                1:truncamiento);
185             IrealesTrunc1 = Ireales(:, 1:truncamiento);
                DrealesTrunc1 = Dreales(:, 1:truncamiento);

187
          SrealesTrunc = [SrealesTrunc1 SrealesTrunc2;
189             eye(truncamiento) zeros(truncamiento)];
          IrealesTrunc = [IrealesTrunc1 IrealesTrunc1];
191         DrealesTrunc = [DrealesTrunc1 DrealesTrunc1];

193         P0 = [DrealesTrunc1' * CovarianzaY0 *
                DrealesTrunc1 zeros(truncamiento);
195             zeros(truncamiento) DrealesTrunc1' *
                CovarianzaY0 * DrealesTrunc1];
197         a0 = zeros(2*truncamiento, 1);

```

---

```
199     Q = [DrealesTrunc1' * sigmainn * DrealesTrunc1
          zeros(truncamiento); zeros(truncamiento)
201         zeros(truncamiento)];

203     POPCIN = DrealesTrunc1' * Y01;

205     Yestimada = EcuFK(T, SrealesTrunc, P0, Q, R,
          IrealesTrunc, a0, Z, IrealesTrunc1,
207         truncamiento);

209     for i=1:T
          Error=0;
          for J1=1:N2
211             for J2=1:N2
213                 Ymallaest(J1, J2, i) =
                    Yestimada(N2*(J1-1)+J2, i);
215                 Error = Error + ((Ymalla(J1, J2, i) -
                    Ymallaest(J1, J2, i))^2)/n2;
217             end
          end
219         EF(i) = Error;
          M = Ymallaest(:, :, i);
221         surf(M);
          saveas(gcf, ['Yest', num2str(i), 'trunc',
223                 num2str(w), '.eps'], 'psc2');
          saveas(gcf, ['Yest', num2str(i), 'trunc',
225                 num2str(w), '.jpg'], 'jpg');
227     end
          Errorfuncional = EF';
          save(['errorfuncional', num2str(w), '.txt'],
229             'Errorfuncional', '-ascii');
          plot(1:T, Errorfuncional, 'bo-');
231         saveas(gcf, ['errorfuncional', num2str(w),
                '.eps'], 'psc2');
233         saveas(gcf, ['errorfuncional', num2str(w),
                '.jpg'], 'jpg');
235     end
237 end
          errorfuncional1 = load('errorfuncional1.txt');
```

```

239 errorfuncional2 = load('errorfuncional2.txt');
    plot(1:T,errorfuncional1,'go-',1:T,errorfuncional2,
241        'ro-')
    saveas(gcf,['comparacionerrorfuncional.eps'],'psc2');
243 saveas(gcf,['comparacionerrorfuncional.jpg'],'jpg');

```

Desde la línea 11 a la 82, se construyen los dos operadores de autocorrelación involucrados en la generación del proceso de interés. Los autovalores de dichos operadores se definen a partir de la discretización espacial de dos núcleos exponenciales, gamma o Cauchy con diferentes parámetros, cuyos valores coinciden con los asignados a las variables **alcance1** y **alcance2**. Se consideran las mismas bases de Riez duales para ambos operadores siguiendo las líneas establecidas en el desarrollo del capítulo 5.

Se generan dos condiciones iniciales aleatorias a partir de dos operadores integrales definidos en términos de dos núcleos gaussianos con diferentes parámetros. Se calculan asimismo los núcleos que definen los operadores integrales de covarianza de ambas condiciones iniciales, generadas de forma independiente (líneas 122 a 125).

Con respecto a la parte del filtrado de Kalman, destacar la forma de obtener el truncamiento y los valores iniciales considerados. Se toma por separado cada núcleo de interacción espacio-temporal y se calculan los valores,  $M_1$  y  $M_2$ , que determinan en cada núcleo una variabilidad del  $x\%$ . De esta forma,  $M$ , con  $M = \max(M_1, M_2)$ , será el valor que determina, como mínimo, una variabilidad del  $x\%$  en ambos operadores (líneas 172 a 178). Por otro lado, en las líneas 181 a 201, se introducen los valores iniciales del filtrado de Kalman siguiendo las pautas establecidas en la teoría.

Las funciones *GeneracionProcesos* y *EcuFK*, que se presentan a continuación, se han adaptado al caso de dos núcleos de interacción espacio-temporal, si bien su cometido es el mismo.

```

1  function [Y, Z] = GeneracionProcesos(T, n2, NIET1,
    NIET2, Y01, Y02, nu, Dreales, epsilon)
3
    for i=1:T
5        if i == 1
            Y(:,1) = (1/n2^(1/2))*NIET1*Y01 +
7                (1/n2^(1/2))*NIET2*Y02 + nu(1,:);
            POPCREALES(:,1) = Dreales'*Y(:,1);

```

```

9       Z(:,1) = Y(:,1) + epsilon(1,:)';
    else if i == 2
11          Y(:,i) = (1/n2^(1/2))*NIET1*Y(:,i-1)
              + (1/n2^(1/2))*NIET2*Y01 + nu(i,:)';
13          POPCREALES(:,i) = Dreales'*Y(:,i);
          Z(:,i) = Y(:,i) + epsilon(i,:)';
15          else
          Y(:,i) = (1/n2^(1/2))*NIET1*Y(:,i-1)
              + (1/n2^(1/2))*NIET2*Y(:,i-2)
              + nu(i,:)';
17          POPCREALES(:,i) = Dreales'*Y(:,i);
          Z(:,i) = Y(:,i) + epsilon(i,:)';
19          end
21      end
23  end

1  function [Yestimada] = EcuFK(T, SrealesTrunc, P0, Q,
    R, IrealesTrunc, a0, Z, IrealesTrunc1,
3      truncamiento)

5  for i=1:T

7      if i==1
          P(:, :, i) = SrealesTrunc * P0 * SrealesTrunc'
9              + Q;
          else
11         P(:, :, i) = SrealesTrunc * P(:, :, i-1) *
              SrealesTrunc' + Q;
13     end

15     if abs(det(R + IrealesTrunc * P(:, :, i) *
              IrealesTrunc')) < 10^(-10)
17         K(:, :, i) = P(:, :, i) * IrealesTrunc' *
              pinv(R + IrealesTrunc*P(:, :, i)
19                 *IrealesTrunc');
          else
21         K(:, :, i) = P(:, :, i) * IrealesTrunc' *
              inv(R + IrealesTrunc*P(:, :, i)
23                 *IrealesTrunc');
          end
25

```

---

```

27     P(:, :, i+1) = P(:, :, i) - K(:, :, i) * IrealesTrunc
        * P(:, :, i);

29     if i==1
        clear a;
31     a(:, i) = SrealesTrunc * a0;
        else
33     a(:, i) = SrealesTrunc * a(:, i-1);
        end

35     a(:, i+1) = a(:, i) + K(:, :, i) * (Z(:, i)
37     -IrealesTrunc*a(:, i));

39     Yestimada(:, i) = IrealesTrunc1 *
        a(1:truncamiento, i+1);

41     POPCES(:, i) = a(:, i+1);

43     end
end

```

### A.3. Código del capítulo 6

El código fuente del capítulo 6 consiste, básicamente, en ampliar el código usado en el capítulo 4 para introducir la formulación *backward* del filtrado de Kalman y el algoritmo EM. Con este objetivo, se modifica la función **EcuFK**, añadiendo las ecuaciones de suavizamiento de Kalman y la implementación del algoritmo EM. Adviértase que sólo se considera el caso de innovaciones coloreadas. Los valores iniciales utilizados vienen dados por la proyección de las estructuras originales sobre los sistemas derechos finito-dimensionales definidos mediante los truncamientos seleccionados.

A continuación se comenta más detalladamente lo anteriormente expuesto para los ejemplos considerados en la sección 6.3.

```

clear all;

2
N1 = 20;
4 N2 = N1 + 1;

```

```

n2 = N2^2;
6  alcance1 = 1/4;
   nucleoexponencial = 0;
8  nucleocauchy = 1;

10 for i=1:N2
    P(i)=i;
12 end

14 for k=1:N2
    for l=1:N2
16        for i=1:N2
            for j=1:N2
18                z1=P(k)-P(i);
                z2=P(l)-P(j);
20                z=(z1^2+z2^2);
                if nucleoexponencial == 1
22                    CovX1(k,l,i,j) = (1/alcance1)*
                        exp(-z^(1/2)/alcance1);
24                elseif nucleocauchy == 1
                    CovX1(k,l,i,j) = 1/((alcance1/2)
26                        * pi * (1 + ((z^(1/2) + 7)/
                            (alcance1/2))^2));
28                else
                    CovX1(k,l,i,j) = (1/alcance1^2)
30                        * z * exp(-z^(1/2)/alcance1);
                end
            end
        end
    end
    end

34 end
end

36 h=1;
38 m=1;
for k=1:N2
40    for l=1:N2
        for i=1:N2
42            for j=1:N2
                E(h,m) = CovX1(k,l,i,j);
44            m=m+1;
        end
    end
end

```

---

```

46         end
           m=1;
48         h=h+1;
           end
50     end

52     V = svd(E);
           for J=1:n2
54         for I=1:n2
           if I==J
56             Sreales(I,J)= V(I);
           else
58             Sreales(I,J) = 0;
           end
60         end
           end
62     Sreales = 0.75 * (1/max(V)) * Sreales;

64     Orto = orth(E);
           reescalamiento = 15;
66     Ireales = reescalamiento*Orto;
           Dreales = (1/reescalamiento)*Orto;
68     NIET = Ireales * Sreales * Dreales';

70     alcance2 = 1;
           for k=1:N2
72         for l=1:N2
           for i=1:N2
74             for j=1:N2
           z1=P(k)-P(i);
76             z2=P(l)-P(j);
           z=(z1^2+z2^2);
78             CovX2(k,l,i,j) = (1/sqrt(2*pi*
           alcance2))*exp(-z/(2*alcance2));
80             CovX3(k,l,i,j) = (15/(16*sqrt(6)))
           *(1+z/3)^(-7/2);
82             end
           end
84         end
           end
86     end

```

---

```

h=1;
88 m=1;
   for k=1:N2
90     for l=1:N2
           for i=1:N2
92                 for j=1:N2
                           NCI(h,m) = CovX2(k,l,i,j);
94                           IC(h,m) = CovX3(k,l,i,j);
                           m=m+1;
           end
           end
98     m=1;
       h=h+1;
100 end
end
102
mu = zeros(n2,1);
104 sigma = eye(n2);

106 ji = mvnrnd(mu,sigma,1);

108 Y0 = (1/(n2^(1/2)))*(NCI*ji');

110 CovarianzaY0 = (1/n2)*NCI*NCI';

112 T = 20;
muinn = zeros(n2,1);
114 sigmainn = (1/n2) * IC * IC';
nu = mvnrnd(muinn,sigmainn,T);

116 R = (max(max(Sreales))/(4*n2
118 *sqrt(2*pi*alcance2))) * eye(n2);
epsilon = mvnrnd(mu,R,T);

120 [Y, Z] = GeneracionProcesos(T, n2, NIET,
122 Y0, nu, Dreales, epsilon);

124 for i=1:T
       for J1=1:N2
126         for J2=1:N2
                           Ymalla(J1,J2,i) = Y(N2*(J1-1)+J2,i);

```

---

```

128     end
129     end
130     M = Ymalla(:, :, i);
131     surf(M);
132     saveas(gcf, ['Yorig', num2str(i), '.eps'], 'psc2');
133     saveas(gcf, ['Yorig', num2str(i), '.jpg'], 'jpg');
134 end

136 truncamientos = 0.7;
137 numero truncamientos = 1;
138
139 for w = 1:numero truncamientos
140
141     extremo1 = truncamientos(w) - 0.005;
142     extremo2 = truncamientos(w) + 0.005;
143
144     truncamiento = truncar(Sreales,
145         extremo1, extremo2);
146     save(['truncamiento', num2str(w),
147         '.txt'], 'truncamiento', '-ascii');
148
149     if truncamiento ~ 0
150         SrealesTrunc = Sreales(1:truncamiento,
151             1:truncamiento);
152         IrealesTrunc = Ireales(:, 1:truncamiento);
153         DrealesTrunc = Dreales(:, 1:truncamiento);
154
155         P0 = DrealesTrunc' * CovarianzaY0
156             * DrealesTrunc;
157         a0 = zeros(truncamiento, 1);
158
159         Q0 = DrealesTrunc' * sigmainn * DrealesTrunc;
160         Q = Q0;
161
162         POPCIN = DrealesTrunc' * Y0;
163
164         fin = 0;
165         iteraciones = 0;
166         while fin == 0
167             iteraciones = iteraciones + 1;
168

```

---

```

170     [Yestimada, Lambda, Q] = EcuFK(T,
        SrealesTrunc, P0, Q, R, IrealesTrunc, a0, Z,
        truncamiento);
172
        normaLambda = 0;
174     for i=1:truncamiento
        for j=i:truncamiento
176         normaLambda = (SrealesTrunc(i, j)
            - Lambda(i, j))^2 + normaLambda;
178     end
        end
180     normaLambda = normaLambda/truncamiento^2;
        save(['normaLambda', num2str(w), '.txt'],
182         'normaLambda', '-ascii');

184     norma = 0;
        for i=1:truncamiento
186         for j=i:truncamiento
            norma = (Q(i, j) - Q0(i, j))^2 +
188             norma;
        end
190     end
        normas(iteraciones) = norma/
192         truncamiento^2;
        save(['normas', num2str(w), '.txt'],
194         'normas', '-ascii');

196     if iteraciones > 1
        diferencia = abs(normas(iteraciones)-
198         normas(iteraciones-1));
        diferencias(iteraciones-1) =
200         diferencia;
        end
202
        veces = 0;
204     if iteraciones > 3
        for p=1:3
206         if diferencias(iteraciones-p) < 10^(-7)
            veces = veces + 1;
208         end
        end
        end

```

---

```

210         end
211         if veces == 3
212             fin = 1;
213         end
214
215         if iteraciones > 9
216             fin = 1;
217         end
218     end
219
220     for i=1:T
221         Error=0;
222         for J1=1:N2
223             for J2=1:N2
224                 Ymallaest(J1,J2,i) =
225                     Yestimada(N2*(J1-1)+J2,i);
226                 Error = Error + ((Ymalla(J1,J2,i)
227                     - Ymallaest(J1,J2,i))^2)/n2;
228             end
229         end
230         EF(i) = Error;
231         M = Ymallaest(:, :, i);
232         surf(M);
233         saveas(gcf, ['Yest', num2str(i), 'trunc',
234             num2str(w), '.eps'], 'psc2');
235         saveas(gcf, ['Yest', num2str(i), 'trunc',
236             num2str(w), '.jpg'], 'jpg');
237     end
238     Errorfuncional = EF';
239     save(['errorfuncional', num2str(w), '.txt'],
240         'Errorfuncional', '-ascii');
241     plot(1:T, Errorfuncional, 'bo-');
242     saveas(gcf, ['errorfuncional', num2str(w),
243         '.eps'], 'psc2');
244     saveas(gcf, ['errorfuncional', num2str(w),
245         '.jpg'], 'jpg');
246
247     for i=T+1:T+5
248         for J1=1:N2
249             for J2=1:N2
250                 Ymallaest(J1,J2,i) =

```

---

```

252                                     Yestimada(N2*(J1-1)+J2 , i );
                                     end
253                                     end
254 M = Ymallaest (: , : , i );
                                     surf(M);
256 saveas(gcf , [ 'Ypredic ' , num2str(i) ,
                                     'trunc ' , num2str(w) , '.eps ' ] , 'psc2 ');
258 saveas(gcf , [ 'Ypredic ' , num2str(i) ,
                                     'trunc ' , num2str(w) , '.jpg ' ] , 'jpg ');
260     end
    end
262 end
```

Se comentará sólo la programación de los nuevos aspectos asociados a la implementación del algoritmo EM en combinación con la formulación *backward* del filtrado de Kalman. Así, en las líneas 173 a 182, se determina la calidad del estimador paramétrico funcional de  $\Lambda$ , en términos de la norma de Hilbert-Schmidt de la matriz diferencia dada por  $\Lambda$  menos su estimación. Seguidamente, en las líneas 184 a 218, se establece la condición de parada que llevará a la estimación óptima de  $\Lambda$ . Se realiza asimismo el cálculo de la calidad de la estimación de la matriz  $Q$ , más concretamente, de la variable **sigmainn**. Específicamente, se calcula nuevamente la norma de Hilbert-Schmidt de la matriz diferencia dada por  $Q$ , que representa la estructura de dependencia espacial original del proceso innovación proyectado, sin truncar, menos las estimaciones calculadas a partir del algoritmo EM. Asimismo, se establece el criterio de parada en términos del número de diferencias consecutivas, dado por **veces**, verificando ser menor que una tolerancia, dada en este caso por el valor  $10^{-7}$ . Específicamente, se considera que se obtiene la estimación óptima cuando cada una de las tres diferencias consecutivas calculadas verifica que es menor que  $10^{-7}$ . En el caso en el que no se verifique dicha condición de parada en las 10 iteraciones consideradas, se finaliza el bucle. Y en tal caso, o bien, se relaja la condición de parada, o bien, se incrementa el número máximo de iteraciones.

El código nuevo referente a la implementación del algoritmo EM en combinación con el filtrado de Kalman para la estimación de los parámetros funcionales  $Q$  y  $\Lambda$ , así como consiguiente estimación funcional del proceso de interés,  $Y$ , se recoge en la función *EcuFK*. En dicha función se ha incorporado la formulación «forward», líneas 5 a 41, y «backward», líneas 43 a 73, de las ecuaciones de estimación de Kalman. En las siguientes líneas, 75 a 80, se

estiman, mediante implementación del EM, la matrices  $\Lambda$  y  $Q$ , para finalizar haciendo predicción, líneas 82 a 86.

```

function [Yestimada, Lambda, Q] = EcuFK(T,
2   SrealesTrunc, P0, Q, R, IrealesTrunc,
   a0, Z, truncamiento)
4
for i=1:T
6   if i==1
       P_forward(:, :, i) = SrealesTrunc *
8       P0 * SrealesTrunc' + Q;
   else
10      P_forward(:, :, i) = SrealesTrunc *
       P_forward(:, :, i-1) * SrealesTrunc' + Q;
12 end

14 if abs(det(R + IrealesTrunc * P_forward(:, :, i)
       * IrealesTrunc')) < 10(-10)
16      K(:, :, i) = P_forward(:, :, i) * IrealesTrunc'
       * pinv(R + IrealesTrunc * P_forward(:, :, i)
18      * IrealesTrunc');
   else
20      K(:, :, i) = P_forward(:, :, i) * IrealesTrunc'
       * inv(R + IrealesTrunc * P_forward(:, :, i)
22      * IrealesTrunc');
   end

24
   P_forward(:, :, i+1) = P_forward(:, :, i) - K(:, :, i)
26      * IrealesTrunc * P_forward(:, :, i);

28 if i==1
       a_forward(:, i) = SrealesTrunc * a0;
30 else
       a_forward(:, i) = SrealesTrunc *
32      a_forward(:, i-1);
   end

34
   a_forward(:, i+1) = a_forward(:, i) + K(:, :, i)
36      * (Z(:, i) - IrealesTrunc * a_forward(:, i));

38   Yestimada(:, i) = IrealesTrunc * a_forward(:, i+1);

```

```
40     POPCES(:, i) = a_forward(:, i+1);
    end
42     Pacumu1 = zeros(truncamiento);
44     Pacumu2 = zeros(truncamiento);

46     for i=1:T
        if i==1
48             J(:, :, i) = P0 * SrealesTrunc' *
                inv(P_forward(:, :, i));
50             a_backward(:, i) = a0 + J(:, :, i)
                * (a_forward(:, i+1) - SrealesTrunc * a0);
52             P_backward(:, :, i) = P0 + J(:, :, i)
                * P_forward(:, :, i+1) * J(:, :, i)';
54         else
            J(:, :, i) = P_forward(:, :, i-1) * SrealesTrunc'
                * inv(P_forward(:, :, i));
56             a_backward(:, i) = a_forward(:, i-1) + J(:, :, i)
                * (a_forward(:, i+1) - SrealesTrunc
                * a_forward(:, i-1));
58             P_backward(:, :, i) = P_forward(:, :, i-1)
                + J(:, :, i) * P_forward(:, :, i+1) * J(:, :, i)';
60         end
62     end

64     Pacumu1 = P_backward(:, :, i) + Pacumu1;
        if i<T
66         Pacumu2 = P_backward(:, :, i) + Pacumu2;
        end
68     end

70     for i=1:T
        a_backward(:, i) = a_forward(:, i);
72         P_backward(:, :, i) = P_forward(:, :, i);
    end
74     CY = diag(diag(Pacumu1));
76     BY = Pacumu1-CY;
        AY = diag(diag(Pacumu2));
78     Lambda = BY'*inv(AY);
```

```
80 Q = (CY - Lambda*BY)/T;  
82 for i=T+1:T+5  
    a_forward(:, i+1) = SrealesTrunc * a_forward(:, i);  
84    Yestimada(:, i) = IrealesTrunc * a_forward(:, i+1);  
    POPCES(:, i) = a_forward(:, i+1);  
86 end
```



# Bibliografía

---

- [1] **Abramovich, F. y Angelini, C. (2006)**. Testing in mixed effects FANOVA models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 4326-4348.
- [2] **Abramovich, F., Antoniadis, A., Sapatinas, T. y Vidakovic, B. (2004)**. Optimal testing in functional analysis of variance models. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **2**, 323-349.
- [3] **Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D. y Anh, V.V. (2000)**. Estimation and filtering of fractional generalized random fields. *Journal of the Australian Mathematical Society Series A*, **69**, 1-26.
- [4] **Besse, P., Cardot, H. y Stephenson, D. (2000)**. Autoregressive forecasting of some functional climatic variations. *Scandinavian Journal of Statistics*, **27**, 673-687.
- [5] **Bertino, L., Evensen, G. y Wackernagel, H. (2003)**. Sequential data assimilation techniques in oceanography. *International Statistical Review*, **71** 223-241.
- [6] **Bogaert, P. (1996)**. Comparison of kriging techniques in a space-time context. *Mathematical Geology*, **28**, 73-86.
- [7] **Bosq, D. (2000)**. *Linear Processes in Function Spaces*. New York: Springer.
- [8] **Bosq, D. (2007)**. General linear processes in Hilbert spaces and prediction. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 879-894.

- [9] **Brillinger, D. R. (1973)**. The analysis of time series collected in an experiment design. *Multivariate analysis, III*, Krishnaiah, P.R. (ed.), Academic Press, 241-256.
- [10] **Brillinger, D. R. (1980)**. Some aspect of the analysis of evoked response experiments. *Statistics and related topics*, Csörgö, M., Dawson, D.A. Rao, J.N.K. and Saleh, A.K. (eds.), North-Holland, 15-168.
- [11] **Bretherton, C.S., Smith, C. y Wallace, J.M. (1992)**. An inter-comparison of methods for finding coupled patterns in climate data. *Journal of climate*, **5**, 541-560.
- [12] **Brown, P.E., Karsen, K.F., Roberts, G.O. y Tonellato, S. (2000)**. Blur-generated non-separable space-time models. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **62**, 847-860.
- [13] **Clarkson, D.B., Fraley, C., Gu, C.C. y Ramsay, J.O. (2005)**. *S+ functional data analysis user's guide*. New York, Springer-Verlag.
- [14] **Cressie, N.A. (1993)**. *Statistics for spatial Data*, Wiley.
- [15] **Cressie, N., Irwin, M.E. y Johannesson, G. (2002)**. Spatial temporal nonlinear filtering based on hierarchical statistical models. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Test*, **11(2)** 249-302.
- [16] **Cressie, N. y Huang, H.C. (1999)**. Classes of nonseparable, spatio-temporal stationary covariance functions. *Journal of the American Statistical Association*, **352** 3651-3685.
- [17] **Cohn, S. y Todling, R. (1996)**. Appropriate data assimilation schemes for stable and unstable dynamics. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, **74(1)** 63-75.
- [18] **Collins, M. (1997)**. The EM algorithm. *In fulfillment of the Written Preliminary Exam II PhD requirement*.
- [19] **Damon, J. y Guillas, S. (2005)**. Estimation and Simulation of Autoregressive Hilbertian Processes with Exogenous Variables. *Statistical Inference for Stochastic Processes* **8** 185-204.
- [20] **Da Prato, G. y Zabczyk, J. (2002)**. *Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces*. London Mathematical Society Lecture Note Series **293**, Cambridge University Press.

- 
- [21] **Dautray, R. y Lions, J.L. (1992)**. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Vol. 3, Spectral Theory and Applications, Springer-Verlag.
- [22] **De Iaco, S., Myers, D.E. y Posa, D. (2002)**. Nonseparable Space-Time Covariance Models: Some Parametric Families. *Mathematical Geology* **34**, 23-42.
- [23] **Dempster, A.P., Laird, N.M. y Rubin, D.B. (1977)**. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **39(1)** 1-38.
- [24] **Dhrymes, P.J. (1978)**. *Mathematics for Econometrics*, Springer-Verlag.
- [25] **Diggle, P.J., Liang K.Y. y Zeger, S.L. (1994)**. *Analysis of Longitudinal Data*. Oxford, Clarendon Press.
- [26] **Doucet, A., de Freitas, N. y Gordon N. (2001)**. *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer, New York.
- [27] **Dunford, N. y Schwartz, J.T. (1971)**. *Linear Operators, Part III, Spectral Operator*. Wiley Interscience.
- [28] **Eubank, R.L. y Hart, J.D. (1992)**. Testing goodness-of-fit in regression via order selection criteria. *The Annals of Statistics*, **20**, 1412-1425.
- [29] **Eubank, R.L. y LaRiccia, V.N. (1992)**. Asymptotic comparison of Cramér-von Mises and non-parametric function estimation techniques for testing goodness-of-fit. *The Annals of Statistics*, **20**, 2071-2086.
- [30] **Epperson, B.K. (2000)**. Spatial and space-time correlations in ecological models. *Ecological Modelling*, **132**, 63-76.
- [31] **Fan, J. (1996)**. Test of significance based on wavelet thresholding and neyman's truncation. *Journal of American Statistical Association*, **91**, 674-688.
- [32] **Fan, J. y Lin, S.J. (1998)**. Test of significance when data are curves. *Journal of American Statistical Association*, **93**, 1007-1021.
- [33] **Ferraty, F. y Vieu, P. (2006)**. *Nonparametric Functional Data Analysis*. Springer Series in Statistics. New York, Springer.

- [34] **Gelfand, A., Ghosh, S., Knight, J. y Sirmans, C. (1998)**. Spatio-temporal modeling of residential sales data. *Journal Business Economical Statistics*, **16**, 312-321.
- [35] **Glahn, H.R. (1968)**. Canonical correlation and its relationship to discriminant analysis and multiple regression. *Journal of the atmospheric sciences*, **25**, 23-31.
- [36] **Glasbey, C.A., Graham, R. y Hunter, A.G.M. (2001)**. Spatio-temporal variability of solar energy across a region: a statistical modelling approach. *Solar Energy*, **70**, 373-381.
- [37] **Ghil, M., Allen, M.R., Dettinger, M.D., Ide, K., Kondrashov, D., Mann, M.E., Robertson, A.W., Saunders, D., Tian, Y., Varadi, F. y Yiou, P. (2002)**. Advanced spectral methods for climatic time series. *Reviews of Geophysics*, **40**, 3-1-3-40.
- [38] **Gneiting, T. (2002)**. Stationary covariance functions for space-time data. *Journal of the American Statistical Association* **97**, 590-600.
- [39] **Godtliebseu, F., Chu, C.K., Sorbye, S.H. y Torheim, G. (2001)**. An estimator for functional data with application to MRI. *Medical Imaging*, **20**, 36-44.
- [40] **Gutiérrez Jáimez, R. y González Carmona, A. (1991)**. *Introducción al Análisis Multivariante*, Universidad de Granada.
- [41] **Guttorp, P., Meiring, W. y Sampson, P. (1994)**. A space-time analysis of ground-level ozone data. *Environmetrics*, **5**, 241-254.
- [42] **Guillas, S. (2001)**. Rates of convergence of autocorrelation estimates for autoregressive Hilbertian processes. *Statistics & Probability Letters*, **55**, 281-291.
- [43] **Hall, P. y Hart, J.D. (1990)**. Bootstrap test for difference between means in nonparametric regression. *Journal of American Statistical Association*, **85**, 1039-1049.
- [44] **Hall, P., Poskitt, D.S. y Presnell, B. (2001)**. A functional data-analytic approach to signal discrimination. *Technometrics*, **43**, 1-9.
- [45] **Handcock, M. y Wallis, J. (1994)**. An approach to statistical spatial-temporal modeling of meteorological fields. *Journal of American Statistical Association*, **89**, 368-390.

- 
- [46] **Haslett, J. y Raftery, A. E. (1989)**. Space-time modelling with long-memory dependence: assessing Ireland's wind power resource. *Applied Statistics*, **38**, 1-21.
- [47] **Hasselmann, K. (1988)**. PIPs and POPs: The reduction of complex dynamical systems using principal interaction and oscillation patterns. *Journal of Geophysical Research*, **93**, 11015-11021.
- [48] **Higdon, D. (1999)**. A process-convolution approach to modelling temperatures in the north Atlantic Ocean. *Environmental and Ecological Statistics*, **5**, 173-190.
- [49] **Holden, L., Natvig, B., Sannan, S. y Bungum H. (2000)**. Modeling spatial and temporal dependencies between earthquakes. *Statistical Research* **13**.
- [50] **Huang, H.C. y Cressie, N. (1996)**. Spatio-temporal prediction of snow water equivalent using the Kalman filter. *Computational Statistics and Data Analysis*, **22** 159-175.
- [51] **Hutson, V. y Pym, J.S. (1980)**. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*. Academic Press Inc.
- [52] **Inglot, T. y Ledwina, T. (1996)**. Asymptotic optimality of data-driven Neyman's tests for uniformity. *The Annals of Statistics*, **24**, 1982-2019.
- [53] **Ledwina, T. (1994)**. Data-driven version of Neyman's smooth test of fit. *Journal of American Statistical Association*, **89**, 1000-1005.
- [54] **Kalman, R.E. (1960)**. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transaction of the ASME – Journal of Basic Engineering*, 35-45.
- [55] **Lavine, M. y Lozier, S.(1999)**. A Markov random field spatio-temporal analysis of ocean temperature. *Environmental and Ecological Statistics*, **6**, 249-273.
- [56] **Lohmann, G. y Bohn, S. (2002)**. Using replicator dynamics for analyzing fMRI data of the human brain. *Medical Imaging* **21**, 485-492.
- [57] **Lorenz, E.N. (1956)**. Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. *Scientific Report Number 1, Statistical Forecasting Project*, MIT, 49.
-

- [58] **Ma, C. (2003)**. Spatio-temporal stationary covariance models. *Journal of Multivariate Analysis*, **86**, 97-107.
- [59] **Ma, C. (2003)**. Families of spatio-temporal stationary covariance models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **116**, 489-501.
- [60] **Ma, C. (2003)**. Nonstationary covariance functions that model space-time interactions. *Statistics & Probability Letters*, **61**, 411-419.
- [61] **Mardia, K. V., Goodall, C., Redfern, E. J. y Alonso, F. J. (1998)**. The Kriged Kalman filter. *Test*, **7**, 217-287.
- [62] **Mas, A. (2007)**. Weak convergence in the functional autoregressive model. *Journal of Multivariate Analysis*, **98**, 1231-1261.
- [63] **Matheron, G. (1962)**. Traite de Geoestatistique Apliquee, Tome I, Memoires du Bureau de Recherches Geologiques et minieres, **24**. Editions Bureau de Recherches Geologiques et Minieres, París.
- [64] **McLachlan, G. y Krishnan, T. (1997)**. *The EM Algorithm and Extensions*. Wiley series in probability and statistics. John Wiley & Sons.
- [65] **Meyer, Y. (1992)**. *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press.
- [66] **Müller, H.G. (2005)**. Functional modelling and classification of longitudinal data. *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**, 223-240.
- [67] **Müller, H.G. y Stadtmüller, U. (2005)**. Generalized functional models. *Annals of Statistics*, **33**, 774-885.
- [68] **Nan, F.Y. y Nowak, R.D. (1999)**. Generalized likelihood ratio detection for fMRI using complex data. *Medical Imaging*, **18**, 320-329.
- [69] **Nychka, D., Wikle, C. y Royle, J.A. (2002)**. Multiresolution models for nonstationary spatial covariance functions. *Statistical Modelling: An international Journal*.
- [70] **Pfeifer, P. y Deutsch, S. (1980)**. Stationarity and invertibility regions for low order STARMA models. *Communications in Statistics and Simulation Computation*, **9**, 551-562.
- [71] **Porcua, E., Mateua, J., Zinib, A. y Pini, R. (2007)**. Modelling spatio-temporal data: A new variogram and covariance structure proposal. *Statistics & Probability Letters* **77**, 83-89.

- 
- [72] **Preisendorfer, R.W. (1988)**. Principal component analysis in meteorology and oceanography. *Elsevier*, 425.
- [73] **Ramm, A.G. (1990)**. *Random Fields Estimation Theory*. Longman, Essex.
- [74] **Ramsay, J.O. y Silverman, B.W. (2005)**. *Functional Data Analysis*. Springer Series in Statistics.
- [75] **Renshaw, E. y Särkkä, A. (2001)**. Gibbs point processes for studying the development of spatio-temporal stochastic processes. *Computational Statistics and Data Analysis*, **36**, 85-105.
- [76] **Ruiz-Medina, M.D. (2008)**. Wavelet thresholding methods applied to testing significance differences between autoregressive Hilbertian processes. *First International Workshop on Functional and Operatorial Statistics (Toulouse , June 19-21, 2008)*.
- [77] **Ruiz-Medina, M.D., Alonso, F.J., Angulo, J.M. y Bueso, M.C. (2003)**. Functional stochastic modeling and prediction of spatio-temporal processes. *Journal of Geophysical Research*, **108(D24)**, 9003.
- [78] **Ruiz-Medina, M.D. y Angulo, J.M. (2002)**. Spatio-temporal filtering using wavelets. *Stochastic and Environmental Research and Risk Assessment*, **16**, 241-266.
- [79] **Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M. y Fernández-Pascual, R. (2007)**. Wavelet-vaguelette decomposition of spatiotemporal random fields. *Stochastic and Environmental Research and Risk Assessment*, **21**, 273-281.
- [80] **Ruiz-Medina, M.D., Salmerón, R. y Angulo, J.M. (2007)**. Kalman filtering from POP-based diagonalization of ARH(1). *Computational Statistics and Data Analysis*, **51 (10)**, 4994-5008.
- [81] **Ruiz-Medina, M.D. y Salmerón, R. (2008)**. *Maximum-likelihood estimation of functional parameters in autoregressive Hilbertian processes* (sometido).
- [82] **Ruttimann, U.E., Unser, M., Rawlings, R.R., Rio, D., Ramsey, N.F., Mattay, V.S., Hommer, D.W., Frank, J.A. y Weinberger, D.R.(1998)**. Statistical Analysis of Functional MRI Data in the Wavelet Domain. *Medical Imaging*, **17**, 142-154.

- [83] **Salmerón, R. y Ruiz-Medina, M.D. (2008)**. Multispectral decomposition of FAR(p) models. *Stochastic and Environmental Research and Risk Assessment*. DOI: 10.1007/s00477-008-0213.
- [84] **Sansó, B., Guenni, L. (1999)**. Venezuelan rainfall data analysed by using a Bayesian space-time model. *Applied Statistics*, **48**, 345-362.
- [85] **Shubov, M.A. (1997)**. Nonselfadjoint operators generated by the equation of a nonhomogeneous damped string. *Transactions of the American Mathematical Society*, **349**, 4481-4499.
- [86] **Shumway, R.H. (1988)**. *Applied statistical time series analysis*, Prentice-Hall.
- [87] **Smith, R. y Robinson, P. (1997)**. A Bayesian approach to the modelling of spatial-temporal precipitation data. *Lectures Notes in Statistics*, **121**, 237-269.
- [88] **Solo, V., Brown, E.N. y Long, C.J. (2003)**. Spatial wavelets for temporally correlated FMRI. *International Conference on Image Processing ICIP03, II*, 843-846.
- [89] **Stein, M. (2003)**. Space-time covariance functions. *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 310-321.
- [90] **Stoffer, D. (1986)**. Estimation and identification of space-time ARMAX models in the presence of missing data. *Journal of American Statistical Association*, **81**, 762-772.
- [91] **Stroud, J., Müller, P. y Sansó, B. (1999)**. Dynamic models for spatio-temporal data. *Technical Report 99-20, Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University*.
- [92] **Triebel, H. (1978)**. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. North-Holland Publishing. Co. Amsterdam.
- [93] **van Leeuwen, P.J. (2002)**. A variance-minimizing filter for large-scale applications. *Monthly Weather Review*.
- [94] **von Storch, H., Bürger, G., Schnur, R. y von Storch, J.S. (1995)**. Principal oscillation patterns: a review. *Journal of Climate*, **8**, 377-400.

- 
- [95] **von Storch, H., Bruns, T., Fischer-Bruns, I. y Hasselmann, K. (1988)**. Principal oscillation patterns analysis of the 30 to 60 day oscillation in a general circulation model equatorial troposphere. *Journal of Geophysical Research*, **93**, 11022-11036.
- [96] **Vogel, C.R. y Wade, J.C. (1994)**. Iterative SVD-based methods for ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **15**, 736-754.
- [97] **Waller, L.A., Carlin, B.P., Xia H. y Gelfang, A.E. (1996)**. Hierarchical spatio-temporal mapping of disease rates. *Journal of the American Statistical Association*, **92** 607-617.
- [98] **Waller, L., Carlin, B., Xia, H. y Gelfand, A. (1997)**. Hierarchical spatio-temporal mapping of disease rates. *Journal of American Statistical Association*, **92**, 607-617.
- [99] **Welch, G. y Bishop, G. (2006)**. An introduction to the kalman filter. *SIGGRAPH 2001 Course*.
- [100] **Wikle, C.K. (2001)**. A kernel-based spectral approach for spatio temporal dynamic models. *Proceedings of the 1st Spanish Workshop on Spatio-Temporal Modelling of Environmental Processes (METMA), Benicassim, Castellón (Spain), 28-31 October*, 167-180.
- [101] **Wikle, C.K. (2002)**. A kernel-based spectral model for non-Gaussian spatio-temporal processes. *Statistical Modelling: An International Journal*, **2**, 299-314.
- [102] **Wikle, C.K. (2003)**. Spatio temporal methods in climatology. *Encyclopedia of Life Support Systems*. Paris: EOLSS.
- [103] **Wikle, K., Berliner, M. y Cressie, N. (1999)**. Hierarchical Bayesian space-time models. *Environmental Ecological and Statistics*, **5**, 117-154.
- [104] **Wikle, C.K. y Cressie, N. (1999)**. A dimension-reduction approach to space-time Kalman filtering. *Biometrika*, **86**, 815-829.
- [105] **Wikle, C.K., Milliff, R.F. y Berliner, L.M. (1999)**. Spatio temporal hierarchical bayesian modeling: Tropical Ocean Surface Winds. *JASA, Applications and Case Studies*.
- [106] **Yao, F., Müller, H.G., Clifford, A.J., Dueker, S.R., Lin Follett, J., Buchholz, B.A.Y. y Vogel, J.S. (2003)**. *Shrinkage estimation for*

*functional principal component scores with application to the population kinetics of plasma folate*, *Biometrics* **59**, 676-685.

- [107] **Yao, F., Müller, H.G. y Wang, J.L. (2005)**. Functional data analysis for sparse longitudinal data. *Journal of The American Statistical Association*, **100**, 577-590.