UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UTILIZACIÓN DEL MÉTODO GEOMÉTRICO LINEAL (MGL) PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA ELEMENTAL

Tesis doctoral

María Victoria Martínez Videla

Granada, 2011

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: María Victoria Martínez Videla
D.L.: GR 4039-2011
ISBN: 978-84-694-5745-0

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UTILIZACIÓN DEL MÉTODO GEOMÉTRICO LINEAL (MGL) PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA ELEMENTAL

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de los Doctores Francisco Fernández García y Pablo Flores Martínez, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta la Licenciada María Victoria Martínez Videla.

Fdo.: María Victoria Martínez Videla

Vº Bº de los Directores

Fdo.: Francisco Fernández García

Fdo.:Pablo Flores Martinez

Este trabajo ha sido realizado dentro del Grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada, del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, referencia: FQM0193, y parcialmente financiado en el marco del Proyecto de Investigación: *Modelización y Representaciones en Educación Matemática,* referencia: EDU2009-11337, financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos a los directores del trabajo de tesis doctoral:

Dr. Francisco Fernández García, por su dedicación y acompañamiento durante todo el proceso de formación. Por sus sugerencias, comentarios, tiempo dedicado y apoyo. Por el optimismo permanente, que permitieron llevar a cabo el trabajo con satisfacción y buen ánimo.

Dr. Pablo Flores Martínez por su disposición permanente a mejorar el trabajo a través de sus sugerencias. Por la lectura dedicada y la agudeza de sus observaciones y comentarios.

Los profesores del doctorado en Didáctica de la Matemática, por la formación brindada no sólo durante los cursos de formación de doctorado, sino durante todos estos años. Por la buena disposición permanente a acompañarme en estos años de formación académica.

A Irene, Luis, Paqui y Marga, por sus horas de dedicada entrega a la creación de un material para innovar en la enseñanza de la matemática en la escuela y por compartir generosamente la intimidad de sus aulas con nosotros.

A mi familia ampliada, la de aquí y la de allá, por acompañarme siempre.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra y la resolución de problemas es un campo complejo dentro del proceso de formación matemática en el contexto escolar. En el área de la Didáctica de la Matemática se trabajado en torno a esta problemática con el fin de caracterizarla y de desarrollar propuestas que faciliten dicho proceso.

Dentro del área también se ha subrayado la importancia de la utilización de diversos tipos de representaciones con el fin de enriquecer la construcción de conocimientos matemáticos. Es así como nos hemos propuesto abordar el tema de la resolución de problemas de álgebra en los primero niveles de enseñanza secundaria obligatoria a partir de la utilización de representaciones gráficas, pensando en elaborar una alternativa interesante de ser estudiada en Educación Matemática.

En este capítulo presentamos el problema de investigación que hemos abordado en el trabajo de tesis. En primer lugar, describimos la pertinencia del estudio y, posteriormente, hacemos un resumen del desarrollo del trabajo para finalizar con un recorrido de la estructura del informe de tesis, detallando el contenido de cada uno de los capítulos que lo componen.

1.1 Justificación y delimitación del problema

Nuestro trabajo de investigación se centra en el estudio de la resolución gráfica de problemas de enunciado verbal, en los primeros años de educación secundaria, que coincide con los primeros cursos en que se consideran contenidos algebraicos explícitamente.

Tanto la resolución de problemas de enunciado, como la enseñanza y aprendizaje del álgebra, son áreas que presentan grandes dificultades, por lo que no es de extrañar que actualmente sean temas de investigación recurrentes en la Didáctica de la Matemática, siendo variados los elementos en los que se puede centrar la atención para enmarcar la problemática y aproximarse a ella. Uno de esos elementos es el desarrollo de competencias, que se ha convertido en una demanda que cobra fuerza en educación en los últimos años, dándosele gran relevancia tanto al desarrollo de competencias genéricas como específicas de cada área.

Por otra parte, ha constituido un hito el examen que realiza la OECD/PISA (2004) y que tiene por objetivo determinar las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar matemáticamente. Con dicho fin, ha identificado ocho competencias matemáticas transversales que caracterizan la alfabetización matemática de un sujeto, es decir, de un sujeto que realiza tareas matemáticas y trabaja con ellas. Las ocho competencias son:

- Pensar y razonar
- Argumentar
- Comunicar
- Modelar
- Plantear y resolver de problemas
- Representar
- Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas
- Utilizar ayudas y herramientas

En este caso, el currículo español ha insertado de manera explícita el trabajo en torno a competencias básicas, destacando como finalidades de dicha inclusión la importancia de integrar aprendizajes pertenecientes a diversas áreas, tendiendo a que los estudiantes sean capaces de utilizar de manera efectiva dichos aprendizajes en diversos tipos de situaciones. En términos de enseñanza, se pretende su orientación para "*permitir identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible y, en general, inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje*" (Real Decreto 1631/2006, p. 685).

En el área de matemáticas, específicamente se describe que la competencia matemática está compuesta por la habilidad para:

- Utilizar y relacionar los números, sus operaciones, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático.
- Interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.
- Ampliar el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana.
- Seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y deducción).

- Tener una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones que contienen elementos o soportes matemáticos. Identificar dichas situaciones, aplicar estrategias de resolución de problemas y la selección de técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar a partir de la información disponible.

Finalmente, se declara que al finalizar la Educación Secundaria la competencia matemática *"supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento, para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad"* (Real Decreto 1631/2006*,* pp. 686 - 687).

En ambos casos, estudio PISA y directrices del MEC, encontramos elementos comunes a desarrollar por los estudiantes, como parte medular de la competencia matemática, y que guardan relación con la resolución de problemas de enunciado en los primeros niveles de Educación Secundaria: razonar matemáticamente, usar el lenguaje matemático (numérico y simbólico), representar y comunicar.

Es importante, entonces, analizar las tareas que actualmente se plantean a los estudiantes tomando en cuenta, entre otras cosas, si contribuyen al desarrollo de competencias, con el fin de que el sujeto que aprende desarrolle una visión más compleja, transformando el aprendizaje matemático en una herramienta para interpretar diversas situaciones.

Destacamos que el uso del álgebra, en matemática y en otras áreas, es de gran utilidad para representar situaciones e ideas complejas utilizando un sistema de signos universal, convirtiéndose así en un instrumento valioso para desenvolverse exitosamente en diversas áreas de conocimiento y en la vida cotidiana. Por lo tanto, su estudio es de gran importancia para desarrollar competencias matemáticas que favorezcan el avance y progreso social y, también, para la formación académica o profesional que posteriormente siguen los estudiantes de Secundaria.

Sin embargo, la enseñanza del álgebra es problemática desde que comienza su instrucción en los primeros cursos de Educación Secundaria y se puede afirmar que no es un proceso sencillo, lo que tiene como consecuencia que, sólo quien tiene cierto dominio del álgebra, verá más accesible el trabajo en otras áreas. Aunque muchas veces para el profesor de matemáticas, el paso de la aritmética al álgebra, las reglas y el lenguaje algebraico, pueden ser una tarea fácil de comprender y aplicar, generalmente el estudiante de secundaria no concibe dicho proceso como algo elemental y mucho menos rutinario (Kieran y Filloy, 1989; Kaput, 1995, 2000a; Filloy y Sutherland, 1996; Stacey y Chick, 2004; Kieran, 2004; Lins y Kaput, 2004).

Considerando la complejidad de la cuestión, Fernández (1997b) considera que la importancia de la enseñanza del álgebra se fundamenta en dos aspectos: por una parte el paso de la aritmética al álgebra responde a una necesidad de tener un mecanismo potente para resolver problemas y, en segundo lugar, mediante la utilización de una representación simbólica adecuada se haría posible la extensión y potenciación del método de resolución a todo tipo de problemas.

Además de lo anterior, Fernández (1996) describe como una dificultad constante el hecho de que tradicionalmente se ha considerado el álgebra como generalización de la aritmética y, sin embargo, en ocasiones las operaciones en álgebra contradicen las reglas aritméticas, por lo que es necesario que los símbolos utilizados en álgebra sean receptores de significado y no sólo objetos de comunicación.

Por lo tanto, asumiendo que el álgebra es un elemento crucial para el desarrollo matemático posterior de los estudiantes, reflexionar en torno a su enseñanza y aprendizaje se vuelve inevitable y sumamente necesario, y nosotros la hemos abordado en torno a los siguientes núcleos:

- Consideramos como elemento esencial la **resolución de problemas (RP)**, tomando en cuenta el doble papel que juega en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, en particular, en el álgebra. Por una parte, las matemáticas y sus aplicaciones a otra áreas tienen como principal objetivo la RP (NCTM, 2000). Además, históricamente el desarrollo de las matemáticas ha tenido grandes avances en el momento en que ha sido utilizada para resolver algún problema determinado.

  Por otra parte, la utilización de la RP como metodología de enseñanza ha sido un campo de estudio amplio en la Didáctica de la Matemática, desarrollándose teorías al respecto (Brousseau, 1997) o considerando la resolución de problemas como un eje en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Carrillo, 1996; Schoenfeld, 1998; NCTM, 2000; Contreras y Carrillo, 2000; Block, Martínez, Dávila y Ramírez, 2000; Blanco, 2000; Real Decreto 1345/1991, 3473/2000, 116/2004 y 1631/2006).

- El uso de distintos tipos de representaciones para comunicar y para hacer matemáticas, también ha sido un tema ampliamente estudiado y discutido por especialistas en Educación Matemática. Los estudios referentes a este tema han tratado de diferenciar entre las que son representaciones mentales, o representaciones internas, de las representaciones externas (Kaput, 1992; Goldin, 1998; Cifarelli, 1998; Duval, 1999a; Font, 2001; Godino, 2003). También queremos destacar los trabajos relacionados con la utilización de diferentes tipos de representaciones, y sus transformaciones, para la adquisición de conceptos matemáticos (Stacey y McGregor, 1995; Duval, 1999b). De esta forma, otro elemento que hemos tenido en cuenta se refiere a los **sistemas de representación (SR)**.

En el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dentro de grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico, se han desarrollado varias tesis relacionadas con los núcleos problemáticos descritos anteriormente: Castro 1994; Castro, 1995; Fernández, 1997a; Espinosa, 2004; Molina, 2006; Benavides, 2008.

De estos trabajos, los antecedentes directos de nuestra investigación son las tesis de Fernández (1997b) y Espinosa (2004), quienes se centran en la resolución de problemas de álgebra elemental y sistemas de representación, como vamos a resumir a continuación:

- Fernández (1997a) en *"Evaluación de competencias de álgebra elemental basado en la resolución de problemas verbales"* caracteriza una serie de tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental, en base a los SR que los estudiantes han utilizado, espontáneamente, para resolver los problemas propuestos.
- Espinosa (2004) en *"Tipología de resolutotes de problemas de álgebra elemental y creencia sobre la evaluación con profesores en formación inicial"* realiza una réplica de la tesis anterior y aporta, como elemento distintivo, las relaciones entre las tipologías de resolutores de problemas, definidas por Fernández (1997a), y las creencias que tienen los futuros profesores cuando evalúan los problemas bien resueltos por los estudiantes, diferenciados según el SR que han utilizado en su resolución.

En estos trabajos se consideraron como centro de la investigación a los sujetos que resuelven problemas y los sistemas de representación que éstos utilizan en ese proceso. Llamó nuestra atención que, en los resultados obtenidos por Fernández (1997a) y Espinosa (2002 y 2004), del conjunto de los sistemas de representación que emplean los estudiantes para resolver problemas, el menos utilizado es el SR gráfico, aún cuando diversos autores han resaltado la utilidad del uso de gráficas e imágenes visuales para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos (Kaput, 1989; Castro, 1995; Rico, 1997; Castro y Castro, 1997; Cifarelli, 1998; Duval, 1999a; NCTM, 2000; Romero, 2000; Goldin y Shteingold, 2001).

En consecuencia, en el trabajo de investigación tutelado (Martínez, 2006), previo a la presente tesis doctoral, nos plateamos clasificar los problemas de álgebra elemental, presentes en libros de texto de 1º y 2º de Educación Secundaria, a partir de su resolución utilizando un método gráfico particular que llamamos Método Geométrico – Lineal (MGL). Como resultado del trabajo fue posible:

- Definir y caracterizar dicho método.
- Constatar que es posible proponer una clasificación de problemas a partir de la utilización del MGL para resolverlos.

Dentro de los métodos que podemos encontrar en el SR gráfico, el MGL es uno de los más sofisticados y simbólicos. Fernández (1997a) considera al SR gráfico como un paso intermedio entre los sistemas numéricos y los simbólicos alfabéticos (algebraicos), por lo que podríamos considerar al MGL como un puente entre las representaciones más icónicas e intuitivas y las más simbólicas y abstractas, lo que permite allanar el camino hacia el lenguaje simbólico por excelencia, es decir, el lenguaje algebraico.

Por esta razón, nos planteamos diseñar una secuencia de enseñanza para la introducción del álgebra en el aula, basada en la utilización del MGL, como una herramienta para la resolución de problemas de álgebra elemental, con vistas a ser utilizada como instrucción dentro de la clase de matemáticas y, posteriormente, describir y estudiar los resultados de esa la aplicación.

1.2 Desarrollo de la investigación

La primera aproximación que hicimos sobre este tema fue el trabajo realizado en el marco del Trabajo de Investigación Tutelada para optar al Diploma de Estudios Avanzados (DEA), en el que elaboramos una definición del MGL y una clasificación de problemas de álgebra elemental a partir de la utilización del mismo (Martínez, 2006).

Como continuación del este trabajo, nos planteamos introducir el MGL en el aula y describir cómo lo utilizan los estudiantes para la resolución de problemas de álgebra elemental en los primeros niveles de la Educación Secundaria, que es cuando se inicia la enseñanza del álgebra. Para ello hemos completado las siguientes etapas:

- Revisión de antecedentes para conocer el estado del la cuestión, es decir, investigaciones que se han realizado relacionadas con nuestro tema de interés, lo que ha dado lugar a la definición y acotación del problema de investigación.
- Descripción del Marco teórico con vistas a la elaboración del material para el aula y posterior análisis del mismo.
- Diseño del material para el aula con un grupo de profesores en ejercicio.
- Aplicación del material en cinco aulas de 1º y 2º de ESO. Aplicación que fue realizada por los mismos profesores que participaron en el diseño del material.
- Análisis de las producciones de los estudiantes.
- Elaboración del informe que recoge todo el proceso descrito.

Dado que los pasos indicados anteriormente no fueron lineales en el tiempo, en la Figura 1.1 hemos representado las etapas del trabajo.

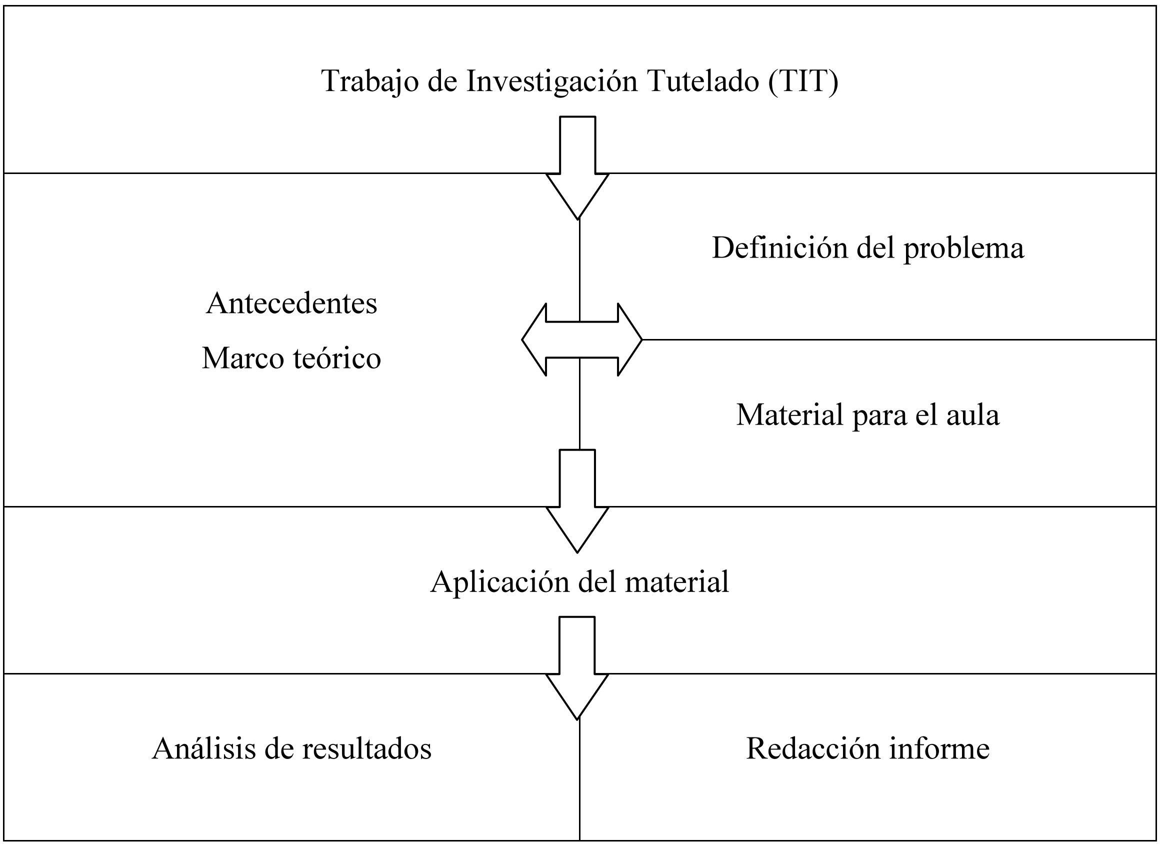


Figura 1.1: Etapas del trabajo de investigación

1.3 Descripción del informe

En los capítulos sucesivos, cuyo resumen exponemos a continuación, presentamos el informe de nuestro trabajo de investigación:

Con el fin de delimitar el contexto teórico y conceptual dentro del que desarrollamos nuestro trabajo, en el Capítulo 2 hemos definido el *Marco teórico* que va a ser la referencia de nuestra investigación, que se conforma en torno a cuatro núcleos:

- Algebra escolar y álgebra en el currículo de la ESO.
- Representaciones y sistemas de representación.
- Resolución de problemas.
- Método geométrico – lineal para la resolución de problemas algebraicos.

Delimitados los elementos teóricos y conceptuales con los que trabajamos, definimos el *Problema de investigación* en el Capítulo 3. Dentro de este capítulo exponemos, en primer lugar, el estado de la cuestión considerando cuatro ejes de interés temático:

- Álgebra y resolución de problemas.
- Utilización de representaciones gráficas.
- Utilización de la línea recta.
- Antecedentes en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Partiendo del estado de la cuestión, enunciamos las preguntas de investigación, que dan paso a los objetivos y, posteriormente, a las hipótesis de investigación.

La *Metodología* utilizada está descrita en el Capítulo 4, en el que detallamos el tipo de estudio que se ha planteado, la descripción y construcción del instrumento de evaluación y toma de datos utilizado, las variables a observar, el proceso de aplicación del instrumento, así como la validez y fiabilidad del mismo.

En el Capítulo 5 presentamos el *Análisis de datos y resultados,* partiendo de la codificación de los datos, y estudiamos los análisis de frecuencia realizados en cada etapa de resolución. Las conclusiones desprendidas del análisis de frecuencias son complementadas con una descripción de los resultados, a partir de la producción de los estudiantes, con el fin de detallar cómo se ha utilizado el MGL en la resolución de los problemas, regularidades y diferencias. Un análisis de clúster, según las etapas de resolución de los problemas, nos permite apreciar variables de los mismos que intervienen en las respuestas de los estudiantes. Finalmente, se presenta un resumen de los resultados obtenidos.

Concluyendo el informe de investigación, en el Capítulo 6 presentamos los *Resultados y conclusiones generales.* Este capítulo lo hemos organizado teniendo en cuenta los tres elementos que definen el problema de investigación y lo que esperábamos obtener a priori: las preguntas de investigación, los objetivos y las hipótesis. Cerramos con los aportes y limitaciones de nuestro trabajo e indicamos algunas líneas a considerar para investigaciones futuras.

Finalmente, se adjuntan las referencias bibliográficas y un apartado de anexos con material que completa lo descrito en los capítulos de este informe.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

Este capítulo tiene por objetivo establecer una base teórica que permita definir claramente el problema y dotarnos de herramientas teóricas para el análisis e interpretación de los resultados. Por una parte, se pretenden esclarecer algunos conceptos que se utilizan dentro de la investigación de manera tal que no se produzcan ambigüedades y, por otra parte, delimitar el área de estudio dentro de la que se está trabajando.

El marco teórico contemplará los siguientes apartados, que se van a desarrollar a continuación:

- Álgebra escolar.
- Álgebra en el currículo de la ESO.
- Representaciones y sistemas de representación.
- Resolución de problemas.
- Método geométrico-lineal para resolución de problemas algebraicos .

2.1 Álgebra escolar

El estudio de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar ha sido un tema de amplio debate en los últimos años en el campo de la Educación Matemática. Diversos autores han desarrollado investigaciones en torno a este tema abordando distintos aspectos, como las dificultades en el área, el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, la evolución del álgebra a nivel curricular, la resolución de problemas, el uso de tecnología para su enseñanza y aprendizaje, etc. Entre otros, queremos destacar los trabajos de tesis doctorales realizados por Fernández, 1997a; Espinosa, 2004; Molina, 2006; Cerdán, 2008; Arnau, 2010; y los reportes de investigación y desarrollo teórico en esta línea, como los trabajos de Kieran y Filloy, 1989; Kaput, 1995; Gómez, 1995; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Filloy y Sutherland, 1996; Melvilla y Fortuny, 1999; Kaput, 2000a, 2000b; Rodríguez Chamizo, 2003; Stacey, Chick y Kendal, 2004; Kieran 2006a, 2006b, 2007a, 2007b; Filloy, Puig y Rojano, 2008.

Aún cuando existen bastantes trabajos realizados en torno al aprendizaje y la enseñanza del álgebra en la escuela, nos parece pertinente plantearnos como pregunta: ¿qué es el álgebra escolar? Al respecto, Kieran (2004) rescata el análisis realizado por Lesley Lee a mediados de los años noventa referente a la pregunta *¿qué es álgebra?* planteada a matemáticos, profesores, alumnos e investigadores en Didáctica de la Matemática. El análisis concluye que el álgebra es considerada como un tema escolar, una aritmética generalizada, una herramienta, un lenguaje, una cultura, una forma de pensar, una actividad.

Dentro de dicho estudio, Kieran (2004), destaca las opiniones de algunos investigadores del área como los siguientes:

- Pimm se refiere a que el álgebra guarda más relación con el "hacer", que en efecto es acción sobre las cosas, poniendo especial atención en la transformación de los objetos, más que en los objetos por sí mismos.
- Kaput enfatiza una visión alternativa, subrayando la importancia de dedicar mucho tiempo de la actividad algebraica escolar en la construcción de objetos algebraicos.
- Bell se centra en el propósito del álgebra, específicamente, en el hecho de que los alumnos no se ven enfrentados a situaciones y experiencias que se refieran a la utilidad del álgebra, en definitiva el "para qué" sirve.

En los Principios y Estándares para la Educación Matemática que publica el NCTM, para la definición del Estándar Álgebra, describen que ésta *"se centra en las relaciones entre cantidades, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio"* (NCTM, 2000, p.39). Se enfatiza que el trabajo que se realiza en varias áreas de conocimiento se apoya en métodos e ideas algebraicas, ya sea utilizando el lenguaje simbólico como medio de expresión o mediante la utilización de estructuras abstractas para la resolución de problemas.

Por esa razón se hace énfasis en que, aunque muchos equiparan el álgebra escolar con la manipulación de símbolos, es importante que los alumnos comprendan sus conceptos, las estructuras y principios que rigen esa manipulación de símbolos y cómo se pueden utilizar para estructurar ideas y comprender situaciones, por lo que *"los programas de enseñaza deberían capacitar a los estudiantes para:*

- *comprender patrones, relaciones y funciones;*
- *representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos;*
- *usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas;*
- *analizar el cambio en contextos diversos."* (NCTM, 2000, p.39).

Sin embargo, lo descrito en los Estándares respecto de lo que debe ser el álgebra a nivel escolar no concuerda exactamente con la visión más frecuente que se suele tener de lo que es, o ha sido hasta ahora, el álgebra en la escuela. En efecto, Kaput (2000a) plantea que la imagen tradicional de ésta, basada en más de un siglo de experiencia de su enseñanza y aprendizaje, se reduce a la simplificación de expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones y el aprendizaje de reglas de manipulación de símbolos, y que el álgebra ha sido enseñada y aprendida como un conjunto de procedimientos desconectado del resto del conocimiento matemático y del mundo real cercano a los estudiantes.

Stacey y Chick (2004) plantean que varios factores han impulsado la reflexión que está propiciando un cambio en la enseñanza del álgebra, entre ellos el hecho del crecimiento en la población que cursa la educación secundaria y el avance de la tecnología, que han impulsado la utilización de nuevos métodos en la resolución de problemas y, por tanto, ha provocado un cambio en las habilidades que se tratan de valorar.

Los autores también plantean que, al interpretar el álgebra sólo como manipulación simbólica, ésta tiene muy poca relevancia en la vida cotidiana y que es importante que todos los estudiantes tengan una oportunidad efectiva de aprenderla, pues sin ella se pierden opciones de ejercer muchas ocupaciones en el ámbito profesional, ya sea porque el álgebra es necesaria para llevarlas a cabo o porque es necesaria una cualificación previa, debido a que es considerada como una puerta para las matemáticas superiores o como el lenguaje científico por excelencia.

Por todo lo expuesto, queda en evidencia que la reflexión en torno al tema está muy lejos de agotarse y que la enseñanza y aprendizaje del álgebra, preferentemente en el ámbito escolar, es un área problemática para la Educación Matemática que debe de ser objeto de estudio e investigación desde diversos puntos de vista que permitan avanzar y dar soluciones.

2.2 El álgebra en el currículo de la ESO

A nivel educativo, al hablar de currículo nos referimos a la idea de Stenhouse (1991) quién lo concibe como toda actividad de planificar una formación y en el cual es necesario reconocer el colectivo de personas a formar, el tipo de formación que se quiere proporcionar, la institución social en la que se lleva a cabo la formación, la finalidades que se quieren alcanzar y los mecanismos de control y valoración (Rico, 1997).

En el caso particular del álgebra, en el currículo de la educación secundaria, Kaput (1995) define tres dimensiones a tomar en cuenta especialmente en una situación de reforma:

- Amplitud de las concepciones del álgebra coherentemente implementadas.
- Integración curricular del álgebra con otros contenidos matemáticos.
- Aproximación e implementación de una metodología más activa, explotando particularmente la relacionada con la tecnología electrónica.

Por otra parte, Kieran (2004) señala que hay varios puntos de vista respecto de hacia dónde dirigir el álgebra a nivel escolar:

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.
- Resolución de problemas.
- Situaciones prácticas.
- Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

Dentro del currículo español (Real Decreto 3473/2000, 116/2004 y 1631/2006) podemos encontrar dichos puntos de vista presentes en tres elementos que quisiéramos destacar, ya que nos permiten comprender y enmarcar el cómo y con qué fin se espera que se trabaje el álgebra en la escuela secundaria: el desarrollo de la competencia matemática, los objetivos generales trazados para el área y los contenidos definidos para cada curso.

El Real Decreto 1631/2006 ha insertado, de manera explícita en el currículo, el trabajo en torno a competencias, identificando ocho competencias básicas, en el marco de la propuesta realizada por la Unión Europea. Dentro de éstas, se considera la **Competencia Matemática**, como: *"la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de* *información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral"* (pp. 686 – 687).

Se hace hincapié en que la competencia matemática implica "*el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o la obtención de información"* (p. 687). Se recalca también, como parte de la competencia matemática, la habilidad para "*interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida"* (p. 687). Dicha habilidad se describe como una forma de interactuar en el ámbito escolar y académico y fuera de éste, llevando a la práctica procesos de razonamiento que desembocan en la solución de problemas.

Lo anterior guarda directa relación con los objetivos indicados para el área de matemáticas en la ESO. De los once objetivos propuestos como finalidad de la enseñanza de las matemáticas en esta etapa, destacamos aquellos que hay que considerar en y desde la enseñanza del álgebra:

- *Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.*
- *Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.*
- *Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.*
- *Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.*

- *Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas, de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.*

(Real Decreto 1631/2006, p. 752)

La definición de la competencia matemática y de los objetivos de las matemáticas en la ESO, deja explícita la consideración de la matemática como una herramienta que permite al sujeto comprender, describir e interactuar con el mundo. Todo esto se concreta en la planificación y ejecución de situaciones de aprendizaje en torno a ciertos contenidos definidos en el currículo, agrupados en seis bloques temáticos: Contenidos comunes, Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y probabilidad.

Es de nuestro interés especificar cuáles son los temas a desarrollar en 1º y 2º de ESO dentro del Bloque 3, Álgebra, ya que son los cursos en que se enmarca la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado, tema en torno al que desarrollamos nuestro trabajo de investigación. En la Tabla 2.1, vemos cuáles son dichos contenidos.

Curso	***Contenidos Bloque 3. Álgebra***
Primer curso	Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas. Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Segundo curso	El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución. Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.

Tabla 2.1: Contenidos Bloque 3, 1º y 2º de ESO

A partir de la tabla anterior, podemos inferir que, en los primeros cursos de la ESO, el trabajo algebraico se centra en la simbolización, la utilización del lenguaje algebraico como una herramienta para representar y comunicar y que, además, permite expresar generalizaciones a partir de situaciones particulares. Posteriormente, se trabaja en torno a las ecuaciones (de primer grado), su significado y análisis de soluciones para, posteriormente, utilizarlas en la resolución de problemas.

Nos interesa recalcar que para entender el Álgebra en la ESO es importante no reducirla al estudio de algunos contenidos matemáticos de forma aislada, sino que hay que entenderla como una estructura integrada por contenidos matemáticos en un contexto escolar/ciudadano de resolución de problemas. Una forma de facilitar esa visión y poder reflejarla en el aula es la consideración de las competencias y objetivos de la ESO como una parte constituyente de la matemática escolar y del álgebra en particular y, por tanto, utilizarlas como uno de los pilares en el diseño de la enseñanza.

2.3 Representaciones y sistemas de representación

La utilización de diversas representaciones para expresar el pensamiento forma parte especialmente de la actividad matemática, debido a la naturaleza abstracta de las ideas con las que se trabaja. Específicamente, Rico (1997) plantea que las representaciones que permiten trabajar en un sistema conceptual y los modelos asociados a esos conceptos, deben considerarse como un pilar fundamental en la organización del proceso de enseñanza de las matemáticas.

Debido a lo anterior, el uso de los términos *representación* y *sistema de representación* en el área de la Didáctica de la Matemática es muy frecuente, ya que generalmente se recurre a éstos con el fin de materializar ideas mentales.

Sin embargo, las acepciones y situaciones en las que se emplean son diversas por la riqueza, extensión e incluso ambigüedad de dichos términos, dependiendo del área y contexto en que sean utilizados. Por esta razón, en este capítulo definiremos y delimitaremos a qué nos referimos cuando los empleamos a lo largo de esta investigación.

2.3.1 Del concepto de representación

El término *representación* ha sido muy utilizando en las investigaciones en Didáctica de la Matemática, ya que constituye una herramienta de gran utilidad para caracterizar la forma que tienen las personas de conocer, manipular y comunicar conceptos e ideas.

Una muestra de lo anterior es la definición del *Estándar Representación* en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), en el que se hace mención tanto a la creación, como a la utilización de distintos tipos de representación para la comunicación de ideas matemáticas, la resolución de problemas y la modelización e interpretación de fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Si comenzamos por revisar la definición del término *representación* de forma genérica encontramos que en el Diccionario de la Real Academia Española (2001) se le otorgan, entre otros, los siguientes significados: *"1. f. Acción y efecto de representar (...) 3. f. Figura, imagen o idea que sustituye a la realidad (...) 5. f. Cosa que representa otra (...) 7. f. Psicol. Imagen o concepto en que se hace presente a la conciencia un objeto exterior o interior"* (p. 1324).

Estas cuatro definiciones ponen de manifiesto que al hablar de representación nos podemos referir a cosas diferentes y en distintos ámbitos, siendo posible distinguir entre aquellas que se refieren a una acción o proceso de representar y las que aluden a la representación como producto.

Específicamente, en el área de Didáctica de la Matemática se ha trabajado en la definición y caracterización del término representación, así como de diversos tipos de representaciones y de su influencia en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Un ejemplo lo encontramos en el trabajo de Godino (2003), en el que se hace una amplia reflexión en torno a los diversos usos del término representación, expresando que, en general, se ha considerado como un objeto mental o real y también como una relación de correspondencia entre dos objetos, poniendo a uno de ellos en lugar del otro. Tanto esa distinción como otras son las que consideramos a lo largo de este apartado.

En primer lugar, nos detendremos en la dicotomía mencionada antes respecto de la representación entendida como *objeto* o como *relación*. El origen de esta diferenciación, como describe Font (2001), la encontramos en la confrontación de lo que el autor denomina representacionalismo y no-representacionalismo: *"desde el punto de vista no-representacionalista, todos los procesos de representación actúan sobre experiencias de las personas, y por representación se entiende cualquier experiencia, material o mental, X, que representa a otra experiencia, Y, material o mental (...) Si consideramos la representación como un objeto (el resultado del proceso), éste será una experiencia formada por una expresión que se presenta propiamente a la conciencia y por un contenido, que en muchos casos está presente sólo de manera indirecta"* (Font, 2001, p. 6).

Es en la consideración de la representación como objeto, donde se distingue una segunda dicotomía, la distinción entre *representación interna* y *representación externa*, que el autor describe en términos de si la representación pertenece al ámbito material se hablará de representación *pública* o *externa* y, en caso de que pertenezca al ámbito mental, es posible hablar de representaciones *privada* o *interna.*

Duval (1999b) define como *representación externa* la producida como tal por un sujeto o por un sistema, que se efectúa a través de un sistema semiótico y es accesible a todos quienes conocen dicho sistema. Por su parte describe a la *representación interna* como aquella que pertenece a un sujeto y que no es comunicada a otro a través de la producción de una representación externa.

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la distinción entre representación *interna* y *externa* (privada / pública) tiene especial importancia, sobre todo entre los investigadores en Didáctica de la Matemática que, de alguna manera, trabajan en torno al paradigma cognitivo. Más que extendernos en la definición de un tipo de representación u otro de forma exhaustiva, nos interesa asumir la existencia e interdependencia de ambas, ya que *"para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ella"* (Hiebert y Carpenter, 1992, p.66).

Rico (2009) plantea que *representar* es poner en lugar de un ausente y, por tanto, confirmar su ausencia. Es decir, la representación se basa en la dupla representante-representado. Se representa para hacer presente algo, pero ese algo es distinto y existente a lo que la representación sustituye.

De ahí la importancia de trabajar diversos tipos de representaciones como una forma de enriquecer la construcción conceptual, pero evitando confundir una representación determinada con el objeto que se está representado (Duval, 1999a, 1999b). Ahora bien, existen momentos en que la representación interna juega el papel de representante de un objeto externo (representado) y en otras ocasiones es el objeto externo quien está ocupando el lugar de una representación mental que queremos comunicar. Es así como el papel de representante / representado no es rígido.

En la actualidad, existe acuerdo en que las representaciones externas relacionadas con el aprendizaje matemático guardan estrecha relación con las representaciones internas que el sujeto logra construir y viceversa. Por esta razón, encontramos que diversos autores proponen que el trabajo con distintos tipos de representaciones externas permite una mejor aproximación a los objetos matemáticos. Al respecto destacamos los trabajos de Kaput, 1992; Castro, 1994; Goldin, 1998; Cifarelli, 1998; Duval, 1999a, 1999b; Font, 2001; Goldin y Shteingold, 2001; Godino, 2003; entre otros.

En el marco de este trabajo, cuando utilizamos el término *representación* nos estaremos refiriendo a las representaciones externas consideradas como objeto. Dado que responde a esas características, adoptaremos la definición utilizada por Castro y Castro (1997) donde definen a estas representaciones como: *"notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes"* (p. 96).

Como plantea Duval (1999a, 1999b), las representaciones externas no tienen como única función la comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática, la cuál depende directamente del tipo de representación utilizada. Duval remarca que existen diversos tipos de representaciones ligadas a un objeto, teniendo cada uno de ellos ventajas y restricciones. De ahí, la importancia de trabajar con variadas representaciones ligadas a un objeto sin reducirlo a una única representación, ya que la diversificación de representaciones de un mismo objeto matemático aumenta potencialmente la comprensión del mismo.

A este respecto, Romero (2000) plantea que existen cinco actividades cognitivas ligadas a la utilización de las representaciones:

- formación de representaciones identificables,
- transformación dentro de un mismo tipo de representación,
- traducción entre diversos tipos de representación,
- cristalización (o consolidación de relaciones y/o procesos en objetos conceptuales),
- modelización (construcción y prueba de modelos matemáticos).

La autora plantea que son escasas las actividades relacionadas con las representaciones en el sistema de enseñanza tradicional y que por lo general, las actividades suelen quedar en un nivel primario de formación de representaciones y transformación dentro de un tipo de representaciones.

La utilización de diversos tipos de representación ligadas a un mismo objeto matemático, no sólo implica la comprensión de cada una de ellas por separado, considerando cuáles son las propiedades y procedimientos ligados al concepto que se hacen presentes en dicha representación y cuáles no, sino que también aparece la necesidad de poder traducir, de un tipo de representación a otro tipo de representación los objetos matemáticos expresados, para poder asegurar la comprensión y aprendizaje de dichos objetos.

Este proceso de traducción conlleva una serie de dificultades y ha sido caracterizado por investigadores como Janvier (1987) y Duval (1999a, 1999b). Se diferencian dos procesos: el *tratamiento* y la *conversión.* El primero se refiere a la transformación que se efectúa dentro de un mismo tipo de representación (lo que más adelante definiremos como sistema de representación o registro de representación). El segundo consiste en la transformación de un tipo de representación a otro (Duval, 1999b).

Por su parte, Goldin y Shteingold (2001) describen las representaciones externas como signos o configuraciones de signos, caracteres u objetos, resaltando que es importante dejar claro que una representación está ocupando el lugar de otra cosa. Al mismo tiempo subrayan que una representación no tiene sentido de manera aislada sino que, como tal, pertenece a un sistema estructurado.

Debido a que una representación no cobra sentido por sí sola y de forma aislada, sino que debe de contemplarse dentro de un sistema de significados y relaciones (Rico, 2009), nace la necesidad de definir qué son estos sistemas estructurados de representación, denominados también sistemas de representación, y qué tipos de sistemas se consideran en relación con el aprendizaje y enseñanza de conceptos matemáticos, tema que desarrollaremos en el siguiente apartado.

2.3.2 Sistemas de representación en matemáticas

Existen varios términos para referirse a un sistema organizado de representaciones externas y, según los autores en cuestión, se hace énfasis en unas u otras peculiaridades. A continuación revisaremos algunas de las características de dichos sistemas y, particularmente, las de la definición en la que hemos basado nuestro trabajo.

Un sistema estructurado de representación permite identificar y crear caracteres, operar en y con ellos y determinar relaciones entre ellos (Kaput, 1992; Gómez, 2003). Sin embargo, existen ciertos matices según el término utilizado y, sobre todo, respecto de cómo se utiliza en la investigación en Didáctica de la Matemática.

En primer lugar, destacamos los trabajos de Puig (2003) y Filloy, Puig y Rojano (2008) en torno a la consideración de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS). Dichos autores trabajan tomando como base los signos, entendiendo como signo "un objeto que está en lugar de otro para alguna mente" y recalcando que los signos no existen de forma aislada, sino que están en la constitución de un texto, considerando a éste último como el resultado de los procesos de producción de sentido.

Al tomar los textos como objeto de estudio (ya sea un texto la producción de un estudiante o un texto matemático histórico) se puede observar que es muy frecuente que parte de él esté escrito utilizando signos propiamente matemáticos y signos de alguna lengua vernácula, frente a lo cual, Puig plantea que *"desde el punto de vista de los procesos de significación, esta distinción, que siempre puede seguir haciéndose, deja de ser crucial. Lo que entonces aparece como crucial es el sistema de signos tomado en su conjunto y lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. Hay que hablar, pues, de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos, subrayando con la colocación del adjetivo 'matemáticos' que lo que tiene el carácter matemático es el sistema y no meramente los signos individuales y que, por tanto, lo que nos interesa para el desarrollo de la matemática educativa es estudiar cuáles son las características de esos sistemas (matemáticos) de signos debidas no sólo a que son sistemas de signos sino a que son precisamente sistemas matemáticos"* (Puig, 2003, p. 182).

Así, estos autores centran su trabajo en la definición de un sistema que no tiene por objetivo clasificar el tipo de signos o representaciones que se utilizan en la actividad matemática, sino en el contenido del texto propiamente dicho.

Por su parte, Duval (1999a, 1999b) trabaja en torno al término *registros de representación*, que están constituidos por signos en el más amplio sentido, es decir: trazos, símbolos, íconos, etc. Se considera que los registros son medios de expresión y representación que están caracterizados por el sistema semiótico respectivo. Un sistema semiótico debe permitir tres tipos de actividades cognitivas:

- Establecer una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
- Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
- Convertir las representaciones producidas en un sistema en nuevas representaciones de otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Cuando un sistema semiótico permite estas tres actividades (como es el caso del lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc.) es posible hablar de *registros de representación semiótica*.

Para efectos de nuestro trabajo, adoptaremos el término Sistema de Representación (SR) definido por Fernández (1997a) indicando que: *"es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto"* (p. 73).

En términos generales los sistemas de representación se pueden clasificar en tres grupos: los numéricos, los gráficos y los simbólicos. Sin embargo, Fernández (1997a), en su trabajo de tesis doctoral, propone una clasificación más detallada, con cinco sistemas posibles de representación a la hora de describir tipologías de resolutores de problemas algebraicos elementales. Esta clasificación ha sido replicada y ratificada en estudios posteriores realizados por Espinosa (2002 y 2004). Subrayamos el hecho que los cinco sistemas de representación caracterizados por Fernández (1997a) se han definido específicamente para la resolución de problemas de álgebra, lo que no quiere decir que no sean replicables en otro tipo de actividad matemática determinada.

Estos cinco sistemas de representación son:

a) *Sistema de representación Ensayo – Error*. Consideramos que se está utilizando este sistema cuando se prueban, de forma sistemática, valores numéricos concretos para la/s incógnita/s, estableciendo las relaciones implícitas en el problema, y utilizando los valores fallidos para conjeturar nuevos valores que aproximen paulatinamente al resultado correcto.

   Se utilizan notaciones numéricas y simbología aritmética, pero se establecen un conjunto de reglas y convenios que permiten establecer relaciones entre datos conocidos y desconocidos, además de potenciar la evaluación del dato erróneo para producir un resultado correcto.

b) *Sistema de representación Parte – Todo*. Las relaciones que implica el problema se plantean, en su mayoría, numéricamente mediante alguna o varias de estas estrategias para relacionar los datos: combinación, cambio, comparación e igualación. Se establece una inclusión de clases y una comparación, considerando los datos desconocidos como parte del resultado de operar los datos conocidos y comparando el total con la parte.

   Es un enfoque intuitivo de representación que incluye el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento (Kieran y Filloy, 1989). Este sistema de representación, como el anterior, se caracteriza porque utiliza símbolos numéricos (generalmente, operaciones con números concretos). En algunos casos pueden establecerse ecuaciones, pero no se utilizan las reglas de sintaxis del álgebra, sino operaciones aritméticas basadas en la comparación e igualación (balanza). No generaliza pero establece unas relaciones entre cantidades que no son operaciones aisladas.

c) *Sistema de representación Gráfico*. Entendemos que se emplea este sistema de representación cuando se utiliza un sistema de representación visual (representación física, icónica, geométrica o diagramática), en definitiva un código gráfico, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas del problema, sin ningún otro elemento que podamos considerar simbólico. Las operaciones numéricas se efectúan a partir de las relaciones establecidas en el gráfico, utilizando generalmente un esquema de parte – todo o una relación de proporcionalidad (regla de tres).

   Este sistema de representación es especialmente útil cuando, en los problemas verbales algebraicos, las relaciones que se establecen son lineales y el contexto de está formado por objetos en los que los datos e incógnitas son cantidades de magnitudes lineales o componentes lineales de magnitudes vectoriales. Entonces, la representación gráfica suele tender a establecer un isomorfismo entre la magnitud que se relaciona en el texto del problema con la magnitud longitud.

d) *Sistema de representación Gráfico – Simbólico*. Este sistema de representación podemos considerarlo un híbrido del sistema de representación gráfico y el sistema de representación simbólico (que se describirá a continuación). Consiste en establecer relaciones mediante un lenguaje simbólico (alfabético), pero con un apoyo explícito en un gráfico o dibujo en donde se representan los datos y las incógnitas, identificando los elementos que intervienen en las relaciones y, a veces, las propias relaciones.

e) *Sistema de representación Simbólico*. Se presenta cuando se utiliza un lenguaje sólo y exclusivamente abstracto, usualmente alfabético, es decir, el lenguaje algebraico en sentido tradicional o lenguaje cartesiano. Se identifican las incógnitas con letras o palabras y se expresan relaciones mediante ecuaciones. No se utilizan objetos concretos (dibujos o gráficos) para representar datos o relaciones. Se produce una abstracción y generalización de las relaciones. El modelo se puede aplicar a cualquier otro problema de las mismas características.

Los sistemas descritos por Fernández (1997a) y Espinosa (2002 y 2004) para la resolución de problemas algebraicos, podemos situarlos en un continuo desde aquellos considerados como más *numéricos* a aquellos que pueden ser considerados más *simbólicos/formales* como se muestra en la Figura 2.1:

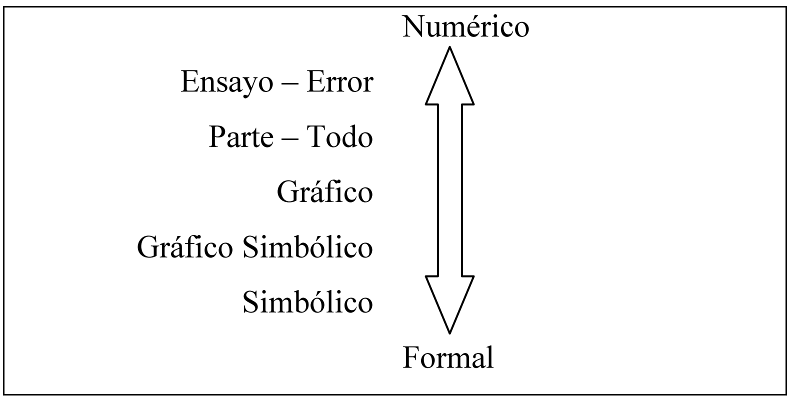


Figura 2.1: Sistemas de Representación

A la vista de dicho continuo, el SR Gráfico puede ser considerado como un sistema intermedio entre ambos extremos. De hecho, según lo que describiremos más adelante, permite la representación de procesos de traducción aritméticos y procesos de traducción algebraicos, en el sentido de Cerdán (2008), razón por la cuál se puede considerar como un puente que permite pasar de un tipo de proceso de traducción a otro.

2.4 Resolución de problemas

La resolución de problemas (RP) ocupa un espacio importante en las investigaciones que se realizan en el área de la Didáctica de la Matemática, debido a que se considera como un eje esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles.

Dentro del estándar RP definido en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), se expresa que la resolución de problemas, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no sólo constituye un objetivo del aprendizaje de la matemática, sino que también es una metodología para alcanzarlo. Además, se menciona que ser un buen resolutor de problemas proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo, y que la RP debería utilizarse para ayudar a los estudiantes a desarrollar con fluidez destrezas específicas a la hora de abordar sus problemas cotidianos. El estándar, indica que:

"Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- *Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas;*
- *Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos;*
- *Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas;*
- *Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él"* (NCTM, 2000, p. 55).

El estándar RP nos permite dimensionar la amplitud del problema de investigación en este campo, ya que se desarrollan distintos ejes de interés: la construcción de conocimiento, la elección o elaboración de problemas, el desarrollo de estrategias de resolución y los procesos de resolución, entre otros.

Otro referente curricular que le da gran importancia a la RP en la formación matemática es el Real Decreto (1631/2006) que define los contenidos y objetivos de aprendizaje para la Enseñanza Secundaria Obligatoria en España. En dicho decreto se especifica que en todos lo cursos se considera, además de los ejes verticales (números, álgebra, geometría, funciones y gráficas y estadística y probabilidad), un eje transversal vertebrador que hace referencia a un tema básico del currículo, la resolución de problemas, indicando que *"la resolución de problemas es capaz de activar las capacidades básicas del individuo, como son leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de la solución, etc., pues no en vano es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general"* (Real Decreto 1631/2006*,* p. 750). Además se hace hincapié en la posibilidad de trabajar ciertos aspectos afectivos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, ya que a partir del desarrollo de la expresión verbal de los procesos que se siguen en la RP, es factible trabajar la confianza de cada individuo para interpretar, valorar y tomar decisiones en situaciones que implican la utilización de soporte matemático.

Mencionamos anteriormente, en el apartado 2.2, la definición de la *competencia matemática,* competencia que forma parte de un conjunto de ocho competencias básicas, en el currículo de la ESO en el Real Decreto (1631/2006). Las competencias básicas son:

- Competencia en comunicación lingüística
- Competencia matemática
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico
- Tratamiento de la información y la competencia digital
- Competencia social y ciudadana
- Competencia cultural y artística
- Competencia para aprender a aprender
- Autonomía e iniciativa personal

Se plantea que dichas competencias no se desarrollan ni se conciben independientes una de otras. De hecho, se considera que la habilidad para interpretar y expresar de forma clara y precisa la información con que se cuenta, los datos y argumentaciones, podría aumentar la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida. Dicha habilidad es descrita como una forma de interactuar, tanto en el ámbito escolar y académico, como fuera de éste, llevando a la práctica procesos de razonamiento que desembocan en la solución de problemas de diversos ámbitos de la vida.

Se entiende, por lo tanto, que la RP es efectivamente un eje transversal en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, siendo fundamental para el desarrollo de la competencia matemática, pero también se describe que con la RP se fomenta la autonomía e iniciativa personal, ya que se utiliza en la planificación de estrategias, además de implicar asumir retos y facilitar el control de la incertidumbre en los procesos de toma de decisiones, lo que contribuye al desarrollo de la competencia de aprender a aprender y la autonomía e iniciativa personal.

Como consecuencia de lo anterior, en los objetivos trazados para la ESO encontramos que se hace referencia explícita e implícita al trabajo de RP:

- Objetivo 2: Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- Objetivo 7: Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Objetivo 8: Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en la función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
- Objetivo 9: Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

Como tercer y último referente curricular, mencionamos las competencias definidas por la OCDE/PISA, quienes especifican cada una de las competencias que debe desarrollar un sujeto para ser matemáticamente competente y, dentro de ellas, se menciona la RP, que se define como *"competencia que abarca un amplio conjunto de técnicas, experiencias y habilidades para plantear cuestiones relevantes y encontrarles respuesta haciendo uso de las relaciones, los conceptos y las estructuras matemáticas"* (Rico y Lupiañez, 2008, p. 216).

Queda claro que la RP forma parte de la actividad matemática a nivel de enseñanza y de aprendizaje, siendo un elemento central considerado explícitamente en el currículo de la ESO y en documentos internacionales definidos por organismos como la NCTM y la OCDE/PISA, pero ¿qué entendemos por *problema* en matemáticas?

Desde la Psicología Cognitiva existe una larga tradición en el estudio de RP partiendo desde la definición de problema y problema matemático, hasta el estudio de las distintas estrategias que se utilizan, el desarrollo del pensamiento crítico, etc.

Kilpatrick (1985) define como problema a una situación en la que se desea conseguir una meta y el camino directo para lograrla está bloqueado. Añade que, para la psicología, es necesario conocer al sujeto que resuelve ya que, dependiendo de éste, la situación podrá ser, o no ser, un problema o, al menos, cambiará el sentido problemático.

Mayer (1986) plantea que, aún cuando hay distintas definiciones de problema, en términos generales los psicólogos concuerdan en tres elementos propios de un problema: a) *Datos:* condiciones, objetos, información, etc. que están presentes al comenzar el trabajo con el problema b) *Objetivos:* estado deseado o terminal del problema, al que se debe llegar a partir del estado inicial y c) *Obstáculos:* el que piensa (el que resuelve) tiene ciertas rutas posibles para llevar el problema desde el estado inicial al estado deseado, sin embargo en un comienzo no sabe la respuesta del problema, luego su resolución no es inmediata ni obvia.

El autor plantea que cualquier definición de problema tiene que contener tres ideas: que el problema se encuentra inicialmente en un estado, pero que se desea llegar a otro y el camino para llegar a ese estado deseado no es directo.

Bruning, Schraw y Norby (2005) haciendo un recorrido histórico de las investigaciones en este campo, destacan como una de las primeras investigaciones trascendentes la de Thorndike en 1911 quién postula que, en gran medida, la RP consiste en conductas de ensayo y error, defendiendo que es un proceso no intencionado. Simultáneamente, en 1910 John Dewey concibe la RP como un proceso conciente e intencionado, definido por una secuencia natural de pasos. Posteriormente es de se destacar el trabajo de los psicólogos de la Gestalt, entre ellos el de Köhler en 1929, quien indica que la RP requiere de cierto grado de comprensión de la situación.

Por su parte, Lorenzo (1996) hace una revisión teórica de la evolución en el estudio de la RP, centrándose de forma más especifica en los problemas de las matemáticas. El autor destaca el trabajo realizado por Pappus, publicado en el año 320, en el que se realiza una recopilación de varios autores con el objetivo de adiestrar en la RP, incluyendo algunas reflexiones personales respecto los procesos de razonamiento que puedan ser utilizados.

En el área de la Didáctica de la Matemática se han hecho investigaciones con distintos énfasis. Puig (1996) describe cómo se ha trabajado para diferenciar lo que es un problema en matemáticas de lo que es un ejercicio, destacando los trabajos de Brown (1985), Kantowski (1974), Goldin (1982) y Greeno (1980), entre otros. La RP es objeto de numerosas tesis doctorales, de las que destacamos, por proximidad de temática las de Castro (1995), Carrillo (1996), Fernández (1997a), Contreras (1999), Espinosa (2004), Cerdán (2008), Benavides (2008) y Arnau (2010).

Varias investigaciones se han centrado en las fases para la RP, en la clasificación, el tipo de representaciones que se utiliza, etc. A continuación nos referimos a algunas de las líneas de investigación desarrolladas en torno a la RP que guardan relación con nuestro trabajo, al centrarse en problemas de álgebra.

2.4.1 Problemas de álgebra elemental

En el apartado anterior hemos definido ciertas características generales de lo que es un problema desde la Psicología Cognitiva, y hemos hecho alguna referencia al espectro que abarcan las investigaciones en cuanto a la RP en Didáctica de la Matemática. Para efectos de nuestro trabajo nos interesa delimitar qué entendemos por problema de álgebra elemental y algunas particularidades respecto de los modos de resolución de los mismos.

2.4.1.1 Problemas aritméticos v/s problemas algebraicos

En primer lugar interesa determinar qué diferencia a un problema algebraico de uno aritmético, distinción que no está claramente demarcada según los investigadores en Didáctica de la Matemática.

Es así como Wagner y Kieran (1989) se plantean cuestiones como: ¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas que son más intrínsicamente algebraicos? ¿Qué hace un método de resolución ser más algebraico que aritmético? ¿Hay jerarquías congnitivas con respecto a los modos de representación (lenguaje natural, gráfico, numérico, simbólico, etc.) que justifiquen un análisis en RP algebraicos?

Al respecto, hay algunos autores que plantean que dicha diferencia depende del sistema de representación o del método que se escoge para la resolución del problema (Cerdán 1993, 2008; Palarea y Socas, 1995).

Otras corrientes consideran como problemas algebraicos, en sus trabajos de investigación, aquellos que implican relaciones matemáticas en que el que signo “=” no es sinónimo de efectuar una operación aritmética, sino un signo de equilibrio entre el miembro que está a su izquierda y el que está a su derecha. Ambos miembros contienen cantidades que se operan aritméticamente (Kieran y Filloy, 1989; Kieran, 1992; Fernández, 1997a; Staycey y Mac Gregor, 2000; Espinosa, 2004; Stacey, 2005).

En nuestro trabajo, consideraremos el planteamiento desarrollado por Cerdán (2008), que está dentro del primer grupo descrito. El autor trabaja en torno a la Familia de Problemas Aritmético-Algebraico (FPAA), que la entiende como el grupo formado por problemas del ámbito escolar que podrían resolverse, bien utilizando varias operaciones aritméticas elementales, bien mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones. El autor plantea que *"el enunciado de un problema de la FPAA es un texto, que presenta la descripción cuantitativa de una situación o un fenómeno por medio de varias cantidades interrelacionadas y que, en el momento en que se consideran, sumen un cierto valor, valor que es, bien conocido, o desconocido. El propósito del problema, expresado en el propio texto, es la determinación de una o varias de las cantidades desconocidas"* (p. 14).

Por tanto existen distintos tipos de cantidades contenidas en un problema, de las cuales nos interesa distinguir entre lo que son *datos* o *cantidades conocidas* y lo que son *incógnitas* o *cantidades desconocidas:*

- *Datos:* aquellas cantidades a las que el enunciado del problema les proporciona un valor numérico determinado o se manifiesta expresamente que son cantidades conocidas.
- *Incógnita:* toda cantidad cuyo valor se desconoce. Se puede distinguir entre incógnita principal (o principales), que son aquellas que el enunciado pide determinar expresamente, e incógnita auxiliar (o auxiliares) como cualquier otra cantidad desconocida.

En cuanto a la distinción entre un problema algebraico y uno aritmético, Cerdán (2008) se decanta por considerar que lo que define es el método de resolución en lugar del problema en sí mismo, es decir, se puede abordar la resolución de forma más algebraica o más aritmética. Es así como considera dos métodos que permiten la distinción antes descrita: el *Método Cartesiano* y el *Método de Análisis-Síntesis*. El autor plantea que el primero, por su localización histórica, tiene vocación algebraica, mientras que el segundo produce soluciones aritméticas. Ambos métodos serán descritos con mayor detalle en el apartado siguiente.

Para este trabajo, nos posicionamos compartiendo el planteamiento de Cerdán (1993 y 2008) y Palarea y Socas (1995) quienes, más que considerar como algebraico o aritmético a un problema, lo que consideran de una u otra forma es la resolución propiamente tal. Sin embargo, aclaramos que cuando a lo largo de nuestro trabajo nos refiramos a *problemas algebraicos* o *problemas de álgebra elemental*, lo hacemos en un sentido curricular, es decir, nos estaremos refiriendo a aquellos problemas que en el currículo de secundaria son considerados en el eje de aritmética y álgebra y que pueden ser resueltos utilizando ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

2.4.1.2 Métodos de resolución

De cara a la resolución de un problema, matemático y no matemático, existen diversas formas de abordarlo. En el caso de la RP en contexto escolar, existen y se trabajan distintos métodos de resolución, dependiendo muchas veces del tema que se esté trabajando en clases.

Stayce y Mac Gregor (2000) observan que, frente a problemas que ellos plantean como problemas algebraicos, los estudiantes utilizan variados métodos y que muy pocos estudiantes resuelven utilizando una ruta exclusivamente algebraica, aún cuando la ruta escogida no sea necesariamente la más fácil o la más rápida.

Los autores esquematizan las posibles rutas de resolución, de la forma que se muestra en la Figura 2.2 (p.155):

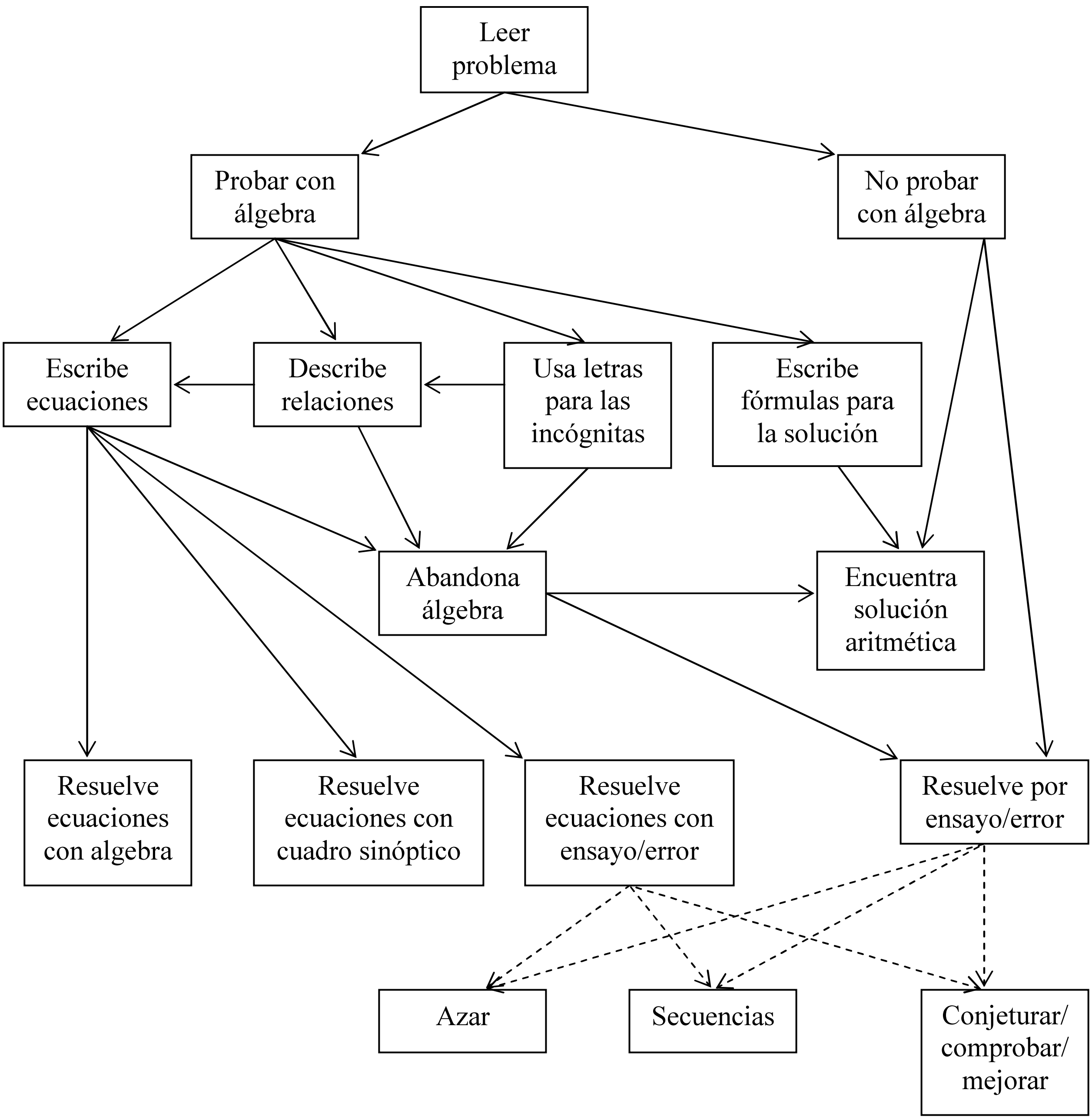


Figura 2.2: Formas de resolución de un problema (Stayce y Mac Gregor, 2000)

Los autores plantean que luego de leer un problema considerado algebraico, el resolutor tiene dos opciones para abordarlo: probar utilizando álgebra o no. En el caso de que se opte por no utilizar álgebra, puede resolver el problema utilizando una ruta aritmética o a través de ensayo y error. Ahora bien, si luego de la lectura del enunciado, el resolutor decide usar álgebra para la resolución, esto no quiere decir que la ruta será absolutamente algebraica de comienzo a fin. En resumen, los autores muestran una serie de posibles rutas de resolución, teniendo como primera dicotomía, el uso o no uso del álgebra a partir de la lectura del enunciado y de qué caminos se van tomando hasta resolver el problema.

Otra propuesta respecto del tipo de resolución es la que presentan Filloy y Rubio (1999). Estos autores trabajaron con un grupo de estudiantes de entre 14 y 16 años, teniendo como objetivo caracterizar cómo resolvían problemas aritméticos/algebraicos. A partir de dicho trabajo definen que los estudiantes pueden utilizar tres métodos, que llaman:

- *Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS),* que consiste en resolver los problemas utilizando sólo aritmética. Este método se da como un producto de inferencias lógicas que actúan como descriptores de las trasformaciones de "situaciones posibles" hasta llegar a una que es reconocida como la situación problema.
- *Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES),* consiste en la aplicación de una secuencia de pasos:
  1. Lectura y explicación de las incógnitas.
  2. Introducción de una situación hipotética suponiendo una posible solución para el problema.
  3. Establecer una comparación entre las cantidades que representan lo mismo en el problema.
  4. Obtener un patrón numérico y la representación del problema a través de una ecuación.
- *Método Cartesiano (MC)*, que consiste en la representación de cantidades desconocidas presentes en el enunciado del problema a través de expresiones algebraicas y la posterior traducción del enunciado a una serie de relaciones mediante el lenguaje algebraico, obteniendo una o más ecuaciones, que al ser resueltas se obtiene la solución del problema.

A partir de este planteamiento Filloy y Rubio (1999) y, posteriormente Filloy, Rojano y Rubio (2001) manifiestan que se observa un tendencia natural a utilizar números para explorar los problemas. Además, plantean que el uso competente del MC se relaciona con una evolución en la utilización del lenguaje simbólico/algebraico y que, el MIAS y el MAES sirven como antecedentes para el desarrollo de significados algebraicos.

Siguiendo esta línea de trabajo, Cerdán (2008), en su tesis doctoral, realiza un análisis de problemas aritméticos/algebraicos y, entre otras cosas, estudia dos formas de abordar un problema: el Análisis-Síntesis (A-S) y el Método Cartesiano (MC), considerando el primero como un método más aritmético y al segundo como un método más algebraico. A continuación exponemos ambos métodos según lo descrito por el autor.

- *Regla de Análisis – Síntesis*. Tiene la siguiente estructura, luego de haber leído el problema:

- Si x es la incógnita del problema, supóngala conocida.
- Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales x resulta y que permiten determinar x.
- Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar).
- Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que:
  (1) o bien todos los antecedentes sean datos del problema,
  (2) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema.
- En el caso (1), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última.
- En el caso (2), abandone el problema: su solución es imposible.

Lo anterior se puede traducir en preguntas y acciones que guían tanto el proceso de análisis como el de síntesis. En las tablas 2.2 y 2.3, organizamos las acciones en una primera columna y las preguntas guías correspondientes en la columna dos, para ambos procesos.

Acción	***Pregunta guía***
1. Definir incógnita principal.	¿Qué pregunta el problema?
2. Determinar información necesaria para determinar el valor de la incógnita principal.	¿Qué se necesita para determinar el valor de la incógnita principal?
3. Determinar con qué datos se cuenta y definir incógnitas auxiliares.	¿Qué información, de la que se necesita, está dada en el enunciado? ¿Qué información, de la que se necesita, es necesario determinar?
4. Determinar información necesaria para determinar las incógnitas auxiliares.	¿Qué se necesita para determinar el valor de las incógnitas auxiliares?
5. Finaliza el análisis si toda la información necesaria se reduce a la utilización de los datos.	¿Es posible determinar todas las incógnitas auxiliares a partir de la información dada por el enunciado?

Tabla 2.2: Análisis, del problema a los datos.

Acción	***Pregunta guía***
Obtener información nueva a partir de la información dada por el problema.	¿Qué información tengo? ¿Qué información se puede obtener a partir de ésta?
Repetir el proceso anterior hasta llegar a determinar la incógnita del problema.	¿Con lo datos obtenidos resuelvo el problema?

Tabla 2.3: Síntesis, de los datos al problema.

- *Método Cartesiano (MC).* El núcleo de MC se traduce en 4 pasos que permitirían poner un problema en ecuaciones. Cerdán (2008) indica que dichos pasos son descritos por Descartes en su *Geometría* de 1637 y completados posteriormente por Polya en 1966 en las *Reglas para la dirección de la mente*, reescribiendo las últimas de ellas y estableciendo que cualquier problema se puede considerar un problema algebraico y que, posteriormente, cualquier problema algebraico se puede llevar a ecuaciones. Los pasos son:

1. Comprender bien el problema, después convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas (Reglas XIII a XVI).
2. Examinar el problema de la manera más natural, considerándolo como resuelto, y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada (Regla XVII).
3. Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas (Regla XIX).
4. Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación (Regla XXI).

Es posible precisar los 4 pasos anteriores a una serie de pasos que permitan traducir un enunciado verbal a una ecuación (lenguaje algebraico) y, de igual manera, a la representación gráfica, utilizando segmentos (MGL), adaptación que describiremos más adelante.

Aunque existen varias diferencias entre el método de A-S y el MC, hay también cosas comunes. Por ejemplo, una vez establecida la cantidad que puede expresarse de dos maneras distintas, lo que hay que hacer en el MC es analizar esa cantidad. El modo de proceder en el análisis y el tipo de razonamiento que éste implica para establecer relaciones a través de la búsqueda de antecedentes, es pertinente también en el MC, con la única salvedad de que el análisis no ha de terminar con los datos del problema, sino con una combinación de datos e incógnitas. Eso cobra sentido, de momento que las incógnitas expresadas de manera simbólica se manipulan como si fueran datos (cantidades conocidas). Además, en el A-S se establece que el análisis de cada cantidad se haga dos veces, lo que aplicado al MC significaría igualar las expresiones algebraicas resultantes de los dos análisis con el fin dar origen a las ecuaciones que darían solución al problema.

En resumen, Cerdán (2008) en su trabajo doctoral define que el uso de la Regla de A-S utilizada como guía en el paso del texto del problema (lenguaje verbal) a un nuevo texto, puede producir textos intermedios de naturaleza diferente, que se llaman *texto intermedio aritmético* (TIAR) y *texto intermedio algebraico* (TIAL). El primero de ellos da cuenta del análisis completo de la incógnita del problema y permite leer la síntesis en lenguaje aritmético, produciendo la expresión aritmética cuyo cálculo determina la incógnita del problema. El segundo de ellos concluye el análisis con el artificio de considerar la incógnita como un dato. La designación de ésta por un signo diferente al utilizado para los datos, letra frente a cifras, pero operando formalmente este signo como dato que es, permite leer la síntesis de modo que la incógnita del problema venga designada por una expresión algebraica o, en el caso del tipo de resolución gráfica que proponemos, por una relación geométrica lineal (RGL) como describiremos más adelante (apartado 2.5.2). Con posterioridad, la duplicidad de designaciones de la misma cantidad permite escribir la ecuación o las RGL´s, cuya resolución conduce a la determinación de la incógnita.

Un *proceso de traducción aritmético* es aquel que se exterioriza mediante la producción de un TIAR y un *proceso de traducción algebraico* aquel exteriorizado mediante un TIAL.

2.4.2 Fases en la resolución de problemas

Según Puig (1996), en un comienzo el interés en el estudio de la RP estuvo basado en teorías conductistas y, por tanto, centrado en el producto de las actividades de los resolutores, en cómo era posible enseñar métodos eficaces para solucionar problemas. Desde el momento en que las investigaciones se realizan desde una perspectiva más psicológica, se cambia de eje centrando el interés en el proceso de resolución y en el sujeto que resuelve.

Según lo anterior, y centrándonos en la caracterización del proceso de resolución, pensamos que es importante hacer una distinción entre resultado, solución y resolución:

"Usaremos el término 'resultado' para indicar lo que contesta a la pregunta del problema, ya sea un número, una fórmula, una expresión algebraica, una construcción geométrica, una derivación lógica, etc. El término 'solución' lo usaremos para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión. Finalmente, usaremos el término 'resolución' para indicar el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso, que pueden conducir a obtener la solución o no" (Puig, 1996, p. 34).

Existen diversas caracterizaciones del proceso de resolución, en el sentido de Puig, que han permitido comprenderlo. Frente a estas caracterizaciones Schoenfeld (1987) hace la distinción entre aquellas que son *descriptivas* y las que son *prescriptivas*. Las primeras se limitan a caracterizar un procedimiento con el suficiente detalle para que sea reconocido, es decir, quien conoce las estrategias puede reconocerlas en dicha descripción. Mientras que las prescriptivas caracterizan un procedimiento con el suficiente detalle para que sirva como una guía en la aplicación de la estrategia.

En nuestro caso, requerimos de la utilización de etapas que nos permitan caracterizar y describir el uso del MGL en la resolución de ciertos problemas, por lo tanto, según la distinción de Schoenfeld, nos centramos en la búsqueda de caracterizaciones del primer tipo, descriptivas.

Una de las primeras descripciones del proceso de resolución es la propuesta por Poincaré en 1908 (Codina, 2000) quien estable tres fases en las que describe cómo él resuelve un problema: un período de trabajo consciente, un período de trabajo inconsciente y un segundo período de trabajo consciente.

Casi al mismo tiempo Dewey en 1910 describe el proceso como una secuencia natural de 5 pasos (Bruning y otros, 2005):

1. Presentación del problema: los profesores o estudiantes reconocen la existencia de un problema.
2. Definición del problema: el resolutor identifica la naturaleza del problema y las limitaciones importantes en cuanto a su solución.
3. Desarrollo de hipótesis: se propone una o más posibles soluciones.
4. Comprobación de hipótesis: se determina la mejor solución.
5. Selección de la mejor hipótesis: se determina la mejor hipótesis, sabiendo los puntos fuertes y débiles de cada una.

Otro de los primeros modelos propuestos, y que tuvo gran relevancia es el de Wallas en 1926 (citado por Lorenzo, 1996), en el que se contemplan cuatro fases de resolución:

1. Preparación: recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. Incubación: dejar el problema de lado para realizar otras actividades o descansar.
3. Iluminación: es cuando se produce la aparición de la idea clave para la solución.
4. Verificación: se comprueba la solución.

Una de las caracterizaciones más conocidas y que se ha adaptado para ser utilizada a modo de metodología en la RP, es la propuesta por Polya (1945), que consiste en la resolución determinada por 4 pasos:

1. Comprensión del problema: el que debe resolver el problema reúne información acerca del problema.
2. Concebir un plan: el sujeto utiliza la experiencia pasada para encontrar un método de solución.

3. Ejecutar un plan: el sujeto pone en práctica su plan de solución comprobando cada paso.
4. Examinar la solución obtenida o reflexión: el sujeto comprueba el resultado utilizando otro método o viendo cómo todo encaja.

Los protocolos tienen ciertas cosas comunes, sobre todo al considerarlos como modelos descriptivos del proceso de resolución de problemas. En términos generales se pueden distinguir 4 momentos: uno primero de comprensión, luego planteamiento de relaciones a partir de lo que se ha desprendido del primer momento, un tercer momento de resolución y, en algunos casos, un cuarto momento de verificación o revisión de la solución obtenida como resultado de todo el proceso anterior. Ahora bien, por muy similares que nos puedan parecer los protocolos de resolución descritos, es necesario aclarar que el interés de estudio en cada caso es distinto ya que, como describe Puig (1996), Polya hace un intento por explorar las maneras de actuar de un resolutor ideal, mientras que otros autores como Schoenfeld lo que buscan de manera inacabable es una explicación de la conducta de los resolutores reales.

Codina (2000) y Espinosa (2004) exponen cómo muchos otros autores han desarrollado propuestas de fases en la RP. Para efectos de éste trabajo utilizaremos las fases descritas por Mayer (1986) y utilizadas por Fernández (1997a) y Espinosa (2002, 2004), que son:

- Planteamiento: es la fase en la que se traduce a un lenguaje matemático el texto del problema a través de un sistema de representación y en la que se establecen relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos o incógnitas, es decir, se integran, primero mentalmente, y luego se expresan físicamente sobre el papel, señalando un plan de acción posible.
- Ejecución: es el desarrollo de las relaciones establecidas en el planteamiento. Esta fase puede orientarnos, mejor que otras, respecto del tipo de pensamiento movilizado (algebraico o aritmético).
- Desempeño final: responder dando el/los resultados pedidos en el texto del problema. Un resultado correcto viene precedido, generalmente, de un buen planteamiento y de una buena ejecución.

Las tres fases que utilizamos dividen la resolución del problema en ciertos momentos que nos permiten describir con suficiente detalle la utilización del MGL en cada etapa del estudio.

2.4.3 Resolución gráfica de problemas algebraicos

Fernández (1997a), basándose en autores como Kieran y Filloy (1989), Kieran (1992) y Stacey y McGregor (1995), sugiere que la elección de un SR que sea más cercano al modo de resolución aritmético o al algebraico depende, en gran medida, del resolutor y no del problema en sí.

En el trabajo de Stacey y Mac Gregor (2000), se observó que los estudiantes utilizan variados métodos para resolver problemas algebraicos, que muy pocos de ellos utilizan una ruta completamente algebraica y, por lo tanto, además de las representaciones simbólicas, se utilizan las numéricas y la combinación de ambas, según el camino de resolución que se tome.

Para complementar lo anterior, Espinosa (2004) propone el esquema de la Figura 2.3 en el que se contemplan cinco "caminos" de resolución que van desde lo aritmético a lo algebraico, correspondiente a los cinco sistemas de representación ya descritos anteriormente.

En la Figura 2.3 se puede apreciar que el uso de gráficas y dibujos en algunos casos juega un papel importante como apoyo en las resoluciones algebraicas, permitiendo identificar los valores con letras o símbolos, para posteriormente traducir eso a una ecuación. En otras ocasiones permiten trazar un camino de solución directamente a partir de la gráfica, operando gráficamente con los datos conocidos para obtener los desconocidos. En dicho caso podríamos decir que se ha utilizado una *resolución gráfica de un problema algebraico.*

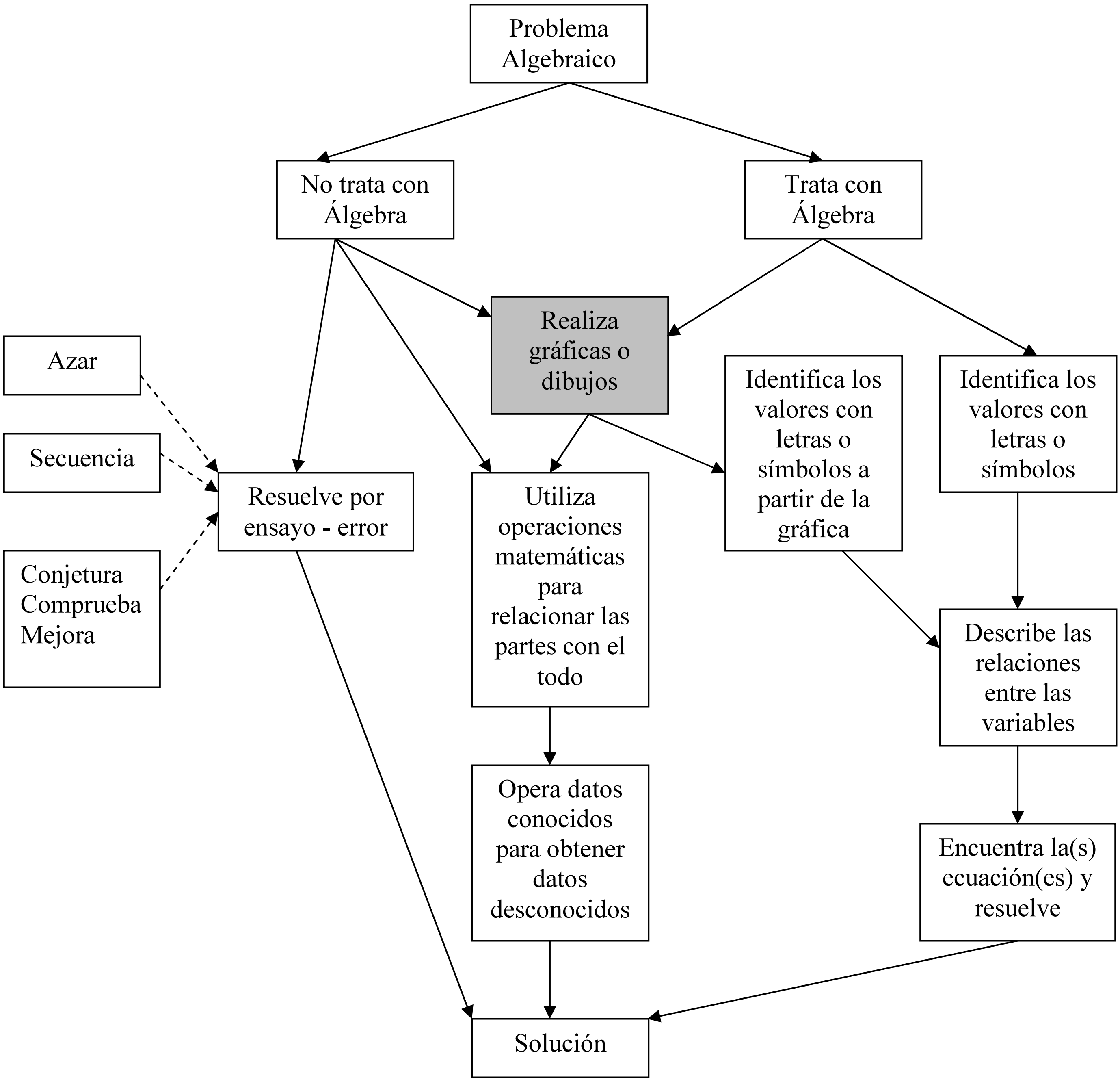


Figura 2.3: Formas de resolución de un problema (Espinosa, 2004)

La presentación del álgebra escolar que se realiza casi exclusivamente mediante el estudio de expresiones algebraicas y ecuaciones puede engendrar obstáculos en el proceso del aprendizaje significativo (Kieran, 1992). Por esa razón se ha incrementado el interés por la utilización de diversas representaciones para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Una muestra de ello es que el NCTM (2000) recomienda que los profesores favorezcan la construcción de una base sólida de comprensión y experiencia que facilite posteriormente el estudio del álgebra en niveles medios y en la escuela secundaria. Se recomienda, entre otras cosas, que se apoye en la utilización de representaciones gráficas.

Friedlander y Tabach (2001) proponen una categorización de las representaciones que se pueden utilizar con el fin de lograr que el proceso de aprendizaje algebraico sea significativo y efectivo, y describen cuáles son las ventajas y desventajas de cada tipo de representación. Las categorías definidas son: representaciones verbales, representaciones numéricas, representaciones gráficas y representaciones algebraicas.

En cuanto a las representaciones gráficas, sostienen que otorgan una imagen clara de una apreciada función real de una variable real. Los gráficos son intuitivos y atraen, particularmente, a los alumnos que prefieren una aproximación visual. Sin embargo, la representación gráfica podría carecer de la precisión requerida, está influenciada por factores externos y, generalmente, presenta sólo una parte del dominio y rango del problema.

Por otra parte, Diezman y English (2001) sostienen que en la RP un diagrama puede servir como una forma de "desempacar" la estructura del problema y, por lo tanto, servir de base para la resolución. Los autores distinguen 4 tipos de diagramas que fueron ejemplificados detalladamente por Espinosa (2004):

- Cadena o red: consiste en colocar una serie de puntos o nodos unidos por líneas que, en general, quedan como las vías de una estación de trenes.
- Matrices: en este caso se utilizan dos dimensiones para representar las relaciones de la información. Las matrices son particularmente útiles en problemas que requieren pensamiento deductivo o razonamiento combinatorio.
- Jerarquía: se usa para representar la estructura del problema, y el mejor ejemplo es un diagrama de árbol.
- Parte – todo: es un diagrama que representa la relación entre una parte y su todo.

Además de dicha clasificación, los autores mencionan dificultades en el uso de diagramas para la RP, como que un diagrama no viene rápidamente como herramienta de ayuda al pensamiento de estudiante y que el uso de diagramas no está muy extendido en los estudiantes, por lo que generalmente no los utilizan. De ahí la importancia de trabajar en el uso de las representaciones gráficas de manera explícita, planificada y a lo largo del tiempo, de manera de que se pueda contar con ellas como una herramienta existente en la RP.

2.5 Método geométrico – lineal para la resolución de problemas algebraicos

Nuestro trabajo se centra en el estudio del funcionamiento de una propuesta que usa el método gráfico para resolver problemas de álgebra elemental. Debido a las características del método, dentro del SR gráfico, lo llamamos Método Geométrico – Lineal (MGL). A lo largo de este apartado, describiremos algunos fundamentos históricos y, fundamentalmente, la definición y uso de dicho método.

2.5.1 Antecedentes históricos. *Los elementos* de Euclides.

A lo largo de la historia de la matemática encontramos algunos ejemplos de cómo se ha utilizado la geometría, y en particular la recta numérica y segmentos de recta, para representar cantidades y, en consecuencia, para resolver problemas e incluso para demostrar teoremas y proposiciones. En este apartado no pretendemos hacer un estudio histórico al respecto, sino sólo evidenciar, mediante un ejemplo, en este caso *Los elementos* de Euclides, cómo se han utilizado los segmentos como forma de representación en una obra que ha sido un pilar fundamental en el desarrollo de la matemática. De hecho, en la traducción de *Los elementos* al castellano, Vega (1991), señala que Euclides tenía un doble propósito al escribirlos, por una parte emprender una investigación y, en segundo lugar, difundirlos con un valor instructivo.

Los elementos de Euclides datan de aproximadamente de 300 años A.C. y están compuestos por 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y 465 proposiciones (problemas a resolver y teoremas a demostrar).

En cuanto al contenido expuesto en la obra de Euclides cabe resaltar que se trabajan más campos además de la geometría, aún cuando se asocia comúnmente a ésta: del Libro I al IV se desarrolla la teoría de la geometría plana; del Libro XI al XIII la geometría del espacio; en los Libros V y VI se desarrolla la teoría generalizada de la proporción; desde el Libro VII al IX la teoría aritmética y en el Libro X la inconmesurabilidad y una clasificación de rectas irracionales.

La utilización de segmentos en la obra de Euclides está presente en 6 de los 13 Libros, tanto en la resolución de problemas como en la demostración de teoremas. Dicho uso de los segmentos lo podemos clasificar en tres grupos, según lo que representan:

a) Representan *magnitudes* (Libros V y VI) relacionados con la teoría generalizada de la proporción.
b) Representan *números* (Libros VII, VIII y IX) en relación con la teoría aritmética.

c) Representan *cantidades inconmensurables* (Libro X) en relación a la inconmensurabilidad y las rectas irracionales.

En Martínez, Fernández y Flores (2009a) ejemplificamos cada uno de los tres casos anteriores. Para efectos de este trabajo nos interesa ejemplificar sólo los dos primeros, para ello utilizaremos 2 proposiciones, una del Libro V y otra del Libro VII, para la representación de magnitudes y de números respectivamente. Cabe destacar que tanto las proposiciones como las demostraciones han sido extraídas textualmente de la traducción de *Los elementos* al español de Puertas Castaño (1994, 1996).

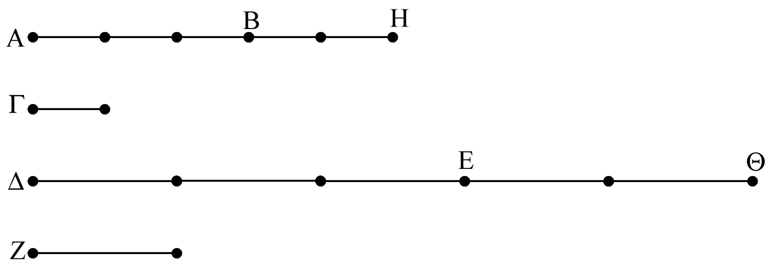
Ejemplo 2.1

Proposición 2/ Libro V:

Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.

Demostración:

Pues sea la primera (magnitud) AB, el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la tercera, ΔE, de la cuarta, Z, y sea la quinta, BH, el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la sexta, EΘ, de la cuarta, Z.



Digo que la suma de la primera y la quinta, AH, es el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la (suma de) la tercera y la sexta, ΔΘ, de la cuarta, Z.

Pues, dado que AB, es el mismo múltiplo de Γ, que ΔE de Z, entonces cuantas (magnitudes) hay en AB iguales a Γ, tantas hay también en ΔE iguales a Z. Y, por lo mismo, cuantas (magnitudes) hay en BH igual a Γ, tantas hay también en EΘ iguales a Z; así pues, cuantas (magnitudes) hay en la (magnitud) entera AH iguales a Γ, tantas hay también en la (magnitud) entera ΔΘ iguales a Z; por tanto, cuantas veces AH es múltiplo de Γ, tantas veces lo será ΔΘ de Z. Luego la suma de la primera y la quinta, AH, será también el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la (suma de) la tercera y la

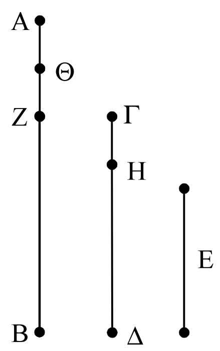
sexta, ΔΘ, de la cuarta, Z.
Por consiguiente, si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta. Q. E. D.

En el Ejemplo 2.1 se utilizan segmentos para representar magnitudes cualesquiera, de tal forma que una es un determinado múltiplo de otra. Hay que subrayar, como una de las riquezas de la representación, el hecho de que pares de segmentos distintos representan la misma razón. Además, al momento de operar sobre los segmentos en este caso, se representa la adición de magnitudes, ampliando así el espectro de relaciones representables con segmentos. En resumen, en la demostración de la proposición anterior, Euclides utiliza los segmentos para: representar magnitudes cualesquiera, compararlas mediante proporciones y operar con ellas mediante la adición.

Ejemplo 2.2

Proposición 1/libro VII:
Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.

Demostración:
Pues sean AB, y ΓΔ dos números [desiguales] tales que, restándose sucesivamente el menor del mayor, el que quede no mida nunca al anterior hasta que quede una unidad.
Digo que AB, ΓΔ son primos entre sí, es decir que la sola unidad mide a AB, ΓΔ.
Pues, si AB, ΓΔ no son primos entre sí, algún número los medirá. Mídalos (un número) y sea E; y ΓΔ, al medir BZ, deje ZA menor que él mismo, y AZ, al medir a ΔH, deje HΓ menor que él mismo, y HΓ, al medir a ZΘ, deje una unidad ΘA.



> Así pues, como E mide a ΓΔ, y ΓΔ mide también a BZ, entonces E mide también a BZ; pero mide también al total BA; por tanto medirá también al resto AZ. Ahora bien, AZ mide a ΔH; entonces E mide también a ΔH; pero mide así mismo al total ΔΓ; por tanto medirá también al resto ΓH. Pero ΓH mide a ZΘ; y mide así mismo al total ZA; luego medirá también a la unidad restante AΘ, aun siendo un número; lo cual es imposible. Por tanto, ningún número medirá a los números AB, ΓΔ.
> Por consiguiente, AB, ΓΔ son primos relativos entre sí [VII, Def. 13] Q. E. D.

En este caso, Ejemplo 2.2, en comparación con el caso anterior (representación de magnitudes), nos parece importante resaltar un aspecto diferenciador al momento de utilizar los segmentos: se representan números, inicialmente números cualesquiera. Además, en el enunciado de la proposición está presente la unidad y la utilización de los segmentos permite representar dicha situación. Existe, por lo tanto, una diferencia fundamental con el ejemplo anterior, en este caso convive la representación de números cualesquiera con la representación de una unidad determinada.

2.5.2 Método geométrico – lineal (MGL)

A continuación describiremos el MGL, a través de una definición y ejemplos. Previo a ello, quisiéramos explicar brevemente qué entendemos por método, con el fin de justificar por qué lo hemos utilizado este término para definir el mecanismo gráfico que proponemos para la resolución de problemas algebraicos.

2.5.2.1 Del concepto de método

Si nos aproximamos a la definición más genérica del término *método*, encontramos que el Diccionario de la Real Academia Española (2001) nos entrega cuatro definiciones: *"**1.** m. Modo de decir o hacer con orden. **2.** m. Modo de obrar o proceder, hábito o costumbre que cada uno tiene y observa. **3.** m. Obra que enseña los elementos de una ciencia o arte. **4.** m. Fil. Procedimiento que se sigue en las ciencias para hallar la verdad y enseñarla"* (p. 1016). De éstas definiciones podemos desprender que cuando hablamos de método, nos referimos a un camino a seguir, un plan determinado que guía una acción o pensamiento. En Moliner (1989), se define también el *método* como: *"Manera sistemática de hacer cierta cosa: se aplica específicamente al conjunto de reglas, lecciones y ejercicios para enseñar o aprender algo"* (p. 406), descripción que, en este caso, añade como elemento la sistematización.

En los diccionarios de términos matemáticos encontramos definiciones como las siguientes:
"*Procedimiento para hacer con orden una cosa. Conjunto de reglas y ejercicios prácticos que se utiliza en las ciencias para encontrar la verdad y enseñarla. Puede ser analítico y sintético"* (García Pérez, 1992, p. 104).

"Camino que sigue el pensamiento para llegar a un saber prefijado y, en particular, para descubrir una verdad. El método empezó a tener importancia matemática con Galileo, puesto que el suyo es una mezcla de experimentación y razonamiento, y después con Descartes, en cuyo Discurso del Método y, sobre todo, en sus inconclusas Reglas para la dirección del espíritu, se encuentran las bases del racionalismo moderno, que concede a la razón humana la función específica indispensable para alcanzar un conocimiento" (Vera, 1960, p. 436).

Es así como encontramos que el término *método* ha sido comúnmente utilizado en matemáticas para señalar una forma sistemática de realizar cierto razonamiento y llegar a un resultado determinado, o una verdad. Éste es el sentido en el que nosotros lo utilizamos cuando hablamos de un *método* para la resolución de problemas.

2.5.2.2 Definición del MGL

Anteriormente se expusieron distintas clasificaciones de los posibles sistemas de representación que se utilizan en la RP y mencionamos que, para efectos de este trabajo, utilizaremos la clasificación anteriormente empleada por Fernández (1997a) y Espinosa (2002, 2004).

Uno de los cinco sistemas de representación definidos por ellos es el sistema de representación gráfico, caracterizado por utilizar representaciones visuales que pueden ser de diversa índole, de entre las que podemos distinguir las siguientes:

- Representación física: objetos manipulables, ya sean materiales didácticos elaborados (ábacos, bloques multi-base, fichas, varillas, geoplanos, sólidos geométricos, etc.) u otros recursos como los materiales escolares (clips, lápices, papeles, etc.) o los materiales naturales y caseros (canicas, botones, piedras, cuerdas, etc.).
- Representación informática: a través de programas informáticos adecuados se pueden representar en la pantalla elementos gráficos, tanto de tipo geométrico como diagramático.

- Representación con lápiz y papel: suele ser la más utilizada actualmente en el ámbito escolar, en especial en la resolución de este tipo de problemas algebraicos ya que, por una parte, los estudiantes tienen el manejo y la habilidad suficiente como para realizar multitud de tareas y representaciones a través de estos medios y, por otra parte, los estudiantes de la educación secundaria tienen la madurez necesaria como para realizar sobre el papel representaciones, dibujos o símbolos de los elementos u objetos que intervienen en los textos de los problemas verbales.

  A la vez, las representaciones de papel y lápiz podemos subdividirlas en:

- Representación icónica: dibujos o figuras alusivos al concepto representado.
- Representación geométrica: figuras geométricas de una, dos o tres dimensiones como segmentos, rectas, polígonos, cuerpos geométricos, etc. También se puede considerar la utilización del plano cartesiano y sus coordenadas para estas representaciones.
- Representación diagramática: esquemas o diagramas que permiten ordenar y relacionar la información de un problema como, por ejemplo, los diagramas de árbol, esquemas, mapas conceptuales, mapas semánticos, tablas, etc.

Además de lo anterior, consideraremos que se está utilizando el sistema de representación gráfico cuando las operaciones numéricas necesarias para resolver el problema se efectúan a partir de las relaciones establecidas en el gráfico, es decir, son esenciales para resolver el problema la manipulación, la interacción o el trazado con y de dichas representaciones.

Actualmente, en la gran mayoría de las aulas de matemáticas de los centros de secundaria, la resolución de los problemas algebraicos elementales se considera como una tarea de lápiz y papel, lo que se puede afirmar observando los libros de texto que se utilizan en estos niveles. El profesorado de secundaria, por lo tanto, utiliza, casi exclusivamente, sistemas de representación que se puedan realizar bien en una pizarra o encerado, bien en un cuaderno de trabajo.

Por todo lo expuesto, nuestro interés se ha focalizado en estudiar un método de RP geométrico, perteneciente al SR gráfico que utiliza lápiz y papel, que permita abordar los problemas de álgebra elemental que se proponen en la enseñanza secundaria de una forma más intuitiva y cercana al estudiante, de tal manera que proporcione herramientas para una aproximación al álgebra y al lenguaje algebraico de una forma más significativa para el estudiante y, así, facilitar y mejorar su aprendizaje.

El método en cuestión se basa en la utilización de segmentos lineales para representar las cantidades de magnitudes y sus relaciones.

La decisión de utilizar dicho método se fundamenta en que:

- Un segmento permite representar variables discretas y variables continuas, por lo que se amplía el ámbito numérico al que se pueden referir los problemas con los que se va a trabajar.
- Es de fácil manipulación, no exige una especial destreza motora de parte de quien lo utiliza, tampoco requiere instrumentos específicos como regla, compás, etc. para ser trazado.
- Constituye una forma de representación muy utilizada en problemas relacionados con otras disciplinas escolares, como puede ser el caso de la Física en problemas de trayectorias, velocidades, longitudes, etc., o de la Geografía en problemas de planimetría, escalas, etc.
- Permite trabajar las variables, tanto en relaciones proporcionales como en relaciones no proporcionales.
- Teniendo en cuenta que el conjunto de segmentos lineales orientados del plano tiene una estructura algebraica de espacio vectorial, las operaciones aditivas entre segmentos, y las multiplicativas entre números y segmentos, nos van a permitir establecer las relaciones lineales entre cantidades conocidas y desconocidas.

La representación de cantidades de manera gráfica, a través de la historia, no ha sido algo ajeno al desarrollo de la matemática. En efecto, ya vimos que Euclides utiliza la representación gráfica, mediante segmentos, para cantidades conocidas y desconocidas y Horak y Horak (1981) se basan en la consideración que hacían los griegos de los números, a modo de segmentos de recta, para proponer demostraciones geométricas de identidades algebraicas.

Enmarcados en el sistema de representación grafico, y tomando en cuenta los fundamentos descritos anteriormente, vamos a definir el método geométrico - lineal en los siguientes términos:

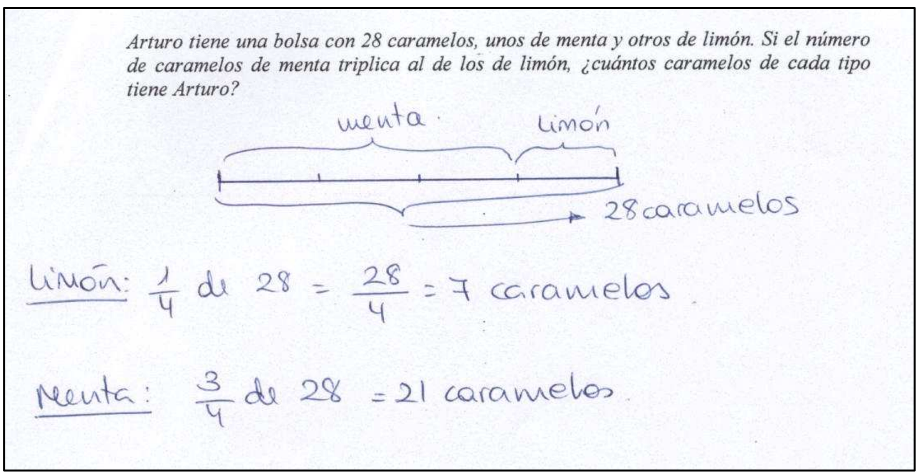
Método Geométrico–Lineal (MGL). *Consideraremos que se utiliza el método geométrico lineal, en la resolución de problemas algebraicos, cuando se establecen relaciones lineales entre los datos y las incógnitas contenidas en el enunciado del problema mediante segmentos de recta, de tal forma que:*

- Se *representan las incógnitas por segmentos cualesquiera de diferentes longitudes (en caso de haber varias incógnitas).*
- *Se elige, de forma explícita o implícita, un segmento de longitud unidad.*
- *Los datos se representan mediante segmentos de longitud proporcional al segmento unidad.*
- *Se establecen gráficamente, mediante segmentos, las relaciones contenidas en el enunciado entre las cantidades conocidas (datos) y las desconocidas (incógnitas).*
- *La resolución del problema pasa por determinar las longitudes (referidas a la unidad elegida) de los segmentos que representan a las incógnitas y hacer la traducción, mediante la proporción ya establecida, a las cantidades inicialmente desconocidas.*

Cuando, en la definición de MGL, hablamos de "relaciones lineales" nos estamos refiriendo a relaciones que, si fueran expresadas utilizando el lenguaje simbólico, darían origen a una ecuación de primer grado ya que, como hemos puntualizado anteriormente, los problemas con los que trabajamos a lo largo de esta investigación son resolubles mediante una o dos ecuaciones simples de primer grado.

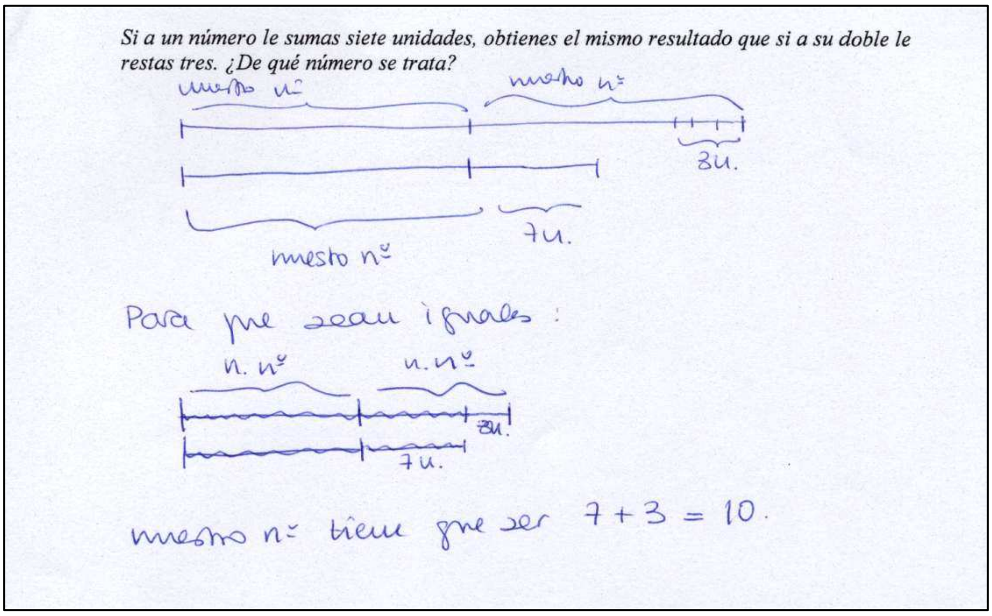
Para ilustrar la definición del MGL, utilizaremos dos ejemplos tomados de producciones de estudiantes que lo han utilizado para resolver problemas, casos que nos permiten explicar cómo se utiliza el método y también definir algunos otros elementos.

Ejemplo 2.3



En el Ejemplo 2.3, el problema se ha resuelto traduciendo el enunciado a una representación gráfica, representación compuesta por un segmento subdividido en cuatro partes iguales, lo que permite establecer la relación existente entre la cantidad de caramelos de limón y la cantidad de caramelos de menta descrita en el enunciado. Al determinar la medida de uno de los sub-segmentos se establece la cantidad de caramelos de limón y, con ello, la cantidad de caramelos de menta. Observemos que, en este caso, se conoce el largo del segmento total y se necesita determinar el largo de las partes contenidas en él.

Ejemplo 2.4



Por su parte, en el Ejemplo 2.4 se observa que, en la traducción del enunciado verbal del problema, inicialmente se han utilizado dos segmentos: sobre uno se representa el “doble del número disminuido en tres unidades” y sobre el otro, “el número aumentado en siete unidades”. Se continúa la resolución comparando ambos segmentos para conseguir su “igualdad gráfica”.

Una de las diferencias que se observa entre el Ejemplo 2.3 y el Ejemplo 2.4 es el número de “segmento totales” necesarios para traducir el problema a una representación gráfica en la fase de planteamiento. A dichos “segmentos totales” los definimos como:

Relación Gráfica Lineal (RGL)*. Es un segmento de recta sobre el que se representan diversas cantidades de una magnitud (conocidas y desconocidas) y la dependencia lineal entre ellas, a partir de las condiciones descritas por el enunciado del problema.*

El número de RGL´s necesarias para traducir el enunciado verbal de un problema al sistema de representación gráfico, y posteriormente resolverlo, está dado por la cantidad de segmentos de recta que permiten representar las magnitudes involucradas en el problema y sus relaciones. Si volvemos a los ejemplos anteriores, podemos observar que en el Ejemplo 2.3 se ha necesitado una RGL para traducir y resolver el problema, mientras que en el Ejemplo 2.4 fueron necesarias dos RGL´s, aunque se observan cuatro, ya que el resolutor las representa dos veces para “ajustar la escala” y plantearlas como una igualdad gráfica.

Los problemas que se abordan en este estudio son problemas escolares que, algebraicamente, se plantean mediante una ecuación lineal o un sistema de dos ecuaciones lineales. No obstante, si bien el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas, no ocurre de la misma forma con las RGL’s, como veremos más adelante.

Finalmente, destacamos que, dentro de los métodos de resolución que podemos incluir en un sistema de representación gráfico, el MGL es uno de los más sofisticados y simbólicos. Fernández (1997a) encuentra al SR gráfico como un paso intermedio entre los sistemas numéricos y los simbólicos alfabéticos (algebraicos). Entonces, podríamos considerar al MGL como un puente entre los métodos que utilizan representaciones más icónicas e intuitivas y los que las utilizan representaciones más simbólicas y abstractas.

Consideramos que el MGL es de una gran potencialidad para aproximar lo intuitivo a lo abstracto, porque utiliza tanto elementos intuitivos, visuales, fácilmente manipulables con lápiz y papel y, por esto, al alcance de cualquier estudiante de últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria, con elementos simbólicos, ya que el segmento es, en definitiva, un símbolo de las cantidades implicadas en el problema. Por todo lo cual, podemos afirmar que el MGL es un método que permitirá allanar el camino del lenguaje concreto, aritmético, hacia el lenguaje simbólico por excelencia, es decir, el lenguaje algebraico.

2.5.2.3 MGL y la resolución de problemas

En el apartado 2.4.1.2 describimos 4 pasos que se deben seguir para que, utilizando el MC (método cartesiano), se traduzca cualquier problema de enunciado verbal a ecuaciones. Los mismos pasos se pueden llevar a un nivel de precisión mayor y posteriormente adaptarlos para plantear un problema gráficamente utilizando el MGL y resolverlo. A continuación presentamos la adaptación de dichos pasos, en el cuadro comparativo de la Tabla 2.4.

Con MC y lenguaje simbólico	***Con MGL***
Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.	Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).	Elección de una cantidad que se va a representar con un segmento (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con segmentos de distinta longitud).
Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.	Representación de otras cantidades mediante segmentos que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por un segmento.
Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso) igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.	Establecimiento de una RGL (o tantas como segmentos distintos se haya decidido introducir en el segundo paso) igualando gráficamente las longitudes de los segmentos, que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
Transformación de la ecuación en una forma canónica.	Determinar las longitudes de los segmentos que representan las cantidades desconocidas mediante la comparación e igualación gráfica, cuando proceda, de RGL´s.
Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.	
Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.	Interpretación del resultado de las longitudes de los segmentos en términos del problema.

Tabla 2.4: Cuadro comparativo MC y lenguaje algebraico y MGL.

2.5.3 Clasificación de problemas utilizando MGL

En Martínez (2006) iniciamos un primer trabajo exploratorio en torno a este tema, que tenía como fin la definición y puesta a prueba de un método gráfico de resolución de problemas de álgebra elemental. Dicho trabajo fue realizado en el marco de la obtención del Diploma de Estudios Avanzados (DEA) del programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Como resultado de dicho trabajo obtuvimos una clasificación de los problemas de álgebra elemental presentes en libros texto de 1º y 2º de ESO. La clasificación se elaboró como una primera aproximación a la RP de álgebra elemental utilizando el MGL, descrito anteriormente, y consideramos como variable el número mínimo de RGL´s que son necesarias para representar el problema. Posteriormente se definieron, para dicha variable, las siguientes categorías:

a) Utilización de una RGL para la resolución del problema.
b) Utilización de dos RGL´s para la resolución del problema.
c) Utilización de tres o más RGL´s para la resolución del problema.

Como consecuencia, se obtiene una clasificación constituida por tres categorías que se describe y caracteriza a continuación:

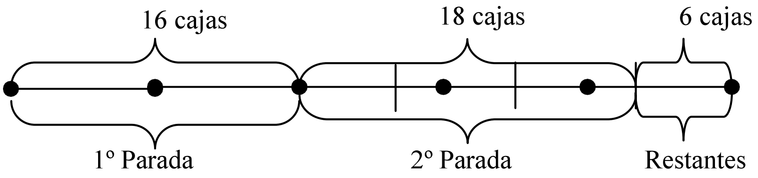
- ***Categoría Nº 1:*** La primera categoría está constituida por aquellos problemas en que se describen las cantidades como partes de un total o se comparan utilizando la adición y sustracción de segmentos.

En esta categoría encontramos problemas con una o dos incógnitas. Sin embargo, en ambos casos basta con representar los datos y relaciones dadas por el enunciado en una RGL.

Al graficar se necesita determinar el "largo" o "valor" de un segmento o bien, en algunos casos, se conoce la medida de dicho segmento y es necesario determinar el número de segmentos.

Ejemplo 2.5

Un repartidor de frutas llena su furgoneta con varias cajas de tomates. En su primera parada deja los $\frac{2}{5}$ de su carga, y en la segunda y ultima, los $\frac{3}{4}$ de las cajas restantes. Si al final le quedan 6 cajas sin repartir, ¿cuántas cargó?

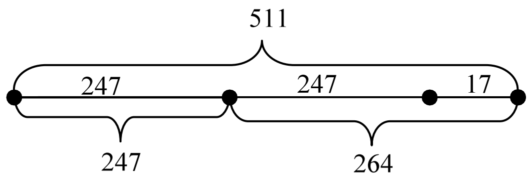


Respuesta: cargó 40 cajas.

Comentario: Este problema se representa utilizando un segmento inicial que equivale al total de cajas tomates y, sobre dicho segmento, se representan las relaciones descritas en el enunciado que permiten determinar el largo del segmento inicial, con lo que se da solución al problema.

Ejemplo 2.6

En un cine hay 511 personas. ¿Cuál es el número de hombres y cuál el de mujeres, sabiendo que el de ellas sobrepasa en 17 el de ellos?

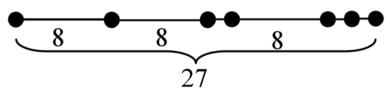


Respuesta: hay 247 hombres y 264 mujeres.

Comentario: En este caso el segmento total representa la cantidad de personas que hay en el cine y, sobre él, se representan con "sub-segmentos" el número de hombres y el número de mujeres. El largo de dichos sub-segmentos se determina a partir de una comparación aditiva que viene explícita en el enunciado.

Ejemplo 2.7

Halla tres números consecutivos cuya suma sea 27.

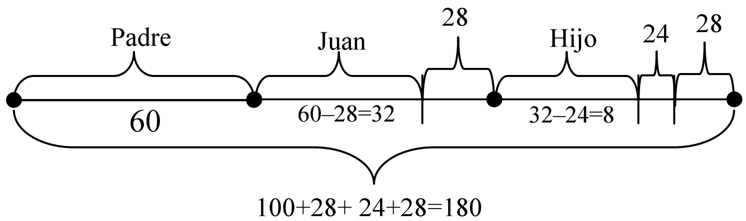


Respuesta: los números son 8, 9 y 10.

Comentario: Para representar este problema se utiliza un segmento que equivale a la suma de los tres números consecutivos y, posteriormente, sobre dicho segmento se representan los tres números. Determinando el valor del primer segmento, o número menor, se establece el valor de los otros dos números buscados.

Ejemplo 2.8

Juan tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno, sabiendo que entre los 3 suman 100 años?

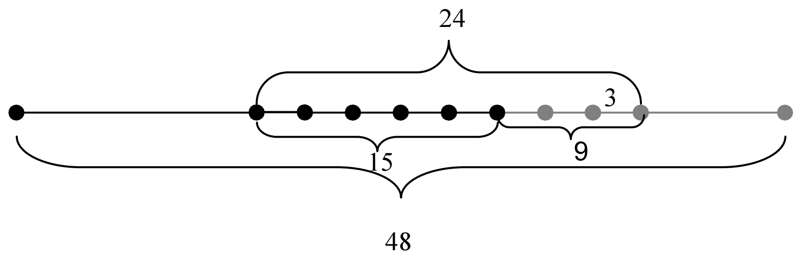


Respuesta: el padre tiene 60 años, Juan 32 años y el niño 8 años.

Comentario: Para este problema es necesario tomar como segmento base la edad de unas de las personas. En este caso se tomó la edad del padre y, a partir de ella, se representan la edad de Juan y la de su hijo, pero agregando los años que fuesen necesarios para representarlos con un trazo equivalente a la edad de padre. Una vez determinada la edad del padre se calcula la edad de las otras dos personas.

Ejemplo 2.9

Un rectángulo tiene un perímetro de 48 cm y su anchura es el 60% de su longitud. Calcula sus dimensiones.



Respuesta: las dimensiones del rectángulo son 9 cm y 15 cm.

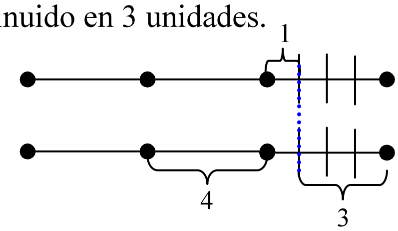
Comentario: En este caso el segmento total equivale al perímetro del rectángulo y la mitad del segmento al semiperímetro, que es lo que se utiliza para representar el ancho y largo de los lados del rectángulo.

- ***Categoría Nº 2:*** La segunda categoría se basa en plantear dos RGL´s, ambas dadas directamente por el enunciado. Sin embargo, es posible determinar la longitud del segmento de manera directa al comparar ambas relaciones, ya que el enunciado las plantea como una "igualdad".

En definitiva, son problemas de una incógnita aún cuando en el planteamiento se grafican dos RGL´s, que se inducen directamente del enunciado.

Ejemplo 2.10

Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.



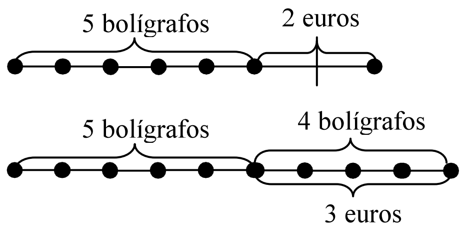
Respuesta: el número es 4.

Comentario: En este caso, cada RGL representa distintas transformaciones que se realizan a un número, y la línea punteada representa la equivalencia o igualdad entre la RGL superior y la inferior.

Para dar solución al problema es necesario establecer la longitud del segmento base, sobre el que se construyeron ambas RGL´s, que representa al número que se pide determinar.

Ejemplo 2.11

Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?



3 / 4 = 0,75

Respuesta: cada bolígrafo cuesta 0,75 euros y llevo 5,75 euros.

Comentario: En este problema se representan dos relaciones que permiten manipular las dos variables que están presentes en el enunciado: número de bolígrafos y cantidad de dinero.

El trazar ambas relaciones permite realizar una equivalencia entre dinero o precio y los bolígrafos.

- ***Categoría Nº 3:*** se caracteriza por tener que utilizar más de dos RGL´s para dar solución al problema. Es así como nos encontramos frente a dos posibles casos:

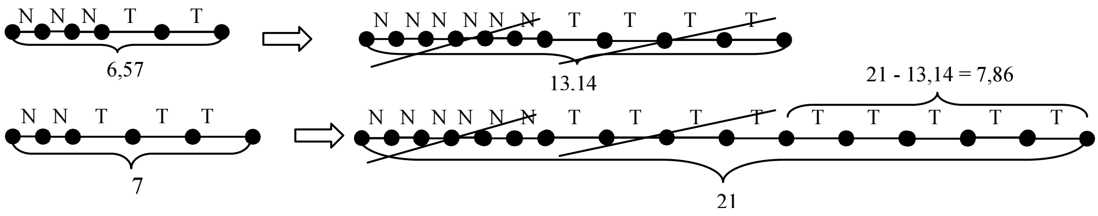
Caso 1: Plantear dos RGL´s iniciales y, luego, para poder determinar el valor de un segmento se hace necesario ponderar dichas relaciones "convenientemente" con el fin de reducirlas a una, eliminando, así, una las variables para determinar la otra.

Caso 2: Plantear, directamente, tres RGL´s inducidas por el enunciado.

Cabe destacar que la característica de estos problemas es que es necesario determinar el largo de dos segmentos, ya que son problemas en que hay dos incógnitas involucradas y, a diferencia de las Categorías 1 y 2, las incógnitas son independientes entre sí, es decir, no está definida una en función de la otra.

Ejemplo 2.12

Tres kilos de naranjas y dos kilos de tomates cuestan 6,57 euros, sin embargo, dos kilos de naranjas y tres kilos de tomates cuestan 7 euros. ¿Cuánto cuesta el kilo de naranja? ¿y el de tomates?



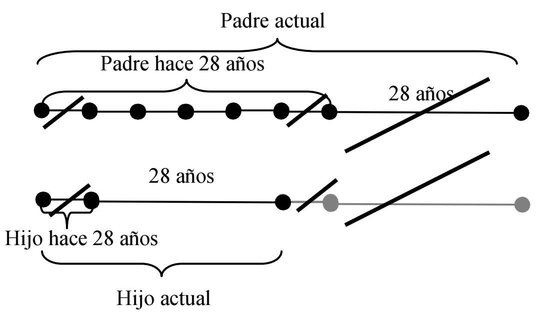
7,86 : 5 = 1,572

Respuesta: cada kilo de tomates cuesta 1,576 euros y el de naranjas 1,142 euros.

Comentario: Para este problema se plantean dos RGL´s iniciales en las se representan directamente las relaciones descritas verbalmente en el enunciado. Para dar solución al problema es necesario eliminar una de las variables, por lo que hay que multiplicar ambos segmentos por los valores adecuados que permitan dicha eliminación por comparación. En este caso, la primera relación se multiplica por 2 y la segunda por 3 con el fin de reducir la variable "kilo de naranjas".

Ejemplo 2.13

Hace 28 años, la edad de un padre era 6 veces la de un hijo, pero hoy en día es solamente el doble. ¿Cuál es la edad actual de ambos?



$\Rightarrow$ 28 : 4 = 7

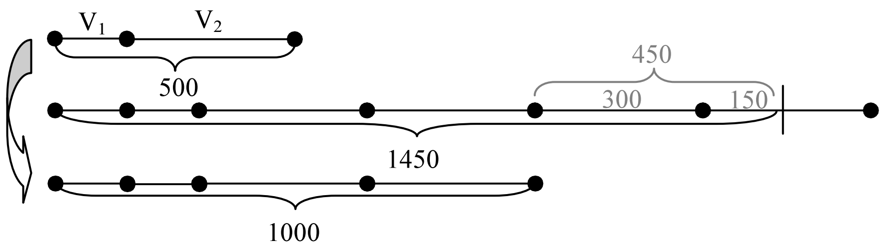
Respuesta: hijo: 28 + 7 = 35 años; padre: 28 + 7•6 = 70 años

Comentario: En este caso se representan dos relaciones iniciales que equivalen a la edad actual del padre y la edad actual del hijo. En dichas relaciones se distingue como segmento base el que representa la edad del hijo hace 28 años.

Para poder manipular la representación y eliminar una de las incógnitas se traza una tercera RGL, que podemos apreciar en color gris, lo que permite trabajar las relaciones como una igualdad y, así, determinar la solución del problema.

Ejemplo 2.14

Mezclando vino de 2 euros el litro con otro de 3,50 euros el litro, se han obtenido 500 litros de calidad intermedia, que sale a 2,90 euros el litro. ¿Cuántos litros de cada clase se han empleado?



Respuesta: 300 litros del vino de 3,50 euros y 200 del vino de 2 euros

Comentario: Para este problema se comienza planteado dos RGL´s. Sin embargo, tiene la dificultad de que la segunda RGL se plantea a partir de ponderar cada una de las incógnitas referidas a la cantidad de litros de vino por el precio de venta y, por lo tanto, se trabaja con 4 incógnitas a la vez.

Finalmente, se pondera la primera RGL dando origen a una tercera, que permite eliminar unas de las incógnitas (cantidad de litros de vino de cada tipo) y dar solución al problema.

CAPÍTULO 3
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El Capítulo 3 tiene por objeto completar la definición del problema de investigación sobre la base de tres elementos:

- Descripción del estado de la cuestión a investigar.
- Definición de los objetivos de investigación a partir de las preguntas de investigación planteadas.
- Definición de las hipótesis de investigación, como consecuencia del estado de la cuestión y dentro del Marco Teórico presentado en el Capítulo 2.

3.1 Estado de la cuestión

En torno al estudio de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se han desarrollado ciertos núcleos temáticos que han ido evolucionando como temas de interés para la investigación en los últimos 30 años. Kieran (2006b) describe de qué manera el interés por temáticas como la transición de la aritmética al álgebra, el desarrollo de conceptos como variable e incógnita, el planteamiento y la resolución de ecuaciones y la RP de enunciado, han sido y siguen siendo importantes núcleos de investigación. Estos núcleos de investigación se han ido enriqueciendo al incluir otros elementos como el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, las múltiples representaciones, así como el papel que desempeña la generalización en el aprendizaje de ciertos conceptos. Además, en los últimos quince años se han sumado a las temáticas anteriores el trabajo en torno al desarrollo del pensamiento algebraico desde la Educación Primaria, el álgebra del profesor y la modelización dinámica de situaciones físicas. Lo anterior se puede agrupar dando origen a tres periodos, como se resume en la siguiente tabla (Kieran, 2006b; 2007a):

Periodo	*Núcleos de investigación*
A partir de mediados de los 70's	Transición de la aritmética al álgebra Variables e incógnitas Ecuaciones y resolución de ecuaciones Resolución de problemas de enunciado
A partir de mediados de los 80's	Papel de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje del álgebra Múltiples representaciones Generalización
A partir de mediado de los 90´s	Pensamiento algebraico desde primaria El álgebra del profesor / álgebra enseñada La modelización dinámica de situaciones físicas y otros medios de álgebra dinámica

Tabla 3.1: Periodos y núcleos de investigación en torno al pensamiento algebraico (Kieran, 2006b; 2007a)

Nuestro trabajo tiene por objeto el estudio de la RP de álgebra elemental, pretendiendo caracterizar y poner a prueba una herramienta gráfica que permita resolver problemas de enunciado, entendiendo que el uso de diversas representaciones puede facilitar y enriquecer la comprensión de ciertos conceptos, e incluso, de algunos procedimientos algebraicos como han dejado de manifiesto diversos autores del área (Fischbein, 1977, 1993; Castro y Castro, 1997; Duval, 1999a, 1999b; Schultz y Waters, 2000; Goldin y Shteingold, 2001; Diezman y English, 2001; Arcavi, 2003; Pyke, 2003; Gagatsis y Elia, 2004; Amit y Fried, 2005).

Con el fin de aproximarnos a la problemática a estudiar, se realizó una búsqueda de investigaciones relacionadas con el tema que nos permitiera tener una visión de cuál es el estado en que se encuentra el problema de investigación.

Dicha búsqueda comenzó por retomar y ampliar la que realizamos para el Trabajo de Investigación Tutelado, dentro de Programa de Doctorado, y se revisaron las publicaciones entre los años 1998 y 2009 de revistas nacionales e internacionales.

Además, se consultaron actas de congresos nacionales e internacionales, tesis, Handbooks y libros relacionados con el área de la Didáctica de la Matemática, utilizando como palabras claves: *resolución de problemas*, *resolución gráfica*, *visualización*, *representación*, *álgebra*.

Para acceder a dicho material se consultó: La biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. La biblioteca especializada del

Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Además se empleó la base de datos ERIC, utilizando como términos clave: *problem solving*, *representation*, *algebra* y *visualization.* De dicha búsqueda obtuvimos el número de publicaciones que se detalla en la Tabla 3.2.

Término clave	***Nº de publicaciones***
Problem solving	28.937
Representation	10.813
Algebra	5.803
Visualization	1.646

.Tabla 3.2: Resultado de búsqueda por término clave.

En términos generales, como resultado de dicha búsqueda bibliográfica, podemos decir que se han realizado numerosos trabajos en el área de RP aritméticos y algebraicos y en torno al uso de representaciones y la visualización; elementos que, a nivel conceptual y teórico, han sido descritos en el Marco teórico recogido en el Capítulo 2.

A continuación presentamos un resumen de investigaciones que guardan relación con el tema del trabajo, lo que nos permite dimensionar, de manera más específica, el desarrollo investigativo que ha tenido la temática en cuestión. Cabe destacar que hemos encontrado pocos trabajos planteados desde una perspectiva similar a la que hemos utilizado en el nuestro, de los que hemos recogido algunas aportaciones. Con el fin de organizar la información agrupamos los trabajos en los siguientes ejes temáticos:

- Álgebra y resolución de problemas
- Utilización de representaciones gráficas
- Utilización de la línea recta
- Antecedentes en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

3.1.1 Álgebra y resolución de problemas

Existe una serie de investigaciones que sirven de antecedente y punto de partida para nuestro trabajo en relación con la RP. A continuación describimos algunas de ellas, particularmente las relacionadas con la RP algebraicos, realizando una aproximación temática, antes que cronológica, hacia el foco de interés de nuestra investigación.

En este sentido, destacamos el trabajo de Castro, Rico y Gil (1992) en torno al estudio de problemas aritméticos verbales, destacando cómo dicha problemática está presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por lo tanto, en la investigación en Educación Matemática. Es importante subrayar que los autores enfatizan los distintos enfoques desde los cuales se ha trabajado el tema, profundizando y describiendo cuatro de ellos: enfoque lingüístico, enfoque de variables estructurales, enfoque de sentencias abiertas y enfoque semántico.

Aún cuando el trabajo anterior se centra en el estudio de problemas que han definido como aritméticos, hay muchos elementos en común con el estudio de la RP algebraicos, razón por la cual los enfoques utilizados pueden ser válidos o ser extrapolados a la RP de álgebra elemental. Los autores destacan, sobre todo, que se ha trabajado la RP como un eje central en la Educación Matemática, explicitando los múltiples puntos de vista y variables que pueden ser tomados en cuenta para su estudio.

Una muestra de cómo la RP ha ocupado un eje central en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática es su presencia explícita en los libros de texto. En este sentido, Fan y Zhu (2007) investigan los procedimientos utilizados para la RP en los libros de textos de tres países, con el fin de establecer similitudes y diferencias, además de comprender posibles formas de mejorar la representación de los procedimientos para la RP. El análisis se hace en dos sentidos: (a) qué estrategias generales emplean (distinguiendo los 4 pasos para la resolución propuestos por Polya, que hemos definidos en el apartado 2.4.2) (b) qué estrategias específicas emplean (entre 17 heurísticas diferentes como: buscar un patrón, resolver de atrás para adelante, etc.). Los autores observan que las tres series de libros introducen un considerable número de heurísticas para resolver problemas a través de la representación de las soluciones, mostrando particular fortaleza en la representación de procedimientos en términos de modelar varios pasos para la resolución y usando un amplio rango de heurísticos específicos.

Centrándonos en el estudio de las estrategias que utilizan los alumnos para la RP, encontramos como referente el trabajo realizado por Mayer (1982) en torno a los problemas de enunciado, en el que compara los distintos tipos de estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas de ecuaciones, expresados en forma de ecuación o en forma de enunciado verbal. Trabaja con 84 sujetos, a 42 les plantea problemas expresados con enunciado verbal y a los 42 restantes problemas expresados por medio de una ecuación. Como resultado del experimento se plantea la idea de que los sujetos utilizan estrategias cualitativamente diferentes para los problemas de enunciado verbal y los de ecuaciones, utilizando la estrategia de reducir en el primer caso y la de aislar en el segundo. A partir del experimento, los autores manifiestan que no existe evidencia para afirmar que los problemas expresados utilizando enunciado verbal necesitan "más trabajo". Concluyen que el proceso de comprensión de un problema y el proceso de solución están más conectados de lo que tradicionalmente se había asumido.

Por su parte, Hernández (1997) parte de la base de que la escuela incide fuertemente en los algoritmos de RP y menos en el desarrollo de estrategias y en la maduración de procesos cognitivos superiores, tales como el nivel de razonamiento y la comprensión. Por lo anterior, el autor se plantea diseñar un modelo de RP que permita desarrollar habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas, además de estudiar la actitud de los alumnos y observar el proceso de toma de decisiones del profesor. El trabajo contempla un estudio en grupo (355 alumnos en total), un estudio en aula (24 alumnos) y otro de entrevistas (21 alumnos). Se concluye que la situación didáctica diseñada para la RP aritméticos basada en los SR formal-numérico y visual–geométrico es un recurso significativo para el desarrollo y análisis de habilidades cognitivas, metacognitivas y heurística de los estudiantes. El aspecto más conflictivo fue el uso del nuevo SR (visual – geométrico), ya que tiene una semántica y una sintaxis que es necesario trabajar para poder interiorizarlos. Finalmente, se menciona que el grado de uso de los dos sistemas de representación permite detectar los estilos de RP de los alumnos, así los alumnos que poseían una tendencia más visual, desarrollaron preferencia por dicho sistema.

Centrados en la RP algebraicos, tomamos como referencia el trabajo de Filloy y Rojano (1989) quienes concluyen que para corregir los errores sintácticos y las dificultades de operatoria que surgen en la RP complejos o ecuaciones, desde el inicio no se puede dejar dicha resolución al trabajo espontáneo de los estudiantes, cuya base sería el conocimiento inicial de operaciones algebraicas. Luego, para los autores, la resolución de dichos problemas consiste en "modelar", basándose en dos procesos fundamentales:

(a) *Traducción:* de objetos y operaciones que en abstracto están dotados de significado y sentido, a través de darles manifestaciones "concretas". Ese estado de las cosas a nivel concreto representa otro estado de las cosas a un nivel más abstracto. Por ejemplo, en el modelo geométrico que ellos utilizan, la igualdad de dos áreas corresponde a la igualdad de dos expresiones algebraicas. Comenzando por el conocimiento de cómo los problemas son resueltos en lo concreto, introducen operaciones que tienen un análogo en lo más abstracto y que también lleva a la resolución.

(b) *Separación:* del nuevo objeto introducido mediante el modelo de los detalles del significado apropiado a un contexto determinado.

Posteriormente, Filloy, Rojano y Solares (2004) trabajan con el sentido y significado que se genera en la representación de incógnitas en la RP de enunciado que involucran dos cantidades desconocidas. Los casos trabajados muestran las dificultades que tienen los estudiantes al comienzo del aprendizaje del álgebra y cuando utilizan igualdades con cantidades desconocidas. Dentro de las conclusiones, el estudio sugiere que trabajar con problemas y ecuaciones que involucran dos cantidades desconocidas implica necesariamente reelaborar (a) la noción de incógnita matemática, (b) la noción de igualdad algebraica y (c) la noción de representación algebraica de una incógnita. Además, algunos de los resultados muestran que la aplicación de la propiedad transitiva a diferentes (pero equivalentes) expresiones algebraicas o a la representación de una cantidad desconocida en términos de otra, no se deriva de una generalización de la transitividad de una igualdad numérica, ni de la sustitución numérica.

Por su parte, Cerdán (2008) estudia las igualdades producidas por estudiantes cuando plantean un problema, indagando la forma en que utilizan el método cartesiano cuando producen igualdades correctas. El autor concluye que no es posible considerar a los estudiantes como competentes en la traducción del enunciado de un problema a ecuación. Sin embargo, cuando los estudiantes utilizan el método cartesiano adecuadamente, producen igualdades correctas, además lo hacen de manera flexible produciendo diversidad de igualdades para un mismo problema.

Finalmente, en el paso de la aritmética al álgebra escolar, queremos destacar el trabajo de Van Ameron (2003) quien parte de identificar tres dificultades al conectar el aprendizaje aritmético con que cuentan los estudiantes y el “early algebra”. Estas dificultades son: plantear una ecuación a partir de un problema verbal, saber interpretarla, y reescribir y simplificar expresiones algebraicas. La autora estudia dichas dificultades examinando las estrategias informales que utilizan los estudiantes a partir de las cuales podrían construir métodos más formales. Su trabajo concluye afirmando que las dificultades en el aprendizaje del álgebra pueden atribuirse a las diferencias ontológicas entre aritmética y álgebra. La autora deja como inquietud para continuar el trabajo la siguiente interrogante: ¿Cómo se puede tender un puente para acortar la brecha entre la intuición de los estudiantes, el uso significativo de notaciones y la adquisición de un nivel de simbolización convencional más formal? Además se examina la utilización de la historia como una herramienta que permite un análisis más agudo del trabajo de los estudiantes.

En el resumen de los trabajos anteriores distinguimos focos de interés en la investigación relacionada con la RP, partiendo con tópicos más bien amplios y genéricos referidos a los procedimientos utilizados para la RP, ya sea por los estudiantes, aquellos favorecidos por los profesores o por los libros de texto. Posteriormente se desarrolla una tendencia que busca impulsar y analizar el aprendizaje reflexivo que se desarrolla en torno a la RP, centrándose en las resoluciones de problemas algebraicos. La conexión entre la RP aritméticos y los algebraicos, el reconocimiento de la dificultad de la transición de un área de conocimiento a la otra y, particularmente, la evolución del proceso de pensamiento aritmético al algebraico, son temas en desarrollo, siendo la utilización de diversas representaciones una de las herramientas destacadas para facilitar dicho proceso. Nuestro trabajo parte de esta inquietud y este principio y nos lleva a trabajar en la utilización de representaciones gráficas como una alternativa favorable. Continuaremos el desarrollo del estado de la cuestión revisando investigaciones relacionadas con el uso de representaciones gráficas en la RP algebraicos.

3.1.2 Utilización de representaciones gráficas

Como hemos mencionado anteriormente, uno de los principales elementos considerados en la problemática a investigar es la utilización de representaciones gráficas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, en particular del álgebra a través de la RP. En el Capítulo 2 (apartado 2.3.1) delimitamos lo que entendemos por representación a lo largo de nuestro trabajo. En particular, recordemos que hemos considerado como representaciones gráficas aquellas representaciones visuales, es decir, representaciones físicas, icónicas, geométricas o diagramáticas (Fernández, 1997a).

En torno a la utilización de representaciones se han desarrollado diversos trabajos tendentes a que los estudiantes relacionen diversos tipos de representaciones referidas a un mismo concepto, basándose en la idea de que la utilización de diversas representaciones enriquece el desarrollo conceptual (Cifarelli, 1998; Goldin, 1998; Duval, 1999a, 1999b; Godino, 2003).

Una línea de trabajo es la evaluación respecto a qué tipo de representación es más adecuada, según la tarea que se desarrolle en el aula. Por una parte, como describe Izsák (2000), es posible presentar situaciones para que sean los estudiantes quienes generen una representación, la utilicen y posteriormente la evalúen. En segundo lugar, podemos estudiar las decisiones instruccionales, que deben tomar los profesores, para que los estudiantes desarrollen la capacidad de conectar e interpretar diversos tipos de representaciones (Hines, 2003).

En matemáticas, las representaciones gráficas se han utilizado para trabajar el desarrollo de diversos conceptos y procesos propios del área. Es así como numerosos autores han trabajado la problemática de la significación matemática a través de las representaciones gráficas (Netz, 1998; Pyke, 2003; Figueras y Deulofeu, 2005), la generalización y la búsqueda de patrones (Castro, 1995; Noss, Healy y Hoyles, 1997; Castro, Rico y Romero, 1997; García Cruz, 1999; González y Ruiz, 2003).

La utilización de los ordenadores como herramienta gráfica ha sido un elemento importante a tomar en cuenta en el momento de desarrollar conceptos matemáticos algebraicos a través de representaciones gráficas ya que, en muchos casos, el objetivo docente es centrar la atención del estudiante sobre la representación gráfica, su interpretación y la relación con otro sistema de representación y no tanto sobre la elaboración de la gráfica en sí.

Un ejemplo de lo anterior es el trabajo de Villarreal (2000) que se centra en la descripción y compresión del proceso de pensamiento de los estudiantes en un entorno computacional, al realizar tareas matemáticas relacionadas con las derivadas de funciones reales. Entre las conclusiones obtenidas en este trabajo se menciona: (a) que una misma persona puede trabajar con una aproximación algebraica o una visual; (b) quien prefiere una aproximación algebraica aparentemente, puede tener dificultades o mostrarse disconforme en un entorno computacional, prefiriendo un medio que le sea más familiar como el papel y el lápiz; (c) algunos ejemplos muestran la importancia de trabajar con múltiples representaciones, y las relaciones que las unen, con el fin de conectar dominios que, de otra forma, permanecerían separados. Al conectarlos se genera una compresión matemática más amplia y completa.

En relación con la utilización de representaciones gráficas para la RP, destacamos que anteriormente Fischbein (1977) ya había realizando una comparación entre soluciones de tipo aritmético y de tipo pictórico, sosteniendo que las representaciones icónicas no tienen que ser necesariamente las primeras ni las más naturales, y que los modelos icónicos pueden ser la representación simbólica de cierta estructura conceptual.

Considerando la utilización de representaciones icónicas dentro de la enseñanza de la RP, una línea de investigación que se ha desarrollado con fuerza es la que se centra en los efectos que puede tener el hecho de adjuntar una representación gráfica en la resolución de un problema.

A ese respecto, Cobo (1995) se propuso estudiar los posibles efectos que tiene el hecho de incluir gráficos en los enunciados de problemas verbales que combinan estructuras semánticas de cambio y comparación. Investigó, específicamente, si la presentación de problemas verbales con gráficos mejora de manera significativa el rendimiento de los alumnos, para lo cual trabajó con una muestra de 100 alumnos con una media de 15 años. Se elaboraron 2 test, uno en el que se presentan los problemas verbales sin gráficos y otro en el que se adjuntan gráficos. De este trabajo, Cobo concluye que la inclusión de gráficos en los enunciados de problemas verbales que combinan estructuras semánticas de cambio y de comparación, mejora significativamente la traducción al lenguaje algebraico de las operaciones debido a la acción estática de comparación. Además, observa que la presentación de gráficos tiene mayor incidencia sobre los alumnos considerados como de "habilidad baja" en matemáticas.

Cobo plantea, como continuación a su trabajo, las siguientes interrogantes: ¿Influirán, realmente, en la traducción algebraica los procesos instructivos que pongan énfasis en el desarrollo de la capacidad de visualización? ¿Qué tipos de esquemas gráficos, dibujos o diagramas se tendrán que fomentar en un proceso instructivo para obtener un rendimiento mayor?

Cobo, finalmente, destaca que los resultados de su investigación se contradicen con los de Markovits (1986), quien plantea que añadir gráficos a problemas verbales de razonamiento condicional influye negativamente en su resolución ya que, el hecho de hacer los problemas más concretos, llevando a los estudiantes a un ejemplo específico que conserva la estructura del problema básico, hace que la situación se vuelva más compleja para los sujetos que razonan correctamente.

También sobre la interacción entre representación visual y RP, el trabajo de Pantziara, Gagatsis y Pitta-Pantazi (2004) se centra en la exploración del rol que juegan los diagramas (diagramas de árbol, tabla tipo matrices y redes) en un proceso específico de RP. Los autores emplearon dos test: en el primero se permite a los alumnos que resuelvan los problemas de la forma que quieran y en el segundo se les pide que resuelvan los problemas utilizando, específicamente, el diagrama que se presenta. La conclusión es que no hubo diferencia estadísticamente significativa, entre los resultados del primer y del segundo test, lo que sugiere que la presencia de diagramas en el segundo test no aumenta la habilidad de los estudiantes en la RP no rutinarios. Sin embargo, se observa que la presencia de los diagramas tuvo un rol determinante en la respuesta de cada problema. Mientras las respuestas de los alumnos al primer test dependían sólo de su habilidad matemática, en el segundo test los estudiantes también tenían que interpretar y utilizar el diagrama eficientemente, observándose que no todos los alumnos son capaces de ello. Además se subraya que la utilización de diagramas es un componente esencial en el desarrollo matemático de los estudiantes. Para utilizar eficientemente los diagramas, los estudiantes deben desarrollar la habilidad de traducir problemas verbales a representaciones diagramáticas, así como interpretar un diagrama en términos de un problema verbal dado. Sin embargo, lo que sugiere claramente el estudio es que hay que desarrollar dicha habilidad y no es inherente a todos los estudiantes. La utilización de diagramas, por parte de los alumnos, sólo se puede lograr a través de un cuidadoso diseño instruccional, lo que puede convertir a los diagramas en una herramienta efectiva para el pensamiento.

En este sentido, Yerushalmy (2006) trabaja con estudiantes que muestran dificultades en álgebra, estudiando cómo resuelven problemas mediante su aproximación a funciones, pero utilizando fundamentalmente la gráfica de dichas funciones y evaluando qué tipo de cambios deberían realizar sobre la gráfica de la función. En este caso, la idea central del trabajo con funciones es que se deberían utilizar varios tipos de SR: lenguaje natural, numérico, gráfico y algebraico. Se plantea que la RP contextualizados requiere un cambio constante entre representaciones, argumentando que cada representación otorga una o más miradas de la función y, por lo tanto, del problema.

Considerando ahora el aprendizaje del lenguaje algebraico, vamos a indicar algunos trabajos que postulan las ventajas de dicho aprendizaje apoyado en la utilización de otros SR y no, exclusivamente, utilizando el SR algebraico o simbólico.

Destacamos el trabajo de Palarea y Socas (1995) en el que estudian cómo los estudiantes resuelven problemas con diferentes representaciones, con el fin de determinar si dichos problemas son aritméticos o algebraicos. Parten de la base de que, a veces, la falta de una buena representación del problema constituye una dificultad central para muchos estudiantes poco competentes en álgebra. Estos autores estudian la utilización de tres tipos de representaciones: verbal-sintáctica, formal (algébraica) y físico-visual (física, icónica, geométrica y diagramática). Un primer paso en la RP es elaborar una representación del problema, lo que tiene un carácter marcadamente semántico. Sin embargo, en los problemas verbales algebraicos esta fase se ha entendido como el planteamiento de una ecuación cuyo contenido semántico es escaso, por la propia dificultad de los símbolos formales, olvidándose del SR físico-visual como un SR útil en la elaboración de representaciones del problema. Al respecto, indican que el SR de imágenes (físico–visual) aporta elementos que ayudan en el planteamiento del problema permitiendo, en muchos casos, una representación y solución del mismo. Abogan porque el SR físico-visual tenga mayor presencia en el sistema educativo, organizado y sistematizado como subsistema de representación local, que permita enseñarlo con carácter autónomo, es decir, como autosuficiente.

Thomas y Thomas (1999) estudian el uso de representaciones gráficas, desde el punto de vista de la enseñanza, y las decisiones que debe tomar un profesor cuando diseña una situación de aprendizaje. En este caso se plantean utilizar una aproximación gráfica para ayudar a los estudiantes a implementar estrategias de pensamiento a través de la gráfica de ecuaciones lineales.

Swan (2000), en esta misma línea, sugiere aproximaciones alternativas para la enseñanza del álgebra, que permitan a los estudiantes construir y reflexionar sobre el significado de expresiones y ecuaciones. El trabajo realizado se centra en representar expresiones algebraicas, dándoles significado a través del lenguaje verbal, las tablas y representaciones gráficas de áreas, con el objetivo de "hacer las representaciones significativas", más que completar rápidamente un ejercicio. Los estudiantes traducen en muchas direcciones: lenguaje verbal → ecuaciones; ecuaciones → lenguaje verbal; ecuaciones → representación de área; etc. También se trabaja la evaluación de expresiones algebraicas y su traducción a ecuaciones. Dentro de las conclusiones se resalta como dificultad que muchas veces los estudiantes tienen por objetivo resolver actividades sin reflexionar sobre cómo las resuelven. El autor, además, analiza el tipo de trabajo que se incentiva en el aula, resaltando que, para comprender lo que se hace, es indispensable escuchar, concentrarse, interpretar y ser capaz de explicar las ideas propias y de esta manera, a partir de la discusión, es posible darle sentido al trabajo algebraico.

Por otra parte, Carter, Ferrucci y Yeap (2002) describen cómo en el currículo de Singapur se da particular importancia al uso de modelos pictóricos para promover el desarrollo del pensamiento algebraico de forma que, cuando se aplica un modelo para aproximarse a la resolución de situaciones problemas de forma concreta, los estudiantes pueden resolverlas sin necesidad de utilizar la manipulación algebraica formal. Esto es posible porque los estudiantes han adquirido familiaridad con este tipo de modelos desde los primeros años de la formación primaria, lo que permite que la transición entre el uso de representaciones pictóricas y el de variables alfabéticas (letras) para representar cantidades desconocidas, sea a menudo más fácil de comprender. Además, se recalca que la aproximación mediante modelos pictóricos provee a los profesores de una herramienta innovadora y, a los estudiantes, de una vía de exploración matemática significativa y de éxito para la RP.

Otro trabajo desarrollado en esta área es el de Mousoulides y Gagatsis (2004), quienes trabajaron con futuros profesores de segundo año de universidad, con el fin de estudiar las aproximaciones algebraicas y geométricas en la resolución de tareas relacionadas con funciones, y la conexión de estas aproximaciones con la RP geométricos complejos. De este estudio, los autores concluyen que la mayoría del trabajo que los profesores en formación realizan con funciones se restringe al dominio de las aproximaciones algebraicas y, por tanto, muy pocos desarrollan la habilidad de seleccionar y utilizar de manera flexible las representaciones gráficas. Además, resaltan que los estudiantes para profesor presentan dificultades para interpretar la información que suministra un gráfico y, a modo de hipótesis, señalan que algunos de los factores que pueden influir en ello están ligados al énfasis instruccional y curricular en el uso de representaciones algebraicas y su manipulación, teniendo esto como consecuencia que las representaciones geométricas se vean desconectadas de sus correspondientes representaciones algebraicas, por lo que los alumnos fracasan en el intento de realizar dichas conexiones y, por lo tanto, en su utilización para mejorar sus resultados.

Como consecuencia de este recorrido a través de trabajos realizados en torno al uso de diversas representaciones, hemos observado que este foco de atención tiene una orientación principalmente cognitiva por cuanto se persigue un aprendizaje significativo y mediante procesos reflexivos. Se hace hincapié en la ventaja que puede tener el uso de varios sistemas de representación, incluido el SR gráfico, para trabajar los conceptos matemáticos, específicamente algebraicos y en la RP. Se plantea, por lo tanto, la necesidad de trabajar la aplicación del SR gráfico de forma explícita ya que su utilización no es, necesariamente, intuitiva.

Por otra parte, no se deja de lado la problemática de enseñanza en el aula y cómo este tipo de innovaciones o experimentaciones influyen en la participación reflexiva de profesores y estudiantes.

3.1.3 Utilización de la línea recta

Como mostramos en el apartado anterior, se ha desarrollado una línea de investigación relacionada con el uso de representaciones gráficas como modelos visuales para el aprendizaje de la matemática y, particularmente, para la RP. Llevando la búsqueda a un nivel de especificidad mayor, podemos destacar las investigaciones que, dentro del SR gráfico, se han centrado en el uso de representaciones geométricas.

Un ejemplo es el trabajo realizado por Gagatsis y Patronis (1990), quienes destacan que el pensamiento reflexivo conduciría desde las intuiciones y pensamientos primarios iniciales a la plena conciencia de un tema matemático. Para conectar ambos extremos proponen el uso de modelos geométricos que pueden ser utilizados en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Ahora bien, proponen que para que un modelo pueda ser convenientemente utilizado en clase de matemáticas, debería ser empleado por el estudiante, de forma implícita, como modelo de acción.

A éste respecto, Pérez de Díaz (1997) presenta una propuesta pedagógica que tiene por referente el álgebra geométrica griega, basándose en establecer nexos entre la geometría (concretamente los conceptos de área y volumen) y el álgebra, mediante modelos que permiten aproximarse a la exploración de conceptos, propiedades, procedimientos y algoritmos algebraicos. Para lo cuál, el modelo que se diseña pretende dar significación geométrica a expresiones algebraicas de grado menor o igual a tres y, a través de ella, trabajar la generalización a partir de la observación de regularidades.

Dentro de los modelos geométricos empleados para la representación de expresiones algebraicas destacamos la utilización de algunos modelos específicos, como por ejemplo, el modelo de áreas y el modelo de volumen, junto con el modelo lineal. Nuestro interés versa sobre la utilización de la línea recta como modelo visual de representación.

En el trabajo desarrollado por Gagatsis y Elia (2004), se investiga acerca del rol de 4 tipos de representaciones en la RP: representación verbal, figura alusiva al texto sin información relevante, figura o dibujo con información relevante y recta numérica. El trabajo se propone dar información respecto del efecto de adjuntar una representación u otra en el procedimiento de RP aditivos de un paso, para lo cual examinan el rendimiento de 1447 alumnos, cuyas edades fluctuaban entre los 6,5 y 8,6 años. Dentro de las conclusiones establecen que: (a) la habilidad de los alumnos para resolver problemas aditivos de un paso está altamente asociada con la habilidad para resolver de manera verbal problemas que contienen figuras o dibujos que no entregan información relevante y con la presencia de la recta numérica como parte del texto, (b) los alumnos pasan por alto la presencia de una recta o figura y centran la atención en el texto del problema (c) además, tienen menos flexibilidad con los problemas que involucran figuras informativas. Esto indica que las demandas cognitivas de las figuras informativas en el contexto de los problemas matemáticos es diferente de las de otras formas de representación y, por tanto, cada SR tiene sus propias regularidades. Específicamente, los resultados relacionados con las figuras informativas y la recta numérica sugieren que ambos tipos de representación necesitan especial atención en relación con la RP a lo largo de la enseñanza.

El estudio anterior remarca la necesidad de prestar especial atención a nivel instruccional a modelos visuales como la línea recta, ya que dicho tipo de modelos está presente a lo largo de la formación matemática de los estudiantes y es utilizado en múltiples situaciones y con diversos objetivos.

En este sentido, Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi (2004) desarrollan un trabajo en que se estudia la utilización de la recta numérica como representación de los números decimales. El objetivo era investigar la comprensión de la adición de números decimales en estudiantes de 12 años, explorar cómo comprenden y utilizan las representaciones de números decimales (si lo hacen como conceptos diferentes o como diferentes expresiones de un mismo concepto) y, finalmente, qué representaciones de los números decimales son más complejas. Aplicaron tres pruebas, la primera con ítems referidos a reconocimiento y representación de conceptos relacionados con números decimales utilizando varios modelos de representación: segmentos de recta, recta numérica, superficie rectangular. La segunda prueba contiene tareas relativas a la adición de números decimales, algunas exclusivamente en lenguaje simbólico y otras que requieren la traducción del lenguaje simbólico a la recta numérica y viceversa. Y la tercera prueba estaba compuesta por cuatro problemas de enunciado que involucran números decimales. Entre las conclusiones que obtienen, los autores destacan las siguientes:

(a) El bajo porcentaje de aciertos en los ítems de "reconocimiento" y en los de "traducción" muestran que las representaciones de los números decimales no están lo suficientemente desarrolladas.

(b) Los estudiantes presentan dificultades en los dos tipos de tareas de “traducción” (de la recta numérica a las expresiones simbólicas y viceversa), ya que la traducción desde la recta numérica a la expresión simbólica parece ser más fácil que en sentido contario.

(c) Los estudiantes se desempeñan bien en las tareas de representación, pero encuentran dificultades en las tareas de reconocimiento y de adición.

Además de los resultados obtenidos en el trabajo empírico, los autores estudian de forma teórica el papel de la recta numérica como modelo de representación. Observan que existe desacuerdo entre los investigadores en cuanto al rol de la recta numérica, ya que no es una representación común o estándar, sino que es considerada como un modelo geométrico. En efecto, la línea recta en la geometría euclidiana puede servir como modelo geométrico para la adición, sustracción, multiplicación y división de números racionales, como también para la construcción de irracionales (como hemos visto en el apartado 2.5.1). En este caso, las operaciones con números reales pueden ser representadas como operaciones sobre segmentos de recta. Al mismo tiempo, la recta numérica graduada corresponde a un tipo de representación mixta, ya que sus funciones, como nuevo modelo geométrico comprensivo con números racionales, no sólo corresponde a segmentos orientados que se pueden operar entre ellos, sino también se puede considerar como un conjunto de distintos puntos sobre la recta. Es así como la escala puede ser usada en un sentido de aritmetización en donde los puntos en la recta pueden ser numerados de manera que la diferencia entre números mida la distancia entre los puntos correspondientes. En este sentido, cada operación geométrica, como la adición de segmentos, puede traducirse en una operación aritmética y llevarse a un algoritmo.

En consecuencia, diferenciaremos dos posibles usos de la línea recta:

(a) Utilización de la *recta numérica.* Cuando se emplea la Recta graduada, en que cada punto de la recta se asocia a un número real.

(b) Utilización de *segmentos de recta*. Cuando se usan Segmentos de recta para representar cantidades de magnitud, conocidas o desconocidas. Al representar magnitudes encontramos que es posible que se haga mediante segmentos orientados (vectores) o no.

En cuanto al primer uso destacamos el trabajo de Bruno y Cabrera (2006) en el que se desarrolla un análisis de 10 libros de texto de tres editoriales correspondiente a todos los niveles desde 1° de Educación Primaria a 4° de Educación Secundaria

Obligatoria. El objetivo era estudiar en qué sistemas numéricos y con qué frecuencia utilizan los libros la recta numérica, determinar qué aspectos numéricos se desean representar al utilizarla y con qué continuidad y, finalmente, distinguir cómo son las representaciones utilizadas en los libros en relación a conceptos, operaciones y orden. En dicho trabajo las autoras concluyen que la mayoría de las representaciones que utilizan la recta numérica se producen en el momento de introducir un nuevo sistema numérico y, en menor medida, se utiliza la recta como modelo para representar las operaciones básicas y el orden de los números. Además encuentran diferencias en la frecuencia con la que se usa la recta según los tipos de números, en especial, en el momento de introducir un nuevo sistema numérico, lo que viene a significar que las editoriales no mantienen una coherencia a lo largo de la escolaridad.

La recta numérica también se presta a realizar y representar operaciones. Según la investigación (Bruno y Cabrera 2006) observamos que los libros promueven que los estudiantes aprendan a representar adiciones en la recta numérica, sin embargo, se representan con muy poca frecuencia las sustracciones y multiplicaciones y nunca divisiones lo que, desde un punto de vista didáctico, podría favorecer la falsa idea de que la recta es una representación que no es válida para todas las operaciones. Finalmente, las autoras destacan el hecho de que los números se representan principalmente como puntos sobre la recta numérica (denotando posición) y muy poco utilizando flechas (denotando magnitud), aunque las segundas no son evidentes para los estudiantes. Y es que en estudios previos, Bruno y Cabrera (2005), observaron que la utilización de la recta numérica requiere que el alumno esté familiarizado con ambos sentidos, ya que la eficacia de la recta, como un modelo de representación para las operaciones y el orden, depende de la familiaridad que se tenga del uso de ambas manifestaciones.

Específicamente referido a la utilización de segmentos de recta destacamos el trabajo de Dickson y Eade (2004) quienes, en la problemática que supone el paso de resolución de ecuaciones con la incógnita en un solo lado de la igualdad a la resolución de ecuaciones con incógnita en ambos lados, proponen utilizar la línea recta. Los autores quieren realzar que no están utilizando un “nuevo método” para resolver ecuaciones, ni una nueva forma de representación, sino que explotan una que los estudiantes ya conocen y con la que se sienten cómodos, con el fin de apoyar el desarrollo de la comprensión de ecuaciones lineales. Para llevar el trabajo al aula se realiza una secuencia didáctica en que se representan operaciones en la recta numérica para posteriormente poder representar cantidades desconocidas utilizando segmentos. La secuencia consiste en: (1) representar sustracciones en la recta numérica mediante saltos considerando el tamaño de los números representados, (2) representar ecuaciones simples (con incógnita en un solo lado de la igualdad) y trabajar sobre el concepto de incógnita, (3) representar ecuaciones con incógnitas en ambos lados de la igualdad. Observaron en la experiencia, que uno de los obstáculos que se presentó estaba ligado al tamaño de los saltos sobre la recta numérica una vez representada la cantidad desconocida, es decir que al representar la resta de una cantidad conocida al segmento que represente la cantidad desconocida "falte segmento", frente a lo cuál los autores plantean que la discusión que genera dicho obstáculo, además de ayudar a "salvar" la situación, permite una instancia de reflexión en torno a la representación.

De entre los resultados y limitaciones que platean Dickson y Eade en el uso de la recta numérica en la resolución de problemas algebraicos, destacamos los siguientes: (a) en situaciones de evaluación externa se observa que los alumnos se "apoyan" en la utilización de la línea recta para la resolución de ecuaciones, cosa que no sucede con otros modelos, como el de balanza por ejemplo; (b) la utilización de la línea recta parece permitir un paso natural para trabajar la resolución de diferentes tipos de ecuaciones; (c) la línea recta permite una buena inserción en las propiedades de las igualdades y, a partir de ello, se pueden crear valiosas instancias para involucrar a los alumnos en la discusión de éstas; (d) una fortaleza de esta representación de las ecuaciones es que da acceso a posibles estrategias de solución y medios para decidir cuál de ellas es viable; (e) utilizando la línea recta no se pueden representar todas la ecuaciones con éxito, ni se pretende que así sea, ya que más adelante los alumnos necesitan resolver ecuaciones con números negativos como solución, pero se espera que con el uso de la recta hayan desarrollado estrategias para trabajar con todo tipo de ecuaciones simples.

Finalmente los autores plantean que algunos alumnos más aventajados desarrollaron estrategias efectivas para resolver un rango más amplio de ecuaciones, para lo que formularon procedimientos más abstractos que permitían resolver problemas de mayor nivel. Al mismo tiempo, destacan que una característica importante de la secuencia didáctica en todas las aulas fue que las actividades propuestas fueron accesibles para todos los alumnos desde el inicio, lo que podría limitar el impacto del "corte didáctico", entre la resolución de ecuaciones con incógnita en un miembro de la igualdad o en lo dos.

Es evidente que la línea recta como representación ha sido y es muy utilizada en la enseñanza de diversos conceptos y procedimientos matemáticos. En cuanto a la enseñanza de procedimientos algebraicos, su utilización para representarlos es novedosa, ya que son procedimientos generalmente supeditados al uso del lenguaje simbólico, como es el caso de la resolución de ecuaciones. Además, es una representación que permite, no sólo trabajar el procedimiento, sino que también introducir ciertos conceptos, como el de incógnita o cantidad desconocida.

Otro aspecto a destacar dentro de este apartado es que una ventaja de la elección de la línea recta como representación gráfica a utilizar en la enseñanza del álgebra, es que ésta resulta familiar para los alumnos, ya que su empleo como representación surge en los primeros cursos de educación primaria y se mantiene a lo largo de la escolaridad obligatoria.

3.1.4 Antecedentes en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Como se ha mencionado anteriormente, en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, existen dos trabajos de tesis que son antecedentes directos del nuestro. El primero de ellos es el trabajo de tesis doctoral de Francisco Fernández (1997a), y el segundo es el de Elisa Espinosa (2004).

Fernández (1997a), en su tesis doctoral, trabajó en la clasificación de resolutores de problemas de álgebra elemental de enunciado, comparando dos grupos de estudiantes: uno, formado por estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria y el segundo, por estudiantes de enseñanza post-obligatoria que hacía tiempo que terminaron la instrucción algebraica escolar. El objetivo era determinar si hay elementos que se mantienen en el tiempo, relacionados con la formas de resolver los problemas. Para ello, el autor parte de que la comprensión de las relaciones implicadas en un problema algebraico de enunciado verbal requiere de un SR que las haga explícitas, constatando la existencia de cinco SR: *ensayo – error, parte – todo, gráfico, gráfico – simbólico* y *simbólico.*

La propuesta de Fernández diferencia los SR comenzando por aquellos predominantemente numéricos, como son los sistemas de ensayo–error y parte–todo, hasta llegar a un SR formal, como el sistema simbólico, pasando por sistemas intermedios como el gráfico y el gráfico-simbólico, como hemos detallado en el apartado 2.3.2.

Fernández (1997a) considera que la elección de un SR más cercano al campo de la aritmética o del álgebra para la resolución de un problema determinado depende, en gran medida, del resolutor y no del problema en sí.

Espinosa (2004), en su tesis doctoral, confirma las tipologías de resolutores propuestas por Fernández y, además, trabaja con las concepciones de profesores de primaria en formación cuando evalúan la resolución de problemas de álgebra elemental, que han sido resueltos con diferentes SR. Observa que los profesores en formación valoran mejor aquellas resoluciones realizadas con el SR gráfico-simbólico y, en segundo lugar, las que emplean el SR simbólico o el gráfico, quedando como el sistema menos valorado el parte-todo. Además, los sujetos de la muestra declaran que el uso de gráficos, dibujos o diagramas ayuda a abordar la RP y a encontrar la solución correcta de un problema.

Como continuación de los trabajos anteriores y, como estudio previo a esta tesis doctoral, realizamos un trabajo exploratorio Martínez (2006) con el fin de determinar si era posible caracterizar un método de resolución que empleara el SR gráfico, que permitiera resolver los problemas de álgebra elemental presentes en los libros de texto de matemática de los primeros niveles de ESO, para después proponer y caracterizar tipologías de problemas a partir de su resolución utilizando el método propuesto.

Como resultado, obtuvimos la definición y caracterización de un método gráfico para la resolución de problemas, al que hemos llamado *Método Geométrico Lineal* (MGL) que permitió resolver una muestra de problemas seleccionados y, en base a dicha resolución, fue posible proponer una clasificación de los problemas trabajados.

Nos hemos propuesto continuar el trabajo exploratorio, planteando la utilización del MGL como una herramienta para facilitar la enseñanza de la RP, ya que a partir de la revisión anterior observamos que el área de estudio, en el que está contextualizado el presente trabajo, es de gran riqueza. En la literatura especializada, ya descrita, queda de manifiesto que no que se pueda trabajar de forma genérica la utilización de las representaciones gráficas en la RP ya que, entre otras cosas, las ventajas de utilizar este tipo de representaciones dependen del tipo de problemas que se aborda y del propio tipo de representación utilizado.

Es así como el uso de representaciones gráficas en la RP sigue siendo un tema que presenta grandes interrogantes, sobre las que es necesario profundizar con el fin de desarrollar propuestas para clase que puedan ser utilizadas de manera efectiva en la enseñanza de las matemáticas a nivel escolar ya que, hasta ahora, ha quedado de manifiesto que una de las deficiencias en la utilización de ciertos tipos de representaciones se debe, en gran medida, a un escaso empleo o, en el mejor de los casos, al empleo fraccionado de dichas representaciones a nivel instruccional.

La revisión bibliográfica realizada en torno a los núcleos de investigación que desarrollamos en el estado de la cuestión, nos permite resaltar la importancia de la RP como elemento para dar significado al trabajo matemático y en particular, como una herramienta que posibilita conectar aritmética y álgebra en el contexto escolar. Un segundo elemento que evidenciamos es la importancia de emplear diversos SR, incluido el SR gráfico, como una forma de enriquecer la construcción de conceptos matemáticos y la RP. Dentro de las representaciones gráficas destaca la utilización de la línea recta para la enseñanza de diversos conceptos y procedimientos, sobre todo aritméticos, razón por la cuál el utilizarla para la enseñanza de RP algebraicos tiene como ventaja el constituir una representación familiar para el alumnado, pero aún así se destaca la necesidad de ejercitar su manipulación, sobre todo si se utilizará en un contexto no aritmético.

Todos estos elementos y los trabajos en torno a la resolución de problemas algebraicos realizados en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, nos han llevado a plantearnos un trabajo de investigación basado en las preguntas de investigación y objetivos que definimos a continuación.

3.2 Problema de investigación

3.2.1 Preguntas de investigación

La RP de álgebra elemental se considera como un vehículo adecuado para facilitar la introducción al álgebra de una forma significativa. La comprensión del texto de un problema algebraico verbal y su traducción a expresiones simbólicas, más o menos intuitivas, más o menos complejas, más o menos abstractas, puede ser un indicador de la presencia de pensamiento algebraico, diferente del aritmético, en donde se relacionan y operan cantidades desconocidas como si fueran conocidas.

La utilización de Sistemas de Representación adecuados puede potenciar la traducción del lenguaje verbal al lenguaje simbólico al facilitar la comprensión de las relaciones implicadas en el problema. El MGL, como un método fuertemente intuitivo dentro del SR gráfico, pretende ser una herramienta eficaz para el desarrollo de significado a la hora de establecer las relaciones del problema y, por lo tanto, mejorar la RP y facilitar la introducción y utilización de SR simbólicos más abstractos.

Esto nos lleva a plantear una serie de preguntas de investigación:

Pregunta 1: ¿Se puede establecer una metodología eficaz para introducir en el aula de matemáticas el MGL como estrategia para resolver problemas de álgebra elemental en los primeros niveles de ESO con el fin de facilitar el paso de la aritmética al álgebra?

Pregunta 2: ¿Mejorará la comprensión y, en consecuencia, el rendimiento (éxito) en la resolución de los problemas de álgebra elemental cuando se utilice el MGL?

Pregunta 3: Considerando que actualmente se emplean escasamente las representaciones gráficas para resolver problemas de álgebra elemental, entonces ¿qué nivel de aceptación o rechazo puede haber por parte de los estudiantes en la utilización del MGL?

Pregunta 4: Teniendo en cuenta que en la resolución de un problema existen tres fases, planteamiento, ejecución y desempeño final, ¿en qué fase se utiliza más el MGL y en cuál de ellas su empleo presenta más dificultades a la hora de resolver problemas de álgebra elemental?

Pregunta 5: ¿Qué tipo de dificultades se presentan cuando se utiliza el MGL en la resolución de los problemas de álgebra elemental, en los primeros niveles de la ESO?

Pregunta 6: ¿Qué características tienen los problemas de álgebra elemental que presentan mayor dificultad para los estudiantes cuando en su resolución se utiliza el MGL?

3.2.2 Objetivos generales

La finalidad de este trabajo es estudiar la pertinencia de emplear una metodología de resolución de problemas de álgebra elemental en 1º y 2º de ESO, basada en la utilización de segmentos de recta, lo que hemos denominado MGL, para representar las cantidades conocidas y desconocidas implicadas en los textos de los problemas verbales indicados y operar sobre dichos segmentos.

Las preguntas de investigación anteriormente planteadas, las vamos a traducir en los siguientes objetivos generales de investigación:

Objetivo 1: Diseñar y aplicar una intervención para introducir el MGL en el aula de matemáticas como una forma de representar gráficamente cantidades, conocidas o desconocidas, y aplicar el método (MGL) para resolver problemas de álgebra elemental. (Pregunta 1)

Objetivo 2: Describir la utilización del MGL en la resolución de problemas de álgebra elemental en una situación de aprendizaje con estudiantes de 1º y 2º ESO (iniciación al álgebra) a partir de la administración de un instrumento elaborado para este fin. (Preguntas 2, 3 y 4)

Objetivo 3: Determinar y caracterizar tipos de problemas de álgebra elemental según la forma en que se abordan, cuando se utiliza el MGL para resolverlos. (Preguntas 5 y 6)

3.2.3 Objetivos específicos

Con el fin de lograr los objetivos generales planteados anteriormente, definimos los siguientes objetivos específicos:

Para el objetivo 1:

1.1 Analizar los problemas de álgebra elemental que recogen los libros de texto de matemáticas de 1º y 2º de ESO.

1.2 Realizar un análisis de cómo puede aplicarse el MGL a la resolución de problemas de álgebra elemental y obtener una categorización de los problemas seleccionados, con el fin de diseñar una intervención en el aula de matemáticas para introducir este modelo.

1.3 Elaborar una propuesta de instrucción para llevarla al aula de matemáticas en sesiones de trabajo presencial, y consensuarla con el grupo de profesores y profesoras de 1º y 2º de ESO que van a aplicarla.

1.4 Validar la propuesta de instrucción con un grupo de estudiantes a través de una aplicación centrada en la lectura comprensiva del material diseñado (fichas de trabajo).

1.5 Aplicar el instrumento diseñado para la intervención en el aula (fichas de trabajo) a estudiantes de 1º y 2º de ESO.

Para el objetivo 2:

2.1 Analizar y describir los procedimientos empleados correctamente en las fases de planteamiento, ejecución y desempeño final, en la resolución de los problemas propuestos, independientemente del método utilizado.

2.2 Analizar y describir la forma en que fue utilizado el MGL, ya sea de forma correcta o incorrecta, para resolver los problemas planteados, diferenciando según la fase de planteamiento o ejecución en que se use.

2.3 Analizar y describir la corrección de los procedimientos empleados por los estudiantes, utilizando el MGL para resolver los problemas planteados, diferenciando las fases de planteamiento y ejecución.

Para el objetivo 3:

3.1 Determinar si existen regularidades que permiten obtener tipos de problemas, diferenciados según la forma en que los estudiantes los resuelven utilizando el MGL en la fase de planteamiento.

3.2 Caracterizar los distintos tipos de problemas que se obtengan a partir de las regularidades que se observen en la fase de planteamiento.

3.3 Determinar si existen regularidades que permiten obtener tipos de problemas, diferenciados según la forma en que los estudiantes los resuelven utilizando el MGL en la fase de ejecución.

3.4 Caracterizar los distintos tipos de problemas que se obtengan a partir de las regularidades que se observan en la fase de ejecución.

3.5 Determinar si existen regularidades que permiten obtener tipos de problemas, diferenciados según la corrección de la fase de desempeño final.

3.6 Caracterizar los distintos tipos de problemas que se obtengan a partir de las regularidades que se observan en la fase desempeño final.

3.3 Hipótesis de investigación

Aun cuando el estudio de la RP y los SR en álgebra han sido objeto, en numerosas ocasiones, de investigación dentro de la Didáctica de la Matemática, el trabajo de investigación que estamos desarrollando referente a la RP de álgebra elemental mediante la utilización de un método gráfico concreto, como es el MGL, es novedoso, por lo que nuestro objetivo es poner a prueba un método que venimos caracterizando (Martínez, 2006) y lograr describir problemas que se utilizan frecuentemente en aula a partir de la utilización del MGL en una situación de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, en concordancia con el objetivo de esta memoria, el trabajo lo definimos como un estudio de tipo exploratorio – descriptivo.

En el caso de las investigaciones descriptivas, como plantean algunos autores, no siempre es necesaria la formulación de hipótesis y, en caso de existir, tienen un carácter general (Fox, 1987; Hernández Sampieri, Fernández y Baptista, 2003).

Un ejemplo de la utilización de hipótesis descriptivas es el trabajo de tesis doctoral de Olivo (2008), leído en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en que se aclara que las hipótesis formuladas *"deben entenderse como conjeturas o expectativas de lo que se espera encontrar"* (Olivo, 2008, p. 24). En este trabajo, el autor utiliza las conjeturas como hipótesis no considerando a éstas en el sentido estadístico del término (Olivo, 2008). En nuestro caso, de igual forma, las hipótesis que formulamos a continuación se deben entender como conjeturas o hipótesis descriptivas de lo que esperamos encontrar en nuestro estudio.

Hipótesis 1: Se pueden categorizar los problemas de álgebra elemental que se estudian en 1º y 2º de ESO, según su resolución a través de la utilización del MGL. Esta clasificación permite diseñar una intervención en aula que ayuda a dar significación y mejora la compresión del proceso de resolución de los problemas.

Hipótesis 2: El MGL es una herramienta válida para resolver problemas de álgebra elemental en una situación de introducción al álgebra en el aula de matemáticas.

Hipótesis 3: Es posible diseñar una intervención en el aula de matemáticas que permita introducir la utilización significativa del MGL, de tal forma que los estudiantes puedan resolver problemas algebraicos elementales de forma gráfica.

Hipótesis 4: Los estudiantes aceptan la utilización de un método gráfico, como el MGL, como forma de representación de cantidades y como herramienta de resolución de problemas de álgebra elemental.

Hipótesis 5: Existen diferencias notables en el grado de utilización del MGL según sea en la fase de planteamiento, o en la fase de ejecución de la resolución de los problemas de álgebra elemental.

Hipótesis 6: Se pueden caracterizar los problemas de álgebra elemental según la dificultad que presentan en cada fase de resolución, cuando se hace a través de un método gráfico como el MGL

CAPÍTULO 4
METODOLOGÍA

A lo largo de éste capítulo se hará una descripción de la metodología de investigación utilizada en el trabajo, incluyendo detalles respecto de la construcción del material utilizado en las aulas, los sujetos participantes y la aplicación propiamente dicha.

4.1 Tipo de estudio

Dependiendo del alcance que se pretenda con el trabajo, podemos considerar que un estudio de estas características, como el que estamos llevando a cabo, puede ser de tipo exploratorio, descriptivo, correlacional o explicativo (Hernández Sampieri y otros, 2003). Si concebimos dicha clasificación como un continuo y no como categorías excluyentes unas de otras, situamos nuestro trabajo en la tipificación "exploratorio/descriptivo".

Los estudios exploratorios tienen por objetivo examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual hay muchas dudas o no se ha abordado antes. Por su parte, los estudios descriptivos observan un objeto (individuos, grupos, instituciones, métodos o materiales) con el fin de describir, comparar, contrastar, clasificar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación (Hernández Sampieri y otros, 2003).

En nuestro trabajo de investigación están presentes ambos elementos, aspecto que queda al descubierto en los objetivos que se han trazado como directrices de la investigación, ya que:

- Se pretende hacer una primera aproximación, en cuanto a concebir un diseño para introducir en el aula, y poner en funcionamiento, el MGL como una alternativa para la resolución de problemas algebraicos en los primeros niveles de la educación secundaria obligatoria, lo que responde a la faceta exploratoria del trabajo.
- Por otra parte, consideramos que es un estudio descriptivo, en tanto se pretende explicar cómo funciona el MGL, como método de resolución de problemas, en

el aula, al ser utilizado con un grupo de estudiantes para resolver una selección específica de problemas.

Como hemos expuesto en el estado de la cuestión (apartado 3.1), el estudio de resolución de problemas algebraicos, y el referente al uso de diversos tipos de representaciones, han sido de gran importancia dentro del área de la Didáctica de la Matemática. Sin embargo, el interés por la utilización de un método gráfico para resolver problemas, como es el MGL, es un elemento novedoso, es decir, pasamos de abordar un tema inicialmente amplio y genérico a pretender caracterizar una experiencia puntual que constituya un aporte al área.

Dentro de los estudios descriptivos Colás y Buendía (1994) proponen cuatro tipos básicos de métodos descriptivos: estudios tipo encuestas, estudios analíticos, estudios observacionales y estudios sobre el desarrollo. Dado que las autoras describen los estudios de encuesta como estudios orientados a la descripción de una situación dada, y que además se desarrollan considerando las etapas descritas en la Figura 4.1, definimos nuestro estudio dentro de ésta tipología.

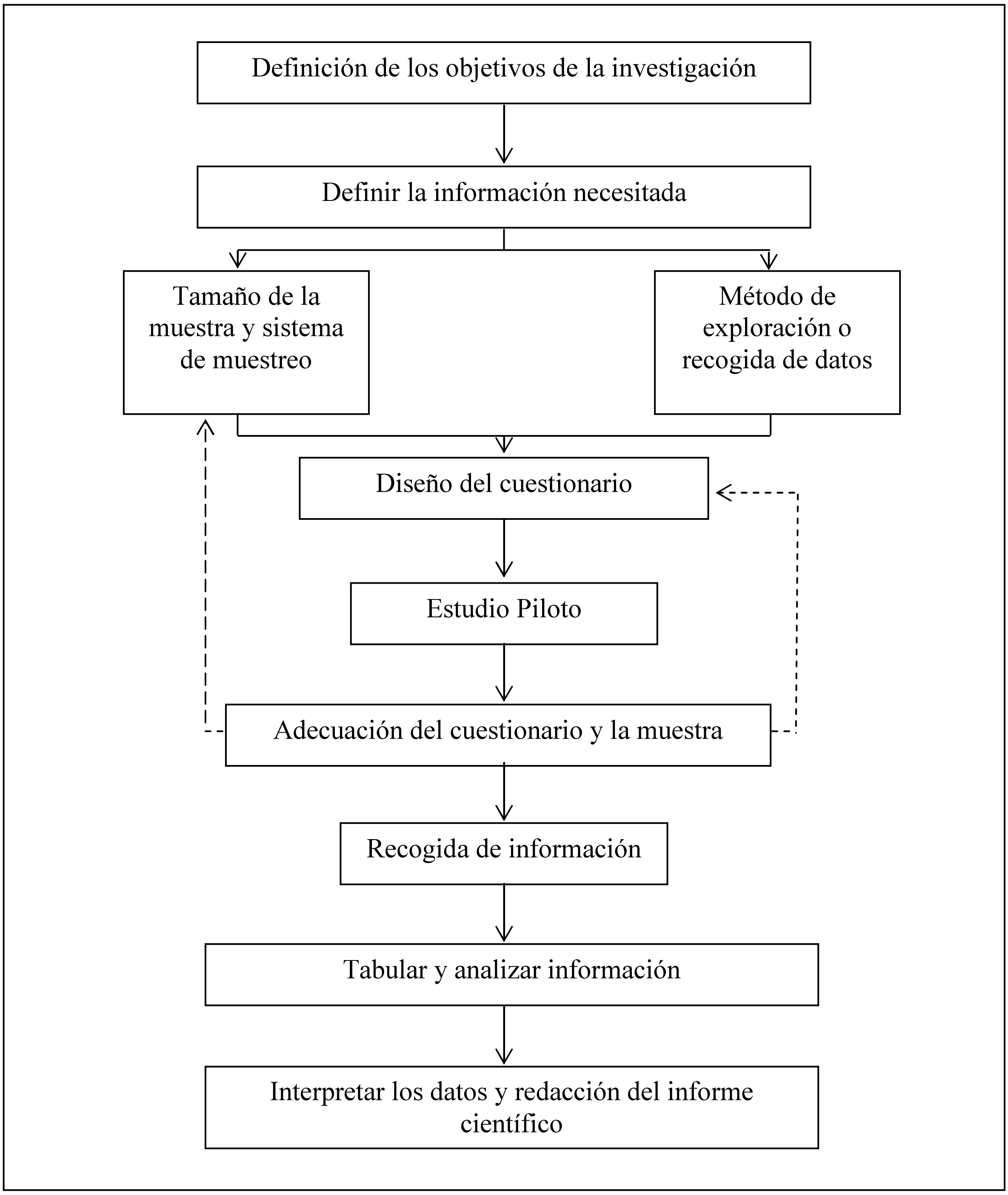


Figura 4.1: Proceso de un estudio tipo encuesta (Colás y Buendía, 1994, p. 179)

Además de las etapas anteriores este tipo de estudio contemplan tres prerrequisitos: finalidad u objetivo de la investigación, población sobre la que se centra el estudio y recursos disponibles (Cohen y Manion, 1990; Colás y Buendía, 1994).

A lo largo de éste informe de tesis hemos ido, e iremos, describiendo las etapas y los prerrequisitos citados anteriormente, específicamente en este capítulo y en el siguiente, describimos en detalle tres que determinaron el proceso y nos permiten entender cómo se llevó a cabo:

- Diseño del material con profesores de secundaria en ejercicio
- Aplicación del material en aulas
- Análisis de las producciones de los estudiantes

Una vez diseñado el material para utilizar en aula y realizada la aplicación, el análisis que se llevó a cabo de la información obtenida fue de tipo mixto ya que, como una forma de sintetizar y organizar la información, se realizaron estudios estadísticos (estudio de frecuencias simples y estudio de clúster) y, con el fin de describir y ejemplificar las resoluciones más comunes, se utilizan las producciones de los estudiantes.

4.2 Construcción y descripción del instrumento de evaluación

Lo que hemos utilizado como instrumento para evaluar la utilización del MGL en la resolución de problemas dentro del aula, son dos fichas de trabajo que forman parte de una batería de siete fichas. Describimos a continuación el equipo de trabajo para la elaboración del material, el proceso propiamente tal y el objetivo de cada una de las fichas que componen dicha batería.

4.2.1 Equipo para el diseño y aplicación

Tanto en el Marco Teórico como en el Estado de la Cuestión, hemos constatado que la utilización de representaciones gráficas en la enseñanza de la matemática no es necesariamente intuitiva, razón por la cuál es preciso trabajarlas explícita y planificadamente (Fischbein, 1977; Diezman y English, 2001; Carter, Ferrucci y Yeap, 2002; Pantziara, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004).

Sobre esa base nos plateamos que el material a diseñar debía incluir, de partida, la utilización de segmentos como una forma de representar gráficamente cantidades conocidas y desconocidas. Posteriormente, y de manera gradual, se introduciría el MGL para ir resolviendo problemas de dificultad creciente, empezando por los más simples.

Considerando lo anterior como idea base, nos planteamos que, para el diseño del material, era conveniente contar con la experiencia en aula de los profesores que posteriormente van a aplicar el material y, por lo tanto trabajar formando un equipo con los investigadores y los profesores de aula que fueran a aplicar el material. De esta manera ha sido posible consensuar la composición del las fichas, así como la confección de un protocolo de aplicación, que nos ha permitido homogenizar ciertos mínimos al momento de aplicar el material diseñado.

El equipo ha estado compuesto por siete personas: 3 investigadores (doctoranda y directores de tesis) y cuatro profesores de ESO. Tres de éstos últimos se hicieron cargo de la aplicación en aula, contando cada profesor con una o más aulas de 1º ó 2º de ESO, niveles en los que correspondía curricularmente hacer la intervención.

Además, cabe destacar que, de los cuatro profesores de aula, uno de ellos era una profesora novel (con un año de experiencia en aula) y los otros tres eran profesores experimentados.

4.2.2 Elementos a considerar

Las fichas que se utilizaron en el aula debemos entenderlas como un material a trabajar durante el curso académico, por lo tanto hay varios elementos que hemos "fijado" de antemano, respondiendo a esa situación, y que definen un marco determinado al que nos hemos ajustado. Esos elementos son los que describimos a continuación:

- ***Contenidos curriculares 1º y 2º de ESO.-*** En el apartado 2.2 puntualizamos qué contenidos se consideran en el currículo de 1º y 2º de ESO. El material diseñado pretende introducir el álgebra utilizando el SR gráfico como una forma de representación de cantidades conocidas y desconocidas y relaciones entre cantidades, para posteriormente introducir el MGL cómo método de resolución de problemas.

  En la tabla 4.1 presentamos en paralelo los contenidos del bloque álgebra y la forma de adaptarlo en la propuesta de introducción del MGL:

Currículo ESO (1º y 2º)	Propuesta para MGL
Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.	Empleo de segmentos para representar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad del uso de segmentos para expresar cantidades en distintos contextos.
Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.	Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al gráfico, utilizando segmentos, y viceversa.
Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.	Obtención de valores numéricos en representaciones gráficas sencillas que utilicen los segmentos.

Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.	Valoración de la precisión y simplicidad de las representaciones gráficas para representar y comunicar, mediante segmentos, diferentes situaciones de la vida cotidiana.
El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.	La utilización de los segmentos como representaciones gráficas para generalizar propiedades y simbolizar relaciones algebraicas.
Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.	Obtención del valor numérico de la medida de un segmento (o varios segmentos) en la representación gráfica de una expresión algebraica
Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación	Significado de las RGL´s y su utilización para representar cantidades y relaciones entre las mismas. Significado de la obtención de las medidas desconocidas de los segmentos que se relacionan en las RGL´s.
Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución.	Resolución de RGL´s, determinando la medida del segmento que representa la cantidad desconocida. Transformación de RGL´s en otras equivalentes. Interpretar la medida del segmento obtenida, como solución a las RGL´s planteadas
Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido	Utilización del MGL para la resolución de problemas.

Tabla 4.1: Contenidos bloque álgebra y adaptación para MGL.

- ***Los problemas de álgebra elemental o álgebra escolar.-*** Los problemas con los que trabajamos, y que llamamos a lo largo de este trabajo *problemas de álgebra elemental* o *problemas de álgebra escolar,* son problemas verbales que, para su resolución en el lenguaje simbólico-algebraico, requieren del planteamiento de una ecuación de primer grado o del planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- ***Profesores y aulas.-*** Como mencionamos en el apartado anterior, hemos trabajado en el diseño del material con un grupo de cuatro profesores de aula, de los cuales tres realizaron la aplicación en sus aulas. La elección del grupo de profesores fue intencionada, ya que se buscaron profesores que estuvieran dispuestos a trabajar en el diseño del material, que les gustara la experiencia y que, por lo tanto, se implicaran en su desarrollo y aplicación. Además, se tuvo en cuenta que en su docencia habitual contaran con una o más aulas de 1º o 2º de ESO para la aplicación.

- ***Los textos escolares***.- Los problemas analizados en el estudio previo, a partir de los cuales se realizó la clasificación que presentamos en el Capítulo 2 y que posteriormente se utilizaron en las fichas de resolución de problemas, fueron extraídos de libros de texto de 1º y 2º de ESO. Los libros de textos utilizados fueron:

  a) Cólera, J. y Gaztelu, I. (2004). *Matemática 1.* España: Anaya.
     Libro compuesto por 14 temas, de los cuáles se trabajó específicamente con el tema de Nº 8 titulado "Álgebra" y dentro de ese tema con el apartado 7 correspondiente a "resolución de problemas". Además se tomaron en cuenta los problemas presentes en la parte final.

  b) Cólera, J. y Gaztelu, I. (2003). *Matemática 2.* España: Anaya.
     Texto compuesto por 14 temas, dentro de los cuáles se utilizó el tema Nº 8 titulado "Ecuaciones". El apartado de nuestro interés es el número 6: "Resolución de problemas con ecuaciones". También fueron considerados los problemas del final del tema.

  c) Sánchez, J. y Vera, J. (2002a). *Matemática 1.* España: Oxford.
     Catorce temas conforman el libro y el que guarda relación con el presente trabajo es el Nº 7, titulado "Expresiones algebraicas y ecuaciones". En este

caso el apartado de interés fue el número 2.4: "Resolución algebraica de problemas". También se utilizaron los problemas contenidos en el apartado "Actividades para repasar".

d) Sánchez, J. y Vera, J. (2002b). *Matemática 2.* España: Oxford.

Los temas que componen el libro son 14 y, en particular, el tema utilizado fue el número 6: "Ecuaciones y sistemas". En este caso se utilizaron los apartados 1.5 "Resolución algebraica de problemas (I)", 2.3 "Resolución algebraica de problemas (II)" y, al igual que en el anterior, lo problemas correspondientes al apartado "Actividades para repasar".

- ***Problemas utilizados en el instrumento*.-** Los problemas para la conformación de las fichas fueron escogidos de los libros de texto ya mencionados, considerando una serie de variables que describiremos en el siguiente apartado.

4.2.3 Variables para la construcción

El material elaborado para la intervención en el aula consta de siete Fichas que describiremos en detalle en el siguiente apartado. De estas siete Fichas, las cuatro últimas están relacionadas con la RP: la Ficha Nº 4 y la Ficha Nº 6 trabajan la RP utilizando el MGL y las Fichas Nº 5 y Nº 7 tienen por objeto establecer una conexión entre el uso del MGL y la utilización del lenguaje simbólico algebraico.

Por lo tanto, el análisis de la utilización del MGL para la RP se ha realizado sobre las Fichas Nº 4 y Nº 6. Para la construcción de éstas hemos considerado como variable el número de relaciones necesarias para resolver el problema.

En el apartado 2.5.3 detallamos la clasificación de problemas de álgebra elemental considerando como criterio de clasificación el número de RGL´s que se utilizan para resolver el problema, resultado obtenido en el trabajo previo a esta investigación (Martínez, 2006). Además de la categorización mencionada anteriormente, dentro de los resultados del trabajo obtuvimos que la utilización del MGL fue más exitosa en los problemas de la categoría 1 que los de la categoría 2 (que se pueden resolver con 1 y 2 RGL´s respectivamente).

Dado que los problemas de la categoría 3 (problemas que se resuelven utilizando 3 o más RGL´s) son escasos en los libros de texto, hemos considerados problemas de las categorías 1 y 2 para la construcción de las Fichas Nº 4 y Nº 6.

No podemos perder de vista que nuestro objetivo es describir la utilización del MGL para la RP, con la intención de que pueda constituir un puente a la hora de facilitar el acceso y utilización del lenguaje simbólico algebraico. En ningún caso se pretende reemplazar su utilización, razón por la cuál los problemas de las categoría 3 justifican la utilidad del lenguaje simbólico algebraico sobre otros, como es el caso del sistema de representación gráfico.

Por lo tanto, la variable que hemos considerado para la elección de los problemas a analizar ha sido el ***número de relaciones gráficas lineales*** (RGL´s) necesarias para resolver el problema, quedando conformada de la manera que se muestra en la Tabla 4.2:

Ficha	***Tipo de problemas***
Ficha Nº 4	Problemas que se pueden resolver utilizando una RGL como mínimo (Categoría 1)
Ficha Nº 6	Problemas que se pueden resolver utilizando dos RGL´s como mínimo (Categoría 2)

Tabla 4.2: Tipos de problemas considerados en las fichas de RP.

4.2.4 Elaboración del instrumento. Fichas para el aula

El trabajo de diseño del material y de elaboración del protocolo de actuación se llevó a cabo a lo largo de 4 sesiones de trabajo. En la primera sesión se expusieron los objetivos del trabajo y se presentó una propuesta para el aula conformada por 5 tareas (ver en Anexo 1) para comenzar el diseño del material. A lo largo de esa sesión, y de las tres siguientes, se fue transformando la propuesta inicial para, finalmente, obtener el material que se aplicó, que corresponde a las Fichas que se describen en el siguiente apartado.

En la Tabla 4.3 detallamos el contenido de cada sesión para que se pueda seguir la evolución del trabajo realizado sesión a sesión, y describimos cómo se pasó por distintas versiones de las Fichas, versiones que se pueden consultar en toda su extensión en el Anexo 1:

Sesión	*Contenido de la sesión*
1 (26/09/2007)	- Presentación de objetivos del trabajo y propuesta de material. - Lectura y discusión del material. (Versión 1, ver en Anexo 1.1) - Los profesores se llevan el material propuesto para resolver las actividades y discutirla en la siguiente reunión. ***Resultado: Versión 2*** (Anexo 1.2)
2 (09/10/2007)	- Se discute en qué parte de la unidad de álgebra ubicar el trabajo con segmentos. Respecto del material se conviene que: - Es necesario detallar paso a paso, y muy gradualmente, las tareas para que los estudiantes no se pierdan. - Eliminar las tareas 1 y 2 (Versión 2) y comenzar utilizando directamente la representación con segmentos, extendiendo la tarea 3. - En la representación de porcentajes, se propone representar en primera instancia el porcentaje de un número y luego operar, aumentando o disminuyendo un número en un porcentaje de sí mismo. - Se acuerda utilizar papel sin cuadricular - Se acuerda estructurar las tareas en formato de fichas de trabajo. ***Resultado: Versión 3*** (Anexo 1.3)
3 (16/10/2007)	- Discusión respecto del vocabulario utilizado en las instrucciones de cada uno de los ítems. - Resolución los problemas de las Fichas Nº 4 y Nº 5 de la Versión 3, paso a paso, discutiendo su resolución gráfica. - Análisis de la estructura del problema guiado de ambas fichas. - Se estima conveniente hacer líneas de división cada cierto número de ítems, para marcar las intervenciones del profesor. - Queda planteada la interrogante de ¿cómo introducir ecuaciones después del trabajo gráfico? - Se acuerdan algunas modificaciones para analizar en la siguiente reunión. ***Resultado: Versión 4*** (Anexo 1.4)

4 (23/10/2007)	Revisión de la propuesta para introducir ecuaciones: - Se decide hacer un paso gradual. Ficha Nº 1: hablar de "número". Ficha Nº 2: asignarle una letra, es decir, hablar del "número *a*". - Plantear y resolver ecuaciones a partir de la resolución gráfica, es decir, trabajar de forma continua desde la Ficha Nº 1 a la Nº 4. - Trabajar en la conversión del lenguaje gráfico al simbólico de los problemas de la Ficha Nº 4, utilizando una Ficha Nº 5. - Trabajar en la conversión del lenguaje gráfico al simbólico de los problemas de la Ficha Nº 6, utilizando una Ficha Nº 7. - Se acuerda trabajar las Fichas con algunos alumnos, haciendo lectura comprensiva, a modo de prueba piloto. ***Resultado: Versión 5*** (Anexo 1.5)

Tabla 4.3: Sesiones para la elaboración del material.

Además del trabajo de elaboración propiamente tal, era importante que los profesores que fueran a aplicar el material en sus aulas comprendieran cabalmente el objetivo del trabajo a realizar y se sintieran cómodos con los ítems, es decir, que se apropiaran del material para aplicarlo con la mayor complicidad posible. También se ha cuidado que la aplicación fuera homogénea, respetando patrones de aplicación comunes que permitieran recoger la información de forma fidedigna.

Para obtener la Versión 6 (Anexo 1.6) del material, que fue la que finalmente se aplicó y que describiremos en el siguiente apartado, se realizó una aplicación piloto a 4 estudiantes de 1º de ESO, a partir de la cuál:

- Se estimó el tiempo necesario para la aplicación del material en las aulas.
- Se modifican las Fichas Nº 5 y Nº 7, en las que se agregan el enunciado de los problemas para que sean planteados utilizando ecuaciones (en la Versión 5 se había dejado el espacio en blanco, para que los estudiantes utilizaran los enunciados desde las Fichas Nº 4 y Nº 6 respectivamente).
- Se detectan posibles errores o dificultades, en la resolución de los distintos ítems, que permiten convenir con los profesores cómo enfrentarlos, en caso de que aparezcan en sus aulas.

4.2.5 Descripción de las Fichas

Como mencionamos antes, el material consta de siete Fichas de trabajo que describiremos a continuación. Para ello las hemos organizado en 5 apartados, según la finalidad que tengan:

- **Ficha Nº 1.** Representar cantidades desconocidas, utilizando segmentos de recta y operar sobre ellos.
- **Ficha Nº 2.** Representar aumento o disminución de cantidades, utilizando segmentos de recta, conocida la unidad.
- **Ficha Nº 3.** Utilizando segmentos para representar cantidades, determinar una cantidad desconocida a partir de información dada.
- **Ficha Nº 4 y Ficha Nº 6.** Resolver problemas de forma gráfica, utilizando el MGL.
- **Ficha Nº 5 y Ficha Nº 7.** Traducir las relaciones gráficas utilizadas en la resolución de los problemas anteriores a ecuaciones.

En términos generales, las tres primeras Fichas tienen por objetivo introducir la utilización de segmentos como forma de representación gráfica, a modo de entrenamiento, para la utilización posterior del MGL. Las cuatro Fichas siguientes se centran en la resolución de problemas utilizando el MGL (Ficha Nº 4 y Ficha Nº 6) y su posterior “traducción” al lenguaje algebraico (Ficha Nº 5 y Nº 7), dicha distribución la resumimos esquemáticamente en la Figura 4.2.

	Representar			Resolver	
Traducir a segmentos	Cantidades desconocidas y operar con ellas	Aumento o disminución dada la unidad	Determinar cantidad desconocida	Problemas	
	Ficha Nº 1	Ficha Nº 2	Ficha Nº 3	Ficha Nº 4	Ficha Nº 6
	Introducción a la representación con segmentos			1 RGL	2 RGL´s
Traducir a ecuaciones				Ficha Nº 5	Ficha Nº 7
Expresiones algebraicas de la forma	kx $\frac{m}{n}x$ $\%x$ $\begin{pmatrix} k\in \Re; \\ m,n\in \mathrm{N}, \\ n\neq 0 \end{pmatrix}$	a $x\pm a$ $kx\pm a$ $(k,a\in \Re;)$	$ax=k$ $ax\pm b=k$ $\%x=k$ $\%x\pm a=k$ $(k,a,b\in \Re;)$	$ax\pm b=k$ $(k,a,b\in \Re;)$	$ax\pm b=cx\pm d$ $(k,a,b\in \Re;)$

Figura 4.2: Resumen característica y distribución de Fichas para el aula.

A continuación hacemos un recorrido ficha a ficha describiendo en detalle, es decir, el objetivo de cada ficha y como se pretende trabajar hacia dicho objetivo en base los apartados que la componen.

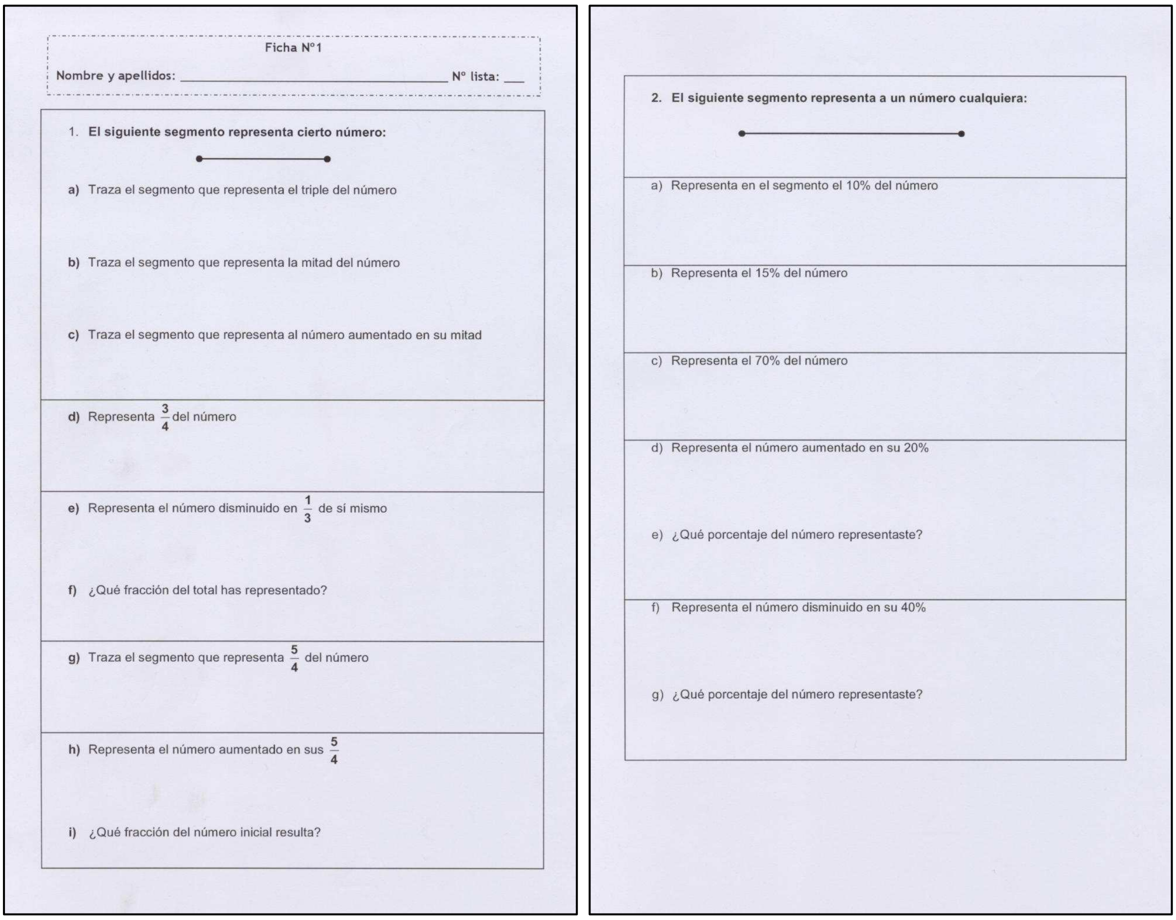
Ficha Nº 1: Representar cantidades desconocidas utilizando segmentos de recta y operar sobre ellos

La Ficha Nº 1 tiene por objetivo trabajar la representación de una cantidad desconocida utilizando segmentos de recta, en donde la longitud del segmento sería dicha cantidad, y que se opere sobre el segmento como si fuese de longitud conocida.

Se introduce la representación de un número cualquiera mediante un segmento en el sentido que lo describe Euclides en Los Elementos, como vimos en la sección 2.5.1 (Ejemplo 2.1).

La Ficha está compuesta por dos apartados. En el primer apartado (página de la izquierda de la Figura 4.3) se parte por considerar un segmento dado como la representación de un número cualquiera y sobre dicho número se trabaja:

- Multiplicación del número por otro número entero
- Representación de una fracción del número (fracción propia e impropia)
- Aumento o disminución del número inicial en una fracción de sí mismo



Ficha N° 1

Nombre y apellidos: ______________________________ N° lista: ___

1. **El siguiente segmento representa cierto número:**

a) Traza el segmento que representa el triple del número

b) Traza el segmento que representa la mitad del número

c) Traza el segmento que representa al número aumentado en su mitad

d) Representa $\frac{3}{4}$ del número

e) Representa el número disminuido en $\frac{1}{3}$ de sí mismo

f) ¿Qué fracción del total has representado?

g) Traza el segmento que representa $\frac{5}{4}$ del número

h) Representa el número aumentado en sus $\frac{5}{4}$

i) ¿Qué fracción del número inicial resulta?

2. **El siguiente segmento representa a un número cualquiera:**

a) Representa en el segmento el 10% del número

b) Representa el 15% del número

c) Representa el 70% del número

d) Representa el número aumentado en su 20%

e) ¿Qué porcentaje del número representaste?

f) Representa el número disminuido en su 40%

g) ¿Qué porcentaje del número representaste?

Figura 4.3: Ficha Nº 1

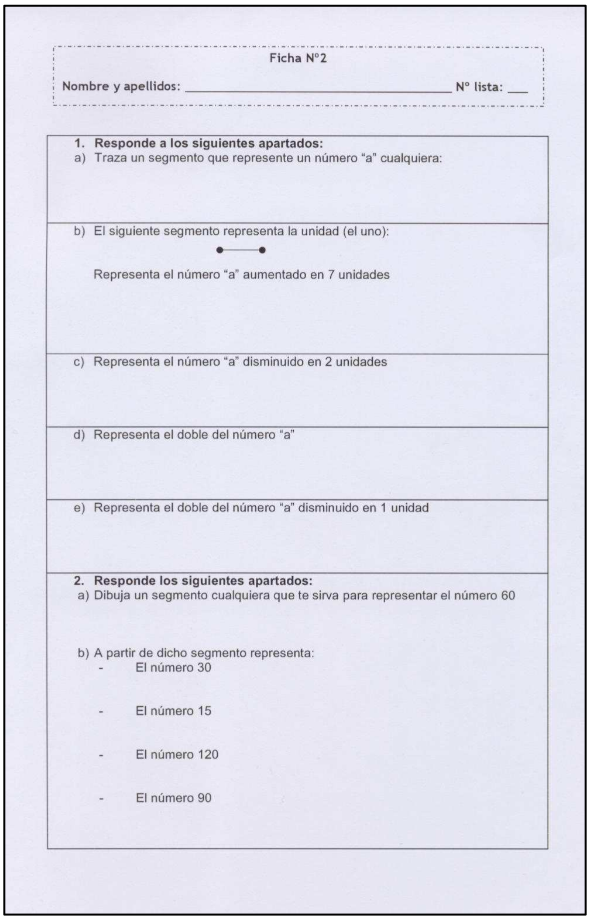
En el apartado 2 (página de la derecha de la Figura 4.3), se continúa la tarea sobre la cantidad desconocida, ahora centrada en la representación de porcentajes, es decir, se trabaja en la representación de:

- Determinación de porcentajes de una cantidad desconocida utilizando segmentos (de manera que no se requiere definir la longitud unidad), considerando porcentajes menores y mayores que el 100% del número.
- Aumento o disminución de una cantidad desconocida en un porcentaje determinado de sí misma.

Ficha Nº 2: Representar, utilizando segmentos de recta, aumento o disminución de cantidades conocida la unidad

En la Ficha Nº 2 se trabaja la representación de cantidades desconocidas y conocidas, a la vez, utilizando segmentos para ambas. Hemos visto que utilizar y operar la representación gráfica de ambos tipos de cantidades, a la vez, es posible, caso ilustrado a partir de Los Elementos de Euclides, Ejemplo 2.2 del Capítulo 2.

En primer lugar, se pide que se trace un segmento que represente un número cualquiera y, posteriormente, dado un segmento que representa la unidad, que se opere con cantidades conocidas sobre la cantidad desconocida.



Ficha N°2

Nombre y apellidos: ______________________________ N° lista: ___

1. **Responde a los siguientes apartados:**
   a) Traza un segmento que represente un número "a" cualquiera:

   b) El siguiente segmento representa la unidad (el uno):

   Representa el número "a" aumentado en 7 unidades

   c) Representa el número "a" disminuido en 2 unidades

   d) Representa el doble del número "a"

   e) Representa el doble del número "a" disminuido en 1 unidad

2. **Responde los siguientes apartados:**
   a) Dibuja un segmento cualquiera que te sirva para representar el número 60

   b) A partir de dicho segmento representa:
   - El número 30
   - El número 15
   - El número 120
   - El número 90

Figura 4.4: Ficha Nº 2

En la Figura 4.4 vemos que la Ficha Nº 2 está compuesta por dos apartados, en donde se va a trabajar:

- Representación de la unidad mediante un segmento determinado.
- Aumento y disminución de un número cualquiera, en una cantidad determinada, es decir, considerando la unidad.
- Definida una unidad, representación de cantidades conocidas a partir de ella.

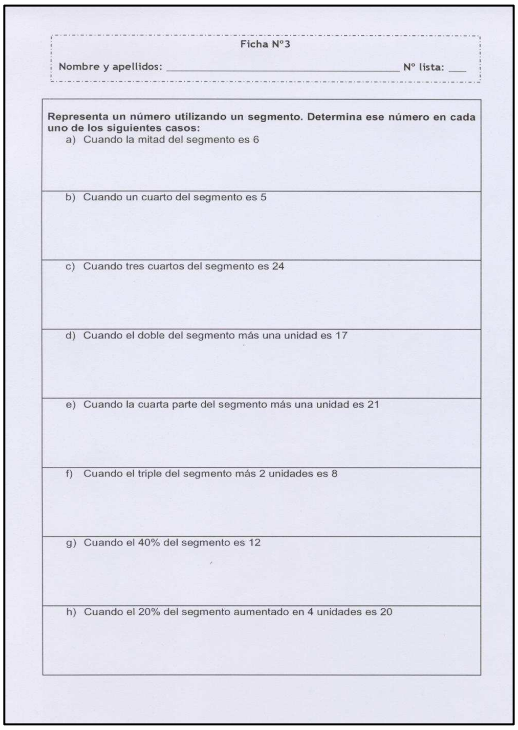
Durante el diseño del material, se previó un posible conflicto en el apartado 1.c) de esta Ficha, ya que se pide representar *un número, "a", disminuido en 2 unidades.* Puede ocurrir que el estudiante, al representar al número "a", trace un segmento menor o igual al segmento que representa las 2 unidades (considerando la unidad dada). En este caso, y considerando como antecedente el trabajo de Dickson y Eade (2004) en el apartado 3.1.3, se acordó discutir dicha problemática en la clase. Dado que, por la naturaleza propia de estos problemas, se está trabajando en el contexto de números positivos, se debía dirigir dicho debate hacia la representación del número “a” mediante un segmento, para este caso, mayor de 2 unidades, para que puedan completar cada uno de los apartados de la Ficha.

En el segundo apartado se pretende que los estudiantes representen cantidades conocidas con un segmento con una longitud conveniente de dicha representación, sin que ello implique marcar necesariamente la unidad en dicho segmento. Posteriormente, se les pide representar otras cantidades considerando el segmento anterior como referente. Se trata, por lo tanto, de trabajar la representación de cantidades conocidas sin representar explícitamente la unidad.

Ficha Nº 3: Determinar una cantidad desconocida a partir de información dada, mediante la representación y operaciones con segmentos.

En la Ficha Nº 3 (Figura 4.5) se utilizan dos aspectos genéricos:

- la conversión (en el sentido de Duval, 1999a, 199b) de un sistema de representación a otro, en este caso, la conversión de lo verbal a lo gráfico
- la utilización de información dada para obtener información nueva.



Ficha N°3

Nombre y apellidos: ______________________ N° lista: ___

Representa un número utilizando un segmento. Determina ese número en cada uno de los siguientes casos:

a) Cuando la mitad del segmento es 6

b) Cuando un cuarto del segmento es 5

c) Cuando tres cuartos del segmento es 24

d) Cuando el doble del segmento más una unidad es 17

e) Cuando la cuarta parte del segmento más una unidad es 21

f) Cuando el triple del segmento más 2 unidades es 8

g) Cuando el 40% del segmento es 12

h) Cuando el 20% del segmento aumentado en 4 unidades es 20

Figura 4.5: Ficha Nº 3

La Ficha se compone de 8 ejercicios, en los que se pide al estudiante que comience por representar un número cualquiera, una cantidad desconocida, y, utilizando dicho segmento, represente gráficamente la información que se da en cada enunciado, a partir de la cual se debe determinar el número inicialmente desconocido.

Resaltamos que en las instrucciones se indica a los estudiantes que "representen un número utilizando un segmento". Dicho número es aquel que posteriormente deben determinar, con lo que se busca aproximar al estudiante al concepto de incógnita.

Ficha Nº 4 y Ficha Nº 6: Resolver problemas gráficamente utilizando el MGL

Como mencionamos anteriormente, la Ficha Nº 4 y la Ficha Nº 6 son las Fichas sobre las cuales se realiza el análisis que tiene por objeto describir cómo se utiliza el MGL para la RP verbales. Por lo tanto, el objeto de ambas es la presentación de problemas para que sean resueltos mediante la utilización del MGL.

Utilizando como base lo trabajado en las tres primeras, el contenido de estas Fichas consiste en proponer un primer problema para ser resuelto conjuntamente entre estudiantes y profesor, en donde éste va guiando los pasos a seguir en la resolución del problema. Posteriormente, se proponen una serie de problemas para que el estudiante los resuelva individualmente.

En la Figura 4.6 se adjunta la primera página de la Ficha Nº 4 y de la Ficha Nº 6 (ver fichas completas en Anexo 1.6), en la que se puede apreciar que tienen la misma estructura:

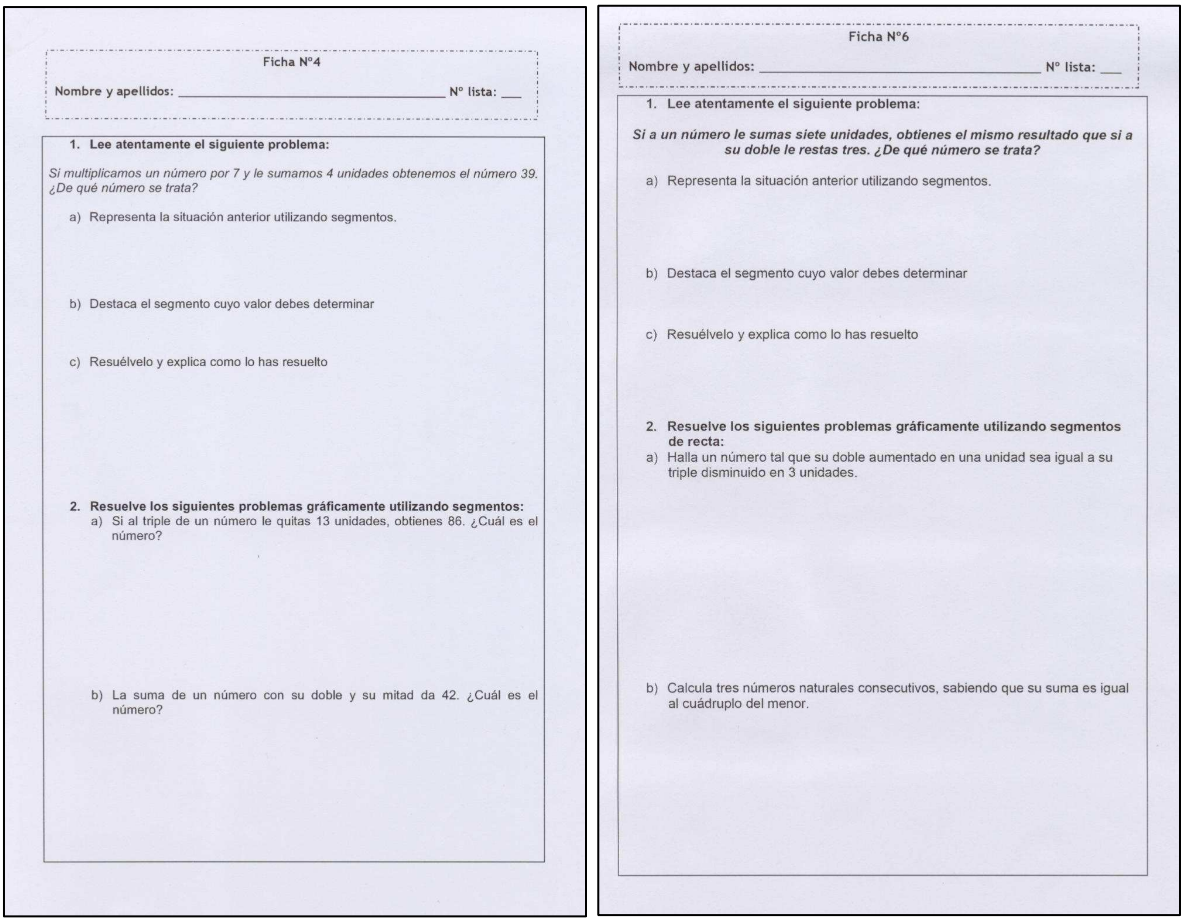
Parte 1: Presentación de un problema para su resolución guiada, paso a paso, por el profesor.

- Se propicia el planteamiento gráfico mediante el planteamiento del problema en el SR gráfico utilizando segmentos.
- Se pide destacar el segmento cuya longitud se desea determinar, a modo de definición de incógnita (utilización del MC con segmentos, apartado 2.5.2.3).
- Se determina la longitud del segmento utilizando la información dada.
- Se verbaliza la resolución, describiendo el proceso llevado a cabo.

Parte 2: Resolución utilizando el MGL

- Ficha Nº 4: contiene seis problemas de la Categoría 1 (resolubles con 1 RGL).

- Ficha Nº 6: contiene seis problemas de la Categoría 2 (resolubles con 2 RGL´s).



Ficha Nº4

Nombre y apellidos: ______________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) Destaca el segmento cuyo valor debes determinar

c) Resuélvelo y explica como lo has resuelto

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos:**

a) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

b) La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?

Ficha Nº6

Nombre y apellidos: ______________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) Destaca el segmento cuyo valor debes determinar

c) Resuélvelo y explica como lo has resuelto

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos de recta:**

a) Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.

b) Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.

Figura 4.6: Primera página Ficha Nº 4 y Ficha Nº 6

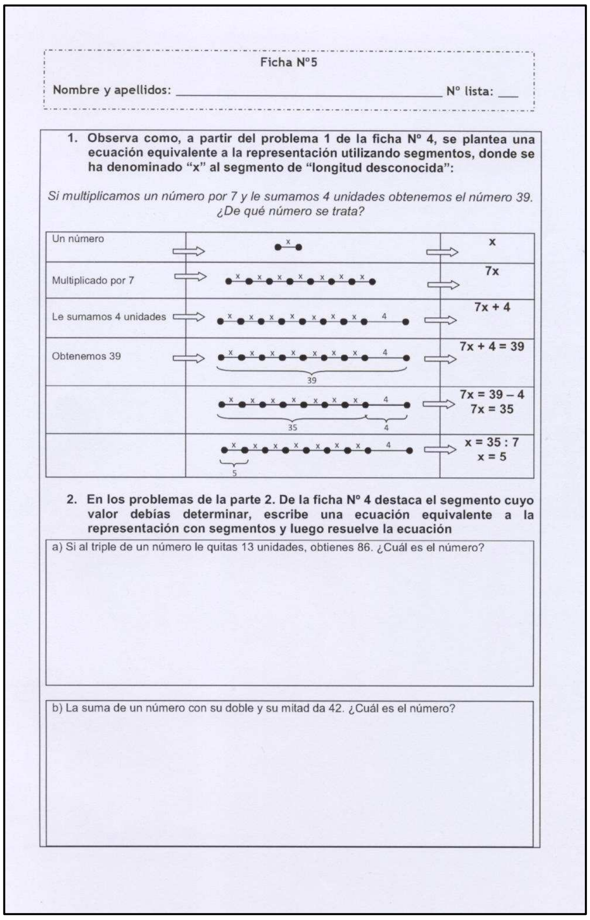
Ficha Nº 5 y Ficha Nº 7: Traducir las relaciones gráficas utilizadas en la resolución de los problemas a ecuaciones

Cuando decidimos trabajar con profesores de aula consideramos pertinente respetar su programación anual para el nivel en que se iban a aplicar las Fichas, considerando a éstas como parte del tema de álgebra y resolución de problemas. Esto nos llevó a elaborar dos Fichas que conectaran todo el trabajo realizado con el MGL, en la resolución de problemas, con la introducción del lenguaje simbólico, que es el que aparece explícitamente en el currículo de álgebra. Estas Fichas deben de servir, pues, para guiar la conversión de la representación gráfica al lenguaje alfabético/simbólico.

Dado que la intención es que los estudiantes hagan la conversión de un registro a otro y, por lo mismo, la equivalencia de representaciones, las Fichas Nº 5 y Nº 7 están constituidas por los mismos problemas que las Nº 4 y Nº 6 respectivamente. Además, de forma paralela, constan de dos partes: una primera parte de trabajo guiado por el profesor (ver Figura 4.7) y una segunda parte de trabajo autónomo.

Parte 1: Plantear paralelismos entre el SR verbal, el gráfico y el simbólico/algebraico, paso a paso, para describir la resolución de un problema.

- Se plantea la equivalencia de representaciones, partiendo por representar en los tres SR la incógnita del problema.
- Se continúa haciendo el paralelo entre los tres SR hasta plantear una ecuación que daría solución al problema.
- Se compara la resolución gráfica con la resolución simbólica, hasta obtener la solución del problema.



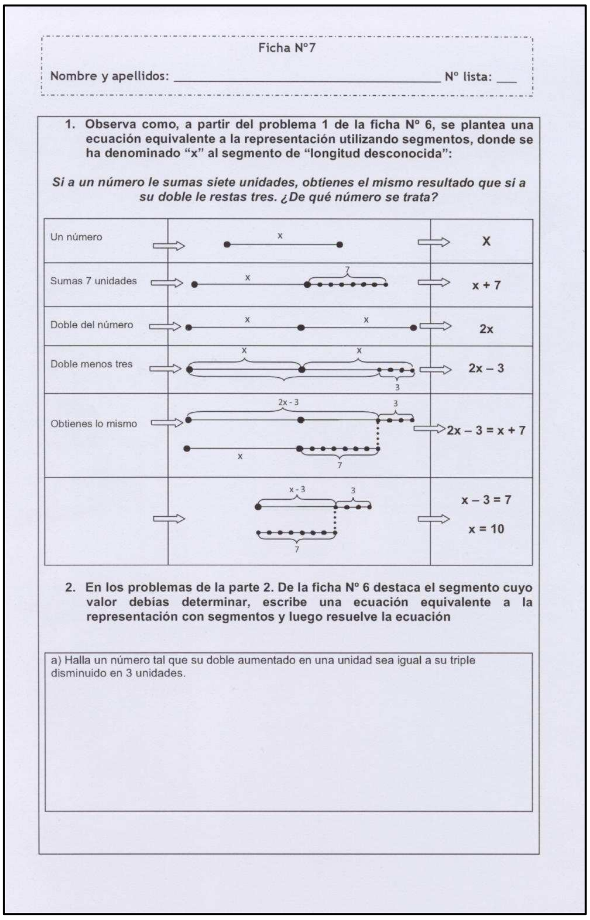


Figura 4.7: Primera página Ficha Nº 5 y Ficha Nº 7

Parte 2: Resolución de problemas planteando ecuaciones a partir de la resolución realizada con el MGL

- En el caso de la Ficha Nº 5, compuesta por los mismos seis problemas que la Ficha Nº 4, se pide plantear una ecuación para resolver cada problema a partir de la resolución hecha en la Ficha Nº 4.

- Para la Ficha Nº 7, se actúa de forma similar al apartado anterior, pero teniendo como referencia la Ficha Nº 6.

4.3 Variables a observar

Consideramos como variable, tal como define en el campo científico, a una abstracción mental de alguna característica que presenta el objeto que observamos y que puede asumir al menos dos valores distintos (García Jiménez, 2002).

Nuestro centro de interés está puesto en cómo resuelven problemas de álgebra elemental estudiantes de los primeros años de formación secundaria, utilizando, en particular, un método de resolución gráfico propuesto (MGL). Por esta razón, las variables a observar están relacionadas con la resolución que hacen los estudiantes de los problemas que se les presentan. Atendiendo a dicho objetivos, las variables se han definido con el fin de describir el proceso de resolución de los problemas, específicamente, mediante la utilización del MGL.

Las variables consideradas se han definido en base a las distintas fases para la resolución de problemas, variables que ya fueron utilizadas anteriormente por Fernández (1997a) y Espinosa (2002, 2004), y que hemos definido en el apartado 2.4.2.

En la descripción de la resolución de los problemas centramos la atención en dos aspectos: a) si se ha utilizado el método propuesto y b) si el desarrollo realizado es correcto o no. Luego, en cada fase de resolución se consideran los siguientes aspectos:

- ***Planteamiento***: es la fase en la que se traduce a un lenguaje matemático el texto del problema a través de un sistema de representación.

  Dentro de esta variable se evalúan dos aspectos:

  a) Se utiliza o no se utiliza el método geométrico – lineal para plantear el problema.
  b) El planteamiento realizado es correcto o incorrecto.

- ***Ejecución:*** es la fase de desarrollo de las relaciones establecidas en el planteamiento.

  Al igual que en la variable anterior se evalúan dos aspectos:

  a) Se utiliza o no se utiliza el método geométrico – lineal en la ejecución del problema.
  b) La ejecución del problema es correcta o incorrecta.

- ***Desempeño final o solución:*** es la fase en que se encuentran el/los resultados pedidos en el texto del problema.
  Se evalúa si el resultado obtenido es correcto o incorrecto.

Lo anterior lo resumimos esquemáticamente el la Tabla 4.4:

V1: Fases	Planteamiento	Ejecución	Desempeño final
V2: Uso MGL	Sí / No	Sí / No	---
V3:Rendimiento	Correcto / Incorrecto	Correcto / Incorrecto	Correcto / Incorrecto

Tabla 4.4: Variables a observar

4.4 Aplicación del instrumento

A continuación exponemos el desarrollo de la aplicación del material diseñado, indicando tanto el lugar que ocupó dentro de la planificación anual de los profesores, como las aulas en las que se aplicó, los alumnos, el tiempo que fue necesario, etc.

4.4.1 Ubicación curricular

Como se ha mencionado con anterioridad, el material ha sido diseñado para ser utilizado al comienzo del tema de "álgebra y funciones", ya sea de 1º de ESO o de 2º de ESO.

Al ubicar las Fichas al comienzo del tema, los estudiantes no han trabajado aún con ecuaciones durante ese curso académico, el trabajo se centra en la representación de cantidades desconocidas y en la resolución gráfica de problemas, introduciendo los procedimientos para la resolución de ecuaciones después de haber trabajado las siete fichas.

4.4.2 Aulas y sujetos

La aplicación del material se realizó en cinco aulas: tres de 2º de ESO y dos de 1º de ESO, en distintas localidades de la provincia de Granada, como se resume en la Tabla 4.5, especificando los centros y el nivel, así como el número de estudiantes con el que se trabajó.

Localidad	Centro	Tipo de Centro	Nº de Aulas	Nivel	Nº estudiantes en aula	Nº estudiantes considerados
Cádiar	Al-Cadí	Instituto Educación Secundaria	1	1º ESO	21	14
Jun	La purísima	Centro de Educación Infantil y Primaria	1	1º ESO	15	14
Huétor Tájar	Américo Castro	Instituto Educación Secundaria	3	2º ESO	66	54

Tabla 4.5: Centros y aulas utilizados para la aplicación de las fichas.

En la Tabla 4.5 tenemos dos columnas relacionada con el número de estudiantes:

a) En la columna titulada "Nº estudiantes por aula" registramos el total de estudiantes que participaron de la aplicación del material. El total es 102, distribuidos en 5 aulas como vemos en la Tabla 4.5.

b) En la columna titulada "Nº de estudiantes considerados", anotamos el número de estudiantes que se han tenido en cuenta en el análisis. Para ello se han seleccionado sólo aquellos que trabajaron con las 7 Fichas que componían el material, es decir, los estudiantes que asistieron a todas las sesiones durante las que se llevó a cabo la experiencia, es así como la muestra con la que hemos trabajado está compuesta por 82 sujetos.

4.4.3 Tiempo de aplicación

En términos generales, fueron necesarias 8 sesiones (50 minutos) para la administración del material, por lo que se podría considerar que, como media, una sesión de clase para cada Ficha. Sin embargo, el tiempo dedicado a cada Ficha varió sustancialmente entre una y otra, así como entre un aula y otra, como mostramos detalladamente en la Tabla 4.6:

	Ficha 1	Ficha 2	Ficha 3	Ficha 4	Ficha 5	Ficha 6	Ficha 7
Aula 1	41	23	28	67	90	90	52
Aula 2	40	20	35	80	95	66	26
Aula 3	34	13	26	80	85	96	22
Aula 4	40	15	28	72	41	78	28
Aula 5	75	25	34	114	103	82	32
Tiempo medio	46	19	30	83	83	82	32

Tabla 4.6: Tiempo en minutos utilizado en la aplicación de las Fichas.

4.4.4 Pautas de observación

La aplicación del material la realizaron los profesores de aula en compañía de la doctoranda, cuya presencia tenía como único fin ayudar en el registro de tiempos y posibles conflictos al momento de la aplicación.

Para sistematizar dicho registro se estructuraron 7 pautas de observación, una por cada Ficha, cada una de las cuales consta de cuatro apartados:

1. *Identificación*: en que se anota el número de Ficha a observar, el profesor, la clase en la que se va a trabajar, la hora de inicio y la hora de término.
2. *Interacción didáctica:* concebido con la idea de describir cómo se ha llevado a cabo el desarrollo de la clase. Para ello nos basamos en los trabajos de Carrillo, Climent, Gorgorió, Prat y Rojas (2008) y Castro (1994).

   En términos generales se conciben tres momentos, que pueden aparecer más de una vez dentro de una sesión de clase y, en este caso, durante el desarrollo de una Ficha: explicación, trabajo autónomo y puesta en común.

   Esos tres momentos se cruzan con tres subsistemas observables dentro del aula (Castro, 1994): responsabilidad de aprendizaje, comunicación promovida y validación.
3. *Comprensión del contenido:* el tercer apartado tiene la finalidad de apuntar qué tipo de conflictos o preguntas aparecen en el aula, en cada uno de los ítems
4. *Observaciones generales:* el último apartado contempla la recogida de observaciones generales y, específicamente, la indicación de si algún ítem ha presentado más complicaciones para los estudiantes o para el profesor al momento de la aplicación.

En el Anexo 2 se adjuntan las siete pautas de observación de forma completa para que puedan se consultadas.

4.5 Validez y fiabilidad

Como mencionamos al comienzo de este Capítulo, nuestro trabajo de investigación se encuadra en un estudio de tipo exploratorio - descriptivo, por lo que las pruebas de validez y fiabilidad que hemos realizado al material diseñado no tienen como objetivo validar un cuestionario con el fin de universalizarlo, sino que presentamos el material como un producto modificable según las necesidades de cada aula y profesor.

Ahora bien, aún cuando nuestra pretensión no sea generar un instrumento estático y definitivo, sí nos interesa que, en términos de la investigación, las Fichas sean un material válido y fiable, a partir del cual podamos describir la utilización del MGL para la resolución de problemas de álgebra en los primeros niveles de la ESO, razón por la cual realizamos los análisis pertinentes que presentamos a continuación.

4.5.1 Validez

Un análisis de validez procura que las explicaciones científicas de sucesos estudiados coincidan con la realidad (McMillan y Schumacher, 2005), o dicho de otra manera, se refiere a que el instrumento que utilizamos mida lo que realmente queremos medir (Hernández Sampieri y otros, 2003).

Dado que dentro nuestros objetivos de investigación nos plateamos, en primer lugar el diseño de una intervención para introducir el MGL y, en segundo lugar, la descripción de la utilización del MGL como método de resolución de problemas, consideramos pertinente considerar la validez del material en su totalidad (las 7 fichas) y de las fichas destinadas a la resolución de problemas utilizando el MGL en particular (Ficha Nº 4 y Ficha Nº 6).

Frente a esto, hemos considerado pertinente controlar: (a) la validez de contenido para las siete fichas y (b) la validez de constructo de las Fichas Nº 4 y Nº 6.

(a) *Validez de contenido*: entendiéndola como el grado en que un instrumento representa lo que está midiendo (Hernández Sampieri y otros, 2003). En este caso la validez de contenido queda justificada porque las 7 Fichas, en general, y las Fichas Nº 4 y Nº 6, en particular, responden a los contenidos planteados para el bloque de álgebra de 1º y 2º de ESO ya que:

- Los problemas utilizados en las fichas destinadas a resolución de problemas (Nº 4, Nº 5, Nº 6 y Nº 7) han sido extraídos de libros de texto correspondientes a los niveles con los que se trabaja y que son usualmente utilizados en la Enseñanza Secundaria y el diseño de las fichas de introducción (Nº 1, Nº 2 y Nº 3) se realizó con el fin de representar los elementos necesarios para resolver dichos problemas.

- La elaboración del material se llevó en consenso con profesores en ejercicio (como hemos descrito en el apartado 4.2.4), que han trabajado en su aula, con sus propios estudiantes, en los niveles indicados, luego han jugado el papel de expertos en la modificación de cada una de las versiones de las fichas.

(b) ***Validez de constructo:*** tipo de validez externa que se refiere al grado en que el estudio representa al constructo fundamental, es decir, se pretende estudiar la estructura del constructo emergente en el instrumento de evaluación para determinar su cohesión respecto al tema que se quiere estudiar.

Con el fin de estudiar la estructura de este constructo emergente, hemos utilizado el análisis factorial, solución por componentes principales, tal como hizo Fernández (1997a) en su tesis doctoral. En este caso hemos utilizado el paquete estadístico SPSS. Dicho análisis se ha realizado para las variables planteamiento del problema y desempeño final, por separado, en los 12 problemas que se han utilizado (Fichas Nº4 y Ficha Nº6) en el trabajo.

Previo al análisis de las componentes, en ambos casos, se han tenido en cuenta los valores obtenidos para el *test de Kaiser-Meyer-Olkin* y para el *test de esfericidad de Barlett* que nos permiten considerar el análisis factorial como viable o no.

El primero de ellos, *el test de Kaiser-Meyer-Olkin*, mide la idoneidad de los datos para llevar a cabo un análisis factorial a partir de la comparación de los valores de los coeficientes de correlación observados con los coeficientes de correlación parcial. Si la suma de los cuadrados de los coeficientes de correlación parcial entre todos los pares de variables es pequeña, en comparación con la suma de los coeficientes de correlación al cuadrado, esta medida tiende a uno.

Por su parte, *el test de esfericidad de Barlett*, permite contrastar la hipótesis de que la matriz de correlaciones es una matriz identidad. Si dicha hipótesis se aceptase, se debería cuestionar la utilización de cualquier tipo de análisis factorial, ya que querría decir que no existe correlación entre los ítems.

Validez de constructo considerando la fase de planteamiento

Para el análisis de la validez de constructo, a partir de los resultados de la fase de planteamiento, consideramos los resultados de la Tabla 4.7. En primer lugar, se contrastó la hipótesis que plantea que la matriz de correlación es una matriz identidad, ya que para la prueba de esfericidad de Barlett se ha obtenido como valor 0,00. Por su parte la prueba de Kaiser – Meyer – Olkin dio un valor mayor que 0,6, que es el valor recomendado a partir del cual se permite realizar un análisis factorial.

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		**,693**
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	337,630
	gl	66
	Sig.	**,000**

Tabla 4.7: KMO y prueba de Bartlett en la fase de planteamiento

En la Tabla 4.8 podemos observar el resultado de aplicar el método de componentes principales a los valores seleccionados. Se obtuvieron 4 factores con autovalor mayor que 1 que explican un 67,328% de la varianza total.

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	3,824	31,867	31,867	3,824	31,867	31,867
2	1,787	14,890	46,757	1,787	14,890	46,757
3	1,373	11,438	58,195	1,373	11,438	58,195
4	1,096	9,132	67,328	1,096	9,132	67,328
5	,927	7,727	75,055			
6	,715	5,960	81,014			
7	,635	5,288	86,303			
8	,527	4,390	90,693			
9	,415	3,459	94,152			
10	,260	2,163	96,315			
11	,243	2,026	98,342			
12	,199	1,658	100,000			

Tabla 4.8: Varianza total explicada mediante análisis de componentes principales en la fase de planteamiento.

Al estudiar los resultados en la tabla de factores no rotados (Tabla 4.9), observamos los cuatro factores, obtenidos anteriormente en cada uno de los problemas estudiados, con el coeficiente de carga correspondiente. Hemos sombreado las cargas que se tendrán en cuenta, tomando como criterio el que sus valores absolutos sean superiores a 0,25.

	Componente			
	1	2	3	4
P4a	,328	,331	,472	,589
P4b	,533	,327	,543	,279
P4c	,526	,029	,366	-,447
P4d	,602	-,584	,099	-,198
P4e	,698	-,553	,014	,070
P4f	,754	-,479	,047	,076
P6a	,619	-,031	,047	-,049
P6b	,676	,323	-,360	,055
P6c	,576	,229	-,619	,108
P6d	,461	,497	-,066	-,402
P6e	,444	,537	,068	-,299
P6f	,395	,004	-,430	,391

Tabla 4.9: Matriz de componentes mediante análisis de componentes principales en la fase planteamiento

Observamos que, a partir de las casillas destacadas, todos los ítems cargan de forma notoria en el Factor 1, lo que se interpreta como que todos los ítems tienen un elemento común, que es el planteamiento del problema mediante la utilización del MGL, es decir, podemos concluir que:

El planteamiento de los problemas utilizando el MGL es un factor general, que carga significativamente en todos los problemas que configuran el instrumento.

Validez de constructo considerando la fase de desempeño final

Para el análisis de la validez de constructo a partir de los resultados de la fase de desempeño final tomamos en cuenta y analizamos, en primer lugar, los resultados de la

Tabla 4.10. Al igual que en el análisis anterior, se contrastó la hipótesis que plantea que la matriz de correlación es una matriz identidad, ya que se obtuvo 0,000 para la prueba de esfericidad de Barlett. En segundo lugar para la prueba de Kaiser – Meyer – Olkin se obtuvo 0,745 (mayor que 0,6), lo que indica que es factible realizar un análisis factorial.

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		**,745**
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	257,807
	gl	66
	Sig.	**,000**

Tabla 4.10: KMO y prueba de Bartlett en la fase de desempeño final

El resultado de aplicar el método de componentes principales, a los resultados obtenidos en la fase de desempeño final, lo adjuntamos en la Tabla 4.11. Se obtuvieron 4 factores con autovalor mayor que 1 que explican un 62,384 % de la varianza total.

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	3,961	33,006	33,006	3,961	33,006	33,006
2	1,330	11,082	44,088	1,330	11,082	44,088
3	1,183	9,857	53,945	1,183	9,857	53,945
4	1,013	8,439	62,384	1,013	8,439	62,384
5	,901	7,508	69,892			
6	,745	6,210	76,102			
7	,684	5,697	81,800			
8	,642	5,347	87,146			
9	,516	4,296	91,442			
10	,446	3,717	95,159			
11	,362	3,013	98,172			
12	,219	1,828	100,000			

Tabla 4.11: Varianza total explicada mediante análisis de componentes principales en la fase de desempeño final.

Si analizamos los resultados obtenidos en la tabla de factores no rotados (Tabla 4.12), encontramos los 4 factores obtenidos anteriormente con el coeficiente de carga correspondiente. Al igual que en el análisis de la fase de planteamiento, sombreamos las cargas que se tendrán en cuenta, tomando como criterio el que sus valores absolutos sean superiores a 0,25.

	Componente			
	1	2	3	4
D4a	,530	,091	,131	,008
D4b	,682	-,064	,195	,068
D4c	,454	-,435	,354	,470
D4d	,659	-,205	,287	-,326
D4e	,595	-,440	-,440	-,128
D4f	,760	-,282	-,091	-,146
D6a	,683	,240	,049	-,201
D6b	,705	,274	,053	-,186
D6c	,564	,031	-,410	,196
D6d	,271	,523	,554	,026
D6e	,452	,271	-,177	,717
D6f	,288	,576	-,454	-,124

Tabla 4.12: Matriz de componentes mediante análisis de componentes principales en la fase desempeño final

Observamos que, a partir de las casillas destacadas, todos los ítems cargan de forma acusada en el Factor 1, lo que se interpreta como que todos los ítems tienen un elemento común, que es el desempeño algebraico a partir de la utilización del MGL como método de resolución, es decir, podemos concluir que:

El desempeño algebraico de los problemas utilizando el MGL cómo método de resolución es un factor general, ya que carga significativamente en todos los problemas que configuran el instrumento.

4.5.2 Fiabilidad

El estudio de fiabilidad de un instrumento tiene por objetivo determinar la solidez del mismo, es decir, determinar si el procedimiento de medida arroja los mismos resultados al realizar pruebas repetidas (Hernández Sampieri y otros, 2003), lo que se traduce en estabilidad, repetibilidad y precisión (González, 1999) para el instrumento de evaluación. Para que un test sea fiable su coeficiente de fiabilidad debe ser lo más alto posible.

Al igual que hizo Fernández (1997a), en nuestro estudio determinamos la fiabilidad por consistencia interna de unidades o ítems (correlacionando los ítems del instrumento entre sí), ya que dicho procedimiento permite obtener valores de fiabilidad mediante una única administración del instrumento. Este análisis se ha realizado mediante el cálculo del coeficiente *alfa de Cronbach* aplicado los resultados en la fase de planteamiento y en la fase de desempeño final.

Los valores del *coeficiente de Cronbach* oscilan entre 0 y 1, donde el 0 significa fiabilidad nula y el 1 significa fiabilidad total. Aún cuando no se puedan dar reglas respecto de qué valor es aceptable, de manera orientativa se puede considerar que valores superiores a 0,75 se consideran altos y, por lo tanto, indican buena fiabilidad.

Fiabilidad para la fase de planteamiento

Al aplicar el paquete estadístico a las columnas de la matriz del Anexo 3, correspondientes a los resultados obtenidos en la fase de planteamiento para cada uno de los 12 problemas, se obtuvo el siguiente resultado:

```
R E L I A B I L I T Y   A N A L Y S I S   -   S C A L E   (A L P H A)

Reliability Coefficients

N of Cases =     82,0                    N of Items = 12

Alpha =    ,7890
```

El valor que se obtiene para el coeficiente es de 0.7890, lo que se puede considerar un valor aceptable y concluir que:

El instrumento es fiable respecto de la fase de planteamiento de los problemas mediante el MGL.

Fiabilidad para la fase de desempeño final

Al igual que para la fase de planteamiento, se realizó cálculo del *coeficiente de Cronbach* utilizando el paquete estadístico SPSS, esta vez sobre las columnas de la matriz del Anexo 3, correspondientes al desempeño final, obteniendo los siguientes resultados:

```
R E L I A B I L I T Y   A N A L Y S I S   -   S C A L E   (A L P H A)

Reliability Coefficients

N of Cases =     82,0                    N of Items = 12

Alpha =    ,7993
```

El valor que se obtiene para el coeficiente, en este caso, es de 0.7993, lo que se puede considerar un valor aceptable y concluir que:

El instrumento es fiable respecto de la fase de desempeño final de los problemas cuando se ha resuelto mediante el MGL.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este capítulo se describe el análisis realizado de los datos obtenidos a partir de la resolución de los problemas de las Fichas Nº 4 y Nº 6. En primer lugar, se indica cómo se codificaron los datos para la elaboración de una matriz sobre la que, posteriormente, se realizaron análisis de frecuencias simples y análisis clúster. Además, se ejemplifican los resultados estadísticos, a partir de las producciones de los estudiantes, con el fin de describir la utilización del MGL en la resolución de los problemas.

5.1 Codificación de datos

Para poder realizar el análisis estadístico de la información que se ha obtenido en las Fichas Nº 4 y Nº 6, se codificaron numéricamente los datos a partir de las variables definidas con anterioridad. La información codificada corresponde a:

- Identificación de los sujetos
- Identificación de los problemas
- Si se utiliza el MGL u otro método y si es o no correcto, en las fases de planteamiento y ejecución.
- Si es o no correcta la respuesta dada para cada problema en la fase de desempeño final.

Con esta codificación numérica se ha elaborado una matriz (Anexo 3) que se ha analizado, a través del paquete estadístico SPSS, con el fin de obtener información acerca de la resolución de los problemas propuestos.

5.1.1 Identificación de los sujetos

Fueron 82 el total de sujetos que resolvieron las 7 Fichas que conformaba la propuesta de aula y, por lo tanto, las dos Fichas analizadas. Para identificarlos numéricamente utilizamos números de dos dígitos: desde el 01 hasta el 82.

5.1.2 Codificación de los problemas

Como hemos descrito antes, los problemas a analizar son los que están contenidos en las fichas Nº 4 y Nº 6. Dado que en cada una de las fichas hay 6 problemas, han sido identificados con un letra de la “a” a la “f”, y para distinguir los problemas de una y otra ficha en el análisis, anteponemos el dígito 4 ó 6 dependiendo si corresponde a un problema de la Ficha Nº 4 o Nº 6 respectivamente, luego los problemas quedan identificados según especificamos en la Tabla 5.1.

Ficha	*Código*	*Problema*
Nº 4	4a	Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?
Nº 4	4b	La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?
Nº 4	4c	Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?
Nº 4	4d	En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?
Nº 4	4e	En un examen de matemática, las dos doceavas partes de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, las tres doceavas partes bien, seis doceavos suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?
Nº 4	4f	Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata?
Nº 6	6a	Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.
Nº 6	6b	Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.
Nº 6	6c	Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?
Nº 6	6d	Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?

Nº 6	6e	Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?
Nº 6	6f	Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

Tabla 5.1: Codificación de problemas analizados

5.1.3 Codificación de las fases de resolución

A continuación se detallará la codificación realizada para las fases de resolución que definimos anteriormente en el apartado 2.4.2 es decir, planteamiento, ejecución y desempeño final.

5.1.3.1 Codificación de la fase de planteamiento

En la fase de planteamiento se codificaron dos variables de forma simultánea: utilización o no del MGL y si el planteamiento es correcto o incorrecto. Las categorías definidas se describen a continuación en la Tabla 5.2:

Código	*Categoría de utilización MGL y corrección en la fase de planteamiento*
0	No existe información / No responde
1	Utiliza otro método incorrectamente
2	Utiliza otro método correctamente
3	Utiliza el MGL incorrectamente
4	Utiliza el MGL correctamente

Tabla 5.2: Codificación fase planteamiento

5.1.3.2 Codificación de la fase de ejecución

Al igual que en la fase anterior, en la ejecución se codificaron las variables uso o no uso del MGL y corrección, o no, de éste u otro método. Las categorías definidas se describen en la Tabla 5.3 a continuación:

Código	*Categoría de utilización MGL y corrección en la fase de ejecución*
0	No existe información / No responde
1	Utiliza otro método incorrectamente
2	Utiliza otro método correctamente
3	Utiliza el MGL incorrectamente
4	Utiliza el MGL correctamente

Tabla 5.3: Codificación fase de ejecución

5.1.3.3 Codificación de la fase de desempeño final

La fase de desempeño final se codificó considerando sólo una variable: resultado correcto o incorrecto, es decir, si la solución dada para el problema es correcta o no independientemente de si se ha utilizado el MGL en cualquiera de las fases anteriores. Dentro de la segunda posibilidad hemos incluido también el que se deje el problema sin responder, o que la información sea insuficiente. Las categorías definidas, entonces, son las siguientes (Tabla 5.4):

Código	*Categoría sobre corrección en la fase de desempeño final.*
0	Respuesta incorrecta / Información insuficiente / No responde
1	Responde de forma correcta

Tabla 5.4: Codificación fase de desempeño final

5.2 Resultados

En la matriz de datos (Anexo 3) se han especificado las fases definidas anteriormente (planteamiento, ejecución y desempeño final) para cada uno de los doce problemas del instrumento y para cada uno de los 82 sujetos. A través del paquete estadístico SPSS (versión 11.5), hemos estudiado, mediante análisis de frecuencias simples y análisis clúster, las respuestas dadas por los estudiantes.

En cuanto al estudio de frecuencias simples hemos realizado tres análisis:

- Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas en la resolución del problema y fase de resolución
- Porcentaje de empleo del MGL por problema y fase de resolución
- Porcentaje de utilización correcta e incorrecta del MGL por problema y fase de resolución

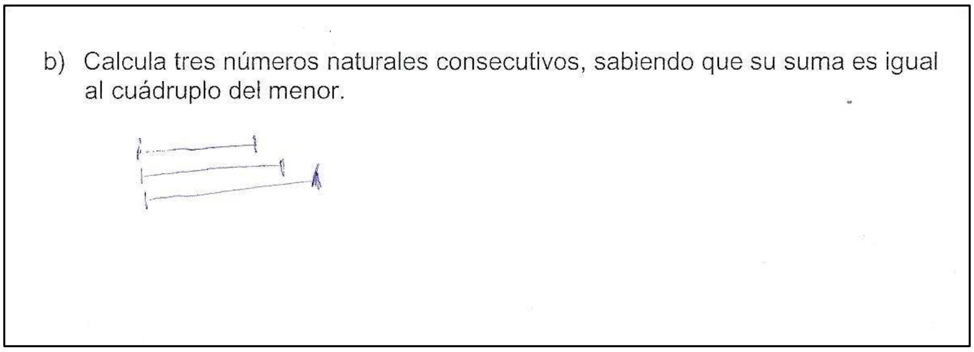
Además, en cada uno de los tres análisis se contemplan dos aspectos. En primer lugar, se hace un resumen de la frecuencia obtenida para cada tipo de respuesta en cada etapa y problema comentando, a modo de conclusiones, algunas peculiaridades que nos han parecido pertinentes.

En segundo lugar, utilizando las producciones de los estudiantes, se ha elaborado una descripción de los resultados obtenidos con el fin de detallar de qué forma se ha utilizado el MGL para resolver los problemas, haciendo énfasis en los distintos tipos de resoluciones que han elaborado los estudiantes y sus particularidades.

Por ejemplo, si se puede dar el caso de que dos estudiantes, E_1 y E_2, puedan recibir la misma puntuación en la resolución de un mismo problema P, es decir, la resolución estaría descrita por dos vectores idénticos $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ y, sin embargo, dichas resoluciones se pueden diferenciar sustantivamente cuando analizamos la información que nos entrega la resolución gráfica. Podemos observar esto en los ejemplos que describiremos a continuación (Ejemplo 5.1 y Ejemplo 5.2). Tanto en estos ejemplos, como en los que mostramos más adelante, especificaremos qué vector describe la resolución con la notación V(a, b, c), correspondiente a la codificación indicada anteriormente, para facilitar la lectura y, así, centrar la atención sobre los aspectos que se desean destacar de cada resolución.

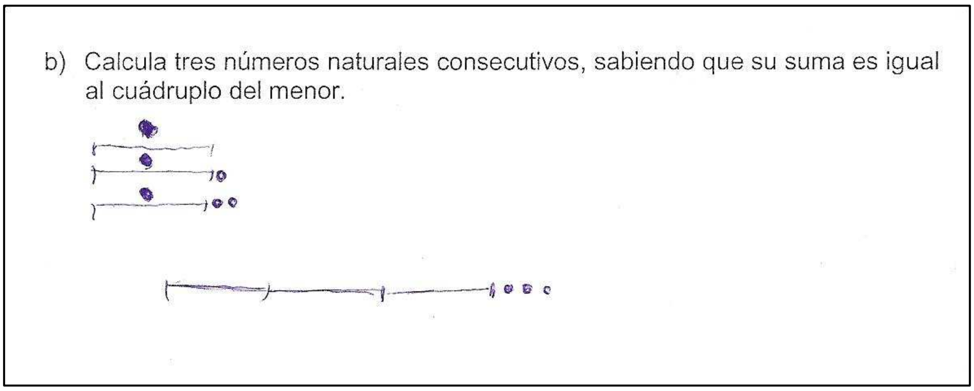
Ejemplo 5.1:

Resolución estudiante E_1
V(3,0, 0)



Ejemplo 5.2:

Resolución estudiante E_2
V(3, 0, 0)



En este caso las resoluciones de los dos estudiantes E_1 y E_2 fueron codificadas con vectores idénticos: $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2) = (3, 0, 0)$, lo que significa que en la etapa de planteamiento ambos utilizaron el MGL, aunque de forma incorrecta o incompleta. Por otro lado, en E_2 no hay información suficiente para valorar las fases de ejecución y desempeño final y, tanto E_1 como E_2, no dieron respuesta (desempeño final).

Pero si analizamos ambos casos podemos observar que hay más información que obtener a partir de dichas resoluciones (Martínez, Fernández y Flores, 2008), información relevante, como la siguiente:

- En la resolución E_1 observamos que el estudiante distingue una relación de orden de las magnitudes de los tres números consecutivos, representándolos como tres segmentos de diferente tamaño y ordenados de menor a mayor, pero no representa la relación entre un número y su consecutivo (el número + 1) de forma explícita.
- La relación entre un número y su consecutivo sí que está representada explícitamente por E_2. Incluso, el estudiante es capaz de representar la suma de los tres números reorganizando las unidades (puntos), poniéndolas al final. Es decir, utiliza la descomposición de los números sabiendo que la suma de las tres unidades se mantendrá constante en cualquier situación, pero no llega a representar la relación entre la suma de los tres números con el cuádruplo del menor, dejando así el planteamiento del problema incompleto.

Es así como lo que pretendemos con la serie de ejemplos ligados a cada una de las conclusiones es describir las diversos tipos de resoluciones que se han dado en el aula, diversidad que va más allá de si una determinada fase de resolución se ha realizado correcta o incorrectamente y utilizando o no el MGL.

Finalmente, completamos el estudio de frecuencias con un estudio clúster, en donde se ha considerado por separado las tres fases de resolución: planteamiento, ejecución y desempeño final. Dicho estudio tiene por objeto categorizar los problemas, con el fin de obtener información respecto de los tipos de problemas que puedan ser más apropiados en el momento de utilizar la resolución gráfica con el MGL en el aula.

5.2.1 Análisis de resultados correctos por problema y fase de resolución

En una primera aproximación al estudio de los resultados de los problemas propuestos en el aula, el análisis de frecuencias se ha centrado en si los estudiantes resolvieron de forma correcta o incorrecta cada una de las fases.

En el siguiente apartado encontraremos una tabla con dichas frecuencias porcentuales y, posteriormente, una descripción ejemplificada de las conclusiones realizadas a partir de la tabla.

5.2.1.1 Porcentaje de corrección por problema y fase de resolución

En la Tabla 5.5 se muestra un resumen de las frecuencias porcentuales obtenidas en cada uno de los problemas y para cada una de las fases, considerando si se llevaron a cabo de forma correcta o incorrecta. El detalle, problema a problema, de todos los datos referentes a cada fase de los problemas, se puede consultar en el Anexo 4.

Con el fin de resaltar los aspectos más importantes en la Tabla 5.5, para las fases de planteamiento y ejecución, sólo se consideraron los porcentajes de estudiantes que dieron una respuesta correcta o incorrecta en cada uno de los 12 problemas (Ficha Nº 4 y Ficha Nº 6), eliminando los sujetos que dejaron el problema en blanco. En la fase de desempeño final, dado que se considera dentro de las incorrectas a las respuestas en blanco, es la única fase en que las columnas suman un 100%.

	Corrección por fases y problemas					
Fase	Planteamiento		Ejecución		Desempeño final	
Corrección / Problema	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
4a	15,8	70,7	7,3	62,2	40,2	59,8
4b	40,2	41,5	22,0	28,0	72,0	28,0
4c	4,9	65,8	4,9	63,4	37,8	62,2
4d	18,3	68,3	18,3	56,1	52,4	47,6
4e	15,9	73,2	11,0	73,2	26,8	73,2
4f	23,2	59,8	11,0	64,6	35,4	64,6
6a	17,1	74,4	2,4	56,1	59,8	40,2
6b	50,0	36,6	6,1	40,3	67,1	32,9
6c	15,9	74,4	11,0	64,6	39,0	61,0
6d	34,1	54,9	17,1	28,1	73,2	26,8
6e	29,3	37,8	13,4	32,9	69,5	30,5
6f	61,0	24,4	19,5	45,1	45,1	54,9

Tabla 5.5: Frecuencia de resoluciones correctas/incorrecta por fases de resolución

A partir de la Tabla 5.5 podemos llegar a las siguientes conclusiones:

c1. En la mayoría de los problemas, el porcentaje de sujetos que plantea correctamente es alto. Destacan los problemas 4a, 4e, 6a y 6c en los que se obtuvo un porcentaje de planteamientos correctos superior al 70%.

c2. Los problemas en los que se obtuvo menor porcentaje de planteamientos correctos fueron el 4b, 6b, 6e y 6f.

c3. Nuevamente, los problemas 4b, 6b, 6e y 6f están en el grupo en el que se registra menor porcentaje de ejecuciones correctas, grupo que se completa con el problema 6d. Hay que destacar que en este problema, 6d, el porcentaje de planteamientos correctos baja considerablemente cuando pasa a la fase de ejecución, de un 55% se pasa a un 28%.

c4. Llama también la atención que el problema 6f tiene un porcentaje muy bajo de planteamientos correctos (24,4 %), pero aumenta el porcentaje de los que han realizado la fase de ejecución correcta, superando el 50% los estudiantes que llegan finalmente a un resultado correcto.

c5. En la fase de desempeño final, seis de los doce problemas (4b, 4d, 6a, 6b, 6d y 6e) obtienen un porcentaje bajo de resultados correctos, inferior al 50%, y, de ellos, cuatro problemas pertenecen a la Ficha Nº 6.

c6. Los problemas 4b, 6b y 6e destacan por haber tenido bajo nivel de corrección en las tres fases.

c7. El problema 4e es el único que tiene "estabilidad", con el mismo alto porcentaje, 73,20 %, de los sujetos que desarrollaron las tres etapas de forma correcta.

5.2.1.2 Descripción de corrección por problema y fase de resolución

Como ya hemos señalado, en este apartado queremos ejemplificar y describir las conclusiones que se han obtenido en el apartado anterior, a partir de la tabla de frecuencias (Tabla 5.4), utilizando las producciones de los estudiantes.

Descripción a partir de la conclusión 1 (c1):

c1. En la mayoría de los problemas, el porcentaje de sujetos que plantea correctamente es alto. Destacan los problemas 4a, 4e, 6a y 6c en los que se obtuvo un porcentaje de planteamientos correctos superior al 70%.

Con el fin de ejemplificar la particularidad en los planteamientos de los problemas 4a, 4e, 6a y 6c y considerando que en este apartado sólo hemos centrado la atención en la corrección de cada fase de resolución, independiente del método utilizado, nos fijamos en los sujetos que en la fase de planteamiento han obtenido como valores "4 = Utiliza el MGL correctamente" ó "2 = Utiliza otro método correctamente", y por lo tanto, los vectores que describen la resolución realizada por los sujetos tienen la forma: (4, x, x) ó (2, x, x).

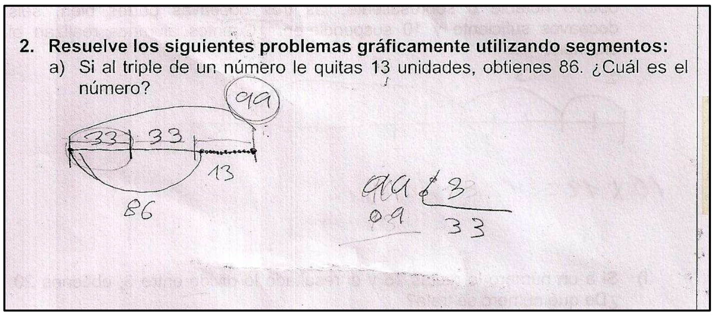
Ejemplificaciones

Con los ejemplos que anexamos a continuación destacaremos tres elementos que hemos encontrado en las resoluciones del tipo (4, x, x) y (2, x, x): el reconocimiento de textos intermedios algebraicos o aritméticos, la utilización de un planteamiento gráfico para generar uno simbólico y la dependencia o no dependencia de la unidad para representar cantidades conocidas.

Primero, ejemplificaremos la diferencia existente entre dos formas de planteamientos correctos que hemos descrito en el apartado 2.4.1.2: uno que consideramos *texto intermedio aritmético (TIAR)* y otro *texto intermedio algebraico (TIAL)*. En los ejemplos c1.1, c1.2 y c1.3 podemos observar tres planteamientos gráficos correctos, de los que deseamos resaltar cómo se lleva a cabo la manipulación de una cantidad desconocida, como si fuese conocida. Es lo que se distingue como un proceso *de traducción algebraico*, aún cuando en estos casos se está utilizando una expresión gráfica para el planteamiento y no una expresión simbólica (lenguaje algebraico habitual).

Ejemplo c1.1:

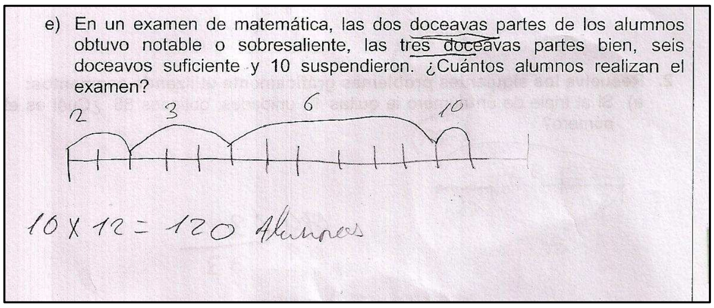
V(4, 4, 1)



En el Ejemplo c1.1 observamos que el estudiante representa la cantidad desconocida con un segmento determinado, a partir del cual representa el triple de dicha cantidad y el resultado de quitarle 13 unidades al triple del número buscado. Es notable cómo la magnitud que ocupan las 13 unidades en la gráfica no guarda relación con las 86 unidades restantes. Es decir, la resolución no se centra en la representación proporcional de ese dato, sino en que esas 13 unidades más las 86 unidades restantes permiten conocer cuánto es el triple del número y por tanto, el número (cantidad desconocida).

Ejemplo c1.2:

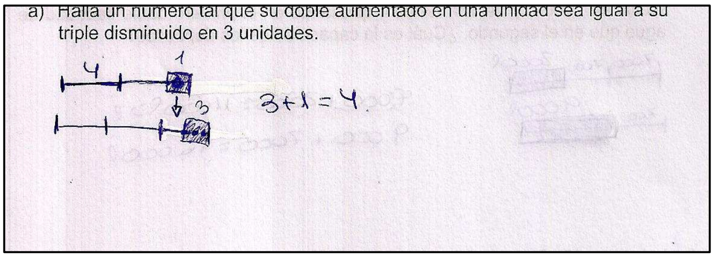
V(4, 4, 1)



En el Ejemplo c1.2, la cantidad desconocida es el segmento total, que representa el número de estudiantes que realizaron el examen. Aún cuando se desconoce la longitud de dicho segmento, es posible representar fracciones de éste y, a partir de ello, resolver el problema. En el desarrollo llama la atención que al poner los datos en la gráfica, el sujeto no hace diferencia respecto del tipo de número que está utilizando, es decir, los números 2, 3 y 6, que aparecen en la gráfica, se refieren a fracciones (2 partes de 12, 3 partes de 12 y 6 partes de 12, respectivamente), mientras que el 10 es un número natural, se refiere a un número de personas.

Ejemplo c1.3:

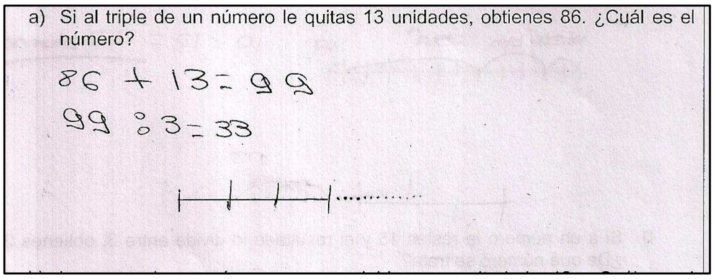
V(4, 4, 1)



En el Ejemplo c1.3 el planteamiento realizado pasa por traducir el enunciado a una gráfica utilizando el MGL, representación en la que se ubican todos los datos del enunciado que, posteriormente, permitirían ejecutar y dar respuesta al problema. La particularidad de este ejemplo, respecto de los anteriores, radica en que los planteamientos de los problemas de la Ficha Nº 6 implican realizar 2 RGL´s y, por lo tanto, además de representar una cantidad desconocida y operar sobre dicha representación, es necesario comparar dos relaciones gráficas que involucran una misma incógnita, estableciendo alguna nueva relación para determinar el valor buscado.

Ejemplo c1.4:

V(2, 2, 1)


a) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

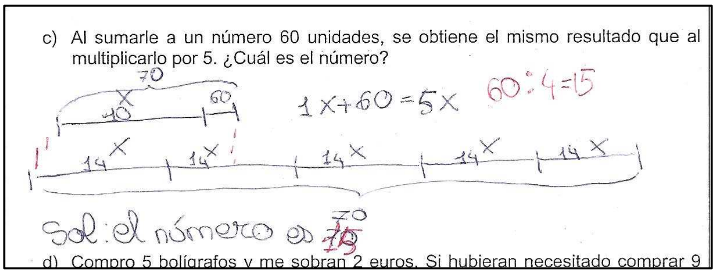
86 + 13 = 99

99 : 3 = 33

A diferencia de los tres ejemplos anteriores, en el Ejemplo c1.4, podemos apreciar un TIAR en que se utiliza un registro exclusivamente numérico. Se determina la cantidad desconocida a partir de cantidades conocidas, mediante expresiones y operaciones aritméticas. Luego, se ha realizado un *proceso de traducción aritmético*.

Ejemplo c1.5:

V(4, 1, 0)


c) Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?

1 X + 60 = 5 X

60 : 4 = 15

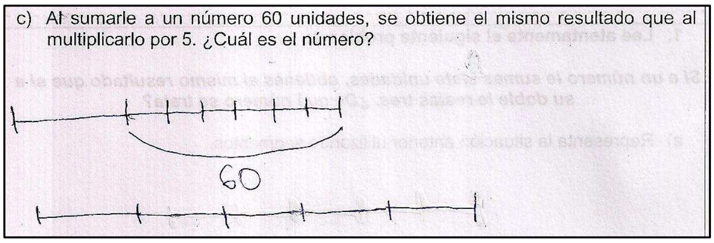
Sol: el número es ~~15~~ 70

d) Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9

Otro elemento a destacar es la forma en que se utiliza el planteamiento gráfico como base para la traducción al lenguaje simbólico. No es extraño que esto suceda en un problema que corresponde a la Ficha Nº 6, ya que en la Ficha Nº 5 los estudiantes ya han realizado la traducción de los problemas de la Ficha Nº 4 a lenguaje simbólico. Sin embargo, lo más destacable es que el sujeto establezce su planteamiento a partir de la representación utilizando el MGL. En el Ejemplo c1.5 se representa, en primer lugar, la cantidad desconocida "x", luego la cantidad aumenta en 60 unidades y, posteriormente, 5 veces la misma cantidad. Cada una de estas representaciones tiene su correspondiente traducción al lenguaje simbólico algebraico. Este es un claro ejemplo de cómo este estudiante utiliza la representación gráfica a través del MGL, como una conexión significativa entre el leguaje verbal y el simbólico, ya que nombra a la cantidad desconocida como "x" en la representación gráfica, para posteriormente plantear una ecuación equivalente. Cabe destacar que lo que aparece en rojo dentro de la producción escrita del estudiante, son las correcciones realizadas en clases en forma grupal.

Ejemplo c1.6:

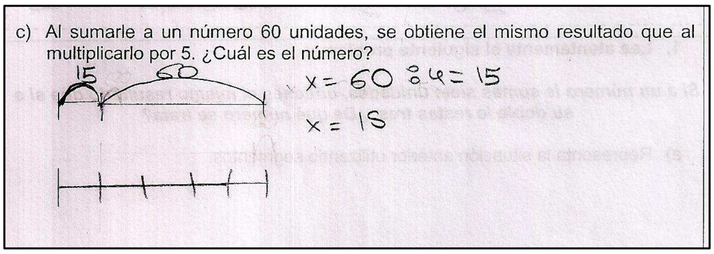
V(4, 0, 0)



Un último elemento a destacar a partir de la c1 es la dependencia o no de la unidad para representar una cantidad conocida. Observemos que en el Ejemplo c1.6 existe cierta "dependencia" a representar el número 60 en relación con la unidad, en este caso se representa el 60 con 6 segmentos que representan 10 unidades cada uno. En cambio, en el Ejemplo c1.7 las 60 unidades se representan utilizando un único segmento que posteriormente se comparará con 4 veces la cantidad desconocida.

Ejemplo c1.7:

V(4, 4, 1)



Descripción a partir de la conclusión 2 (c2):

c2. Los problemas en los que se obtuvo menor porcentaje de planteamientos correctos fueron el 4b, 6b, 6e y 6f.

Al igual que en la c1 anterior, la atención para ejemplificar la particularidad en los planteamientos de los problemas 4b, 6b y 6f, está puesta en la primera componente de los vectores, en este caso, en los sujetos que en la fase de planteamiento han obtenido como valores "3 = Utiliza el MGL incorrectamente" ó "1 = Utiliza otro método incorrectamente". Por lo tanto, los vectores que describen esta situación tienen la forma: (3, x, x) ó (1, x, x).

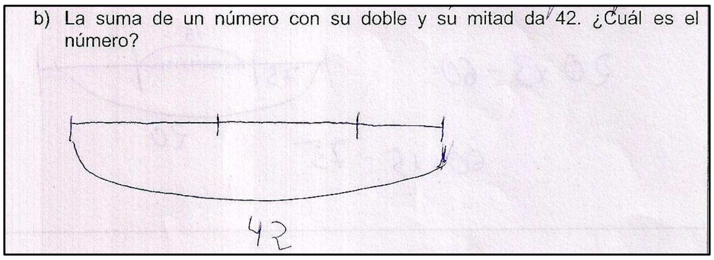
Ejemplificaciones

En los tres problemas que atañen a la c2 (4b, 6b y 6f) sólo encontramos planteamientos incorrectos de la forma (3, x, x) y, a partir de ellos, resaltamos a través de los ejemplos, que pueden estar asociado a que: se comete un error en el planteamiento gráfico lo que trunca la resolución, el error guarda relación con un planteamiento incompleto o no existe coherencia entre el planteamiento y el enunciado del problema.

En el primer caso encontramos desarrollo de estudiantes que tienen una noción de cómo utilizar el MGL, sin embargo, cometen algún error al de utilizarlo para traducir el enunciado, lo que trunca la resolución del problema. En dichos casos nos encontramos con resoluciones descritas, la mayoría de las veces, con el vector (3, 0, 0).

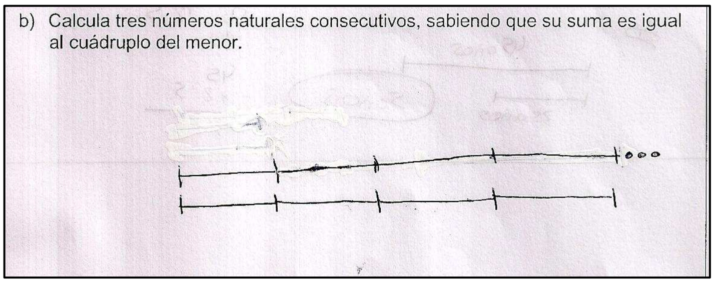
Ejemplo c2.1:

V(3, 0, 0)



Ejemplo c2.2:

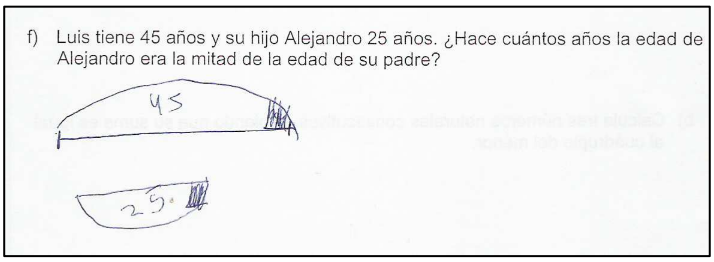
V(3, 0, 0)



En el Ejemplo c2.1 vemos cómo se representa la adición sólo entre el doble del número y su mitad (cuando debería ser entre el número, su doble y su mitad). En el Ejemplo c2.2, en la primera RGL sobra un segmento, lo que no permite comparar las relaciones representadas. En ambos casos, el error cometido se centra en la imposibilidad para definir cuáles son los sumandos a representar.

Ejemplo c2.3:

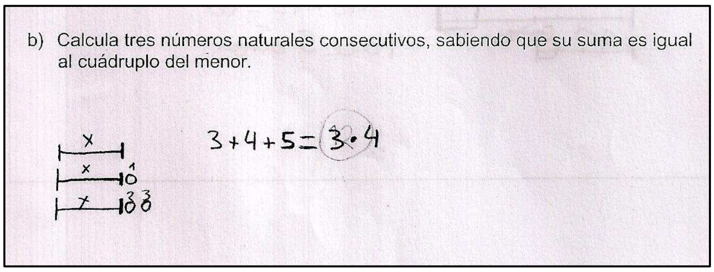
V(3, 0, 0)



A diferencia de los ejemplos anteriores, en el Ejemplo c2.3 observamos que la dificultad del estudiante es que no logra representar una relación entre cantidades. Se representa la edad actual de ambas personas (datos) y el tiempo que ha transcurrido desde que la edad del padre era el doble de la del hijo (cantidad desconocida o incógnita). Pero en ese punto se atasca la representación, ya que el estudiante no representa que, en ese momento, la edad del padre era el doble de la del hijo, información que permite resolver el problema. Luego, el planteamiento es incompleto y también está definido por el vector (3, 0, 0).

Ejemplo c2.4:

V(3, 2, 1)

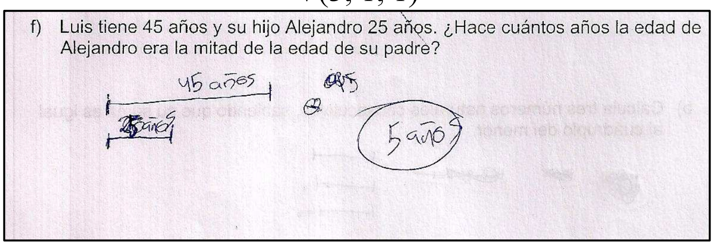


En otros casos, aún cuando la representación gráfica del enunciado utilizando el MGL es incompleta, el estudiante la utiliza para resolver el problema o para justificar la resolución llevada a cabo.

En el Ejemplo c2.4 se observa que el estudiante representa los números consecutivos, pero no la suma de ellos ni el cuádruple del menor. Sin embargo, a partir de dicha representación, obtiene la solución al problema. Se trata de una resolución en que, aún cuando el planteamiento utilizando el MGL es incorrecto, la ejecución y el desempeño final utilizando otro método son correctos. En este caso el vector que describe la resolución es (3, 2, 1).

Ejemplo c2.5:

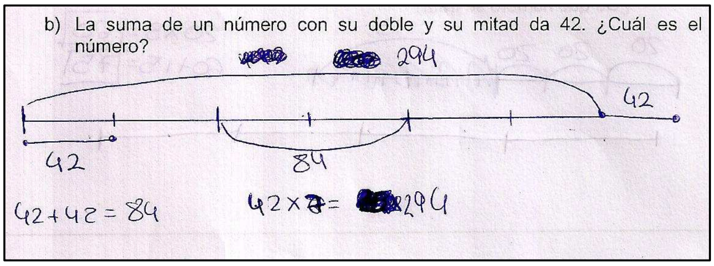
V(3, 1, 1)



Nuevamente se observa en el Ejemplo c2.5 que el estudiante ha realizado un planteamiento gráfico incompleto utilizando el MGL. Posteriormente, lleva a cabo la ejecución utilizando el SR aritmético y, por último, la respuesta al problema no guarda relación aparente con los dos desarrollos anteriores. Observamos, por lo tanto, que el estudiante sabe la respuesta del problema e intenta justificarla sin éxito gráficamente y aritméticamente. Es una resolución del tipo (3, 1, 1).

Ejemplo c2.6:

V(3, 3, 0)



También hemos encontrado algunos casos en que no existe coherencia entre el enunciado y la representación utilizando el MGL, pero el estudiante trabaja sobre dicha representación estableciendo un resultado (incorrecto). En el caso ilustrado en el Ejemplo c2.6, vemos que los datos se representan de forma incorrecta desde el inicio. De hecho, al segmento que supuestamente representa la cantidad desconocida se le asigna como longitud 42, dato que encontramos en el enunciado por lo que, según eso, la cantidad desconocida no sería tal. Este es el caso de una resolución caracterizada por el vector (3, 3, 0).

Descripción a partir de la conclusión 3 (c3):

c3. *Nuevamente, los problemas 4b, 6b, 6e y 6f están en el grupo en el que se registra menor porcentaje de ejecuciones correctas, grupo que se completa con el problema 6d. Hay que destacar que en este problema, 6d, el porcentaje de planteamientos correctos baja considerablemente cuando pasa a la fase de ejecución, de un 55% se pasa a un 28%.*

La c3 se refiere a aquellos problemas que obtuvieron menor porcentaje de ejecuciones correctas, por lo que nos fijamos en aquellos sujetos cuyos vectores tienen:

Segunda componente, uno de los tres valores siguientes

- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente
- 1 = Utiliza otro método de forma incorrecta

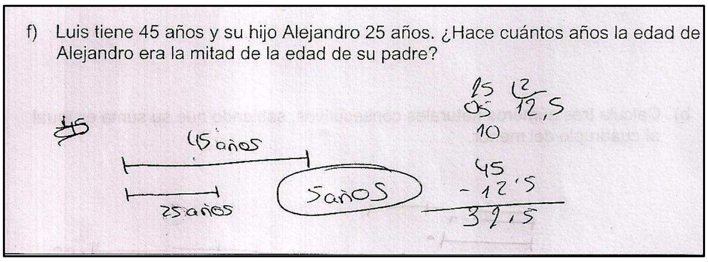
Por lo tanto, son de la forma: (x, 3, x) ó (x, 1, x) ó (x, 0, x).

Ejemplificaciones

Queremos resaltar tres aspectos de las producciones incorrectas en la fase de ejecución. En primer lugar, encontramos resoluciones de la forma (3, 1, 1), es decir, estudiantes que dan una respuesta correcta al problema, pero tanto el planteamiento como la ejecución han sido incorrectos.

Ejemplo c3.1:

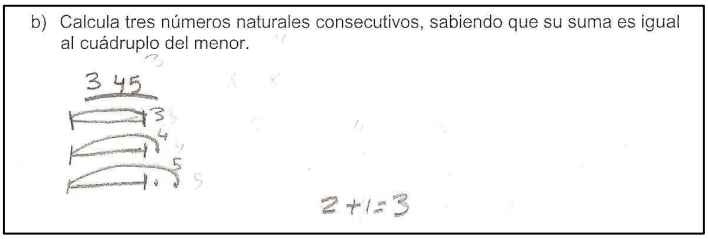
V(3, 1, 1)



En el Ejemplo c3.1 podemos observar que el proceso de traducción lleva a un planteamiento gráfico incompleto que, además, no guarda relación con la producción aritmética que se hace en la fase de ejecución en la que se intenta obtener, inútilmente, mediante operaciones aritméticas (división y sustracción), el número 5.

Ejemplo c3.2:

V(3, 1, 1)

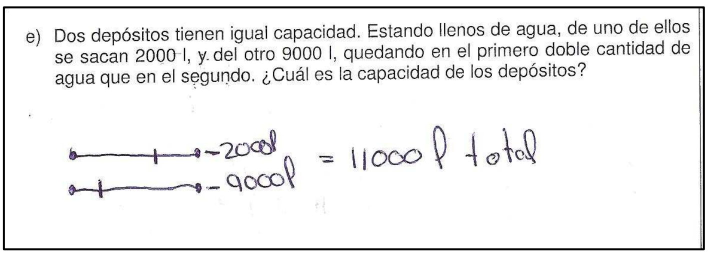


En el Ejemplo c3.2 se observa que el estudiante realiza una adición de la que obtiene el número buscado y, a partir del resultado, responde al problema sin que dicha operación, aparentemente, guarde relación con el planteamiento gráfico (incompleto) que se ha hecho. Es posible que el sujeto haya sumado las unidades conocidas del segundo y tercer número pero, aún así, no justifica en la fase de ejecución qué relación tiene dicha operación con el resultado correcto.

En segundo lugar, nos encontramos con resoluciones en donde la fase de ejecución, siendo incorrecta, no pretende justificar un determinado resultado. Los sujetos realizan operaciones con los datos o cantidades conocidas intentando dar respuesta al problema, es decir, "probando" (ensayo-error).

Ejemplo c3.3:

V(3, 1, 0)

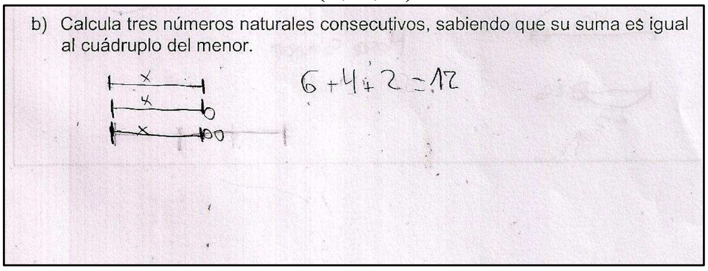


En los ejemplos c3.3 y c3.4 las resoluciones son del tipo (3, 1, 0).

En c3.3 se suman los 2000 litros y 9000 litros que se quitaron al primer y segundo estanque, respectivamente, lo que equivale al total de agua que se ha sacado de los estanques y no a la capacidad de éstos. No se ha tomado en cuenta que la cantidad que queda en el segundo estanque es la mitad de la que queda en el primero, relación que tampoco se ha representado en la fase de planteamiento.

Ejemplo c3.4:

V(3, 1, 0)

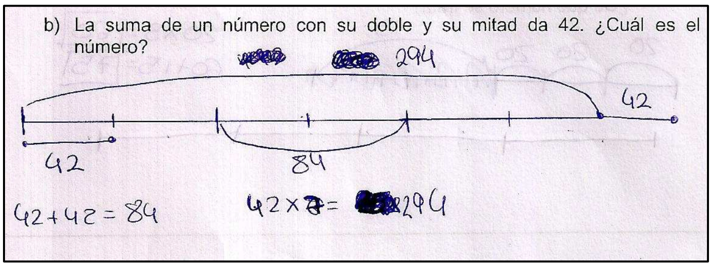


Aún cuando el Ejemplo c3.4 también está descrito por el vector (3, 1, 0), el estudiante ha realizado una adición de 3 números que no aparecen como datos en el enunciado: suma tres números pares consecutivos, obteniendo por resultado 12. Es relevante el hecho de que, en este ejemplo, no parece que exista relación entre el planteamiento gráfico y la ejecución aritmética.

En los dos ejemplos siguientes, c3.5 y c3.6, nos encontramos con resoluciones del tipo (3, 3, 0). Es decir, la fase de ejecución se ha realizado sobre un planteamiento gráfico incorrecto.

Ejemplo c3.5:

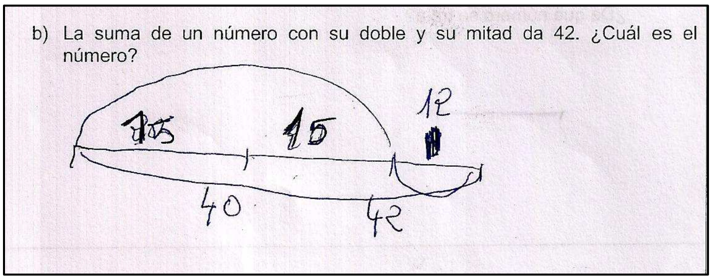
V(3, 3, 0)



En el Ejemplo c3.5 se arrastra un error desde la fase planteamiento, que es designar el valor de 42 a la mitad del segmento que representa el número buscado, y no a la suma total. Eso trivializa el problema, ya que el sujeto, además de determinar que el número buscado es 84, calcula cuánto es la suma del número más su doble y su mitad y ese valor lo lleva a la gráfica, pero lo representa de forma incorrecta.

Ejemplo c3.6:

V(3, 3, 0)

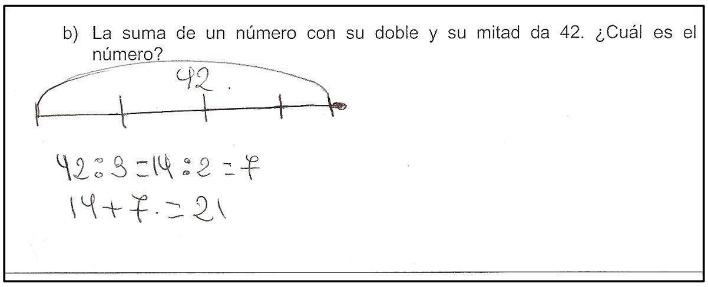


El caso de la resolución del Ejemplo c3.6 es diferente, ya que se plantea incorrectamente, pues no se representan todas las cantidades descritas en el enunciado. En la fase de ejecución se intenta descomponer el 42 de manera “conveniente”, con un procedimiento del tipo “ensayo y error”, para determinar números que cumplan con las condiciones del enunciado, pero no se llega a valores que cumplan con las relaciones descritas en el enunciado y que, a su vez, se ajusten a la gráfica trazada.

Finalmente, existen resoluciones del tipo (4, 1, 0) en donde, aún cuando se ha planteado el problema de forma correcta y utilizando el MGL, la fase de ejecución es incorrecta.

Ejemplo c3.7:

V(4, 1, 0)



En este caso se divide la suma total por el “número de veces enteras” que se ha sumado el número y, posteriormente, ese número se divide por dos, aparentemente para obtener la mitad del número. A continuación, para dar la respuesta, incorrecta en este caso, el estudiante suma el resultado de ambas divisiones.

Descripción a partir de la conclusión 4 (c4):

c4. Llama la atención que el problema 6f tiene un porcentaje muy bajo de planteamientos correctos (24,4%), pero aumenta el porcentaje de los que han realizado la fase de ejecución correcta, superando el 50% los estudiantes que llegan finalmente a un resultado correcto.

En este caso, muchos sujetos han planteado el problema utilizando el MGL de forma incorrecta, pero es probable que hubieran podido plantearlo correctamente utilizando otro método para resolver el problema con éxito. Esto se explica así porque, dado que nuestro objetivo es analizar la resolución de los problemas mediante la utilización del MGL, los estudiantes han recibido como instrucción explícita que resuelvan mediante dicho método.

Aclarado lo anterior, y volviendo a tomar como criterio la corrección de las respuestas independientemente del método utilizado, consideramos en esta ejemplificación aquellos problemas cuyo vector tiene como:

Primera componente, uno de los tres valores siguientes

- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente
- 1 = Utiliza otro método incorrectamente
- 0 = No existe información / No responde

Segunda componente, uno de los dos valores siguientes

- 4 = Utiliza el MGL correctamente
- 2 = Utiliza otro método correctamente

Tercera componente:

- 1 = Respuesta correcta

Teniendo en cuenta que sobresale el porcentaje de respuestas correctas entre la fase de ejecución y la fase de desempeño final, hay que considerar también los vectores que tienen:

Segunda componente, uno de los tres valores siguientes

- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente
- 1 = Utiliza otro método de forma incorrecta
- 0 = No existe información / No responde

Tercera componente:

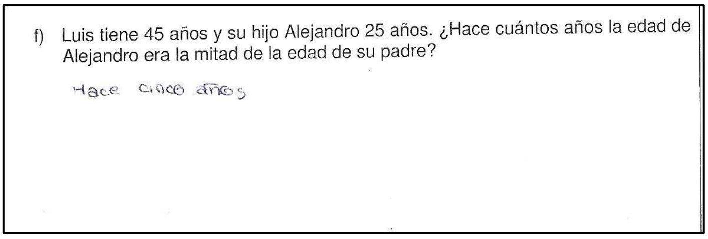
- 1 = Respuesta correcta

Ejemplificaciones

Aún cuando son muchas las posibles combinaciones que corresponden a la c4, en la realidad sólo encontramos tres tipos, que ejemplificamos a continuación.

Ejemplo c4.1:

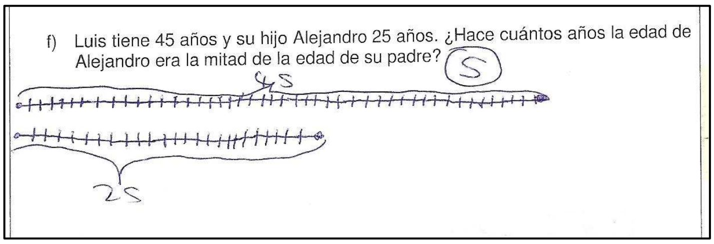
V(0, 0, 1)



El problema 6f es el único problema en que nos encontramos resoluciones como las del Ejemplo c4.1, es decir, del tipo (0, 0, 1). Casos como éste explican que haya aumentado la cantidad de respuestas correctas en la etapa de desempeño final, en comparación con las fases de planteamiento y ejecución. Vemos que el estudiante no ha planteado el problema y, por lo mismo, no desarrolla una ejecución para justificar la respuesta, que sin embargo obtiene.

Ejemplo c4.2:

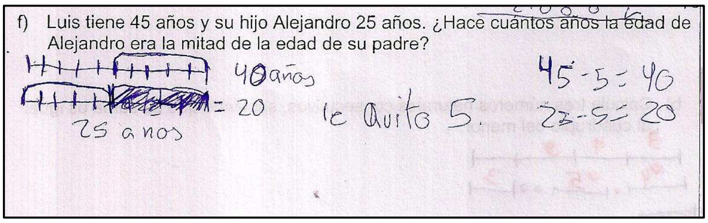
V(3, 0, 1)



Un caso similar al ejemplo anterior es el del Ejemplo c4.2, pero aquí el estudiante intenta producir un texto intermedio, que en este caso podemos definir como TIAR. El estudiante representa las edades dependiendo absolutamente de la unidad y no llega a representar la cantidad desconocida. A partir de este planteamiento incompleto no se lleva a cabo la fase de ejecución, aún cuando el sujeto obtiene la respuesta correcta, que ha anotado y encerrado en un círculo.

Ejemplo c4.3:

V(3, 2, 1)



En el ejemplo c4.3 nos encontramos con una resolución curiosa descrita por el vector (3, 2, 1), es decir, a pesar de que la fase de planteamiento es incorrecta, tanto la fase de ejecución como la de desempeño final son correctas. En la fase de planteamiento, al igual que en el Ejemplo c4.2, se refleja una dependencia de la unidad para representar la edad del padre y la del hijo y no se representa la cantidad desconocida. Sin embargo, en la fase de ejecución vemos que se realiza una comprobación aritmética a modo de justificación de la respuesta dada.

Descripción a partir de la conclusión 5 (c5):

c5. En la fase de desempeño final, seis de los doce problemas (4b, 4d, 6a, 6b, 6d y 6e) obtienen un porcentaje bajo de resultados correctos, inferior al 50%, y, de ellos, cuatro problemas pertenecen a la Ficha Nº 6.

La c5 se refiere a los problemas en que se ha obtenido menor frecuencia de respuestas correctas. Nos hemos centrado en aquellos sujetos que en los problemas mencionados han obtenido como valor de la fase de desempeño final “0 = Responde de forma incorrecta / Información insuficiente / No responde”. Por lo tanto, el vector tiene la forma: (x, x, 0).

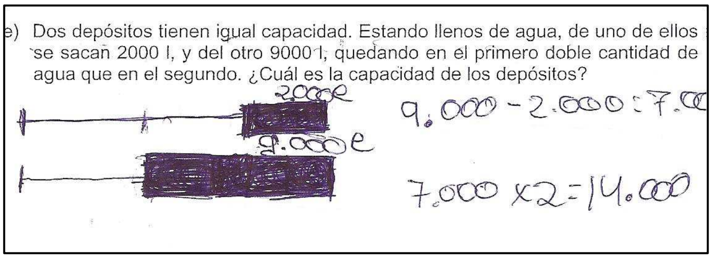
Ejemplificaciones

Cuando nos referimos a que buscamos resoluciones caracterizadas por vectores de la forma (x, x, 0) no planteamos que el desempeño final incorrecto sea independiente de las fases anteriores, ya que muy por el contrario, es una consecuencia del trabajo que ha realizado por escrito y mentalmente el estudiante, previo a dar una respuesta incorrecta o a dejarlo sin responder.

Al revisar las resoluciones en las que se obtiene un resultado incorrecto o se deja el problema sin contestar, observamos tres casos. En primer lugar, aquellos problemas en que tanto la fase de planteamiento como la de ejecución del problema son correctas y, aún así, el desempeño final es incorrecto o se deja sin contestar. También encontramos aquellas resoluciones en que, aunque la fase de planteamiento es correcta, la fase de ejecución y la de desempeño final no lo son. Y finalmente, encontramos casos en que, a partir de un planteamiento incorrecto, se obtiene una ejecución incorrecta o en blanco y un desempeño final incorrecto o en blanco.

Ejemplo c5.1:

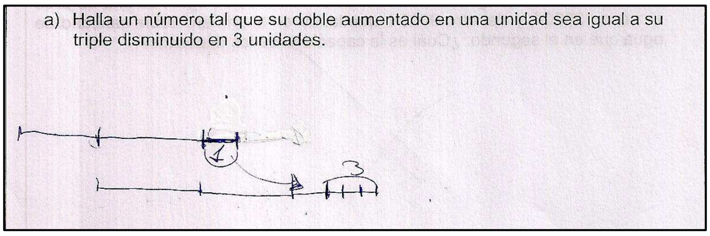
V(4, 4, 0)



En los ejemplos c5.1 y c5.2 vemos resoluciones que representan dos casos correspondientes al primer tipo descrito anteriormente. En el primero de ellos se observa que el estudiante plantea correctamente las relaciones descritas en el enunciado, mediante la producción gráfica de un TIAL, posteriormente trabaja sobre dicho texto intermedio y deja como resultado 14.000 litros. Es decir, habiendo realizado todos los cálculos para responder correctamente, se queda en el paso anterior a dar la respuesta al problema.

Ejemplo c5.2:

V(4, 4, 0)

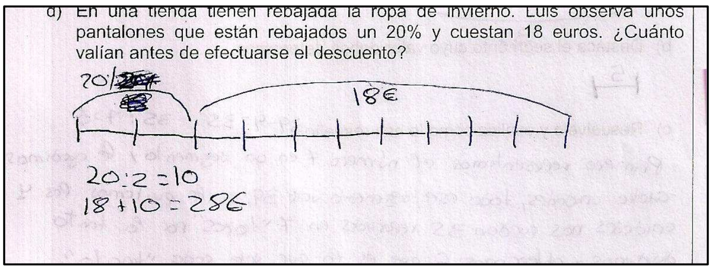


El Ejemplo c5.2 refleja cómo el estudiante, una vez elaborado el texto intermedio mediante el planteamiento de dos RGL´s, las compara y llega a establecer una relación entre ellas, en la que, implícitamente, observamos que cuenta con la información necesaria para expresar cuánto mide el segmento buscado y, sin embargo, no explicita la respuesta.

En segundo lugar, encontramos ejemplos de desarrollos en que el planteamiento del problema es correcto, pero ni la fase de ejecución ni la de desempeño final lo son.

Ejemplo c5.3:

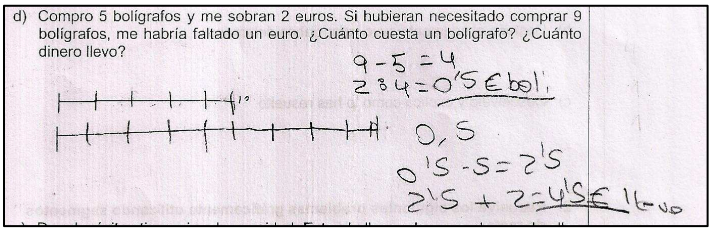
V(4, 3, 0)



En el Ejemplo c5.3 observamos que se ha elaborado un TIAL representando de forma correcta las cantidades y relaciones descritas en el enunciado del problema, pero en el momento de llevar a cabo la fase ejecución queda al descubierto que el sujeto confunde las cantidades que hay en juego (porcentaje y dinero), lo que lleva a resolver el problema de forma incorrecta.

Ejemplo c5.4:

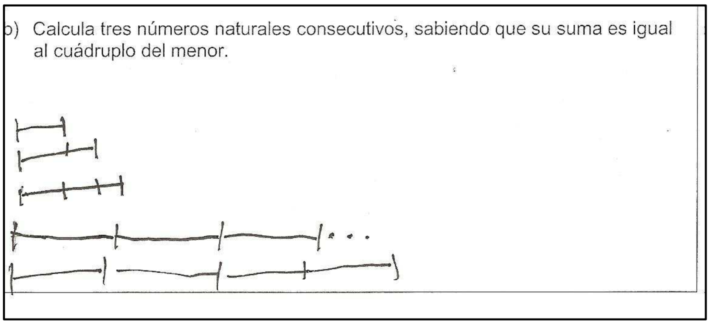
V(4, 1, 0)



En el Ejemplo c5.4 también encontramos un planteamiento correcto, mediante la elaboración de un texto intermedio utilizando el MGL. Sin embargo al momento de comparar las dos RGL´s, el estudiante abandona la representación gráfica para resolver el problema aritméticamente, mecanismo mediante el cual no llega a la respuesta correcta.

Ejemplo c5.5:

V(4, 0, 0)

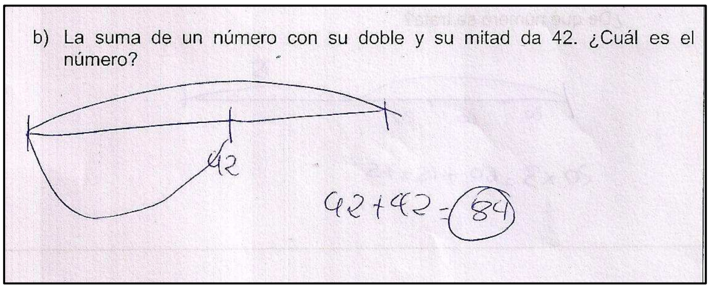


En el Ejemplo c5.5 observamos que el sujeto plantea un TIAL utilizando el MGL de forma correcta, mediante el planteamiento de dos RGL´s, pero luego no continúa resolviendo el problema, ni mediante el MGL ni utilizando otro método y, por lo tanto, el problema queda sin resultado.

En el tercer caso, que ejemplificamos a continuación, se obtiene una respuesta incorrecta o en blanco teniendo como punto de partida un planteamiento incorrecto.

Ejemplo c5.6:

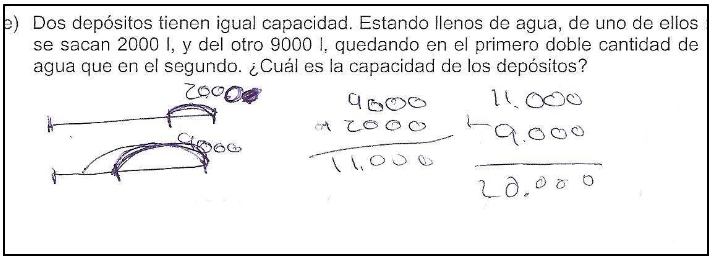
V(3, 3, 0)



En el Ejemplo c5.6 se ha elaborado un texto intermedio incorrecto, utilizando el MGL y, luego, sobre dicho texto se ha resuelto erróneamente el problema. Es un desarrollo caracterizado por el vector (3, 3, 0).

Ejemplo c5.7:

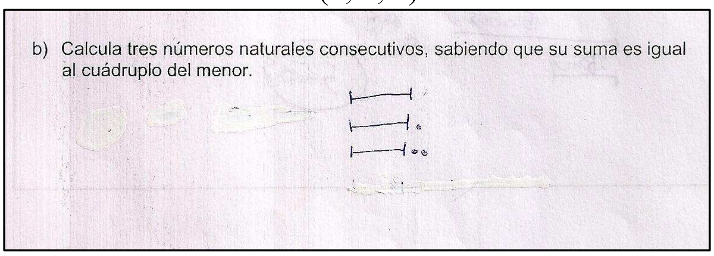
V(3, 1, 0)



El ejemplo (c5.7) está caracterizado por el vector (3, 1, 0). Se plantea el problema mediante la elaboración de un texto intermedio utilizando el MGL incorrectamente, ya que el texto está incompleto en el sentido de que representa las cantidades descritas en el enunciado, pero no la relación entre ellas. Posteriormente, y al margen del planteamiento gráfico, se desarrolla la fase de ejecución de forma aritmética. No es raro que se deje el planteamiento gráfico de lado ya que, al no representar todas las relaciones presentes en el enunciado de forma correcta, no es posible trabajar sobre el planteamiento gráfico para obtener información nueva.

Ejemplo c5.8:

V(3, 0, 0)



Similar es el caso del Ejemplo c5.8, ya que también se plantea incorrectamente a través del MGL; pero en este caso el sujeto no intenta resolver el problema por otra vía, como en el ejemplo anterior, y abandona después de la primera fase. El vector que describe esta resolución es de la forma (3, 0, 0).

Descripción a partir de la conclusión 6 (c6):

c6. *Los problemas 4b, 6b y 6e destacan por haber tenido bajo nivel de corrección en las tres fases.*

Para identificar aquellos casos que nos permitan describir la c6, hemos seleccionado aquellos problemas que, tanto la fase de planteamiento, como la fase de ejecución, así como el desempeño final, se hace de forma incorrecta. Luego los vectores posibles son aquellos formados por:

Primera componente, uno de los tres valores siguientes

- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente
- 1 = Utiliza otro método incorrectamente
- 0 = No existe información / No responde

Segunda componente, uno de los tres valores siguientes

- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente
- 1 = Utiliza otro método incorrectamente
- 0 = No existe información / No responde

Tercera componente:

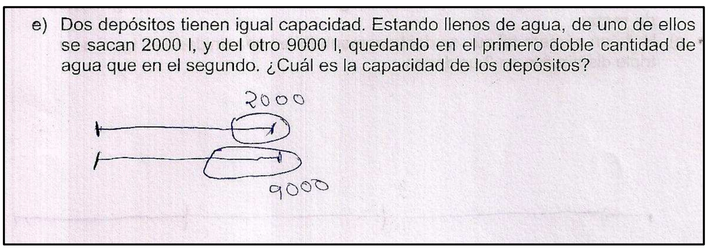
- 0 = Respuesta incorrecta

Ejemplificaciones

En primer lugar vamos a mostrar desarrollos en que los estudiantes han planteado mal el problema y, a partir de ello, no desarrollan la fase de ejecución, es decir la dejan en blanco. Es así como los desarrollos están descritos por un vector de la forma (3, 0, 0).

Ejemplo c6.1:

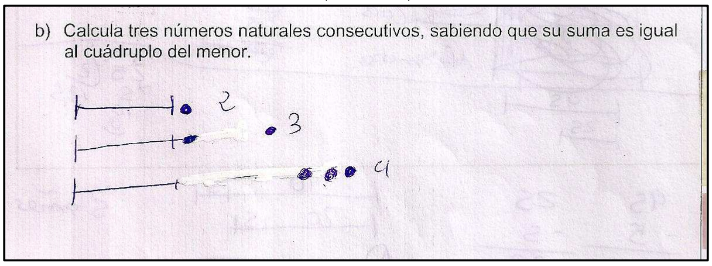
V(3, 0, 0)


e) Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

En el Ejemplo c6.1 observamos que, después de plantear incorrectamente el problema (utilizando el MGL), se abandona la resolución.

Ejemplo c6.2:

V(3, 0, 0)

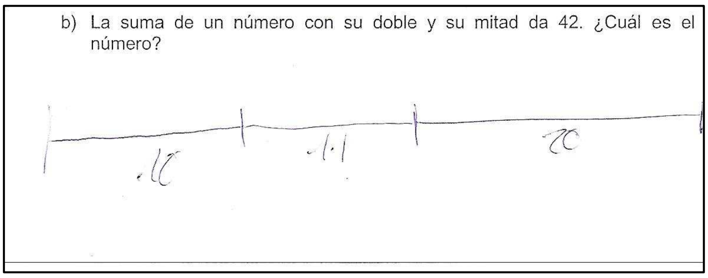


Similar es el caso del Ejemplo c6.2 pero, en este caso, a partir de un planteamiento incorrecto, se deduce una posible solución (incorrecta) que se escribe, pero no se justifica. Luego es una resolución descrita por el vector (3, 0, 0).

En segundo lugar, destacamos resoluciones que han sido desarrollados incorrectamente en las fases de planteamiento y ejecución y que se dejan sin contestar.

Ejemplo c6.3:

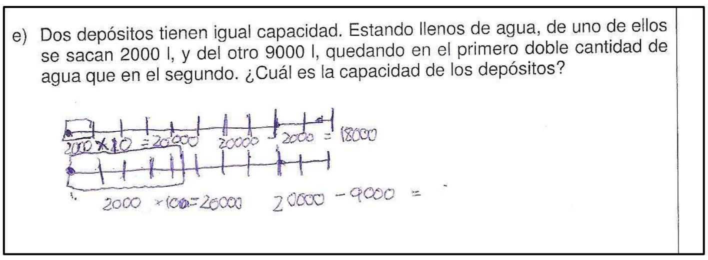
V(1, 1, 0)



La resolución del Ejemplo c6.3 se ha descrito con el vector (1, 1, 0). Aunque existen "segmentos", consideramos que no se ha utilizado el MGL en la fase de planteamiento. Se ha realizado una descomposición aritmética que coincide con el total de la suma, pero que no guarda relación con el texto del problema. Finalmente, no se distingue que se haya destacado o remarcado una de las cantidades como resultado o solución del problema, razón por la que consideramos que el problema se deja sin solución.

Ejemplo c6.4:

V(3, 3, 0)

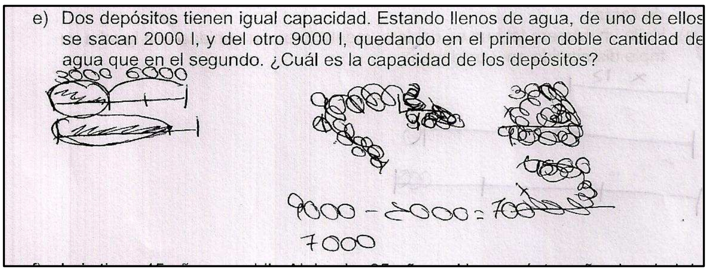


Situación similar, pero utilizando el MGL, es la observada en el Ejemplo c6.4, descrita por el vector (3, 3, 0). En este caso se plantea el problema utilizando el MGL, mediante la elaboración de un texto intermedio que es incorrecto y, a partir de dicha representación, se intenta utilizar la información para resolver el problema, pero no hay éxito.

Y en tercer lugar destacamos desarrollos en que los estudiantes han trabajado y respondido las tres etapas, pero de forma incorrecta.

Ejemplo c6.5:

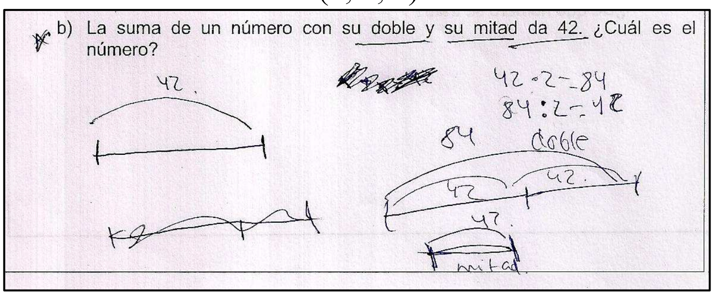
V(3, 3, 0)



Un trabajo gráfico incorrecto es el que observamos en el Ejemplo c6.5, descrito por el vector (3, 3, 0), es decir, se ha planteado el problema (incorrectamente) utilizando el MGL, realizándose la ejecución a partir de dicho planteamiento y obteniendo una respuesta incorrecta. Observemos que en este caso se descompone uno de los datos (9000 litros, en 3000 + 6000), pero finalmente no es de utilidad dentro de la resolución.

Ejemplo c6.6:

V(3, 3, 0)



El Ejemplo c6.6 nos muestra un intento por utilizar el MGL en la fase de planteamiento pero, aún cuando se intenta elaborar un texto gráfico intermedio más de una vez, el estudiante no tiene éxito. Posteriormente, intenta conectar el planteamiento con una fase de ejecución que también es incorrecta y que no permite llegar a dar una respuesta correcta.

Descripción a partir de la conclusión 7 (c7):

c7. El problema 4e es el único que tiene "estabilidad", con el mismo alto porcentaje, 73,20 %, de los sujetos que desarrollaron las tres etapas de forma correcta.

Para describir la "estabilidad" del problema 4e, en cuanto a corrección, hemos seleccionado algunos ejemplos en que las componentes de los vectores que identifican las resoluciones de los sujetos puede tener los siguientes valores:

Primera componente, uno de los dos valores siguientes

- 4 = Utiliza el MGL correctamente
- 2 = Utiliza otro método correctamente

Segunda componente, uno de los dos valores siguientes

- 4 = Utiliza el MGL correctamente
- 2 = Utiliza otro método correctamente

Tercera componente:

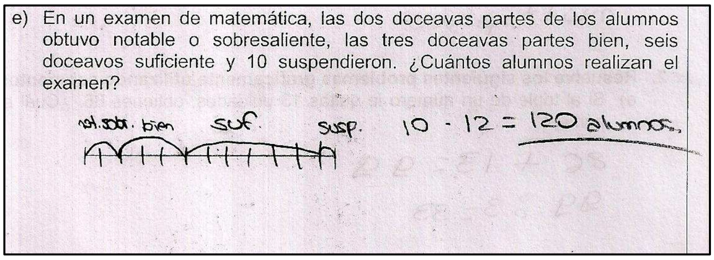
- 1 = Respuesta correcta

Ejemplificaciones

En la realidad, en la muestra con la que hemos trabajado, sólo hemos encontrado resoluciones del tipo (4, 4, 1), a partir de las cuales destacamos dos aspectos en los ejemplos c7.1 y c7.2.

Ejemplo c7.1:

V(4, 4, 1)

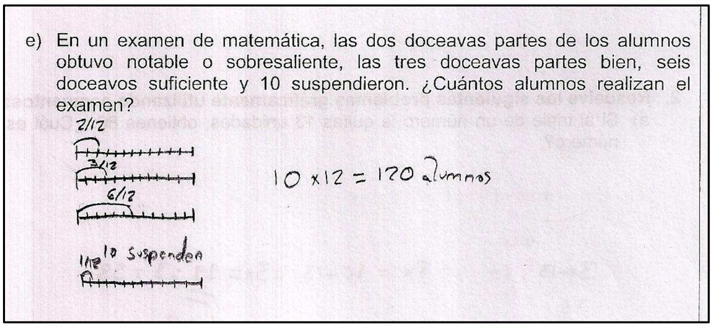

e) En un examen de matemática, las dos doceavas partes de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, las tres doceavas partes bien, seis doceavos suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

En términos generales, podemos decir que gran parte de los estudiantes realizaron una resolución similar a la del Ejemplo c7.1, es decir, se plantea correctamente el problema utilizando el MGL, se desarrolla la fase de ejecución sobre la representación anterior y se obtiene la respuesta correcta.

También hemos encontrado otro tipo de resoluciones que utilizan el MGL de forma correcta, pero no en su forma "canónica", como vemos en el Ejemplo c7.2, en donde se han representado todas las cantidades y relaciones presentes en el enunciado "por partes" y, después, esa información se utiliza para desarrollar la fase de ejecución y obtener la respuesta.

Ejemplo c7.2:

V (4, 4, 1)



5.2.2 Análisis de utilización del MGL por problema y por fase de resolución

Otra perspectiva que hemos considerado en muestro estudio, ha consistido en analizar la frecuencia con que se utilizó el MGL en las fases de planteamiento y ejecución.

A continuación presentamos una tabla resumen con los resultados de dichas fases, las observaciones que se pueden desprender de la tabla y los ejemplos derivados de las observaciones a partir de desarrollos realizados por los estudiantes.

5.2.2.1 Porcentaje de utilización del MGL por problema y fase de resolución

La Tabla 5.6 contiene un resumen de la frecuencia porcentual con que se utilizó el MGL, en cada uno de los doce problemas para las fases de planteamiento y ejecución, independiente de si fue utilizado correcta o incorrectamente.

En el Anexo 5 se puede encontrar el detalle de la frecuencia de utilización del método en la fase de planteamiento y la de ejecución para cada uno de los problemas, por separado, completando esta información la frecuencia de sujetos que dejan alguna de las fases en blanco o sin información, ya que en la Tabla 5.6 sólo hemos considerado el porcentaje de estudiantes que utilizan el MGL y el porcentaje de estudiantes que utilizan un método distinto del MGL.

Con el objetivo de comparar la frecuencia con que se utilizó el método en la fase de planteamiento con la frecuencia de utilización en la fase de ejecución, en la Tabla 5.6 hemos agregado una columna titulada "Diferencia", que está formada por el resta entre la frecuencia de uso del MGL en la fase de planteamiento (f_p) y la frecuencia de uso en la fase de ejecución (f_e). La información contenida en esta columna nos permite observar cómo ha variado la frecuencia de uso del método, ya que si:

- $(f_p - f_e) > 0$ indica que el uso del método en la fase de ejecución es menos frecuente que en la fase de planteamiento
- $(f_p - f_e) = 0$ no hay variación en la frecuencia de uso
- $(f_p - f_e) < 0$ indica que se ha utilizado el método con mayor frecuencia en la fase de ejecución que en la de planteamiento

	Utilización del MGL por fases y problemas				
Fase	Planteamiento		Ejecución		
Utilización MGL / Problema	Utiliza otro método	Utiliza MGL (f_p)	Utiliza otro método	Utiliza MGL (f_e)	Diferencia (f_p - f_e)
4a	11,0	75,6	17,0	52,5	23,1
4b	6,1	75,6	15,9	34,2	41,4
4c	2,4	68,3	2,4	65,9	2,4
4d	0,0	86,6	2,4	72,0	14,6
4e	0,0	89,1	2,4	81,7	7,4
4f	7,3	75,6	24,4	51,2	24,4
6a	0,0	91,5	17,1	41,4	50,1
6b	0,0	86,6	28,1	18,3	68,3
6c	0,0	90,3	14,6	61,0	29,3
6d	2,4	86,6	20,7	24,4	62,2
6e	0,0	67,1	7,3	39,0	28,1
6f	1,2	85,4	57,3	7,3	78,1

Tabla 5.6: Frecuencia de utilización MGL en las fases de planteamiento y ejecución

A partir de la Tabla 5.6 se desprenden las siguientes conclusiones:

c8. En la fase de planteamiento, una abrumadora mayoría de sujetos utiliza el MGL, superando ampliamente el menor porcentaje, 67%, del problema 6e.

c9. El uso de otro método en la fase de planteamiento obtiene porcentajes muy bajos, siendo nulo en la mitad de los problemas. Destaca que, aunque los problemas 4c y 6e tienen los porcentajes más bajos en el uso del MGL en la fase de planteamiento, los estudiantes no lo reemplazan por otro método.

c10. En la fase de ejecución, todos los problemas bajan la frecuencia de utilización del MGL, cosa que queda en evidencia en la columna de diferencias, cuyos componentes son todos positivos.

c11. En la fase de ejecución, la mitad de problemas están por debajo del 50% en el uso del MGL (4b, 6a, 6b, 6d, 6e y 6f), siendo el 6f, con diferencia, el problema en que menos se utiliza (7,3%). Cabe resaltar que cinco de estos problemas pertenecen a la Ficha Nº 6.

c12. El problema 4e destaca por el alto porcentaje de utilización del método en ambas etapas: un 89,1% de uso en la fase de planteamiento y un 81,7% en la fase de ejecución.

5.2.2.2 Descripción de utilización del MGL por problema y fase de resolución

A continuación ejemplificamos las conclusiones que se han desprendido de la Tabla 5.5, utilizando las producciones de los estudiantes, con el fin de señalar ciertas particularidades en la utilización del MGL, independiente de si su utilización ha sido correcta o no.

Descripción a partir de la conclusión 8 (c8):

c8. En la fase de planteamiento, una abrumadora mayoría de sujetos utiliza el MGL, superando ampliamente el menor porcentaje, 67%, del problema 6e.

Para ejemplificar la utilización del MGL en la fase de planteamiento, hemos centrado la atención en aquellas producciones en que se ha utilizado el método, independiente de si ha sido correcto o incorrecto, por lo que nos fijamos en los sujetos que en la fase de planteamiento han obtenido:

Primera componente, uno de los dos valores siguientes:

- 4 = Utiliza el MGL correctamente
- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente

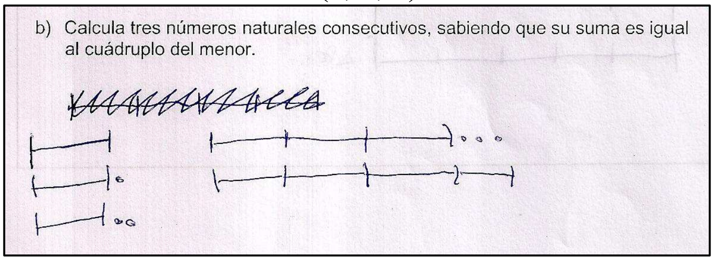
En consecuencia, los vectores que describen la resolución de los problemas tienen la forma: (4, x, x) ó (3, x, x).

Ejemplificaciones

En los dos primeros ejemplos (Ejemplo c8.1 y Ejemplo c8.2) centraremos la atención en cómo se ha utilizado el método para representar una cantidad conocida, en relación con la cantidad desconocida.

Ejemplo c8.1:

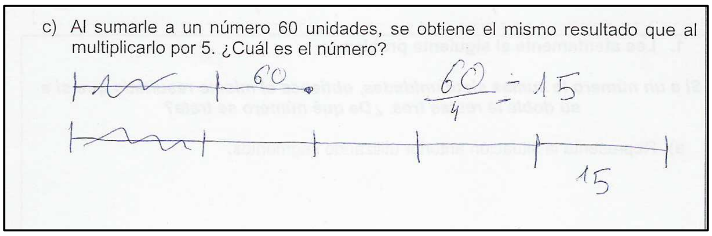
V(4, 0, 0)



Observamos que en el texto intermedio que constituye el planteamiento del problema del Ejemplo c8.1 se ha realizado lo que llamamos: *ajuste de escala*; es decir, se hacen coincidir las RGL´s a modo de igualdad, tal como se plantea verbalmente en el enunciado. En este caso, las 3 unidades equivalen a la longitud del menor de los números buscados (cantidad desconocida, representada mediante un segmento).

Ejemplo c8.2:

V(4, 4, 4)

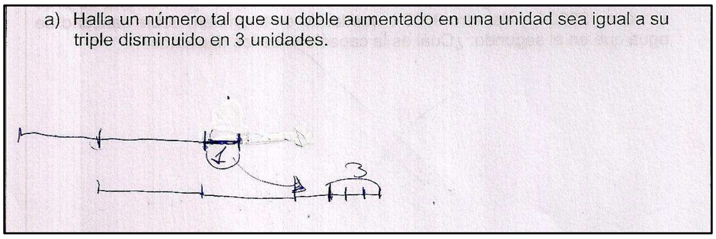


En cambio, en el Ejemplo c8.2 se plantean ambas RGL´s, pero no se realiza el ajuste de escala, ya que gráficamente las 60 unidades no equivalen a 4 veces el número. Sin embargo, el estudiante desprende dicha relación a partir del planteamiento gráfico realizado y resuelve, igualmente, el problema.

Con los casos siguientes (Ejemplo c8.3, c8.4 y c8.5), pretendemos ejemplificar el tipo de planteamiento que se realiza utilizando el MGL, es decir, si se ha favorecido un proceso de traducción aritmético o uno algebraico.

Ejemplo c8.3:

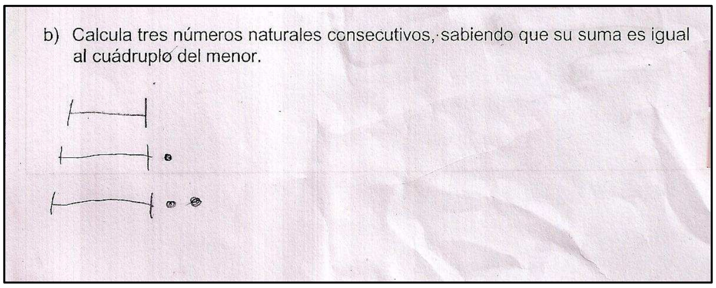
V(4, 4, 0)



En el Ejemplo c8.3, se ha utilizado el MGL en un proceso de traducción algebraico. Vemos que se plantea en base a la representación de una cantidad desconocida. Dicha cantidad desconocida fue representada con un segmento, y las unidades (cantidades conocidas) con segmentos más pequeños a los que se les asigna el valor “1”, es decir, la unidad (segmento de longitud 1), aunque pueda variar la escala en cada una de las representaciones. Para la producción del TIAL se han utilizado dos RGL´s, en una de ellas se representa el doble del número aumentado en una unidad y en la segunda, el triple del número disminuido en tres unidades. Si observamos la disposición de las RGL´s vemos que el estudiante ha realizado un ajuste de escala, ya que están dispuestas de tal manera que es posible comparar cantidades, superponiendo segmentos, y determinar la cantidad desconocida.

Ejemplo c8.4:

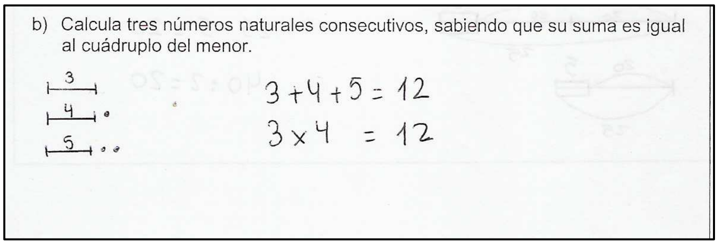
V(3, 0, 0)



En el Ejemplo c8.4 encontramos una aproximación a un proceso de traducción algebraico, pero no se llega realmente al planteamiento de un TIAL, el proceso queda inconcluso. Observemos que el estudiante es capaz de representar los tres números naturales consecutivos, partiendo por representar el menor de ellos como una cantidad desconocida y los consecutivos aumentando una unidad (una unidad = un punto grueso), sin embargo no llega a representar las relaciones planteadas en el enunciado entre dichos números. Existe un grado de abstracción y manejo de cantidades desconocidas, pero es incompleto.

Ejemplo c8.5:

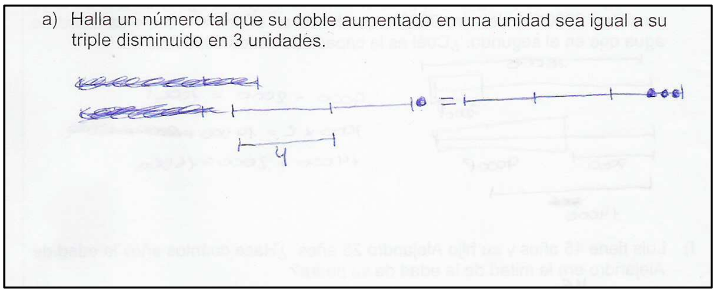
V(3, 2, 2)



Finalmente, el Ejemplo c8.5 es muy similar al caso anterior, ya que el estudiante representa los números a partir de una cantidad desconocida y utiliza la unidad para dar origen a los números consecutivos. Sin embargo no continúa la resolución haciendo uso del gráfico, sino que propone tres números (ensayo-error), con los que comprueba que se cumplen las relaciones planteadas en el enunciado. Por lo tanto, el proceso de resolución es aritmético.

Ejemplo c8.6:

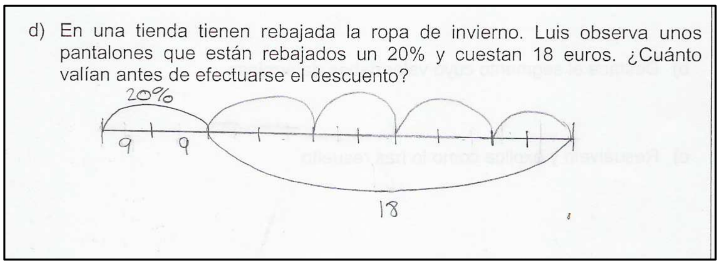
V(4, 4, 1)



Otra particularidad en la utilización del MGL en la fase de planteamiento de los problemas de la Ficha Nº 6, es la disposición espacial. En el Ejemplo c8.6 podemos ver que se plantea una igualdad gráfica, similar a la del Ejemplo c8.2, en que la cantidad conocida no equivale, gráficamente, a 4 veces el número. Ahora bien, llama la atención como el estudiante ubica espacialmente las RGL´s, ya que al disponerlas de forma horizontal, y con un signo "=" entre ellas, responde a un formato de ecuación. No es extraño que esta disposición horizontal aparezca en problemas de la Ficha Nº 6, puesto en la Ficha Nº 5 los estudiantes ya han realizado una traducción del SR gráfico al simbólico algebraico, es decir, ya han planteado ecuaciones para la resolución de los problemas.

Ejemplo c8.7:

V(4, 3, 0)



Finalmente, en relación a la conclusión c8, quisiéramos subrayar un fenómeno que llamó nuestra atención. El Ejemplo c8.7 muestra una fase de planteamiento en que se ha usando el MGL de manera correcta para la elaboración de un TIAL: se representa la cantidad desconocida con el segmento total y, sobre éste, se representa el 20% (desconocido) y el porcentaje restante, que equivale a 18 euros. Sin embargo, el estudiante no llega a interpretar lo que significan esas cantidades en el contexto del problema y las manipula de forma incorrecta, sin llegar siquiera a dar solución al problema (ni correcta, ni incorrecta). Es decir, una producción de un texto intermedio correcto no implica necesariamente resolución correcta del problema.

Descripción a partir de la conclusión 9 (c9):

c9. *El uso de otro método en la fase de planteamiento obtiene porcentajes muy bajos, siendo nulo en la mitad de los problemas. Destaca que, aunque los problemas 4c y 6e tienen los porcentajes más bajos en el uso del MGL en la fase de planteamiento, los estudiantes no lo reemplazan por otro método.*

Para esta conclusión, nos interesa ejemplificar qué métodos alternativos se utilizan en la fase de planteamiento cuando no se utiliza el MGL. Para lo cual necesitamos resoluciones que, en la primera componente del vector, tengan uno de los siguientes valores:

- 2 = Utiliza otro método correctamente
- 1 = Utiliza otro método incorrectamente

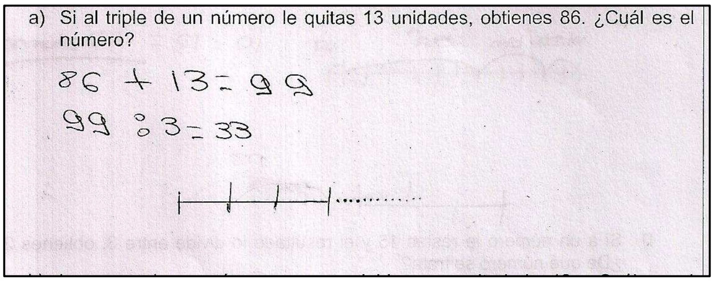
Por lo que los vectores que describen las resoluciones de nuestro interés tiene la forma: (2, x, x) ó (1, x, x).

Ejemplificaciones

Al observar los métodos alternativos al MGL que han utilizado los estudiantes para plantear los problemas propuestos, además del método propuesto, los estudiantes recurren a la utilización de sistemas de representación aritméticos (ensayo-error, parte todo) o simbólicos. Veremos casos en que se utilizan, de forma complementaria, más de un sistema a la vez.

Ejemplo c9.1:

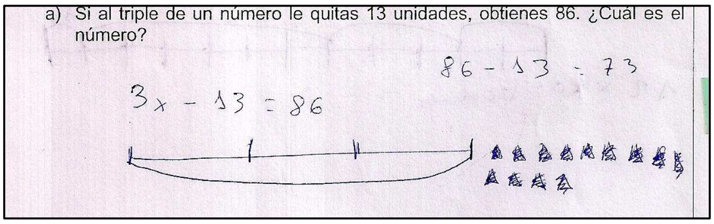
V(2, 2, 1)



En el Ejemplo c9.1, tanto el planteamiento como la fase de ejecución se han llevado a cabo mediante la utilización del SR aritmético, es decir se ha generado un TIAR, no sólo por el uso de dicho SR, sino también porque la resolución está basada en el A-S. Aún cuando aparece el MGL en la parte inferior, vemos que, realmente, no se ha utilizado ni para plantear ni para resolver. Tampoco se ha completado la traducción del enunciado en dicha representación, por lo que podríamos decir que, en este caso, se ha utilizado de manera exclusiva una resolución aritmética.

Ejemplo c9.2:

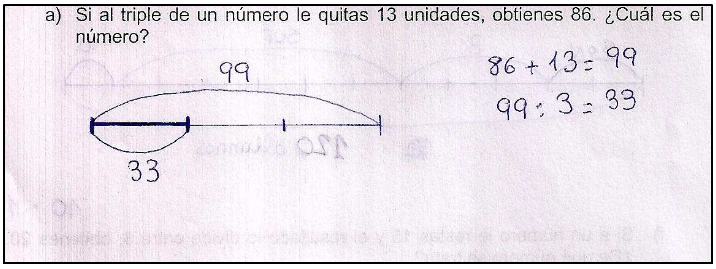
V(1, 1, 0)



En el caso del Ejemplo c9.2, nos encontramos con la utilización de tres sistemas de representación: aritmético, algebraico y gráfico (MGL). En los tres casos se plantea el problema, pero no se llega a la fase de ejecución en ninguno de ellos. De los tres planteamientos, sólo el realizado utilizando el SR algebraico es correcto, aunque no guarda relación con lo representado ni gráfica, ni aritméticamente. No existe transferencia entre los SR y, probablemente, dicha falta de conversión de un SR a otro es la que provoca que la resolución quede truncada en la fase de planteamiento.

Ejemplo c9.3:

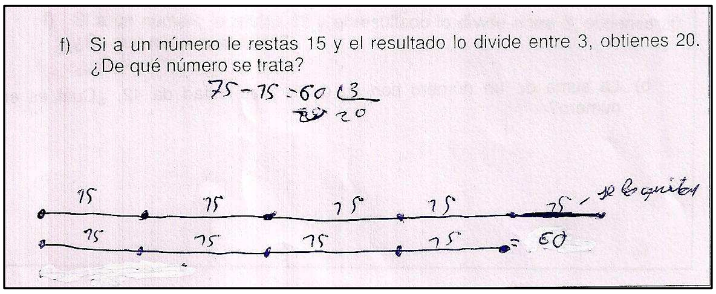
V(2, 2, 1)



El Ejemplo c9.3, nos muestra una proceso de traducción aritmético, igual a la que mostramos en el Ejemplo c9.1. Sin embargo, se ha utilizado el MGL para representar la solución del problema. Destacamos que se representa la solución, no el planteamiento del problema ni su ejecución, ya que no están representadas las relaciones entre las cantidades que se describen en el enunciado. Es por esta razón, aún cuando el MGL está presente, el planteamiento ha sido valorado con "2".

Ejemplo c9.4:

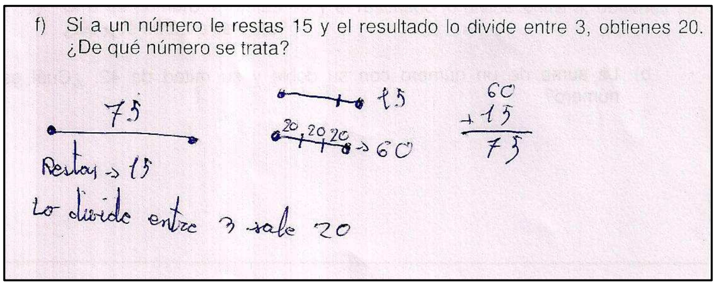
V(2, 2, 1)



En el Ejemplo c9.4 observamos un proceso de traducción aritmético, que genera un TIAR, sobre el cual se desarrolla la fase de ejecución y se da solución al problema. Junto a lo anterior, se observa que el estudiante ha intentado traducir dicha resolución al MGL sin éxito, ya que no se explicita en la gráfica la solución del problema, ni concuerdan las operaciones aritméticas realizadas con las representadas por lo segmentos.

Ejemplo c9.5:

V(2, 2, 1)



Finalmente, el Ejemplo c9.5 presenta una resolución en que se ha realizado un proceso de traducción aritmético utilizando el SR aritmético y el gráfico. El planteamiento parte de proponer un segmento cuya longitud sería una cantidad determinada (75), y posteriormente se comprueba que dicha cantidad cumple con las condiciones planteadas en el enunciado, y se concluye representando la solución mediante el uso de segmentos, por lo que no parte de representar lo desconocido.

Descripción a partir de la conclusión 10 (c10):

c10. En la fase de ejecución, todos los problemas bajan la frecuencia de utilización del MGL, cosa que queda en evidencia en la columna de diferencias), cuyos componentes son todos positivos.

Para ejemplificar que al pasar de la fase de planteamiento a la fase de ejecución disminuye la frecuencia de utilización del MGL, buscamos casos en los que:

Primera componente, uno de los dos valores siguientes

- 4 = Utiliza el MGL correctamente
- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente

Segunda componente, uno de los tres valores siguientes

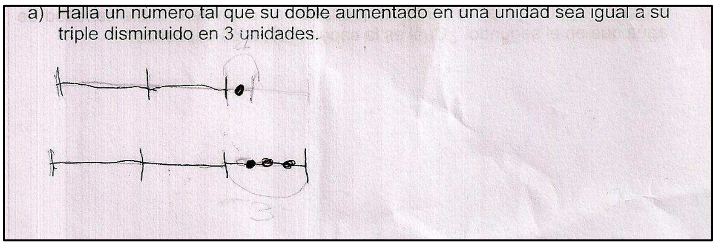
- 2 = Utiliza otro método correctamente
- 1 = Utiliza otro método incorrectamente
- 0 = No existe información / no responde

Ejemplificaciones

La diferencia de utilización del MGL de la fase de planteamiento a la fase de ejecución se debe a dos situaciones: bien que el estudiante, una vez planteado el problema (utilizando el MGL) abandona la resolución, o bien que en la fase de ejecución utilice otro método.

Ejemplo c10.1:

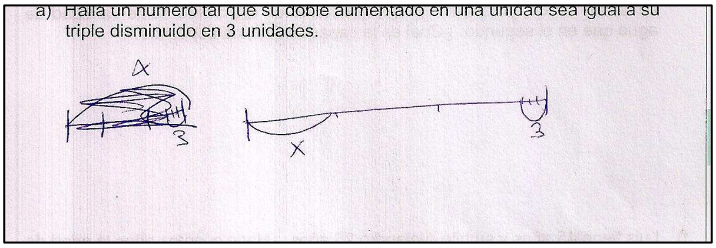
V(4, 0, 0)



En el Ejemplo c10.1 el estudiante ha utilizado de forma correcta el MGL en la fase de planteamiento: se ha elaborado un TIAL representado dos RGL´s en base a una cantidad desconocida (el número buscado), incluso se ha realizado un ajuste de escala, obteniendo una igualdad entre ambas RGL´s. Sin embargo, el estudiante no continúa con la resolución.

Ejemplo c10.2:

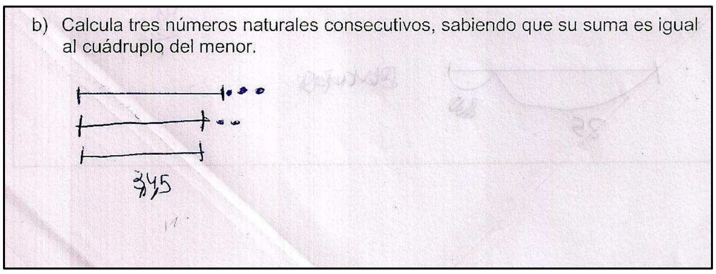
V(3, 0, 0)



El Ejemplo c10.2, presenta una situación similar a la anterior, pero quizá un poco más comprensible en cuanto al abandono de la resolución. Se ha utilizado el MGL para plantear el problema. En este caso también se ha generado un TIAL para el planteamiento, en base a la representación de una cantidad desconocida, además de representar una adición de cantidades desconocidas. Sin embargo, se intenta hacer todo el planteamiento sobre una RGL, cosa que finalmente no se logra, lo que no permite continuar el problema utilizando todas las cantidades y relaciones descritas en el texto, es decir, el planteamiento es incorrecto y el estudiante abandona la resolución.

Ejemplo c10.3:

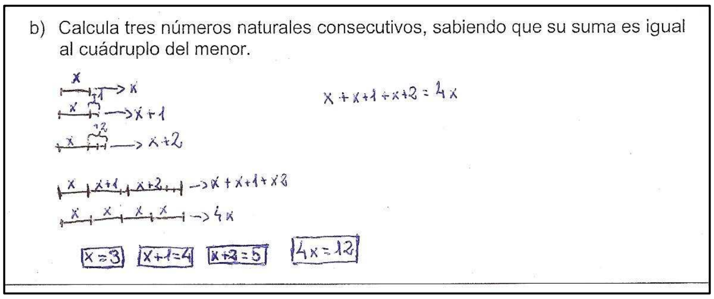
V(3, 0, 1)



El Ejemplo c10.3 es un caso bastante común de desarrollo en que el estudiante resuelve el problema "mentalmente", llega a la respuesta. Sin embargo, hace un intento de plantear el problema utilizando el MGL, sin éxito. Escribe la respuesta al problema, aún cuando no da una justificación por escrito del proceso realizado para llegar a ella. Se entiende que aparezcan este tipo de desarrollos, si consideramos que la instrucción dada a los estudiantes fue que *resolvieran los problemas mediante el uso de segmentos,* por lo que no es de extrañar que, en algunos casos como este ejemplo, el estudiante se esfuerce por resolver el problema y usar el MGL.

Ejemplo c10.4:

V(4, 2, 1)



Con el Ejemplo c10.4, presentamos un caso claro de cambio de SR. Se plantea el problema utilizando el MGL, de forma correcta, pero luego se utiliza dicha representación para traducir el problema al SR algebraico simbólico, y se continúa la resolución en este último SR, es decir, el planteamiento de las ecuaciones es una traducción de la representación gráfica de los segmentos.

Descripción a partir de la conclusión 11 (c11):

c11. En la fase de ejecución, la mitad de problemas están por debajo del 50% en el uso del MGL (4b, 6a, 6b, 6d, 6e y 6f), siendo el 6f, con diferencia, el problema en que menos se utiliza (7,3%). Cabe resaltar que cinco de estos problemas pertenecen a la Ficha Nº 6.

En la conclusión c11, dirigimos la atención sobre la segunda componente de los vectores, de manera que podamos ejemplificar que en la fase de ejecución se utilizan métodos distintos del MGL. Por lo tanto, la segunda componente de los ejemplos tiene uno de los tres valores siguientes

- 2 = Utiliza otro método correctamente
- 1 = Utiliza otro método de incorrectamente
- 0 = No existe información / No responde

Los vectores utilizados son de la forma: (x, 2, x), (x, 1, x) ó (x, 0, x).

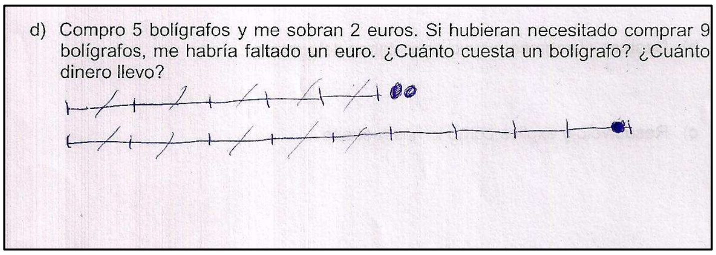
Ejemplificaciones

Los ejemplos, en este caso, pueden coincidir en gran medida con los expuestos en la conclusión anterior. No obstante, queremos poner el énfasis en mostrar qué tipos de desarrollos se llevan a cabo en la fase de ejecución cuando no se ha utilizado el MGL, independientemente de lo sucedido en la fase de planteamiento.

Una posibilidad es que en la fase de ejecución las resoluciones hayan sido valoradas con "0", es decir, que no exista información para determinar si el estudiante utilizó el MGL u otro método en dicha fase, situación que exponemos a través de los ejemplos c11.1 y c11.2. Y una segunda posibilidad, es que la fase de ejecución esté basada en un método distinto al MGL, situación que mostramos a través de los ejemplos c11.3, c11.4 y c11.5.

Ejemplo c11.1:

V(4, 0, 0)

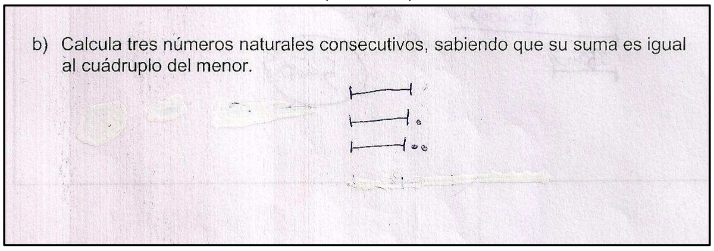


En el Ejemplo c11.1 observamos que el estudiante elabora un TIAL utilizando el MGL de forma correcta, pero no continúa con la resolución del problema ni da respuesta al mismo.

Algo similar sucede en ejemplo siguiente, c11.2, con la diferencia de que, en este caso, el planteamiento es gráfico, utilizando también el MGL en la producción de un TIAL, pero que no se llega a traducir completamente el enunciado del problema, ya que sólo se representan las cantidades desconocidas, pero no las relaciones existentes entre las mismas. Después, no se continúa el trabajo sobre este planteamiento ni se propone otro diferente, quedando la fase de ejecución sin desarrollo.

Ejemplo c11.2:

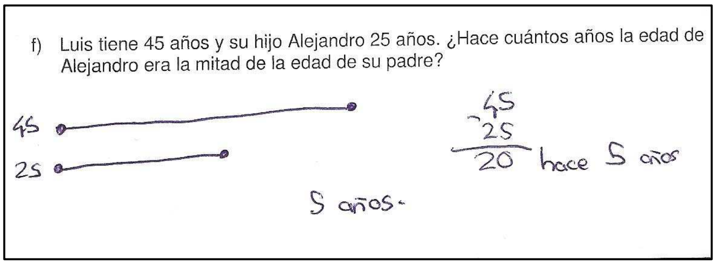
V(3, 0, 0)



En los ejemplos siguientes mostramos producciones de los estudiantes en que, para la fase de ejecución, se ha utilizado un método distinto del MGL. Es el caso del Ejemplo c11.3 que, en la fase de ejecución, se realizan operaciones aritméticas que no se desprenden del planteamiento gráfico realizado. En este caso dichas operaciones parecen, más que una deducción, una comprobación.

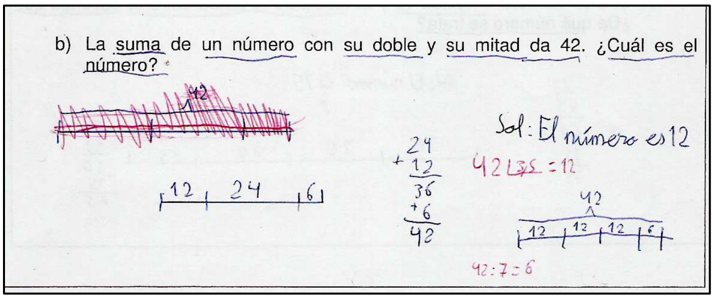
Ejemplo c11.3:

V(3, 2, 1)



Ejemplo c11.4:

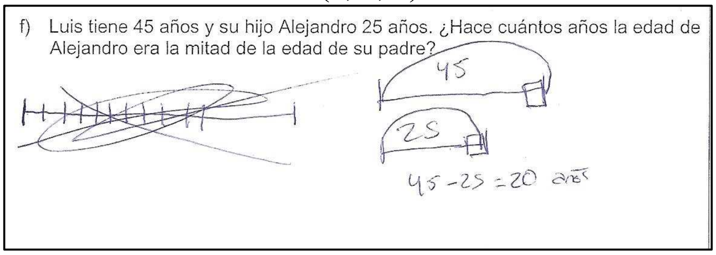
V(4, 2, 1)



En este ejemplo, c11.4, observamos que también se utilizan operaciones aritméticas para el desarrollo de la fase de ejecución. El estudiante comprueba, a través de operaciones aritméticas, si las relaciones planteadas en el enunciado se cumplen para un número determinado, que es el que da por respuesta. Posteriormente, representa la respuesta utilizando el MGL. Cabe destacar que, al igual que en otros desarrollos, lo que vemos en rojo es parte de la corrección grupal realizada con el profesor, no es parte de la producción individual del estudiante.

Ejemplo c11.5:

V(3, 1, 0)



Por último, en el Ejemplo c11.5 el estudiante intenta utilizar los números que se le han dado en el enunciado con el fin de obtener una cantidad, a modo de solución del problema. Se plantea el problema utilizando el MGL para la producción de un texto intermedio, pero el planteamiento es incompleto. Por lo tanto, no es de extrañar que la fase de ejecución esté desconectada del dicho planteamiento, y se utilice un método distinto del MGL para su desarrollo.

Descripción a partir de la conclusión 12 (c12):

c12. *El problema 4e destaca por el alto porcentaje de utilización del método en ambas etapas: un 89,1% de uso en la fase de planteamiento y un 81,7% en la fase de ejecución.*

Para ejemplificar la conclusión c12, buscamos casos en que los estudiantes hayan utilizado el MGL en la fase de planteamiento y en la fase de ejecución, por lo que los vectores que describen las resoluciones deben tener:

Primera componente, uno de los dos valores siguientes

- 4 = Utiliza el MGL correctamente
- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente

Segunda componente, uno de los dos valores siguientes

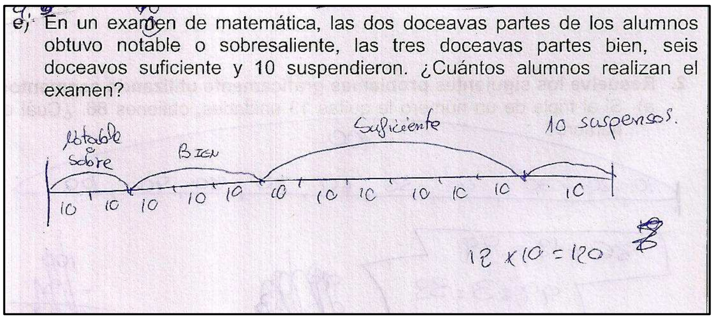
- 4 = Utiliza el MGL correctamente
- 3 = Utiliza el MGL incorrectamente

Ejemplificaciones

En los ejemplos c12.1 y c12.2 mostramos los desarrollos de dos sujetos que utilizan el MGL correctamente, tanto en la fase de planteamiento como en la fase de ejecución, pero con ciertas particularidades.

Ejemplo c12.1:

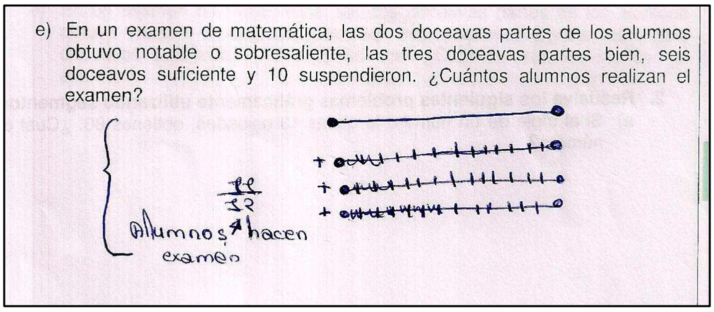
V(4, 4, 1)



El caso del Ejemplo c12.1 representa el caso más frecuente en el uso del MGL en el problema 4e. El estudiante elabora un TIAL representando la cantidad desconocida, total de alumnos que realizaron el examen, mediante el uso de un segmento sobre el cual representa todas las relaciones descritas en el enunciado: las fracciones de alumnos que obtuvieron notable o sobresaliente, bien y suficiente, así como el número de alumnos que han suspendido. Después, desarrolla la fase de ejecución sobre dicha información en la misma gráfica para, finalmente, dar respuesta al problema.

Ejemplo c12.2:

V(3, 3, 0)

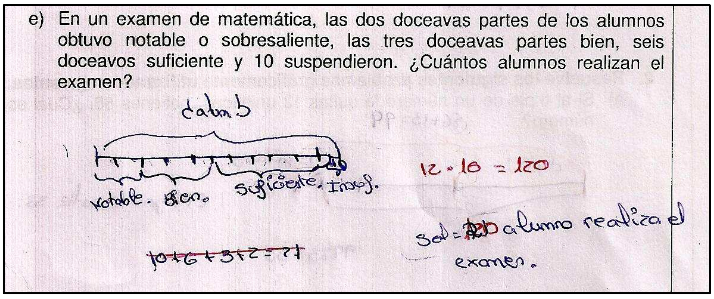


En el Ejemplo c12.2 vemos que también se ha utilizado el MGL para generar el TIAL de forma diferente al ejemplo anterior. En primer lugar se ha trazado un segmento que representa el total de alumnos que ha realizado el examen pero, a continuación, no se representan, sobre dicho segmento, los datos descritos en el enunciado, sino que se utilizan otros segmentos para representarlos. De esta forma, a partir de esas 4 RGL´s, se desprende que la fracción total de alumnos que ha hecho el examen es $\frac{11}{12}$, sin llegar a determinar el número de alumnos que realizaron el examen, que es la pregunta del problema.

En los tres ejemplos que siguen observaremos casos de desarrollos que no han tenido éxito en la resolución, pero que se han realizado utilizando el MGL.

Ejemplo c12.3:

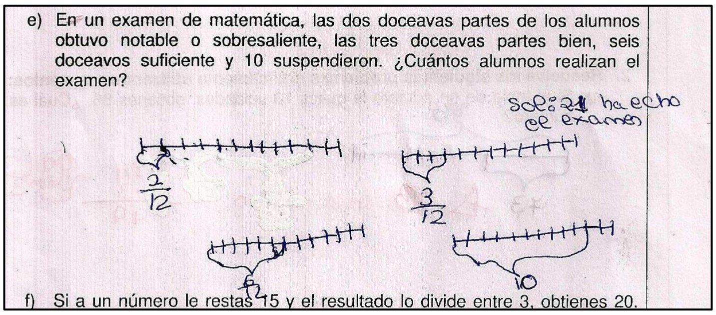
V(4, 3, 0)



En el primero de los tres, el Ejemplo c12.3, vemos una resolución en que se ha planteado correctamente el problema, de manera similar al Ejemplo c12.1, pero se comete un error en la interpretación de los números, ya que se consideran de igual forma las fracciones del total de alumnos que un número determinado de alumnos y, por lo tanto, se resuelve el problema a través de la operación: 10+6+3+2 = 21. Cabe destacar, nuevamente, que lo que vemos en rojo es la corrección realizada junto al profesor cuando ser revisa el problema, es decir, no forma parte de la producción propia del estudiante.

Ejemplo c12.4:

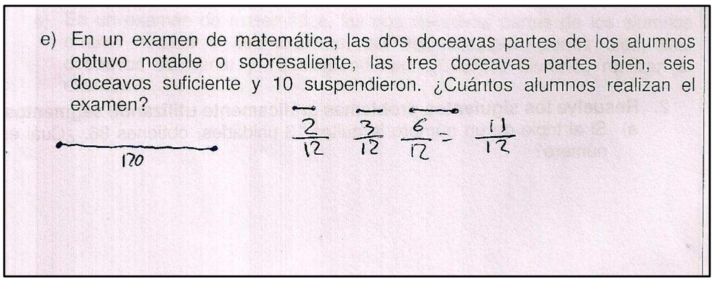
V(3, 3, 0)



En el Ejemplo c12.4 observamos que el estudiante ha utilizado el MGL, en el planteamiento del problema, de manera similar a la del Ejemplo c12.2, pero comete el error de considerar el número 10 como la fracción $\frac{10}{12}$ en la gráfica. Posteriormente, trata las fracciones como si fueran un número de alumnos y, al igual que en ejemplo anterior, da por respuesta al problema el resultado de sumar 10+6+3+2, es decir, 21.

Ejemplo c12.5:

V(3, 3, 1)


e) En un examen de matemática, las dos doceavas partes de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, las tres doceavas partes bien, seis doceavos suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

120

$\frac{2}{12}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{6}{12}$ = $\frac{11}{12}$

Finalmente, en el Ejemplo c12.5 se utilizan segmentos independientes para representar las fracciones, respetando diferencias de magnitud pero sin considerar el referente (total de estudiantes que han rendido el examen). Se representa el total buscado con un segmento mayor, pero no existe un desarrollo aritmético o gráfico que justifique la respuesta dada, que es correcta. En este caso, se utiliza el MGL sin que represente una herramienta efectiva para solucionar el problema ya que, en realidad, la representación es incompleta y no integra la información respecto de las relaciones desprendidas del enunciado.

5.2.3 Análisis de utilización del MGL con resultados correctos por problema y fases de resolución

Un tercer análisis respecto de cómo se resolvieron los problemas se ha basado en considerar la utilización del MGL en cada una de las fases del problema, ya sea correcta o incorrectamente.

Una vez más, vamos a describir la utilización del MGL mediante la observación de las producciones de los estudiantes de nuestra muestra, para comprobar que el MGL ha sido, mayoritariamente, una herramienta válida en la resolución del problema.

En el tipo de problemas que abordamos, el desempeño final o la solución se expresa, por el número que expresa la longitud del segmento que representa a la incógnita. Por lo tanto, se ha hecho un análisis de frecuencias sobre la utilización correcta o incorrecta del método en las fases de planteamiento y ejecución, que son las fases en donde se desarrollan y manejan las relaciones entre segmentos que implica la utilización del MGL, independientemente de la solución.

En los apartados siguientes adjuntamos una tabla resumen, con la información de las frecuencias porcentuales por problema y, posteriormente, una serie de producciones de los estudiantes para ejemplificar las conclusiones desprendidas de la tabla.

5.2.3.1 Porcentaje de utilización el MGL y corrección por problema y fase de resolución

En Tabla 5.7 se presenta la síntesis de las frecuencias obtenidas en la fase de planteamiento y en la de ejecución, para cada problema en cuánto al uso del MGL, especificando si se ha utilizado correctamente o no.

El detalle de la frecuencia de utilización del método y su corrección se puede consultar en el Anexo 6, completando la información con la frecuencia de utilización de otros métodos de forma correcta o incorrecta y la frecuencia de producciones sin información o en blanco. Todo ello para las fases de planteamiento y la de ejecución en cada uno de los 12 problemas analizados.

	Corrección y utilización MGL por problema y por fase			
Fase	Planteamiento		Ejecución	
% de estudiantes / Problema	% Incorrecto MGL	% Correcto MGL	% Incorrecto MGL	% Correcto MGL
4a	14,4	61,0	4,9	47,6
4b	37,8	37,8	15,9	18,3
4c	3,7	64,6	3,7	62,2
4d	18,3	68,3	18,3	53,7
4e	15,9	73,2	11,0	70,7
4f	22,0	53,7	4,9	46,3
6a	17,1	74,4	1,2	40,2
6b	50,0	36,6	0,0	18,3
6c	15,9	74,4	3,7	57,3
6d	32,9	53,7	2,4	22,0
6e	29,3	37,8	6,1	32,9
6f	61,0	24,4	2,4	4,9

Tabla 5.7: Frecuencia de utilización MGL y corrección en las fases de planteamiento y ejecución

Las siguientes conclusiones se desprenden de la Tabla 5.7:

c13. La utilización correcta del MGL en la fase de planteamiento es alta, llegando a superar el 50% en 8 de los 12 problemas.

c14. En la utilización incorrecta del MGL en la fase de planteamiento, destacan los problemas 6b y 6f, con un 50% y 61% respectivamente.

c15. En la fase de ejecución, los problemas en que se utiliza el MGL correctamente con más éxito, superior al 50%, son el 4c, 4d, 4e y 6c.

c16. En los problemas 4c, 4d, 4e y 6c, el porcentaje de uso correcto del MGL en ambas fases a la vez, planteamiento y ejecución, es superior al 50%.

5.2.3.2 Descripción de utilización el MGL y corrección por problema y fase de resolución

A continuación ejemplificamos cada una de las conclusiones planteadas en el apartado anterior. Los ejemplos están tomados de las producciones de los estudiantes, a partir de las cuales queremos mostrar ciertas particularidades de algunas resoluciones considerando el uso correcto o incorrecto del MGL en las fases de planteamiento y ejecución.

Descripción a partir de la conclusión 13 (c13):

c13. La utilización correcta del MGL en la fase de planteamiento es alta, llegando a superar el 50% en 8 de los 12 problemas.

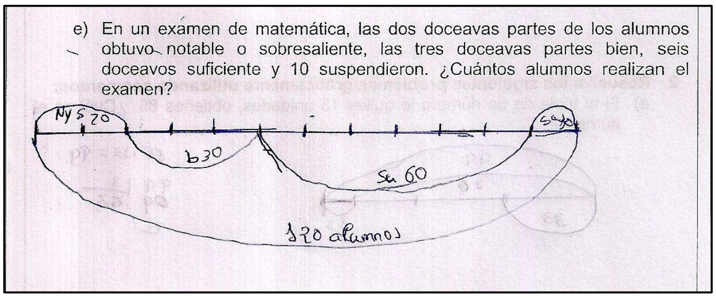
Los casos que utilizamos para ejemplificar la c13 se refieren a producciones de estudiantes que hayan planteado el problema utilizando el MGL de forma correcta. Por lo tanto, la primera componente del vector que la describe debe ser "4 = utiliza el MGL correctamente" y, en consecuencia, el vector tiene la forma: (4, x, x).

Ejemplificaciones

En los dos primeros ejemplos resaltamos algunos casos en que se ha realizado un planteamiento del problema utilizando el MGL de forma "estándar", es decir, se observa un planteamiento en el que se han seguido los pasos definidos en los problemas al comienzo de la Ficha Nº 4 y Ficha Nº 6. En ellos que primeramente se representa, través de un segmento, la cantidad desconocida que se desea determinar y, sobre éste, se representan las relaciones descritas en el enunciado con una o dos RGL´s, según el problema.

Ejemplo c13.1:

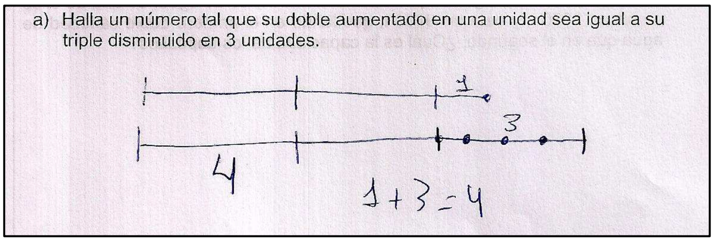
V(4, 4, 1)



El Ejemplo c13.1 tiene la particularidad de que aunque no se escriben las fracciones frente a cada parte del segmento total representado, sin embargo resuelve correctamente, ya que está claramente demarcado qué parte del total corresponde a cada fracción, lo que equivale a la representación gráfica de la información entregada en el enunciado.

Ejemplo c13.2:

V(4, 4, 1)

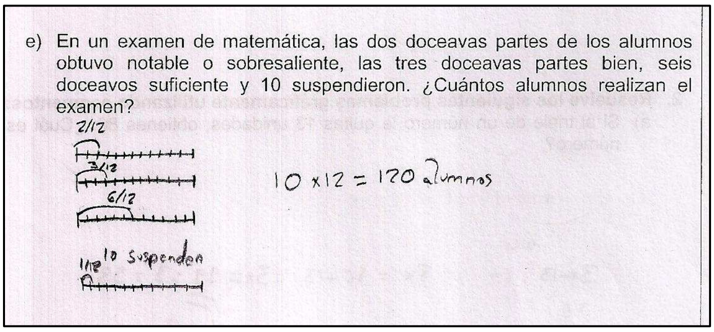


En este Ejemplo c13.2, se utiliza el MGL en el proceso de traducción planteando un TIAL compuesto por 2 RGL´s. En cada una de ellas la base es la representación del número buscado o cantidad desconocida, sobre la que se opera. Se duplica y triplica, en la primera y segunda RGL respectivamente, y se agrega o quita una cantidad determinada (conocida) a través de la representación de la unidad.

Los tres ejemplos siguientes llaman la atención porque escapan a lo esperado en cuanto a uso del MGL, ya que se representan las relaciones descritas en el enunciado por separado, o bien se realiza la comparación de forma horizontal, respondiendo, más bien, a una ejecución de tipo simbólico-algebraico.

Ejemplo c13.3:

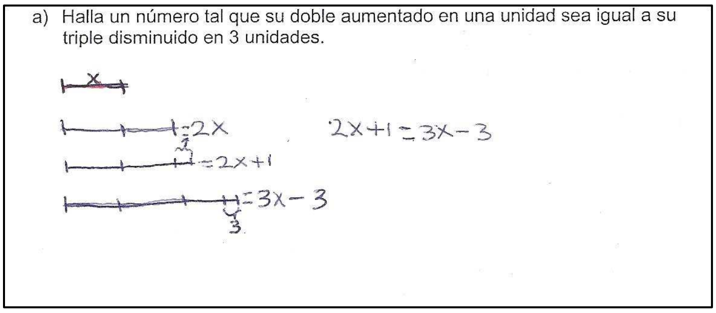
V(4, 4, 1)


e) En un examen de matemática, las dos doceavas partes de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, las tres doceavas partes bien, seis doceavos suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

En el Ejemplo c13.3 se representan cada una de las fracciones utilizando un segmento diferente, siempre del mismo tamaño, que equivale al total de alumnos del enunciado. Es así como, para la elaboración del texto intermedio, se han utilizado 4 RGL´s que representan gráficamente el enunciado, aunque podían haberse reducido sólo a una. No obstante, las representaciones son correctas y permiten al estudiante resolver el problema exitosamente.

Ejemplo c13.4:

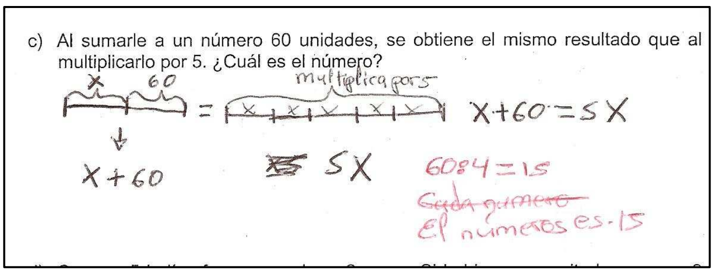
V(4, 2, 0)


a) Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.

Caso similar es el que encontramos en el Ejemplo c13.4, en que se representan las relaciones de forma progresiva. A partir de cada RGL se produce una traducción al lenguaje simbólico algebraico, llegando a resolverse mediante una ecuación.

Ejemplo c13.5:

V(4, 2, 0)

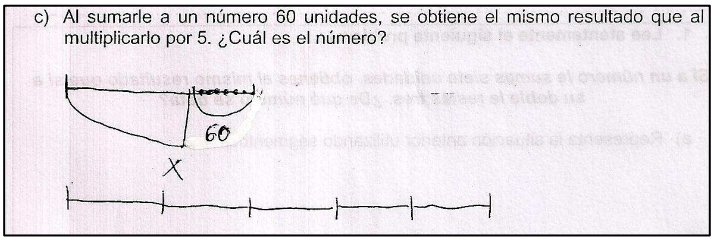

c) Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?

Finalmente, destacamos el planteamiento del Ejemplo c13.5, en el que se reúnen algunos elementos mencionados en ejemplos anteriores como, por ejemplo, que no se ha realizado "ajuste de escala" (el segmento que representa las 60 unidades no tiene la misma longitud que los segmentos que representan 4 veces el número), junto con que las representaciones se plantean como igualdad. En segundo lugar, al igual que en el ejemplo anterior, a partir de la representación utilizando el MGL, se traduce al lenguaje simbólico-algebraico, con la particularidad de que las dos RGL´s se comparan horizontalmente en forma de ecuación desde un comienzo, frente a la comparación vertical propuesta en las Fichas.

En los dos siguientes ejemplos, se pretende resaltar el planteamiento gráfico de un mismo problema utilizando 2 RGL´s, con la diferencia de que en uno se realiza ajuste de escala y en el otro no.

Ejemplo c13.6:

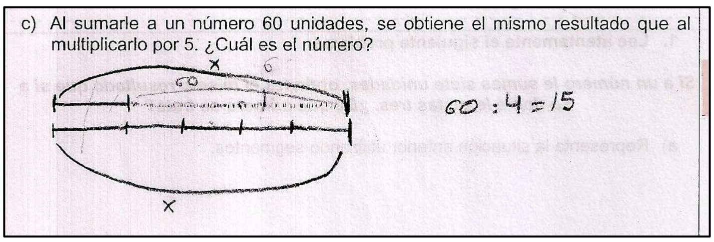
V(4, 0, 0)



En el Ejemplo c13.6, observamos que se representan correctamente las dos relaciones definidas en el enunciado: "sumarle a un número 60 unidades" y "el número multiplicado por 5". En el primer caso se define la cantidad desconocida y, para sumarle 60 unidades, se agregan a la derecha del segmento 6 segmentos menores que equivalen a 10 unidades cada uno. En la segunda RGL se representa el número multiplicado por 5. Sin embargo, las 60 unidades representadas en la primera RGL no equivalen, en longitud, a 4 veces el segmento representado en la segunda RGL. Por lo tanto, no ha habido *ajuste de escala* una vez representadas ambas relaciones.

Ejemplo c13.7:

V(4, 4, 1)



Similar es el planteamiento grafico realizado en el TIAL del Ejemplo c13.7 con la diferencia de que, al plantear ambas RGL´s, se hacen coincidir las 60 unidades de la primera RGL con las 4 veces el número buscado de la segunda. En este caso se ha realizado *ajuste de escala*.

Descripción a partir de la conclusión 14 (c14):

c14. En la utilización incorrecta del MGL en la fase de planteamiento, destacan los problemas 6b y 6f, con un 50% y 61% respectivamente.

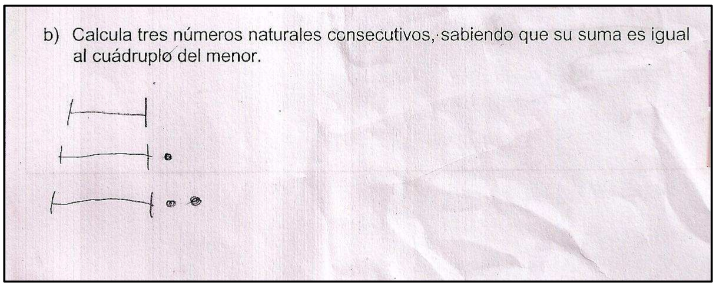
Buscamos, producciones de los estudiantes cuyo vector descriptor tenga en la primera componente un "3 = Utiliza el MGL incorrectamente", por lo que el vector tiene la forma: (3, x, x).

Ejemplificaciones

Cuando se utiliza incorrectamente el MGL en la fase de planteamiento podemos estar frente a dos posibles errores genéricos en el proceso de traducción: que se haya representado incorrectamente alguna relación, o que el planteamiento sea incompleto. Ambos casos, y sus particularidades, se ejemplifican a continuación.

Ejemplo c14.1:

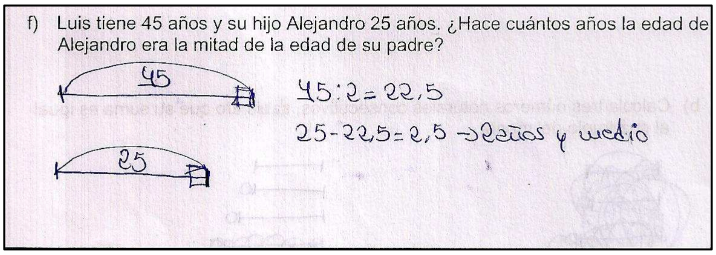
V(3, 0, 0)



En el Ejemplo c14.1 tenemos un ejemplo en que el proceso de traducción para elaborar un texto intermedio ha quedado inconcluso, quedando el planteamiento gráfico incompleto. El estudiante es capaz de representar los tres números consecutivos, a partir de la representación del menor de ellos como cantidad desconocida y, posteriormente, agregar una unidad para representar su consecutivo, repitiendo el procedimiento para el representar el siguiente consecutivo. Sin embargo, no se continúa con la traducción del enunciado, quedando sin representar la suma de los tres números y, mucho menos, el cuádruplo del menor.

Ejemplo c14.2:

V(3, 1, 0)

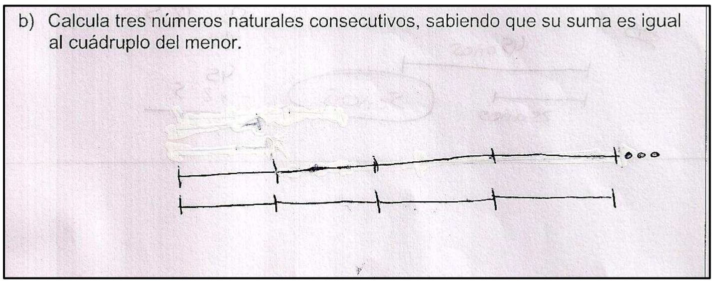


En este Ejemplo c14.2 observamos un planteamiento muy similar al anterior. El uso del MGL no va más allá de representar las cantidades conocidas presentadas en el enunciado, edad del padre y del hijo, y la cantidad desconocida, años transcurridos, pero el planteamiento queda incompleto, ya que en la gráfica no se representan las relaciones entre dichas cantidades. No se continúa con el uso del método, sino que se resuelve aritméticamente, al margen del planteamiento gráfico realizado, con operaciones aritméticas que no se deducen del planteamiento.

En el ejemplo siguiente resaltamos otro tipo de error: se han representado las cantidades conocidas y desconocidas y las relaciones entre ellas, pero en la elaboración del texto intermedio se ha cometido algún desacierto que no ha permitido completar exitosamente la fase de planteamiento.

Ejemplo c14.3:

V(3, 0, 0)

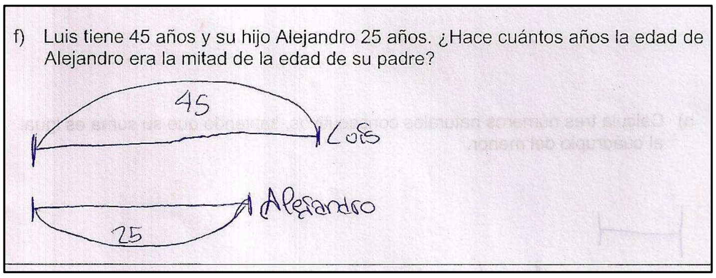


En efecto, en el Ejemplo c14.3 se ha dado un paso más en el planteamiento del TIAL: el sujeto ha representado la suma de los tres números consecutivos, incluso reorganizando la representación de los números, agrupando las unidades al final de la suma, además de representar correctamente el cuádruplo del número menor. Sin embargo, en la primera RGL sobra un segmento, lo que no permite la comparación correcta de ambas RGL´s y estanca la resolución.

En los dos ejemplos que vienen a continuación (c14.4 y c14.5), veremos planteamientos en que, aún cuando se ha utilizado el MGL, no responden a un proceso de traducción algebraico sino a uno aritmético, ya que no se han planteado en base a la cantidad desconocida, sino que se han trazado los segmentos con el fin de comprobar, aritméticamente, si los números propuestos cumplen con las condiciones planteadas en el enunciado.

Ejemplo c14.4:

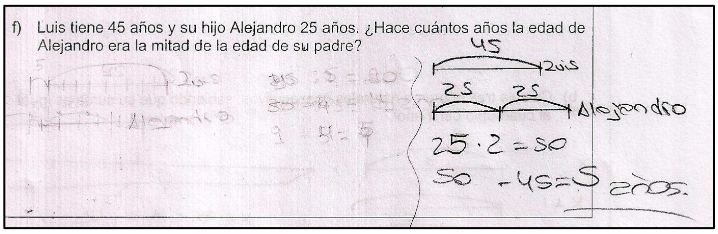
V(3, 0, 0)



En el Ejemplo c14.4 se representan los números 45 y 25 utilizando dos segmentos, pero sobre ellos no se representa la cantidad de años que han pasado ni la relación existente entre las cantidades. Luego, en realidad se han asignado segmentos a las cantidades mencionadas en el enunciado, tomando en cuenta la magnitud de éstos, pero no se llega a establecer ninguna otra relación entre dichas cantidades y tampoco se continúa con la resolución.

Ejemplo c14.5:

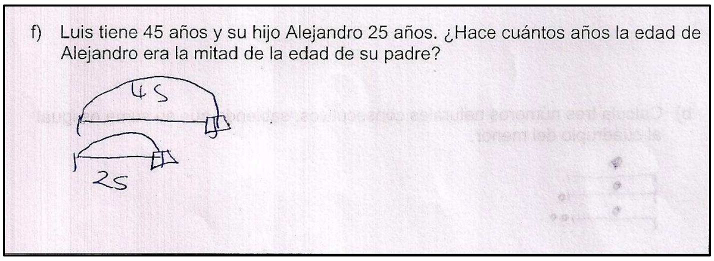
V(3, 2, 1)



Algo similar sucede en el caso del Ejemplo c14.5. También se representa el 45 y el 25 utilizando segmentos y tampoco se representa la cantidad desconocida. Por lo tanto, se han utilizado segmento para la elaboración de un TIAR y, en términos de utilización del MGL, no lo consideramos correcto porque no se ha completado la conversión del enunciado a la representación gráfica. Posteriormente, se trabaja sobre la representación gráfico/aritmética, descomponiendo uno de los segmentos, al que se le ha asignado el número 50, en dos segmentos de 25 con intención de continuar con la resolución del problema.

Ejemplo c14.6:

V(3, 0, 0)



En el Ejemplo c14.6, a diferencia de los dos anteriores, el estudiante representa las cantidades conocidas (edad del padre y del hijo) y también la cantidad desconocida que, representada por los recuadros en el extremo derecho de los segmentos. Sin embargo, el planteamiento es incompleto ya que no se representa la relación entre ambas RGL´s, quedando como dos textos independientes.

Descripción a partir de la conclusión 15 (c15):

c15. En la fase de ejecución, los problemas en que se utiliza el MGL correctamente con más éxito, superior al 50%, son el 4c, 4d, 4e y 6c.

Para esta conclusión c15, que se refiere a resoluciones en que se ha utilizado de forma correcta el MGL en la fase de ejecución, utilizamos producciones que tienen en su segunda componente un “4 = utiliza el MGL correctamente”, por lo que el vector que describe la resolución será de la forma: (x, 4, x).

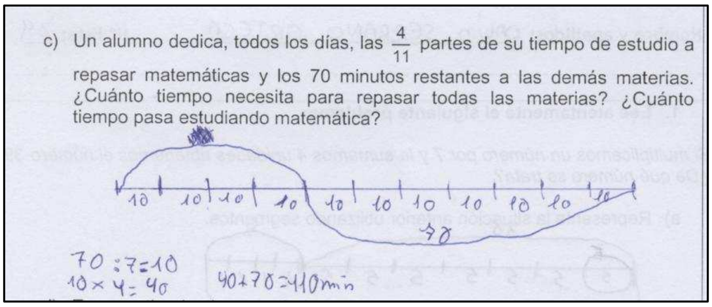
Ejemplificaciones

Al ejemplificar resaltaremos tres aspectos: en primer lugar, lo que significa utilizar el MGL en la fase de ejecución, es decir, cómo se utiliza la información del planteamiento para obtener nueva información que permita resolver el problema. Un segundo aspecto tiene que ver con el procedimiento utilizado al comparar 2 RGL´s. En tercer lugar, existe una notable variedad de representaciones equivalentes en la resolución de un mismo problema.

Para ejemplificar el primero de los aspectos, proponemos los dos casos siguientes:

Ejemplo c15.1:

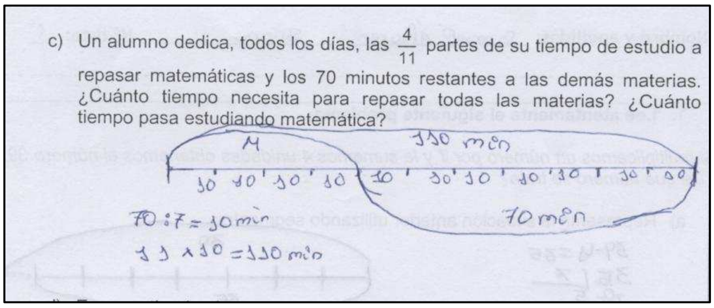
V(4, 4, 1)



En el Ejemplo c15.1, observamos que se ha elaborado un TIAL mediante la representación del total, como cantidad desconocida. Sobre dicha cantidad se representan los $\frac{4}{11}$ del total y la fracción restante que equivale a 70 minutos, información extraída directamente en el enunciado verbal del problema. Posteriormente, se utiliza dicha información para determinar a cuántos minutos equivale un onceavo y, de esa forma, completar la gráfica. Observamos que existe un ir y venir entre la gráfica y las operaciones que se desprenden de ésta, lo que hace que consideremos que en la fase de ejecución se ha utilizado el MGL porque las operaciones aritméticas se han deducido de la gráfica y lo obtenido, a partir de las operaciones, se vuelve a interpretar gráficamente.

Ejemplo c15.2:

V(4, 4, 1)



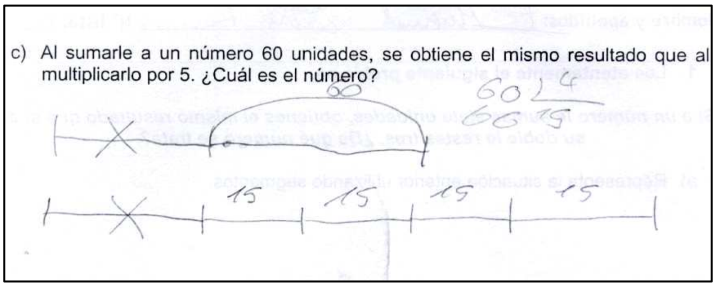
En este Ejemplo, c15.2, se ha trabajado de manera muy similar al anterior pero reproducimos este ejemplo porque, además de completar numéricamente las partes de la gráfica que se van averiguando, el estudiante completa la RGL con el valor numérico total, es decir, escribe en la gráfica el valor obtenido para la cantidad inicialmente desconocida, que se desea determinar.

Con el siguiente ejemplo queremos resaltar un aspecto del procedimiento de resolución cuando se trabaja con problemas que requieren comparar dos (o más) RGL´s.

Dichos problemas son los que hemos considerado en la Ficha Nº 6 y, por consiguiente, en la Ficha Nº 7 en donde, su resolución simbólica requiere una ecuación de la forma: $ax + b = cx + d$

Ejemplo c15.3:

V(4, 4, 1)



En el Ejemplo c15.3 tenemos un caso de planteamiento gráfico, utilizando el MGL, que equivale simbólicamente a la ecuación $x + 60 = 5x$. Observamos que el sujeto, al comparar ambas RGL´s, anula el segmento que representa la cantidad desconocida en cada una de ellas (simplifica), a partir de lo cual deduce que 60 unidades equivalen a 4 veces el número, es decir, reduce la ecuación inicial a $4x = 60$.

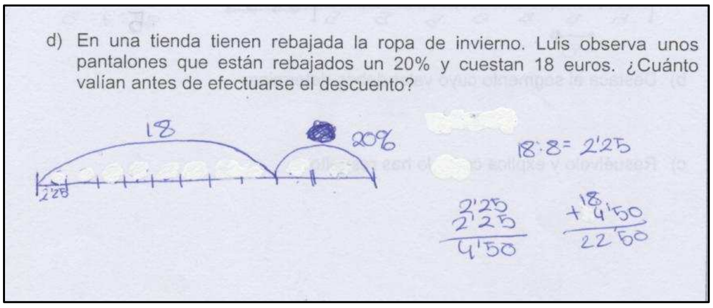
Este procedimiento, que gráficamente puede llegar a parecer obvio o natural, puede ser conflictivo a nivel de procedimiento algebraico, por lo que la resolución gráfica en estos casos actúa como herramienta idónea, a nivel de analogía o similitud, para justificar o dar explicación a procedimientos algebraicos.

Finalmente, presentamos tres ejemplos de resolución del problema 6d que se identifican con un vector de resolución idéntico, pero en donde los datos se han representado de distinta manera, aspecto que nos parece muy enriquecedor en cuanto al desarrollo conceptual asociado a la resolución de problema, además de la posibilidad de validar en el aula diversas formas de resolver un mismo problema.

Dos aspectos queremos resaltar: en primer lugar, la forma en que se representan los porcentajes del enunciado del problema y cómo determinan las operaciones que se utilizan para obtener nueva información; en segundo lugar, las operaciones mediante las que se llega a la solución del problema, aspecto que, en gran manera, guarda relación con lo anterior.

Ejemplo c15.4:

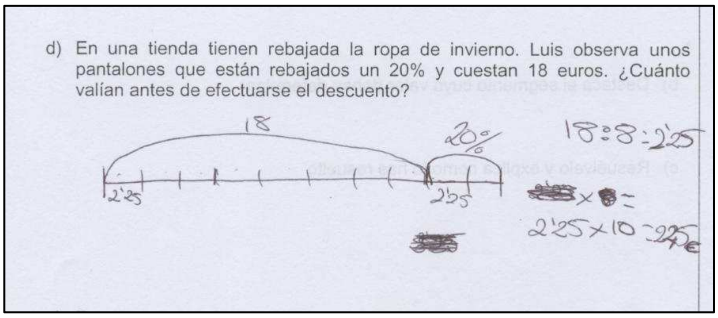
V(4, 4, 1)



En el Ejemplo c15.4 vemos que para representar el 20% del total (cantidad desconocida), se divide el segmento en 10 partes y se considera el 20% como $\frac{2}{10}$. El resto, que equivale a 18 euros, corresponderían al 80%, representado como $\frac{8}{10}$. En este caso, al plantear la equivalencia de los 18 euros con el 80% ($\frac{8}{10}$ del total), se desprende que se puede obtener el 10% mediante la división 18:8=2,25 y, a partir de aquí, se determina el 20% del total sumando dos veces el 10% (2,25+2,25=4,5). Finalmente, se suman las cantidades correspondientes al 20% y al 80% del total, para determinar la cantidad total, es decir: 4,5 + 18 = 22,5.

Ejemplo c15.5:

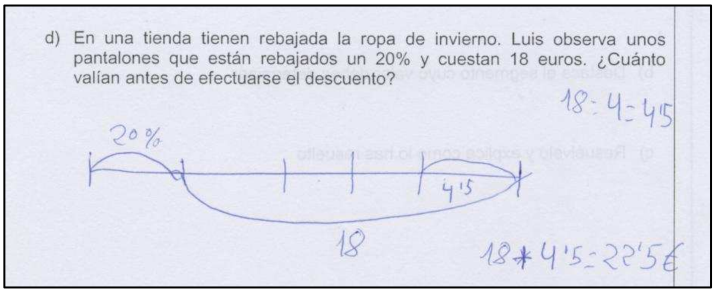
V(4, 4, 1)



El Ejemplo c15.5 tiene el mismo esquema que el ejemplo anterior, es decir, representar los porcentajes como fracciones de la unidad. También se utiliza la cantidad conocida, 18 euros, para determinar el 10% del total mediante la división 18:8= 2,25. Sin embargo, en este caso, no se calcula cuánto es el 20% (como cantidad desconocida intermedia), sino que se multiplica por 10 el valor obtenido para el 10% y así se obtiene el valor del total de forma directa.

Ejemplo c15.6:

V (4, 4, 1)



En el Ejemplo c15.6, en cambio, se representan los porcentajes en base a "quintos", es decir el 20% como $\frac{1}{5}$ del total. De ahí se desprende que los 18 euros equivalen a las $\frac{4}{5}$ partes del total. Después, al plantear la operación 18 : 4, se obtiene la cantidad de dinero correspondiente a $\frac{1}{5}$ ó al 20% del segmento. Sumadas ambas cantidades se obtiene el 100%, dando, así, la respuesta correcta al problema.

Descripción a partir de la conclusión 16 (c16):

c16. En los problemas 4c, 4d, 4e y 6c, el porcentaje de uso correcto del MGL en ambas fases a la vez, planteamiento y ejecución, es superior al 50%.

En este caso utilizamos producciones de los estudiantes que han utilizado el MGL de forma correcta, tanto en la fase de planteamiento como en la fase de ejecución, independientemente del resultado del problema. Por lo tanto, las dos primeras componentes del vector tendrán como valor "4 = utiliza el MGL correctamente", siendo el vector de la forma: (4, 4, x).

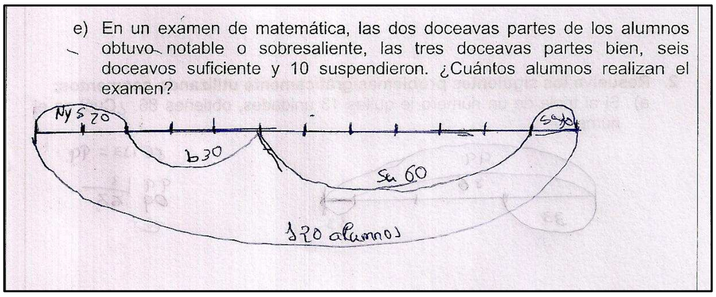
Ejemplificaciones

La conclusión c16 destaca que, en la resolución de 4 de los 12 problemas, existe cierta estabilidad en la utilización correcta del MGL en todas las fases. Estos resultados complementan a la anterior conclusión, c15, ya que los mismos problemas en que la mayoría de sujetos utilizan el método de forma correcta en la fase de ejecución, lo hacen, de forma correcta también, en la fase de planteamiento.

Algunos ejemplos de esta conclusión se han expuesto anteriormente, pero los volvemos a presentar porque queremos destacar nuevos aspectos que nos han parecido interesantes para ilustrar la conjetura c16.

Ejemplo c16.1:

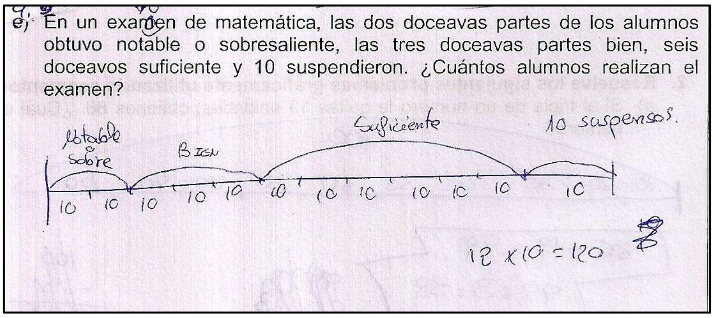
V(4, 4, 1)



En Ejemplo c16.1 hay dos particularidades que quisiéramos destacar. En primer lugar, que se produce un TIAL gráficamente en la fase de planteamiento, en donde se señalan las fracciones correspondientes a cada parte que se indica el enunciado, sin necesidad de utilizar el registro numérico. En segundo lugar, que, a partir del planteamiento, se escribe muy poco fuera del gráfico, se va completando la fase de ejecución a partir de la información que se conoce aunque no se represente (10 alumnos suspendieron), sin realizar operaciones aritméticas visibles. De esta manera, el estudiante ha resuelto el problema apoyándose en el MGL sin utilizar otros elementos de forma explícita.

Ejemplo c16.2:

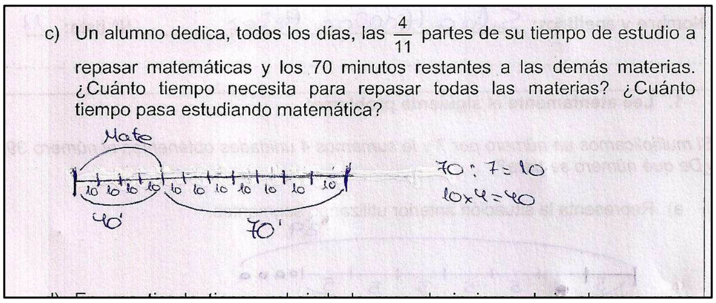
V(4, 4, 1)



En el Ejemplo c16.2 observamos un planteamiento muy similar al anterior, con la diferencia de que al pasar a la fase de ejecución se completa explícitamente en el dibujo la información conocida. Además, se puede ver que esto se complementa con la operación 12 x 10 = 120 como una forma de justificación aritmética para escribir el resultado y, así, dar la respuesta correcta al problema.

Ejemplo c16.3:

V(4, 4, 1)



Finalmente, en el Ejemplo c16.3 se explicita la ejecución de forma paralela entre la parte gráfica y las operaciones aritméticas, a partir de la información conocida. Ahora bien, en este caso no es posible conocer, sólo con la producción escrita del estudiante, qué cosa se hizo primero, si completar la gráfica y a partir de ello las operaciones aritméticas, o si se escribieron las operaciones con el fin de justificar matemáticamente el desarrollo de la gráfica.

Consideramos que este caso es un ejemplo de producción que justificaría ampliar el trabajo con un estudio de casos, con el fin de comprender mejor el proceso de resolución llevado a cabo por el estudiante y, por lo tanto, su competencia matemática.

5.2.4 Clúster por etapa. Descripción

Uno de los objetivos planteados para este trabajo, consistía en determinar y caracterizar tipologías de problemas de álgebra elemental teniendo en cuenta su resolución cuando se utiliza el método geométrico – lineal que hemos propuesto para trabajar en el aula. Para esto, realizamos un análisis de clúster, a través del paquete estadístico SPSS, porque dicho análisis permite clarificar la composición de grupos o agrupaciones y los rasgos diferenciales entre los mismos (Tejedor, 1988).

Este análisis se llevó a cabo en las distintas fases de resolución de los problemas. Es decir, se realizó un análisis clúster a partir de los resultados obtenidos en la etapa de planteamiento, otro para la de ejecución, y un tercero para le etapa de desempeño final. Pretendemos que la definición de los clúster complemente el análisis de frecuencias y nos permita visualizar, con mayor claridad, grupos de problemas a partir de la utilización del MGL para su resolución.

A continuación presentamos los resultados del análisis, partiendo de la Matriz de los datos codificados del Anexo 3.

En los apartados siguientes se reproduce el dendograma correspondiente. El resto de material que arroja el análisis, así como el historial de conglomeración y el diagrama de témpanos vertical, se pueden consultar en el Anexo 7.

5.2.4.1 Clúster de problemas según fase de planteamiento

La definición de clúster según los resultados en la fase de planteamiento, se realizó considerando la variable *utilización del MGL* y la variable *planteamiento correcto*, recogidas en la codificación descrita en el apartado 5.1.2.1.

En el dendograma del Gráfico 5.1 observamos el resultado del citado análisis, a partir del cual hemos determinado cuatro clústers que describimos posteriormente.

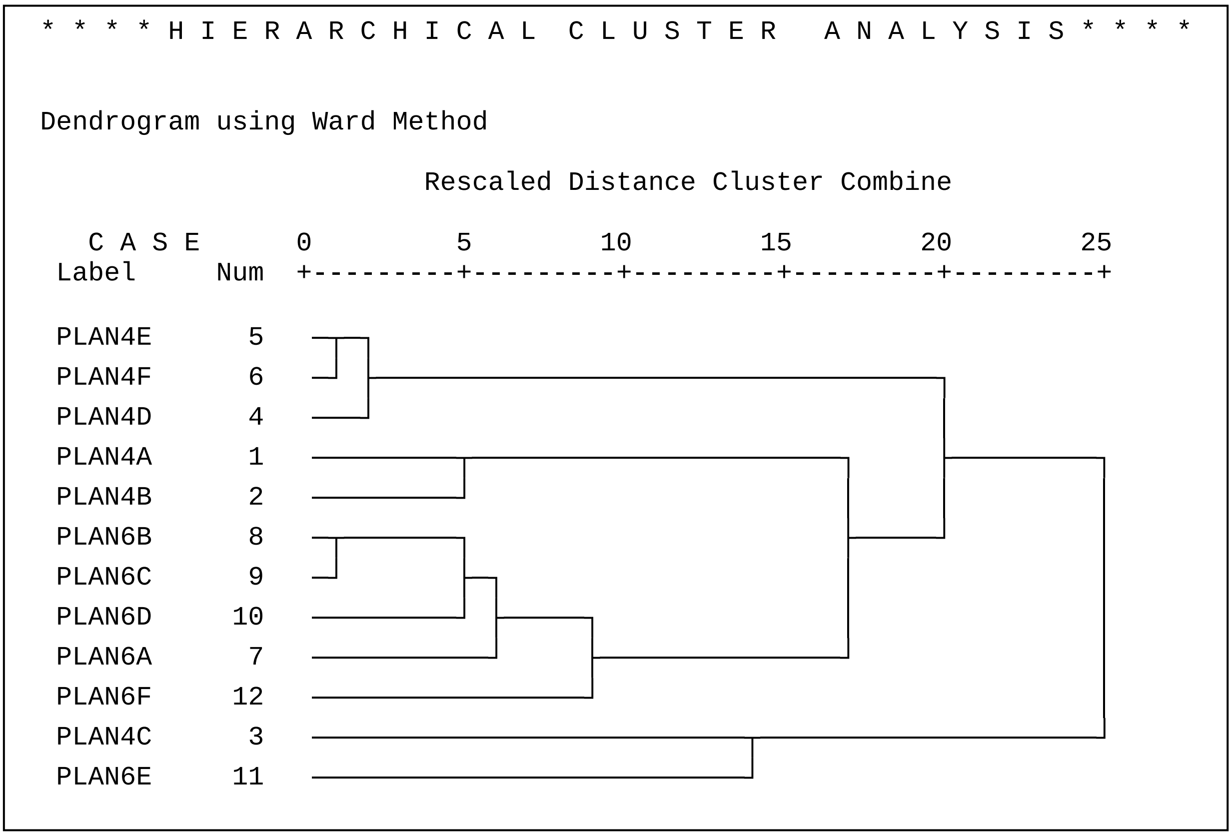


Gráfico 5.1: Dendograma fase de planteamiento

Definición de clústers

En la Tabla 5.8 especificamos los cuatro clústers que se han definido para la fase de planteamiento, junto con los problemas que conforman cada uno de ellos.

Clúster	Problemas
Clúster P1	4e, 4f, 4d
Clúster P2	4a, 4b
Clúster P3	6b, 6c, 6d, 6a, 6f
Clúster P4	4c, 6e

Tabla 5.8: Clúster fase de planteamiento

Para describir los elementos comunes que tienen los problemas que contienen cada clúster adjuntamos, en la Tabla 5.9, los resultados que se obtuvieron en la fase de planteamiento, ordenados según los clúster, con el fin de facilitar la lectura y descripción de cada uno.

	Utilización del método y corrección fase de planteamiento				
Problema	% no información no responde	% otro método incorrecto	% otro método correcto	% MGL incorrecto	% MGL correcto
4e	11,0	0,0	0,0	15,9	73,2
4f	17,1	1,2	6,1	22,0	53,7
4d	13,4	0,0	0,0	18,3	68,3
4ª	13,4	1,2	9,8	14,6	61,0
4b	18,3	2,4	3,7	37,8	37,8
6b	13,4	0,0	0,0	50,0	36,6
6c	9,8	0,0	0,0	15,9	74,4
6d	11,0	1,2	1,2	32,9	53,7
6ª	8,5	0,0	0,0	17,1	74,4
6f	13,4	1,2	0,0	61,0	24,4
4c	29,3	1,2	1,2	3,7	64,6
6e	32,9	0,0	0,0	29,3	37,8

Tabla 5.9: Resultados fase de planteamiento ordenados por clúster

Clúster P1. Formado por los problemas 4e, 4f y 4d que en la fase de planteamiento se caracterizan porque:

- La utilización exitosa del método es alta, obteniendo una frecuencia de uso correcto que varía entre 54% y 73%.
- En los tres problemas hay un bajo porcentaje de sujetos que no responde a la fase de planteamiento (entre un 11% y un 17%)

- El porcentaje de utilización del MGL de forma incorrecta es bajo y homogéneo (de un 16% a un 22%)

Clúster P2. Constituido por los problemas 4a y 4b. Destacamos que:

- Predomina la utilización del MGL, independiente de la corrección, sobre el 75% en ambos casos.
- El porcentaje de utilización de un método distinto al MGL es similar en ambos casos.
- En estos problemas se observa un mayor número de sujetos que utilizan otro método correctamente, aún cuando dicho porcentaje es bajo.

Clúster P3. A este clúster pertenecen los problemas 6b, 6c, 6d, 6a y 6f, teniendo los cinco en común que:

- Registraron un alto porcentaje de utilización del MGL, independiente de la corrección (entre un 85% y un 91%)
- La utilización de otro método es prácticamente nula en los cinco casos.
- El porcentaje de planteamientos en blanco es similar (entre un 8% y un 13%) considerándolo bajo para todos los casos, por lo que la frecuencia con que son abordados los problemas es muy alta.

Clúster P4. *C*onformado por los problemas 4c y 6e. En este caso podemos encontrar que:

- Han obtenido los mayores porcentajes de planteamientos en blanco.
- El porcentaje de utilización de otro método, distinto del MGL, casi nula (4c dos sujetos y 6e ninguno).
- Menores porcentajes de utilización del MGL, al margen de la corrección en su utilización.

5.2.4.2 Clúster de problemas según fase de ejecución

La definición de clúster según los resultados en la fase de ejecución, se realizó considerando la variable *utilización del MGL* y la variable *ejecución correcta*, recogidas en la codificación descrita en el apartado 5.1.2.2.

En el Gráfico 5.2 se reproduce el dendograma con el resultado del análisis, a partir del cuál, hemos determinado tres clústers que describimos a continuación.

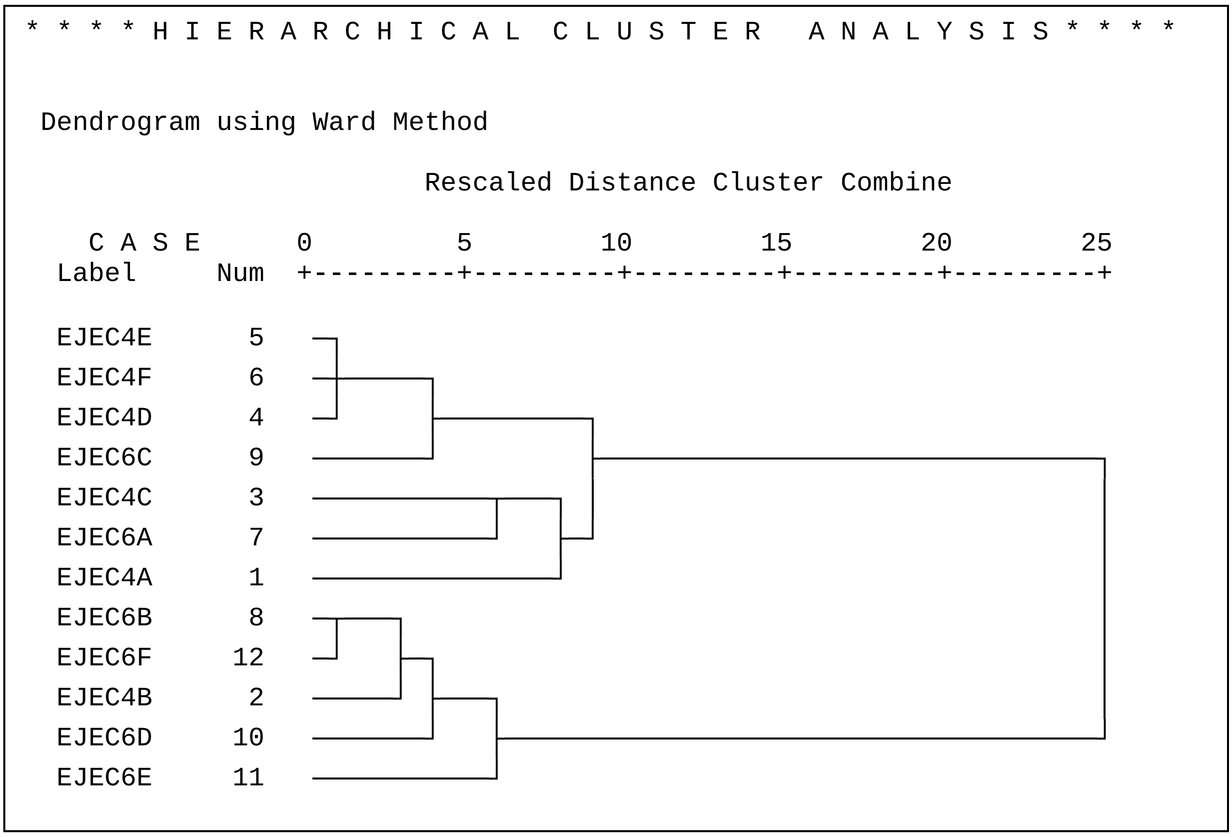


Gráfico 5.2: Dendograma fase de ejecución

Definición de clústers

Los tres clúster que hemos determinado para la fase de ejecución los recogemos en la Tabla 5.10:

Clúster	Problemas
Clúster E1	4e, 4f, 4d, 6c
Clúster E2	4c, 6a, 4a
Clúster E3	6b, 6f, 4b, 6d, 6e

Tabla 5.10: Clústers fase de ejecución

Como ayuda a la descripción de la caracterización de los clúster, en la Tabla 5.11 adjuntamos el resultado de las frecuencias de utilización del MGL para la fase de ejecución, considerando además la corrección. Ordenamos la tabla según los problemas que componen cada clústers.

	Utilización del método y corrección fase de ejecución				
Problema	% no información no responde	% otro método incorrecto	% otro método correcto	% MGL incorrecto	% MGL correcto
4 e	15,9	0,0	2,4	11,0	70,7
4 f	24,4	6,1	18,3	4,9	46,3
4 d	25,6	0,0	2,4	18,3	53,7
6 c	24,4	7,3	7,3	3,7	57,3
4 c	31,7	1,2	1,2	3,7	62,2
6 a	41,5	1,2	15,9	1,2	40,2
4 a	30,5	2,4	14,6	4,9	47,6
6 b	53,7	6,1	23,2	0,0	17,1
6 f	35,4	17,1	40,2	2,4	4,9
4 b	50,0	6,1	9,8	15,9	18,3
6 d	54,9	14,6	6,1	2,4	22,0
6 e	53,7	7,3	0,0	6,1	32,9

Tabla 5.11: Resultados fase de ejecución ordenados por clústers

Los tres clústers definidos para la fase de ejecución quedan determinados por las siguientes características:

Clúster E1. Formado por los problemas 4e, 4f, 4d y 6c, que tienen en común para la fase de ejecución:

- Registran alto porcentaje de utilización correcta del MGL para esta fase, entre un 46% y un 70%.
- Los porcentajes de frecuencias respecto a no realizar la fase de ejecución son homogéneos.
- Estos porcentajes (“sin información”/”no responde”) son los más bajos, entre un 15,9% y un 25,6%, de todos los problemas

Clúster E2. Los problemas 4c, 6a y 4a son los que conforman el segundo clúster, caracterizado por:

- La utilización de otro método y del MGL de manera incorrecta es baja, por lo que estos problemas se polarizan entre “sin información” y “utilización correcta del MGL”, llegando a un 80% las respuestas ubicadas entre ambas posibilidades.

- Porcentaje medio de utilización correcta del MGL, entre un 40% y un 60%.
- Se registra entre un 30% y un 40% de estudiantes que deja la fase de ejecución en blanco o sin información.

Clúster E3. Tercer clúster correspondiente a la fase de ejecución está formado por los problemas 6b, 6f, 4b, 6d, 6e, caracterizado por:

- Un alto porcentaje de estudiantes dejan esta fase en blanco o sin información, entre un 35% y un 55% de total.
- Son los cinco problemas con menor porcentaje de utilización correcta del MGL para la fase de ejecución, sin llegar a superar el 33%.

5.2.4.3 Clúster de problemas según fase de desempeño final

La definición de la variable *desempeño final* se realizó en base a la corrección de la solución al problema, codificándola como especificamos en el apartado 5.1.2.3.

El análisis de clúster para esta fase se hizo en base a esa codificación. En el Gráfico 5.3 observamos el resultado mediante un dendograma, a partir del cual hemos determinado tres clústers que especificamos y definimos posteriormente.

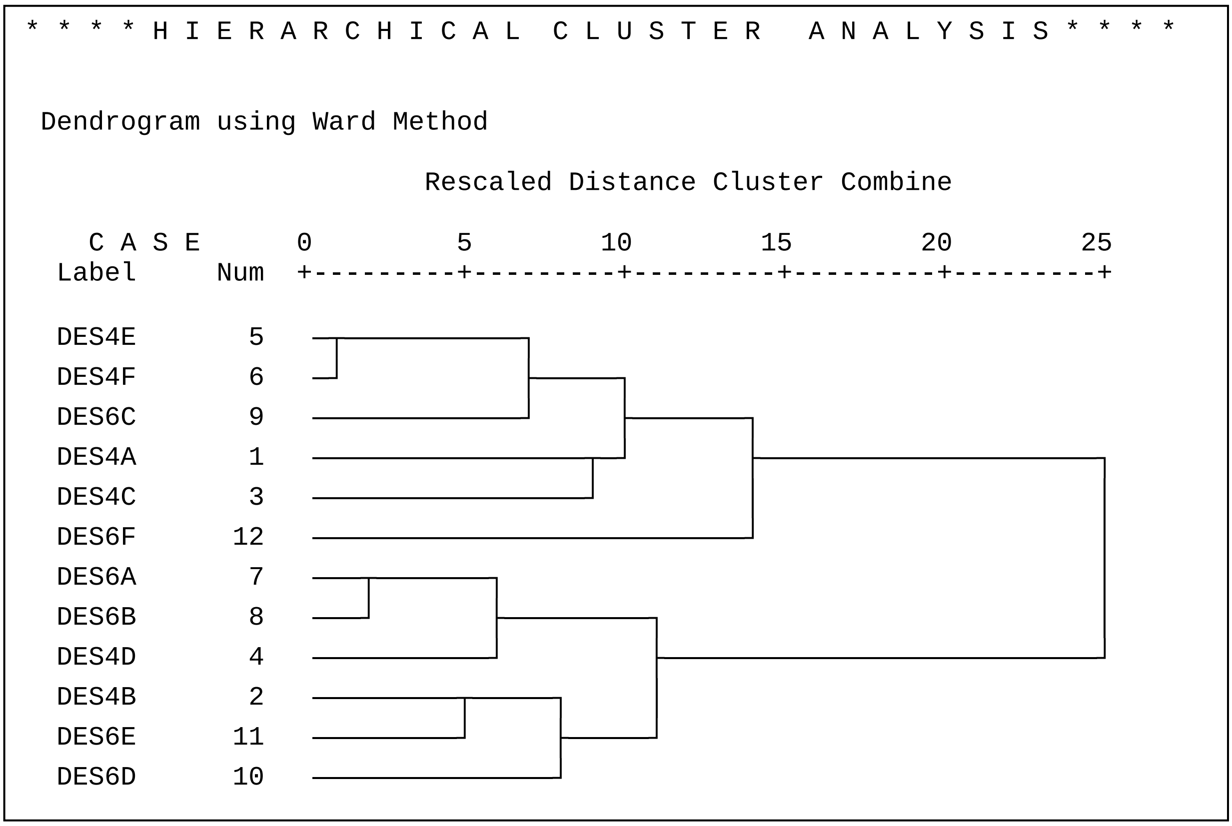


Gráfico 5.3: Dendograma fase de desempeño final

Definición de clústers

A partir de la del análisis reflejado en el Gráfico 5.3, hemos definido tres clústers para la fase de desempeño final que indicamos en la Tabla 5.12:

Clúster	Problemas
Clúster D1	4e, 4f, 6c, 4a, 4c
Clúster D2	6f
Clúster D3	6a, 6b, 4d, 4b, 6e, 6d

Tabla 5.12: Clústers fase de desempeño final

En la Tabla 5.13 adjuntamos los resultados obtenidos para la fase de desempeño final, organizada según clústers, a partir de la cuál describiremos cada uno de los conglomerados definidos.

	Corrección fase de desempeño final	
Problema	% incorrecto no responde	% correcto
4 e	26,8	73,2
4 f	35,4	64,6
6 c	39,0	61,0
4 a	40,2	59,8
4 c	37,8	62,2
6 f	45,1	54,9
6 a	59,8	40,2
6 b	67,1	32,9
4 d	52,4	47,6
4 b	72,0	28,0
6 e	69,5	30,5
6 d	73,2	26,8

Tabla 5.13: Resultados fase de desempeño final ordenados por clúster

Clúster DF1. Compuesto por los problemas 4e, 4f, 6c, 4a, y 4c que son aquellos problemas con un alto porcentaje de respuestas correctas, igual o superior al 60%, a partir de la utilización del MGL.

Clúster DF2. Formado el problema 6f, que es el único problema en que las frecuencias de respuestas correctas e incorrectas que está más próximas, equilibrándose cerca del 50%.
Clúster DF3. Los problemas que conforman este clúster son el 6a, 6b, 4d, 4b, 6e y 6d, que son aquellos que obtienen menor frecuencia de respuestas correctas, variando entre un 25% y un 40%.

5.3 Resumen de resultados

Vamos a presentar un resumen de los resultados obtenidos del análisis de frecuencias simples y de la elaboración de clúster. Lo hacemos agrupándolos por fases para visualizar mejor la utilización del MGL en las fases de planteamiento y ejecución, y cuál ha sido el resultado en cuanto al desempeño final en la propuesta trabajada en el aula de matemáticas de secundaria.

5.3.1 Resumen de resultados para la fase de planteamiento.

En la fase de planteamiento de los doce problemas de las Fichas Nº 4 y Nº 6, se ha observado que:

- En 8 de los 12 problemas se obtuvo un alto porcentaje planteamientos correctos (superior al 50%). Sólo en los problemas 4b, 6b, 6e y 6f la frecuencia de planteamientos correctos ha sido inferior al 50%, destacando que 3 de estos problemas pertenecen a la Ficha Nº 6.
- La frecuencia con que fue utilizado el MGL para el planteamiento es alta, siendo el problema 6e, con un 67%, en el que menos se utiliza. El uso del método es más frecuente en los problemas de la Ficha Nº 6
- Muy pocos estudiantes utilizan un método distinto del MGL para plantear los problemas, siendo más frecuente en los problemas de la Ficha Nº 4.
- En 8 de los 12 problemas estudiados, la frecuencia de uso correcto del MGL es superior al 50%. Los problemas 4b, 6a, 6c y 6d tienen porcentajes inferiores en el planteamiento correcto mediante el MGL, resaltando que la mayoría de estos problemas son de la Ficha Nº 6.
- Respecto a los clúster, ha sido posible definir 4 clústers. Destacamos que el Clúster P3 está formado por 6 problemas, de los cuales 5 son de la Ficha Nº 6, y son los problemas en que más se utiliza el MGL para plantear.

- El Clúster P4 está formado por los problemas 4c y 6e, que son problemas definidos por variables distintas (cada uno en una Ficha distinta) y, sin embargo, se comportan de forma similar en cuanto a la frecuencia de planteamientos sin información. Por lo tanto, sería necesario estudiar más detenidamente el origen de dicho comportamiento.

5.3.2 Resumen de resultados para la fase de ejecución

En cuanto a los resultados obtenidos para la fase de ejecución se puede resumir lo siguiente:

- Los mismos cuatro problemas que obtuvieron baja frecuencia de planteamientos correctos (4b, 6b, 6e y 6f), han obtenido también un bajo nivel de corrección para la fase de ejecución. A estos problemas se añade el 6d.
- En todos los problemas baja la utilización del MGL en comparación con la fase de planteamiento.
- La utilización correcta del MGL en esta fase es baja, destacando los problemas 4c, 4d, 4e y 6c con un porcentaje superior al 50%.
- Se han definido 3 clústers para la fase de ejecución. En el Clúster E1 y en el Clúster E2 encontramos problemas que, independiente de la corrección, tienen un porcentaje aceptable de utilización del MGL. El Clúster E3 contiene problemas que presentan un bajo porcentaje de utilización del MGL (por debajo del 40% en todos los casos), siendo mayoría los problemas de la Ficha Nº 6.

5.3.3 Resumen de resultados para la fase de desempeño final

En la fase de planteamiento observamos sólo la variable de respuesta correcta o incorrecta, por lo que los resultados se resumen en:

- En 6 de los 12 problemas se obtienen frecuencias de desempeño final correcto superiores al 50%, la mayoría pertenecientes a la Ficha Nº 4.
- Se han definido 3 clusters para esta fase. Los 6 problemas anteriores están contenidos en los clústers DF1 (con 5 problemas) y DF2 (con 1 problema). El Clúster DF3 contiene el resto de los problemas, es decir, los que obtuvieron menos éxito (por debajo del 50%) en la fase de desempeño final.

5.3.4 Resumen de resultados que involucran más de una fase de resolución.

Hay algunos resultados que involucran más de una fase de resolución que nos parece importante resaltar:

- Los problemas 4b, 6b y 6e obtienen, en las tres etapas, un porcentaje de corrección inferior al 50%.
- Los problemas 4c, 4d, 4e y 6c son en los que, mayoritariamente, se ha utilizado correctamente el MGL tanto en el planteamiento como en la ejecución.
- Sólo el problema 4e ha sido “estable” en la utilización del MGL para las etapas de planteamiento y ejecución, aproximadamente un 80% en ambos casos.

CAPÍTULO 6
RESULTADOS Y CONCLUSIONES GENERALES

En este capítulo exponemos las conclusiones del trabajo realizado en torno a los tres ejes que sirvieron como punto de partida y definición de la investigación: preguntas de investigación, objetivos e hipótesis de investigación.

Además, describimos los aportes que se realizan al área de estudio, así como sus limitaciones y líneas abiertas a futuros estudios.

6.1 Respuestas a las preguntas de investigación

En el Capítulo 3 expusimos seis preguntas que sirvieron como punto de inicio para el trabajo, a partir de las cuales se definieron los objetivos de la investigación.

Las tres primeras preguntas hacían referencia a la implementación del MGL para la resolución de problemas algebraicos en el aula, considerando la forma de introducirlo en la instrucción escolar y su efectividad como método de resolución gráfico. El segundo grupo de preguntas se centran en la descripción de los problemas y la utilización del MGL en su resolución.

En cuanto al primero de los núcleos subrayamos que la construcción del instrumento para recoger información, respecto al empleo del MGL en la resolución de problemas de álgebra elemental, ha sido la base para este trabajo de tesis. Dicho instrumento contiene las Fichas para el aula descritas en el Capítulo 4.

Las Fichas constituyen un material, de "lápiz y papel", que se han concebido considerando cinco elementos:

- Representar cantidades desconocidas utilizando segmentos de recta y efectuar operaciones con ellas.
- Representación de aumento o disminución de cantidades utilizando segmentos de recta conocida la unidad, es decir, el segmento que la representa.
- Determinar cantidades desconocidas a partir de información dada utilizando segmentos.
- Resolución de problemas de forma gráfica utilizando el MGL.
- Traducción a ecuaciones de la resolución de problemas utilizando el MGL.

Lo anterior es el resultado del trabajo consensuado con un grupo de profesores de aula que, de forma voluntaria, se han prestado para colaborar en la elaboración y aplicación de un material que les permitiera introducir el MGL como método para la resolución de problemas. Este material debía contemplar, previamente, el manejo de los segmentos como una forma válida para representar cantidades conocidas y desconocidas y operar con ellas.

Según los resultados obtenidos, expuestos en el Capítulo 5, la gran mayoría de los estudiantes utiliza el MGL para plantear los problemas (conclusión 8, apartado 5.2.2.1) y, aunque la frecuencia de uso en la fase de ejecución (conclusión 10, apartado 5.2.2.1) es menor, consideramos que la aceptación por parte de los estudiantes de utilizar un SR gráfico como el MGL para la resolución de problemas fue alta.

Deducimos, por lo tanto que, tanto el material elaborado como la metodología para introducir el MGL en el aula, fueron eficaces para traducir el texto de un problema verbal al SR gráfico propuesto.

Teniendo en cuenta que este trabajo lo hemos planteamos como un estudio exploratorio descriptivo, la pregunta 2, que se refiere a la mejora del rendimiento utilizando el MGL, no se ha abordado por lo que queda pendiente para posteriores investigaciones.

El segundo núcleo de preguntas se refiere fundamentalmente: a la comparación de la utilización del MGL entre las diferentes fases de la resolución de los problemas, a la descripción de los errores o dificultades más comunes y a las características de los problemas. En torno a esto destacamos que:

- La frecuencia de utilización del MGL en la fase de planteamiento es mayor que en la fase de ejecución para todos los problemas (conclusión 10).
- Se pueden diferenciar, a través de la utilización de MGL, planteamientos gráficos que responden a la definición de TIAR y TIAL dada por Cerdán (2008) y descrita en el Marco Teórico del Capítulo 2, lo que nos permitirá identificar resoluciones más próximas al pensamiento aritmético o al pensamiento algebraico, para tomar decisiones tendentes a enfatizar el trabajo a la hora de introducir el álgebra en el aula de matemáticas.
- El ajuste correcto de escalas de las medidas tomadas sobre los segmentos, mediante la comparación RGL´s, determina en gran medida la resolución correcta del problema, como se pudo evidenciar en las ejemplificaciones realizadas con las producciones de los estudiantes (apartado 5.2).

- En los resultados obtenidos quedan en evidencia elementos respecto al desarrollo de conceptos aritméticos, como son la dependencia de la unidad para representar una relación entre cantidades y también las diversas formas de representar una cantidad, lo que debe promover en el aula la posibilidad de trabajar distintas representaciones sobre los conceptos numéricos.
- En términos generales, los problemas de la Ficha Nº 4, excepto el problema 4b, tuvieron mayor éxito en su resolución utilizando el MGL. Estos resultados sugieren un estudio más detenido de las particularidades del problema 4b. Por su parte, los problemas de la Ficha Nº 6 registran muy buen resultado en la utilización correcta del MGL para la fase de planteamiento.

  En todos los casos podemos afirmar que la representación gráfica mediante segmentos (MGL) es una herramienta útil en la resolución de problemas verbales al facilitar la conversión del registro verbal a uno gráfico, en definitiva, simbólico e intuitivo, intermediario entre lo más concreto y lo más abstracto.

6.2 Resultados en relación con los objetivos planteados

Un segundo aspecto es comprobar el grado de cumplimiento de los objetivos planteados. Para ello vamos a reproducir los objetivos generales, considerando también los objetivos específicos, descritos en el apartado 3.2.3.

6.2.1 Objetivo general 1

El primer objetivo general que planteamos en nuestro trabajo de investigación fue el siguiente:

"Diseñar y aplicar una intervención para introducir el MGL en el aula de matemáticas como una forma de representar gráficamente cantidades, conocidas o desconocidas, y aplicar el método (MGL) para resolver problemas de álgebra elemental"

Para cumplir con este objetivo, se ha diseñado un material que nos ha permitido introducir la utilización del MGL en el aula. Para ello se realizó, en primer lugar, un análisis de los problemas que se utilizan en libros de texto de 1º y 2º de ESO. A partir de dicho análisis se obtuvo una clasificación descrita en el apartado 2.5.3 que nos sirvió para iniciar el diseño del material, utilizando problemas pertenecientes a las categorías 1 y 2 de la citada clasificación y excluyendo los problemas del tipo 3 ya que, según los resultados obtenidos en pruebas piloto (Martínez, 2006), consideramos que eran los más adecuados.

Por otra parte, la literatura consultada subraya la necesidad de trabajar las representaciones gráficas de manera explícita, de manera que éstas se constituyan en una herramienta que facilite la tarea algebraica y la resolución de problemas. Al respecto, destacamos algunos de los trabajos que han tenido mayor influencia en nuestro estudio, como son los de Palarea y Socas (1995), Thomas y Thomas (1999), Swan (2000), Carter, Ferrucci y Yeap (2002), Mousoulides y Gagatsis (2004) y Pantziara, Gagatsis y Pitta-Pantazi (2004), descritos en el estado de la cuestión (apartado 3.1.2).

En particular, en la publicación de Dickson y Eade (2004) sobre el uso de segmentos para la resolución de ecuaciones, se propone una secuencia didáctica basada en representar operaciones con segmentos para, a continuación, trabajar las ecuaciones con una incógnita en un miembro de la ecuación y, finalmente, ecuaciones con la incógnita en ambos miembros.

El tercer elemento tomado en cuenta fue la consideración de los Elementos de Euclides (Euclides, 1991, 1994 y 1996) como antecedente histórico de la utilización de segmentos para representar magnitudes, números y cantidades incomensurables (apartado 2.5.1).

Considerando los tres enfoques anteriores, con un equipo de profesores se diseñaron 7 Fichas de trabajo para aplicar en el aula, como describimos en el apartado 4.2.4. Se realizaron sucesivamente cinco versiones preliminares hasta obtener una sexta versión final.

El material se aplicó en cinco aulas de 1º y 2º de ESO. De todo el material, se seleccionó la producción de 82 estudiantes que habían completado todo el proceso, lo que nos permitió recabar la información que, a continuación, se analizó con el fin de describir la utilización del MGL en la resolución de problemas verbales de álgebra elemental.

6.2.2 Objetivo general 2

Este objetivo se refiere a la utilización del MGL para la resolución de problemas:

"Describir la utilización del MGL en la resolución de problemas de álgebra elemental en una situación de aprendizaje con estudiantes de 1º y 2º ESO (iniciación al álgebra) a partir de la administración de un instrumento elaborado para este fin"

Para dar cumplimiento al objetivo se analizaron los resultados de la aplicación de las Fichas Nº 4 y Nº 6 del material diseñado. Para cada uno de los 12 problemas contenidos en dichas Fichas (6 problemas en cada Ficha) se realizaron análisis de frecuencias simples en tres sentidos que describimos a continuación.

En una primera aproximación correspondiente a la frecuencia de resoluciones *correctas e incorrectas* obtenidas para cada una de las tres fases, planteamiento, ejecución y desempeño final, nos ha arrojado como resultado que:

- Para la fase de planteamiento, en 8 de los 12 problemas se obtuvo un alto porcentaje (sobre el 50%) respuestas correctas.
- El porcentaje de respuestas correctas para la fase de ejecución también es alta. A los problemas 4b, 6b, 6e y 6f, que habían obtenido menor porcentaje de planteamientos correctos se suma el 6d, completando los problemas con menor porcentaje de corrección es esta fase.
- En 6 de los 12 problemas se obtiene un porcentaje de respuestas correctas superior al 50%, siendo la mayoría de la Ficha Nº 4 (4a, 4c, 4e, 4f, 6c, 6f).

La segunda aproximación consistió en estudiar la frecuencia de *uso del MGL* en las fases de planteamiento y ejecución, de la cuál desprendemos que:

- En todos los problemas el porcentaje de uso del MGL en la fase de planteamiento fue alto, siendo el más bajo el registrado en el problema 6e en que fue utilizado por un 67% de los estudiantes. Además en esta fase la utilización de otro método es muy baja y cuando se registra sucede con más frecuencia en los problemas de la Ficha Nº 4.
- Además destaca que para la fase de ejecución en todos los problemas baja la utilización del MGL en comparación con la fase de planteamiento.

La tercera aproximación se refiere a la frecuencia de *utilización correcta o incorrecta del MGL* en las fases de planteamiento y ejecución de los problemas. De este análisis destacamos que:

- El porcentaje de uso correcto del MGL en la fase de planteamiento es alto (sobre el 50%) en 8 de los 12 problemas.
- Por el contrario, la utilización correcta del MGL en la fase de ejecución es baja. Destacamos que los problemas con mayor porcentaje de uso correcto del método en esta etapa fueron el 4c, 4d, 4e y 6c.

Cada uno de los análisis anteriores fue complementado, a modo descriptivo, con ejemplos tomados de las producciones de los estudiantes con el fin de detallar cómo se utilizó el MGL, haciendo hincapié en los distintos tipos de resoluciones, y sus particularidades. Tres aspectos aparecen en reiteradas ocasiones en los ejemplos, de manera tal que han significado en un aporte para la caracterización del uso del MGL en la resolución de problemas:

- Ha sido posible distinguir el resultado de un proceso de traducción aritmético o algebraico en el sentido de Cerdán (2008), lo que se ha visto reflejado en la distinción de si en la fase de planteamiento se ha obtenido un TIAR o un TIAL, como resultado de la conversión del enunciado verbal al sistema de representación gráfico mediante segmentos.
- Se ha caracterizado la comparación gráfica de dos RGL´s, mediante lo que se ha denominado ajuste de escala y como dicho proceso puede facilitar el desarrollo correcto de la resolución de los problemas.
- Algunos aspectos referidos al desarrollo del sentido numérico han sido ejemplificados, complementando las ideas propuestas en Martínez, Fernández y Flores (2009a), como: la dependencia de la unidad o la posibilidad de realizar representaciones equivalentes de una cantidad determinada.

6.2.3 Objetivo general 3

El tercer objetivo general propuesto para el trabajo se refiere a la caracterización de tipos de problemas, plateando lo siguiente:

"Determinar y caracterizar tipos de problemas de álgebra elemental según la forma en que se abordan, cuando se utiliza el MGL para resolverlos"

Este objetivo se desglosó en 6 objetivos específicos que proponen determinar tipos de problemas para cada una de las fases de resolución descritas: planteamiento, ejecución y desempeño final, cuando se utiliza el MGL.

Con ese fin, se realizó un estudio de clúster para cada una de las tres fases indicadas, obteniendo como resultado:

- La definición y caracterización de cuatro clúster para la fase de planteamiento.
- La definición de tres clúster y su caracterización para la fase de ejecución.
- La definición y caracterización de tres clúster para la fase de desempeño final.

Este análisis de clúster nos ha permitido diferenciar los problemas por los resultados, al aplicar el MGL, en cada una de las fases de resolución del problema. Teniendo en cuenta conjuntamente las tres fases, encontramos que:

- La mayoría de los problemas de la Ficha Nº 4 (4a, 4c, 4d, 4e, 4f), junto con el 6c, obtienen resultados buenos o aceptables cuando se resuelven aplicando el MGL.
- La mayoría de los problemas de la Ficha Nº 6 (6a, 6b, 6d, 6e, 6f) presentan ciertas dificultades en la aplicación correcta del MGL.
- El problema 4b obtiene resultados singulares respecto al resto.

Sobre estos resultados observamos que el problema 6c tiene un enunciado verbal con una traducción fácil y directa al lenguaje matemático *("al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que…")*, lo que facilita su planteamiento correcto.

Por el contrario, el problema 4b presumimos que tiene un enunciado con difícil legibilidad ("*la suma de un número con su doble y su mitad …*") y, por lo tanto, una lectura poco concentrada induce al error de sumar el "doble del número más su mitad".

Aunque ambos enunciados están extraídos literalmente de libros de texto, sería preciso un estudio más en profundidad, a través de un estudio de casos, que nos permitiera comprobar y verificar las conjeturas propuestas.

De todo ello podemos deducir, de forma general, que se ha conseguido caracterizar, de forma empírica, dos tipos de problemas de problemas de álgebra elemental según la forma en que se abordan, cuando se utiliza el MGL para resolverlos. Estas dos tipologías, coincidentes mayoritariamente con la clasificación inicial propuesta, se concretan en la elaboración de la Ficha Nº 4 y la Ficha Nº 6 respectivamente.

6.3 Resultados en relación con las hipótesis planteadas

Las hipótesis que hemos planteado para nuestro trabajo de investigación son de carácter descriptivo y, como puntualizamos en el Capítulo 3, son presentadas como conjeturas o expectativas de lo que esperamos obtener.

En este caso vamos a contraponer los resultados esperados del trabajo (hipótesis) con los resultados que hemos obtenidos, para lo que haremos un recorrido comentando cada una de las seis hipótesis propuestas.

6.3.1 Comentario Hipótesis 1

La primera hipótesis de nuestro trabajo es:

"Se pueden categorizar los problemas de álgebra elemental que se estudian en 1º y 2º de ESO, según su resolución a través de la utilización del MGL. Esta clasificación permite diseñar una intervención en aula que ayuda a dar significación y mejora la compresión del proceso de resolución de los problemas"

Para categorizar los problemas de álgebra elemental que se trabajan en 1º y 2º de ESO mediante la utilización del MGL para su resolución, hemos recogido los problemas de 4 libros de texto utilizados en los centros escolares y realizamos una categorización basada en el número de RGL´s necesarias para resolver el problema. Según dicho criterio se definen tres categorías de problemas:

- Utilización de una RGL para la resolución del problema
- Utilización de dos RGL´s para la resolución del problema
- Utilización de tres o más RGL´s para la resolución del problema

El detalle de la definición de cada categoría y su ejemplificación la encontramos en el apartado 2.5.3 del Capítulo 2.

Para nuestro trabajo hemos considerado los problemas de las dos primeras categorías ya que, como se describe en Martínez (2006), son problemas en los que se obtiene mayor éxito al momento de utilizar el MGL para su resolución.

Además, en el marco del currículo escolar son problemas que son resolubles con una ecuación de una incógnita, razón por la cual consideramos que son problemas adecuados para introducir la resolución gráfica, mientras que los de la tercera categoría corresponden a problemas resolubles con sistemas de ecuaciones de 2x2, en donde la herramienta gráfica se desaconseja porque supone, en opinión de expertos, mayor complejidad y, en consecuencia, mayor dificultad.

Como hemos descrito en el apartado anterior, la consecución del Objetivo 3 nos permite afirmar la verificación de esta Hipótesis. Por lo tanto, podemos concluir que:

Ha sido posible proponer una clasificación de los problemas a partir de la resolución utilizando el MGL. Además dicha clasificación ha servido de criterio para seleccionar problemas adecuados para el diseño de una intervención para el aula.

6.3.2 Comentario Hipótesis 2

La segunda hipótesis definida es:

"El MGL es una herramienta válida para resolver problemas de álgebra elemental en una situación de introducción al álgebra en el aula de matemáticas"

La consideración del MGL como una herramienta válida para resolver problemas de álgebra elemental se basa en distintos criterios:

- La literatura destaca la ventaja y necesidad de trabajar con diversos tipos de representación en la enseñanza de los conceptos matemáticos (Kaput, 1992; Castro, 1994; Goldin, 1998; Cifarelli, 1998; Duval, 1999a, 1999b; Font, 2001; Goldin y Shteingold, 2001). Particularmente, entre los autores que han estudiado el uso de representaciones gráficas destacamos aquellas producciones que hemos considerado más próximas a nuestro trabajo, como son las ya indicadas anteriormente de Palarea y Socas, 1995; Thomas y Thomas, 1999; Swan, 2000; Carter, Ferrucci y Yeap 2002; Mousoulides y Gagatsis, 2004; Pantziara, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004.

  Nuevamente, destacamos en este punto el trabajo de Dickson y Eade (2004), quienes estudian la utilización de segmentos para representar y resolver ecuaciones.
- Para nuestra Hipótesis encontramos, desde una perspectiva histórica, la utilización de segmentos como forma de representar cantidades en los Elementos de Euclides, quien utiliza los segmentos en tres sentidos diferentes: magnitudes, números y cantidades incomensurables.
- Una vez definido el MGL como método que permite resolver problemas, se estructuró un cuestionario compuesto por problemas de libros de textos de 1º y 2º de ESO, el cual se puso a prueba según el proceso descrito en el Trabajo de Investigación Tutelado de Martínez (2006).

Como consecuencia de los tres puntos anteriores:

Consideramos que el MGL es una herramienta valida para resolver problemas de álgebra elemental en una situación de introducción al álgebra.

6.3.3 Comentario Hipótesis 3

La tercera hipótesis definida es:

"Es posible diseñar una intervención en el aula de matemáticas que permita introducir la utilización significativa del MGL, de tal forma que los estudiantes puedan resolver problemas algebraicos elementales de forma gráfica"

Para el diseño de un material que se pueda emplear en el aula de matemáticas consideramos los siguientes elementos:

- La consideración del marco curricular. En el caso del currículo de ESO de España, la resolución de ecuaciones de álgebra elemental se ubica en los dos primeros años de la Educación Secundaria, en el bloque temático 3: Álgebra.
- La categorización de problemas propuesta a partir de la resolución utilizando el MGL, recogida en el apartado 2.5.3, nos permitió discriminar entre problemas para los cuales era más adecuado utilizar el MGL en un contexto de enseñanza.
- La necesidad de realizar un trabajo previo de representación de manera tal que los estudiantes se familiaricen con el SR a utilizar y lo puedan utilizar de manera cómoda y de forma significativa (Dickson y Eade, 2004).
- La conformación de un equipo para la elaboración del material, formado por los investigadores y los profesores de aula de manera tal que se complementara el material teórico y la experiencia de aula, produciendo así un instrumento válido y adecuado para su aplicación.

Considerando los elementos anteriores, se diseñó un material conformado por 7 Fichas de trabajo, descrito en detalle en el apartado 4.2.5., con el que se trabaja la representación gráfica de cantidades y de operaciones entre ellas, resolución gráfica de problemas utilizando el MGL y conversión de ecuaciones desde el SR gráfico al SR simbólico.

Cabe destacar que los profesores de aula que formaron parte del equipo para el diseño del material fueron, además, quienes lo aplicaron en las aulas, por lo que el instrumento de trabajo se completó con un protocolo de la intervención a realizar. Los datos recogidos en las interacciones observadas en la aplicación del instrumento en el aula, serán objeto de estudios posteriores.

Por lo tanto, consideramos que:

Fue posible diseñar una intervención para el aula que permitiera introducir la utilización significativa del MGL, de tal forma que los estudiantes puedan resolver problemas algebraicos elementales de forma gráfica.

6.3.4 Comentario Hipótesis 4

La cuarta hipótesis a comentar está definida de la siguiente forma:

"Los estudiantes aceptan la utilización de un método gráfico, como el MGL, como forma de representación de cantidades y como herramienta de resolución de problemas de álgebra elemental"

Consideramos los resultados descritos en apartado 5.2.2, en donde se analiza la utilización del MGL por problema y por fase de resolución.

A partir de la tabla de frecuencia adjunta en dicho apartado (Tabla 5.5) destacamos las siguientes conclusiones parciales que hacen referencia a la utilización del método en las fases de planteamiento y ejecución.

- c8: En la fase de planteamiento, una abrumadora mayoría de sujetos utiliza el MGL, superando ampliamente el menor porcentaje, 67%, del problema 6e.
- c10: En la fase de ejecución, todos los problemas bajan la frecuencia de utilización del MGL, cosa que queda en evidencia en la columna de diferencias, cuyos componentes son todos positivos.
- c11: En la fase de ejecución, la mitad de problemas están por debajo del 50% en el uso del MGL (4b, 6a, 6b, 6d, 6e y 6f), siendo el 6f, con diferencia, el problema en que menos se utiliza (7,3%). Cabe resaltar que cinco de estos problemas pertenecen a la Ficha Nº 6.

A partir de dichas conclusiones destacamos que hubo un alto nivel de aceptación del MGL para la fase de planteamiento, tanto en la Ficha Nº 4 como en la Ficha Nº 6. Además, se observa que el uso de otro método en esta fase es prácticamente nulo, es decir, cuando no se utiliza el MGL no se reemplaza por otro.

En la fase de ejecución disminuye considerablemente la utilización del MGL (aspecto recogido en la c10 y c11), siendo menor su uso en problemas de la Ficha Nº 6 que contiene problemas que se resuelven utilizando 2 RGL´s.

Por lo tanto, podemos indicar que:

Los estudiantes aceptan mayoritariamente la utilización de un método gráfico, como el MGL, para plantear los problemas de álgebra elemental, siendo menor en los problemas que necesitan 2 RGL´s para ser resueltos.

6.3.5 Comentario Hipótesis 5

La hipótesis 5 indica:

"Existen diferencias notables en el grado de utilización del MGL según sea en la fase de planteamiento, o en la fase de ejecución de la resolución de los problemas de álgebra elemental"

Como se observa en la Tabla 5.5 del apartado 5.2.2, hemos anexado una columna de diferencia entre la frecuencia de utilización del método en la fase de planteamiento (f_p) y la frecuencia de utilización del método en la fase de ejecución (f_e). Los valores de dicha columna son todos mayores que cero, lo que nos indica que en todos los casos disminuye la frecuencia de utilización del MGL entre la fase de planteamiento y la de ejecución, observación descrita en la c10.

Los cuatro problemas que resultaron con mayor diferencia entre ambas fases pertenecen a la Ficha Nº 6 (6a, 6b, 6d y 6f), por lo que deducimos que los problemas resolubles con una RGL se prestan mejor a utilizar el MGL en ambas fases.

Además, del análisis de la utilización correcta del MGL por problemas y fase de resolución, desarrollado en el apartado 5.2.3 (Tabla 5.6), observamos que la utilización del MGL de forma correcta en la fase de planteamiento es muy alta, superando el 50% en 8 de los 12 problemas, de los que cinco pertenecen a la Ficha Nº 4 (conclusión parcial c13). En la fase de ejecución sólo cuatro problemas utilizan el MGL de forma correcta, sobre el 50%, de los cuales tres pertenecen a la Ficha Nº 4 (conclusión c15).

Concluimos que:

Existen diferencias en la utilización del método entre las fases de planteamiento y ejecución, siendo la frecuencia de utilización siempre más alta para la fase de planteamiento. En ambas fases se utiliza con mayor éxito el MGL en los problemas de que se resuelven con una RGL .

6.3.6 Comentario Hipótesis 6

Esta hipótesis plantea que:

"Se pueden caracterizar los problemas de álgebra elemental según la dificultad que presentan en cada fase de resolución, cuando se hace a través de un método gráfico como el MGL"

Finalmente, a partir de la resolución de los problemas utilizando el MGL, se ha realizado un estudio de clúster, detallado en el apartado 5.2.4, para cada fase de resolución, con el fin de aglomerar y posteriormente caracterizar los problemas de álgebra elemental utilizados en nuestro estudio.

Como resultado hemos obtenido:

- La definición y caracterización de 4 clústers para la fase de planteamiento. Destacamos: 1) el clúster P3 está formado por 5 problemas, todos pertenecientes a la Ficha Nº 6, siendo los problemas en que más se utiliza el MGL para plantear, ya sea de forma correcta o incorrecta.
  2) el clúster P4 está formado por un problema de cada ficha (4c y 6e), teniendo en común una frecuencia similar en cuanto a la falta de información. En este caso, planteamos que sería necesario profundizar más en el estudio de sus características.
- Para la fase de ejecución se definieron 3 clústers. Resaltamos que el tercer clúster contiene aquellos problemas que presentaron un bajo porcentaje de utilización del MGL y de los 5 problemas que conforman el clúster (6b, 6f, 4b, 6d, 6e), cuatro, la gran mayoría, pertenecen a la Ficha Nº 6.
- En la fase de desempeño final fue posible distinguir 3 clústers. El primero, formado por los problemas que tuvieron mayor éxito en esta fase, mayoritariamente problemas de la Ficha Nº 4 (4e, 4f, 6c, 4a, 4c). El segundo, contiene un sólo problema (6f), en donde la corrección e incorrección están equilibradas, próximas al 50%. El tercero agrupa al resto de los problemas, es decir, los que obtuvieron menor éxito (por debajo del 50%), siendo mayoría los problemas de la Ficha Nº 6.

De lo anteriormente expuesto podemos deducir que los problemas con mayor dificultad (los que se resuelven con 2 RGL´s) se abordan mayoritariamente utilizando

MGL, pero los que obtienen mejores resultados generales cuando se utilza el MGL son los que resuelven mediante una RGL.

Podemos, pues, afirmar que:

Es posible caracterizar los problemas de álgebra elemental según la dificultad que presentan en cada fase de resolución, cuando se resuelven a través de un método gráfico como el MGL.

6.4 Aportes, publicaciones y limitaciones

A lo largo del desarrollo del trabajo de investigación ha habido varios aspectos que consideramos como aportes, algunos de ellos al área de investigación, y otros a la práctica docente. Dichos aportes los enunciamos a continuación:

- Siendo la enseñanza y aprendizaje del álgebra un campo que genera conflicto y dificultad, hemos hecho un análisis y una propuesta novedosa para afrontar la enseñanza de la resolución de problemas de forma significativa, trabajando en primer lugar la parte conceptual para continuar, después, con el cometido propio del lenguaje algebraico.
- Hemos caracterizado un método gráfico para la resolución de problemas, que definimos como Método Geométrico Lineal. Para su definición se han tomado como base métodos tradicionales de resolución de problemas en matemáticas, como son el Análisis-Síntesis y Método Cartesiano, lo que ha permito entender la utilización del MGL como una herramienta valiosa en el contexto del área.
- El material elaborado para el aula es un aporte importante en la operatividad del método, así como la propuesta que planteamos. El instrumento construido es un conjunto estructurado de fichas, junto con un protocolo de actuación, que ha sido validado, tanto desde la teoría, como en la práctica. Aún así, consideramos que este instrumento no está cerrado ni acabado sino que, de acuerdo al análisis de los resultados, puede mejorarse con las nuevas aportaciones.

Estos aportes han sido expuestos y validados en diversos congresos y jornadas, principalmente como propuestas de innovación docente dirigidas a la formación de profesores de aula. Destacamos los trabajos relacionados con la caracterización del MGL para la resolución de problemas de álgebra elemental, recogidos en Martínez, Fernández y Flores (2007a, 2007b). También hemos analizado la utilización del MGL en la RP en el marco del desarrollo de competencias, así como desde una perspectiva del sentido numérico, lo que se puede consultar en Martínez, Fernández y Flores (2008, 2009a, 2010). Por otro lado, un análisis desde el punto de vista histórico ha permitido definir de forma más completa el método, lo que ha permitido contextualizarlo dentro del desarrollo del grupo de investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico, análisis que se puede encontrar en Martínez, Fernández y Flores (2010). Finalmente, enfocados a un ámbito de difusión científica más amplia, destacamos los trabajos publicados que se refieren a la clasificación de problemas (Martínez, Fernández y Flores, 2007c, 2011).

De la misma forma que somos concientes de las contribuciones que ha generado nuestro trabajo, enumeramos a continuación ciertas limitaciones que se han considerado, ya sea por el diseño del estudio o bien por el contexto donde se ha desarrollado:

- Puesto que los problemas que se abordan en los textos escolares consideran la utilización sólo de números positivos, hemos definido el MGL para trabajar en $\Re_0^+$. Si se quiere ampliar el campo numérico para trabajar con todos los reales, es necesario ampliar la definición considerando, en este caso, la utilización de segmentos orientados.
- Aun cuando hemos tenido en cuenta referentes curriculares internacionales entre los antecedentes y, también, en el marco teórico de nuestro trabajo, como son los Estándares para la Educación Matemática definidos por la NCTM (2000) o la definición de competencias definidas por la OECD (2004), el trabajo se ha realizado en el contexto del currículo español, respondiendo a la organización de contenidos que se trabajan en España para le Educación Secundaria Obligatoria.

6.5 Líneas de investigación futuras

Nuestro estudio forma parte de un campo complejo de la investigación en Educación Matemática, con numerosas las posibilidades de ser ampliada. Indicamos algunas posibles líneas de trabajo que han quedado abiertas para continuar investigando en relación con nuestro tema:

- Si este trabajo ha tenido como foco de estudio la descripción del MGL como método de resolución, razón por la cuál hemos centrado nuestra atención en el tipo de problemas para los cuales era más adecuado utilizar el método, otra línea posible sería centrar la atención en quién resuelve para describir, así, las características de las resoluciones y definir tipologías de resolutores a partir de la utilización del MGL.

- Una ampliación a nuestro trabajo sería un estudio de casos, que permita aflorar y relacionar las competencias matemáticas que pone en juego el estudiante cuando aplica el MGL a la resolución de los problemas propuestos, así como la traducción entre diferentes sistemas de representación.
- Otro punto de interés ha quedado esbozado a partir del material elaborado para el aula. Consistiría en estudiar con mayor detenimiento la conversión o traducción de las ecuaciones desde el SR gráfico al SR simbólico. Aunque la Ficha Nº 5 y la Ficha Nº 7 se han diseñado para tal efecto, no era éste nuestro objeto de investigación y no se ha profundizado en este contenido, por lo que su análisis y descripción está pendiente.
- Como mencionamos en el Capítulo 4 (apartado 4.4.4), se elaboraron unas pautas de observación para el aula a la hora de aplicar las Fichas del instrumento. El estudio y descripción del proceso de aplicación del instrumento, bien sea para detallar particularidades del material, o bien el tipo de interacción que pueda favorecer al trabajar con un material de esta naturaleza es otro aspecto a desarrollar en un futuro.
- También puede plantearse un estudio comparativo, con grupos de control, para determinar si la utilización del MGL mejora el rendimiento escolar en la resolución de problemas del tipo de los estudiados.
- Siempre queda abierta la posibilidad de replicar este trabajo en otro contexto escolar o en otro entorno social o cultural de otro país, como puede ser el caso de su aplicación en Chile.

REFERENCIAS

Amit, M. y Fried, M. N. (2005). Multiple representations in 8th grade algebra lessons: are learners really getting it?. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.) *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 57 – 64). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215 – 241.

Arnau, M. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo.* Tesis doctoral. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València, España.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching.* Netherland: Kluwer academic publishers.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Blanco, L. (2000). La resolución de problemas en primaria. Una propuesta para la formación inicial del profesorado. En L. Contreras y J. Carrillo (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos,* (pp. 207 – 235). España: Hergué.

Block, D., Martínez, P., Dávila, M. y Ramírez, M. (2000). Usos de los problemas en al enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. En L. Contreras y J. Carrillo (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* (pp. 147 – 179). España: Hergué.

Bruning, R., Schraw, G., y Norby, M. (2005). *Psicología cognitiva y de la instrucción*. Madrid: Pearson Educación.

Bruno, A. y Cabrera, N. (2005). Estudio de representaciones en la recta de los números negativos con alumnos de Educación Secundaria. *Actas de las XI Jaem, Canarias.* Conserjería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.(pp. 565 – 571).

Bruno, A. y Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto de España. *Educación Matemática, 18*(3), 125 – 149.

Brousseu, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Netherland: Kluwer Academia Publishers.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudios de posibles relaciones.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Sevilla. (Publicada por la Universidad de Huelva en 1997).

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Prat, M. y Rojas, F. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(1), 67 – 76.

Carter, J., Ferrucci, B. y Yeap, B. (2002). Developing algebraic thinking. *Mathematics Teaching,* 178, 39 – 41.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con Escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Granada: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñaza Secundaria.* (pp. 95 – 122). Barcelona: HORSORI.

Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias*, *10*(1), 243 – 253.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361 – 371.

Cerdán, F. (1993). El diseño de un instrumento de medida para realizar la puesta de un problema en ecuaciones. En E. Filloy, L. Puig y T. Rojano (Eds.) *Memorias de tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las Ideas Algebraicas. Valencia 1991.* (pp. 1 – 9). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Cerdán, F. (2008). *Estudio sobre la familia de problemas Aritméticos – Algebraicos.* Server de Publicacions de la Universitat de València, España.

Cifarelli, V. (1998). The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 239 – 264.

Cobo, P. (1995). Efectos de la utilización de gráficos en la traducción algebraica de problemas verbales. Estudio del caso de problemas verbales que combinan estructura semántica de cambio y de comparación. *Revista UNO, 4*, 63 – 75.

Codina, A. (2000). *Elementos para una reflexión acerca del uso de la computadora en el aprendizaje de estudiantes de bachillerato vía resolución de problemas.* México: Departamento de Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional (inédito).

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: Editorial Murallas.

Colás, P. y Buendía, L. (1994). *Investigación Educativa.* Sevilla: Ediciones Alfar.

Cólera, J. y Gaztelu, I. (2003). *Matemática 2.* España: Anaya.

Cólera, J. y Gaztelu, I. (2004). *Matemática 1.* España: Anaya.

Contreras, L.C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Contreras, L. y Carrillo, J. (2000). El amplio campo de resolución de problemas. En L. Contreras y J. Carrillo (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* (13 – 37). España: Hergué.

Dickinson, P. y Eade, F. (2004). Using the number line to investigate the solving of linear equations. *For the learning of Mathematics, 24*(2), 41 – 47.

Diezman, C. y English, L. (2001). Promoting the Use of Diagrams as Tools for Thinking. En A. Cuoco (Ed.), *The Roles of Representation in School Mathematic.,* (pp. 77 – 102). Holanda: NCTM.

Duval, R. (1999a). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.* . Documento presentado en el 21th encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cuernava, Mexico (ERIC Document Reproduction Service No. ED 466 379)

Duval, R. (1999b). *Semiosis y pensamiento humano.* Traducido al español por Vega, M. Colombia: Universidad del Valle.

Espinosa, E. (2002). *Aplicación de un instrumento de evaluación de álgebra elemental. Réplica de la tesis del Dr. Fernández García.* Trabajo de investigación tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Espinosa, E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Euclides (1991). *Los Elementos. (Libros I – IV).* Traducción al español, María Luisa Puertas Castaños. España: Editorial Gredos S. A.

Euclides (1994). *Los Elementos. (Libros V – IX).* Traducción al español, María Luisa Puertas Castaños. España: Editorial Gredos S. A.

Euclides (1996). *Los Elementos. (Libros X – XIII).* Traducción al español, María Luisa Puertas Castaños. España: Editorial Gredos S. A.

Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66,* pp. 61 – 75.

Fernández, F. (1996). El paso de la aritmética al álgebra. Una propuesta didáctica. *Aula pensamiento numérico, 50*, 17 – 21.

Fernández, F. (1997a). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Fernández, F. (1997b). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico. *Revista UNO, 14*, 75 – 91.

Figueras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(2), 217 – 226.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 327 – 342.

Filloy, E. y Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. En A. Bishop (Ed.), *International handbook of mathematics education.* (pp. 139 – 160). Netherland: Kluwer academic publishers.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2),19 - 25.

Filloy, E., Rojano, T. y Rubio, G. (2001). Propositions concerning of the resolution of arithmetical – algebraics problems. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins

(Eds.) *Perspectiva on School Algebra*. (pp.155 – 175). Dordrecht: Kluwer Academia Publishers.

Filloy, E. y Rubio, G. (1999). La resolución de problemas Aritméticos - Algebraicos. En E. Filloy y col. *Aspectos Teóricos del Algebra Educativa*. (pp.127 – 152). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities. En M. Johnsen-Hoines, y A. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 391 – 398). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 153 – 165.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139 – 162.

Font, V. (2001). Representation in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 14*, 1 – 35.

Fox, D. (1987). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Promoting Multiple Representation in Algebra. En A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in School Mathematics.* (pp. 173 – 185). Holanda: NCTM.

Gagatsis, A. y Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. En M. Johnsen-Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 (pp. 489 – 496).

Gagatsis, A. y Patronis, T. (1990). Using Geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 29 – 54.

García Cruz, J. A. y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(1), 31 – 43.

García Jiménez, M. (2002). *Métodos y diseños de investigación científica. Ciencias humanas: sociales y salud.* España: EUB.

García Pérez, P. (1992). *Diccionario de términos matemáticos.* Valladolid: Editorial La Calesa.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. On line: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf]

Goldin, G. (1998). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137 – 165.

Goldin, G. y Shteingold, M. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1 – 21). Reston, VA: NCTM.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra. *Suma, 20,* 61-68.

Gómez, B. y Contreras M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA, 3* (4), 169-183.

Gómez, P. (2003). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria.* Proyecto de tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

González, D. (1999). El proceso de la investigación por encuestas. En L. Buendía, D. González, J. Gutierrez y M. Pegalajar, *Modelos de Análisis de la Investigación Educativa.* (128 – 164). Sevilla: Alfar.

González, F. y Ruiz, F. (2003). Las centenas cuadriculadas: un material matemáticamente potente para ilustrar el tránsito de la Aritmética al Álgebra. *Suma, 42*, 47 – 59.

Hernández, J. (1997). La resolución de problemas aritméticos verbales y los sistemas de representación semióticos. *NUMEROS*, *29*, 19 – 34.

Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 65 – 97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hines, E. (2003). Instructional decisions: helping students build links between representation. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 25*(1), 14 – 28.

Horak, V. y Horak, W. (1981). Geometric Proofs of algebraic identities. *Mathematics Teacher, 74*(3), 212 – 216.

Izsàk, A. (2003). "We want a statement that is always true": Criteria for good algebraic representations and the development of modelling knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(3), 191 – 227.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. (1989). Linking representation in the symbol system of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra.* (pp. 167 – 194). Reston, VA: NCTM. Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics Education. En D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning.* (pp. 515 – 556). New York: Mac Millan.

Kaput, J. (1995). *A research base supporting long term algebra reform?.* Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 389 539)

Kaput, J. (2000a). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 662)

Kaput, J. (2000b). *Transforming algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "algebrafying" the K-12 Curriculum.* Documento del National Center for improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Washington, DC, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 664).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 390 – 419). USA: Macmillan company.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Refletions on its main activities. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra.* (pp. 35 – 44). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2006a). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol 2. (707 – 762). Reston VA: NCTM.

Kieran, C. (2006b). Research on the learning and teaching of algebra. En. A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past,* Present *and Future*, (pp. 11 – 49). Rottterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007a). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En R. Lesh (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 707 – 762). USA: NCTM.

Kieran, C. (2007b). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels, *Quadrante, XVI*(1), 5 – 26.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229 – 240.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. En E. A. Silver (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. (pp. 1-15). Hillsdalek, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra,* (pp. 47 – 70). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Lorenzo, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Suma, 21*, 11 – 20.

MacMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa, 5ª Edición*. Madrid: Person Educación S.A.

Markovits, H. (1986). The curious effect of using drawings in condicional reasoning problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(1), 81 – 88.

Martínez, M. (2006). *Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución mediante un modelo geométrico lineal.* Trabajo de investigación tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2007a). Utilización de un modelo geométrico – lineal para la resolución de problemas de álgebra elemental. En P. Flores, R. Pozuelo y R. Roa (Eds.), *Investigación en al aula de matemáticas. Estadística y*

Azar. (pp. 141 – 151). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación matemática y Sociedad "Thales".

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2007b). Modelo geométrico – lineal, una herramienta la resolución de problemas de álgebra elemental en secundaria. En M. Berenguer, A. Carrillo, B. Cobo, P. Flores, M. Fresno, M. García, F. Izquierdo, M. Jiménez, B. López, J. Lupiañez, M. Marín, A. Moreno, J. Navas, M. Peñas, R. Ramírez, O. Romero, M. Toquero y L. Berenguer (Eds.), *Actas XIII Jornadas JAEM.* (s/p). Granada: FESPM y SAEM Thales.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2007c). Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución mediante un modelo geométrico – lineal. *Grupo de trabajo pensamiento numérico y algebraico*. Tenerife: SEIEM

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2008). Desarrollo de competencias y resolución gráfica de problemas de álgebra elemental. En M. Molina, P. Pérez-Tyteca y M. Fresno, M. (Eds.), *Investigación en al aula de matemáticas. Competencias Matemáticas.* (pp. 97 – 106). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación matemática y Sociedad "Thales".

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2009a). Sentido numérico en resolución gráfica de problemas de enunciado. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *Investigación en al aula de matemáticas. Pensamiento Numérico.* (s/p). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación matemática y Sociedad "Thales".

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2009b). Resolución de problemas de álgebra a través del modelo geométrico lineal (MGL). Fichas de trabajo para el aula. En Comité Organizador Local de las XIV JAEM (Coord.), *Actas XIV Jornadas JAEM. (s/p).* Girona: Servicio de publicaciones de la FESPM.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2010). Utilización de segmentos en los elementos de Euclídes. Comunicación en *Investigación en el aula de Matemática. Dimensión histórica, social y cultural de la matemática.* Granada.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2011). Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución de un modelo geométrico lineal. *Revista UNION, 25,* 43 – 61.

Mayer, R. (1982). Different problem-solving strategies for algebra word and equation problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,8*(5), 448 – 462.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* España: Paidos.

Meavilla, V. y Fortuny, J. (1999). Interacciones verbales y enseñanza – aprendizaje del álgebra elemental. *Revista UNO*, *21,* 81-104.

Michaelidou, N., Gagatsis, A. y Pitta-Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: a research with sixth grade students. En M. Johnsen-Hoines y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 3 (pp. 305-312). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Molina, M. (2004). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de 3º grado.* Trabajo de investigación tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Moliner, M. (1989). *Diccionario de uso del español.* Madrid: Editorial Gredos.

Mousoulides, N. y Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric Approach in function problem solving. En M. Johnsen-Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 (pp. 385 – 392). Bergen, Noruega: Bergen University College.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Netz, R. (1998). Greek mathematical diagrams: their use and their meaning. *For the Learning of Mathematics, 18*(3), 33 – 39.

Noss, R., Healy, L. y Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics, 33,* 203 – 233.

OECD, (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* USA: OECD Publishing.

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de Ingeniería en México.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Palarea, M. y Socas, M. (1995). Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma, 20,* 29 – 35.

Pantziara, M., Gagatsis, A. y Pitta-Pantazi, D. (2004). The use of diagrams in solving non routine problems. En M. Johnsen-Hoines, y A. Fuglestad, (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 (pp. 489 – 496). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Pérez de Díaz, M. C. (1997). El álgebra desde una perspectiva geométrica. *Epsilon, 37,* 39 – 56.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual.* (pp. 174-186). México, D.F. Fondo de Cultura Económica /CINVESTAV.

Pyke, C. (2003). The use of symbols, words, and diagrams as indicators of mathematical cognition: a causal model. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(5), 406 – 432.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española.* Madrid: Espasa, Calpe.

Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real decreto 1007/1991, de 14 junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria.

Real Decreto 116/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Real Decreto 1631/2006, del 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemática. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñaza Secundaria.* (pp. 39 – 55). Barcelona: HORSORI.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rico, L. y Lupiánez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial.

Rodríguez Chamizo, A. (2003). ¿Qué contenidos de álgebra, enseñar al alumnado de 3º de ESO? Relato de caso con profesorado novel. *Epsilon, 57,* 379 – 390.

Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En N. Climent, L. Contreras y J. Carrillo (Coord.), *Acta Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 35-46). Huelva: Publicaciones Universidad de Huelva.

Sánchez, J. y Vera, J. (2002a). *Matemática 1.* España: Oxford.

Sánchez, J. y Vera, J. (2002b). *Matemática 2.* España: Oxford.

Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawerence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. En A. Schoenfeld, J. Kaput y Ed. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Eduaction. III.* (pp. 81 – 113). USA: American Mathematical Society.

Schultz, J. y Waters, M. (2000). Why representation?. *Mathematics Teacher, 93*(6), 448 – 453.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 341 – 350.

Stacey, K., Chick, H. y Kendal, M. (2004). *The future of the teaching and learning of algebra*. Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Stacey, K. y Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra,* (pp. 1 – 20). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Stacey, K. y McGregor, M. (1995). The influence of problem representation on algebraics equation writing and solution strategies. *Proceedings of the 19th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp 90 – 97). Brasil: Recife.

Stacey, K. y McGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical behaviour, 18*(2), 149 – 167.

Stenhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del currículum.* Madrid: Morata.

Swan, M. (2000). Making sense of algebra. *Mathematics Teaching, 171*, 16 – 19.

Tejedor, J. (1988). El soporte Estadístico de la Investigación Educactiva. En I. Dendeluce (Coord.), *Aspectos Metodológicos de la Investigación Educativa.* (pp. 228 – 244). Madrid: NARCEA.

Thomas, D. A. y Thomas, R. A. (1999). Discovering algebra: graphing linear equations. *The Mathematics Teacher, 92*(7), 569 – 572.

Van Ameron, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54,* 63 – 75.

Vera, F. (1960). *Matemática*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Vega, L. (1991). Introducción general. En Euclides, *Los Elementos,* pp. 7 – 184. España: Editorial Gredos S. A.

Villareal, M. (2000). Mathematical thinking and intellectual technologies: the visual and the algebraic. *For the Learning of Mathematics,* 20(2), pp. 2 – 7.

Wagner, S. y Kieran, C. (Eds.) (1989). *Research Issues in the learning and teaching of algebra.* Reston, VA: NCTM

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra Students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(5), 356 – 387.

ANEXOS

Anexo 1: Fichas para aula

En este anexo encontramos cada una de las 6 versiones que se elaboraron de las fichas para el aula.

Anexo 1.1: Versión 1

Tarea Nº 1
Indicación o Actividad: **Resuelve las siguientes operaciones utilizando una representación gráfica:** **Grupo 1:** **a) 9 + 3** **b) 6 + 7** **c) 5+2** **d) 15 + 14** **e) 17 + 9** **f) 12+ 16** **Grupo 2:** **a) 12 + 7** **b) 130 + 5** **c) 12 + 170** **d) 250 + 123** **e) 328 + 555** **f) 780 + 254** **Grupo 3:** **a) 20 + 3,7** **b) 8,9 + 12** **c) 2,2 + 34** **d) 4,5 + 6,1** **e) 3,9 + 12,9** **f) 14,1 + 30,9** **Preguntas:** **¿Puedes utilizar un solo tipo de representación gráfica para resolver todas las adiciones?** **¿Por qué ese modelo permite resolverlas todas y otro tipo de modelo no?**

Tarea Nº 2
Indicación o Actividad: **Determina si el modelo escogido en la actividad anterior te permite representar las siguientes operaciones** **a) 17 – 9** **b) 250 – 72** **c) 14 – 20** **d) 20 – 55** **e) 3 • 14** **f) 19 • 5** **g) 4 • 20** **h) 12 • 8** **i) 24 : 4** **j) 30 : 3** **k) 130 : 6** **l) 50 : 6**

Tarea Nº 3
Objetivos: - Utilizar el MGL para representar expresiones desde el lenguaje natural
Indicación o Actividad: **Representa lo descrito en cada oración utilizando el modelo geométrico lineal** **a) El doble de un número** **b) Un número aumentado en 5** **c) L a suma de dos números** **d) La diferencia de dos números** **e) La adición de un número y su sucesor** **f) La mitad de un número** **g) La quinta parte de un número** **h) El 50% de un número** **i) El 10% d un número** **j) Un número menos su 20%** **k) La edad de una persona más la edad que tendrá en 2 años más** **l) El doble de la edad de un persona en 5 años más**

Tarea Nº 4
Indicación o Actividad: **Actividad 1:** a. Lee atentamente el siguiente problema: Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata? b. Traduce el siguiente problema a una representación gráfica utilizando el MGL c. A partir de la grafica, ¿Qué valor debes determinar? d. ¿Cómo puedes determinar dicho valor? **Actividad 2:** ▪ La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número? ▪ Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número? ▪ Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata? ▪ En un examen de matemática, la sexta parte de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, la cuarta parte bien, la mitad suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen? ▪ Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática? ▪ En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

Tarea Nº 5
Indicación o Actividad: **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando el MGL** a. Marta gasta la mitad de su dinero en la entrada para un concierto, y la quinta parte del mismo en una hamburguesa. ¿Cuánto tenía si aun le queda 2,70 euros? b. Diego se quedó con los $\frac{4}{5}$ de las naranjas que había en una caja. De las restantes, virginia cogió la mitad, de manera que al final sobraron solamente 5 naranjas. ¿Cuántas naranjas contenía la caja? c. En un lago se ha instalado una torre eléctrica. Tiene $\frac{1}{7}$ de su longitud hundida bajo la tierra, mientras que $\frac{2}{9}$ del tramo restante se encuentran sumergidos en el agua. Si la torre se alza 14m sobre la superficie del lago, ¿qué longitud total tiene? d. Si a la quinta parte de un número se le añaden 9 unidades se obtiene la mitad del número. ¿De qué número se trata? e. Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número? f. Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo? g. Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos? h. Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

Anexo 1.2: Versión 2

Tarea 1

Tarea 1.1:
Resuelve las siguientes operaciones utilizando una representación gráfica:
a) 9 + 3
b) 6 + 7
c) 5 + 2
d) 15 + 14
e) 17 + 9
f) 12 + 16

Tarea 1.2:
Resuelve las siguientes operaciones utilizando una representación gráfica:
g) 12 + 7
h) 130 + 5
i) 12 + 170
j) 250 + 120
k) 340 + 550
l) 780 + 261

Tarea 1.3:
Resuelve las siguientes operaciones utilizando una representación gráfica:
g) 20 + 3,7
h) 8,9 + 12
i) 2,2 + 34
j) 4,5 + 6,1
k) 3,9 + 12,9
l) 14,1 + 30,9

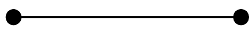
Tarea 2

Tarea 2:
Determina si la línea recta te permite representar y resolver gráficamente las siguientes operaciones:

- **m) 17 – 9**
- **n) 250 – 72**
- **o) 14 – 20**
- **p) 20 – 55**
- **q) 3 • 14**
- **r) 19 • 5**
- **s) 4 • 20**
- **t) 12 • 8**
- **u) 24 : 4**
- **v) 30 : 3**
- **w) 130 : 6**
- **x) 50 : 6**

Tarea 3

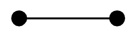
Tarea 3.1
Dado un número cualquiera representado por el siguiente segmento:



representa:

- **a) El triple del número**
- **b) La mitad del número**
- **c) $\frac{2}{3}$ del número**
- **d) $\frac{3}{4}$ del número**
- **e) El número aumentado en su 20%**
- **f) El número disminuido en un 40%**
- **g) Un quinto del número más dos tercios del número**
- **h) El número menos $\frac{2}{7}$ de si mismo**

Tarea 3.2
Dado que el siguiente segmento representa la unidad:



Representa lo descrito en cada oración utilizando la representación gráfica de la línea recta

- **m) Un número aumentado en 5**
- **n) La adición de un número y su sucesor**
- **o) La sustracción entre un número y su antecesor**
- **p) El número menos un tercio del número**
- **q) El número disminuido en 6**
- **r) El triple de un número aumentado en 3**
- **s) La edad de una persona más la edad que tendrá en 2 años más**
- **t) El doble de la edad de un persona en 5 años más**

<u>Tarea 4</u>

Tarea 4
Representa gráficamente cada número utilizando un segmento y determina su longitud a partir de las condiciones dadas:

- **a) Un cuarto de un número es 5**
- **b) Tres cuartos de un número es 24**
- **c) El doble del segmento más uno mide 17**
- **d) La cuarta parte más uno es 21**
- **e) El triple más 2 es 6**
- **f) El doble del sucesor de un número es 16**
- **g) El 40% del segmento es 12**
- **h) El 20% del segmento aumentado en 4 es 20**

<u>Tarea 5</u>

Tarea 5.1:
Lee atentamente el siguiente problema:

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

- **a) Traduce el siguiente problema a una representación gráfica utilizando la línea recta**

- **b) A partir de la grafica, ¿Qué valor debes determinar?**

- **c) ¿Cómo puedes determinar dicho valor?**

Tarea 5.2
Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando el la línea recta:

- **La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?**
- **Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?**
- **Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata?**
- **En un examen de matemática, la sexta parte de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, la cuarta parte bien, la mitad suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?**
- **Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?**
- **En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?**

Tarea 6

Tarea 6.1:
Lee atentamente el siguiente problema:

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

a) **Traduce el siguiente problema a una representación gráfica utilizando la línea recta**

b) **A partir de la grafica, ¿Qué valor debes determinar?**

c) **¿Cómo puedes determinar dicho valor?**

Tarea 6.2:
Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando el la línea recta:

a. **Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?**
b. **Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?**
c. **Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?**
d. **Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?**
e. **Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.**
f. **Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.**

Anexo 1.3: Versión 3

Ficha Nº1

Nombre y apellidos: ______________________________________ **Nº lista:** ___

1. Dado un número cualquiera representado por el siguiente segmento:

a) Traza un segmento que represente el triple del número

b) Traza un segmento que represente la mitad del número

c) Traza un segmento que represente al número aumentado en su mitad

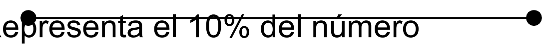
d) Representa $\frac{3}{4}$ del número

e) Representa el número disminuido en $\frac{1}{3}$ de sí mismo

f) Traza un segmento que represente $\frac{5}{4}$ del número

g) Representa el número aumentado en sus $\frac{5}{4}$

2. **Dado un número cualquiera representado por el siguiente segmento:**



a) Representa el 10% del número

b) Representa el 15% del número

c) Representa el 70% del número

d) Representa el número aumentado en su 20%

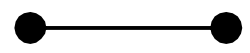
e) Representa el número disminuido en su 40%

f) Representa el del número aumentado en un 10%

Ficha Nº2

Nombre y apellidos: ____________________________________ Nº lista: ___

1. Dado que el siguiente segmento representa la unidad:



a) Traza un segmento que represente el número 7

b) Traza un segmento cualquiera que represente un número desconocido

c) Representa el número anterior aumentado en 7

d) Representa el número desconocido disminuido en 2

e) Representa el doble del número desconocido

f) Representa el doble del número desconocido disminuido en 1

2. Resuelve:

a) Dibuja un segmento cualquiera que te sirva para representar el número 60

b) A partir de dicho segmento representa:

- El número 30
- El número 15
- El número 120
- El número 90

Ficha Nº3

Nombre y apellidos: ________________________________ Nº lista: ___

Representa cada número utilizando un segmento y determina su longitud a partir de las condiciones dadas:

a) La mitad del número es 6

b) Un cuarto de un número es 5

c) Tres cuartos de un número es 24

d) El doble del número más uno es 17

e) La cuarta parte más uno es 21

f) El triple más 2 es 8

g) El 40% del segmento es 12

h) El 20% del segmento aumentado en 4 es 20

Ficha Nº4

Nombre y apellidos: ______________________________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) En la grafica, ¿qué valor debes determinar?

c) ¿Cómo puedes determinar dicho valor?

d) Resuelve el problema

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos de recta:**
   a) La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?

   b) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

c) Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata?

d) Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?

e) En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

f) En un examen de matemática, la sexta parte de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, la cuarta parte bien, la mitad suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

Ficha Nº5

Nombre y apellidos: ________________________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) En la grafica, ¿qué valor debes determinar?

c) ¿Cómo puedes determinar dicho valor?

d) Resuelve el problema

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos de recta:**

g. Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.

h. Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.

i. Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?

j. Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?

k. Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

l. Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

Anexo 1.4: Versión 4

Ficha Nº1

Nombre y apellidos: ________________________________ Nº lista: ___

1. El siguiente segmento representa cierto número:

a) Traza el segmento que representa el triple del número

b) Traza el segmento que representa la mitad del número

c) Traza el segmento que representa al número aumentado en su mitad

d) Representa $\frac{3}{4}$ del número

e) Representa el número disminuido en $\frac{1}{3}$ de sí mismo

f) ¿Qué fracción del total has representado?

g) Traza el segmento que representa $\frac{5}{4}$ del número

h) Representa el número aumentado en sus $\frac{5}{4}$

i) ¿Qué fracción del número inicial resulta?

2. El siguiente segmento representa a un número cualquiera:

a) Representa en el segmento el 10% del número

b) Representa el 15% del número

c) Representa el 70% del número

d) Representa el número aumentado en su 20%

e) ¿Qué porcentaje del número representaste?

f) Representa el número disminuido en su 40%

g) ¿Qué porcentaje del número representaste?

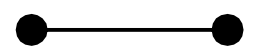
Ficha Nº2

Nombre y apellidos: ______________________________________ Nº lista: ___

1. Responde a los siguientes apartados:

a) Traza un segmento que represente un número cualquiera:

b) El siguiente segmento representa la unidad (el uno):



Representa el número anterior aumentado en 7 unidades

c) Representa el número inicial disminuido en 2 unidades

d) Representa el doble del número inicial

e) Representa el doble del número inicial disminuido en 1 unidad

2. Responde los siguientes apartados:

a) Dibuja un segmento cualquiera que te sirva para representar el número 60

b) A partir de dicho segmento representa:

- El número 30
- El número 15
- El número 120
- El número 90

Ficha Nº3

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

Representa un número utilizando un segmento. Determina ese número en cada uno de los siguientes casos:

a) Cuando la mitad del segmento es 6

b) Cuando un cuarto del segmento es 5

c) Cuando tres cuartos del segmento es 24

d) Cuando el doble del segmento más una unidad es 17

e) Cuando la cuarta parte del segmento más una unidad es 21

f) Cuando el triple del segmento más 2 unidades es 8

g) Cuando el 40% del segmento es 12

h) Cuando el 20% del segmento aumentado en 4 unidades es 20

Ficha Nº4

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) Destaca el segmento cuyo valor debes determinar

c) Resuélvelo y explica como lo has resuelto

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos:**
   a) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

   b) La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?

c) Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?

d) En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

e) En un examen de matemática, la sexta parte de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, la cuarta parte bien, la mitad suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

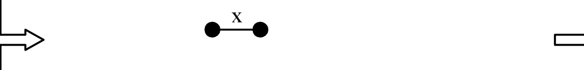
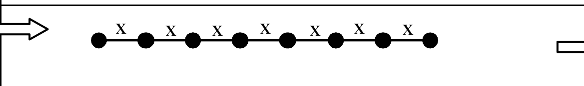
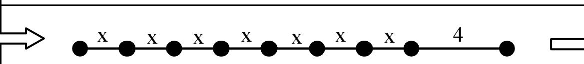
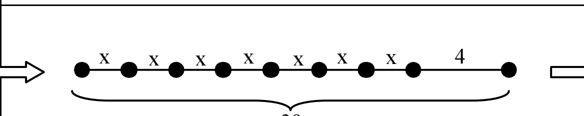
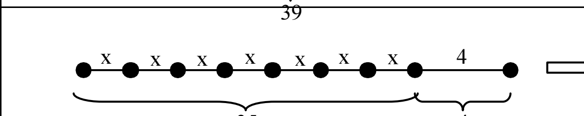
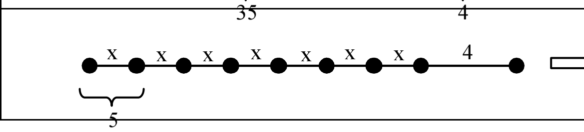
f) Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata?

Ficha Nº5

Nombre y apellidos: ______________________________________ Nº lista: ___

1. **Observa como, a partir del problema 1 de la ficha Nº 4, se plantea una ecuación equivalente a la representación utilizando segmentos, donde se ha denominado "x" al segmento de "longitud desconocida":**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

Un número		**x**
Multiplicado por 7		**7x**
Le sumamos 4 unidades		**7x + 4**
Obtenemos 39		**7x + 4 = 39**
		**7x = 39 – 4** **7x = 35**
		**x = 35 : 7** **x = 5**

2. **En los problemas de la parte 2. De la ficha Nº 4 destaca el segmento cuyo valor debías determinar, escribe una ecuación equivalente a la representación con segmentos y luego resuelve la ecuación**

Problema a)

Problema b)

Problema c)

Problema d)

Problema e)

Problema f)

Ficha Nº6

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) Destaca el segmento cuyo valor debes determinar

c) Resuélvelo y explica como lo has resuelto

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos de recta:**

a. Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.

b. Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.

c. Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?

d. Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?

e. Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

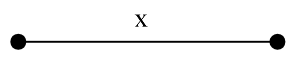
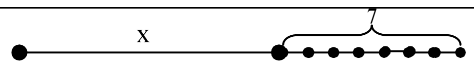
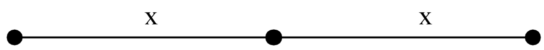
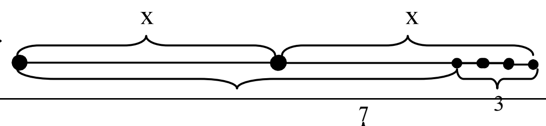
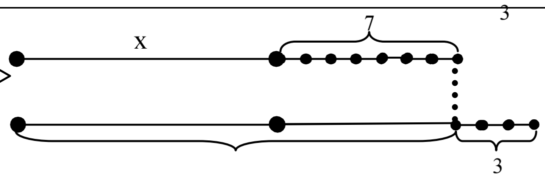
f. Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

Ficha Nº7

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

1. **Observa como, a partir del problema 1 de la ficha Nº 6, se plantea una ecuación equivalente a la representación utilizando segmentos, donde se ha denominado "x" al segmento de "longitud desconocida":**

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

Un número ⇨		⇨ **X**
Sumas 7 unidades ⇨		⇨ **x + 7**
Doble del número ⇨		⇨ **2x**
Doble menos tres ⇨		⇨ **2x – 3**
Obtienes lo mismo ⇨		⇨ **x + 7 = 2x – 3**

2. **En los problemas de la parte 2. De la ficha Nº 6 destaca el segmento cuyo valor debías determinar, escribe una ecuación equivalente a la representación con segmentos y luego resuelve la ecuación**

Problema a)

Problema b)

Problema c)

Problema d)

Problema e)

Problema f)

Anexo 1.5: Versión 5

Ficha Nº1

Nombre y apellidos: ___________________________________ **Nº lista:** ___

1. El siguiente segmento representa cierto número:

a) Traza el segmento que representa el triple del número

b) Traza el segmento que representa la mitad del número

c) Traza el segmento que representa al número aumentado en su mitad

d) Representa $\frac{3}{4}$ del número

e) Representa el número disminuido en $\frac{1}{3}$ de sí mismo

f) ¿Qué fracción del total has representado?

g) Traza el segmento que representa $\frac{5}{4}$ del número

h) Representa el número aumentado en sus $\frac{5}{4}$

i) ¿Qué fracción del número inicial resulta?

2. El siguiente segmento representa a un número cualquiera:

a) Representa en el segmento el 10% del número

b) Representa el 15% del número

c) Representa el 70% del número

d) Representa el número aumentado en su 20%

e) ¿Qué porcentaje del número representaste?

f) Representa el número disminuido en su 40%

g) ¿Qué porcentaje del número representaste?

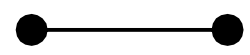
Ficha Nº2

Nombre y apellidos: ____________________________________ Nº lista: ___

1. **Responde a los siguientes apartados:**

a) Traza un segmento que represente un número “a” cualquiera:

b) El siguiente segmento representa la unidad (el uno):



Representa el número “a” aumentado en 7 unidades

c) Representa el número “a” disminuido en 2 unidades

d) Representa el doble del número “a”

e) Representa el doble del número “a” disminuido en 1 unidad

2. **Responde los siguientes apartados:**

a) Dibuja un segmento cualquiera que te sirva para representar el número 60

b) A partir de dicho segmento representa:

- El número 30

- El número 15

- El número 120

- El número 90

Ficha Nº3

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

Representa un número utilizando un segmento. Determina ese número en cada uno de los siguientes casos:

a) Cuando la mitad del segmento es 6

b) Cuando un cuarto del segmento es 5

c) Cuando tres cuartos del segmento es 24

d) Cuando el doble del segmento más una unidad es 17

e) Cuando la cuarta parte del segmento más una unidad es 21

f) Cuando el triple del segmento más 2 unidades es 8

g) Cuando el 40% del segmento es 12

h) Cuando el 20% del segmento aumentado en 4 unidades es 20

Ficha Nº4

Nombre y apellidos: ____________________________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) Destaca el segmento cuyo valor debes determinar

c) Resuélvelo y explica como lo has resuelto

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos:**
   a) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

   b) La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?

c) Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?

d) En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

e) En un examen de matemática, las dos doceavas partes de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, las tres doceavas partes bien, seis doceavos suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

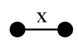
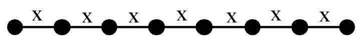
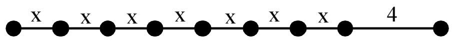
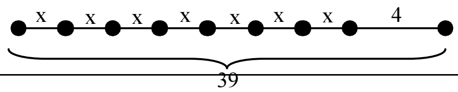
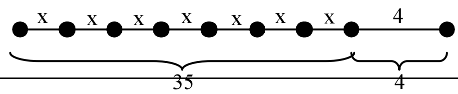
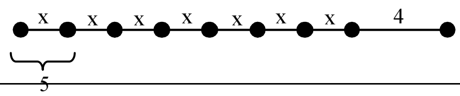
f) Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata?

Ficha Nº5

Nombre y apellidos: ________________________________ Nº lista: ___

1. **Observa como, a partir del problema 1 de la ficha Nº 4, se plantea una ecuación equivalente a la representación utilizando segmentos, donde se ha denominado “x” al segmento de “longitud desconocida”:**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

Un número		**x**
Multiplicado por 7		**7x**
Le sumamos 4 unidades		**7x + 4**
Obtenemos 39		**7x + 4 = 39**
		**7x = 39 – 4** **7x = 35**
		**x = 35 : 7** **x = 5**

2. **En los problemas de la parte 2. De la ficha Nº 4 destaca el segmento cuyo valor debías determinar, escribe una ecuación equivalente a la representación con segmentos y luego resuelve la ecuación**

a) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

b) La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?

c) Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?

d) En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

e) En un examen de matemática, las dos doceavas partes de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, las tres doceavas partes bien, seis doceavos suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

f) Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata?

Ficha Nº6

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) Destaca el segmento cuyo valor debes determinar

c) Resuélvelo y explica como lo has resuelto

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos de recta:**

a. Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.

b. Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.

c. Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?

d. Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?

e. Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

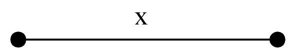
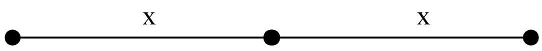
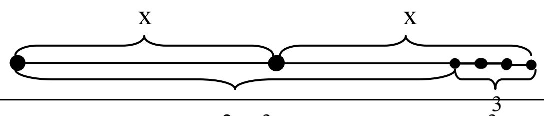
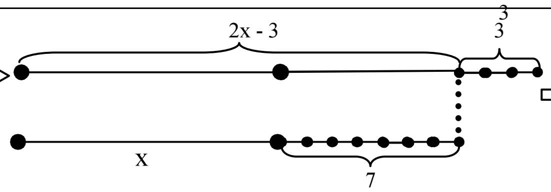
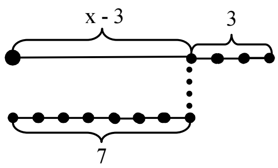
f. Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

Ficha Nº7

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

1. **Observa como, a partir del problema 1 de la ficha Nº 6, se plantea una ecuación equivalente a la representación utilizando segmentos, donde se ha denominado “x” al segmento de “longitud desconocida”:**

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

Un número		**X**
Sumas 7 unidades		**$x + 7$**
Doble del número		**$2x$**
Doble menos tres		**$2x - 3$**
Obtienes lo mismo		**$2x - 3 = x + 7$**
		**$x - 3 = 7$** **$x = 10$**

2. **En los problemas de la parte 2. De la ficha Nº 6 destaca el segmento cuyo valor debías determinar, escribe una ecuación equivalente a la representación con segmentos y luego resuelve la ecuación**

Problema a)

Problema b)

Problema c)

Problema d)

Problema e)

Problema f)

Anexo 1.6: Versión 6

Ficha Nº1

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

1. El siguiente segmento representa cierto número:

a) Traza el segmento que representa el triple del número

b) Traza el segmento que representa la mitad del número

c) Traza el segmento que representa al número aumentado en su mitad

d) Representa $\frac{3}{4}$ del número

e) Representa el número disminuido en $\frac{1}{3}$ de sí mismo

f) ¿Qué fracción del total has representado?

g) Traza el segmento que representa $\frac{5}{4}$ del número

h) Representa el número aumentado en sus $\frac{5}{4}$

i) ¿Qué fracción del número inicial resulta?

2. El siguiente segmento representa a un número cualquiera:

g) Representa en el segmento el 10% del número

h) Representa el 15% del número

i) Representa el 70% del número

j) Representa el número aumentado en su 20%

k) ¿Qué porcentaje del número representaste?

l) Representa el número disminuido en su 40%

m) ¿Qué porcentaje del número representaste?

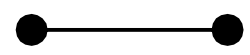
Ficha Nº2

Nombre y apellidos: ____________________________________ Nº lista: ___

1. Responde a los siguientes apartados:

a) Traza un segmento que represente un número “a” cualquiera:

b) El siguiente segmento representa la unidad (el uno):



Representa el número “a” aumentado en 7 unidades

c) Representa el número “a” disminuido en 2 unidades

d) Representa el doble del número “a”

e) Representa el doble del número “a” disminuido en 1 unidad

2. Responde los siguientes apartados:

a) Dibuja un segmento cualquiera que te sirva para representar el número 60

b) A partir de dicho segmento representa:

- El número 30
- El número 15
- El número 120
- El número 90

Ficha Nº3

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

Representa un número utilizando un segmento. Determina ese número en cada uno de los siguientes casos:

a) Cuando la mitad del segmento es 6

b) Cuando un cuarto del segmento es 5

c) Cuando tres cuartos del segmento es 24

d) Cuando el doble del segmento más una unidad es 17

e) Cuando la cuarta parte del segmento más una unidad es 21

f) Cuando el triple del segmento más 2 unidades es 8

g) Cuando el 40% del segmento es 12

h) Cuando el 20% del segmento aumentado en 4 unidades es 20

Ficha Nº4

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) Destaca el segmento cuyo valor debes determinar

c) Resuélvelo y explica como lo has resuelto

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos:**
   a) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

   b) La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?

c) Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?

d) En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

e) En un examen de matemática, las dos doceavas partes de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, las tres doceavas partes bien, seis doceavos suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

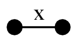
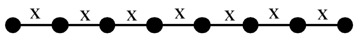
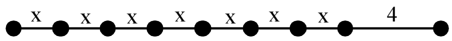
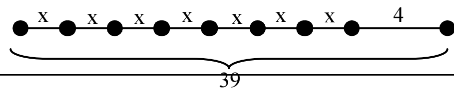
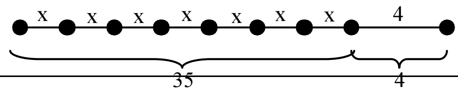
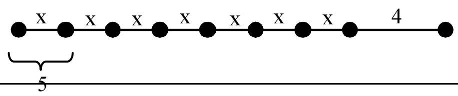
f) Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata?

Ficha Nº5

Nombre y apellidos: ____ Nº lista: ___

1. **Observa como, a partir del problema 1 de la ficha Nº 4, se plantea una ecuación equivalente a la representación utilizando segmentos, donde se ha denominado "x" al segmento de "longitud desconocida":**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

Un número		**x**
Multiplicado por 7		**7x**
Le sumamos 4 unidades		**7x + 4**
Obtenemos 39		**7x + 4 = 39**
		**7x = 39 – 4** **7x = 35**
		**x = 35 : 7** **x = 5**

2. **En los problemas de la parte 2. De la ficha Nº 4 destaca el segmento cuyo valor debías determinar, escribe una ecuación equivalente a la representación con segmentos y luego resuelve la ecuación**

a) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

b) La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?

c) Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?

d) En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

e) En un examen de matemática, las dos doceavas partes de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, las tres doceavas partes bien, seis doceavos suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?

f) Si a un número le restas 15 y el resultado lo divide entre 3, obtienes 20. ¿De qué número se trata?

Ficha Nº6

Nombre y apellidos: ________________________________ Nº lista: ___

1. **Lee atentamente el siguiente problema:**

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

a) Representa la situación anterior utilizando segmentos.

b) Destaca el segmento cuyo valor debes determinar

c) Resuélvelo y explica como lo has resuelto

2. **Resuelve los siguientes problemas gráficamente utilizando segmentos de recta:**

a. Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.

b. Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.

c. Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?

d. Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?

e. Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

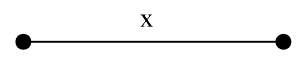
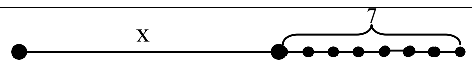
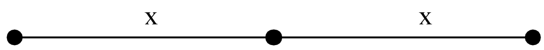
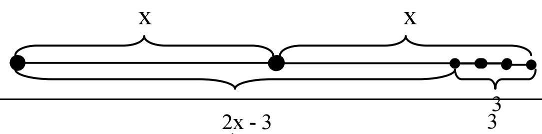
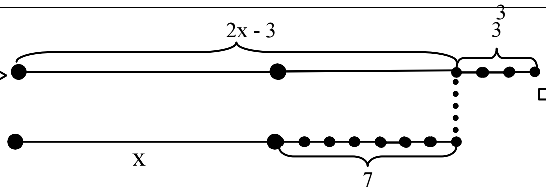
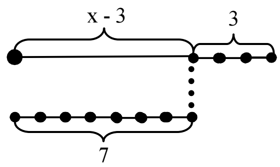
f. Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

Ficha Nº7

Nombre y apellidos: ___________________________________ Nº lista: ___

1. **Observa como, a partir del problema 1 de la ficha Nº 6, se plantea una ecuación equivalente a la representación utilizando segmentos, donde se ha denominado "x" al segmento de "longitud desconocida":**

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

Un número ⇨		⇨ **X**
Sumas 7 unidades ⇨		⇨ **x + 7**
Doble del número ⇨		⇨ **2x**
Doble menos tres ⇨		⇨ **2x – 3**
Obtienes lo mismo ⇨		⇨ **2x – 3 = x + 7**
⇨		⇨ **x – 3 = 7** **x = 10**

2. **En los problemas de la parte 2. De la ficha Nº 6 destaca el segmento cuyo valor debías determinar, escribe una ecuación equivalente a la representación con segmentos y luego resuelve la ecuación**

a) Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.

b) Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.

c) Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?

d) Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubieran necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?

e) Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l, y del otro 9000 l, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

f) Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

Anexo 2: Fichas de observación

Observación Aplicación Ficha Nº 1						
Profesor:	**Clase:**					
Hora inicio:	**Hora termino:**					
I. Interacción didáctica						
1. Responsabilidad de aprendizaje	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Trasmisión						
b. Cesión de la responsabilidad						
c. Co-responsabilización						
2. Comunicación promovida	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Unidireccional						
b. Contributiva						
c. reflexiva						
d. Instructiva						
3. Validación	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Profesor						
b. Profesor – alumno						
c. Alumno - alumno						

II. Comprensión del contenido		
Item		frec
1a		
1b		
1c		
1d		
1e		
1f		

1g		
1h		
2a		
2b		
2c		
2d		
2e		
2f		
2g		

III. General

1. Item conflictivo	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i
	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g		

2. Comentarios:

Observación Aplicación Ficha Nº 2						
Profesor:	**Clase:**					
Hora inicio:	**Hora termino:**					
I. Interacción didáctica						
1. Responsabilidad de aprendizaje	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Trasmisión						
b. Cesión de la responsabilidad						
c. Co-responsabilización						
2. Comunicación promovida	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Unidireccional						
b. Contributiva						
c. reflexiva						
d. Instructiva						
3. Validación	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Profesor						
b. Profesor – alumno						
c. Alumno - alumno						

II. Comprensión del contenido

Item		frec
1a		
1b		
1c		
1d		
1e		
2a		

2b		

III. General

1. Item conflictivo	1a	1b	1c	1d	1e
	2a	2b			
2. Comentarios:					

Observación Aplicación Ficha Nº 3						
Profesor:	**Clase:**					
Hora inicio:	**Hora termino:**					
I. Interacción didáctica						
1. Responsabilidad de aprendizaje	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Trasmisión						
b. Cesión de la responsabilidad						
c. Co-responsabilización						
2. Comunicación promovida	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Unidireccional						
b. Contributiva						
c. reflexiva						
d. Instructiva						
3. Validación	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Profesor						
b. Profesor – alumno						
c. Alumno – alumno						
II. Comprensión del contenido						

Item		frec
1a		
1b		
1c		
1d		
1e		

1f		
1g		
1h		

III. General

1. Item conflictivo	1a	1b	1c	1d	1e
	1f	1g	1h		
2. Comentarios:					

Observación Aplicación Ficha Nº 4	
Profesor:	**Clase:**
Hora inicio:	**Hora termino:**

I. Interacción didáctica

1. Responsabilidad de aprendizaje	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Trasmisión						
b. Cesión de la responsabilidad						
c. Co-responsabilización						
2. Comunicación promovida	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Unidireccional						
b. Contributiva						
c. reflexiva						
d. Instructiva						
3. Validación	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Profesor						
b. Profesor – alumno						
c. Alumno - alumno						

II. Comprensión del contenido

Item		frec
1a		
1b		
1c		
2a		
2b		

2c		
2d		
2e		
2f		

III. General

1. Item conflictivo	1a	1b	1c			
	2a	2b	2c	2d	2e	2f
2. Comentarios:						

Observación Aplicación Ficha Nº 5						
Profesor:	**Clase:**					
Hora inicio:	**Hora termino:**					
I. Interacción didáctica						
1. Responsabilidad de aprendizaje	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Trasmisión						
b. Cesión de la responsabilidad						
c. Co-responsabilización						
2. Comunicación promovida	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Unidireccional						
b. Contributiva						
c. reflexiva						
d. Instructiva						
3. Validación	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Profesor						
b. Profesor – alumno						
c. Alumno - alumno						

II. Comprensión del contenido		
Item		frec
1		
2a		
2b		
2c		
2d		
2e		

<table>
<tr><td rowspan="2">2f</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="7">III. General</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Item conflictivo</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2a</td><td>2b</td><td>2c</td><td>2d</td><td>2e</td><td>2f</td></tr>
<tr><td colspan="7">2. Comentarios:</td></tr>
</table>

Observación Aplicación Ficha Nº 6						
Profesor:	**Clase:**					
Hora inicio:	**Hora termino:**					
I. Interacción didáctica						
1. Responsabilidad de aprendizaje	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Trasmisión						
b. Cesión de la responsabilidad						
c. Co-responsabilización						
2. Comunicación promovida	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Unidireccional						
b. Contributiva						
c. reflexiva						
d. Instructiva						
3. Validación	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Profesor						
b. Profesor – alumno						
c. Alumno - alumno						

II. Comprensión del contenido

Item		frec
1a		
1b		
1c		
2a		
2b		
2c		

2d		
2e		
2f		

III. General

1. Item conflictivo	1a	1b	1c			
	2a	2b	2c	2d	2e	2f
2. Comentarios:						

Observación Aplicación Ficha Nº 7						
Profesor:	**Clase:**					
Hora inicio:	**Hora termino:**					
I. Interacción didáctica						
1. Responsabilidad de aprendizaje	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Trasmisión						
b. Cesión de la responsabilidad						
c. Co-responsabilización						
2. Comunicación promovida	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Unidireccional						
b. Contributiva						
c. reflexiva						
d. Instructiva						
3. Validación	Explicación		Trabajo autónomo		Puesta en común	
a. Profesor						
b. Profesor – alumno						
c. Alumno - alumno						

II. Comprensión del contenido

Item		frec
1		
2a		
2b		
2c		
2d		
2e		

<table>
<tr><td rowspan="2">2f</td><td colspan="5"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">III. General</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Item conflictivo</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2a</td><td>2b</td><td>2c</td><td>2d</td><td>2e</td><td>2f</td></tr>
<tr><td colspan="7">2. Comentarios:</td></tr>
</table>

Anexo 3: Matriz de resultados

PLAN4A	EJEC4A	DES4A	PLAN4B	EJEC4B	DES4B
4	4	1	4	0	0
2	2	1	3	3	0
4	4	1	3	0	0
3	0	0	0	0	0
4	2	1	3	0	0
4	4	1	0	0	0
2	2	1	0	0	0
4	3	0	3	1	0
4	4	1	3	0	0
2	2	1	4	4	1
4	4	1	3	0	0
4	4	0	3	0	0
3	2	1	1	1	0
4	0	0	3	0	0
4	2	1	4	1	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	0	0	0
2	2	1	4	4	1
0	0	0	0	0	0
4	4	1	0	0	0
4	4	1	3	3	0
3	0	0	3	3	0
1	1	0	1	1	0
4	4	1	3	3	0
0	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
2	2	1	4	2	1
4	4	0	0	0	0
4	0	0	3	0	0
4	0	0	4	0	0
4	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
0	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	3	3	0
3	2	1	3	0	0
4	4	1	4	3	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	2	1
4	0	0	3	0	0
0	0	0	3	3	0
0	0	0	0	0	0
3	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	3	0
2	2	1	4	2	1

4	4	1	4	4	1
3	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
0	0	0	0	0	0
4	4	1	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	0	0
2	2	1	4	2	1
4	4	1	3	0	0
0	0	0	0	0	0
2	2	1	3	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	2	1
3	1	0	3	1	0
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
0	0	0	0	0	0
4	3	0	4	3	0
4	4	1	2	2	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	3	0
4	4	1	3	3	0
4	4	1	3	3	0
3	0	0	2	2	1
3	3	0	3	3	0
4	0	0	4	4	1
4	3	0	2	2	1
4	4	1	4	4	1

PLAN4C	EJEC4C	DES4C	PLAN4D	EJEC4D	DES4D
4	4	1	4	4	1
0	0	0	4	4	0
0	0	0	4	4	1
0	0	0	4	3	0
0	0	0	4	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
0	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	2	1
4	4	1	4	4	1
0	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
0	0	0	4	4	0
4	4	1	4	4	1
0	0	0	4	3	0
0	0	0	4	4	1
0	0	0	4	4	1
4	4	1	0	0	0
0	0	0	3	3	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	3	3	0
4	4	1	3	0	0
0	0	0	4	3	0
4	4	1	4	4	1
0	0	0	4	2	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	3	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	0	0
4	4	0	4	4	0
4	4	1	4	3	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
0	0	0	4	4	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	3	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	3	0
4	4	1	4	4	0
4	4	1	4	3	0
4	4	1	4	4	0
4	4	1	4	4	1

0	0	0	4	4	1
3	0	0	4	3	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
0	0	0	4	4	1
4	3	0	4	4	1
4	4	1	3	3	0
0	0	0	0	0	0
2	2	1	4	4	1
4	4	1	4	4	0
0	0	0	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
3	3	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	3	0
1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	3	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	4	1
3	3	0	3	3	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1

PLAN4E	EJEC4E	DES4E	PLAN4F	EJEC4F	DES4F
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	1	1
4	4	1	4	0	0
4	4	1	3	2	1
3	4	1	0	0	0
4	4	1	3	2	1
4	4	1	4	4	1
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	2	1
4	4	1	3	2	1
4	4	1	4	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	2	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	0	0	0
4	4	1	4	1	0
0	0	0	0	0	0
3	3	0	3	0	0
3	3	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	2	1
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
3	3	0	3	3	0
4	4	1	3	2	1
3	2	1	3	0	0
4	4	1	3	1	0
3	2	1	4	4	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1

4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
3	3	0	4	3	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	2	1
0	0	0	0	0	0
4	4	1	2	2	1
0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0
3	3	0	2	2	1
3	0	0	2	2	1
4	4	1	2	2	1
4	4	1	4	4	1
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	3	0	4	4	1
0	0	0	0	0	0
4	0	0	3	1	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	2	2	1
4	3	0	3	3	0
4	4	1	3	2	1
4	4	1	3	3	0
4	4	1	4	4	1
3	3	0	1	1	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	2	1
4	4	1	4	4	1

PLAN6A	EJEC6A	DES6A	PLAN6B	EJEC6B	DES6B
4	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0
4	4	1	3	2	1
0	0	0	3	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	4	0	0
3	2	1	3	1	1
4	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	1	1
4	4	0	3	0	0
4	4	1	4	0	0
4	3	0	0	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	0	0	0	0
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	4	4	0
4	0	0	3	0	0
0	0	0	3	0	0
4	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	2	1	3	2	1
4	4	1	3	2	1
4	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	0	0	3	0	0
4	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	0	0	3	0	0
4	0	0	4	4	1
3	0	0	3	1	0
4	4	1	0	0	0
4	0	0	3	0	1
4	4	1	4	4	1
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
3	0	0	3	0	0
4	4	1	3	2	1
4	4	1	3	0	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	0	0	4	0	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	0	0	3	2	1

4	4	1	4	4	1
4	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	3	2	1
4	4	1	3	2	1
4	4	1	3	2	1
4	4	1	3	0	0
4	4	1	3	2	1
4	4	1	3	2	1
3	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	0	0
3	2	0	0	0	0
0	0	0	3	0	0
4	2	0	4	2	0
4	2	0	4	2	0
0	0	0	4	2	0
4	1	0	4	1	0
4	2	0	4	1	0
4	2	0	4	4	1
4	2	0	4	4	0
4	2	0	4	2	0
0	0	0	0	0	0
4	2	0	4	2	0
4	2	0	4	2	0
4	2	0	4	2	0
4	4	1	3	2	1
4	2	0	4	2	1

PLAN6C	EJEC6C	DES6C	PLAN6D	EJEC6D	DES6D
4	4	1	0	0	0
4	0	0	3	1	0
4	4	1	3	1	0
4	4	1	0	0	0
3	2	1	1	1	0
3	4	1	0	0	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	3	0	0
4	0	0	3	0	0
4	4	1	4	1	0
4	4	1	4	1	0
4	4	1	4	0	0
4	0	0	3	0	0
0	0	0	3	0	0
4	4	1	4	0	0
0	0	0	0	0	0
4	0	0	3	0	0
4	4	1	0	0	0
3	0	0	3	1	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	0	0
4	1	0	0	0	0
3	0	0	4	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	0	0
4	0	0	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	3	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	0	0
0	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	4	1

4	4	1	4	4	1
3	3	0	3	0	0
4	4	1	4	0	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	0	0
4	4	1	4	4	1
4	4	1	4	0	0
4	4	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1
0	0	0	4	4	1
3	3	0	4	4	1
3	3	0	4	4	1
0	0	0	4	4	1
3	2	1	3	1	0
3	1	0	4	4	1
3	0	0	3	3	0
4	1	0	4	1	0
4	4	1	4	2	1
4	0	0	4	4	1
4	1	0	4	4	1
4	4	1	4	4	1
4	1	0	3	1	0
4	1	0	3	1	0
4	2	0	2	2	1
0	0	0	0	0	0
4	0	0	4	0	0
3	2	0	3	1	0
4	2	0	3	1	0
4	4	1	3	3	0
4	4	1	4	2	0

PLAN6E	EJEC6E	DES6E	PLAN6F	EJEC6F	DES6F
0	0	0	4	0	0
0	0	0	3	2	1
0	0	0	4	4	1
0	0	0	3	0	0
0	0	0	4	4	1
0	0	0	3	0	0
0	0	0	4	3	0
0	0	0	3	1	1
0	0	0	3	2	1
0	0	0	3	2	1
0	0	0	3	2	1
0	0	0	3	2	1
4	4	1	4	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	0	0
0	0	0	4	0	0
0	0	0	3	0	0
0	0	0	3	0	0
0	0	0	4	2	1
0	0	0	3	2	1
0	0	0	3	1	0
3	0	0	3	0	0
4	0	0	3	1	0
3	1	0	3	1	0
4	4	1	3	1	0
4	4	1	3	2	1
4	0	0	4	2	1
4	4	1	4	2	1
4	4	1	4	2	1
4	4	1	3	1	0
3	0	0	3	0	0
4	4	0	3	1	0
3	0	0	3	0	0
3	0	0	3	1	0
4	4	1	4	2	1
3	0	0	4	2	1
3	3	0	3	1	0
4	4	0	4	4	1
4	4	1	4	2	1
4	4	1	3	0	0
4	4	1	3	2	1
4	4	1	4	2	1
4	4	1	3	2	1
4	4	1	3	2	1
0	0	0	3	2	1
4	4	1	4	2	1
3	0	0	3	2	1
4	4	1	4	3	0
4	4	1	4	2	1
4	4	1	3	2	1
4	4	1	3	2	1
4	4	1	4	4	1

4	4	1	3	2	1
4	4	1	4	2	1
0	0	0	0	0	0
3	0	0	3	0	1
3	0	0	0	0	1
3	1	0	0	0	1
3	0	0	3	2	1
3	0	0	3	0	1
4	4	1	3	0	0
3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	3	2	1
3	3	0	0	0	0
3	1	0	3	2	1
3	3	0	3	2	1
3	0	0	3	0	1
3	0	0	0	0	0
4	4	1	3	0	0
4	3	0	3	2	1
3	0	0	3	2	1
4	4	1	3	2	1
3	1	0	0	0	0
4	1	0	3	1	0
3	1	0	3	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
3	0	0	3	1	0
3	3	0	3	1	0
0	0	0	0	0	0
4	4	1	3	0	1

Anexo 4: Detalle frecuencia de elaboraciones correctas por fase y por problema

Problema 4a

	Corrección por fases problema 4ª		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	13,4	15,8	70,7
Ejecución	30,5	7,3	62,2
Desempeño final	32,9	7,3	59,8

Problema 4b

	Corrección por fases problema 4b		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	18,3	40,2	41,5
Ejecución	50,0	22,0	28,0
Desempeño final	50,0	22,0	28,0

Problema 4c

	Corrección por fases problema 4c		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	29,3	4,9	65,8
Ejecución	31,7	4,9	63,4
Desempeño final	34,1	3,7	62,2

Problema 4d

	Corrección por fases problema 4d		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	13,4	18,3	68,3
Ejecución	25,6	18,3	56,1
Desempeño final	35,4	17,1	47,6

Problema 4e

	Corrección por fases problema 4e		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	11,0	15,9	73,2
Ejecución	15,9	11,0	73,2
Desempeño final	19,5	7,3	73,2

Problema 4f

	Corrección por fases problema 4f		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	17,1	23,2	59,8
Ejecución	24,4	11,0	64,6
Desempeño final	26,8	8,5	64,6

Problema 6a

	Corrección por fases problema 6ª		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	8,5	17,1	74,4
Ejecución	41,5	2,4	56,1
Desempeño final	57,3	2,4	40,2

Problema 6b

	Corrección por fases problema 6b		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	13,4	50,0	36,6
Ejecución	53,7	6,1	40,3
Desempeño final	62,2	4,9	32,9

Problema 6c

	Corrección por fases problema 6c		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	9,8	15,9	74,4
Ejecución	24,4	11,0	64,6
Desempeño final	32,9	6,1	61,0

Problema 6d

	Corrección por fases problema 6d		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	11,0	34,1	54,9
Ejecución	54,9	17,1	28,1
Desempeño final	58,5	14,6	26,8

Problema 6e

	Corrección por fases problema 6e		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	32,9	29,3	37,8
Ejecución	53,7	13,4	32,9
Desempeño final	58,5	11,0	30,5

Problema 6f

	Corrección por fases problema 6f		
Corrección / Fase	No existe información / no responde	Incorrecto	Correcto
Planteamiento	13,4	61,0	24,4
Ejecución	35,4	19,5	45,1
Desempeño final	34,1	11,0	54,9

Anexo 5: Detalle frecuencia de utilización del MGL en las fases de planteamiento y ejecución por problema

Problema 4a

Fase \ Utilización MGL	Utilización MGL por fases problema 4a		
	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	13,4	11,0	75,6
Ejecución	30,5	17,0	52,5

Problema 4b

Fase \ Utilización MGL	Utilización MGL por fases problema 4b		
	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	18,3	6,1	75,6
Ejecución	50,0	15,9	34,2

Problema 4c

Fase \ Utilización MGL	Utilización MGL por fases problema 4c		
	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	29,3	2,4	68,3
Ejecución	31,7	2,4	65,9

Problema 4d

Fase \ Utilización MGL	Utilización MGL por fases problema 4d		
	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	13,4	0,0	86,6
Ejecución	25,6	2,4	72,0

Problema 4e

	Utilización MGL por fases problema 4e		
Utilización MGL / Fase	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	11,0	0,0	89,1
Ejecución	15,9	2,4	81,7

Problema 4f

	Utilización MGL por fases problema 4f		
Utilización MGL / Fase	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	17,1	7,3	75,6
Ejecución	24,4	24,4	51,2

Problema 6a

	Utilización MGL por fases problema 6ª		
Utilización MGL / Fase	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	8,5	0,0	91,5
Ejecución	41,5	17,1	41,4

Problema 6b

	Utilización MGL por fases problema 6b		
Utilización MGL / Fase	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	13,4	0,0	86,6
Ejecución	53,7	28,1	18,3

Problema 6c

	Utilización MGL por fases problema 6c		
Utilización MGL / Fase	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	9,8	0,0	90,3
Ejecución	24,4	14,6	61,0

Problema 6d

	Utilización MGL por fases problema 6d		
Utilización MGL / Fase	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	11,0	2,4	86,6
Ejecución	54,9	20,7	24,4

Problema 6e

	Utilización MGL por fases problema 6e		
Utilización MGL / Fase	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	32,9	0,0	67,1
Ejecución	53,7	7,3	39,0

Problema 6f

	Utilización MGL por fases problema 6f		
Utilización MGL / Fase	No existe información / no responde	Utiliza otro método	Utiliza MGL
Planteamiento	13,4	1,2	85,4
Ejecución	35,4	57,3	7,3

Anexo 6: Detalle frecuencia de utilización y corrección del MGL por fase y por problema

Problema 4a

% de alumnos / Fase	% de utilización del método y corrección por fase problema 4a				
	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
Planteamiento	13,4	1,2	14,6	9,8	61,0
Ejecución	30,5	2,4	4,9	14,6	47,6

Problema 4b

% de alumnos / Fase	% de utilización del método y corrección por fase problema 4b				
	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
Planteamiento	18,3	2,4	37,8	3,7	37,8
Ejecución	50,0	6,1	15,9	9,8	18,3

Problema 4c

% de alumnos / Fase	% de utilización del método y corrección por fase problema 4c				
	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
Planteamiento	29,3	1,2	3,7	1,2	64,6
Ejecución	31,7	1,2	3,7	1,2	62,2

Problema 4d

% de alumnos / Fase	% de utilización del método y corrección por fase problema 4d				
	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
Planteamiento	13,4	0,0	18,3	0,0	68,3
Ejecución	25,6	0,0	18,3	2,4	53,7

Problema 4e

	% de utilización del método y corrección por fase problema 4e				
% de alumnos / Fase	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
Planteamiento	11,0	0,0	15,9	0,0	73,2
Ejecución	15,9	0,0	11,0	2,4	70,7

Problema 4f

	% de utilización del método y corrección por fase problema 4f				
% de alumnos / Fase	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
Planteamiento	17,1	1,2	22,0	6,1	53,7
Ejecución	24,4	6,1	4,9	18,3	46,3

Problema 6a

	% de utilización del método y corrección por fase problema 6a				
% de alumnos / Fase	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
Planteamiento	8,5	0,0	17,1	0,0	74,4
Ejecución	41,5	1,2	1,2	15,9	40,2

Problema 6b

	% de utilización del método y corrección por fase problema 6b				
% de alumnos / Fase	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
Planteamiento	13,4	0,0	50,0	0,0	36,6
Ejecución	53,7	6,1	0,0	22,0	18,3

Problema 6c

% de alumnos / Fase	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
	% de utilización del método y corrección por fase problema 6c				
Planteamiento	9,8	0,0	15,9	0,0	74,4
Ejecución	24,4	7,3	3,7	7,3	57,3

Problema 6d

% de alumnos / Fase	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
	% de utilización del método y corrección por fase problema 6d				
Planteamiento	11,0	1,2	32,9	1,2	53,7
Ejecución	54,9	14,6	2,4	6,1	22,0

Problema 6e

% de alumnos / Fase	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
	% de utilización del método y corrección por fase problema 6e				
Planteamiento	32,9	0,0	29,3	0,0	37,8
Ejecución	53,7	7,3	6,1	0,0	32,9

Problema 6f

% de alumnos / Fase	No existe información / no responde	% incorrecto otro método	% incorrecto MGL	% correcto otro método	% correcto MGL
	% de utilización del método y corrección por fase problema 6f				
Planteamiento	13,4	1,2	61,0	0,0	24,4
Ejecución	35,4	17,1	2,4	40,2	4,9

Anexo 7: Análisis clúster

Anexo 7.1 Análisis clúster fase de planteamiento

Distancias

Resumen de procesamiento de los casos(a)

Casos					
Valid		Perdidos		Total	
N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
82	100,0%	0	,0%	82	100,0%

a Distancia euclídea al cuadrado usada

Conglomerados jerárquicos

Vinculación de Ward

Historial de conglomeración

Etapa	Conglomerado que se combina		Coeficientes	Etapa en la que el conglomerado aparece por primera vez		Próxima etapa
	Conglomerado 1	Conglomerado 2		Conglomerado 1	Conglomerado 2	
1	5	6	46,000	0	0	3
2	8	9	100,000	0	0	5
3	4	5	160,667	0	1	10
4	1	2	246,667	0	0	9
5	8	10	336,000	2	0	6
6	7	8	428,667	0	5	7
7	7	12	552,667	6	0	9
8	3	11	726,667	0	0	11
9	1	7	922,381	4	7	10
10	1	4	1151,800	9	3	11
11	1	3	1427,500	10	8	0

Diagrama de témpanos horizontal

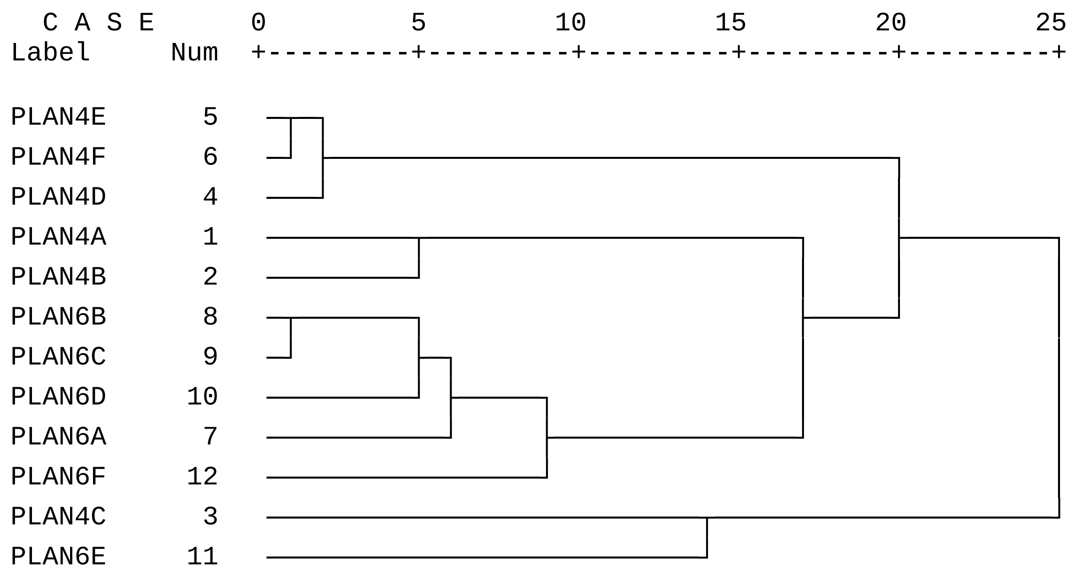
Caso	Número de conglomerados										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P6e	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X							
P4c	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X										
P4f	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
P4e	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
P4d	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X									
P6f	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X						
P6d	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X				
P6c	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
P6b	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X					
P6a	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X								
P4b	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X			
P4a	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Dendrograma

* * * * * * H I E R A R C H I C A L C L U S T E R A N A L Y S I S * * * * * *

Dendrogram using Ward Method

Rescaled Distance Cluster Combine



Anexo 7.2 Análisis clúster fase de ejecución

Distancias

Resumen de procesamiento de los casos(a)

Casos					
Valid		Perdidos		Total	
N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
82	100,0%	0	,0%	82	100,0%

a Distancia euclídea al cuadrado usada

Conglomerados jerárquicos

Vinculación de Ward

Historial de conglomeración

Etapa	Conglomerado que se combina		Coeficientes	Etapa en la que el conglomerado aparece por primera vez		Próxima etapa
	Conglomerado 1	Conglomerado 2		Conglomerado 1	Conglomerado 2	
1	5	6	103,000	0	0	2
2	4	5	214,667	0	1	5
3	8	12	334,167	0	0	4
4	2	8	479,333	0	3	6
5	4	9	651,167	2	0	10
6	2	10	823,250	4	0	7
7	2	11	1028,900	6	0	11
8	3	7	1249,900	0	0	9
9	1	3	1498,900	0	8	10
10	1	4	1770,400	9	5	11
11	1	2	2369,667	10	7	0

Diagrama de témpanos horizontal

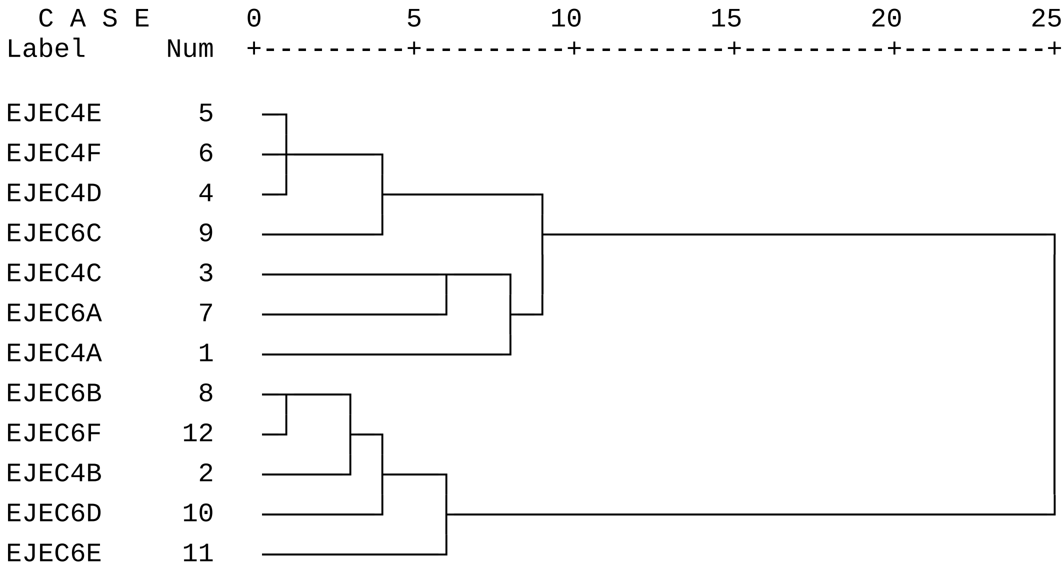
Caso	Número de conglomerados										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E6e	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X						
E6d	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X					
E6f	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
E6b	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X			
E4b	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X										
E6c	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X				
E4f	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
E4e	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
E4d	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X									
E6a	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X							
E4c	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X								
E4a	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Dendrograma

* * * * * * H I E R A R C H I C A L C L U S T E R A N A L Y S I S * * * * * *

```
 Dendrogram using Ward Method

                         Rescaled Distance Cluster Combine
```



Anexo 7.3 Análisis clúster fase de desempeño final

Distancias

Resumen de procesamiento de los casos(a)

Casos					
Valid		Perdidos		Total	
N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
82	100,0%	0	,0%	82	100,0%

a Distancia euclídea al cuadrado usada

Conglomerados jerárquicos
Vinculación de Ward

Historial de conglomeración

Etapa	Conglomerado que se combina		Coeficientes	Etapa en la que el conglomerado aparece por primera vez		Próxima etapa
	Conglomerado 1	Conglomerado 2		Conglomerado 1	Conglomerado 2	
1	5	6	6,500	0	0	5
2	7	8	14,500	0	0	4
3	2	11	26,500	0	0	6
4	4	7	39,833	0	2	9
5	5	9	54,000	1	0	8
6	2	10	68,667	3	0	9
7	1	3	84,667	0	0	8
8	1	5	101,600	7	5	10
9	2	4	120,100	6	4	11
10	1	12	141,500	8	0	11
11	1	2	176,583	10	9	0

Diagrama de témpanos horizontal

Caso	Número de conglomerados										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D6b	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
D6a	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X			
D4d	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X								
D6d	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X					
D6e	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
D4b	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X										
D6f	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X									
D6c	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X				
D4f	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D4e	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X							
D4c	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X						
D4a	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Dendrograma

* * * * * * H I E R A R C H I C A L   C L U S T E R   A N A L Y S I S * * * * * *

```
 Dendrogram using Ward Method

                         Rescaled Distance Cluster Combine
```