UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Álgebra

ANILLOS NOETHERIANOS. DUALIDAD

TESIS DOCTORAL

Joaquín Jódar Reyes

Granada, 2001

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Joaquín Jódar reyes
D.L.: Gr. 1168 - 2007
ISBN: 978-84-338-4340-1

Anillos noetherianos. Dualidad

por

Joaquín Jódar Reyes

MEMORIA realizada en el departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección del profesor Dr. D. Pascual Jara Martínez, para obtener el grado de Doctor en Ciencias.

V. B.
El director,

El aspirante al grado de Doctor,

A mi familia

Índice

Introducción.

Dado R un anillo filtrado con anillo graduado asociado $\mathrm{gr}(R)$ que es conmutativo y noetheriano, J. E. Björk define en [6], para cada R–módulo M finitamente generado, un entero $d_R(M)$ al que llama *dimensión* de M, y establece que, si $\mathrm{gr}(R)$ es un anillo conmutativo regular con dimensión pura ω y $j_R(M)$ denota el menor entero mayor o igual que 0 tal que $\mathrm{Ext}_R^{j_R(M)}(M,R) \neq 0$, ($j_R(M)$ es llamado el *grado* de M), entonces se puede probar la igualdad $j_R(M) + d_R(M) = \omega$.

Además, si se considera $\mu = \mathrm{wgldim}(R)$ (la *dimensión homológica global débil* de R), entonces $0 \leq j_R(M) \leq \mu$ y, en consecuencia, $d_R(M) \geq \omega - \mu$.

Define entonces la *clase de Bernstein* como aquella formada por todos los R–módulos M (izquierda o derecha) finitamente generados, de dimensión mínima, es decir, que satisfacen $d_R(M) = \omega - \mu$, y, denotando por $\mathcal{B}_l$ (respectivamente $\mathcal{B}_r$) la clase de los R–módulos izquierda (resp. derecha) en la clase de Bernstein, establece una dualidad entre las clases $\mathcal{B}_l$ y $\mathcal{B}_r$ de la siguiente forma: *Si $M \in \mathcal{B}_l$ entonces, el R–módulo derecha $\tilde{M} = \mathrm{Ext}_R^{\mu}(M,R)$ pertenece a $\mathcal{B}_r$ y $M \cong \mathrm{Ext}_R^{\mu}(\tilde{M},R)$. Análogamente en el otro sentido, ver [6, 2,7.12].*

La situación anterior es generalizada en [7] a anillos Gorenstein.

Concretamente, si R es un anillo noetheriano Gorenstein [1] con dimensión inyectiva μ y le añadimos la condición de ser Cohen-Macaulay, con dimensión de Gelfand-Kirillov ω, un R–módulo M finitamente generado se dice *holonómico* (o *de Bernstein*) si su grado $j(M)$ es igual a μ o, equivalentemente, si su dimensión de Gelfand-Kirillov, $\mathrm{GKdim}(M)$, es igual a $\omega - \mu$. Björk establece para ellos una dualidad de la forma siguiente: *El funtor* $\mathrm{Ext}_R^{\mu}(-, R)$ *es un funtor contravariante exacto desde la categoría de R–módulos izquierda holonómicos a la categoría de R–módulos derecha holonómicos, de tal forma que si M es un R–módulo izquierda holonómico entonces* $\tilde{M} = \mathrm{Ext}_R^{\mu}(M, R)$ *es un R–módulo derecha holonómico y además se tiene un isomorfismo* $M \cong \mathrm{Ext}_R^{\mu}(\tilde{M}, R)$. *Análogamente en el otro sentido, ver [7, 1.26].*

En el caso particular en que R verifique la igualdad $\mu = \omega$, los módulos de Bernstein serán los módulos finitamente generados de dimensión de Gelfand-Kirillov cero, es decir, son exactamente los módulos K–finito dimensionales. Esta es la situación que tiene lugar en [4], donde Barou y Malliavin consideran $R = \mathcal{U}(g)$ el álgebra envolvente de un álgebra de Lie soluble g de dimensión finita n sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado de característica cero. Definen $V(g) = R^o$ como el R–módulo izquierda de las aplicaciones K–lineales de R en K que se anulan sobre algún ideal bilátero de R de codimensión finita y prueban que el último término E_n de la resolución inyectiva minimal del R–módulo izquierda R está dotado de una estructura natural de bimódulo y que E_n es isomorfo a R^o como R–módulo izquierda y como R–módulo derecha, de tal modo que ${}_R(R^o) \cong \varinjlim_I \mathrm{Ext}_R^n(R/I, {}_R R)$ y $(R^o)_R \cong \varinjlim_I \mathrm{Ext}_R^n(R/I, R_R)$, donde

[1] Björk considera que un anillo noetheriano R es un anillo *Gorenstein* cuando R tiene dimensión inyectiva finita y, para cualquier R–módulo M finitamente generado, cualquier entero no negativo m y cualquier submódulo N de $\mathrm{Ext}_R^m(M, R)$, se verifica que $\mathrm{Ext}_R^i(N, R) = 0$, para todo $i < m$. Es justamente lo que nosotros definiremos más adelante como un anillo Auslander-Gorenstein.

I recorre la familia de los ideales biláteros de R de codimensión finita. De esta manera, si llamamos T_i al funtor $\mathrm{Ext}^n_R(-,{}_R R)$ y T_d a $\mathrm{Ext}^n_R(-,R_R)$ tenemos que ${}_R(R^o) \cong \varinjlim_I T_i(R/I)$ y $(R^o)_R \cong \varinjlim_I T_d(R/I)$, con lo cual el R–bimódulo R^o va a determinar la dualidad de Bernstein $(\mathrm{Ext}^n_R(-,{}_R R), \mathrm{Ext}^n_R(-,R_R))$ entre los R–módulos K–finito dimensionales a izquierda y derecha.

Extenderemos los anteriores resultados a una clase más amplia de álgebras R y caracterizaremos aquellas dualidades definidas por R^o. Mostraremos nuevos ejemplos en los que la dualidad de Bernstein es satisfecha y está representada por R^o. En todos estos ejemplos es importante de por sí resaltar la técnica empleada para su estudio, fundamentalmente el uso de bases de Groebner en versión no conmutativa.

——————:——————

En el capítulo 1 introducimos las definiciones y resultados preliminares en los que se va a apoyar nuestra teoría. Así comenzamos con la definición de las dimensiones proyectiva, inyectiva y global. Continuamos por el concepto de filtración y graduación de anillos y módulos. En ello nos basaremos para definir a continuación la dimensión de Gelfand-Kirillov. Además, la técnica de obtener propiedades a partir del anillo graduado asociado a un anillo filtrado será muy usada en los ejemplos que al final de la memoria estudiaremos. Concluiremos el capítulo definiendo, para álgebras, las condiciones Auslander-Gorenstein, Auslander-regular y Cohen-Macaulay, ya mencionadas anteriormente al describir los antecedentes y motivación de nuestra memoria.

En esta motivación quedaba patente el papel esencial que juegan los ideales (biláteros) de codimensión finita en el estudio de la dualidad de Bernstein. Ello da pie al desarrollo que hacemos en el capítulo 2. Dada una K–álgebra noetheriana R, consideramos la familia de los ideales izquierda de codimensión finita de R. Denotaremos a esta familia por $\mathcal{L}(\sigma_{cof})$. Se va a demostrar que esa familia de ideales constituye lo que en lenguaje de teorías de torsión se denomina *un filtro de Gabriel*. Por ello, en la primera parte de este capítulo, se recuerdan las principales definiciones y resultados relativos a teorías de torsión, resaltando la biyección que existe entre las *teorías de torsión hereditarias*, los *funtores núcleo idempotentes* y los *filtros de Gabriel*. Esto constituye una potente herramienta pues, cuando en la segunda parte del capítulo, probemos que la familia $\mathcal{L}(\sigma_{cof})$ es un filtro de Gabriel, automáticamente tendremos asociado a ella, de forma biunívoca, un funtor núcleo idempotente, que llamaremos σ_{cof}, y una teoría de torsión hereditaria, $(\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}, \mathcal{F}_{\sigma_{cof}})$. Se demostrará que la clase $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ de los R–módulos izquierda σ_{cof}–torsión coincide con la clase de los R–módulos izquierda localmente finitos (es decir, aquellos para los que cada submódulo finitamente generado es finito-dimensional) y además se verá que el funtor núcleo idempotente σ_{cof} es *simétrico* es decir, que cada ideal izquierda de codimensión finita contiene un ideal bilátero de codimensión finita (dicho de otro modo, si llamamos $\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$ a la familia de ideales biláteros de codimensión finita de R, se tiene que $\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$ es una familia cofinal en $\mathcal{L}(\sigma_{cof})$).

La dualidad local estudiada por Barou y Malliavin en [4], para el caso particular de álgebras envolventes de álgebras de Lie solubles finito–dimensionales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, y ampliada después por J. Mulet, en [29], a algunas extensiones de tales álgebras envolventes, extiende, en un marco no conmutativo, una dualidad local bien conocida en anillos Gorenstein conmutativos. Nosotros extendemos los resultados de [4] y [29] a K–álgebras R que verifican ciertas propiedades algebraicas (satisfacen la propiedad Auslander-Gorenstein, son Cohen-Macaulay con la condición fuerte de second layer en ideales primos cofinitos y, además, las dimensiones inyectiva y de Gelfand-Kirillov de R coinciden). Esto lo hacemos en el capítulo 3, el cual constituye el capítulo central de nuestra teoría.

La clase de los R–módulos izquierda finito–dimensionales es justamente la clase de los R–módulos izquierda localmente finitos (es decir, σ_{cof}–torsión) y finitamente generados. Si denotamos por $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma_{cof}}$ (respectivamente $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$) a la categoría de los R–módulos izquierda (resp. derecha) finito–dimensionales tenemos, como ya mencionamos antes, que si nuestra K–álgebra noetheriana R es Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay y con igualdad de las dimensiones inyectiva y de Gelfand-Kirillov de R, entonces $\mathrm{Ext}^{\mu}_{R}(-,R)$ es un funtor aditivo contravariante exacto entre $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma_{cof}}$ y $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$ de modo que establece una dualidad entre ambas categorías.

Comenzamos estudiando entonces el comportamiento general de los funtores aditivos contravariantes exactos desde la categoría $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma}$ a la categoría de grupos abelianos $\mathcal{A}b$, para σ cualquier funtor núcleo idempotente simétrico en la categoría de R–módulos izquierda R–***Mod***, y donde $\mathcal{T}_{\sigma}$ denota la clase de R–módulos izquierda σ–torsión (es decir, la clase de torsión hereditaria asociada a σ), y $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma}$ la subcategoría (abeliana) plena de R–***Mod*** de todos los R–módulos izquierda σ–torsión finitamente generados. Esto lo hacemos en la sección 3.1.. Denotemos por $\mathcal{L}(\sigma)$ el conjunto de los ideales izquierda I de R tales que $R/I \in \mathcal{T}_{\sigma}$, y por $\mathcal{L}^2(\sigma)$ el conjunto de ideales (biláteros) I de R tales que $I \in \mathcal{L}(\sigma)$, y consideremos $T : \mathcal{T}^{fg}_{\sigma} \longrightarrow \mathcal{A}b$ un funtor aditivo contravariante. Si llamamos $E = \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} T(R/I)$, se prueba que E tiene estructura de R–módulo izquierda y que a partir de él podemos caracterizar la exactitud del funtor T: *Es equivalente que el funtor T sea exacto izquierda a que T sea naturalmente isomorfo al funtor $\mathrm{Hom}_R(-,E)$, ver Lema (3.1.8);* si además, σ es *estable* (es decir, la clase de torsión $\mathcal{T}_{\sigma}$ asociada a σ es cerrada para envolventes inyectivas), entonces *es equivalente que T sea exacto a que E sea un R–módulo izquierda inyectivo*, ver Lema (3.1.11). Con todo ello, y denotando σ^{opp} al único funtor núcleo idempotente simétrico en la categoría de R–módulos derecha ***Mod***–R tal que $\mathcal{L}^2(\sigma) = \mathcal{L}^2(\sigma^{opp})$, definimos cuándo dos funtores aditivos contravariantes exactos izquierda $T_i : \mathcal{T}_\sigma^{fg} \longrightarrow \mathcal{T}_{\sigma^{opp}}^{fg}$ y $T_d : \mathcal{T}_{\sigma^{opp}}^{fg} \longrightarrow \mathcal{T}_\sigma^{fg}$ constituyen una dualidad respecto a σ, en cuyo caso se tendrá que el funtor T_i es naturalmente isomorfo al funtor $\mathrm{Hom}_R(-, E_{(i)})$, donde $E_{(i)} = \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} T_i(R/I)$, y que el funtor T_d es naturalmente isomorfo al funtor $\mathrm{Hom}_R(-, E_{(d)})$, donde $E_{(d)} = \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} T_d(R/I)$. Trasladando los resultados de [7] a este contexto, si consideramos que el funtor núcleo idempotente simétrico σ con el que trabajamos es σ_{cof} y tomamos $T_i = T_d = \mathrm{Ext}_R^{\mu}(-, R)$, Björk proporciona un ejemplo de dualidad en el caso de ser R una K–álgebra noetheriana Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, con $\mathrm{idim}(R) = \mathrm{GKdim}(R) = \mu$. Además, para el caso particular estudiado en [4], Barou y Malliavin prueban que R^o define la dualidad anterior en el sentido de que $_R(R^o) \cong E_{(i)}$ y $(R^o)_R \cong E_{(d)}$.

Dada R una K–álgebra noetheriana, estamos interesados en caracterizar todas aquellas dualidades respecto a σ_{cof} definidas por R^o en el sentido anterior. Para ello estudiaremos el R–módulo izquierda R^o. Esto lo haremos en la sección 3.3.. Previamente a ello es conveniente estudiar la estructura general de los grupos de cohomología local asociados a funtores núcleo idempotentes, a lo que dedicamos la sección 3.2.. Dados σ un funtor núcleo idempotente simétrico en R–***Mod***, M un R–módulo izquierda y n un entero no negativo, se define $H_\sigma^n(M)$, el *n–ésimo grupo de cohomología local de M relativo a σ*, como el n–ésimo funtor derivado a derecha del funtor σ. Se tiene de [29] que $H_\sigma^n(M)$ es isomorfo, como R–módulo izquierda, a $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} \mathrm{Ext}_R^n(R/I, M)$, y se prueba que si M es un R–bimódulo entonces, para cada $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$, se tiene en $\mathrm{Ext}_R^n(R/I, M)$ una estructura de R–módulo derecha la cual pasa, a través del límite directo, a $H_\sigma^n(M)$, dotando a éste de una estructura natural de R–bimódulo.

El primer aspecto que en la sección 3.3. reseñamos de R^o es su relación con la categoría $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$. A ello dedicamos la subsección 3.3.1.. Concretamente, la categoría $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ viene descrita a partir del R–módulo izquierda R^o en cuanto que los objetos de $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ son los submódulos de sumas directas de R^o, ver [13, 1.1]. Por otro lado, los objetos de $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ son los R–módulos izquierda localmente finitos, los cuales van a poder ser controlados por los R–módulos izquierda simples finito–dimensionales. Si llamamos Ω a un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de R–módulos izquierda simples finito–dimensionales, se prueba en [13] que existe una correspondencia biyectiva entre Ω y $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$, el conjunto de los ideales primos de codimensión finita (también llamados *cofinitos*) de R. Los ideales primos cofinitos de R van a ser un eje fundamental de nuestro estudio.

El lema [13, 1.1] muestra también que R^o es un objeto inyectivo en la categoría $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$. En la subsección 3.3.2. estudiamos la inyectividad de R^o en R–***Mod***, análogamente a como Barou y Malliavin lo hicieron en [4] en el caso particular de un álgebra envolvente de un álgebra de Lie. Estudiamos así mismo de forma paralela la inyectividad de R^o como R–módulo derecha, estructura que R^o también posee (de hecho, R^o es un R–bimódulo). El resultado principal de esta subsección es el corolario (3.3.9), que recoge y mejora diversos resultados de [13]:

Corolario. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) R^o *es un R–módulo izquierda inyectivo;*

(b) σ_{cof} *es estable;*

(c) $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ *verifica la condición fuerte de second layer a izquier-*

da;

(d) R^o *es un R–módulo derecha inyectivo;*

(e) σ_{cof}^{opp} *es estable;*

(f) $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ *verifica la condición fuerte de second layer a derecha.*

De este modo observamos que para determinar la biestabilidad de σ_{cof} y, por tanto, la inyectividad a izquierda y derecha de R^o, sólo tendremos que comprobar la verificación de la condición fuerte de second layer por parte de los ideales primos cofinitos de R.

En la sección 3.4. obtenemos la prometida caracterización de las dualidades respecto de σ_{cof} (es decir, entre los R–módulos izquierda y derecha K–finito dimensionales) definidas por R^o. Comenzamos definiendo cuándo un R–bimódulo es *dualizante* respecto a un funtor núcleo idempotente simétrico σ en R–***Mod***, para probar a continuación que R^o lo es respecto a σ_{cof} (lema (3.4.1)). A partir de este resultado obtenemos nuestro teorema de caracterización (teorema (3.4.3)):

Teorema. *Sea* (T_i, T_d) *una dualidad respecto a* σ_{cof} *y supongamos que cada ideal primo cofinito de R satisface la condición fuerte de second layer. Son equivalentes:*

(a) $\dim_K(T_i(R/P)) = \dim_K(R/P)$ *para cada* $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ *y*
$\dim_K(T_d(R/Q)) = \dim_K(R/Q)$ *para cada* $Q \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof}^{opp})$*;*

(b) $E_{(i)} \cong_R (R^o)$ *y* $E_{(d)} \cong (R^o)_R$.

donde $\dim_K(-)$ representa la dimensión como K–espacio vectorial.

El capítulo 3 lo concluimos estudiando en la sección 3.5. la relación existente entre R^o y el último punto E_μ de la resolución inyectiva minimal a izquierda de R, donde $\mu = \mathrm{idim}(R) < \infty$ es la dimensión inyectiva de R. De [13, 3.9] teníamos ya que si R es una K–álgebra noetheriana Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, con $\mathrm{idim}(R) = \mu = \mathrm{GKdim}(R)$, y tal que cada ideal primo cofinito P de R verifique la condición fuerte de second layer y que $\dim_K(\mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/P, R)) = \dim_K(R/P)$, entonces R^o y E_μ son isomorfos como R–módulos izquierda. Bajo las anteriores condiciones (notémoslas **(C)**), y al igual que hacían Barou y Malliavin en [4], probamos la identificación de R^o y E_μ no sólo como R–módulos izquierda, sino también como R–módulos derecha, para una conveniente estructura de R–módulo derecha en E_μ. Demostramos este resultado de varias formas, imponiendo primero que R sea libre de σ_{cof}–torsión y que $\mathrm{gldim}(R) = \mu$ y posteriormente eliminando tal restricción.

Como muestra de la aplicación de nuestra teoría, en el capítulo 4 exhibimos varios ejemplos de K–álgebras no conmutativas R verificando las condiciones recogidas en **(C)** y en las cuales, en consecuencia, la dualidad de Bernstein está representada por R^o. El primer ejemplo con el que comenzamos, cómo no, es el álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(g)$ de un álgebra de Lie soluble finito-dimensional g sobre un cuerpo de característica cero. Éste es un ejemplo de álgebra *punteada*, esto es, K–álgebras tales que cada ideal primo cofinito tiene codimensión uno. En ellas se verifica que si son Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, con $\mathrm{idim}(R) = \mu = \mathrm{GKdim}(R)$, entonces automáticamente $\dim_K(\mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/P, R)) = \dim_K(R/P)$, para cada ideal primo cofinito P de R, ver [13]. Un aspecto que resulta esencial en el estudio del álgebra $\mathcal{U}(g)$ es su estructura de álgebra filtrada, de tal forma que, a partir del álgebra graduada asociada, probamos la mayoría de las propiedades que buscamos. Una vez probadas las condiciones **(C)** en $\mathcal{U}(g)$ queda de manifiesto que nuestros resultados extienden a los obtenidos por Barou y Malliavin. Añadimos al anterior otro par de ejemplos de álgebras punteadas que verifican nuestras condiciones **(C)**, el plano cuántico y el anillo de coordenadas cuántico del grupo lineal especial, ambos en el caso en que q no es raíz de la unidad, y que ya fueron tratados en [13]. Con esto queda completada la sección 4.1..

El primer ejemplo de álgebra no punteada que estudiamos es el del espacio cuántico n–dimensional, $\mathbb{C}_q[X_1,\ldots,X_n]$, cuando $n \geq 2$, y en el caso en que q es una raíz de la unidad. A ello dedicamos la sección 4.2.. La descripción de $R = \mathbb{C}_q[X_1,\ldots,X_n]$ como extensión de Ore iterada y la determinación del centro nos permiten demostrar la mayor parte de las propiedades que vamos buscando. Para probar la igualdad $\dim_{\mathbb{C}}(R/P) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P,R))$, para cada ideal primo cofinito P de R, determinamos previamente estos ideales. Esto lo logramos utilizando la traza de los ideales primos cofinitos sobre el centro y luego levantándolos hasta R, para lo que veremos que, módulo estos ideales, las extensiones que aparecen son en realidad álgebras de Azumaya. Una vez tenemos la descripción completa de todos los ideales primos cofinitos P de R, calculamos la $\mathbb{C}$–dimensión de cada cociente R/P para después comprobar que coincide, en cada caso, con la $\mathbb{C}$–dimensión de $\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P,R)$. Para conseguir nuestro cometido usamos técnicas de bases de Groebner no conmutativas sobre R, de acuerdo con la teoría desarrollada en [16].

Otro nuevo ejemplo que estudiamos es el álgebra envolvente cuántica de $\mathfrak{sl}(2)$, esto es, $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$, también cuando q es una raíz de la unidad (en el caso en que q no es una raíz de la unidad, $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ no verifica la condición fuerte de second layer y, por tanto, queda fuera de nuestra teoría). A ello dedicamos la sección 4.3.. La abundante literatura existente en torno a $R = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ nos proporciona una completa descripción de su centro así como su estructura como extensión de Ore iterada, a partir de lo cual somos capaces de determinar la mayor parte de las propiedades que perseguimos. Para probar la igualdad de las dimensiones de $\mathrm{Ext}^{\mu}_{R}(R/P, R)$ y R/P, para cada ideal primo cofinito, la técnica que seguimos en este caso es distinta de la utilizada para $\mathbb{C}_q[X_1, \ldots, X_n]$. Ahora disponemos de una descripción completa de los R–módulos simples finito–dimensionales. De este modo, y teniendo en cuenta la biyección existente entre los módulos simples finito–dimensionales y los ideales primos cofinitos, obteniendo la igualdad de las dimensiones para los primeros conseguimos obtenerla también para los segundos.

Finalmente, en la sección 4.4., consideramos una deformación cuántica de $\mathfrak{sl}(2)$, concretamente el álgebra de Lie generalizada $\mathfrak{sl}(2)_q$, y estudiamos su álgebra envolvente $\mathcal{A} = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2)_q)$, en el sentido definido en [27]. Este estudio lo hacemos a partir de un álgebra $\mathcal{B}$, de la cual $\mathcal{A}$ se puede obtener como un cociente vía un elemento central. Describimos el centro de $\mathcal{B}$ y el listado completo de los $\mathcal{B}$–módulos simples finito–dimensionales, a partir de los cuales obtenemos también los de $\mathcal{A}$. A partir de aquí, y siguiendo una técnica parecida a la utilizada en el caso de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$, obtenemos que $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2)_q)$ está en las condiciones de aplicación de nuestra teoría.

Mi agradecimiento a Pascual, por su disposición permanente y su dedicación conmigo en todo momento. Es impagable lo que con él y de él he aprendido a lo largo de todos estos años de trabajo. Mi agradecimiento también al grupo en teoría de anillos por su apoyo y, en general, al Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, por el uso que de su material e instalaciones me han permitido. Así mismo, a mis compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén, con quienes he compartido muchos de los altibajos que conlleva un proceso como éste y, por supuesto, a mi familia y amigos, quienes siempre me han animado y a los que, durante todos estos años de trabajo, he dedicado mucho menos tiempo del que se merecen y me hubiera gustado.

Granada, 30 de Junio de 2001

Joaquín Jódar Reyes

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Dimensiones proyectiva, inyectiva y global.

En lo que sigue, sea R un anillo. Si M es un R–módulo izquierda, definimos la *dimensión proyectiva* (resp. *inyectiva*) izquierda de M, y la denotaremos $\mathrm{pdim}({}_RM)$ (resp. $\mathrm{idim}({}_RM)$), como el menor entero n para el que existe una resolución proyectiva (resp. inyectiva) de M de longitud n o, equivalentemente, $\mathrm{Ext}_R^k(M, N) = 0$ (resp. $\mathrm{Ext}_R^k(N, M)$) para todo R–módulo izquierda N y todo $k > n$. Si no existe un tal entero n entonces diremos que la dimensión proyectiva (resp. inyectiva) del R–módulo izquierda M es infinita. Evidentemente, M es un R–módulo izquierda proyectivo (resp. inyectivo) si, y sólo si, su dimensión proyectiva (resp. inyectiva) izquierda es 0. De forma análoga, si M es un R–módulo derecha, podemos definir las correspondientes dimensiones proyectivas e inyectivas a derecha de M, $\mathrm{pdim}(M_R)$ y $\mathrm{idim}(M_R)$.

Definimos la *dimensión global a izquierda* del anillo R como el supremo de las dimensiones proyectivas a izquierda (o, equivalentemente, de las dimensiones inyectivas a izquierda) de todos los R–módulos izquierda, y la denotaremos por $\mathrm{lgldim}(R)$. La *dimensión global a derecha* del anillo R, $\mathrm{rgldim}(R)$, se define de forma análoga. Finalmente, si R es noetheriano (es decir, noetheriano a izquierda y derecha), las dimensiones globales a izquierda y derecha de R coinciden (Teorema de Auslander). En el caso en que sean finitas, este número común será denotado por $\mathrm{gldim}(R)$ y diremos que R tiene *dimensión global finita.*

Notar también que cuando R es noetheriano y tiene dimensión inyectiva izquierda y derecha finitas, entonces éstas coinciden ([36, 5. Lemma A]). En dicho caso, este número común será representado por $\mathrm{idim}(R)$ y diremos que R tiene *dimensión inyectiva finita.*

Las dimensiones global e inyectiva verifican siempre, de forma clara, la relación $\mathrm{idim}(R) \leq \mathrm{gldim}(R)$. Tenemos además el siguiente resultado, cuya demostración podemos encontrar por ejemplo en [35, 2.1]:

(1.1.1) Proposición. *Sea R un anillo noetheriano de dimensión global finita n. Entonces* $\mathrm{idim}(R) = n$.

1.2. Filtraciones y graduaciones.

Nos referimos a principalmente a [28] para las nociones sobre filtraciones y graduaciones. Ver también [26] y [30].

Un álgebra R sobre un cuerpo K es una *K–álgebra filtrada* si existe una familia $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ de K–subespacios vectoriales de R tal que: (i) $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$; (ii) $F_iF_j \subseteq F_{i+j}$, para todos i,j; (iii) $\cup_{i\in\mathbb{N}}F_i = R$, y (iv) $1 \in F_0$. La familia $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ es llamada una *filtración* de R.

Una K–álgebra R es una *K–álgebra graduada* si existe una familia $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$ de K–subespacios vectoriales de R tal que: (i) $T_iT_j \subseteq T_{i+j}$, para todos i,j, y (ii) $R = \oplus_{i\in\mathbb{N}} T_i$. La familia $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$ es llamada una *graduación* de R, y cada elemento no nulo de T_n es llamado un elemento *homogéneo* de grado n.

Cada K–álgebra graduada $R = \oplus_{i\in\mathbb{N}} T_i$ posee una filtración natural $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $F_n = T_0 \oplus \cdots \oplus T_n$. Por otra parte, a partir de una K–álgebra filtrada R, con filtración $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$, podemos construir su *$K$–álgebra graduada asociada, grR*. Para ello tomamos $T_0 = F_0, T_i = F_i/F_{i-1}$ $(i = 1, 2, ..)$ y $grR = \oplus T_i$. Definimos el producto de elementos homogéneos por

$$(a_n + F_{n-1})(a_m + F_{m-1}) = a_na_m + F_{m+n-1}, \quad a_i \in F_i \backslash F_{i-1},\ i = n, m.$$

Este producto está bien definido y dota a *grR* de estructura de K–álgebra. En particular, si R es una K–álgebra graduada y consideramos en ella la filtración natural antes comentada, se tiene entonces que $grR \cong R$.

Citemos algunas relaciones entre R y *grR* (ver, por ejemplo, [28]):

(1.2.1) Proposición. *Sea R una K–álgebra filtrada y grR su álgebra graduada asociada. Entonces: Si grR es un dominio (resp. prima; resp. noetheriana a izquierda; resp. noetheriana a derecha) entonces R es un dominio (resp. prima; resp. noetheriana a izquierda; resp. noetheriana a derecha).*

Análogamente, dada R una K–álgebra filtrada cuya filtración es $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$, decimos que un R–módulo izquierda M es un *R–módulo filtrado* si existe una familia $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ de K–subespacios vectoriales de M tal que: (i) $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$; (ii) $F_iM_j \subseteq M_{i+j}$, para todos i,j, y (iii) $\cup_{i\in\mathbb{N}} M_i = M$. La familia $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ es llamada una *filtración* de M.

Dada R una K–álgebra graduada con graduación $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$, decimos que un R–módulo izquierda M es un *R–módulo graduado* si existe una familia $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ de $K-$subespacios vectoriales de M tal que: (i) $T_iM_j \subseteq M_{i+j}$, para todos i,j, y (ii) $M = \oplus_{i\in\mathbb{N}}M_i$. La familia $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ es llamada una *graduación* de M.

De forma similar a como se hizo para álgebras, si R es una K–álgebra filtrada, con filtración $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$, y M es un R–módulo izquierda filtrado, con filtración $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$, podemos asociar a M el *grR–módulo izquierda graduado*

$$grM = \oplus_n(M_n/M_{n-1})$$

donde la acción por la izquierda de grR sobre grM viene dada, sobre los elementos homogéneos, por

$$(a_n + F_{n-1})(x_m + M_{m-1}) = a_nx_m + M_{m+n-1},$$

siendo $a_n \in F_n\backslash F_{n-1}$, $x_m \in M_m\backslash M_{m-1}$.

Hemos hecho todas las definiciones a izquierda; de forma similar podemos hacerlas a derecha.

1.3. La dimensión de Gelfand-Kirillov.

Sea R una K–álgebra filtrada con una filtración $\{R_n\}$ y M un R–módulo izquierda con una filtración $\{M_n\}$. De acuerdo a [28], decimos que la filtración de R es *estándar* si $R_1^n = R_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y es llamada *finito-dimensional* si $R_0 = K$ y $\dim_K(R_n) < \infty$, para cada n. La filtración del R–módulo M es *estándar* si $M_n = R_nM_0$, para cada n, y es *finito-dimensional* si $\dim_K(M_n) < \infty$, para cada n.

Decimos que una K–álgebra R es una *K–álgebra afín* si es generada como K–álgebra por un conjunto finito de elementos o, equivalentemente, por un K–subespacio finito-dimensional V. Entonces V es llamado un *subespacio generador* de R, y R tiene una filtración finito-dimensional estándar $\{R_n\}$ con $R_0 = V^0 = K$ y $R_n = \sum_{i=0}^{n} V^i$. Si M es un R–módulo izquierda finitamente generado, podemos tomar un subespacio finito-dimensional M_0 tal que $RM_0 = M$ (por ejemplo, si $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es un sistema de generadores de M sobre R, podemos tomar M_0 el K–subespacio vectorial de M generado por $x_1, \ldots, x_m$). Éste es llamado un *subespacio generador* de M, y M tiene una filtración finito-dimensional estándar $\{M_n\}$ con $M_n = R_n M_0$. Además, a partir de esta filtración, el módulo graduado asociado, *grM*, es un *grR*– módulo finitamente generado.

Dada cualquier función $f : \mathbb{N} \longrightarrow [1, +\infty)$, definimos

$$\gamma(f) := \inf\{\nu \in \mathbb{R} : f(n) \leq n^{\nu} \text{ para } n >> 0\}.$$

Si existe algún $\nu \in \mathbb{R}$ tal que $f(n) \leq n^{\nu}$ para $n >> 0$, decimos que f tiene *crecimiento polinomialmente acotado* (o *crecimiento polinomial*, para acortar), y en ese caso $\gamma(f) < \infty$. En caso de que f no tenga crecimiento polinomialmente acotado, entonces $\gamma(f) = \infty$.

Dados R una K–álgebra afín y M un R–módulo izquierda finitamente generado, tomamos V un subespacio generador de R, y M_0 un subespacio generador de M, con $\{R_n\}$ y $\{M_n\}$ las filtraciones finito–dimensionales estándares antes descritas. Tomando $f(n) = \dim_K(R_n)$ y $g(n) = \dim_K(M_n)$, podemos comprobar que $\gamma(f)$ y $\gamma(g)$ son independientes de las elecciones de V y M_0. Definimos entonces la *dimensión de Gelfand-Kirillov* de R (resp. de M) y la denotamos por $\mathrm{GKdim}(R)$ (resp. $\mathrm{GKdim}(M)$) como $\mathrm{GKdim}(R) := \gamma(\dim_K(R_n))$ (resp. $\mathrm{GKdim}(M) := \gamma(\dim_K(M_n))$), para cualquier elección de los subespacios generadores.

Destacamos el siguiente resultado de [28, 8,1.13;1.14]:

(1.3.1) Lema. *Sea R una K–álgebra afín y ${}_RM$ un R–módulo iz-*

quierda finitamente generado. Entonces:

(1) $\mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{GKdim}({}_RR) = \mathrm{GKdim}(R_R)$.

(2) $\mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{GKdim}(grR)$.

(3) $\mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{GKdim}(grM)$.

(4) Si R' es una K–subálgebra afín de R entonces $\mathrm{GKdim}(R') \leq \mathrm{GKdim}(R)$, *y si M' es un R'–submódulo finitamente generado de M, entonces* $\mathrm{GKdim}(M') \leq \mathrm{GKdim}(M)$.

En general, si S es una K–álgebra no necesariamente afín y N un S–módulo izquierda, definimos las *dimensiones de Gelfand-Kirillov* de S y de N como

$$\begin{aligned}\mathrm{GKdim}(S) &= \sup\{\, \mathrm{GKdim}(R) : R \text{ es una } K-\text{subálgebra afín de } S\},\\ \mathrm{GKdim}(N) &= \sup\{\, \mathrm{GKdim}({}_RM) : R \text{ una } K-\text{subálgebra afín de } S\\ &\qquad \text{y } M \text{ un } R-\text{submódulo izq. fin. gen. de } N\}.\end{aligned}$$

Recordemos que un R–módulo izquierda M es *localmente finito* si cada submódulo suyo finitamente generado es K–finito dimensional. El siguiente resultado de [28] relaciona los módulos localmente finitos y la dimensión de Gelfand-Kirillov:

(1.3.2) Proposición. *Sea R una K–álgebra afín y M un R–módulo izquierda. Entonces* $\mathrm{GKdim}(M) = 0$ *si, y sólo si, M es localmente finito.*

Todas las definiciones dadas a izquierda pueden también hacerse a derecha.

1.4. Condiciones de regularidad.

Sea R un anillo y M un R–módulo (izquierda o derecha). Definimos el *grado* de M, $j_R(M)$, como el ínfimo de los enteros no negativos i para los que $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) \neq 0$

$$j_R(M) := \inf\{i : \mathrm{Ext}^i_R(M,R) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Si no hay lugar a confusión, escribiremos $j(M)$ en lugar de $j_R(M)$. Observamos que $j(0) = +\infty$. Cuando R es un anillo noetheriano, con $\mu = \mathrm{idim}(R) < \infty$, entonces $j(M) \leq \mu$, para todo R–módulo no nulo finitamente generado M. Ver [24, Remark 2.2(1)].

Definamos ya la primera condición de regularidad. Sea R un anillo noetheriano. Decimos que R verifica la *condición de Auslander a izquierda* (resp. *a derecha*) si para todo R–módulo izquierda (resp. derecha) finitamente generado M, y todo R–submódulo derecha (resp. izquierda) N de $\mathrm{Ext}^n_R(M,R)$ se verifica $j(N) \geq n$, para cualquier entero no negativo n. Decimos que R satisface la *condición de Auslander* si verifica las condiciones de Auslander a izquierda y derecha.

Decimos entonces que R es *Auslander-Gorenstein* (resp. Auslander-regular) si verifica la condición de Auslander y tiene dimensión inyectiva finita (resp. dimensión global finita), ver [7]. Obviamente, si R es un anillo Auslander-regular entonces también es Auslander-Gorenstein.

La otra condición de regularidad mencionada en la Introducción es la condición Cohen-Macaulay. Definámosla. Dada R una K–álgebra noetheriana, decimos que R es *Cohen-Macaulay*, ver [24], cuando $\mathrm{GKdim}(R) \in \mathbb{N}$ y $j(M) + \mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{GKdim}(R)$, para todo R–módulo (izquierda o derecha) M no nulo finitamente generado.

Observamos que si R es Cohen-Macaulay entonces $j(M) < \infty$ y $\mathrm{GKdim}(M) \in \mathbb{N}$ para todo R–módulo no nulo finitamente generado M.

Decimos que un R–módulo M es *finito* (o *de dimensión finita*) si M es un K–espacio vectorial finito-dimensional. El siguiente resultado se sigue de [13] e indica que si R es un álgebra noetheriana sobre un cuerpo K de característica cero, tal que R satisface las condiciones Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, la igualdad de las dimensiones inyectiva y de Gelfand-Kirillov de R nos va a caracterizar la existencia de R–módulos finitos no nulos:

(1.4.1) Teorema. *Sea R una K–álgebra noetheriana Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, con $\mathrm{idim}(R) = \mu$ y $\mathrm{GKdim}(R) = \omega$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mu = \omega$ *;*

(b) Existe un R–módulo izquierda (derecha) finito no nulo.

Además, en estas condiciones, un R–módulo izquierda (resp. derecha) finitamente generado, no nulo, M, es finito si, y sólo si, $j(M) = \omega$.

En todo lo que sigue K será un cuerpo de característica cero y R una K–álgebra asociativa, unitaria, no necesariamente conmutativa. Asumimos además que R es noetheriana. Denotamos por $\dim_K$ la dimensión de un K–espacio vectorial. Denotamos por R–***Mod*** (respectivamente ***Mod***–R) la categoría de todos los R–módulos izquierda (resp. derecha) y por R–***mod*** (resp. ***mod***–R) la subcategoría plena de todos los R–módulos izquierda (resp. derecha) finitamente generados.

Capítulo 2

La teoría de torsión σ_{cof}.

Como hemos señalado en la Introducción, la familia de los ideales biláteros de R de codimensión finita juegan un papel relevante en el estudio de la dualidad de Bernstein. Nosotros vamos a trabajar con ellos. Concretamente, vamos a comenzar estudiando los ideales unitáteros de R de codimensión finita y vamos a observar que constituyen un filtro de Gabriel. Así pues el empleo de teorías de torsión parece un marco adecuado en el que situarnos.

2.1. Teorías de torsión.

Comenzamos recordando las principales definiciones y resultados relativos a teorías de torsión. Nuestras referencias van a ser fundamentalmente [8] y [34].

Una *teoría de torsión* en R–***Mod*** es un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de clases no vacías de objetos de R–***Mod*** tales que

$$\mathcal{T} = \{M \in R\text{–}\boldsymbol{Mod} : \mathrm{Hom}_R(M,N) = 0 \text{ para todo } N \in \mathcal{F}\},$$
$$\mathcal{F} = \{N \in R\text{–}\boldsymbol{Mod} : \mathrm{Hom}_R(M,N) = 0 \text{ para todo } M \in \mathcal{T}\}.$$

La clase $\mathcal{T}$ es llamada la *clase de torsión* de dicha teoría de torsión y sus objetos los *módulos de torsión*, mientras que $\mathcal{F}$ es la *clase libre de torsión* de la teoría de torsión y sus objetos los *módulos libres de torsión*.

Tenemos la siguiente caracterización de las clases de torsión y libre de torsión:

(2.1.1) Proposición. *[34, VI,2.1;2.2] Se verifica:*

*(1) Una clase $\mathcal{T}$ no vacía en R–**Mod** es la clase de torsión para alguna teoría de torsión si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es cerrada para cocientes, sumas directas y extensiones.*

*(2) Una clase $\mathcal{F}$ no vacía en R–**Mod** es la clase libre de torsión para alguna teoría de torsión si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es cerrada para submódulos, productos directos y extensiones.*

Una teoría de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ se dice que es *hereditaria* cuando la clase de torsión $\mathcal{T}$ es cerrada para submódulos. Tenemos la siguiente caracterización:

(2.1.2) Proposición. *[34, VI,3.2][8, I,2.11] Para una teoría de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ en R–**Mod** son equivalentes:*

(a) $\mathcal{T}$ es cerrada para submódulos;

(b) $\mathcal{F}$ es cerrada para extensiones esenciales (o, equivalentemente, para envolventes inyectivas).

Vamos a observar que trabajar con teorías de torsión hereditarias en R–***Mod*** va a ser equivalente a hacerlo con lo que vamos a llamar funtores núcleo idempotentes en R–***Mod***. Demos en primer lugar las correspondientes definiciones:

Un *funtor núcleo idempotente* en R–***Mod*** es un subfuntor aditivo

$$\sigma : R\text{–}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow R\text{–}\boldsymbol{Mod}$$

del funtor identidad en R–***Mod*** (es decir, $\sigma M \subseteq M$ y $f(\sigma M) \subseteq \sigma M'$ para cualesquiera M, $M' \in R$–***Mod*** y $f : M \longrightarrow M'$ homomorfismo de R–módulos izquierda), que es exacto a izquierda y tal que para cada $M \in R$–***Mod*** se verifica que $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$.

Si σ es un funtor núcleo idempotente en R–***Mod*** y llamamos

$$\mathcal{T}_\sigma = \{M \in R\text{–}\boldsymbol{Mod} : \sigma(M) = M\},$$
$$\mathcal{F}_\sigma = \{M \in R\text{–}\boldsymbol{Mod} : \sigma(M) = 0\},$$

entonces $(\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ es una teoría de torsión hereditaria en R–***Mod***, ver [8, I,2.9;2.12].

Recíprocamente, si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión hereditaria en R–***Mod***, para cada $M \in R$–***Mod*** definimos

$$\sigma(M) = \sum\{N \leq M : N \in \mathcal{T}\}$$

la suma de todos los submódulos de M que son torsión. Se obtiene entonces que σ, así definido, es un funtor núcleo idempotente en R–***Mod***, ver [8, I,2.8;2.12].

(2.1.3) Teorema. *[8, I,2.12][34, VI,3.1] La anterior correspondencia es una biyección entre teorías de torsión hereditarias en R–**Mod** y funtores núcleo idempotentes en R–**Mod**.*

Veamos una tercera forma equivalente de trabajar con teorías de torsión hereditarias. De acuerdo a [34, VI,3.6], una teoría de torsión hereditaria en R–***Mod*** está unívocamente determinada por la familia de los ideales izquierda $I \leq_R R$ tales que R/I sea un módulo de torsión. Veamos que esta familia es lo que vamos a denominar un filtro de Gabriel. En primer lugar, demos las correspondientes definiciones:

Un conjunto no vacío $\mathcal{L}$ de ideales izquierda de R se dice que es un *filtro de Gabriel* de R si verifica las dos siguientes condiciones:

FG1 Si $I \in \mathcal{L}$ y $a \in R$, entonces $(I : a) \in \mathcal{L}$, donde $(I : a) := \{r \in R : ra \in I\}$.

FG2 Si $I \leq_R R$ y existe algún $J \in \mathcal{L}$ tal que $(I : a) \in \mathcal{L}$ para todo $a \in J$, entonces $I \in \mathcal{L}$.

(2.1.4) Proposición. *[8, I,2.16;2.18][34, VI,5.2;5.3] Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel de R entonces se verifican las siguientes propiedades:*

F1 *Si $I \in \mathcal{L}$ y J es un ideal izquierda de R tal que $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathcal{L}$.*

F2 *Si $I, J \in \mathcal{L}$, entonces $I \cap J \in \mathcal{L}$.*

F3 *Si $I, J \in \mathcal{L}$, entonces $IJ \in \mathcal{L}$.*

Las dos primeras propiedades en la proposición anterior justifican el porqué de llamar *filtro* a una tal familia, mientras que la tercera nos indica que los filtros de Gabriel son multiplicativamente cerrados.

Dado un filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ en R y un R–módulo $M \in R$–***Mod***, definimos

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{L}}(M) &:= \{m \in M : Im = 0 \text{ para algún } I \in \mathcal{L}\}\\ &= \{m \in M : \mathrm{Ann}_R^l(m) \in \mathcal{L}\}\end{aligned}$$

donde $\mathrm{Ann}_R^l(m) = \{r \in R : rm = 0\}$ es el ideal izquierda anulador de m. Se tiene entonces que $\sigma_{\mathcal{L}}$ es un funtor núcleo idempotente en R–***Mod***, ver [8, I,2.21].

Recíprocamente, si σ es un funtor núcleo idempotente en R–***Mod***, y definimos

$$\mathcal{L}(\sigma) := \{I \leq_R R : R/I \in \mathcal{T}_\sigma\}$$

se verifica que $\mathcal{L}(\sigma)$ es un filtro de Gabriel sobre R, ver [8, I,2.20].

(2.1.5) Teorema. *[8, I,2.22][34, VI,5.1] La anterior correspondencia establece una biyección entre filtros de Gabriel de R y funtores núcleo idempotentes en R–**Mod**.*

En consecuencia, juntando los teoremas (2.1.3) y (2.1.5) tenemos una biyección entre: (i) filtros de Gabriel sobre R, (ii) teorías de torsión hereditarias en R–***Mod*** y (iii) funtores núcleo idempotentes en R–***Mod***.

2.2. La teoría de torsión σ_{cof}.

Recordamos que un R–módulo M se dice que es *finito* (o de dimensión finita) si M es un K–espacio vectorial finito-dimensional. Un submódulo $N \leq M$ de un R–módulo izquierda M se dice que es *cofinito* (o *de codimensión finita*) si el módulo cociente M/N es finito. Definamos

$$\mathcal{L} := \{I \leq_R R : R/I \text{ es finito}\}$$

es decir, $\mathcal{L}$ es el conjunto de los ideales izquierda I de R cofinitos. Veamos que $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel de R.

(2.2.1) Proposición. *$\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel en R–**Mod**.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que el conjunto no vacío $\mathcal{L}$, de ideales izquierda de R, satisface las condiciones FG1 y FG2 que definen un filtro de Gabriel:

(FG1) Sea $I \in \mathcal{L}$ y $a \in R$. Hemos de comprobar que $(I : a) \in \mathcal{L}$, es decir, que $(I : a)$ es cofinito. Dado que $(I : a) = \mathrm{Ann}^l_R(a + I)$, entonces $R/(I : a) \cong R(a + I) \subseteq R/I$, de donde se tiene que $(I : a)$ es cofinito al serlo I.

(FG2) Sean I y J ideales izquierda de R tales que $J \in \mathcal{L}$ y $(I : a) \in \mathcal{L}$ para cada $a \in J$, y veamos que $I \in \mathcal{L}$.

Consideramos la sucesión exacta de R–módulos izquierda

$$0 \longrightarrow (I + J)/I \longrightarrow R/I \longrightarrow R/(I + J) \longrightarrow 0.$$

Para probar que R/I es finito basta verlo para $(I + J)/I$ y $R/(I + J)$.

Dado que $J \subseteq I + J$ y R/J es finito, se tiene que $R/(I + J)$ es finito.

Por otra parte, dado que R es noetheriano, el ideal J tendrá un conjunto finito de generadores $a_1, ..., a_n$ y, en consecuencia, el cociente $(I + J)/I = R(a_1 + I) + ... + R(a_n + I)$. Dado que $(I : a_i) \in \mathcal{L}$ para todo $i = 1, .., n$, por hipótesis, y $R(a_i + I) \cong R/(I : a_i)$ para cada i, se obtiene que $(I + J)/I$ es finito. $\square$

De acuerdo a la sección anterior, asociado a $\mathcal{L}$ existe un único funtor núcleo idempotente en R–***Mod***, que vamos a denominar σ_{cof}, y que vendrá dado por:

$$\sigma_{cof}(M) = \{m \in M : \mathrm{Ann}^l_R(m) \in \mathcal{L}\},$$

para cada $M \in R$–***Mod***. Puesto que $R/\mathrm{Ann}^l_R(m) \cong Rm$, la anterior expresión es equivalente a

$$\sigma_{cof}(M) = \{m \in M : Rm \text{ es finito}\}$$

y el filtro de Gabriel asociado a σ_{cof},

$$\mathcal{L}(\sigma_{cof}) = \{I \leq_R R : R/I = \sigma_{cof}(R/I)\},$$

coincide con $\mathcal{L}$, con lo cual en lo que sigue escribiremos $\mathcal{L}(\sigma_{cof})$ en lugar de $\mathcal{L}$.

Por su parte, la clase de torsión $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ biunívocamente asociada a σ_{cof} viene dada por

$$\mathcal{T}_{\sigma_{cof}} = \{M \in R\text{–}\boldsymbol{Mod} : Rm \text{ es finito para todo } m \in M\}$$

y va a coincidir con la clase de los R–módulos izquierda localmente finitos:

(2.2.2) Proposición. *La clase $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ de los R–módulos izquierda σ_{cof}–torsión es la clase de los R–módulos izquierda localmente finitos.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ y N un submódulo de M, no nulo y finitamente generado. Si $N = Rn_1 + ... + Rn_t$, dado que cada Rn_i es finito, se tiene que N también lo es y, en consecuencia, M es localmente finito. El recíproco es inmediato. □

El funtor núcleo idempotente σ_{cof} es además simétrico. Recordemos la definición de esta propiedad antes de probar nuestra afirmación:

Un funtor núcleo idempotente σ en $R\text{–}\boldsymbol{Mod}$ es *simétrico* si cada ideal izquierda de R en $\mathcal{L}(\sigma)$ contiene un ideal bilátero de R que también pertenece a $\mathcal{L}(\sigma)$ (en otras palabras, el conjunto

$$\mathcal{L}^2(\sigma) := \{I \leq R : \ I \in \mathcal{L}(\sigma), \ I \text{ ideal bilátero}\},$$

de ideales biláteros de R en $\mathcal{L}(\sigma)$, es cofinal en $\mathcal{L}(\sigma)$).

(2.2.3) Proposición. *El funtor núcleo idempotente σ_{cof} es simétrico.*

DEMOSTRACIÓN. Si $I \in \mathcal{L}(\sigma_{cof})$, entonces $(I : R) = \mathrm{Ann}^l_R(R/I)$ es el mayor ideal bilátero de R contenido en I. Veamos que $(I : R) \in \mathcal{L}(\sigma_{cof})$.

Consideramos

$$\lambda : R \longrightarrow \mathrm{End}_K(R/I)$$

el homomorfismo de anillos tal que para cada $r \in R$, $\bar{x} \in R/I$

$$\lambda(r) : \bar{x} \longrightarrow r\bar{x}.$$

Dado que $\mathrm{Ker}(\lambda) = (I : R)$, se tiene que $R/(I : R) \subseteq \mathrm{End}_K(R/I)$ y, puesto que $\mathrm{End}_K(R/I)$ es finito–dimensional por serlo R/I, se sigue que $R/(I : R)$ también lo es. Por tanto $(I : R) \in \mathcal{L}(\sigma_{cof})$ y σ_{cof} es simétrico. □

Capítulo 3

Dualidad local.

La clase de los R–módulos izquierda finitos es justamente la clase de los R–módulos izquierda localmente finitos (es decir, σ_{cof}–torsión) y finitamente generados. Si denotamos por $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma_{cof}}$ (respectivamente $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$) a la subcategoría plena de $R-$***mod*** (resp. ***mod***$-R$) de los R–módulos izquierda (resp. derecha) finitos tenemos, de acuerdo a la Introducción, que si nuestra K–álgebra noetheriana R es Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay y con igualdad de las dimensiones inyectiva y de Gelfand-Kirillov de R, entonces $\mathrm{Ext}^{\mu}_{R}(-, R)$ es un funtor aditivo contravariante exacto entre $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma_{cof}}$ y $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$ de modo que establece una dualidad entre ambas categorías.

A lo largo de este capítulo σ va a denotar un funtor núcleo idempotente simétrico en $R-$***Mod***, $\mathcal{T}_\sigma$ la clase de R–módulos izquierda σ–torsión (es decir, la clase de torsión hereditaria asociada a σ), y $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma}$ la subcategoría (abeliana) plena de $R-$***Mod*** de todos los R–módulos izquierda σ–torsión finitamente generados. Como ya reseñamos anteriormente, $\mathcal{L}(\sigma) = \{I \leq_R R : R/I \in \mathcal{T}_\sigma\}$ y $\mathcal{L}^2(\sigma) = \{I \leq_R R_R : I \in \mathcal{L}(\sigma)\}$. Finalmente, $\mathcal{A}b$ denotará la categoría de grupos abelianos.

Comencemos estudiando entonces el comportamiento general de los funtores aditivos contravariantes exactos desde la categoría $\mathcal{T}_\sigma^{fg}$ a la categoría $\mathcal{A}b$. Los siguientes resultados han aparecido en [17].

3.1. Funtores contravariantes exactos.

Sea $T : \mathcal{T}_\sigma^{fg} \longrightarrow \mathcal{A}b$ un funtor aditivo contravariante.

(3.1.1) Lema. *Para cualquier R–bimódulo M, tal que ${}_RM \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$, la estructura de R–módulo derecha de M induce una estructura de R–módulo izquierda sobre $T(M)$.*

Demostración. Dados $r \in R$ y $x \in T(M)$ veamos cómo definimos rx.

Consideramos

$$\rho_{M,r} : M \longrightarrow M$$

definido de la forma $\rho_{M,r}(m) := mr$, para cada $m \in M$. Por ser M un R–bimódulo, tenemos que $\rho_{M,r}$ es un morfismo en R–***Mod*** y, por tanto, en la subcategoría plena $\mathcal{T}_\sigma^{fg}$, con lo que podemos aplicarle el funtor T. Obtenemos en consecuencia un morfismo en $\mathcal{A}b$

$$T(\rho_{M,r}) : T(M) \longrightarrow T(M).$$

Definimos entonces

$$rx := [T(\rho_{M,r})](x).$$

Con esta definición $rx \in T(M)$. Comprobemos que dicha acción dota al grupo abeliano $T(M)$ de una estructura de R–módulo izquierda:

(1) $(r_1+r_2)x = [T(\rho_{M,r_1+r_2})](x) = [T(\rho_{M,r_1}+\rho_{M,r_2})](x) = [T(\rho_{M,r_1}) + T(\rho_{M,r_2})](x) = r_1x + r_2x$,

(2) $r(x_1+x_2) = [T(\rho_{M,r})](x_1+x_2) = [T(\rho_{M,r})](x_1) + [T(\rho_{M,r})](x_2) = rx_1 + rx_2$,

(3) $r_1(r_2x) = [T(\rho_{M,r_1})](r_2x) = [T(\rho_{M,r_1})]([T(\rho_{M,r_2})](x)) = [T(\rho_{M,r_1}) \circ T(\rho_{M,r_2})](x) = [T(\rho_{M,r_2}\circ\rho_{M,r_1})](x) = [T(\rho_{M,r_1r_2})](x) = (r_1r_2)x$,

(4) $1x = [T(\rho_{M,1})](x) = [T(1_M)](x) = [1_{T(M)}](x) = x$,

donde $r, r_1, r_2 \in R$ y $x, x_1, x_2 \in T(M)$.

En consecuencia, $T(M) \in R$–***Mod***. □

(3.1.2) Observación. Consideremos $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ y M un R–módulo tal que ${}_RM \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$ e $IM = 0$. M es entonces un R/I–módulo izquierda y podemos construir el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} R/I \arrow[rr, "\rho_{R/I,r}"] \arrow[dr, "\nu_{I,M,rm}"'] & & R/I \arrow[dl, "\nu_{I,M,m}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

donde $r \in R$ y, para cada $m \in M$, $\nu_{I,M,m} : R/I \longrightarrow M$ es el morfismo en R–***Mod*** definido por $\nu_{I,M,m}(1+I) = m$. Dado que el anterior es un diagrama en $\mathcal{T}_\sigma^{fg}$ podemos aplicarle el funtor T, obteniendo el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T(R/I) & & T(R/I) \arrow[ll, "T(\rho_{R/I,r})"'] \\ & T(M) \arrow[ul, "T(\nu_{I,M,rm})"] \arrow[ur, "T(\nu_{I,M,m})"'] & \end{tikzcd}$$

La estructura de R–bimódulo de R/I induce, por el lema anterior, una estructura de R–módulo izquierda en $T(R/I)$. Se tiene además una relación de compatibilidad (C_I) entre las estructuras envueltas en la forma siguiente

$$\begin{aligned} r([T(\nu_{I,M,m})](x)) &= [T(\rho_{R/I,r})]([T(\nu_{I,M,m})](x)) \\ &= [T(\rho_{R/I,r}) \circ T(\nu_{I,M,m})](x) \\ &= [T(\nu_{I,M,rm})](x) \end{aligned}$$

para cada $x \in T(M)$.

(3.1.3) Lema. *Sea M un R–bimódulo, tal que ${}_RM \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$ y $MI = 0$ para algún ideal bilátero I de R. Entonces $IT(M) = 0$. En particular, si $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$, entonces $IT(R/I) = 0$.*

Demostración. De la definición tenemos que si $r \in R$ y $x \in T(M)$ entonces $rx = [T(\rho_{M,r})](x)$.

Si $r \in I$, entonces $\rho_{M,r}(m) = mr \in MI = 0$ para todo $m \in M$, con lo cual $\rho_{M,r} = 0$ y, en consecuencia, $rx = 0$. □

Observamos que $\mathcal{L}(\sigma)$ es un conjunto de índices preordenado con la relación

$$I \leq J \Leftrightarrow I \supseteq J$$

donde $I, J \in \mathcal{L}(\sigma)$. Además es dirigido, pues $I \cap J \in \mathcal{L}(\sigma)$ para cada par $I, J \in \mathcal{L}(\sigma)$ por ser $\mathcal{L}(\sigma)$ un filtro. Obtenemos entonces un sistema directo en $\mathcal{A}b$ con conjunto de índices $\mathcal{L}(\sigma)$

$$F : \mathcal{L}(\sigma) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

dado por $F(I) = T(R/I)$. Dados $I \supseteq J$ en $\mathcal{L}(\sigma)$ denotemos por j_{JI} el morfismo en $\mathcal{A}b$ de $T(R/I)$ en $T(R/J)$, imagen por T del correspondiente epimorfismo canónico $p_{JI} : R/J \longrightarrow R/I$.

Con todo ello podemos definir ya el límite directo de este sistema, $\varinjlim_{I \in \mathcal{L}(\sigma)} T(R/I)$. Además, el conjunto de los ideales biláteros en $\mathcal{L}(\sigma)$, $\mathcal{L}^2(\sigma)$, es cofinal en $\mathcal{L}(\sigma)$ por ser σ simétrico, con lo cual $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}(\sigma)} T(R/I) = \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} T(R/I)$. Denotemos

$$E = \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} T(R/I)$$

y $j_I : T(R/I) \longrightarrow E$, para cualquier $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$, el correspondiente morfismo en $\mathcal{A}b$.

Si $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$, entonces $T(R/I)$ tiene una estructura de R–módulo izquierda por el lema (3.1.1). Veamos que esta estructura pasa a través del límite directo a E. Para ello bastará probar que el morfismo en $\mathcal{A}b$, $j_{JI} : T(R/I) \longrightarrow T(R/J)$, para $I \supseteq J$ en $\mathcal{L}^2(\sigma)$, es además un morfismo en R–***Mod***.

(3.1.4) Lema. $j_{JI} : T(R/I) \longrightarrow T(R/J)$ *es un homomorfismo de* R*–módulos izquierda para cada par* $I, J \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ *con* $I \supseteq J$.

Demostración. Podemos observar que el epimorfismo canónico $p_{JI} : R/J \longrightarrow R/I$ coincide con el morfismo $\nu_{J,R/I,1+I} : R/J \longrightarrow R/I$ que definíamos en la observación (3.1.2).

Dados $r \in R$ y $x \in T(R/I)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} j_{JI}(rx) &= [T(\nu_{J,R/I,1+I})](rx) \\ &= [T(\nu_{J,R/I,1+I})]([T(\rho_{R/I,r})](x)) \\ &= [T(\rho_{R/I,r} \circ \nu_{J,R/I,1+I})](x) \\ &= [T(\nu_{J,R/I,r+I})](x) \\ &= r([T(\nu_{J,R/I,1+I})](x)) \end{aligned}$$

donde esta última igualdad viene dada a partir de la relación de compatibilidad (C_J) obtenida en la observación (3.1.2). Por tanto $j_{JI}(rx) = rj_{JI}(x)$. $\square$

Como consecuencia E es un R–módulo izquierda y $j_I : T(R/I) \longrightarrow E$ un homomorfismo de R–módulos izquierda para cada $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$. Podemos considerar entonces el funtor aditivo contravariante

$$\mathrm{Hom}_R(-, E) : \mathcal{T}_\sigma^{fg} \longrightarrow \mathcal{A}b.$$

Buscamos definir una transformación natural ϕ desde T hasta $\mathrm{Hom}_R(-, E)$.

Sea $M \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$. Para cada $m \in M$ existe algún $I_m \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $I_m m = 0$. Por tanto, si $M = Rm_1 + ... + Rm_t$, tomando $I = I_{m_1} \cap ... \cap I_{m_t}$ se tiene que $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ y, además, $IM = 0$.

En consecuencia, para cada $M \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$, existe algún $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $IM = 0$. Para cada $x \in T(M)$ tenemos entonces, por la observación (3.1.2), $[T(\nu_{I,M,m})](x) \in T(R/I)$.

Consideremos

$$\phi : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, E)$$

definida, para cada $M \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$, por $\phi_M : T(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, E)$ donde, para cada $x \in T(M)$, $\phi_M(x)$ viene dada por

$$[\phi_M(x)](m) = [j_I \circ T(\nu_{I,M,m})](x)$$

para algún $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $IM = 0$.

(3.1.5) Lema. *Con la notación anterior, ϕ es una transformación natural desde T hasta* $\mathrm{Hom}_R(-, E)$.

Demostración. Lo primero que hemos de probar es que la expresión que define ϕ es independiente del ideal I de $\mathcal{L}^2(\sigma)$ que verifique $IM = 0$. En efecto, si también $J \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ es tal que $JM = 0$ entonces $(I \cap J)M = 0$, con lo que podemos suponer $J \subseteq I$. Tenemos entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T(R/I) \arrow[rr, "j_{JI}"] \arrow[dr, "j_I"'] & & T(R/J) \arrow[dl, "j_J"] \\ & E & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Por otro lado, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathcal{T}_\sigma^{fg}$

$$\begin{tikzcd} R/J \arrow[rr, "p_{JI}"] \arrow[dr, "\nu_{J,M,m}"'] & & R/I \arrow[dl, "\nu_{I,M,m}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

el cual, al aplicarle el funtor T, nos da

$$T(\nu_{J,M,m}) = j_{JI} \circ T(\nu_{I,M,m}). \tag{3.2}$$

Juntando (3.1) y (3.2) obtenemos que

$$j_J \circ T(\nu_{J,M,m}) = j_I \circ T(\nu_{I,M,m}).$$

Por otro lado, la relación de compatibilidad (C_I) probada en la observación (3.1.2) y el carácter R–lineal de j_I, consecuencia del lema (3.1.4), nos dan la R–linealidad para la aplicación $\phi_M(x)$ de M en E, con lo que $\phi_M(x) \in \mathrm{Hom}_R(M, E)$ para todo $x \in T(M)$. Además, si $f : N \longrightarrow M$ es un morfismo en $\mathcal{T}_\sigma^{fg}$, es fácil verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, "T(f)"'] & \mathrm{Hom}_R(M, E) \arrow[d, "f^* = \mathrm{Hom}_R(f, E)"] \\ T(N) \arrow[r, "\phi_N"'] & \mathrm{Hom}_R(N, E) \end{tikzcd}$$

es conmutativo: consideremos $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $IM = 0 = IN$. Veamos entonces que, para cada $x \in T(M)$, los homomorfismos

$[f^* \circ \phi_M](x)$ y $[\phi_N \circ T(f)](x)$ de N en E, coinciden. Sea $n \in N$:

$$\begin{aligned}
([f^* \circ \phi_M](x))(n) &= [\phi_M(x) \circ f](n) \\
&= [j_I \circ T(\nu_{I,M,f(n)})](x) \\
&= [j_I \circ T(f \circ \nu_{I,N,n})](x) \\
&= [j_I \circ T(\nu_{I,N,n}) \circ T(f)](x) \\
&= [j_I \circ T(\nu_{I,N,n})](T(f)(x)) \\
&= [\phi_N(T(f)(x))](n) \\
&= ([\phi_N \circ T(f)](x))(n).
\end{aligned}$$

□

(3.1.6) Lema. *Si M es un R–bimódulo tal que ${}_RM \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$ entonces, el homomorfismo de grupos abelianos $\phi_M : T(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, E)$ definido anteriormente, es también un homomorfismo de R–módulos izquierda.*

Demostración. Sean $x \in T(M)$, $r \in R$, $m \in M$ e $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $IM = 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
[\phi_M(rx)](m) &= [j_I \circ T(\nu_{I,M,m})](rx) \\
&= [j_I \circ T(\nu_{I,M,m})]([T(\rho_{M,r})](x)) \\
&= [j_I \circ T(\nu_{I,M,m}) \circ T(\rho_{M,r})](x) \\
&= [j_I \circ T(\rho_{M,r} \circ \nu_{I,M,m})](x) \\
&= [j_I \circ T(\nu_{I,M,mr})](x) \\
&= [\phi_M(x)](mr) \\
&= [\phi_M(x) \circ \rho_{M,r}](m) \\
&= [r\phi_M(x)](m),
\end{aligned}$$

con lo cual $\phi_M(rx) = r\phi_M(x)$. □

Consideramos el siguiente resultado de [4]:

(3.1.7) Lema. *[4, 2.2] Sea A un anillo noetheriano izquierda, G un funtor aditivo contravariante de la categoría de A–módulos izquierda, A–**Mod**, en $\mathcal{A}b$. Supongamos $G(A)$ dotado de una estructura de A–módulo izquierda tal que se satisfaga la condición (C_∞) siguiente: Para todo A–módulo izquierda M y todo $m \in M$ se tiene*

$$[G(\varepsilon_{am})](x) = a([G(\varepsilon_m)](x))$$

para cualesquiera $x \in G(M)$ y $a \in A$, y donde $\varepsilon_m : A \longrightarrow M$ es el morfismo que envía 1 en m. Entonces:

(1) Considerando $[\bar{\phi}(M)(x)](m) = [G(\varepsilon_m)](x)$ para cada A–módulo izquierda M, $m \in M$ y $x \in G(M)$, se define un morfismo funtorial:

$$\bar{\phi} : G \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, G(A)).$$

(2) Las condiciones siguientes son equivalentes:

*(a) La restricción de G a la categoría de A–módulos izquierda finitamente generados, A–**mod**, es un funtor exacto izquierda de A–**mod** en $\mathcal{A}b$.*

(b) Para cada A–módulo izquierda M finitamente generado, $\bar{\phi}(M)$ es un isomorfismo.

*(3) Si las condiciones de (2) son satisfechas, entonces el funtor $G : A$–**mod** $\longrightarrow \mathcal{A}b$ es exacto si, y sólo si, $G(A)$ es un A–módulo izquierda inyectivo.*

(3.1.8) Lema. *Con la notación del lema (3.1.5), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T es exacto izquierda;

(b) $\phi : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, E)$ es un isomorfismo natural.

Demostración. La implicación de (b) a (a) es clara. Probemos la implicación contraria.

Sea $M \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$. Hemos de ver que $\phi_M : T(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, E)$ es un isomorfismo.

Sea $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $IM = 0$.

La categoría R/I–***mod*** de los R/I–módulos izquierda finitamente generados se encuentra dentro de $\mathcal{T}_\sigma^{fg}$, con lo que podemos considerar la restricción de T a esta categoría, obteniendo así un funtor aditivo, contravariante y exacto izquierda de R/I–***mod*** en $\mathcal{A}b$, que vamos a notar por T^I. Dado que $M \in R/I$–***mod***, se tiene que $T(M) = T^I(M)$.

Puesto que R/I es noetheriano izquierda, T^I es exacto izquierda, y verifica la condición (C_I) mostrada en la observación (3.1.2), tomando $A = R/I$ en el lema (3.1.7) obtenemos un isomorfismo

$$\phi_M^I : T(M) = T^I(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R/I}(M, T(R/I))$$

dado por $[\phi_M^I(x)](m) = [T(\nu_{I,M,m})](x)$, donde $x \in T(M)$ y $m \in M$.

Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(M) = T^I(M) \arrow[r, "\phi_M^I"] & \mathrm{Hom}_{R/I}(M, T(R/I)) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_R(M, T(R/I)) \arrow[d, "(j_I)_* = \mathrm{Hom}_R(M, j_I)"'] \\ & & \mathrm{Hom}_R(M, E) \end{tikzcd}$$

podemos comprobar que su composición es ϕ_M :

$$([(j_I)_* \circ \phi_M^I](x))(m) = (j_I \circ [\phi_M^I(x)])(m) = j_I([T(\nu_{I,M,m})](x)) = [\phi_M(x)](m).$$

Por tanto

$$\phi_M(x) = j_I \circ [\phi_M^I(x)]$$

para cada $x \in T(M)$.

Puesto que T es exacto izquierda, los homomorfismos canónicos $j_{JH} : T(R/H) \longrightarrow T(R/J)$, donde $H, J \in \mathcal{L}^2(\sigma)$, $J \subseteq H$, son inyectivos. Se tiene entonces que los morfismos $j_J : T(R/J) \longrightarrow E$ son también inyectivos para todo $J \in \mathcal{L}^2(\sigma)$. En consecuencia y, como ϕ_M^I es un isomorfismo, ϕ_M es inyectivo.

Veamos que ϕ_M es sobreyectivo. Sea $g \in \mathrm{Hom}_R(M, E)$. Dado que $g(M)$ es finitamente generado y E es la unión directa de los

$$j_H(T(R/H)), \text{ con } H \in \mathcal{L}^2(\sigma),$$

existe algún $J \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $g(M) \subseteq j_J(T(R/J))$. Podemos suponer además que $J \subseteq I$, pues

$$j_J(T(R/J)) = (j_{(I\cap J)} \circ j_{I\cap J,J})(T(R/J)).$$

En consecuencia, g factoriza a través de j_J y existe un homomorfismo $h \in \mathrm{Hom}_R(M, T(R/J))$ tal que $g = j_J \circ h$. El mismo razonamiento que el efectuado para I nos da que $\phi_M^J : T(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, T(R/J))$ es un isomorfismo y, en consecuencia, existe algún $x \in T(M)$ tal que $\phi_M^J(x) = h$. Se sigue entonces que

$$g = j_J \circ h = j_J \circ [\phi_M^J(x)] = j_I \circ [\phi_M^I(x)] = \phi_M(x)$$

con lo que, efectivamente, ϕ_M es sobreyectivo. □

De la demostración anterior extraemos también el siguiente resultado:

(3.1.9) Lema. *Con la notación del lema (3.1.8), si T es exacto izquierda entonces $E = \cup_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} \mathrm{Ann}_E^r(I)$, la unión directa de los anuladores derecha de I en E, donde I recorre el conjunto de ideales biláteros de R en $\mathcal{L}(\sigma)$.*

Demostración. Dado cualquier $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$, se verifica por el lema (3.1.3) que $IT(R/I) = 0$, con lo cual $j_I(T(R/I)) \subseteq \mathrm{Ann}^r_E(I)$, el anulador derecha en E de I. En consecuencia, dado que E es la unión directa de los $j_I(T(R/I))$ $(I \in \mathcal{L}^2(\sigma))$, lo será también de los $\mathrm{Ann}^r_E(I)$. □

Queremos caracterizar cuándo T es exacto.

Sea τ un funtor núcleo idempotente en R–***Mod***. Decimos que τ tiene la *propiedad de Artin-Rees* (izquierda) si, para cualquier ideal izquierda J de R y cualquier $I \in \mathcal{L}(\tau)$, existe algún $H \in \mathcal{L}(\tau)$ tal que $H \cap J \subseteq IJ$.

Decimos que τ es *estable* si la clase de torsión $\mathcal{T}_\tau$ asociada a τ es cerrada para envolventes inyectivas. Esto es equivalente a asegurar que cualquier extensión esencial de un R–módulo izquierda τ–torsión es τ–torsión, ver [8, I,2.14].

(3.1.10) Proposición. *[8, III,2.12] Sea σ un funtor núcleo idempotente simétrico en R–**Mod**. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) σ es estable;

(b) σ tiene la propiedad Artin-Rees (izquierda).

Estamos ahora en condiciones de caracterizar cuándo T es exacto.

(3.1.11) Lema. *Sea σ un funtor núcleo idempotente simétrico y estable, y $T : \mathcal{T}_\sigma^{fg} \longrightarrow \mathcal{A}b$ un funtor aditivo contravariante exacto izquierda. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T es exacto;

(b) $E = \varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma)} T(R/I)$ es un R–módulo izquierda inyectivo.

Demostración. (b) $\Rightarrow$ (a). Esta implicación es una consecuencia directa de que $\phi : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, E)$ es un isomorfismo natural por el lema (3.1.8).

(a) $\Rightarrow$ (b). Sea J un ideal izquierda de R y $f : J \longrightarrow E$ un morfismo en R–***Mod***. Veamos que podemos extender f a R.

Como R es noetheriano, J es finitamente generado y, por tanto, $f(J)$ es un submódulo finitamente generado de E. Dado que, por el lema (3.1.9), E es la unión directa de los $\mathrm{Ann}^r_E(I)$ ($I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$), ha de existir algún $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $f(J) \subseteq \mathrm{Ann}^r_E(I)$. En particular, $If(J) = 0$.

Por la proposición anterior existe algún $H \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que $H \cap J \subseteq IJ$. Entonces $f(H \cap J) = 0$ y f factoriza a través de $J/(H \cap J)$. Si llamamos $p_1 : J \longrightarrow J/(H \cap J)$ a la correspondiente proyección canónica, existe entonces un R–homomorfismo $f_1 : J/(H \cap J) \longrightarrow E$ tal que $f = f_1 \circ p_1$.

Dado que T es exacto y $\phi : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, E)$ es un isomorfismo natural, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ a la sucesión exacta en $\mathcal{T}^{fg}_\sigma$

$$0 \longrightarrow \frac{J}{H \cap J} \xrightarrow{i_1} \frac{R}{H} \longrightarrow \frac{R}{H + J} \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta en $\mathcal{A}b$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{H+J}, E\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{H}, E\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\frac{J}{H \cap J}, E\right) \longrightarrow 0.$$

En consecuencia, existe algún R–homomorfismo $f_2 : R/H \longrightarrow E$ tal que $f_2 \circ i_1 = f_1$. Definamos

$$g : R \longrightarrow E$$

como $g := f_2 \circ p_2$, donde $p_2 : R \longrightarrow R/H$ es la correspondiente proyección canónica. Tenemos entonces que g es un homomorfismo de R–módulos izquierda de R en E y

$$g \circ i = f_2 \circ p_2 \circ i = f_2 \circ i_1 \circ p_1 = f_1 \circ p_1 = f,$$

donde $i : J \longrightarrow R$ es la inclusión de J en R. En consecuencia, g extiende a f. $\square$

Tenemos ya una caracterización de los funtores aditivos contravariantes exactos izquierda $T : \mathcal{T}_\sigma^{fg} \longrightarrow \mathcal{A}b$, en el caso general, y exactos, en el caso particular en que σ es estable. Nos encaminamos al concepto de dualidad.

Definimos σ^{opp} como el (único) funtor núcleo idempotente simétrico en ***Mod***– R tal que $\mathcal{L}^2(\sigma) = \mathcal{L}^2(\sigma^{opp})$.

Sean $T_i : \mathcal{T}_\sigma^{fg} \longrightarrow \mathcal{T}_{\sigma^{opp}}^{fg}$ y $T_d : \mathcal{T}_{\sigma^{opp}}^{fg} \longrightarrow \mathcal{T}_\sigma^{fg}$ funtores aditivos contravariantes exactos izquierda. Decimos que (T_i, T_d) es una *dualidad respecto a* σ si existen isomorfismos naturales $\alpha : T_dT_i \longrightarrow 1_{\mathcal{T}_\sigma^{fg}}$ y $\beta : T_iT_d \longrightarrow 1_{\mathcal{T}_{\sigma^{opp}}^{fg}}$.

(3.1.12) Lema. *Sea* (T_i, T_d) *una dualidad. Entonces* T_i *y* T_d *son funtores exactos.*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow X' \stackrel{f}{\longrightarrow} X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ en $\mathcal{T}_\sigma^{fg}$. Aplicando T_i obtenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow T_i(X'') \longrightarrow T_i(X) \longrightarrow T_i(X') \longrightarrow Y \longrightarrow 0$, y aplicando T_d obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_d(Y) \arrow[r] & T_dT_i(X') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{X'}"', "\cong"] & T_dT_i(X) \arrow[d, "\cong"', "\alpha_X"] \\
 & & X' \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Entonces $T_d(Y) = 0$, y tenemos que $Y \cong T_iT_d(Y) = T_i0 = 0$. $\square$

Como consecuencia, si llamamos $E_{(i)} = \varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma)} T_i(R/I)$, por el lema (3.1.8) existe un isomorfismo natural $\phi : T_i \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, E_{(i)})$. Si, además, σ es estable, entonces, por el lema (3.1.11), $E_{(i)}$ es un R–módulo izquierda inyectivo.

De forma análoga, los correspondientes resultados por la derecha, nos dan que si llamamos $E_{(d)} = \varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma^{opp})} T_d(R/I)$, entonces existe un isomorfismo natural $\phi' : T_d \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, E_{(d)})$, y si además σ^{opp} es estable, entonces $E_{(d)}$ es un R–módulo derecha inyectivo.

Así, si consideramos que el funtor núcleo idempotente simétrico σ con el que trabajamos es σ_{cof} y tomamos $T_i = T_d = \mathrm{Ext}^{\mu}_R(-, R)$, Björk proporciona en [7] un ejemplo de dualidad en el caso de ser R una K–álgebra noetheriana Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, con $\mathrm{idim}(R) = \mathrm{GKdim}(R) = \mu$.

Además, para el caso particular de tomar $R = \mathcal{U}(g)$ el álgebra envolvente de un álgebra de Lie soluble g de dimensión finita sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado de característica cero, Barou y Malliavin prueban que R^o define la dualidad anterior en el sentido de que ${}_R(R^o) \cong E_{(i)}$ y $(R^o)_R \cong E_{(d)}$.

Estamos interesados en extender estos resultados a una clase de álgebras R más amplia así como caracterizar todas aquellas dualidades definidas por R^o.

3.2. Cohomología local.

Antes de adentrarnos en el estudio concreto de R^o es conveniente reseñar determinados aspectos generales sobre la estructura de los grupos de cohomología local asociados a funtores núcleo idempotentes.

Consideramos σ funtor núcleo idempotente simétrico en R–***Mod*** y M un R–módulo izquierda. Para cada natural n, el *n– ésimo grupo de cohomología local de M relativo a σ*, $H^n_\sigma(M)$, se define como el n–ésimo funtor derivado derecha del funtor σ, es decir, es el n–ésimo grupo de cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow \sigma(E'_0) \longrightarrow \sigma(E'_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \sigma(E'_n) \longrightarrow \cdots,$$

donde $0 \longrightarrow M \longrightarrow E'_0 \longrightarrow E'_1 \longrightarrow \cdots$ es una resolución inyectiva de M.

En [29, I,4.3], Mulet prueba que se tienen isomorfismos de R–módulos izquierda

$$\sigma(M) \cong \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} \operatorname{Hom}_R(R/I, M)$$

y

$$H^n_\sigma(M) \cong \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} \operatorname{Ext}^n_R(R/I, M),$$

la estructura de R–módulo izquierda de $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} \operatorname{Ext}^n_R(R/I, M)$ se corresponde con la estudiada en la sección anterior para $T = \operatorname{Ext}^n_R(-, M)$.

Queremos probar que, junto a la anterior estructura de R–módulo izquierda, $H^n_\sigma(M)$ tiene también una estructura de R–módulo derecha.

De acuerdo al lema (3.1.1), para cada natural n, $\operatorname{Ext}^n_R(R/I, M)$ tiene una estructura de R–módulo izquierda para cada $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$. Si M es un R–bimódulo, entonces $\operatorname{Ext}^n_R(R/I, M)$ tiene también una estructura de R–módulo derecha inducida por la estructura de R–módulo derecha de M. Esto puede seguirse del siguiente resultado general:

(3.2.1) Lema. *Sea $F : R\text{–}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow \mathcal{A}b$ un funtor covariante aditivo. Entonces, para cualquier R–bimódulo M tenemos que $F(M)$ tiene una estructura natural de R–módulo derecha inducida por la estructura de R–módulo derecha de M.*

Demostración. Sean $r \in R$ y $x \in F(M)$. Consideramos el morfismo en $R\text{–}\boldsymbol{Mod}$, $\rho_{M,r} : M \longrightarrow M$, definido por $\rho_{M,r}(m) := mr$, para cada $m \in M$. Aplicando el funtor F obtenemos el morfismo en $\mathcal{A}b$, $F(\rho_{M,r}) : F(M) \longrightarrow F(M)$.

Definamos entonces

$$xr := [F(\rho_{M,r})](x).$$

Podemos comprobar, de manera análoga a como se hizo en el lema (3.1.1), que con esta acción $F(M)$ adquiere una estructura de R–módulo derecha. □

Como consecuencia, para cualquier R–módulo izquierda N y cualquier R–bimódulo M, el grupo abeliano $\mathrm{Ext}^n_R(N, M)$ tiene una estructura de R–módulo derecha y, en el caso particular en el que N sea un R–bimódulo, entonces también tiene una estructura de un R–módulo izquierda.

Incluimos también el siguiente resultado bien conocido:

(3.2.2) Lema. *Sea N un R–módulo izquierda finitamente generado, y M un R–bimódulo tal que ${}_RM$ es finitamente generado. Entonces $\mathrm{Ext}^n_R(N, M)$ es un R–módulo derecha finitamente generado para cada natural n.*

Demostración. Sea

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

una resolución libre de ${}_RN$ tal que F_n es finitamente generado para cada índice n. Entonces

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_1, M) \longrightarrow \cdots$$

es un complejo en el cual cada punto es un R–módulo derecha finitamente generado isomorfo a una suma directa de copias de M. En consecuencia, los subcocientes $\mathrm{Ext}_R^n(N, M)$ serán también R–módulos derecha finitamente generados por la noetherianidad de R. □

Tenemos entonces que $\mathrm{Ext}_R^n(R/I, M)$ tiene una estructura de R–módulo derecha para cada R–bimódulo M y cada $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$. Vamos a probar que esta estructura pasa, a través del límite directo, a $H_\sigma^n(M)$. Para ello basta demostrar que si $p_{JI} : R/J \longrightarrow R/I$ es el epimorfismo canónico, para $I, J \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tales que $J \subseteq I$, entonces el morfismo inducido $j_{JI} : \mathrm{Ext}_R^n(R/I, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(R/J, M)$ es un homomorfismo de R–módulos derecha. Esto se sigue del siguiente resultado general:

(3.2.3) Lema. *Sean $F_1, F_2 : R$–**Mod** $\longrightarrow \mathcal{A}b$ dos funtores covariantes aditivos y $g : F_1 \longrightarrow F_2$ una transformación natural. Si M es un R–bimódulo, entonces $g_M : F_1(M) \longrightarrow F_2(M)$ es un homomorfismo de R–módulos derecha.*

Demostración. Sean $x \in F_1(M)$ y $r \in R$. Dado que g es una transformación natural se tiene que

$$\begin{array}{ccc} F_1(M) & \xrightarrow{g_M} & F_2(M) \\ {\scriptstyle F_1(\rho_{M,r})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_2(\rho_{M,r})} \\ F_1(M) & \xrightarrow[g_M]{} & F_2(M) \end{array}$$

es un diagrama conmutativo.En consecuencia:

$$\begin{aligned} g_M(xr) &= g_M([F_1(\rho_{M,r})](x)) \\ &= [g_M \circ F_1(\rho_{M,r})](x) \\ &= [F_2(\rho_{M,r}) \circ g_M](x) \\ &= [g_M(x)]r, \end{aligned}$$

con lo que g_M es un morfismo en ***Mod***– R. □

En consecuencia, podemos dar una estructura de R–módulo derecha al límite directo $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma)} \mathrm{Ext}^n_R(R/I, M)$ y tenemos el siguiente resultado:

(3.2.4) Proposición. *Para cada R–bimódulo M, $H^n_\sigma(M)$ tiene una estructura natural de R–módulo derecha.*

Probemos, por último, que las estructuras a izquierda y derecha obtenidas para $H^n_\sigma(M)$ son compatibles entre sí en el sentido de que proporcionan a $H^n_\sigma(M)$ una estructura de R–bimódulo.

Dados $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ y M un R–bimódulo, podemos comprobar que la estructura natural de R–módulo izquierda de $\mathrm{Hom}_R(R/I, M)$, proporcionada por el lema (3.1.1), viene dada por

$$rf := f \circ \rho_{R/I,r}$$

para cada $r \in R$, $f \in \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$, de tal modo que sobre cada $r' + I \in R/I$ actuará de la forma $(rf)(r' + I) = f((r' + I)r)$. Por su parte, podemos ver también que la estructura natural de R–módulo derecha de $\mathrm{Hom}_R(R/I, M)$ proporcionada por el lema (3.2.1) viene dada por

$$fs := \rho_{M,s} \circ f$$

para cada $f \in \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$, $s \in R$, de tal modo que sobre cada $r' + I \in R/I$ actuará de la forma $(fs)(r' + I) = [f(r' + I)]s$. Es fácil comprobar ahora que

$$(rf)s = r(fs)$$

para cada $r, s \in R, f \in \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$, con lo que $\mathrm{Hom}_R(R/I, M)$ tiene una estructura de R–bimódulo y, en consecuencia, $\mathrm{Ext}_R^n(R/I, M)$ hereda la correspondiente estructura de R–bimódulo, para cada natural n. Ver [4] y [29].

Para probar que esta estructura de R–bimódulo pasa a través del límite directo a $H_\sigma^n(M)$ bastaría demostrar que, para cada par de ideales $I, J \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tales que $J \subseteq I$, se verifica que el epimorfismo canónico $j_{JI} : \mathrm{Ext}_R^n(R/I, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(R/J, M)$ es un homomorfismo de R–módulos derecha e izquierda. Pero esto lo tenemos ya por el lema (3.2.3) para la derecha (como indicamos antes), y por el lema (3.1.4), para la izquierda, tomando en dicho lema $T = \mathrm{Ext}_R^n(-, M)$.

Como consecuencia, tenemos el resultado buscado:

(3.2.5) Teorema. *Para cada R–bimódulo M, $H_\sigma^n(M)$ tiene una estructura natural de R–bimódulo.*

3.3. El módulo R^o.

Estudiamos ahora la estrecha relación existente entre R^o y la categoría $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$; esta relación ya fue puesta de manifiesto en [13]. Así mismo, daremos una caracterización de la inyectividad de R^o a través de la estabilidad de σ_{cof} o, alternativamente, en función de la verificación de la condición fuerte de second layer por parte, únicamente, de los ideales primos cofinitos de R.

3.3.1. R^o y $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$.

Definimos R^o como el conjunto formado por las aplicaciones K–lineales de R en K que se anulan sobre algún ideal izquierda de R cofinito

$$R^o = \{f \in \mathrm{Hom}_K(R, K) : f(I) = 0 \text{ para algún } I \in \mathcal{L}(\sigma_{cof})\}.$$

Podemos comprobar, a partir de esta descripción, que

$$R^o = \sigma_{cof}(R^*),$$

donde $R^* = \mathrm{Hom}_K(R, K)$, grupo abeliano que posee estructura de R–módulo izquierda si, dados $r \in R$, $f \in R^*$, definimos $rf : R \longrightarrow K$ por $[rf](r') := f(r'r)$, para cada $r' \in R$. De este modo, R^o es el R–submódulo de σ_{cof}–torsión de R^* y, en consecuencia, un R–módulo izquierda.

El siguiente resultado nos muestra una descripción alternativa de la categoría $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ a partir del R–módulo R^o :

(3.3.1) Lema. *[13, 1.1] Los objetos de la categoría $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ son los submódulos de sumas directas de R^o. Además, R^o es un objeto inyectivo en $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ y cada suma directa de objetos inyectivos en $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ es inyectivo en $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$.*

Como apuntamos en la proposición (2.2.2), los R–módulos izquierda σ_{cof}–torsión son justamente los R–módulos izquierda localmente finitos. En consecuencia, cada objeto de $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ tiene un zócalo esencial y, en particular existe un isomorfismo, $R^o \cong \oplus W(S_\alpha)$, donde, para cada índice α, se tiene que S_α es un R–módulo izquierda simple finito, y donde $W(-)$ representa la envolvente inyectiva en la categoría de Grothendieck $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$.

Por tanto, los objetos de $\mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ pueden ser controlados por los R–módulos izquierda simples finitos. Estudiemos estos últimos con más detenimiento y veamos su íntima relación con los ideales primos cofinitos de R.

Recordemos, en primer lugar, que un ideal bilátero P de R, distinto de R, es un *ideal primo* de R si, dados I, J ideales biláteros de R tales que $IJ \subseteq P$, se verifica que $I \subseteq P$ ó $J \subseteq P$. Denotamos por $\mathrm{Spec}(R)$ el conjunto de los ideales primos de R.

Notemos por $\mathcal{Z}$ el conjunto de los ideales primos P de R cofinitos, es decir, $\mathcal{Z} = \mathrm{Spec}(R) \cap \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$. Dado que R/P es un R–módulo izquierda finitamente generado, es equivalente que R/P sea finito a que sea localmente finito, con lo cual tenemos que $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\sigma_{cof}) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : R/P \in \mathcal{T}_{\sigma_{cof}}\}$. Para cada $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$, dado que R/P es K–finito dimensional, se tiene que R/P es una K–álgebra artiniana. Además, sus únicos ideales biláteros son 0 y R/P, con lo cual R/P es una K–álgebra artiniana simple.

Llamemos Ω a un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de R–módulos izquierda simples finitos. El siguiente resultado nos muestra que existe una correspondencia biyectiva entre Ω y $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$:

(3.3.2) Proposición. ([13]) *(1) Para cada R–módulo izquierda simple finito S tenemos que si $P = \mathrm{Ann}^l_R(S) = \{r \in R : rS = 0\}$ (el ideal anulador izquierda de S en R), entonces $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ y es un ideal bilátero maximal de R;*

(2) Si $P, Q \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$, entonces $P = Q$ si, y sólo si, $\mathrm{Hom}_R(R/P, R/Q) \neq 0$. En particular, los elementos de $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ son incomparables (es decir, si $P, Q \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ son tales que $P \subseteq Q$, entonces $P = Q$);

(3) Si M es un R–módulo izquierda finitamente generado tal que

$PM = 0$ para algún $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$, entonces M es finito y como K–álgebras tenemos un isomorfismo $R/P \cong Biend(M)$;

(4) *La aplicación $\mathrm{Ann}_R^l : \Omega \longrightarrow \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ es una biyección.*

Los ideales primos cofinitos de R van a constituir un eje fundamental en nuestro estudio.

3.3.2. Inyectividad de R^o.

Estudiemos ahora la inyectividad de R^o. En [13] se prueba que $\oplus R/P$, donde P recorre el conjunto de ideales primos cofinitos de R, es isomorfo a un R–submódulo esencial de R^o. De este modo, la inyectividad de R^o va a venir dada a partir de las envolventes inyectivas de los R/P. El siguiente resultado recoge este hecho y caracteriza la inyectividad de R^o en función de la estabilidad del funtor núcleo idempotente σ_{cof} :

(3.3.3) Teorema. *[13, 1.5] Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *R^o es un R–módulo izquierda inyectivo;*

(b) *σ_{cof} es estable;*

(c) *Existe un isomorfismo de R–módulos izquierda*

$$R^o \cong \oplus_{P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})} E(R/P),$$

*donde $E(R/P)$ representa la envolvente inyectiva de R/P en R–**Mod**.*

Consideremos σ_{cof}^{opp}, el único funtor núcleo idempotente (simétrico) en **Mod**–R tal que $\mathcal{L}^2(\sigma_{cof}^{opp}) = \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$. Se tiene entonces que

$\mathcal{Z}(\sigma_{cof}^{opp}) = \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ y que $\sigma_{cof}^{opp}(M) = \{m \in M : mR \text{ es finito}\}$, para cada R–módulo derecha M. A partir de σ_{cof}^{opp} el R–módulo izquierda R^o tiene además una estructura de R–módulo derecha que lo convierte en un R–bimódulo. Veámoslo:

El R–módulo izquierda $R^* = \mathrm{Hom}_K(R, K)$ tiene también estructura de R–módulo derecha si, para cada $r \in R$, $f \in \mathrm{Hom}_K(R, K)$, definimos $(fr)(r') := f(rr')$, para $r' \in R$. Podemos considerar entonces el R–módulo derecha, $\sigma_{cof}^{opp}(R^*)$.

Dado que σ_{cof} y σ_{cof}^{opp} son simétricos se tiene que

$$\sigma_{cof}(R^*) = \{f \in R^* : If = 0 \text{ para algún } I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})\}, \quad \text{y}$$

$$\sigma_{cof}^{opp}(R^*) = \{f \in R^* : fI = 0 \text{ para algún } I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof}^{opp})\}.$$

Puesto que $\mathcal{L}^2(\sigma_{cof}) = \mathcal{L}^2(\sigma_{cof}^{opp})$ y, además, $If = 0$ si, y sólo si, $fI = 0$, para cualquier $f \in R^*$ e I ideal bilátero de R, se concluye que $\sigma_{cof}^{opp}(R^*) = R^o = \sigma_{cof}(R^*)$. Podemos comprobar que las estructuras a izquierda y derecha dotan a R^* de una estructura de R–bimódulo, la cual es inducida en R^o.

En consecuencia, los correspondientes resultados a derecha nos darán la siguiente versión a derecha del teorema (3.3.3):

(3.3.4) Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) R^o *es un R–módulo derecha inyectivo;*

(b) σ_{cof}^{opp} *es estable;*

(c) Existe un isomorfismo de R–módulos derecha

$$R^o \cong \oplus_{P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof}^{opp})} E'(R/P),$$

donde $E'(R/P)$ representa la envolvente inyectiva de R/P en ***Mod***– *R.*

La inyectividad de R^o a izquierda y derecha será equivalente a la biestabilidad de σ_{cof} (es decir, a la estabilidad de σ_{cof} y σ_{cof}^{opp}).

Con el objetivo de caracterizar la biestabilidad del funtor núcleo idempotente σ_{cof} introducimos ahora la siguiente condición técnica. Decimos que un ideal primo P de R satisface la *condición fuerte de second layer a izquierda*, si no existe un ideal primo $Q \subsetneq P$ y una sucesión exacta corta de R–módulos izquierda uniformes finitamente generados

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

con la propiedad de que

(i) $L = \mathrm{Ann}^r_M(P)$, donde $\mathrm{Ann}^r_M(P) := \{m \in M : Pm = 0\}$ es el anulador derecha de P en M,

(ii) $\mathrm{Ann}^l_R(L') = P$ para cualquier R–submódulo izquierda $0 \neq L' \subseteq L$, y

(iii) $Q = \mathrm{Ann}^l_R(M) = \mathrm{Ann}^l_R(N')$ para cualquier R–submódulo izquierda $0 \neq N' \subseteq N$.

Los análogos a derecha de estas nociones se definen de forma similar. Se dice que un ideal primo P de R satisface la *condición fuerte de second layer* si verifica las condiciones fuertes de second layer a izquierda y a derecha. Decimos que un conjunto $X \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ satisface la condición fuerte de second layer (resp. a izquierda; resp. a derecha) si la verifican todos los ideales primos de X. Por último, diremos que R satisface la condición fuerte de second layer (resp. a izquierda; resp. a derecha) si todos los ideales primos de R verifican la condición fuerte de second layer (resp. a izquierda; resp. a derecha).

Nos referimos principalmente a [8] para los resultados que necesitamos sobre la condición fuerte de second layer. Para información suplementaria sobre el tema ver también [5], [14], [19], [28].

Decimos que el funtor núcleo idempotente simétrico σ es *biestable* si σ y σ^{opp} son estables.

(3.3.5) Proposición. *Si $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ verifica la condición fuerte de second layer a izquierda (o a derecha), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) σ_{cof} es estable;

(b) σ_{cof}^{opp} es estable.

En particular, las anteriores afirmaciones son equivalentes a que σ_{cof} sea biestable.

DEMOSTRACIÓN. Para la demostración a izquierda basta unir [8, III,2.12] y [8, III,3.9]. La demostración a derecha es análoga. □

Decimos que σ es un *birradical* si $\sigma(J/I) = \sigma^{opp}(J/I)$ para cualesquiera ideales biláteros J, I de R tales que $I \subseteq J$.

(3.3.6) Proposición. *σ_{cof} es un birradical.*

DEMOSTRACIÓN. Por [8, III,4.2] es equivalente que σ_{cof} sea un birradical a que, para cada par de ideales biláteros $K \subseteq T$ de R, se verifique que el R–módulo izquierda ${}_R(T/K)$ es σ_{cof}–torsión si, y sólo si, el R–módulo derecha $(T/K)_R$ es σ_{cof}^{opp}–torsión.

Dado que R es noetheriano, T/K es finitamente generado como R–módulo izquierda y como R–módulo derecha y, en consecuencia, para probar que σ_{cof} es un birradical hemos de ver que ${}_R(T/K)$ es

K–finito dimensional si, y sólo si, $(T/K)_R$ es K–finito dimensional. Pero esto es claro que se verifica. □

Decimos que σ satisface la *propiedad débil de Artin-Rees* (izquierda) si, para cualquier ideal bilátero K de R y cualquier $I \in \mathcal{L}(\sigma)$, existe algún $J \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que $KJ \subseteq IK$. A través de esta propiedad obtenemos el siguiente resultado:

(3.3.7) Proposición. *Si $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ verifica la condición fuerte de second layer a izquierda, entonces σ_{cof} es estable.*

Demostración. Como σ_{cof} es un birradical, entonces satisface la propiedad débil de Artin-Rees izquierda por [8, III,4.6]. Pero esto es equivalente a que σ_{cof} verifique la propiedad de Artin-Rees izquierda por [8, III,3.5] y a que σ_{cof} sea estable por [8, III,2.12]. □

De los anteriores resultados se sigue:

(3.3.8) Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *$\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ verifica la condición fuerte de second layer (resp. a izquierda; resp. a derecha);*

(b) *σ_{cof} es biestable (resp. σ_{cof} es estable; resp. σ_{cof}^{opp} es estable).*

Demostración. Demos la demostración a izquierda. La demostración a derecha se sigue de los correspondientes resultados a derecha, teniendo en cuenta además que $\mathcal{Z}(\sigma_{cof}^{opp}) = \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$. Finalmente, la versión bilátera se sigue de unir las versiones a izquierda y derecha.

La implicación (a) $\Rightarrow$ (b) es la proposición (3.3.7). La implicación (b) $\Rightarrow$ (a) se demuestra en [13]: Supongamos que existe algún

$P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ tal que P no verifica la condición fuerte de second layer a izquierda. Existe entonces un R–módulo izquierda uniforme finitamente generado M con anulador primo $\mathrm{Ann}^l_R(M) = Q \subsetneq P$, para el cual $L = \mathrm{Ann}^r_M(P) \neq 0$.

Como $PL = 0$ y $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$, se tiene que L es σ_{cof}–torsión. Además, como L es un submódulo no nulo de M y M es uniforme, entonces L es esencial en M. En consecuencia, puesto que σ_{cof} es estable por hipótesis, se tiene que M es σ_{cof}–torsión.

Por otro lado, como $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ y $Q \subsetneq P$, de la propiedad de incomparabilidad de $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ dada en la proposición (3.3.2) se sigue que $Q \notin \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ y, en particular, que $Q \notin \mathcal{L}(\sigma_{cof})$. Pero esto es una contradicción:

Como M es un R–módulo izquierda finitamente generado, existen $m_1, ..., m_n \in M$ tales que $M = Rm_1 + ... + Rm_n$. En consecuencia, $Q = \mathrm{Ann}^l_R(M) = \mathrm{Ann}^l_R(Rm_1) \cap ... \cap \mathrm{Ann}^l_R(Rm_n)$. Como M es σ_{cof}–torsión, para cada $i = 1, ..., n$ se tiene que $\mathrm{Ann}^l_R(m_i) \in \mathcal{L}(\sigma_{cof})$ y, en consecuencia, que $(\mathrm{Ann}^l_R(m_i) : R) \in \mathcal{L}(\sigma_{cof})$, por ser σ_{cof} simétrico. Pero $\mathrm{Ann}^l_R(Rm_i) = (\mathrm{Ann}^l_R(m_i) : R)$ para cada i, con lo cual, como $\mathcal{L}(\sigma_{cof})$ es un filtro de Gabriel, se tiene que $Q \in \mathcal{L}(\sigma_{cof})$. □

(3.3.9) Corolario. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *R^o es un R–módulo izquierda inyectivo;*

(b) *σ_{cof} es estable;*

(c) *$\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ verifica la condición fuerte de second layer a izquierda;*

(d) *R^o es un R–módulo derecha inyectivo;*

(e) *σ^{opp}_{cof} es estable;*

(f) $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ *verifica la condición fuerte de second layer a derecha.*

Demostración. Basta unir los teoremas (3.3.3), (3.3.4), (3.3.8), y la proposición (3.3.5). □

De este modo observamos que para determinar la biestabilidad de σ_{cof} y, por tanto, la inyectividad a izquierda y derecha de R^o, sólo tendremos que comprobar la verificación de la condición fuerte de second layer por parte de los ideales primos cofinitos de R.

3.4. Dualidad definida por R^o.

En la parte final de la sección 3.1. definimos el concepto de dualidad respecto de un funtor núcleo idempotente simétrico σ y observamos el papel fundamental que jugaba el R–bimódulo R^o en los ejemplos que comentamos, cuando la dualidad la tomábamos respecto de σ_{cof}, es decir, entre los R–módulos izquierda y derecha K–finito dimensionales. En esta sección vamos a extender estos resultados caracterizando las dualidades respecto de σ_{cof} definidas por R^o. Previamente introducimos la siguiente definición:

Decimos que un R–bimódulo D es *σ–dualizante* (o que D es un R–bimódulo *dualizante respecto a σ*) si satisface las dos siguientes propiedades:

(i) ${}_RD \in \mathcal{T}_\sigma$ y $D_R \in \mathcal{T}_{\sigma^{opp}}$;

(ii) Existen isomorfismos naturales de R–módulos izquierda,

$$X \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X, D), D),$$

y de R–módulos derecha,

$$Y \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Y, D), D),$$

para cada $X \in \mathcal{T}_\sigma^{fg}$ y cada $Y \in \mathcal{T}_{\sigma^{opp}}^{fg}$.

Se tiene el siguiente resultado:

(3.4.1) Lema. *El R–bimódulo R^o es σ_{cof}–dualizante.*

Demostración. Dado que $\sigma_{cof}^{opp}(R^*) = R^o = \sigma_{cof}(R^*)$, se tiene que ${}_R(R^o) \in \mathcal{T}_{\sigma_{cof}}$ y $(R^o)_R \in \mathcal{T}_{\sigma_{cof}^{opp}}$.

Estudiemos ahora la segunda condición para que el R–bimódulo R^o sea σ_{cof}–dualizante. Sea $X \in \mathcal{T}_{\sigma_{cof}}^{fg}$. Dado que σ_{cof} es un funtor núcleo idempotente y X es σ_{cof}–torsión, se tiene que $g(X) \subseteq \sigma_{cof}(\mathrm{Hom}_K(R, K))$ para todo $g \in \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_K(R, K))$. En consecuencia, $\mathrm{Hom}_R(X, \sigma_{cof}(\mathrm{Hom}_K(R, K))) = \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_K(R, K))$.

Consideramos entonces la siguiente composición de isomorfismos naturales en $\mathcal{A}b$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(X, R^o) &= \mathrm{Hom}_R(X, \sigma_{cof}(\mathrm{Hom}_K(R, K)))\\ &= \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_K(R, K))\\ &\cong \mathrm{Hom}_K(R \otimes_R X, K)\\ &\cong \mathrm{Hom}_K(X, K).\end{aligned}$$

Obtenemos entonces un isomorfismo natural en $\mathcal{A}b$

$$\varphi_X : \mathrm{Hom}_R(X, R^o) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(X, K) \tag{3.3}$$

dado por $[\varphi_X(h)](x) = [h(x)](1)$, para cada $h \in \mathrm{Hom}_R(X, R^o)$, $x \in X$. Podemos comprobar además, a partir de las estructuras de R–módulo derecha de $\mathrm{Hom}_R(X, R^o)$ y $\mathrm{Hom}_K(X, K)$, que φ_X es un isomorfismo natural en ***Mod***$-R$. De forma análoga, se tiene el correspondiente isomorfismo natural de R–módulos izquierda

$$\varphi'_Y : \mathrm{Hom}_R(Y, R^o) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(Y, K) \tag{3.4}$$

para cada $Y \in \mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$.

Veamos además que $\mathrm{Hom}_R(X, R^o) \in \mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$: Sea $f \in \mathrm{Hom}_R(X, R^o)$. Como X es un R–módulo izquierda finitamente generado, se tiene que $X = Rx_1 + \cdots + Rx_n$. Como $f(x_i) \in R^o = \sigma^{opp}_{cof}(\mathrm{Hom}_K(X, K))$, existe algún $I_i \in \mathcal{L}(\sigma^{opp}_{cof})$ tal que $f(x_i)I_i = 0$, para cada $i = 1, ..., n$. Tomando $I = I_1 \cap ... \cap I_n \in \mathcal{L}(\sigma^{opp}_{cof})$ y $f(x_i)I = 0$, para todo $i = 1, ..., n$. En consecuencia, dado $x = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in X$, y puesto que R^o es un R–bimódulo, se verifica

$$[fI](x) = f(x)I = [r_1f(x_1) + \cdots + r_nf(x_n)]I = 0,$$

con lo que $fI = 0$. Se sigue entonces que $\mathrm{Hom}_R(X, R^o) \in \mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$.

En consecuencia, aplicando (3.4) a $Y = \mathrm{Hom}_R(X, R^o)$, se tiene un isomorfismo natural de R–módulos izquierda

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X, R^o), R^o) \cong \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_R(X, R^o), K). \tag{3.5}$$

A partir del isomorfismo natural de R–módulos derecha (3.3), se tiene un isomorfismo natural en $R-$***Mod***

$$\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_R(X, R^o), K) \cong \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(X, K), K) \tag{3.6}$$

Como X es K–finito dimensional, se tiene el isomorfismo natural de R–módulos izquierda

$$\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(X, K), K) \cong X. \tag{3.7}$$

En consecuencia, juntando (3.5), (3.6) y (3.7) se tiene un isomorfismo natural en R–***Mod***

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X, R^o), R^o) \cong X.$$

Análogamente, para cada $Y \in \mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$, se obtiene el correspondiente isomorfismo natural en ***Mod***–R

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Y, R^o), R^o) \cong Y,$$

con lo cual R^o es un R–bimódulo dualizante respecto al funtor núcleo idempotente σ_{cof}. □

Un resultado más antes de nuestro teorema de caracterización:

(3.4.2) Lema. *Sea S un R–módulo izquierda simple finito y $P = \mathrm{Ann}^l_R(S)$ su ideal primo cofinito en R asociado. Entonces, para cada $M \in R$–**Mod** se tiene un isomorfismo de R–módulos izquierda*

$$\mathrm{Soc}_S(M) = \mathrm{Ann}^r_M(P) \cong \mathrm{Hom}_R(R/P, M),$$

donde $\mathrm{Soc}_S(M)$ representa la suma de todos los R–submódulos de M isomorfos a S.

Demostración. Definimos $\psi : \mathrm{Hom}_R(R/P, M) \longrightarrow \mathrm{Ann}^r_M(P)$ como $\psi(f) := f(1 + P)$, para cada $f \in \mathrm{Hom}_R(R/P, M)$. Se comprueba fácilmente que ψ es un isomorfismo de R–módulos izquierda.

Demostremos ahora la igualdad $\mathrm{Soc}_S(M) = \mathrm{Ann}^r_M(P)$. Dado que $PS = 0$, $\mathrm{Soc}_S(M)$ es un R/P–módulo izquierda y $\mathrm{Soc}_S(M) \subseteq \mathrm{Ann}^r_M(P)$. Por otro lado, a partir del isomorfismo en R–***Mod***, ψ, se tiene que, para cada $x \in \mathrm{Ann}^r_M(P)$ existe un $f \in \mathrm{Hom}_R(R/P, M)$ tal que $x = f(1+P)$ y, en consecuencia, $Rx = f(R/P)$. Dado que $R/P \cong S^n$ y Rx es la imagen por f de R/P, se tiene que Rx es una suma directa de copias de S y, en consecuencia, $Rx \subseteq \mathrm{Soc}_S(M)$. De este modo, $x \in \mathrm{Soc}_S(M)$ y $\mathrm{Ann}^r_M(P) \subseteq \mathrm{Soc}_S(M)$. $\square$

Recordamos que, dada (T_i, T_d) una dualidad respecto a un funtor núcleo idempotente simétrico σ en R–***Mod***, definíamos $E_{(i)} = \varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma)} T_i(R/I)$ y $E_{(d)} = \varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma^{opp})} T_d(R/I)$.

(3.4.3) Teorema. *Sea (T_i, T_d) una dualidad respecto a σ_{cof} y supongamos que cada ideal primo de R cofinito satisface la condición fuerte de second layer. Son equivalentes:*

(a) $\dim_K(T_i(R/P)) = \dim_K(R/P)$ *para cada* $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ *y además* $\dim_K(T_d(R/Q)) = \dim_K(R/Q)$ *para cada* $Q \in \mathcal{Z}(\sigma^{opp}_{cof})$,

(b) $E_{(i)} \cong_R (R^o)$ *y* $E_{(d)} \cong (R^o)_R$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Por el lema (3.1.9), tenemos que $E_{(i)} = \cup_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Ann}^r_{E_{(i)}}(I)$, la unión directa de los anuladores derecha de I en $E_{(i)}$ donde I recorre la familia de los ideales biláteros cofinitos de R. En consecuencia, dado $x \in E_{(i)}$ cualquiera, ha de existir algún $I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$ tal que $x \in \mathrm{Ann}^r_{E_{(i)}}(I)$, es decir, $Ix = 0$. Por tanto $x \in \sigma_{cof}(E_{(i)})$, es decir, Rx es un R–módulo izquierda K–finito dimensional y contendrá algún R–submódulo izquierda simple finito S. En consecuencia $E_{(i)}$ es un R–módulo izquierda σ_{cof}–torsión, extensión esencial de $\mathrm{Soc}_\Omega(E_{(i)}) = \oplus_{S \in \Omega} \mathrm{Soc}_S(E_{(i)})$, donde Ω denota un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de R–módulos izquierda simples finitos. Por otro lado, como $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ verifica la condición fuerte de second layer, σ_{cof} es biestable, con lo cual, aplicando el lema (3.1.11), se tiene que $E_{(i)}$ es un R–módulo izquierda inyectivo. En consecuencia, $E_{(i)}$ es la envolvente inyectiva en R–***Mod*** de $\mathrm{Soc}_\Omega(E_{(i)})$, y se tiene

$$E_{(i)} = E(\mathrm{Soc}_\Omega(E_{(i)})) = \oplus_{S \in \Omega} E(\mathrm{Soc}_S(E_{(i)})). \tag{3.8}$$

Para cada $S \in \Omega$ se tiene, aplicando el lema (3.4.2), un isomorfismo de R–módulos izquierda $\mathrm{Soc}_S(E_{(i)}) \cong \mathrm{Hom}_R(R/P, E_{(i)})$, donde $P = \mathrm{Ann}_R^l(S)$. Por otro lado, aplicando el lema (3.1.8), se tiene que T_i es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_R(-, E_{(i)})$ y, en consecuencia, $\mathrm{Hom}_R(R/P, E_{(i)}) \cong T_i(R/P)$, isomorfismo que es de R–módulos izquierda por el lema (3.1.6). De este modo, obtenemos un isomorfismo en R–***Mod***, $\mathrm{Soc}_S(E_{(i)}) \cong T_i(R/P)$. Ahora bien, por hipótesis, $\dim_K(R/P) = \dim_K(T_i(R/P))$, con lo que $\mathrm{Soc}_S(E_{(i)})$ y R/P tendrán la misma K–dimensión, y puesto que $R/P \cong S^n$, se sigue que $\mathrm{Soc}_S(E_{(i)}) \cong R/P$ como R–módulos izquierda.

En consecuencia, aplicando a (3.8) la biyección existente entre Ω y $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$, dada por la proposición (3.3.2), se tiene un isomorfismo de R–módulos izquierda

$$E_{(i)} \cong \oplus_{P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})} E(R/P).$$

Análogamente, $E_{(d)} = \varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof}^{opp})} T_d(R/I)$ es un R–módulo derecha inyectivo, σ_{cof}^{opp}–torsión y tal que

$$E_{(d)} \cong \oplus_{P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof}^{opp})} E'(R/P),$$

donde $E'(-)$ representa la envolvente inyectiva en ***Mod***–R.

Basta aplicar ahora los teoremas (3.3.3) y (3.3.4) para obtener que existe un isomorfismo de R–módulos izquierda, $E_{(i)} \cong R^o$, y un isomorfismo de R–módulos derecha, $E_{(d)} \cong R^o$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Sea $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$. Análogamente a como se vio en la implicación anterior, los lemas (3.1.6) y (3.1.8), aplicados a la dualidad (T_i, T_d), nos dan un isomorfismo de R–módulos izquierda $T_i(R/P) \cong \mathrm{Hom}_R(R/P, E_{(i)})$.

Sea S un R–módulo izquierda simple finito tal que $P = \mathrm{Ann}_R^l(S)$ (proposición (3.3.2)). Por hipótesis, $E_{(i)} \cong_R (R^o)$. Se tiene entonces un isomorfismo de R–módulos izquierda $\mathrm{Soc}_S(E_{(i)}) \cong \mathrm{Soc}_S(R^o)$, con lo que aplicando el lema (3.4.2) existe un isomorfismo de R–módulos izquierda $T_i(R/P) \cong \mathrm{Hom}_R(R/P, R^o)$.

Para cada $X \in \mathcal{T}_{\sigma_{cof}}^{fg}$ obtuvimos, en la demostración del lema (3.4.1), un isomorfismo de R–módulos derecha $\mathrm{Hom}_R(X, R^o) \cong \mathrm{Hom}_K(X, K)$, con lo cual la K–dimensión de $\mathrm{Hom}_R(X, R^o)$ es finita e igual a la de X, por ser X finito.

En consecuencia, de los resultados anteriores, tomando $X = R/P$, se sigue que $\dim_K(T_i(R/P)) = \dim_K(R/P)$ para cada $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$.

De forma análoga, los correspondientes resultados a derecha nos darán que $\dim_K(T_d(R/Q)) = \dim_K(R/Q)$ para cada $Q \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof}^{opp}) = \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$. □

En consecuencia, dada una dualidad (T_i, T_d) respecto a σ_{cof}, puesto que se tienen isomorfismos naturales $T_i \cong \mathrm{Hom}_R(-, E_{(i)})$ y $T_d \cong \mathrm{Hom}_R(-, E_{(d)})$, se sigue que, en las condiciones del teorema, (T_i, T_d) viene caracterizada por R^o (es decir, $E_{(i)} \cong R^o$ como R–módulos izquierda y $E_{(d)} \cong R^o$ como R–módulos derecha) si, y sólo si,

$$\dim_K(T_i(R/P)) = \dim_K(R/P) \text{ y } \dim_K(T_d(R/P)) = \dim_K(R/P),$$

para todo ideal primo P de R cofinito.

De este modo, en las condiciones del teorema, estas dualidades están completamente caracterizadas por R^o.

3.5. R^o y la resolución inyectiva minimal de R.

Sea $\mu = \mathrm{idim}(R) < \infty$. Existe entonces una resolución inyectiva minimal a izquierda de R

$$0 \longrightarrow_R R \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} \cdots \longrightarrow E_{\mu-1} \xrightarrow{d_{\mu-1}} E_\mu \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

con $E_\mu \neq 0$, en la cual $E_0, E_1, ..., E_\mu$ son R–módulos izquierda inyectivos, y si $K_i = \mathrm{Im}(d_{i-1})$, $(i = 1, ..., \mu)$, es la i–ésima cosicigia, entonces $E_i = E(K_i)$, la envolvente inyectiva de K_i en R–***Mod***, para cada $i = 0, ..., \mu$ (tomamos $K_0 = R$). De forma análoga, existirá también la correspondiente resolución inyectiva minimal a derecha de R

$$0 \longrightarrow R_R \longrightarrow E'_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E'_{\mu-1} \longrightarrow E'_\mu \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

verificando, a derecha, las mismas propiedades que la anterior resolución.

Veamos qué consecuencias tiene sobre la estructura de E_μ (y sobre E'_μ, por los correspondientes resultados a derecha) imponer la igualdad de las dimensiones inyectivas y de Gelfand-Kirillov sobre R bajo las condiciones de regularidad expuestas en la sección 1.4.. Un primer resultado es el siguiente:

(3.5.1) Teorema. ([13]) *Sea R una K–álgebra noetheriana Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, con $\mathrm{idim}(R) = \mu$ y $\mathrm{GKdim}(R) = \omega$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mu = \omega$;

(b) Existe un isomorfismo de R–módulos izquierda

$$E_\mu \cong \oplus_{P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})} E(\mathrm{Ext}^\mu_R(R/P, R)),$$

donde $E(\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P,R))$ *representa la envolvente inyectiva de* $\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P,R)$ *en* R–***Mod***.

Si añadimos la condición de la igualdad de las K–dimensiones de $\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P,R)$ y R/P, para cada ideal primo cofinito P de R, obtenemos:

(3.5.2) Teorema. *[13, 3.7] Sea R una K–álgebra noetheriana Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, con* $\mathrm{idim}(R)=\mu$ *y* $\mathrm{GKdim}(R)=\omega$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Existe un isomorfismo* $E_\mu \cong \oplus_{P\in\mathcal{Z}(\sigma_{cof})}E(R/P)$ *de* R*–módulos izquierda;*

(b) $\mu=\omega$ *y* $\dim_K(\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P,R))=\dim_K(R/P)$, *para cada* $P\in\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$.

De este modo, a partir de este teorema y de los resultados obtenidos para R^o en la sección 3.3., podemos caracterizar cuándo R^o y E_μ se identifican como R–módulos izquierda:

(3.5.3) Teorema. *[13, 3.9] Sea R una K–álgebra noetheriana Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, con* $\mathrm{idim}(R)=\mu$ *y* $\mathrm{GKdim}(R)=\omega$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $E_\mu\cong R^o$ *como* R*–módulos izquierda;*

(b) $\mu=\omega$, σ_{cof} *es estable y* $\dim_K(\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P,R))=\dim_K(R/P)$, *para cada* $P\in\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$;

(c) $\mu=\omega$, $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ *verifica la condición fuerte de second layer a izquierda y* $\dim_K(\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P,R))=\dim_K(R/P)$, *para cada* $P\in\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$.

De forma análoga se tendrá el correspondiente resultado a derecha para identificar R^o con E'_μ, a derecha, empleando σ_{cof}^{opp} en lugar de σ_{cof}.

Hemos conseguido identificar como R–módulos izquierda, en las condiciones del teorema (3.5.3), R^o y el último punto de la resolución inyectiva minimal a izquierda de R, E_μ. Al igual que hacían Barou y Malliavin en [4], buscamos también su identificación como R–módulos derecha, para una conveniente estructura de R–módulo derecha en E_μ.

(3.5.4) Lema. *Sea R una K–álgebra Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, libre de σ_{cof}–torsión y con $\mathrm{idim}(R) = \mu$. Sea*

$$0 \longrightarrow {}_R R \longrightarrow E_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\mu \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

una resolución inyectiva minimal a izquierda de R. Entonces:

(1) $\sigma_{cof}(E_i) = 0$ para cada $i < \mu$.

(2) $\sigma_{cof}(E_\mu) = H^\mu_{\sigma_{cof}}(R)$.

Demostración. Podemos considerar, como ya comentamos antes, que si K_i es la i–ésima cosicigia de R, entonces E_i es la envolvente inyectiva en R–***Mod*** de K_i, para cada $i = 0, ..., \mu$, donde para $i = 0$ estamos tomando $K_0 = {}_R R$.
(1) Sea $i < \mu$. Supongamos que existe algún $0 \neq x \in \sigma_{cof}(E_i)$. Existe entonces algún $I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$, $I \neq R$, tal que $Ix = 0$. En consecuencia, podemos definir un homomorfismo no nulo de R–módulos izquierda, $f : R/I \longrightarrow E_i$, dado por $f(1 + I) = x$ y, por tanto, $\mathrm{Hom}_R(R/I, E_i) \neq 0$.

Como I es un elemento de $\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$ distinto de R, se tiene que R/I es un R–módulo izquierda no nulo finito con lo que, en virtud del teorema (1.4.1), se verifica que $\mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{idim}(R) = \mu$.

Además, usando la igualdad $\mathrm{GKdim}(R/I)+j(R/I)=\mathrm{GKdim}(R)$, y como $\mathrm{GKdim}(R/I)=0$ por ser R/I finito, se tiene que $j(R/I)=\mu$. En consecuencia, $\mathrm{Ext}_R^m(R/I,R)=0$ para todo $m<\mu$.

Como R es libre de σ_{cof}–torsión y R/I es σ_{cof}–torsión, se tiene que $\mathrm{Hom}_R(R/I,R)=0$. Razonemos por inducción que $\mathrm{Hom}_R(R/I,E_m)=0$, para todo $m<\mu$, con lo que llegaremos a una contradicción. Probemos, en primer lugar, que $\mathrm{Hom}_R(R/I,E_0)=0$: Si existiera algún $0\neq g\in \mathrm{Hom}_R(R/I,E_0)$, llamando $y=g(1+I)$ se tendría que $0\neq y\in E_0$ y, en consecuencia, dado que E_0 es una extensión esencial de ${}_RR$, existiría algún $r\in R$ tal que $0\neq ry\in R$. Pero por otro lado, $Iry\subseteq Iy=0$, con lo cual $ry\in\sigma_{cof}(R)=0$, con lo que llegamos a una contradicción.

Supongamos que $\mathrm{Hom}_R(R/I,E_{m-1})=0$ y probemos que

$$\mathrm{Hom}_R(R/I,E_m)=0,\ \text{para}\ m<\mu.$$

Tenemos que

$$0=\mathrm{Ext}_R^m(R/I,R)\cong\mathrm{Ext}_R^{m-1}(R/I,K_1)\cong\ldots\cong\mathrm{Ext}_R^1(R/I,K_{m-1}),$$

con lo que, de la sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow K_{m-1}\longrightarrow E_{m-1}\longrightarrow K_m\longrightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(R/I,K_{m-1})\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(R/I,E_{m-1})\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(R/I,K_m)\longrightarrow 0.$$

Como, por hipótesis de inducción, $\mathrm{Hom}_R(R/I,E_{m-1})=0$, se tiene entonces que $\mathrm{Hom}_R(R/I,K_m)=0$. En consecuencia, puesto que E_m es una extensión esencial de K_m, se sigue que $\mathrm{Hom}_R(R/I,E_m)=0$.
(2) Hemos de computar la cohomología del complejo

$$0\longrightarrow\sigma_{cof}(E_0)\longrightarrow\sigma_{cof}(E_1)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\sigma_{cof}(E_\mu)\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots.$$

Como $\sigma_{cof}(E_0) = \sigma_{cof}(E_1) = ... = \sigma_{cof}(E_{\mu-1}) = 0$, entonces $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R) = \sigma_{cof}(E_{\mu})$. □

En la práctica totalidad de los casos que manejaremos R será un dominio con lo que, en particular, será libre de σ_{cof}–torsión.

El siguiente resultado está adaptado de [4]:

(3.5.5) Lema. *Supongamos que tenemos σ_{cof} (resp. σ_{cof}^{opp}) estable y M un R–módulo izquierda (resp. derecha) σ_{cof}– torsión (resp. σ_{cof}^{opp}–torsión) tal que $\mathrm{Ext}^1_R(R/K, M) = 0$ para todo K ideal izquierda (resp. derecha) de codimensión finita de R. Entonces M es inyectivo como R–módulo izquierda (resp. derecha).*

Demostración. Probemos el resultado a izquierda. El resultado a derecha se demostrará de forma análoga.

Supongamos que M no es inyectivo como R–módulo izquierda. Existe entonces algún $x \in E(M)$, $x \notin M$, donde $E(M)$ representa la envolvente inyectiva de M en R–***Mod***. Dado que M es un R–módulo izquierda σ_{cof}–torsión y σ_{cof} es estable se tiene que $E(M)$ es también un R–módulo izquierda σ_{cof}–torsión. En consecuencia, existe algún $I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$ tal que $Ix = 0$. Sea $K = \{r \in R : rx \in M\}$. Dado que $I \subseteq K$, se tiene entonces que $K \in \mathcal{L}(\sigma_{cof})$. Por otro lado, $f : R/K \longrightarrow (Rx + M)/M$ definido por $f(r + K) = rx + M$ es un isomorfismo de R–módulos izquierda. En consecuencia, $\mathrm{Ext}^1_R((Rx + M)/M, M) = \mathrm{Ext}^1_R(R/K, M) = 0$. De este modo, de la inclusión $i : M \hookrightarrow Rx + M$ obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_R(Rx + M, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R((Rx + M)/M, M) = 0.$$

Existe entonces algún $g \in \mathrm{Hom}_R(Rx + M, M)$ tal que $g \circ i = 1_M$ y, en consecuencia, M es un sumando directo de $Rx + M$, con lo cual

$Rx \cap M = 0$, en contradicción con la esencialidad de M en $E(M)$.

$\square$

Dada nuestra K–álgebra R, definimos la *K–álgebra opuesta*, R^{op}, de la siguiente forma: como K–módulo, existe un K–isomorfismo $R \longrightarrow R^{op}$, que denotamos por $r \longrightarrow r^o$; la multiplicación en R^{op}, $R^{op} \times R^{op} \longrightarrow R^{op}$ viene dada por $(r_1^o, r_2^o) \longrightarrow (r_2 r_1)^o$, donde $r_2 r_1$ es la multiplicación en R. De acuerdo a [31], se tiene entonces que cada R–módulo derecha M es un R^{op}–módulo izquierda si definimos $r^o m := mr$. De forma análoga, cada R–módulo izquierda M' es un R^{op}–módulo derecha si definimos $m' r^o := rm'$.

Se tienen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{R^{op}}(M,N),$$
$$M \otimes_R N \cong N \otimes_{R^{op}} M,$$

..., para cada par apropiado de R–módulos M, N y, como además, M es un R–módulo inyectivo (resp. proyectivo; resp. libre;...) si, y sólo si, M es un R^{op}–módulo inyectivo (resp. proyectivo; resp. libre;...), se tienen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_{R^{op}}(M,N),$$
$$\mathrm{Tor}^R_i(M,N) \cong \mathrm{Tor}^{R^{op}}_i(N,M),$$

..., para cada par apropiado de R–módulos M, N.

(3.5.6) Lema. *Sea R una K–álgebra Auslander-regular y Cohen-Macaulay, con $\mathrm{gldim}(R) = \mu$ y tal que $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ satisface la condición fuerte de second layer. Entonces el R–módulo derecha $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ es inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que R es noetheriano y $\mathrm{gldim}(R) = \mu < \infty$, la proposición (1.1.1) nos da que $\mathrm{idim}(R) = \mu$.

Teníamos que $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ y $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})}\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$ eran isomorfos como grupos abelianos y también como R–módulos izquierda y además probamos que la estructura a derecha de $\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$ pasaba a través del límite directo a $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$, con lo que $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ era también isomorfo como R–módulo derecha a $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})}\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$. Probemos entonces que $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ es un R–módulo derecha inyectivo.

Si $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)=0$, es claro. Supongamos $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)\neq 0$. Dado que $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)\cong\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})}\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$, ha de existir entonces algún $I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$, $I\neq R$. En consecuencia, R/I es un R–módulo finito no nulo y, aplicando el teorema (1.4.1), se tiene que $\operatorname{GKdim}(R)=\operatorname{idim}(R)=\mu$.

Probemos, en primer lugar, que $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ es un R–módulo derecha σ^{opp}_{cof}–torsión (la demostración cuando R es libre de σ_{cof}–torsión está recogida en [17]; la siguiente demostración más general evita tal restricción sobre R) :

Por [7], puesto que R es una K–álgebra Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, con $\operatorname{GKdim}(R)=\operatorname{idim}(R)=\mu$, se tiene que el funtor $\operatorname{Ext}^{\mu}_R(-,R)$ es un funtor contravariante exacto entre las categorías de R–módulos izquierda y derecha finitos, de tal modo que si llamamos $T_i=\operatorname{Ext}^{\mu}_R(-,R)=T_d$, entonces (T_i,T_d) es una dualidad desde $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma_{cof}}$ a $\mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$. Por la exactitud de $\operatorname{Ext}^{\mu}_R(-,R)$ se tiene que, si $J\subseteq I$ son ideales pertenecientes a $\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$, del epimorfismo canónico $p_{JI}:R/J\to R/I$ obtenemos el monomorfismo de R–módulos derecha $j_{JI}:\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)\to\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/J,R)$, con lo cual $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})}\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$ es la unión directa de los $\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$, donde I recorre $\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$. Por otro lado, para cada $I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$, como R/I es un R–módulo izquierda finito, entonces $\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$ es un R–módulo derecha finito, es decir, $\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)\in\mathcal{T}^{fg}_{\sigma^{opp}_{cof}}$. De este modo, $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})}\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$ y, por tanto, $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$, es un R–módulo derecha σ^{opp}_{cof}–torsión.

Veamos entonces que el R–módulo derecha $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ es inyectivo:

Sea J ideal derecha cofinito en R. Se tiene entonces que J es un ideal izquierda cofinito en R^{op}. Dado que R^{op} es Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, y R^{op}/J finito, se tiene entonces que $\mathrm{GKdim}(R^{op}/J) = 0$, $j(R^{op}/J) = \mu = \mathrm{idim}(R^{op})$ y también se tiene $\mathrm{Ext}^s_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op}) = 0$, para cada $s \neq \mu$. La dimensión global finita μ de R nos permite emplear [6, 2,4.14] para obtener los isomorfismos de grupos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^1_{R^{op}}(R^{op}/J, H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R))\\
&\cong \mathrm{Tor}^{R^{op}}_{\mu-1}(\mathrm{Ext}^{\mu}_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op}), H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R))\\
&\cong \mathrm{Tor}^{R}_{\mu-1}(H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R), \mathrm{Ext}^{\mu}_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op}))\\
&\cong \mathrm{Tor}^{R}_{\mu-1}(\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Ext}^{\mu}_{R}(R/I, R), \mathrm{Ext}^{\mu}_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op}))\\
&\cong \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Tor}^{R}_{\mu-1}(\mathrm{Ext}^{\mu}_{R}(R/I, R), \mathrm{Ext}^{\mu}_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op}))
\end{aligned}$$

(de nuevo $\mathrm{Ext}^s_R(R/I, R) = 0$, $\forall s \neq \mu$, por ser R/I finito)

$$\begin{aligned}
&\cong \varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Ext}^1_R(R/I, \mathrm{Ext}^{\mu}_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op}))\\
&\cong H^1_{\sigma_{cof}}(\mathrm{Ext}^{\mu}_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op})).
\end{aligned}$$

Dado que $\mathrm{Ext}^{\mu}_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op})$ es un R–módulo izquierda finito, es un módulo σ_{cof}–torsión y, en consecuencia, $H^1_{\sigma_{cof}}(\mathrm{Ext}^{\mu}_{R^{op}}(R^{op}/J, R^{op})) = 0$.

Por tanto, $\mathrm{Ext}^1_{R^{op}}(R^{op}/J, H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)) = 0$. Por otro lado, como $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ es σ^{opp}_{cof}–torsión como R–módulo derecha, es σ_{cof}–torsión como R^{op}–módulo izquierda. La biestabilidad de σ_{cof} proporcionada por la condición fuerte de second layer de $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ y el lema (3.5.5) aplicado a R^{op} nos dan que $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ es inyectivo como R^{op}–módulo izquierda y, en consecuencia, inyectivo como R–módulo derecha.

□

Cerramos este capítulo con el siguiente resultado que nos permite identificar R^o con E_μ, no sólo como R–módulos izquierda, como se hizo en el teorema (3.5.3), sino también como R–módulos derecha, con una conveniente estructura de R–módulo derecha sobre E_μ.

(3.5.7) Teorema. *Sea R una K–álgebra noetheriana, Auslander-regular, Cohen-Macaulay, libre de σ_{cof}–torsión, con $\mathrm{gldim}(R) = \mu = \mathrm{GKdim}(R)$ y tal que P satisface la condición fuerte de second layer y $\dim_K(\mathrm{Ext}^\mu_R(R/P, R)) = \dim_K(R/P)$, para cada ideal primo cofinito P de R. Entonces R^o es isomorfo, como R–módulo izquierda y como R–módulo derecha, a E_μ, el último punto de la resolución inyectiva minimal a izquierda de R.*

Demostración. El isomorfismo como R–módulos izquierda entre R^o y E_μ fue demostrado ya en el teorema (3.5.3). Demostremos ahora el isomorfismo como R–módulos derecha.

Dado que existe un isomorfismo de R–módulos izquierda $E_\mu \cong R^o = \sigma_{cof}(R^*)$, se tiene que E_μ es un R–módulo izquierda σ_{cof}–torsión, con lo cual, aplicando el lema (3.5.4), tenemos que $E_\mu = H^\mu_{\sigma_{cof}}(R)$. De este modo, puesto que $H^\mu_{\sigma_{cof}}(R)$ es un R–bimódulo, E_μ tiene una estructura de R–bimódulo de tal forma que es isomorfo, como R–módulo izquierda y como R–módulo derecha, a $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Ext}^\mu_R(R/I, R)$.

Demostremos, en primer lugar, que cada R–módulo derecha R/P, cuando P recorre los ideales biláteros cofinitos de R, está contenido una vez, y sólo una, en E_μ.

Sea $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$. Veamos que el R–módulo izquierda

$$_RM = \mathrm{Ext}^\mu_R((R/P)_R, R_R)$$

(donde la estructura a izquierda proviene de la de R) es de la forma $_R(R/Q)$, para algún $Q \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$.

Como R/P es una K–álgebra artiniana simple finito-dimensional, es un R–módulo derecha finito e isomorfo a derecha a S'^m, donde S' es un R–módulo derecha simple finito. Se tienen entonces los isomorfismos de R–módulos izquierda

$$\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/P, R_R) \cong (\operatorname{Ext}^{\mu}_R(S', R_R))^m.$$

Como S'_R es simple y la dualidad de Bernstein

$$(\operatorname{Ext}^{\mu}_R(-,_R R), \operatorname{Ext}^{\mu}_R(-, R_R))$$

desarrollada por Björk preserva la longitud de los módulos, entonces $T = \operatorname{Ext}^{\mu}_R(S', R)$ es un R–módulo izquierda simple finito y como

$$\dim_K(T^m) = \dim_K(\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/P, R_R))$$

la cual coincide, por hipótesis, con $\dim_K(R/P) = m^2$, se tiene que $\dim_K(T) = m = \dim_K(S')$.

Tomando entonces $Q = Ann^l_R(T)$, tenemos que $Q \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ y R/Q es isomorfo, como R–módulo izquierda, a T^m y, por tanto, a

$$\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/P, R_R).$$

Aplicando de nuevo la dualidad de Bernstein al isomorfismo

$$\operatorname{Ext}^{\mu}_R((R/P)_R, R_R) \cong_R (R/Q),$$

obtenemos un isomorfismo de R–módulos derecha

$$(R/P)_R \cong \operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/Q,_R R)_R.$$

Puesto que los morfismos de transición del sistema directo

$$((\operatorname{Ext}^{\mu}_R(R/I, R))_R, I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof}))$$

son inyectivos, se tiene que $\varinjlim_{I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/I,R)$ es la unión directa de los $(\mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/I,R))_R$, $I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$ y, en consecuencia, a partir del isomorfismo a derecha de E_μ con este límite directo, $(R/P)_R$ está contenido en $(E_\mu)_R$.

Veamos ahora que no puede haber más de una copia de $(R/P)_R$ contenida en $(E_\mu)_R$. Supongamos que

$$(R/P)_R\oplus(R/P)_R\subseteq(\mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/I,R))_R,$$

para algún $I\in\mathcal{L}^2(\sigma_{cof})$. Aplicando a esta inclusión el funtor exacto entre módulos finitos $\mathrm{Ext}^{\mu}_R(-,R)$ se obtiene la sucesión exacta en R–***Mod***

$$R/I\to R/Q\oplus R/Q\to 0.$$

Por tanto existe algún ideal izquierda J de R, $I\subseteq J$, tal que $R/J\cong R/Q\oplus R/Q$, con lo cual $Q\subseteq J$ y se obtiene la contradicción

$$\dim_K(R/Q)\geq\dim_K(R/J)=2\dim_K(R/Q).$$

Además, por la versión derecha de la proposición (3.3.2), la suma en $(E_\mu)_R$ de los R–módulos derecha $(R/P)_R$, cuando P recorre los ideales biláteros cofinitos de R, es directa, al ser los P distintos dos a dos.

Por el teorema (3.3.4), $(R^o)_R$ es la envolvente inyectiva en ***Mod***–R de $\oplus_{P\in\mathcal{Z}(\sigma_{cof})}(R/P)_R$. Dado que $\oplus_{P\in\mathcal{Z}(\sigma_{cof})}(R/P)_R\subseteq(E_\mu)_R$ y $(E_\mu)_R=H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ es inyectivo en ***Mod***–R por el lema (3.5.6), se tiene entonces que existe un monomorfismo de R–módulos derecha

$$(R^o)_R\hookrightarrow(E_\mu)_R.$$

Veamos ahora que $(E_\mu)_R$ es una extensión esencial de

$$\oplus_{P\in\mathcal{Z}(\sigma_{cof})}(R/P)_R,$$

con lo cual el anterior morfismo será un isomorfismo de R–módulos derecha. Sea $x \in (E_\mu)_R$. Puesto que $(E_\mu)_R$ es un R–módulo derecha σ_{cof}^{opp}–torsión, xR es finito y, por tanto, contiene algún R–submódulo derecha simple finito S'. En consecuencia, dado que $P' = Ann_R^r(S') \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ y $(R/P')_R \cong (S'_R)^m$, se tiene que $xR \cap \oplus_{P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})}(R/P)_R \neq 0$. □

Disponemos también de una segunda demostración del resultado anterior, eliminando la restricción de que R tenga que ser libre de σ_{cof}–torsión y flexibilizando la exigencia de que R sea Auslander-regular a que sea Auslander-Gorenstein, obteniendo así el resultado deseado:

(3.5.8) Teorema. *Sea R una K–álgebra noetheriana, Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, con* $\mathrm{idim}(R) = \mu = \mathrm{GKdim}(R)$ *y tal que P satisface la condición fuerte de second layer y*

$$\dim_K(\mathrm{Ext}_R^\mu(R/P, R)) = \dim_K(R/P),$$

para cada ideal primo cofinito P de R. Entonces R^o es isomorfo, como R–módulo izquierda y como R–módulo derecha, a E_μ, el último punto de la resolución inyectiva minimal a izquierda de R.

Demostración. Dado que R es una K–álgebra noetheriana, Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, con

$$\mathrm{idim}(R) = \mu = \mathrm{GKdim}(R),$$

si llamamos $T_i = \mathrm{Ext}_R^\mu(-, R) = T_d$, Björk establece en [7] que (T_i, T_d) es una dualidad respecto a σ_{cof}. Como además, por hipótesis, P verifica la condición fuerte de second layer y

$$\dim_K(\mathrm{Ext}_R^\mu(R/P, R)) = \dim_K(R/P),$$

para todo $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$, se sigue del teorema (3.4.3) que R^o es isomorfo, como R–módulo izquierda y como R–módulo derecha, a

$\varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/I, R)$. Por otro lado, aplicando el teorema (3.5.3), se tiene que E_μ es isomorfo, como R–módulo izquierda, a R^o y, por tanto, a $\varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/I, R)$. Razonando del mismo modo a como se hizo para $H^{\mu}_{\sigma_{cof}}(R)$ en la sección 3.2., la estructura de R–módulo derecha de $\mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/I, R)$ pasa, a través del límite directo, a E_μ, con lo cual, por el isomorfismo a derecha antes comentado entre R^o y $\varinjlim_{I \in \mathcal{L}^2(\sigma_{cof})} \mathrm{Ext}^{\mu}_R(R/I, R)$, se tiene que R^o es isomorfo como R–módulo derecha a E_μ. □

De este modo estamos identificando, en las condiciones anteriormente expuestas, el último punto de la resolución inyectiva minimal a izquierda de R con el último punto de la resolución inyectiva minimal a derecha de R.

Capítulo 4

Ejemplos.

Si R es una K–álgebra noetheriana, Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, con $\mathrm{idim}(R) = \mu = \mathrm{GKdim}(R)$, y llamamos $T_i = \mathrm{Ext}_R^{\mu}(-, R) = T_d$, tenemos que (T_i, T_d) es una dualidad respecto a σ_{cof} (*dualidad de Bernstein*). Estamos interesados en encontrar ejemplos de K–álgebras R en las cuales la anterior dualidad esté representada por R^o. Para ello, si además de las condiciones anteriores, se verifica que $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ satisface la condición fuerte de second layer, solamente tendremos que probar que $\dim_K(\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P, R)) = \dim_K(R/P)$, para cada ideal primo cofinito P de R, de acuerdo al teorema (3.4.3).

4.1. Álgebras punteadas.

Decimos que una K–álgebra R es *punteada* si cada ideal primo cofinito P de R tiene codimensión uno. En [13] se prueba que si R es una K–álgebra noetheriana punteada Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay, con $\mathrm{idim}(R) = \mu = \mathrm{GKdim}(R)$, entonces

$$\dim_K(\mathrm{Ext}_R^{\mu}(R/P, R)) = \dim_K(R/P),$$

para cada ideal primo cofinito P de R. De este modo, si R es una K–álgebra punteada Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, con $\mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{idim}(R)$ y tal que cada ideal primo cofinito P de R verifique la condición fuerte de second layer, en ella la dualidad de Bernstein estará representada por R^o.

Si R es una K–álgebra noetheriana y P un ideal (bilátero) de R, decimos que P es un *ideal completamente primo* de R si la $K-$álgebra cociente R/P es un dominio. El siguiente resultado, obtenido de [29], será de gran utilidad en el estudio de álgebras punteadas.

(4.1.1) Lema. *Sea R una K–álgebra noetheriana, con K algebraicamente cerrado, y P un ideal primo cofinito de R. Entonces: P es completamente primo si, y sólo si, la extensión $K \hookrightarrow R/P$ es una igualdad (o, equivalentemente, P es de codimensión uno).*

Demostración. Si $R/P = K$, entonces es claro que R/P es un dominio. Veamos la implicación contraria.

Supongamos que R/P es un dominio. Dado que la K–álgebra R/P es un dominio artiniano simple (finito-dimensional), tenemos que R/P es un anillo de división finito-dimensional sobre K.

Supongamos que $K \subsetneq R/P$. Existe entonces algún $x \in R/P$ tal que $x \notin K$. Llamemos S al subanillo de R/P generado por K y x. S es un dominio conmutativo, luego su anillo de fracciones F es un cuerpo, y verifica que $K \subsetneq F \subseteq R/P$. En consecuencia F es una extensión de K de dimensión estrictamente mayor que uno, lo cual contradice el hecho de que K sea algebraicamente cerrado. Se concluye, por tanto, que la inclusión $K \subseteq R/P$ es una igualdad.

$\square$

Los siguientes van a ser ejemplos de álgebras punteadas en las que se verifican las condiciones antes mencionadas:

4.1.1. Álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie soluble finito-dimensional sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Consideremos $R = \mathcal{U}(g)$ el álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie soluble finito-dimensional g, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K. Se prueba en [4] que R^o representa la dualidad de Bernstein. Vamos a comprobar que la K–álgebra R es una K–álgebra punteada que verifica nuestras condiciones de regularidad, con lo cual el resultado de Barou y Malliavin podrá verse como un caso particular de nuestro estudio más general.

Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una K–base de g, entonces R puede ser descrita como la K–álgebra asociativa generada por los elementos $x_1, \ldots, x_n$, con las relaciones $x_ix_j - x_jx_i = [x_i, x_j]$, para cada par i,j, donde $[-,-]$ representa el corchete de Lie de g (ver, por ejemplo, [28]). R es por tanto una K–álgebra afín y, si llamamos V al K–subespacio finito-dimensional generado por $x_1, \ldots, x_n$, podemos considerar en R la filtración finito-dimensional estándar $\{R_n\}$ dada por $R_0 = V^0 = K$ y $R_n = \sum_{i=0}^n V^i$. El anillo graduado asociado, grR, es isomorfo al álgebra de polinomios en las indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$, $K[x_1, \ldots, x_n]$, con lo cual, aplicando la proposición (1.2.1), tenemos que R es un dominio noetheriano. Por [28, 8, 1.15], tenemos que $\mathrm{GKdim}(R) = n$, y puesto que g es soluble y K algebraicamente cerrado de característica cero, $\mathrm{gldim}(R) = n$, aplicando [28, 7, 5.7 Theorem (b)]. Por [26, III, 2.4.4], R es Auslander-regular. Por otro lado, aplicando [28, 8,1.14], $\mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{GKdim}(grR)$ y $\mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{GKdim}(grM)$, para cualquier R–módulo M finitamente generado. Además, por [26, III,2.5.2], $j_R(M) = j_{grR}(grM)$. En consecuencia, dado que $grR = K[x_1, \ldots, x_n]$ es Cohen-Macaulay, se tiene que

$$\begin{aligned} j_R(M) &= j_{grR}(grM) \\ &= \mathrm{GKdim}(grR) - \mathrm{GKdim}(grM) \\ &= \mathrm{GKdim}(R) - \mathrm{GKdim}(M), \end{aligned}$$

con lo que R es Cohen-Macaulay.

Puesto que R es noetheriano y $\mathrm{gldim}(R) = n$, la proposición (1.1.1) nos da que $\mathrm{idim}(R) = n$. Alternativamente, de la existencia de R–módulos finito–dimensionales no nulos (el ideal aumentación es un ideal primo de codimensión uno), junto con la regularidad Auslander y la condición Cohen-Macaulay de R se sigue, aplicando el teorema (1.4.1), que $\mathrm{idim}(R) = \mathrm{GKdim}(R)$, cuyo valor, como antes hemos visto, es n (este razonamiento se va a poder aplicar a la mayoría de los ejemplos que vamos a tratar en los cuales, una vez se determina que son K–álgebras noetherianas Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay con módulos finito–dimensionales no nulos, automáticamente se tendrá la igualdad de las dimensiones inyectiva y de Gelfand-Kirillov y, por tanto, conocida una de ellas se tendrá al mismo tiempo la otra dimensión).

Por otro lado, dado que g es soluble se tiene, aplicando [13, 2.1], que cada $P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ verifica la condición fuerte de second layer. Finalmente, todos los ideales primos P de R (en particular, los cofinitos) son completamente primos (ver [28, 14,5.5]), con lo cual R es una K–álgebra punteada, de acuerdo al lema (4.1.1).

4.1.2. Plano cuántico $\mathbb{C}_q[X_1, X_2]$ (q no raíz de la unidad).

El plano cuántico, $R = \mathbb{C}_q[X_1, X_2]$, se define como la $\mathbb{C}$–álgebra generada por X_1, X_2, satisfaciendo la relación $X_2X_1 = qX_1X_2$. R es un dominio noetheriano con $\mathbb{C}$–base $\{X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}\}$, Auslander-regular y Cohen-Macaulay, con $\mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{gldim}(R) = 2$ (ver estudio del espacio cuántico n–dimensional, $\mathbb{C}_q[X_1, \ldots, X_n]$, más adelante).

En [13] se demuestra que $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ verifica la condición fuerte de second layer y, en el caso en q no es una raíz de la unidad, que R es una K–álgebra punteada, mostrándose explícitamente todos los ideales primos cofinitos de R. Finalmente, aplicando la proposición (1.1.1), obtenemos que $\mathrm{idim}(R) = \mathrm{gldim}(R) = 2$.

4.1.3. Anillo de coordenadas cuántico del grupo lineal especial, $\mathcal{O}_q(SL_n(\mathbb{C}))$ (q no raíz de la unidad).

Este ejemplo es estudiado en [13]. Se prueba que $R = \mathcal{O}_q(SL_n(\mathbb{C}))$ es un dominio noetheriano, Auslander-regular, Cohen-Macaulay, con $\mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{gldim}(R) = n^2 - 1$ (por tanto, la dimensión inyectiva de R también es $n^2 - 1$), tal que $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ satisface la condición fuerte de second layer y, en el caso en que q no es una raíz de la unidad, cada ideal primo P de R es completamente primo, con lo que R es una K–álgebra punteada.

4.2. El espacio cuántico n–dimensional.

El primer ejemplo de álgebra no punteada que estudiamos es el del espacio cuántico n–dimensional, $\mathbb{C}_q[X_1, \ldots, X_n]$, $(n \geq 2)$, en el caso en que q es una raíz de la unidad. Este ejemplo es tratado en [17], y extiende el del plano cuántico $\mathbb{C}_q[X_1, X_2]$, q raíz de la unidad, estudiado en [13]. Recordemos que $R = \mathbb{C}_q[X_1, \ldots, X_n]$ es la $\mathbb{C}$–álgebra con generadores $X_1, \ldots, X_n$ y relaciones $X_jX_i = qX_iX_j$, si $j > i$. Consideremos además que q es una raíz d–ésima primitiva de la unidad, es decir, $q^d = 1$ y d es el menor entero positivo que verifica tal propiedad.

4.2.1. El centro.

Denotemos por Z al centro de $R = \mathbb{C}_q[X_1, \ldots, X_n]$. De la relación entre las indeterminadas se sigue que, para cualquier entero positivo r, se verifica que $X_j^rX_i = q^rX_iX_j^r$ (resp. $X_j^rX_i = q^{-r}X_iX_j^r$) si $j > i$ (resp. $j < i$), de lo que se deduce que $X_i^d \in Z$ para todo $i = 1, ..., n$. En consecuencia, si denotamos por $C = \mathbb{C}[X_1^d, \ldots, X_n^d]$, tenemos que C es una $\mathbb{C}$–subálgebra de Z.

Cada $r \in R$ se puede expresar de forma única como $r = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$, con $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$. Asumamos que $r \in Z$. Entonces, para cualquier $r' \in R$ se tiene que $r'r = rr'$. Tomando $r' = X_i$ ($i = 1, ..., n$) se obtiene

$$X_i r = X_i \left(\sum_\alpha a_\alpha X^\alpha \right) = \sum_\alpha q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1}} a_\alpha X^{\alpha + e_i},$$

$$r X_i = \left(\sum_\alpha a_\alpha X^\alpha \right) X_i = \sum_\alpha q^{\alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n} a_\alpha X^{\alpha + e_i},$$

con $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \ldots, 0)$. En consecuencia, si $a_\alpha \neq 0$, ha de verificarse que

$$q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1}} = q^{\alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n}$$

o, equivalentemente, que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1} - (\alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n)$ es un múltiplo entero de d. Existen por tanto $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} -(\alpha_2 + \cdots + \alpha_n) &= \lambda_1 d \\ \alpha_1 - (\alpha_3 + \cdots + \alpha_n) &= \lambda_2 d \\ &\vdots \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} &= \lambda_n d. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Operando sobre las anteriores ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1) d \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= (\lambda_3 - \lambda_2) d \\ &\vdots \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} &= (\lambda_n - \lambda_{n-1}) d \end{aligned}$$

y, por tanto

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\alpha_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) d \\ \alpha_3 &= \alpha_1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3) d \\ &\vdots \\ \alpha_n &= (-1)^{n+1} [\alpha_1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \cdots + (-1)^n 2\lambda_{n-1} + (-1)^{n+1} \lambda_n) d] \end{aligned}$$

En el caso n par, si sustituimos lo anterior en la primera ecuación de (4.1) obtenemos que α_1 ha de ser un múltiplo entero de d y, por tanto, también $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, con lo cual $Z = C$.

En el caso n impar no obtenemos tal restricción sobre α_1. En consecuencia, α ha de ser de la forma $\alpha = (m, -m+\delta_2 d, m+\delta_3 d, ..., m+\delta_n d)$, para ciertos $m \in \mathbb{N}$ y $\delta_2, \ldots, \delta_n \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, si m es un número natural y $\delta_2, \ldots, \delta_n$ son números enteros tales que $\alpha = (m, -m + \delta_2 d, m + \delta_3 d, ..., m + \delta_n d) \in \mathbb{N}^n$, podemos comprobar que $X^\alpha \in Z$. En consecuencia, un sistema de generadores de Z sobre C vendrá dado por $\{X^{(m)} : m = 0,1,...,d-1\}$, donde $X^{(m)} = X_1^m X_2^{d-m} X_3^m \cdots X_{n-1}^{d-m} X_n^m$, $\quad (X^{(0)} = 1)$. Además, podemos comprobar que $X^{(0)}, X^{(1)}, ..., X^{(d-1)}$ son C–linealmente independientes, con lo cual Z es un módulo libre sobre C de rango d.

Resumiendo, si n es par, entonces el centro Z de R coincide con $C = \mathbb{C}[X_1^d, \ldots, X_n^d]$, mientras que si n es impar, C está estrictamente contenida en Z y Z es un módulo libre sobre C de rango d con C–base dada por $\{X^{(m)} : m = 0,1,...,d-1\}$, donde $X^{(m)} = X_1^m X_2^{d-m} X_3^m \cdots X_{n-1}^{d-m} X_n^m$, $\quad (X^{(0)} = 1)$.

En cualquiera de los casos se tiene además que R es un módulo libre sobre C con C–base dada por $\{X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n} : 0 \leq \alpha_i \leq d-1\}$.

Analizando las extensiones que nos aparecen observamos que la inclusión $C \hookrightarrow Z$ es una extensión entera y que $Z \hookrightarrow R$ es una extensión centralizante finita. Como consecuencia habrá importantes relaciones a la hora de bajar los ideales primos cofinitos desde R hasta cada una de las otras subálgebras por contracción y luego tratar de recuperarlos en R por extensión. Ver [22] y [28].

4.2.2. Propiedades homológicas y condiciones de regularidad.

Para probar las propiedades homológicas y condiciones de regularidad de la $\mathbb{C}$–álgebra R nos interesa describirla como una extensión de Ore iterada (ver, por ejemplo, [28] para las correspondientes definiciones y resultados). En efecto, construimos las extensiones de Ore

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1},$$

con $A_0 = \mathbb{C}[X_n]$, $A_i = A_{i-1}[X_{n-i};\sigma_{i-1}]$ $(i = 1, ..., n-1)$, donde $\sigma_{i-1} : A_{i-1} \longrightarrow A_{i-1}$ es un automorfismo de $\mathbb{C}$–álgebras definido sobre los generadores por $\sigma_{i-1}(X_j) = qX_j$ $(j = n-i+1, \ldots, n)$. Podemos comprobar que R es isomorfa a A_{n-1}, con lo cual, por [28, 1, section 2], R es un dominio noetheriano con $\mathbb{C}$–base $\{X^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, donde para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

En consecuencia, R es una $\mathbb{C}$–álgebra afín. Consideremos V el $\mathbb{C}$–subespacio de R generado por $\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $\{R_i\}$ la filtración finito-dimensional estándar de R dada por $R_0 = V^0 = \mathbb{C}$, $R_i = \sum_{j=0}^{i} V^j$. Para cada i, una base de R_i está formada por los X^α, con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq i$. El número de elementos de esta base es

$$\binom{i+n}{n}$$

que es un polinomio en i de grado n. En consecuencia, $\mathrm{GKdim}(R) = n$. Por otro lado, aplicando [28, 7, 5.3 (iii)], se tiene que $\mathrm{gldim}(R) = n$ y, empleando la proposición (1.1.1), que $\mathrm{idim}(R) = n$.

La regularidad Auslander de R se sigue directamente de [25, Lemma], por la construcción de R como extensión de Ore iterada. Para obtener la condición Cohen-Macaulay graduamos los anillos base de la cadena de extensiones de Ore

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} = R,$$

por el grado total de sus monomios de la forma $A_i = \oplus_{j\in\mathbb{N}}(A_i)_j$, con $(A_i)_j$ el $\mathbb{C}$–subespacio de A_i generado por los monomios

$$X_{n-i}^{\alpha_{n-i}} X_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}} \cdots X_n^{\alpha_n},$$

con $\alpha_{n-i}, \alpha_{n-i+1}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_{n-i} + \alpha_{n-i+1} + \cdots + \alpha_n = j$. Aplicando ahora la segunda parte de [25, Lemma] obtenemos que R es Cohen-Macaulay.

(Nótese que las anteriores propiedades son independientes de que q sea o no raíz de la unidad. En particular son válidas para $\mathbb{C}_q[X_1, X_2]$, q no raíz de la unidad).

Finalmente, por ser $Z \hookrightarrow R$ una extensión de anillos noetherianos tal que R es un módulo finitamente generado sobre Z, se sigue de [23, 4.2] que R satisface la condición fuerte de second layer.

4.2.3. Ideales primos cofinitos.

Como hemos mostrado anteriormente, tenemos las extensiones de anillos

$$C \hookrightarrow Z \hookrightarrow R,$$

donde $C = \mathbb{C}[X_1^d, \ldots, X_n^d]$ y Z es el centro de R. Sea P un ideal primo cofinito de R. Las trazas de P sobre C, $P \cap C$, y sobre Z, $P \cap Z$, vuelven a ser ideales primos cofinitos. Llamemos $P' = P \cap C$ y $P'' = P \cap Z$. Como P' es un ideal primo cofinito de C, es un ideal maximal de C y, por tanto, existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tales que $P' = (X_1^d - a_1, \ldots, X_n^d - a_n)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a_i = 0$ ó 1. En efecto, si $a_i \neq 0$, entonces podemos cambiar la indeterminada X_i por X_i/b_i, donde b_i es una raíz d–ésima de a_i.

En orden a estudiar el ideal P podemos asumir también que $a_n = \ldots = a_{i+1} = 0$ y $a_1 = \ldots = a_i = 1$. Entonces $X_n^d \in P' \subseteq P$. Como P es primo y X_n es un elemento normalizante de R, entonces $X_n \in P$. Por tanto, si llamamos $I = (X_n)$ e I', I'' sus ideales traza en C y Z, respectivamente, tenemos la torre de extensiones de anillos

$$C/I' \hookrightarrow Z/I'' \hookrightarrow R/I.$$

P/I vuelve a ser un ideal primo cofinito de R/I, y su traza en C/I' es $(X_1^d - a_1, \ldots, X_{n-1}^d - a_{n-1})/I'$, con lo que reducimos el problema a una dimensión menos. Por tanto, en nuestro estudio de P podemos suponer que cualquier a_i es igual a 1.

Previamente a determinar el ideal P'' introducimos el siguiente resultado general que usaremos en varias ocasiones:

(4.2.1) Proposición. *Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión centralizante finita de anillos noetherianos, tal que B es un A–módulo libre finitamente generado con base sobre A, $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Sea I un ideal de A. Entonces: B/IB es un A/I–módulo libre finitamente generado con base sobre A/I, $\{e_1 + IB, \ldots, e_m + IB\}$.*

Demostración. Puesto que $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es un sistema de generadores de B sobre A, se tiene que $\{e_1 + IB, \ldots, e_m + IB\}$ es un sistema de generadores de B/IB sobre A/I.

Demostremos la independencia lineal. Supongamos que tenemos $\sum_{i=1}^m (\lambda_i + I)(e_i + IB) = 0 + IB \quad (\lambda_i \in A)$. Se sigue entonces que $\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \in IB$ y, en consecuencia, existen $x_1, \ldots, x_r \in I$, $\delta_1, \ldots, \delta_r \in B$ tales que $\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^r x_j \delta_j$.

Como $\delta_j \in B$ para todo $j = 1, \ldots, r$ y $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una base de B sobre A, cada δ_j se puede expresar de forma única como $\delta_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(j)} e_i$, con $\alpha_i^{(j)} \in A$. Por tanto:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^r x_j \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^{(j)} e_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^r \alpha_i^{(j)} x_j \right) e_i.$$

En consecuencia, por la A–independencia lineal de $\{e_1, \ldots, e_m\}$, se tiene, para cada $i = 1, \ldots, m$, que

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^r \alpha_i^{(j)} x_j \in I,$$

es decir, $\lambda_i + I = 0 + I$, con lo cual demostramos que, efectivamente, $\{e_1 + IB, \ldots, e_m + IB\}$ es una base de B/IB sobre A/I. $\square$

Determinemos ahora el ideal P''. Puesto que $C \hookrightarrow Z$ es una extensión entera y P'' es un ideal primo de Z tal que $P'' \cap C = P'$, entonces P'' es un ideal primo minimal sobre $P'Z$. Si n es par, entonces $C = Z$ y $P' = P''$. En el caso en que n es impar, teníamos que $\{X^{(m)} : m = 0, 1, ..., d-1\}$, donde $X^{(m)} = X_1^m X_2^{d-m} X_3^m \cdots X_{n-1}^{d-m} X_n^m$, ($X^{(0)} = 1$), es una base de Z sobre C. Aplicando la proposición anterior tenemos que $\{X^{(m)} + P'Z : m = 0, 1, ..., d-1\}$ es una base de $Z/P'Z$ sobre $C/P' \cong \mathbb{C}$ o, equivalentemente, llamando $T = X^{(1)} + P'Z$, puesto que para cada m se verifica que $T^m = q^{-\frac{n-1}{2}\frac{m(m-1)}{2}} X^{(m)} + P'Z$, se tiene que $\{1, T, ..., T^{d-1}\}$ es una $\mathbb{C}$–base de $Z/P'Z$. En particular, $\dim_{\mathbb{C}}(Z/P'Z) = d$. Podemos considerar entonces el epimorfismo de $\mathbb{C}$–álgebras

$$\nu : \mathbb{C}[X] \longrightarrow Z/P'Z$$

dado por $\nu(X) = T$. Dado que $\nu(X^d) = q^{-\frac{n-1}{2}\frac{d(d-1)}{2}} + P'Z$, llamando $\beta = q^{-\frac{n-1}{2}\frac{d(d-1)}{2}}$ tenemos que $X^d - \beta \in \mathrm{Ker}(\nu)$. Puesto que

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}[X]}{(X^d - \beta)}\right) = d = \dim_{\mathbb{C}}(Z/P'Z),$$

se tiene entonces que $\mathrm{Ker}(\nu) = (X^d - \beta)$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ son las raíces d–ésimas de β, tenemos que

$$(X^d - \beta) = (X - \gamma_1) \cap \ldots \cap (X - \gamma_d)$$

es una descomposición primaria de $(X^d - \beta)$ en $\mathbb{C}[X]$ y, en consecuencia,

$$P'Z = \bigcap_{i=1}^{d} (X_1^d - 1, \ldots, X_n^d - 1, X_1 X_2^{d-1} \cdots X_{n-1}^{d-1} X_n - \gamma_i)$$

es una descomposición primaria de $P'Z$ y nuestro P'' será alguno de esos ideales primos, es decir

$$P'' = (X_1^d - 1, \ldots, X_n^d - 1, X_1 X_2^{d-1} \cdots X_{n-1}^{d-1} X_n - \gamma),$$

donde γ es una raíz d–ésima de $\beta = q^{-\frac{n-1}{2}\frac{d(d-1)}{2}}$.

(4.2.2) Proposición. *Con la anterior notación, tenemos*

$$P'' = P \cap Z = \begin{cases} (X_1^d - 1, \ldots, X_n^d - 1) & \textit{si } n \textit{ es par, y} \\ (X_1^d - 1, \ldots, X_n^d - 1, X_1 X_2^{d-1} \cdots X_{n-1}^{d-1} X_n - \gamma) & \textit{si } n \textit{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora vamos a recuperar P desde P''. Para ello vamos a seguir técnicas de álgebras de Azumaya (ver, por ejemplo, [32], para las correspondientes definiciones).

(4.2.3) Lema. *$R/P'R$ es separable sobre C/P'.*

Demostración. Tenemos la inclusión $\mathbb{C} \cong C/P' \subseteq R/P'R$ y probemos que

$$e = \frac{1}{d^n} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{d-1} (X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} + P'R) \otimes (X_n^{d-\alpha_n} \cdots X_1^{d-\alpha_1} + P'R)$$

es un idempotente de separabilidad de $R/P'R$. Observamos, en primer lugar, que $e \in (R/P'R) \otimes_{C/P'} (R/P'R)^{op}$. Además, $p(e) = 1 + P'R$, donde p es la proyección canónica

$$p : (R/P'R) \otimes_{C/P'} (R/P'R)^{op} \longrightarrow R/P'R$$

dada por $p(\sum r_{1i} \otimes r_{2i}) = \sum r_{1i} r_{2i}$. Restaría por comprobar que $(r+P'R)e = e(r+P'R)$ para todo $r+P'R \in R/P'R$ o, equivalentemente, que $(X_i + P'R)e = e(X_i + P'R)$, es decir, $[(X_i + P'R) \otimes (1 + P'R)]e = [(1 + P'R) \otimes (X_i + P'R)]e$, para todo $i = 1, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
&(X_i+P'R)e\\
&=[(X_i+P'R)\otimes(1+P'R)][\frac{1}{d^n}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0}^{d-1}(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}+P'R)\\
&\otimes(X_n^{d-\alpha_n}\cdots X_1^{d-\alpha_1}+P'R)]\\
&=\frac{1}{d^n}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0}^{d-1}q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}}[(X_1^{\alpha_1}\cdots X_i^{\alpha_i+1}\cdots X_n^{\alpha_n}+P'R)\\
&\otimes(X_n^{d-\alpha_n}\cdots X_1^{d-\alpha_1}+P'R)]\\
&=\frac{1}{d^n}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0}^{d-1}q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}}[(X_1^{\alpha_1}\cdots X_i^{\alpha_i}\cdots X_n^{\alpha_n}+P'R)\\
&\otimes(X_n^{d-\alpha_n}\cdots X_i^{d-\alpha_i+1}\cdots X_1^{d-\alpha_1}+P'R)]\\
&=[(1+P'R)\otimes(X_i+P'R)][\frac{1}{d^n}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0}^{d-1}(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}+P'R)\\
&\otimes(X_n^{d-\alpha_n}\cdots X_1^{d-\alpha_1}+P'R)]\\
&=e(X_i+P'R).
\end{aligned}
$$

□

(4.2.4) Corolario. *$R/P''R$ es separable sobre Z/P''.*

Demostración. Dado que $P'=P'R\cap C=P''R\cap C$, tenemos las extensiones de álgebras $C/P'\hookrightarrow R/P'R$ y $C/P'\hookrightarrow R/P''R$. Puesto que $P'R\subseteq P''R$, podemos considerar $f:R/P'R\longrightarrow R/P''R$ el correspondiente epimorfismo de C/P'–álgebras, con lo cual, dado que $R/P'R$ es separable sobre C/P', y aplicando [32, 5.3.12], tenemos que $R/P''R$ es separable sobre C/P'. Aplicando entonces [32, 5.3.13] a la extensión de álgebras conmutativas $C/P'\hookrightarrow Z/P''$, obtenemos que $R/P''R$ es separable sobre Z/P''. □

(4.2.5) Lema. $\mathrm{Cen}(R/P''R)=Z/P''$.

DEMOSTRACIÓN. Calculemos primero el centro de $R/P'R$. Puesto que $\{X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_n^{\alpha_n} : 0 \leq \alpha_i \leq d-1\}$ es una base de R sobre C, aplicando la proposición (4.2.1) tenemos que $\{X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_n^{\alpha_n}+P'R : 0 \leq \alpha_i \leq d-1\}$ es una base de $R/P'R$ sobre $C/P' \cong \mathbb{C}$, de donde se sigue que $\mathrm{Cen}(R/P'R) = (Z+P'R)/P'R$.

Aplicando [32, 5.3.12] al epimorfismo $f : R/P'R \longrightarrow R/P''R$, obtenemos que $\mathrm{Cen}(R/P''R) = f(\mathrm{Cen}(R/P'R))$. En consecuencia

$$\mathrm{Cen}(R/P''R) = f\left(\frac{Z+P'R}{P'R}\right) = \frac{Z+P''R}{P''R} = \frac{Z}{P''R\cap Z} = \frac{Z}{P''}.$$

□

(4.2.6) Teorema. *$R/P''R$ es un álgebra de Azumaya.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar [32, 5.3.24] a los anteriores resultados. □

En consecuencia, por [32, 5.3.25], existe una correspondencia biyectiva entre ideales en Z/P'' e ideales en $R/P''R$, dada por $I \mapsto I(R/P''R)$, y la correspondencia inversa, $J \mapsto J\cap(Z/P'')$. Esta correspondencia se extiende a ideales primos. Por tanto, $R/P''R$ es primo. Como además $P''R$ es cofinito, entonces $P''R$ es un ideal bilátero maximal y, puesto que $P''R \subseteq P$, se sigue que $P = P''R$.

(4.2.7) Teorema. *Con la notación anterior $P = P''R$, es decir,*

$$P = \begin{cases} (X_1^d-1,\ldots,X_n^d-1) & \textit{si } n \textit{ es par, y} \\ (X_1^d-1,\ldots,X_n^d-1, X_1X_2^{d-1}\cdots X_{n-1}^{d-1}X_n-\gamma) & \textit{si } n \textit{ es impar.} \end{cases}$$

Podemos dar, a modo de ejemplo, un listado de los ideales primos cofinitos que aparecen para cada valor de n (salvo permutación de las variables y desnormalización de los coeficientes):

$n = 2:$

$$\begin{aligned}&(X_1, X_2 - \alpha)\\&(X_1^d - 1, X_2^d - 1)\end{aligned}$$

$n = 3:$

$$\begin{aligned}&(X_1, X_2, X_3 - \alpha)\\&(X_1, X_2^d - 1, X_3^d - 1)\\&(X_1^d - 1, X_2^d - 1, X_3^d - 1, X_1 X_2^{d-1} X_3 - \gamma)\end{aligned}$$

$n = 4:$

$$\begin{aligned}&(X_1, X_2, X_3, X_4 - \alpha)\\&(X_1, X_2, X_3^d - 1, X_4^d - 1)\\&(X_1, X_2^d - 1, X_3^d - 1, X_4^d - 1, X_2 X_3^{d-1} X_4 - \gamma)\\&(X_1^d - 1, X_2^d - 1, X_3^d - 1, X_4^d - 1)\end{aligned}$$

$n = 5$

$\vdots$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ y γ es una raíz d–ésima de $q^{-\frac{n-1}{2}\frac{d(d-1)}{2}}$.

(4.2.8) Observación. Observamos que R no es directamente un álgebra de Azumaya pues, por ejemplo, en el caso del plano cuántico ($n = 2$) tenemos que para $P'' = P \cap Z = (X_1^d, X_2^d)$, el ideal P de R asociado es $P = (X_1, X_2) \neq P''R$.

4.2.4. Igualdad de las dimensiones.

Una vez tenemos la descripción completa de todos los ideales primos cofinitos P de R, nos disponemos a demostrar ahora la igualdad

$$\dim_{\mathbb{C}}(R/P) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^n_R(R/P, R)),$$

para cada uno de ellos. En primer lugar, calcularemos la $\mathbb{C}$–dimensión de cada cociente R/P para después comprobar que coincide, en cada caso, con la $\mathbb{C}$–dimensión de $\mathrm{Ext}^n_R(R/P, R)$. Para nuestro cometido usaremos técnicas de bases de Groebner no conmutativas sobre R, de acuerdo con la teoría en torno a ello desarrollada en [16].

(4.2.9) Teorema. *Con la notación del teorema (4.2.7) tenemos que*

$$\dim_{\mathbb{C}}(R/P) = \begin{cases} d^n & \text{si } n \text{ es par, y} \\ d^{n-1} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. El caso más fácil es cuando n es par. Usando el orden lexicográfico con $X_1 > \cdots > X_n$, obtenemos que una base de Groebner para P es $\{X_1^d - 1, \ldots, X_n^d - 1\}$. Por tanto la codimensión de P es d^n.

Si n es impar entonces, de $\{X_1^d - 1, \ldots, X_n^d - 1, X_1 X_2^{d-1} \cdots X_{n-1}^{d-1} X_n - \gamma\}$, podemos construir una base de Groebner usando el algoritmo de Buchberger. Llamemos $G_i = X_i^d - 1$, $i = 1, \ldots, n$ y $F_0 = X_1 X_2^{d-1} \cdots X_{n-1}^{d-1} X_n - \gamma$. Usando el orden lexicográfico con $X_1 > \cdots > X_n$, las semisicigias $S(G_i, G_j)$, para cualquier $i < j$, reducen a cero. Pero $S(G_1, F_0) = \gamma X_1^{d-1} - X_2^{d-1} \cdots X_{n-1}^{d-1} X_n$ no reduce a cero. Llamemos $F_1 = X_1^{d-1} - \gamma^{-1} X_2^{d-1} \cdots X_{n-1}^{d-1} X_n$. De la misma forma, si reducimos $S(F_0, F_1)$ obtenemos

$$F_2 = X_1^{d-2} - \gamma^{-2} q^{(d-1)\frac{n-1}{2}} X_2^{d-2} X_3^2 \cdots X_{n-1}^{d-2} X_n^2.$$

Si definimos F_{e+1} como la reducción de $S(F_0, F_e)$, para $e \leq d-1$, entonces obtenemos

$$F_{e+1} = X_1^{d-(e+1)} - \gamma^{-(e+1)} q^{(-1-\cdots-e)\frac{n-1}{2}} X_2^{d-(e+1)} X_3^{e+1} \cdots X_{n-1}^{d-(e+1)} X_n^{e+1}.$$

En particular $F_d = 1 - X_3^d X_5^d \cdots X_{n-2}^d X_n^d$ reduce a cero y $F_{d-1} = X_1 - \gamma^{-(d-1)} q^{-\frac{(d-1)(d-2)}{2}\frac{n-1}{2}} X_2 X_3^{d-1} \cdots X_{n-1} X_n^{d-1}$.

Tras un laborioso pero sencillo proceso de cálculo obtenemos que $\{G_2, \ldots, G_n, F_{d-1}\}$ es una base de Groebner de P. Como consecuencia $\mathbb{N}^n \backslash Exp(P)$ tiene cardinal igual a d^{n-1} y se sigue entonces que P tiene codimensión d^{n-1}. $\square$

De este modo, la tabla de ideales primos cofinitos y codimensiones que aparecen en R es la siguiente:

Codimensión 1:

$$(X_1, ..., X_{n-1}, X_n - \alpha), \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Codimensión d^2:

$$(X_1, ..., X_{n-2}, X_{n-1}^d - 1, X_n^d - 1)$$

$$(X_1, ..., X_{n-3}, X_{n-2}^d - 1, X_{n-1}^d - 1, X_n^d - 1, X_{n-2} X_{n-1}^{d-1} X_n - \gamma),$$

donde γ es una raíz d–ésima de $q^{(-d(d-1)/2)(n-1)/2}$.

Codimensión d^4 :

$$(X_1, ..., X_{n-4}, X_{n-3}^d - 1, X_{n-2}^d - 1, X_{n-1}^d - 1, X_n^d - 1)$$

$$(X_1, ..., X_{n-5}, X_{n-4}^d - 1, X_{n-3}^d - 1, X_{n-2}^d - 1,$$
$$X_{n-1}^d - 1, X_n^d - 1, X_{n-4} X_{n-3}^{d-1} X_{n-2} X_{n-1}^{d-1} X_n - \gamma)$$

con γ igual que en el caso anterior.

....

y así sucesivamente, finalizando el proceso en la codimensión $d^{2[n/2]}$, siendo $[n/2]$ la parte entera de $n/2$.

(4.2.10) Teorema. *Para cada ideal primo cofinito P de R se verifica que*

$$\dim_{\mathbb{C}}(R/P) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^n_R(R/P,R)).$$

Mostremos el caso $n = 3$, es decir, $R = \mathbb{C}_q[X_1, X_2, X_3]$, el espacio cuántico tridimensional. Necesitamos computar la $\mathbb{C}$–dimensión de $\mathrm{Ext}^3_R(R/P,R)$ para cada uno de los tipos de ideales primos cofinitos P de R que nos aparecían:

Primer tipo: $P = (X_1, X_2, X_3 - \alpha) \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$.

Una base de Groebner de P es

$$\mathbb{G} = \{G_1, G_2, G_3\}$$

con $G_1 := X_1,\ G_2 := X_2,\ G_3 := X_3 - \alpha$. Definimos una presentación libre $\varphi_1 : R^3 \longrightarrow P$ de P de la forma $\varphi_1(e_i) = G_i$ $(i = 1, 2, 3)$. En orden a computar el núcleo de φ_1 necesitamos computar las semisicigias $S(G_i, G_j)$, $i < j$, y dividirlas con respecto a la base de Groebner $\mathbb{G}$.

$$\begin{aligned}
S(G_1, G_2) &= q^{-1}X_2G_1 - X_1G_2 = 0\\
S(G_1, G_3) &= q^{-1}X_3G_1 - X_1G_3 = \alpha G_1\\
S(G_2, G_3) &= q^{-1}X_3G_2 - X_2G_3 = \alpha G_2
\end{aligned}$$

Si $S(G_i, G_j) = C_{ij}G_i - C_{ji}G_j = \sum_h Q_{ijh}G_h$, donde C_{ij}, C_{ji} son coeficientes en R y definimos $s_{ij} = C_{ij}e_i - C_{ji}e_j - \sum_h Q_{ijh}e_h$, entonces es bien conocido que el conjunto $\{s_{ij} : 1 \leq i < j \leq 3\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$; de hecho es una base de Groebner con respecto a un orden monomial particular. Ver [16] para los detalles.

Definimos

$$\begin{aligned} H_1 &:= s_{12} = (X_2, -qX_1, 0); \\ H_2 &:= s_{13} = (X_3 - q\alpha, 0, -qX_1); \\ H_3 &:= s_{23} = (0, X_3 - q\alpha, -qX_2) \end{aligned}$$

Con esta notación $\mathbb{H} = \{H_1, H_2, H_3\}$ es una base de Groebner de $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$ y podemos construir una presentación libre de $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$, $\varphi_2 : R^3 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_1)$, de la forma $\varphi_2(e_i) = H_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Para computar el núcleo de φ_2 necesitamos obtener el mínimo común múltiplo X_{ij} de H_i y H_j, $i < j$ y considerar aquellos que son no nulos. En este caso, el único no nulo es $X_{12} = X_2X_3$. En consecuencia, $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ tiene un solo generador, que puede ser descrito como

$$L := s_{12} = (q^{-1}X_3 - q\alpha, -X_2, qX_1)$$

y $\mathbb{L} = \{L\}$ es una base de Groebner de $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

Juntando toda la información, tenemos entonces la siguiente resolución libre de R/P:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\,\varphi_2 \arrow[r] & R^3 \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & R^3 \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_1"] & R \arrow[r] & R/P \\ & & \mathrm{Ker}\,\varphi_1 \arrow[u] & P \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Para computar $\mathrm{Ext}^3_R(R/P, R)$ usamos el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^3_R(R/P, R) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Ker}(\varphi_1), R)$$

y la presentación libre de $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_2) \xrightarrow{\phi} R^3 \xrightarrow{\varphi_2} \mathrm{Ker}(\varphi_1) \longrightarrow 0$$

Se tiene entonces la sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R^3, R) \xrightarrow{\phi^*} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(\varphi_2), R) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Ker}(\varphi_1), R) \longrightarrow 0\ldots$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Ker}(\varphi_1), R) &\cong \frac{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(\varphi_2), R)}{\mathrm{Im}(\phi^*)} \\ &\cong \frac{R}{(q^{-1}X_3 - q\alpha, -X_2, qX_1)R}\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^3_R(R/P, R)) = 1 = \dim_{\mathbb{C}}(R/P).$$

Segundo tipo: $P = (X_1, X_2^d - 1, X_3^d - 1)$.

Operando de forma similar al apartado anterior obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^3_R(R/P, R) \cong \frac{R}{(X_3^d - 1, -X_2^d + 1, X_1)R}$$

con lo cual

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^3_R(R/P, R)) = d^2 = \dim_{\mathbb{C}}(R/P).$$

Tercer tipo: $P = (X_1^d - 1, X_2^d - 1, X_3^d - 1, X_1X_2^{d-1}X_3 - \gamma)$.

Igualmente se obtiene un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^3_R(R/P, R) \cong \frac{R}{(X_1 - \gamma^{-(d-1)}q^{-\frac{(d-1)(d-2)}{2}}X_2X_3^{d-1}, -X_3^d + 1, X_2^d - 1)R}$$

con lo cual

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^3_R(R/P, R)) = d^2 = \dim_{\mathbb{C}}(R/P).$$

Con esto se completa el estudio para $n = 3$. Un método similar puede ser usado para probar el resultado en cualquier dimensión $n \geq 2$.

4.3. Álgebra envolvente cuántica $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$.

Estudiamos ahora el álgebra envolvente cuántica $R = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$, en el caso en que q es una raíz de la unidad. Esta álgebra nos va a proporcionar un nuevo ejemplo en el que la dualidad de Bernstein viene representada por R^o, y su estudio es tratado en [18]. Nuestras principales referencias para las definiciones y resultados más generales acerca de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ son [15] y [21].

(4.3.1) Observación. En el caso en que q no es una raíz de la unidad, el álgebra $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ queda fuera de la teoría, ya que se comporta de manera análoga al álgebra envolvente clásica de $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2))$ (ver, por ejemplo, [15]) y, en consecuencia, $\mathcal{Z}(\sigma_{cof})$ no satisface la condición fuerte de second layer, ver [13, 2.1].

Vayamos entonces con el caso que nos ocupa. Sea d un entero mayor o igual que 3 y $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, una raíz d–ésima primitiva de la unidad. Definimos

$$e = \begin{cases} d & \text{si } d \text{ es impar} \\ d/2 & \text{si } d \text{ es par} \end{cases}$$

Para cualquier número entero n definimos

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{-n+3} + q^{-n+1}.$$

Por tanto tenemos

$$[n] = 0 \Longleftrightarrow n \equiv 0 \bmod e.$$

Podemos definir también los factoriales y coeficientes binomiales *Gaussianos*. Sea $0 \leq k \leq n$ un número entero. Definimos

$$[0]! = 1,$$
$$[k]! = [1][2]\ldots[k]$$

si $k > 0$, y
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

Definimos $R = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ como la $\mathbb{C}$–álgebra generada por las variables E, F, K, K^{-1} satisfaciendo las relaciones

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= K^{-1}K = 1, \\ KEK^{-1} &= q^2 E, \\ KFK^{-1} &= q^{-2} F, \\ [E,F] &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \end{aligned}$$

donde $[E,F] := EF - FE$.

Ponemos de manifiesto algunos resultados generales que se verifican en dicha álgebra:

(4.3.2) Lema. *[21, VI.1.3] Sean r, $s \in \mathbb{Z}$, con $r \geq 0$. Las siguientes relaciones se dan en R:*

(1) $E^r K^s = q^{-2rs} K^s E^r$, $\quad F^r K^s = q^{2rs} K^s F^r$,

(2) $[E, F^r] = [r] F^{r-1} \frac{q^{-(r-1)}K - q^{r-1}K^{-1}}{q - q^{-1}} = [r] \frac{q^{r-1}K - q^{-(r-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}} F^{r-1}$,

(3) $[E^r, F] = [r] \frac{q^{-(r-1)}K - q^{r-1}K^{-1}}{q - q^{-1}} E^{r-1} = [r] E^{r-1} \frac{q^{r-1}K - q^{-(r-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}}$.

(4.3.3) Proposición. *[9, 1.7][21, VI.1.4]*

(1) R es un dominio noetheriano.

(2) El conjunto $\{E^i F^j K^l\}_{i,j \in \mathbb{N}; l \in \mathbb{Z}}$ es una base de R como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

(3) *R posee una filtración tal que el álgebra graduada asociada grR es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ con generadores $\overline{E}, \overline{F}, \overline{K}, \overline{K^{-1}}$ sujetos a las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned} \overline{K}\,\overline{K^{-1}} &= \overline{K^{-1}}\,\overline{K} = 1, \\ \overline{K}\,\overline{E}\,\overline{K^{-1}} &= q^2\,\overline{E}, \\ \overline{K}\,\overline{F}\,\overline{K^{-1}} &= q^{-2}\,\overline{F}, \\ \overline{E}\,\overline{F} &= \overline{F}\,\overline{E}. \end{aligned}$$

4.3.1. El centro.

Introducimos en primer lugar un elemento central especial, el *elemento cuántico de Casimir*, C_q :

(4.3.4) Lema. *[21, VI.4.1] El elemento*

$$C_q = EF + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} = FE + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2}$$

pertenece al centro de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ (con independencia de que q sea o no raíz de la unidad).

En el caso en que q no es una raíz de la unidad, el centro de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ es un álgebra polinomial generada por el elemento C_q, ver [21, VI.4.8]. Sin embargo, en el caso que nos ocupa, q una raíz d–ésima primitiva de la unidad, el centro de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ es mucho más grande, como nos indica el siguiente

(4.3.5) Lema. *[15, 2.10] Los elementos E^e, F^e, K^e y K^{-e} pertenecen al centro de R.*

Como consecuencia, si llamamos Z al centro de R, y llamamos $C = \mathbb{C}[E^e, F^e, K^e, K^{-e}]$, tenemos que C es una $\mathbb{C}$–subálgebra de Z y, aplicando la proposición (4.3.3)(2), que R es un C–módulo libre con base sobre C dada por $\{E^i F^j K^l : 0 \leq i, j, l \leq e-1\}$. En particular, R es un módulo finitamente generado sobre Z.

El siguiente resultado muestra cómo actúan los elementos del centro de R sobre los R–módulos simples finito–dimensionales:

(4.3.6) Lema. *[21, VI.5.4] Sea z un elemento central de R. Entonces z actúa sobre cualquier R–módulo simple finito-dimensional V por multiplicación por un escalar.*

Cerramos el estudio del centro de R dando su descripción completa (ver [9, 4.2] o [15, 2.20]):

(4.3.7) Teorema. *El centro de R está generado por E^e, F^e, K^e, K^{-e} y C_q.*

4.3.2. Propiedades homológicas y condiciones de regularidad.

Podemos construir una extensión de Ore iterada $A \subseteq B \subseteq D$, tal que D es una $\mathbb{C}$–álgebra isomorfa a R. Basta tomar para ello $A = \mathbb{C}[K, K^{-1}]$, $B = A[F; \sigma_1]$, con σ_1 el automorfismo de A determinado por $\sigma_1(K^l) = q^{-2l}K^l$, y $D = B[E; \sigma_2, \delta]$, con σ_2 el automorfismo de B definido por $\sigma_2(F^j K^l) = q^{2l} F^j K^l$, y δ la σ_2–derivación dada por

$$\delta(F) = \frac{K^{-1} - K}{q - q^{-1}} \quad \text{y} \quad \delta(K) = \delta(K^{-1}) = 0.$$

De este modo, aplicando [26, III,3.4.6], obtenemos que nuestro dominio noetheriano R es Auslander-regular.

La descripción de R como extensión de Ore iterada también nos va a servir para computar su dimensión global concreta. Aplicando

[28, 7, 5.3], obtenemos que $\mathrm{gldim}(B) = 2$ y, por el mismo teorema, que $\mathrm{gldim}(R)$ es 2 ó 3. Puesto que en los siguientes apartados encontramos R–módulos M tal que $\mathrm{Ext}^3_R(M, R) \neq 0$, se tiene entonces que $\mathrm{idim}(R) = \mathrm{gldim}(R) = 3$.

Por otro lado, el álgebra R puede ser descrita como un cociente del álgebra S generada por elementos E, F, K y H verificando las relaciones

$$\begin{array}{ll} HK = KH & \\ KE = q^2 EK & HE = q^{-2} EH \\ KF = q^{-2} FK & HF = q^2 FH \\ [E, F] = \frac{K-H}{q-q^{-1}} & \end{array}$$

por el ideal $I = (HK - 1)$.

Podemos ver S como una extensión de Ore iterada $A' \subseteq B' \subseteq D'$, con D' isomorfa a S, tomando $A' := \mathbb{C}[K, H]$, $B' := A'[F; \theta_1]$, con θ_1 el automorfismo de A' dado por $\theta_1(K^{\alpha_3} H^{\alpha_4}) = q^{-2\alpha_3 + 2\alpha_4} K^{\alpha_3} H^{\alpha_4}$, y $D' := B'[E; \theta_2, \delta']$, con θ_2 el automorfismo de B' dado por

$$\theta_2(F^{\alpha_2} K^{\alpha_3} H^{\alpha_4}) = q^{2\alpha_3 - 2\alpha_4} F^{\alpha_2} K^{\alpha_3} H^{\alpha_4}$$

y δ' la θ_2–derivación definida por

$$\delta'(F) = \frac{H - K}{q - q^{-1}} \qquad \text{y} \qquad \delta'(K) = \delta'(H) = 0,$$

y donde α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{N}$. De este modo, al igual que razonamos para R, S es un dominio noetheriano Auslander-regular, y una base de S sobre $\mathbb{C}$ vendrá dada por $\{E^{\alpha_1} F^{\alpha_2} K^{\alpha_3} H^{\alpha_4} : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{N}\}$.

Graduamos ahora cada una de las $\mathbb{C}$–álgebras base en la anterior extensión de Ore iterada de la siguiente forma: $A' = \oplus_{n \in \mathbb{N}} A'_n$, con A'_n el $\mathbb{C}$–subespacio de A' generado por los monomios $K^{\alpha_3} H^{\alpha_4}$, con $\alpha_3 + \alpha_4 = n$; $B' = \oplus_{n \in \mathbb{N}} B'_n$, con B'_n el $\mathbb{C}$–subespacio de B' generado por los monomios $F^{\alpha_2}K^{\alpha_3}H^{\alpha_4}$, con $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = n$. Aplicando entonces [25, Lemma (ii)] tenemos que S es Cohen-Macaulay.

Basta tener ahora en cuenta que $HK - 1$ es un elemento central y regular de S, para obtener, aplicando [25, Lemma (iii)], que R es Cohen-Macaulay.

Además, puesto que R es Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay y, como pondremos de manifiesto en los apartados que siguen, existen R–módulos finito–dimensionales no nulos, aplicando el teorema (1.4.1), se tiene que $\mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{idim}(R) = 3$.

Finalmente, por ser R un módulo finitamente generado sobre su centro, se sigue de [23, 4.2] que R satisface la condición fuerte de second layer.

4.3.3. Módulos simples finito–dimensionales.

Clasificamos ahora los R–módulos simples finito–dimensionales, probando que hay una cota superior sobre su dimensión, e, y que mientras que para los módulos simples de dimensión estrictamente menor que e la situación es completamente análoga al caso en que q no es una raíz de la unidad, para los módulos simples de dimensión e la situación es bastante distinta.

4.3.3.1. Módulos simples de dimensión $< e$.

Sea V un R–módulo. Para cualquier número complejo λ definimos $V^\lambda = \{v \in V : Kv = \lambda v\}$. Si $V^\lambda \neq 0$ decimos que V^λ es un *espacio peso* y λ un *peso* de V. Los elementos en V^λ son llamados *vectores peso*. Nótese que si $\lambda = 0$, entonces $V^\lambda = 0$ puesto que K tiene un inverso en R.

Sea V un R–módulo y λ un número complejo. Un elemento $v \neq 0$ de V es un *vector de mayor peso, de peso* λ, si $Ev = 0$ y $Kv = \lambda v$. Un R–módulo es un *módulo de mayor peso, de mayor peso* λ, si está generado por un vector de mayor peso de peso λ.

Consideramos en primer lugar la siguiente

(4.3.8) Proposición. *Sea V un R–módulo no nulo de dimensión $< e$. Entonces V contiene un vector de mayor peso.*

DEMOSTRACIÓN. Exactamente igual que la demostración que se tenía para q no raíz de la unidad en [21, VI.3.3], usando ahora el hecho de que $1, q^2, \ldots, q^{2(e-1)}$ son e escalares distintos y nuestro $\mathbb{C}$–espacio vectorial V es de dimensión estrictamente menor que e. $\square$

(4.3.9) Lema. *Sea v un vector de mayor peso de peso λ. Sea $v_0 = v$ y $v_p = F^p v$ para $p > 0$. Entonces:*

$$\begin{aligned} Kv_p &= \lambda q^{-2p} v_p, \\ Ev_p &= [p]\frac{\lambda q^{-(p-1)} - \lambda^{-1} q^{p-1}}{q - q^{-1}} v_{p-1}, \\ Fv_p &= v_{p+1}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el lema (4.3.2) se tiene que:

$$Kv_p = KF^p v = q^{-2p} F^p Kv = q^{-2p} F^p \lambda v = \lambda q^{-2p} v_p.$$

Por el mismo lema:

$$\begin{aligned}
Ev_p &= EF^p v \\
&= F^p Ev + [p]F^{p-1}\frac{Kq^{-(p-1)} - K^{-1}q^{(p-1)}}{q-q^{-1}}v \\
&= [p]\frac{\lambda q^{-(p-1)} - \lambda^{-1}q^{p-1}}{q-q^{-1}}F^{p-1}v \\
&= [p]\frac{\lambda q^{-(p-1)} - \lambda^{-1}q^{p-1}}{q-q^{-1}}v_{p-1}.
\end{aligned}$$

□

Ahora podemos establecer el principal teorema:

(4.3.10) Teorema. *(1) Sea V un R–módulo de dimensión $< e$ generado por un vector de mayor peso v de peso λ. Entonces:*

(i) $\lambda = \varepsilon q^n$, *donde* $\varepsilon = \pm 1$ *y* $n = \dim V - 1$;

(ii) Considerando $v_p = F^p v$, *tenemos que* $v_p = 0$ *si* $p > n$ *y, además, el conjunto* $\{v = v_0, v_1, ..., v_n\}$ *es una* $\mathbb{C}$*–base de* V;

(iii) El operador K actuando sobre V es diagonalizable y tiene $(n+1)$ *autovalores distintos* $\{\varepsilon q^n, \varepsilon q^{n-2}, ..., \varepsilon q^{-n+2}, \varepsilon q^{-n}\}$;

(iv) Cualquier otro vector de mayor peso en V es un múltiplo escalar de v y tiene peso λ;

(v) V es un R–módulo simple.

(2) Cualquier R–módulo simple de dimensión $< e$ está generado por un vector de mayor peso. Dos R–módulos de dimensión $< e$ generados por vectores de mayor peso del mismo peso son isomorfos.

Demostración. Exactamente igual que la demostración que se tenía para q no raíz de la unidad en [21, VI.3.5], usando ahora el hecho, derivado del lema (4.3.9), de que $\{v_0, \ldots, v_{e-1}\}$ es un conjunto de e autovectores para K con distintos autovalores asociados, en nuestro espacio V de dimensión estrictamente menor que e. $\square$

Como consecuencia, para cada entero n $(0 \leq n \leq e-2)$, existe, salvo isomorfismo, un único R–módulo simple de dimensión $n+1$, y está generado por un vector de mayor peso de peso $\lambda = \varepsilon q^n$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Si denotamos este módulo simple por $V_{\varepsilon,n}$, usando las relaciones dadas en el lema (4.3.9), una $\mathbb{C}$–base de $V_{\varepsilon,n}$ es $\{v_0, \ldots, v_n\}$ y la acción de R está dada por las fórmulas

$$\begin{array}{ll}
Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p & \text{si } 0 \leq p \leq n; \\
Ev_{p+1} = [p+1]\frac{\lambda q^{-p} - \lambda^{-1} q^p}{q - q^{-1}} v_p & \text{si } 0 \leq p \leq n-1; \\
Ev_0 = 0; & \\
Fv_p = v_{p+1} & \text{si } 0 \leq p \leq n-1; \\
Fv_n = 0, &
\end{array}$$

donde $\lambda = \varepsilon q^n$ y $\varepsilon = \pm 1$.

4.3.3.2. Módulos simples de dimensión $> e$.

En el caso en que q no es una raíz de la unidad, existen $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$–módulos simples finito–dimensionales de cualquier dimensión (ver, por ejemplo, [15, 2.6] o [21, VI,3.5]). Sin embargo, en el caso que nos ocupa, q una raíz d–ésima primitiva de la unidad, e va a representar una cota superior para la dimensión de los R–módulos simples finito–dimensionales, como muestra el siguiente

(4.3.11) Teorema. *[21, VI.5.2] No existen R–módulos simples finito–dimensionales de dimensión $> e$.*

4.3.3.3. Módulos simples de dimensión e.

Hemos reelaborado varios resultados de [3], [9], [15] y [21] para dar la clasificación de todos los R–módulos simples de dimensión e. Mostramos, en primer lugar, una buena descripción para ellos:

(4.3.12) Proposición. *Sea V un R–módulo simple de dimensión e. Entonces existe una $\mathbb{C}$–base $\{v_0, \ldots, v_{e-1}\}$ de V tal que la acción de R sobre los elementos de dicha base viene dada por una de las siguientes dos formas:*

(1)

$$\begin{aligned}
&Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p && \text{si } 0 \leq p \leq e-1;\\
&Fv_p = v_{p+1} && \text{si } 0 \leq p \leq e-2;\\
&Fv_{e-1} = bv_0; &&\\
&Ev_0 = av_{e-1}; &&\\
&Ev_{p+1} = ([p+1]\tfrac{\lambda q^{-p}-\lambda^{-1}q^p}{q-q^{-1}} + ab)v_p && \text{si } 0 \leq p \leq e-2,
\end{aligned}$$

para ciertos $a, b, \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$;

(2)

$$\begin{aligned}
&Kv_p = \mu q^{2p} v_p && \text{si } 0 \leq p \leq e-1;\\
&Ev_p = v_{p+1} && \text{si } 0 \leq p \leq e-2;\\
&Ev_{e-1} = cv_0; &&\\
&Fv_0 = 0; &&\\
&Fv_{p+1} = [p+1]\tfrac{\mu^{-1}q^{-p}-\mu q^p}{q-q^{-1}} v_p && \text{si } 0 \leq p \leq e-2,
\end{aligned}$$

para ciertos $c, \mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea V un R–módulo simple e–dimensional. Puesto que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, V es un $\mathbb{C}$–espacio vectorial finito-dimensional, y K es un endomorfismo en V (K es incluso un automorfismo, con endomorfismo inverso K^{-1}), existe un vector no nulo $v \in V$ y un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $Kv = \lambda v$.

Si $F^{e-1}v \neq 0$, entonces $F^p v \neq 0\ \forall p = 0, \ldots, e-1$. Definiendo

$$v_p = F^p v \qquad (p \in \mathbb{N})$$

se tiene, aplicando el lema (4.3.2), que $Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p$, para cada $p \in \mathbb{N}$. Por tanto tenemos que $v_0, \ldots, v_{e-1}$ son e autovectores no nulos en V para K, asociados a e autovalores distintos. En consecuencia, $v_0, \ldots, v_{e-1}$ son e vectores no nulos linealmente independientes del espacio vectorial e–dimensional V, luego $\{v_0, \ldots, v_{e-1}\}$ es una $\mathbb{C}$–base de V.

Ya hemos descrito cómo actúa K sobre los elementos de esta base. Veamos ahora cómo lo hacen F y E :

Si $0 \leq p \leq e-2$, se tiene directamente de la definición de los elementos v_p que

$$Fv_p = v_{p+1}.$$

Por su parte, como $Kv_e = \lambda v_e$, y puesto que $\dim(V^{\lambda q^{-2i}}) = 1$ para cada $0 \leq i \leq e-1$, se tiene que $v_e = bv_0$, para algún $b \in \mathbb{C}$, con lo cual

$$Fv_{e-1} = v_e = bv_0.$$

En cuanto a la acción de E, dado que

$$KEv = q^2 EKv = \lambda q^2 Ev$$

se tiene que $Ev \in V^{\lambda q^2}$ y como también $v_{e-1} \in V^{\lambda q^{-2(e-1)}} = V^{\lambda q^2}$, se sigue que

$$Ev = av_{e-1}$$

para algún $a \in \mathbb{C}$. En consecuencia:

$$Ev_0 = Ev = av_{e-1},$$

y

$$\begin{aligned} Ev_{p+1} &= EF^{p+1}v = F^{p+1}Ev + [p+1]F^p\frac{Kq^{-p}-K^{-1}q^p}{q-q^{-1}}v \\ &= F^{p+1}av_{e-1} + [p+1]F^p\frac{\lambda q^{-p}-\lambda^{-1}q^p}{q-q^{-1}}v \\ &= F^p aFv_{e-1} + [p+1]\frac{\lambda q^{-p}-\lambda^{-1}q^p}{q-q^{-1}}v_p \\ &= F^p abv_0 + [p+1]\frac{\lambda q^{-p}-\lambda^{-1}q^p}{q-q^{-1}}v_p \\ &= (ab + [p+1]\frac{\lambda q^{-p}-\lambda^{-1}q^p}{q-q^{-1}})v_p \quad (0 \leq p \leq e-2). \end{aligned}$$

<u>Un nuevo caso</u>. Supongamos ahora, por contra, que $F^{e-1}v = 0$. Sea

$$j := \max\{p \in \{0, \ldots, e-2\} : F^p v \neq 0\}.$$

Sea

$$w := F^j v.$$

Se tiene entonces que w es un vector no nulo de V. Además

$$Fw = 0,$$

y

$$Kw = KF^j v = q^{-2j}F^j Kv = \lambda q^{-2j}w.$$

Denotemos

$$\mu := \lambda q^{-2j}.$$

el cual es un escalar no nulo. Definamos

$$v_p = E^p w \qquad (p \in \mathbb{N})$$

y consideremos el subespacio V' de V generado por $v_0, \ldots, v_{e-1}$. Veamos que V' es un submódulo de V, con lo que al ser V simple, habrá de ocurrir que $V' = V$. Comencemos por la acción de K :

$$Kv_p = KE^p w = q^{2p}E^p Kw = \mu q^{2p}v_p \qquad (0 \leq p \leq e-1).$$

Por su parte, directamente de la definición de los elementos v_p, se tiene que para cada $0 \leq p \leq e-2$,

$$Ev_p = v_{p+1},$$

mientras que, dado que $Kv_e = \mu v_e$, y puesto que $\dim(V^{\mu q^{2i}}) = 1$ para cada $0 \leq i \leq e-1$, se tiene que $v_e = cv_0$, para algún $c \in \mathbb{C}$, con lo cual

$$Ev_{e-1} = v_e = cv_0.$$

Resta por comprobar la acción de F. Por un lado

$$Fv_0 = Fw = 0.$$

Por otro

$$\begin{aligned} Fv_{p+1} &= FE^{p+1}w = E^{p+1}Fw - [p+1]E^p\frac{Kq^p - K^{-1}q^{-p}}{q-q^{-1}}w \\ &= [p+1]\frac{\mu^{-1}q^{-p} - \mu q^p}{q-q^{-1}}v_p \qquad (0 \leq p \leq e-2). \end{aligned}$$

De este modo $\{v_0, \ldots, v_{e-1}\}$ es un $\mathbb{C}$–sistema de generadores del espacio e–dimensional V y, por tanto, una $\mathbb{C}$–base de V, y la acción de K, E, F sobre ella es la que acabamos de describir. □

Para cada $a, b, \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ (resp. para cada c, $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$) denotemos por $V(\lambda, a, b)$ (resp. por $\tilde{V}(\mu, c)$) el R–módulo e–dimensional dado por la $\mathbb{C}$–base $\{v_0, \ldots, v_{e-1}\}$ y la acción de R descrita por la primera forma (resp. por la segunda forma) en la anterior proposición. Vamos a estudiar ahora las condiciones que han de verificar los parámetros para que cada uno de los anteriores R–módulos e–dimensionales sean simples, es decir, para que se dé el recíproco de la proposición anterior.

Comenzamos estudiando los módulos del tipo $V(\lambda, a, b)$:

CASO 1:$b \neq 0$. Veamos que, en este caso, $V = V(\lambda, a, b)$ es simple.

Sea V' un R–submódulo no nulo de V. Se tiene entonces que K es un endomorfismo en V' y, en consecuencia, ha de existir algún $v' \in V'$ autovector no nulo para K. Dado que $\{v_0, ..., v_{e-1}\}$ son e vectores propios para K asociados a e subespacios propios distintos de nuestro espacio vectorial e–dimensional V, cada uno de dichos subespacios propios es de dimensión uno, son los únicos subespacios propios de V asociados a K y, por tanto, ha de existir algún $i \in \{0, ..., e-1\}$ tal que v' es un múltiplo escalar no nulo de v_i, $v' = \alpha v_i$ $(\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$. En consecuencia, $v_i = \alpha^{-1} v' \in V'$. Tenemos entonces que $v_r = F^{r-i} v_i \in V'$ para todo $r \in \{i, .., e-1\}$. En particular, $v_{e-1} \in V'$ y, dado que $b \neq 0$, se tiene que $v_0 = b^{-1} F v_{e-1} \in V'$, con lo cual $v_s = F^s v_0 \in V'$ para todo $s \in \{0, ..., e-1\}$ y, en consecuencia, $V' = V$, es decir, V es simple.

CASO 2:$b = 0$ y $\lambda \neq \pm q^n$ $(0 \leq n \leq e-2)$.

Veamos que, en este caso, $V = V(\lambda, a, b)$ también es simple.

Sea V' un R–submódulo no nulo de V. Al igual que en el caso anterior, existe algún $i \in \{0, ..., e-1\}$ tal que $v_i \in V'$. Sea $j \in \{0, ..., e-1\}$ minimal con $v_j \in V'$. Supongamos que $j > 0$. Puesto que $Ev_j \in V'$ es un múltiplo de $v_{j-1} \notin V'$ tenemos que $Ev_j = 0$, con lo que $\lambda q^{-(j-1)} - \lambda^{-1} q^{j-1} = 0$. Esto implica que $\lambda^2 = q^{2(j-1)}$, es decir, $\lambda = \pm q^{j-1}$, lo cual contradice nuestra suposición de que $\lambda \neq \pm q^n$ para todo $n \in \{0, ..., e-2\}$. En consecuencia, ha de ser $j = 0$, es decir, $v_0 \in V'$, con lo cual $v_s = F^s v_0 \in V'$ para todo $s \in \{0, ..., e-1\}$ y, en consecuencia, $V' = V$, es decir, V es simple.

CASO 3:$b = 0$ y $\lambda = \varepsilon q^n$ $(\varepsilon = \pm 1)$ para algún $n \in \{0, ..., e-2\}$.

Veamos que en este caso podemos encontrar un R–submódulo propio, no nulo, de $V = V(\lambda, a, b)$, con lo cual $V(\lambda, a, b)$ no será simple.

Sea V' el subespacio de V generado por $\{v_{n+1}, ..., v_{e-1}\}$. Veamos que V' tiene estructura de R–módulo. Para ello basta ver que la acción de K, F, E sobre los generadores de V' vuelve a dar un elemento de V' :

$Kv_p = \varepsilon q^n q^{-2p} v_p \in V'$ para todo $p \in \{n+1, \ldots, e-1\}$;
$Fv_p = v_{p+1} \in V'$ para todo $p \in \{n+1, ..., e-2\}$;
$Fv_{e-1} = 0 \in V'$;
$Ev_{n+1} = [n+1]\varepsilon \frac{q^n q^{-n} - q^{-n} q^n}{q - q^{-1}} v_n = 0 \in V'$;
$Ev_{p+1} = [p+1]\varepsilon \frac{q^n q^{-p} - q^{-n} q^p}{q - q^{-1}} v_p \in V'$ para todo $p \in \{n+1, ..., e-2\}$.

Por tanto V' es un R–submódulo propio, no nulo, de V, luego V no es simple.

Estudiemos ahora los módulos del tipo $\tilde{V}(\mu, c)$:

Consideremos el único automorfismo ω de R con $\omega(E) = F$, $\omega(F) = E$ y $\omega(K) = K^{-1}$. Ver [15, 1.2]. Para cualquier R–módulo N definamos ${}^{\omega}N$ como el R–módulo que es igual a N como $\mathbb{C}$–espacio vectorial y donde cada $r \in R$ actúa sobre ${}^{\omega}N$ como $\omega(r)$ actúa sobre N. Se tiene entonces que ${}^{\omega}({}^{\omega}N) \cong N$ para todo N y que ${}^{\omega}N$ es simple si, y sólo si, N es simple. Ver [15, 2.13].

Si consideramos en concreto $N = \tilde{V}(\mu, c)$, podemos comprobar que ${}^{\omega}(\tilde{V}(\mu, c)) = V(\lambda', 0, c)$, para $\lambda' = \mu^{-1}$. En virtud del estudio realizado anteriormente para $V(\lambda, a, b)$, se tiene que $V(\lambda', 0, c)$ es simple si, y sólo si, $c \neq 0$ ó $c = 0$ y $\lambda' \neq \pm q^n$ para cada $0 \leq n \leq e-2$. En consecuencia, $\tilde{V}(\mu, c)$ es simple si, y sólo si, $c \neq 0$ ó $c = 0$ y $\mu \neq \pm q^{-n}$ para todo $0 \leq n \leq e-2$.

De este modo, hemos obtenido el siguiente

(4.3.13) Teorema. *Cualquier R–módulo simple de dimensión e es,* *salvo isomorfismo, de uno de los siguientes tipos:*

(1) $V(\lambda, a, b)$ *con* λ*,* $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *y* $a \in \mathbb{C}$*;*

(2) $V(\lambda, a, 0)$ *con* $a \in \mathbb{C}$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$*,* $\lambda \neq \pm q^n$ *para cualquier* $n \in \{0, \ldots, e-2\}$*;*

(3) $\tilde{V}(\mu, c)$ *con* $\mu, c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$*;*

(4) $\tilde{V}(\mu, 0)$ *si* $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$*,* $\mu \neq \pm q^{-n}$ *para cualquier* $n \in \{0, \ldots, e-2\}$.

Con esto queda completado el catálogo de todos los R–módulos simples finito–dimensionales.

4.3.4. Igualdad de las dimensiones.

Nuestro objetivo es comparar las $\mathbb{C}$–dimensiones de $\mathrm{Ext}^{\mu}_{R}(R/P, R)$ y de R/P para cualquier ideal primo cofinito P de R y ver que son iguales, siendo $\mu = \mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{idim}(R) = 3$. Para ello basta estudiar la misma propiedad para cualquier R–módulo simple finito-dimensional M y probar que $\dim_{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^3_R(M, R))$, en virtud de la biyección entre R–módulos simples finito–dimensionales e ideales primos cofinitos de R dada por la proposición (3.3.2).

Para realizar este estudio sólo necesitamos considerar cualquier R–módulo simple finito-dimensional M y computar $\mathrm{Ext}^3_R(M, R)$. Para ello usaremos la descripción de estos módulos dada en los apartados anteriores y las técnicas computacionales de bases de Groebner no conmutativas desarrolladas en [16] y ya utilizadas cuando estudiamos el ejemplo del espacio cuántico $\mathbb{C}_q[X_1, \ldots, X_n]$.

Consideremos el álgebra S como se definió en 4.3.2.. Reescribimos los generadores tomando

$$X_1 := E; \quad X_2 := F; \quad X_3 := K; \quad X_4 := H$$

y consideremos el orden lexicográfico con $X_1 > X_2 > X_3 > X_4$. Entonces las relaciones de S aparecen como

$$\begin{aligned}
X_2X_1 &= X_1X_2 - \frac{1}{q-q^{-1}}X_3 + \frac{1}{q-q^{-1}}X_4\\
X_3X_1 &= q^2X_1X_3\\
X_4X_1 &= q^{-2}X_1X_4\\
X_3X_2 &= q^{-2}X_2X_3\\
X_4X_2 &= q^2X_2X_4\\
X_4X_3 &= X_3X_4
\end{aligned}$$

y $R \cong S/(X_3X_4 - 1)$. Llamemos $f := X_3X_4 - 1$.

Sea M un R–módulo simple finito-dimensional. Podemos considerarlo como S–módulo por el correspondiente cambio de anillo. Como $fM = 0$ y f es un elemento central y regular de S, por el teorema de Rees tenemos

$$\mathrm{Ext}^n_S(M,S) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_{S/Sf}(M,S/Sf) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_R(M,R), \qquad n \geq 2.$$

Por tanto en nuestro caso tenemos

$$\mathrm{Ext}^3_R(M,R) \cong \mathrm{Ext}^4_S(M,S).$$

Entonces nuestro problema se reduce a computar la $\mathbb{C}$–dimensión de $\mathrm{Ext}^4_S(M,S)$.

Módulos simples de dimensión $< e$.

Consideremos $M = V_{\varepsilon,n}$. Se tiene que $\dim_{\mathbb{C}}(M) = n+1 \quad (n+1 < e)$.

Como R-módulo, M es isomorfo al cociente $R/R(E, F^{n+1}, K-\lambda)$. En consecuencia, visto como S–módulo, M es isomorfo al cociente

$S/S(X_1, X_2^{n+1}, X_3 - \lambda, X_3X_4 - 1)$ o, equivalentemente, dado que

$$S(X_3 - \lambda, X_3X_4 - 1) = S(X_3 - \lambda, X_4 - \lambda^{-1})$$

(pues

$$X_4 - \lambda^{-1} = -\lambda^{-1}X_4(X_3 - \lambda) + \lambda^{-1}(X_3X_4 - 1)$$

y

$$X_3X_4 - 1 = \lambda^{-1}(X_3 - \lambda) + \lambda(X_4 - \lambda^{-1}) + (X_3 - \lambda)(X_4 - \lambda^{-1}))$$

se tiene que, como S–módulo, M es isomorfo a S/Q, con $Q = S(X_1, X_2^{n+1}, X_3 - \lambda, X_4 - \lambda^{-1})$. El problema se reduce a computar la $\mathbb{C}$–dimensión de $\mathrm{Ext}_S^4(S/Q, S)$ y probar que es igual a $n + 1$.

Utilizando entonces las técnicas de bases de Groebner antes aludidas y siguiendo un método similar al que usamos para computar la $\mathbb{C}$–dimensión de los Ext en el ejemplo de $\mathbb{C}_q[X_1, \ldots, X_n]$, tras un laborioso pero sencillo proceso de cálculo, obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}_S^4(S/Q, S) \cong \frac{S}{(q^{-2(n+1)}X_4 - \lambda^{-1}q^{-2}, -q^{2(n+1)}X_3 + \lambda q^2, X_2^{n+1}, -X_1)S}.$$

Como consecuencia, tiene $\mathbb{C}$–dimensión $n + 1$.

Módulos simples de dimensión e.

Si M es un R–módulo simple de dimensión e entonces, de acuerdo al teorema (4.3.13), M puede ser de cuatro tipos:

En el primer caso, $M = V(\lambda, a, b)$, con $a \in \mathbb{C}$ y $\lambda, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como R–módulo, M es isomorfo al cociente $R/R(E - aF^{e-1}, F^e - b, K - \lambda)$. Por tanto, como S–módulo, M es isomorfo al cociente S/Q, con $Q = S(X_1 - aX_2^{e-1}, X_2^e - b, X_3 - \lambda, X_4 - \lambda^{-1})$. Después de desarrollar cálculos similares a los realizados para los módulos simples de dimensión $< e$, obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}_S^4(S/Q, S) \cong \frac{S}{(X_4 - \lambda^{-1}q^{-2}, -X_3 + \lambda q^2, X_2^e - b, -X_1 + aX_2^{e-1})S},$$

que tiene $\mathbb{C}$–dimensión e.

En el segundo caso, $M = V(\lambda, a, 0)$, con $a \in \mathbb{C}$, y $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\lambda \neq \pm q^n$ para cualquier $n \in \{0, ..., e-2\}$. Como R–módulo, M es isomorfo al cociente $R/R(E - aF^{e-1}, F^e, K - \lambda)$. Por tanto, como S–módulo, M es isomorfo al cociente S/Q, con $Q = S(X_1 - aX_2^{e-1}, X_2^e, X_3 - \lambda, X_4 - \lambda^{-1})$. Procediendo de un modo similar al seguido en el caso anterior se llega a

$$\mathrm{Ext}_S^4(S/Q, S) \cong \frac{S}{(X_4 - \lambda^{-1}q^{-2}, -X_3 + \lambda q^2, X_2^e, -X_1 + aX_2^{e-1})S},$$

que tiene $\mathbb{C}$–dimensión e.

En el tercer caso, $M = \tilde{V}(\mu, c)$ con $\mu, c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como R–módulo, M es isomorfo al cociente $R/R(E^e - c, F, K - \mu)$. Por tanto, como S–módulo, M es isomorfo al cociente S/Q, con $Q = S(X_1^e - c, X_2, X_3 - \mu, X_4 - \mu^{-1})$. Procediendo de un modo similar al seguido en los casos anteriores se llega a

$$\mathrm{Ext}_S^4(S/Q, S) \cong \frac{S}{(X_4 - q^2\mu^{-1}, -X_3 + q^{-2}\mu, X_2, -X_1^e + c)S},$$

que tiene $\mathbb{C}$–dimensión e.

En el cuarto caso, $M = \tilde{V}(\mu, 0)$ con $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \mu \neq \pm q^{-n}$ para cualquier $n \in \{0, ..., e-2\}$. Como R–módulo, M es isomorfo al cociente $R/R(E^e, F, K - \mu)$. Por tanto, como S–módulo, M es isomorfo al cociente S/Q, con $Q = S(X_1^e, X_2, X_3 - \mu, X_4 - \mu^{-1})$. Procediendo de un modo similar al seguido en los casos anteriores se llega a

$$\mathrm{Ext}_S^4(S/Q, S) \cong \frac{S}{(X_4 - q^2\mu^{-1}, -X_3 + q^{-2}\mu, X_2, -X_1^e)S},$$

que tiene $\mathbb{C}$–dimensión e.

Hemos probado entonces el siguiente teorema:

(4.3.14) Teorema. *Sea M un R–módulo simple finito-dimensional. Entonces*
$$\dim_{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^3_R(M,R)).$$

Como consecuencia tenemos:

(4.3.15) Corolario. *Sea P un ideal primo cofinito de R. Entonces*
$$\dim_{\mathbb{C}}(R/P) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^3_R(R/P,R)).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta que, para cada ideal primo cofinito P de R, se verifica que $R/P \cong S^m$, para algún R–módulo simple finito S y algún $m \in \mathbb{N}$, de acuerdo con la proposición (3.3.2). □

4.4. Álgebra envolvente universal de $\mathfrak{sl}(2)_q$.

A diferencia del ejemplo anterior donde, en la línea de la noción de *grupo cuántico* introducida por Drinfeld [11], [12] y Jimbo [20], considerábamos la cuantización del álgebra envolvente universal del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$, siendo q una raíz de la unidad, en el ejemplo que ahora pasamos a estudiar partimos, también para q una raíz de la unidad, del álgebra de Lie generalizada $\mathfrak{sl}(2)_q$ (un tipo de *álgebra de Lie cuántica*) como definieron Lyubashenko y Sudbery en [27]. Recordemos que ambos autores definen un *álgebra de Lie generalizada* sobre un cuerpo K como un K–espacio vectorial L junto con aplicaciones lineales $\beta : L \otimes L \longrightarrow L$ (el corchete de Lie generalizado, escrito como $x \otimes y \longrightarrow [x,y]$) y $\gamma : L \otimes L \longrightarrow L \otimes L$ (el antisimetrizador generalizado), tales que se verifica: (i) Antisimetría generalizada: Para $t \in L \otimes L$, se tiene que $\gamma(t) = 0 \Rightarrow \beta(t) = 0$, y (ii) Identidad de Jacobi generalizada: Para

$x \in L$, se define $adx(y) = [x, y]$. Entonces

$$ad[x, y] = m \circ (ad \otimes ad) \circ \gamma(x \otimes y),$$

donde $m : \mathrm{End}(L) \otimes \mathrm{End}(L) \longrightarrow \mathrm{End}(L)$ denota la multiplicación de aplicaciones lineales sobre L.

El *álgebra envolvente universal* de un álgebra de Lie generalizada (L, β, γ) se define como el cociente del álgebra tensor de L por el ideal generado por $(\beta - \gamma)(V \otimes V)$.

El estudio del álgebra envolvente universal de $\mathfrak{sl}(2)_q$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2)_q)$, (no confundir con $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$, el álgebra envolvente universal cuantizada), se reduce al estudio del álgebra $\mathcal{B}$, cuya definición daremos a continuación. El álgebra $\mathcal{A}$ puede ser obtenida como cociente de $\mathcal{B}$ vía un elemento central. Ver [27]. Por tanto nos centraremos principalmente en el estudio de $\mathcal{B}$.

4.4.1. El álgebra $\mathcal{B}$.

La $\mathbb{C}$–álgebra $\mathcal{B}$ está generada por cuatro elementos $X_0, X_\pm, C$ con relaciones:

$$\begin{aligned}
q^2 X_0 X_+ - X_+ X_0 &= qCX_+ \\
q^{-2} X_0 X_- - X_- X_0 &= -q^{-1} CX_- \\
X_+ X_- - X_- X_+ &= (q + q^{-1})(C - \lambda X_0) X_0 \\
CX_\pm - X_\pm C &= CX_0 - X_0 C = 0
\end{aligned}$$

donde $\lambda = q - q^{-1}$. Usaremos posteriormente q–números $[p]$ definidos como es usual por $[p] := \frac{q^p - q^{-p}}{q - q^{-1}}$.

El álgebra $\mathcal{A}$ es obtenida desde $\mathcal{B}$ añadiendo la relación $C = 1$. Ver [27].

4.4.1.1. Centro en $q^{2l} = 1$.

Consideremos el elemento

$$C_2' = X_0^2 + \frac{q}{q+q^{-1}} X_- X_+ + \frac{q^{-1}}{q+q^{-1}} X_+ X_-.$$

De acuerdo a [2] una base lineal de $\mathcal{B}$ está dada por

$$X_-^{a_-} X_+^{a_+} X_0^{a_0} C^{b_1} C_2'^{b_2} \quad \text{con } a_\pm, a_0, b_1, b_2 \in \mathbb{N}, a_+ a_- = 0. \tag{4.2}$$

Esto puede ser probado partiendo de una base de $\mathcal{B}$ de la forma

$$C^k X_-^m X_0^n X_+^p \quad \text{con } k, m, n, p \in \mathbb{N}$$

(ver [27, Lemma 3.2]). Entonces todas las potencias comunes de X_- y X_+ en un monomio pueden ser reexpresadas en términos que envuelvan solamente X_0, C y C_2' usando

$$\begin{aligned} X_- X_+ = C_2' - q^{-1} C X_0 - q^{-2} X_0^2 = \\ \lambda^{-2}\{-(C^2 - \lambda^2 C_2') + (1+q^{-2}) C (C - \lambda X_0) - q^{-2}(C - \lambda X_0)^2\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} X_+ X_- = C_2' + q C X_0 - q^2 X_0^2 = \\ \lambda^{-2}\{-(C^2 - \lambda^2 C_2') + (1+q^2) C (C - \lambda X_0) - q^2 (C - \lambda X_0)^2\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

A partir de todas estas expresiones es fácil comprobar que, aparte de C, otro elemento central de $\mathcal{B}$ es C_2'.

De cara al cálculo del centro de $\mathcal{B}$ es más cómodo utilizar otra base obtenida a partir de (4.2): Dado que

$$X_0 = -\frac{1}{\lambda}(C - \lambda X_0) + \frac{1}{\lambda} C$$

tenemos que cualquier potencia de X_0 puede ser reexpresada en términos que envuelvan solamente potencias de $(C - \lambda X_0)$ y C, con lo cual podemos considerar que un nuevo $\mathbb{C}$–sistema de generadores de $\mathcal{B}$ viene dado por

$$X_-^{a_-} X_+^{a_+} (C - \lambda X_0)^{a_0} C^{b_1} C_2'^{b_2} \quad \text{con } a_\pm, a_0, b_1, b_2 \in \mathbb{N}, a_+ a_- = 0. \quad (4.5)$$

De hecho podemos probar la $\mathbb{C}$–independencia lineal de los anteriores elementos, con lo cual (4.5) nos está dando una nueva base de $\mathcal{B}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

En todo lo que sigue consideremos q una raíz de la unidad. Más concretamente sea l el menor natural no nulo tal que $q^{2l} = 1$, (exigimos además $l > 1$).

De acuerdo con [2], el centro de $\mathcal{B}$ viene dado por

$$\mathrm{Cen}(\mathcal{B}) = \mathbb{C}[C, C_2', X_+^l, (C - \lambda X_0)^l] + \mathbb{C}[C, C_2', X_-^l, (C - \lambda X_0)^l]$$

(suma que no es directa) (su intersección es $\mathbb{C}[C, C_2', (C - \lambda X_0)^l]$).

Para obtenerlo basta imponer a los elementos de (4.5) que conmuten con cada uno de los generadores $X_+, X_-, (C - \lambda X_0), C, C_2'$ y valernos de las fórmulas

$$X_+ X_-^k = X_-^k X_+ + \lambda^{-1}[k] q^{k-2} X_-^{k-1} (C - \lambda X_0)((1+q^2)C - (1+q^{2k})(C - \lambda X_0)) \quad (4.6)$$

(que podemos obtener de la ecuación (3.4b) en [10]), de

$$(C - \lambda X_0)^k X_+ = q^{-2k} X_+ (C - \lambda X_0)^k \quad (4.7)$$
$$(C - \lambda X_0) X_+^k = q^{-2k} X_+^k (C - \lambda X_0)$$

y de

$$\begin{aligned} X_-X_+^k &= X_+^kX_- - \lambda^{-1}[k]q^{-k+2}X_+^{k-1} \\ &\quad (C-\lambda X_0)((1+q^{-2})C-(1+q^{-2k})(C-\lambda X_0)); \\ (C-\lambda X_0)^kX_- &= q^{2k}X_-(C-\lambda X_0)^k; \\ (C-\lambda X_0)X_-^k &= q^{2k}X_-^k(C-\lambda X_0), \end{aligned}$$

obtenidas a partir de (4.6) y (4.7) aplicándoles el automorfismo de $\mathbb{C}$–álgebras φ de $\mathcal{B}$ dado por

$$\begin{aligned} \varphi(X_+) &= X_-, \\ \varphi(X_-) &= X_+, \\ \varphi(X_0) &= X_0, \\ \varphi(C) &= C, \\ \varphi(C_2') &= C_2', \\ \varphi(q) &= -q^{-1}. \end{aligned}$$

Los generadores C, C_2', X_+^l, X_-^l y $(C-\lambda X_0)^l$ del centro de $\mathcal{B}$ están sujetos a la relación

$$\begin{aligned} X_-^lX_+^l = q^{l(l-1)}\lambda^{-2l}\{&-(D^2)^l + q^{-l}D^lQ_l((q+q^{-1})CD^{-1}) \\ &(C-\lambda X_0)^l - (C-\lambda X_0)^{2l}\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde Q_l es el polinomio de grado l tal que

$$Q_l(x+x^{-1}) = x^l + x^{-l}$$

y donde D está definido por

$$D^2 = C^2 - \lambda^2 C_2'.$$

La fórmula (4.8) es obtenida probando por recursión

$$\begin{aligned} X_-^pX_+^p = \lambda^{-2p}\textstyle\prod_{r=0}^{p-1} q^{-2r-1}\{&-qD^2q^{2r} + (q+q^{-1})C(C-\lambda X_0) \\ &-q^{-1}(C-\lambda X_0)^2q^{-2r}\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

y tomando en esta expresión $p = l$. Ver [2].

4.4.1.2. $\mathcal{B}$-módulos simples finito–dimensionales.

Damos ahora la clasificación de los $\mathcal{B}$-módulos simples finito–dimensionales cuando $q^{2l}=1$, de acuerdo a los resultados obtenidos en [10] y [2]. No obstante, a diferencia de dichos trabajos, en lugar de los generadores de la base (4.2), utilizaremos los de la base (4.5) para describir la acción de $\mathcal{B}$ sobre cada uno de los $\mathcal{B}$-módulos simples finito–dimensionales, con el fin de facilitar su tratamiento posterior.

Sea M un $\mathcal{B}$-módulo simple finito-dimensional.

Puesto que $C, C_2', (C-\lambda X_0)^l, X_+^l, X_-^l$ pertenecen al centro de $\mathcal{B}$, han de actuar sobre el $\mathcal{B}$-módulo simple finito-dimensional M como escalares. Denotémoslos, respectivamente, por c, c_2', z, x_+^l, x_-^l . Estos escalares satisfarán la relación (obtenida de (4.8))

$$x_-^l x_+^l = q^{l(l-1)}\lambda^{-2l}\{-(d^2)^l + q^{-l}d^l Q_l((q+q^{-1})cd^{-1})z - z^2\}, \quad (4.10)$$

donde $d^2 = c^2 - \lambda^2 c_2'$.

<u>**Primer caso:** $z \neq 0$ **y** $x_- \neq 0$</u> **(X_- actúa inyectivamente).** Dado que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, $0 \neq M$ es un $\mathbb{C}$–espacio vectorial finito-dimensional y $(C-\lambda X_0)$ es un endomorfismo en M podemos asegurar la existencia de algún $0 \neq \omega \in M$ tal que $(C-\lambda X_0)\omega = \nu\omega$, con $\nu \in \mathbb{C}$ (además habrá de verificarse entonces que $z = \nu^l$).

Definimos

$$v_p := x_-^{-p} X_-^p \omega \quad (v_l \equiv v_0 = \omega).$$

La acción de los generadores de $\mathcal{B}$ sobre los vectores v_p, siendo

$0 \leq p \leq l-1$, viene dada por

$$\begin{aligned} C_2' v_p &= c_2' v_p \\ C v_p &= c v_p \\ (C - \lambda X_0) v_p &= q^{2p} \nu v_p \\ X_- v_p &= x_- v_{p+1} \\ X_+ v_p &= x_-^{-1} \lambda^{-2} \{-d^2 + (1+q^{-2}) c \nu q^{2p} - q^{-2} \nu^2 q^{4p}\} v_{p-1} \end{aligned}$$

Puesto que M es simple ha de coincidir con el $\mathcal{B}$-submódulo generado por v_0, el cual, según se deduce de la acción antes expuesta, está generado sobre $\mathbb{C}$ por $\{v_0, ..., v_{l-1}\}$. Recíprocamente, el $\mathcal{B}$–módulo generado por $\{v_0, ..., v_{l-1}\}$ es simple al estar asociado cada autovector $v_0, ..., v_{l-1}$ de $(C - \lambda X_0)$ a un autovalor diferente ($\nu \neq 0$ al ser $z \neq 0$) y ser además cada uno de estos v_p distintos de cero.

Esta clase de representaciones l–dimensionales periódicas (o semiperiódicas cuando $x_+ = 0$) están caracterizadas entonces por los cinco parámetros complejos c, c_2', z, x_+^l, x_-^l relacionados por la relación (4.10).

Segundo caso: $z \neq 0, x_- = 0$ **y** $x_+ \neq 0$ (X_+ **actúa inyectivamente, pero no** X_-). Dado que $x_-^l = 0$, se tiene que X_- es nilpotente y, por tanto, 0 es un autovalor suyo en M. Sea entonces $0 \neq V_{X_-,0} \subseteq M$ el subespacio propio de X_- asociado al autovalor 0. Este espacio vectorial es estable bajo la acción de $(C - \lambda X_0)$ (si $v \in V_{X_-,0}$ entonces $X_-(C - \lambda X_0)v = q^{-2}(C - \lambda X_0)X_- v = 0$), con lo cual $(C - \lambda X_0)$ es un endomorfismo en el subespacio vectorial no nulo y finito-dimensional $V_{X_-,0}$ y, en consecuencia, existe algún $0 \neq \omega \in V_{X_-,0}$ tal que ω es un autovector para $(C - \lambda X_0)$. Llamando ν a su autovalor asociado se tiene que $(C - \lambda X_0)\omega = \nu\omega$ (con $\nu^l = z$) y $X_- \omega = 0$.

De acuerdo a (4.4) se tiene que

$$C_2' = X_+X_- + \lambda^{-2}\{C^2 - (1+q^2)C(C-\lambda X_0) + q^2(C-\lambda X_0)^2\} \quad (4.11)$$

y, en consecuencia, $c_2' = \lambda^{-2}\{c^2 - (1+q^2)c\nu + q^2\nu^2\}$.

Definimos

$$w_p := x_+^{-p}X_+^p\omega \quad (w_l \equiv w_0 = \omega).$$

La acción de los generadores de $\mathcal{B}$ sobre los vectores w_p viene dada por

$$\begin{aligned}
C_2'w_p &= c_2'w_p \quad (p=0,\dots,l-1);\\
Cw_p &= cw_p \quad (p=0,\dots,l-1);\\
(C-\lambda X_0)w_p &= q^{-2p}\nu w_p \quad (p=0,\dots,l-1);\\
X_+w_p &= x_+w_{p+1} \quad (p=0,\dots,l-1);\\
X_-w_0 &= 0;\\
X_-w_p &= x_+^{-1}\lambda^{-2}\{-d^2 + (1+q^2)c\nu q^{-2p} - q^2\nu^2q^{-4p}\}w_{p-1}\\
&\qquad (p=1,\dots,l-1).
\end{aligned}$$

Al igual que en el primer caso, dado que $\nu \neq 0$ al ser $z \neq 0$, tenemos que $w_0,\dots,w_{l-1}$ son autovectores no nulos de $(C-\lambda X_0)$ asociados a l autovalores diferentes, con lo cual el $\mathcal{B}$–módulo generado por $w_0,\dots,w_{l-1}$ es simple y coincidirá con nuestro M.

Esta clase de representaciones l–dimensionales semiperiódicas están caracterizadas entonces por los cuatro parámetros complejos c_2', c, ν, x_+^l, donde los tres primeros están relacionados por $c_2' = \lambda^{-2}\{c^2 - (1+q^2)c\nu + q^2\nu^2\}$.

Tercer caso: $z \neq 0$ y $x_- = x_+ = 0$ (Representaciones de mayor y menor peso). Al igual que en el caso anterior, dado que X_+ es nilpotente en M ($x_+^l = 0$) y el subespacio propio de X_+ en M asociado al autovalor 0 es estable bajo la acción de $(C-\lambda X_0)$, tenemos que existe algún $0 \neq \omega \in M$ tal que $X_+\omega = 0$ y $(C - \lambda X_0)\omega = \nu\omega$, con $\nu^l = z$.

De acuerdo a (4.3) se tiene que

$$C_2' = X_-X_+ + \lambda^{-2}\{C^2 - (1+q^{-2})C(C - \lambda X_0) + q^{-2}(C - \lambda X_0)^2\} \quad (4.12)$$

y, en consecuencia, $c_2' = \lambda^{-2}\{c^2 - (1+q^{-2})c\nu + q^{-2}\nu^2\}$.

Definimos

$$v_p := X_-^p\omega \quad (p = 0, ..., l-1)(v_l \equiv X_-^l\omega = 0).$$

La acción de los generadores de $\mathcal{B}$ sobre estos elementos viene dada por

$$\begin{aligned}
C_2' v_p &= c_2' v_p \quad (p = 0, ..., l-1);\\
C v_p &= c v_p \quad (p = 0, ..., l-1);\\
(C - \lambda X_0) v_p &= q^{2p}\nu v_p \quad (p = 0, ..., l-1);\\
X_- v_p &= v_{p+1} \quad (p = 0, ..., l-2);\\
X_- v_{l-1} &= 0;\\
X_+ v_0 &= 0;\\
X_+ v_p &= \lambda^{-1}[p]q^{p-2}\nu((1+q^2)c - (1+q^{2p})\nu)v_{p-1}\\
&\quad (p = 1, ..., l-1).
\end{aligned}$$

Dado que $\nu \neq 0$ al ser $z \neq 0$, tenemos que $v_0, ..., v_{l-1}$ son autovectores de $(C - \lambda X_0)$ asociados a l autovalores diferentes. Además, de las fórmulas anteriores deducimos que $X_+v_p \neq 0$ para todo $p \in \{1, ..., l-1\}$ si y sólo si $(1+q^2)c \neq (1+q^{2p})\nu$ para todo $p \in \{1, ..., l-1\}$. Así:

- Si $(1+q^2)c \neq (1+q^{2p})\nu$ para todo $p \in \{1, ..., l-1\}$ entonces $X_+v_p \neq 0$ para todo $p \in \{1, ..., l-1\}$ y tendremos por tanto que $v_0, ..., v_{l-1}$ son autovectores no nulos de $(C - \lambda X_0)$ asociados a l autovalores diferentes. En consecuencia el $\mathcal{B}$-módulo generado por $v_0, ..., v_{l-1}$ es simple y coincidirá con nuestro M.

- Supongamos, por contra, que existe algún $n \in \{1, ..., l-1\}$ tal que $(1+q^2)c = (1+q^{2n})\nu$. Fijemos dicho n. Se tiene entonces que $X_+ v_n = 0$. Además no puede existir ningún $p \in \{1, ..., l-1\}$, $p \neq n$ tal que $(1+q^2)c = (1+q^{2p})\nu$. Puesto que $v_0 \neq 0$ se tiene que $v_0, ..., v_{n-1}$ son todos no nulos. Afirmamos así mismo que $v_p = 0$ para todo $p \in \{n, ..., l-1\}$. En caso contrario, dado que $v_n = 0 \Leftrightarrow v_p = 0$ para todo $p \in \{n, ..., l-1\}$, se tendría que M sería un módulo simple de dimensión l con un submódulo no nulo de dimensión estrictamente menor que l (el generado por $\{v_n, ..., v_{l-1}\}$), lo que sería una contradicción. Se sigue entonces que el $\mathcal{B}$-módulo generado por $v_0, ..., v_{n-1}$ es simple y coincidirá con nuestro M.

Recopilando todo lo anterior hemos llegado a que existen dos tipos de $\mathcal{B}$-módulos simples finito–dimensionales en este tercer caso:

(1) Uno l–dimensional con $\mathbb{C}$–base $\{v_0, ..., v_{l-1}\}$ y acción de $\mathcal{B}$ sobre él dada por

$$\begin{aligned}
C_2' v_p &= c_2' v_p \quad (p = 0, ..., l-1); \\
C v_p &= c v_p \quad (p = 0, ..., l-1); \\
(C - \lambda X_0) v_p &= q^{2p} \nu v_p \quad (p = 0, ..., l-1); \\
X_- v_p &= v_{p+1} \quad (p = 0, ..., l-2); \\
X_- v_{l-1} &= 0; \\
X_+ v_0 &= 0; \\
X_+ v_p &= \lambda^{-1} [p] q^{p-2} \nu ((1+q^2)c - (1+q^{2p})\nu) v_{p-1} \\
&\quad (p = 1, ..., l-1)
\end{aligned}$$

con $\nu \neq 0$ y c tal que $(1+q^2)c \neq (1+q^{2p})\nu$ para todo elemento $p \in \{1, ..., l-1\}$. Además $c_2' = \lambda^{-2}\{c^2 - (1+q^{-2})c\nu + q^{-2}\nu^2\}$.

Nota: Estas representaciones no existen para $l = 2$ pues, en dicho caso $q^2 = -1$ y, tomando $p = 1$, se tiene que $(1+q^2)c = 0 = (1+q^{2p})\nu$.

(2) Para cada $n \in \{1, ..., l-1\}$ una representación n–dimensional, con $\mathbb{C}$–base $\{v_0, ..., v_{n-1}\}$ y acción de $\mathcal{B}$ dada por

$$\begin{aligned}
C_2' v_p &= c_2' v_p \quad (p = 0, ..., n-1);\\
C v_p &= c v_p \quad (p = 0, ..., n-1);\\
(C - \lambda X_0) v_p &= q^{2p} \nu v_p \quad (p = 0, ..., n-1);\\
X_- v_p &= v_{p+1} \quad (p = 0, ..., n-2);\\
X_- v_{n-1} &= 0;\\
X_+ v_0 &= 0;\\
X_+ v_p &= \lambda^{-1}[p] q^{p-2} \nu((1+q^2)c - (1+q^{2p})\nu) v_{p-1}\\
&\quad (p = 1, ..., n-1)
\end{aligned}$$

con la restricción $(1+q^2)c = (1+q^{2n})\nu$ y $\nu \neq 0$. Además $c_2' = \lambda^{-2}\{c^2 - (1+q^{-2})c\nu + q^{-2}\nu^2\}$.

Nota:

- Si $1+q^2 \neq 0$ entonces $c = \frac{(1+q^{2n})}{1+q^2}\nu$, con lo cual nuestra representación en dicho caso es uniparamétrica.
- En consecuencia se tiene que si l es par y estrictamente mayor que 2, la correspondiente representación n–dimensional que resultaría para $n = l/2$ obligaría en ese caso a c a tomar el valor 0 (esta representación no será por tanto posible para $\mathcal{A}$, para la cual c habrá de valer 1).
- Si $l = 2$ entonces $1 + q^2 = 0$ y, por tanto, $(1+q^2)c = 0 = (1+q^{2n})\nu$ para $n = 1$, independientemente de los valores $\nu \neq 0$ y c, con lo cual, en el caso $l = 2$, la correspondiente representación 1-dimensional que aparece para $n = 1$ es biparamétrica.

Con esto queda completado el estudio en este tercer caso.

<u>**Cuarto caso:**</u> $z = 0$. (1) **Supongamos primero** $x_- \neq 0$.

Análogamente al primer caso, podemos asegurar la existencia de algún $0 \neq \omega \in M$ tal que $(C - \lambda X_0)\omega = \nu\omega$, con $\nu \in \mathbb{C}$. Dado que $\nu^l = z = 0$, se tiene que $\nu = 0$, es decir, $(C - \lambda X_0)\omega = 0$.

Definimos

$$v_p := x_-^{-p} X_-^p \omega \quad (v_l \equiv v_0).$$

La acción de los generadores de $\mathcal{B}$ sobre los vectores v_p, siendo $0 \leq p \leq l - 1$, viene dada por

$$\begin{aligned} C_2' v_p &= c_2' v_p \\ C v_p &= c v_p \\ (C - \lambda X_0) v_p &= 0 \\ X_- v_p &= x_- v_{p+1} \\ X_+ v_p &= -x_-^{-1} \lambda^{-2} d^2 v_{p-1} \end{aligned}$$

Tomando

$$v = \sum_{p=0}^{l-1} v_p$$

se tiene que v es un elemento de M con acción de $\mathcal{B}$ sobre él dada por

$$\begin{aligned} C_2' v &= c_2' v \\ C v &= c v \\ (C - \lambda X_0) v &= 0 \\ X_- v &= x_- v \\ X_+ v &= x_+ v \end{aligned}$$

con $x_+ x_- = c_2' - \lambda^{-2} c^2 = -\lambda^{-2} d^2$. En consecuencia el $\mathcal{B}$-módulo generado por v es simple y coincide con M.

(2) **Supongamos ahora el caso** $x_- = 0, x_+ \neq 0$.

Análogamente al segundo caso podemos asegurar la existencia de algún $0 \neq \omega \in M$ tal que $X_-\omega = 0$ y $(C - \lambda X_0)\omega = \nu\omega$, con $\nu \in \mathbb{C}$. Al igual que antes habrá de ocurrir que $\nu = 0$, es decir, $(C - \lambda X_0)\omega = 0$.

Definimos

$$w_p := x_+^{-p} X_+^p \omega \quad (w_l \equiv w_0 = \omega).$$

La acción de los generadores de $\mathcal{B}$ sobre los vectores w_p viene dada por

$$\begin{aligned}
C_2' w_p &= c_2' w_p \quad (p = 0, ..., l-1);\\
C w_p &= c w_p \quad (p = 0, ..., l-1);\\
(C - \lambda X_0) w_p &= 0 \quad (p = 0, ..., l-1);\\
X_+ w_p &= x_+ w_{p+1} \quad (p = 0, ..., l-1);\\
X_- w_0 &= 0;\\
X_- w_p &= -x_+^{-1} \lambda^{-2} d^2 w_{p-1} \quad (p = 1, ..., l-1).
\end{aligned}$$

Dado que $X_-^l \equiv 0$ en M tenemos que $(-x_+^{-1}\lambda^{-2}d^2)^l = 0$, de lo que se deduce que $d^2 = 0$, o, lo que es lo mismo, $c_2' = \lambda^{-2}c^2$. Por tanto, podemos reexpresar la acción anterior por

$$\begin{aligned}
C_2' w_p &= c_2' w_p\\
C w_p &= c w_p\\
(C - \lambda X_0) w_p &= 0\\
X_+ w_p &= x_+ w_{p+1}\\
X_- w_p &= 0
\end{aligned}$$

para $p = 0, ..., l-1$, donde $c_2' = \lambda^{-2}c^2$.

Tomando

$$v = \sum_{p=0}^{l-1} w_p$$

se tiene que v es un elemento de M con acción de $\mathcal{B}$ sobre él dada por

$$\begin{aligned} C_2' v &= c_2' v \\ C v &= c v \\ (C - \lambda X_0) v &= 0 \\ X_- v &= 0 \\ X_+ v &= x_+ v \end{aligned}$$

con $c_2' = \lambda^{-2} c^2$. En consecuencia el $\mathcal{B}$-módulo generado por v es simple y coincide con M.

(3) **Supongamos ahora el caso** $x_- = x_+ = 0$.

Al igual que en el tercer caso podemos asegurar la existencia de algún $0 \neq \omega \in M$ tal que $X_+ \omega = 0$ y $(C - \lambda X_0)\omega = \nu\omega$, con $\nu \in \mathbb{C}$. Al igual que antes $\nu = 0$, es decir, $(C - \lambda X_0)\omega = 0$.

Definimos

$$v_p := X_-^p \omega \quad (p = 0, ..., l-1)(v_l \equiv X_-^l \omega = 0).$$

La acción de los generadores de $\mathcal{B}$ sobre estos elementos viene dada por

$$\begin{aligned} C_2' v_p &= c_2' v_p \quad (p = 0, ..., l-1); \\ C v_p &= c v_p \quad (p = 0, ..., l-1); \\ (C - \lambda X_0) v_p &= 0 \quad (p = 0, ..., l-1); \\ X_- v_p &= v_{p+1} \quad (p = 0, ..., l-2); \\ X_- v_{l-1} &= 0; \\ X_+ v_p &= 0 \quad (p = 0, ..., l-1). \end{aligned}$$

Sea $j := \max\{p \in \{0, ..., l-1\} : v_p \neq 0\}$ (al menos $j = 0$ dado que $v_0 = \omega \neq 0$). Tomando $v := v_j$ se tiene que v es un elemento de M

con acción de $\mathcal{B}$ sobre él dada por

$$\begin{aligned} C_2' v &= c_2' v \\ Cv &= cv \\ (C - \lambda X_0) v &= 0 \\ X_- v &= 0 \\ X_+ v &= 0 \end{aligned}$$

y donde $c_2' = \lambda^{-2} c^2$ (es decir, $d^2 = 0$). En consecuencia el $\mathcal{B}$-módulo generado por v es simple y coincide con M.

En consecuencia, **en cualquiera de los casos posibles para** $z = 0$, M puede ser descrito como un $\mathcal{B}$-módulo unidimensional con $\mathcal{B}$-acción

$$\begin{aligned} C_2' v &= c_2' v \\ Cv &= cv \\ (C - \lambda X_0) v &= 0 \\ X_- v &= x_- v \\ X_+ v_p &= x_+ v \end{aligned}$$

y donde $x_+ x_- = c_2' - \lambda^{-2} c^2 = -\lambda^{-2} d^2$.

4.4.1.3. $\mathcal{A}$-módulos simples finito–dimensionales.

Hemos obtenido la descripción completa de los $\mathcal{B}$–módulos simples finito–dimensionales. Dado que el álgebra $\mathcal{A}$ se puede obtener como cociente de $\mathcal{B}$ por el ideal generado por $C - 1$, la lista completa de $\mathcal{A}$–módulos simples finito–dimensionales se obtiene de la anterior imponiendo $c = 1$ en los casos en que sea posible, debido a la biyección existente entre los T/I–módulos simples $\tilde{M}$ y los T–módulos simples M tales que $IM = 0$, para cualquier anillo T y cualquier ideal I de T.

4.4.2. Propiedades homológicas y condiciones de regularidad.

Estudiamos ahora las propiedades homológicas y condiciones de regularidad de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$. Probaremos que estas álgebras son Auslander-regular, Cohen-Macaulay, que satisfacen la condición fuerte de second layer y calcularemos sus dimensiones global, inyectiva y de Gelfand-Kirillov. Introducimos un álgebra auxiliar S, de la cual $\mathcal{B}$ se puede obtener como un cociente.

4.4.2.1. El álgebra S.

Definamos S como la $\mathbb{C}$-álgebra con generadores X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 y relaciones

$$\begin{aligned}
&X_2X_1 = X_1X_2 - \lambda^{-1}(q+q^{-1})X_3(X_4 - X_3)\\
&X_3X_1 = q^{-2}X_1X_3,\ X_4X_1 = X_1X_4,\ X_5X_1 = X_1X_5\\
&X_3X_2 = q^2X_2X_3,\ X_4X_2 = X_2X_4,\ X_5X_2 = X_2X_5\\
&X_4X_3 = X_3X_4,\ X_5X_3 = X_3X_5\\
&X_5X_4 = X_4X_5
\end{aligned}$$

Para lo que sigue nos interesa describir S como una extensión de Ore iterada. En efecto

$$S = \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5][X_2; \sigma_0][X_1; \sigma_1, \delta]$$

donde

$$\sigma_0 : \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5] \longrightarrow \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5]$$

es un automorfismo definido sobre los generadores por

$$\sigma_0(X_3) = q^2X_3,\ \sigma_0(X_4) = X_4,\ \sigma_0(X_5) = X_5,$$

donde

$$\sigma_1 : \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5][X_2; \sigma_0] \longrightarrow \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5][X_2; \sigma_0]$$

es un automorfismo definido sobre los generadores por

$$\sigma_1(X_2) = X_2,\ \sigma_1(X_3) = q^{-2}X_3,\ \sigma_1(X_4) = X_4,\ \sigma_1(X_5) = X_5,$$

y donde

$$\delta : \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5][X_2; \sigma_0] \longrightarrow \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5][X_2; \sigma_0]$$

es una σ_1–derivación definida sobre los generadores por

$$\delta(X_2) = -\lambda^{-1}(q + q^{-1})X_3(X_4 - X_3),\ \delta(X_3) = \delta(X_4) = \delta(X_5) = 0.$$

En consecuencia, S es un dominio noetheriano y una $\mathbb{C}$-base de S vendrá dada por $\{X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}X_4^{\alpha_4}X_5^{\alpha_5} : \alpha_i \in \mathbb{N}\}$.

Veamos ahora que $\mathcal{B}$ puede ser obtenida como cociente de S. Identificando $X_1 \equiv X_+$, $X_2 \equiv X_-$, $X_3 \equiv C - \lambda X_0$, $X_4 \equiv C$, $X_5 \equiv C_2'$ observamos que todas las relaciones de S se verifican también en $\mathcal{B}$. Otra relación aparte que se verifica en $\mathcal{B}$ es la que viene dada por las fórmulas (4.11) y (4.12):

$$\begin{aligned} C_2' = {} & X_-X_+ + \lambda^{-2}\{C^2 - (1 + q^{-2})C(C - \lambda X_0) + q^{-2}(C - \lambda X_0)^2\} = \\ & X_+X_- + \lambda^{-2}\{C^2 - (1 + q^2)C(C - \lambda X_0) + q^2(C - \lambda X_0)^2\}. \end{aligned}$$

Consideramos el elemento p de S dado por

$$\begin{aligned} p = {} & X_5 - X_2X_1 - \lambda^{-2}(X_4^2 - (1 + q^{-2})X_4X_3 + q^{-2}X_3^2) = \\ & X_5 - X_1X_2 - \lambda^{-2}(X_4^2 - (1 + q^2)X_4X_3 + q^2X_3^2). \end{aligned}$$

Se tiene entonces el diagrama conmutativo de álgebras

$$\begin{tikzcd} S \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & \frac{S}{Sp} \arrow[dl] \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

donde cada flecha es un epimorfismo. De hecho podemos ver que $\frac{S}{Sp} \cong \mathcal{B}$, pues al imponer $p \equiv 0$ en $\frac{S}{Sp}$ se obtiene que

$$\{X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}X_4^{\alpha_4}X_5^{\alpha_5} : \alpha_i \in \mathbb{N}, \alpha_1\alpha_2 = 0\}$$

es una base de $\frac{S}{Sp}$, y esta base es análoga a la que se obtuvo para $\mathcal{B}$ en (4.5).

4.4.2.2. Dimensión global e inyectiva.

Podemos darnos cuenta que también $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ pueden ser descritas como extensiones de Ore iteradas. De la $\mathbb{C}$–base de $\mathcal{B}$

$$\{C^{\alpha_1}X_-^{\alpha_2}X_0^{\alpha_3}X_+^{\alpha_4} : \alpha_i \in \mathbb{N}\}$$

obtenida en [27, Lemma 3.2], y empleando el hecho de que $X_0 = -\frac{1}{\lambda}(C - \lambda X_0) + \frac{1}{\lambda}C$, se obtiene que

$$\{C^{\alpha_1}(C - \lambda X_0)^{\alpha_2}X_-^{\alpha_3}X_+^{\alpha_4} : \alpha_i \in \mathbb{N}\}$$

es también una $\mathbb{C}$–base de $\mathcal{B}$. De modo similar a como se hizo para S, se puede comprobar que $\mathcal{B}$ puede ser descrita como extensión de Ore iterada de la forma

$$\mathcal{B} = \mathbb{C}[C - \lambda X_0, C][X_-; \sigma_0][X_+; \sigma_1, \delta]$$

donde

$$\sigma_0 : \mathbb{C}[C - \lambda X_0, C] \longrightarrow \mathbb{C}[C - \lambda X_0, C]$$

es un automorfismo definido sobre los generadores por

$$\sigma_0(C - \lambda X_0) = q^2(C - \lambda X_0),\ \sigma_0(C) = C,$$

donde

$$\sigma_1 : \mathbb{C}[C - \lambda X_0, C][X_-; \sigma_0] \longrightarrow \mathbb{C}[C - \lambda X_0, C][X_-; \sigma_0]$$

es un automorfismo definido sobre los generadores por

$$\sigma_1(X_-) = X_-, \ \sigma_1(C - \lambda X_0) = q^{-2}(C - \lambda X_0), \ \sigma_1(C) = C,$$

y donde

$$\delta : \mathbb{C}[C - \lambda X_0, C][X_-; \sigma_0] \longrightarrow \mathbb{C}[C - \lambda X_0, C][X_-; \sigma_0]$$

es una σ_1–derivación definida sobre los generadores por

$$\delta(X_-) = -\lambda^{-1}(q+q^{-1})(C-\lambda X_0)(C-(C-\lambda X_0)), \ \delta(C-\lambda X_0) = \delta(C) = 0.$$

Tenemos como consecuencia que $\mathcal{B}$ es un dominio noetheriano.

De forma análoga, y puesto que el álgebra $\mathcal{A}$ se obtiene de $\mathcal{B}$ añadiendo la relación $C = 1$, llegamos a que

$$\{(1 - \lambda X_0)^{\alpha_1} X_-^{\alpha_2} X_+^{\alpha_3} : \alpha_i \in \mathbb{N}\}$$

es una $\mathbb{C}$–base de $\mathcal{A}$. Puesto que las relaciones en $\mathcal{A}$ son justamente las de $\mathcal{B}$ tomando $C = 1$ tenemos, de modo completamente similar a como se hizo para $\mathcal{B}$, que $\mathcal{A}$ puede ser descrita como extensión de Ore iterada de la forma

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[1 - \lambda X_0][X_-; \sigma_0][X_+; \sigma_1, \delta]$$

donde

$$\sigma_0 : \mathbb{C}[1 - \lambda X_0] \longrightarrow \mathbb{C}[1 - \lambda X_0]$$

es un automorfismo definido sobre los generadores por

$$\sigma_0(1 - \lambda X_0) = q^2(1 - \lambda X_0),$$

donde

$$\sigma_1 : \mathbb{C}[1 - \lambda X_0][X_-; \sigma_0] \longrightarrow \mathbb{C}[1 - \lambda X_0][X_-; \sigma_0]$$

es un automorfismo definido sobre los generadores por

$$\sigma_1(X_-) = X_-, \ \sigma_1(1 - \lambda X_0) = q^{-2}(1 - \lambda X_0),$$

y donde

$$\delta : \mathbb{C}[1-\lambda X_0][X_-;\sigma_0] \longrightarrow \mathbb{C}[1-\lambda X_0][X_-;\sigma_0]$$

es una σ_1–derivación definida sobre los generadores por

$$\delta(X_-) = -\lambda^{-1}(q+q^{-1})(1-\lambda X_0)(1-(1-\lambda X_0)),\ \delta(1-\lambda X_0) = 0.$$

Tenemos como consecuencia que $\mathcal{A}$ es un dominio noetheriano.

(4.4.1) Proposición. *(1)* $\mathrm{gldim}(S) = \mathrm{idim}(S) = 5$;

(2) $\mathrm{gldim}(\mathcal{B}) = \mathrm{idim}(\mathcal{B}) = 4$;

(3) $\mathrm{gldim}(\mathcal{A}) = \mathrm{idim}(\mathcal{A}) = 3$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Aplicando [28, Theorem 7.5.3] obtenemos que la dimensión global de $T = \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5][X_2;\sigma_0]$ es 4. El mismo teorema nos da que la dimensión global de $S = T[X_1;\sigma_1,\delta]$ es 4 ó 5. La existencia de S–módulos M tales que $\mathrm{Ext}^5_S(M,S) \neq 0$ (como veremos en la subsección 4.4.3.) nos da que $\mathrm{idim}(S) = \mathrm{gldim}(S) = 5$.
(2) La anterior descripción de $\mathcal{B}$ como extensión de Ore iterada y la existencia de $\mathcal{B}$–módulos M tales que $\mathrm{Ext}^4_{\mathcal{B}}(M,\mathcal{B}) \neq 0$, como también veremos, nos permiten probar, de forma completamente similar a como se ha hecho para S, que $\mathrm{idim}(\mathcal{B}) = \mathrm{gldim}(\mathcal{B}) = 4$.
(3) Finalmente, y por el mismo tipo de argumento que en los casos anteriores, tenemos que $\mathrm{idim}(\mathcal{A}) = \mathrm{gldim}(\mathcal{A}) = 3$. □

4.4.2.3. Condiciones Auslander-regular y Cohen-Macaulay.

(4.4.2) Proposición. *(1) S es Auslander-regular y Cohen-Macaulay.*

(2) $\mathcal{B}$ es Auslander-regular y Cohen-Macaulay.

(3) $\mathcal{A}$ es Auslander-regular y Cohen-Macaulay.

DEMOSTRACIÓN. (1) La regularidad Auslander de S se sigue directamente de [25, Lemma], por la construcción de S como extensión de Ore iterada. Para obtener la condición Cohen-Macaulay graduamos los anillos base en la cadena de extensiones de Ore que da lugar a S de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R &:= \mathbb{C}[X_3, X_4, X_5]; \\ T &:= R[X_2; \sigma_0] \\ &\quad \{R_n\}_n; \\ R_n &= \mathbb{C}(X_3^{\alpha_3} X_4^{\alpha_4} X_5^{\alpha_5} : \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = n); \\ \sigma_0(X_3^{\alpha_3} X_4^{\alpha_4} X_5^{\alpha_5}) &= q^{2\alpha_3} X_3^{\alpha_3} X_4^{\alpha_4} X_5^{\alpha_5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= T[X_1; \sigma_1, \delta]; \\ &\quad \{T_n\}_n; \\ T_n &= \mathbb{C}(X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3} X_4^{\alpha_4} X_5^{\alpha_5} : \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = n); \\ \sigma_1(X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3} X_4^{\alpha_4} X_5^{\alpha_5}) &= q^{-2\alpha_3} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3} X_4^{\alpha_4} X_5^{\alpha_5} \end{aligned}$$

Aplicando ahora la segunda parte de [25, Lemma] obtenemos que S es Cohen-Macaulay.

(2) El razonamiento anterior, aplicado a la descripción dada para $\mathcal{B}$ como extensión de Ore iterada, nos da el resultado buscado. Otra demostración alternativa sería la siguiente:

Tenemos que $\mathcal{B} \cong \frac{S}{Sp}$. Podemos comprobar fácilmente que p es un elemento central de S. Así mismo, S es un dominio y, por tanto, p es un elemento regular. Basta aplicar ahora la tercera parte de [25, Lemma] para obtener que $\mathcal{B}$ es Auslander-Gorenstein y Cohen-Macaulay. La finitud de la dimensión global de $\mathcal{B}$ nos da además que es Auslander-regular.

(3) $\mathcal{A}$ viene descrita como cociente de $\mathcal{B}$ a través del elemento central y regular de $\mathcal{B}$, $(C-1)$. Razonando de forma análoga al punto

anterior se obtiene que $\mathcal{A}$ es Auslander-regular y Cohen-Macaulay. □

4.4.2.4. Dimensión de Gelfand-Kirillov.

Aplicando directamente la definición dada en la sección 1.3., calculamos la dimensión de Gelfand-Kirillov de S y, a partir de ella, obtenemos las de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$.

(4.4.3) Proposición. *(1)* $\mathrm{GKdim}(S) = 5$.

(2) $\mathrm{GKdim}(\mathcal{B}) = 4$.

(3) $\mathrm{GKdim}(\mathcal{A}) = 3$.

Demostración. (1) S es una $\mathbb{C}$-álgebra afín con subespacio generador $V = \mathbb{C}\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$. Consideramos la filtración finito-dimensional estándar $\{S_i\}$ de S dada por $S_0 = V^0 = \mathbb{C}$, $S_i = \sum_{j=0}^{i} V^j$.

Tenemos que cada elemento de S se escribe de la forma

$$\sum a_\alpha X^\alpha \quad \text{con } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{N}^5,\ a_\alpha \in \mathbb{C}$$

siendo $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3} X_4^{\alpha_4} X_5^{\alpha_5}$.

Una base de S como $\mathbb{C}$-espacio vectorial está formada por los X^α y una base de los S_i está formada por los X^α con $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 \leq i$. El número de elementos de esta base es

$$\binom{i+5}{5}$$

que es un polinomio en i de grado 5. En consecuencia, la dimensión de Gelfand-Kirillov de S es 5.

(2) De la demostración de la tercera parte de [25, Lemma] se obtiene que $\mathrm{GKdim}(S/Sp) = \mathrm{GKdim}(S) - 1$. En el punto anterior obtuvimos que $\mathrm{GKdim}(S) = 5$, de lo que se deduce que $\mathrm{GKdim}(\mathcal{B}) = 4$.
(3) Razonando de forma análoga al punto anterior, puesto que $\mathcal{A} \cong \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}(C-1)}$, se obtiene que $\mathrm{GKdim}(\mathcal{A}) = 3$. □

4.4.2.5. Condición fuerte de second layer.

Teníamos ya que $\mathcal{B}$ es finitamente generado como módulo sobre su centro. También $\mathcal{A}$ lo es. En efecto, podemos comprobar que el $\mathbb{C}$-sistema de generadores que resulta para $\mathcal{A}$ de hacer $C \equiv 1$ en (4.5) es también $\mathbb{C}$-linealmente independiente. Por tanto

$$\{X_-^{a_-} X_+^{a_+} (1 - \lambda X_0)^{a_0} C_2'^{b} \quad \text{con } a_\pm, a_0, b \in \mathbb{N}, a_+ a_- = 0\}$$

es una $\mathbb{C}$-base para $\mathcal{A}$. Calculando a partir de aquí el centro de $\mathcal{A}$ obtenemos que

$$\mathrm{Cen}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}[C_2', X_+^l, (1 - \lambda X_0)^l] + \mathbb{C}[C_2', X_-^l, (1 - \lambda X_0)^l]$$

y, por tanto, $\mathcal{A}$ es finitamente generado como módulo sobre su centro.

Con todo esto podemos establecer ahora el resultado:

(4.4.4) Proposición. *(1) $\mathcal{B}$ satisface la condición fuerte de second layer.*

(2) $\mathcal{A}$ satisface la condición fuerte de second layer.

Demostración. Puesto que tanto $\mathcal{B}$ como $\mathcal{A}$ son finitamente generados como módulos sobre su centro, basta aplicar el teorema de Letzter [23, 4.2], para obtener que ambas álgebras satisfacen la condición fuerte de second layer. □

4.4.3. Igualdad de las dimensiones.

Nos disponemos ahora a probar la igualdad de las $\mathbb{C}$–dimensiones de $\mathrm{Ext}_R^\mu(R/P, R)$ y de R/P para cualquier ideal primo cofinito P de R, siendo $\mu = \mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{idim}(R)$, tanto en el caso en que $R = \mathcal{B}$ como en el caso en que $R = \mathcal{A}$. Para ello bastará demostrar que $\dim_{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}_R^\mu(M, R))$, para cualquier R–módulo simple finito-dimensional M, en virtud de la proposición (3.3.2).

Comencemos con el estudio para $R = \mathcal{B}$. Sea M un $\mathcal{B}$–módulo simple finito-dimensional. Dado que $\mathcal{B} \cong \frac{S}{Sp}$, podemos considerar M como un S–módulo por el correspondiente cambio de anillo. Como $pM = 0$ y p es un elemento central y regular de S, por el teorema de Rees tenemos que

$$\mathrm{Ext}_S^n(M, S) \cong \mathrm{Ext}_{S/Sp}^{n-1}(M, S/Sp) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^{n-1}(M, \mathcal{B}) \qquad n \geq 2$$

Por tanto en nuestro caso tenemos que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^4(M, \mathcal{B}) \cong \mathrm{Ext}_S^5(M, S)$$

Entonces el problema es computar la $\mathbb{C}$-dimensión de $\mathrm{Ext}_S^5(M, S)$. Estudiémosla para cada uno de los cuatro tipos de $\mathcal{B}$-módulos simples finito–dimensionales que obteníamos en los apartados anteriores:

Primer caso: $z \neq 0$ **y** $x_- \neq 0$.

En este caso, el $\mathcal{B}$-módulo l–dimensional M es isomorfo, como S–módulo, a

$$M \cong \frac{S}{S(X_1^l - x_+^l, X_2^l - x_-^l, X_3 - \nu, X_4 - c, X_5 - c_2', p)}$$

donde $c, c_2', z, x_+^l, x_-^l \in \mathbb{C}$ y están relacionados por (4.10).

Utilizando las técnicas computacionales de bases de Groebner no conmutativas desarrolladas en [16] y siguiendo un método similar al que usamos al tratar los ejemplos de $\mathbb{C}_q[X_1,\dots,X_n]$ y $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$, obtenemos un isomorfismo

$$Ext^5_S(M,S)$$
$$\cong \frac{S}{(X_5-c_2',-X_4+c,X_3-q^{-2}\nu,q^{-2}(-X_2^l+x_-^l),q^{-2}(X_1-x_-^{-l}\beta X_2^{l-1}))S},$$

donde

$$\beta = c_2' - \lambda^{-2}(c^2-(1+q^{-2})\nu c + q^{-2}\nu^2).$$

En consecuencia, la $\mathbb{C}$-dimensión de $\mathrm{Ext}^5_S(M,S)$ coincide con la de M (concretamente es l).

Segundo caso:$z\neq 0$, $x_-=0$, $x_+\neq 0$.

En este caso, el $\mathcal{B}$-módulo l–dimensional M es isomorfo, como S–módulo, a

$$M\cong \frac{S}{S(X_1^l-x_+^l,X_2,X_3-\nu,X_4-c,X_5-c_2')}$$

con $c_2',c,\nu,x_+^l\in\mathbb{C}$ y donde los tres primeros están relacionados por $c_2'=\lambda^{-2}\{c^2-(1+q^2)c\nu+q^2\nu^2\}$. Operando de forma similar al caso anterior obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^5_S(M,S)$$
$$\cong \frac{S}{(q^{-2}(X_5-c_2'),q^{-2}(-X_4+c),q^{-2}(X_3-\nu q^2),-X_2,X_1^l-x_+^l)S}$$

con lo cual

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^5_S(M,S)) = l = \dim_{\mathbb{C}}(M).$$

Tercer caso:$z\neq 0$, $x_-=x_+=0$.

En este caso obteníamos dos tipos de $\mathcal{B}$-módulos simples finito–dimensionales:

(1) En este caso, el $\mathcal{B}$-módulo l–dimensional M es isomorfo, como S–módulo, a

$$M\cong \frac{S}{S(X_1,X_2^l,X_3-\nu,X_4-c,X_5-c_2')}$$

donde todos los parámetros son complejos y verifican que $\nu \neq 0$, $(1+q^2)c \neq (1+q^{2p})\nu$ para todo $p \in \{1,...,l-1\}$ y además $c_2' = \lambda^{-2}\{c^2 - (1+q^{-2})c\nu + q^{-2}\nu^2\}$.

Operando de forma similar a los casos anteriores obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^5_S(M,S) \cong \frac{S}{(X_5 - c_2', -X_4 + c, X_3 - q^{-2}\nu, -q^{-2}X_2^l, q^{-2}X_1)S}$$

con lo cual

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^5_S(M,S)) = l = \dim_{\mathbb{C}}(M).$$

(2) En este caso, el $\mathcal{B}$-módulo n–dimensional M que obteníamos para cada $n \in \{1,...,l-1\}$ es isomorfo, como S–módulo, a

$$M \cong \frac{S}{S(X_1, X_2^n, X_3 - \nu, X_4 - c, X_5 - c_2')}$$

donde todos los parámetros son complejos y verifican $(1+q^2)c = (1+q^{2n})\nu$, $\nu \neq 0$ y $c_2' = \lambda^{-2}\{c^2 - (1+q^{-2})c\nu + q^{-2}\nu^2\}$.

Operando de forma similar a los casos anteriores obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^5_S(M,S) \cong \frac{S}{(X_5 - c_2', -X_4 + c, X_3 - q^{-2}q^{2n}\nu, -q^{2n}X_2^n, q^{-2}X_1)S}$$

con lo cual

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^5_S(M,S)) = n = \dim_{\mathbb{C}}(M).$$

Cuarto caso:$z = 0$.

En este caso, el $\mathcal{B}$-módulo 1–dimensional M es isomorfo, como S–módulo, a

$$M \cong \frac{S}{S(X_1 - x_+, X_2 - x_-, X_3, X_4 - c, X_5 - c_2')}$$

donde todos los parámetros son complejos y verifican que $x_+x_- = c_2' - \lambda^{-2}c^2 = -\lambda^{-2}d^2$.

Operando de forma similar a los casos anteriores obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^5_S(M,S) \cong \frac{S}{(X_5 - c_2', -X_4 + c, X_3, -q^2X_2 + x_-, q^{-2}X_1 - x_+)S}$$

con lo cual

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^5_S(M,S)) = 1 = \dim_{\mathbb{C}}(M).$$

Como consecuencia de todo lo anterior hemos probado el siguiente teorema:

(4.4.5) Teorema. *Sea M un $\mathcal{B}$-módulo simple finito-dimensional. Entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^4_{\mathcal{B}}(M,\mathcal{B})).$$

y, a partir de él, el siguiente corolario:

(4.4.6) Corolario. *Sea M un $\mathcal{A}$-módulo simple finito-dimensional. Entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^3_{\mathcal{A}}(M,\mathcal{A})).$$

Demostración. Sea M un $\mathcal{A}$-módulo simple finito-dimensional. Entonces M será un $\mathcal{B}$-módulo simple (además, tal que $(C-1)M = 0$). Aplicando el teorema anterior tenemos que

$$\dim_{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^4_{\mathcal{B}}(M,\mathcal{B})).$$

Sólo resta aplicar ahora el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^4_{\mathcal{B}}(M,\mathcal{B}) \cong \mathrm{Ext}^3_{\mathcal{B}/\mathcal{B}(C-1)}(M,\mathcal{B}/\mathcal{B}(C-1)) \cong \mathrm{Ext}^3_{\mathcal{A}}(M,\mathcal{A}),$$

obtenido a partir del teorema de Rees, para conseguir lo que buscábamos. □

Concluimos en consecuencia con el resultado deseado:

(4.4.7) Corolario. *Sea P un ideal primo cofinito de $R = \mathcal{B}$ ó $\mathcal{A}$. Entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}}(R/P) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^{\mu}_{R}(R/P, R))$$

siendo $\mu = \mathrm{GKdim}(R) = \mathrm{idim}(R)$.

Bibliografía

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller, Rings and categories of modules, Second Edition, Springer-Verlag New York, Inc., 1992.

[2] D. Arnaudon, *A note on the generalized Lie algebra* $\mathfrak{sl}(2)_q$, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 6647-6652.

[3] D. Arnaudon y P. Roche, *Irreducible representations of the quantum analogue of* $\mathrm{SU}(2)$, Letters in Mathematical Physics **17** (1989), 295-300.

[4] G. Barou y M. P. Malliavin, *Sur la résolution injective minimale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble*, J. Pure Appl. Algebra **37** (1985), 1-25.

[5] A. D. Bell, Notes on localization in noncommutative noetherian rings, Cuadernos de Álgebra **9**, Universidad de Granada, Granada, 1988.

[6] J. E. Björk, Rings of differential operators, North-Holland Math.Library, Vol. **21**,Amsterdam, 1979.

[7] J. E. Björk, *Filtered noetherian rings*, En "Noetherian rings and their applications´´, Mathematical Surveys and Monographs, **24**, 59-97, Amer. Math. Soc., 1987, 59-97.

[8] J. L. Bueso, P. Jara y A. Verschoren, Compatibility, Stability and Sheaves, Pure and Applied Mathematics, Vol. **185**, Dekker, New York, 1995.

[9] C. de Concini y V. G. Kac, *Representations of quantum groups at roots of 1*, en "Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory" (Paris, 1989). Progress in Mathematics, **vol.92**, 471-506, Birkhäuser, Boston, 1990.

[10] V.K. Dobrev y A. Sudbery, *Representations of the generalized Lie algebra* $\mathfrak{sl}(2)_q$, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 6635-6645.

[11] V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254-258.

[12] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. ICM, Berkeley (1986), 798-820.

[13] J. Gómez, P. Jara y L. Merino, *Locally finite representations of algebras*, Comm. Algebra **24** (1996), 4581-4601.

[14] K. R. Goodearl y R. B. Warfield, *An introduction to noncommutative noetherian rings*, London Math. Society Student Text Series, 16, Cambridge University Press, London, 1989.

[15] J. C. Jantzen, *Lectures on Quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, **vol.6.** American Mathematical Society, 1996.

[16] P. Jara, Quantum Groebner bases, Notas de trabajo, **9**. Granada, 1999.

[17] P. Jara y J. Jódar, *An example of Bernstein Duality*, Advances in Mathematics **152** (2000), 1-27.

[18] P. Jara y J. Jódar, *$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ satisfies a Bernstein duality.* Por aparecer en Journal of Symbolic Computation. Granada, 2000.

[19] A. V. Jategaonkar, Localization in noetherian rings, London Math. Soc. Lecture Notes **98**, Cambridge Univ. Press, London, 1986.

[20] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.

[21] C.Kassel, Quantum groups, Graduate Texts in Mathematics, **vol.155**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[22] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhaüser, Boston, 1985.

[23] E. S.Letzter, *Prime ideals in finite extensions of noetherian rings*, Journal of Algebra, **135** (1990), 412-439.

[24] T. Levasseur, *Some properties of non-commutative regular graded rings*, Glasgow Math. J. **34** (1992), 277-300.

[25] T. Levasseur, J. T. Stafford, *The quantum coordinate ring of the special linear group*, Journal of Pure and Applied Algebra, **86** (1993), 181-186.

[26] H. Li y F. Van Oystaeyen, Zariskian filtrations, Kluwer, 1996.

[27] V. Lyubashenko y A. Sudbery, *Generalized Lie algebras of type A_n*, Journal of Mathematical Physics, vol. **39**, num. 6 (1998), 3487-3504.

[28] J. C. McConnell y J. C. Robson, Noncommutative noetherian rings, Wiley Interscience, New York, 1988.

[29] J. Mulet, *Cohomología local y dualidad en anillos Gorenstein no conmutativos*, Tesis Doctoral, Univ. de Valencia, 1992.

[30] C. Nastasescu y F. Van Oystaeyen, Graded ring theory, Math. Library, **28**, North Holland, Amsterdam, 1982.

[31] J. J. Rotman, An introduction to homological algebra, Academic Press, 1979.

[32] L. Rowen, Ring Theory, Vols. I, II, Academic Press, San Diego, 1988.

[33] E. Santos, *Completación de anillos y módulos noetherianos relativos*, Tesis Doctoral, Univ. de Granada, 1993.

[34] B. Stenström, Rings of quotients, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[35] Z. Yi, *Injective homogeneity and the Auslander-Gorenstein property*, Glasgow Math. J., **37** (1995), no.2, 191-204.

[36] A. Zaks, *Injective dimension of semi–primary rings*, Journal of Algebra, **13** (1969), 73-86.