Adoracion Martinez Duran
(Granada) S. Fernando 2 de Enero de 1880.

DEFINICIONES,

REGLAS Y DEMOSTRACIONES

DE

ARITMÉTICA.

Adoracion Martinez

CÁDIZ.

IMPRENTA Y LITOGRAFÍA DE LA REVISTA MÉDICA,
CALLE DE LA BOMBA, NÚMERO 1.
1862.

DEFINICIONES,

REGLAS Y DEMOSTRACIONES

DE

ARITMÉTICA.

CÁDIZ.

IMPRENTA Y LITOGRAFÍA DE LA REVISTA MÉDICA,
CALLE DE LA BOMBA, NÚMERO 1.
1862.

ERRATAS.

Página.	Línea.	Dice.	Diga.
27......	10....	primeros....	primos
89......	12....	(XCIV)	(XCIII)
108......	11....	*a* y *b*	*a* y *l*

Soy de [illegible] Martinez Fernandez.

LIBRO PRIMERO.

DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

CAPITULO I.º

Nociones preliminares.—Sistema de numeracion.

Qué es cantidad?

Todo lo que es capaz de aumento ó disminucion.

Qué es unidad?

Un objeto cualquiera tomado arbitrariamente ó en la naturaleza, que sirve de término de comparacion para medir todas las cantidades de su misma especie.

Qué es número?

El resultado de la comparacion de una cantidad cualquiera con la unidad.

Qué denominaciones admiten los números?

Llámanse *enteros*, *quebrados* y *mistos*; *abstractos* y *concretos*.

Qué es número entero?

El conjunto de varias unidades justas y de la misma especie.

Qué es número quebrado?

Una parte de la unidad ó la reunion de varias de estas partes.

Qué es número misto?

La reunion de un entero y un quebrado.

Qué es número abstracto?

Aquel en que solo se considera el número de unidades que contiene y se prescinde del tamaño ó especie de la unidad.

Qué es número concreto?

El que se refiere á una unidad definida en cuanto á su tamaño ó especie.

Qué se entiende por *sistema de numeracion?*

Un lenguage propio para enunciar todos los números y caractéres adecuados para representarlos por escrito.

Cuál es nuestro *sistema de numeracion?*

El *decimal* ó *décuplo* por ser diez la base elegida.

Qué significa *base* de un sistema?

El número de unidades de un órden cualquiera que se necesita para componer una unidad del órden inmediato superior.

Qué denominaciones se han adoptado para espresar los diferentes números?

Uno indica la unidad; *dos* la reunion de una unidad con otra; *tres* la reunion de dos unidades con otra mas; *cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve*. Nueve y uno se llama *diez* ó *una decena*, y se cuenta por decenas lo mismo que por unidades, diciendo: una decena, dos decenas,.......nueve decenas, ó bien *diez, veinte, treinta,..... noventa;* á las cuales agregadas las nueve unidades simples permiten ya contar hasta *noventa y nueve unidades*.

Del mismo modo se ha formado una reunion de diez decenas que se llama *ciento* ó *una centena*, y se cuenta con esta nueva clase de unidades lo mismo que con la anterior, diciendo: *una centena* ó *ciento*, *dos centenas* ó *doscientos,.......nueve centenas* ó *novecientos;* á las que agregando los números compuestos de decenas y unidades se tiene hasta *novecientas noventa y nueve unidades*.

A diez centenas se les dió el nombre de *un millar* ó *un mil*, y se formaron siguiendo el mismo órden, las denominaciones de *dos mil, tres mil,......nueve mil*. Siguiendo con los millares el mismo órden que se acaba de esplicar, y agregándole los números formados de unidades, decenas y centenas, tendremos llevada la cuenta hasta *novecientas noventa y nueve mil novecientas noventa y nueve unidades*.

Si á este número se agrega una unidad tendremos un *millon*.

Despues á un millon de millones se le llama *billon*, á un millon de billones *trillon*, y así sucesivamente *cuatrillon*, *quillon*, *etc*.

Qué cifras se emplean para escribir los guarismos en nuestro sistema de numeracion?

Las siguientes:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
çero,	*uno*,	*dos*,	*tres*,	*cuatro*,	*cinco*,	*seis*,	*siete*,	*ocho*,	*nueve*,

que son los que se llaman *digitos;* dándose el nombre de *compuestos* á los que constan de mas de una cifra.

Con qué ley se forman los guarismos en nuestro sistema de numeracion?

Partiendo del principio que una cifra colocada á la izquierda de otra vale diez veces mas que si ocupase el lugar de esta última.

Así pues, se ha convenido, que cuando se escriben varias cifras unas á continuacion de otras, la primera de la derecha espresa las unidades simples; la inmediata de la izquierda decenas; la tercera centenas, la cuarta millares, la quinta decenas de millar, la sesta centenas de millar, la séptima unidades de millon, etc.

De qué órden nos valdremos para leer una cantidad propuesta?

Se divide el número en porciones de seis cifras cada una, empezando por la derecha; en la primera separacion se pone un 1, en la segunda un 2, en la tercera un 3, etc.; despues se divide cada porcion de seis cifras en dos de á tres con una *coma*, y se empieza á leer por la izquierda, pronunciando *mil* donde se encuentre una coma, y donde se halle un 1, un 2, un 3, etc., *millon*, *billon*, *trillon*, etc., y luego al fin se pronuncia *unidades*.

El cero por sí solo tiene algun valor?

Ninguno.

Pues para qué sirve?

Para poder reemplazar con él los órdenes de unidades de que carezca el número que se quiere escribir.

Las cifras llamadas *significativas* cuántas clases de valores tienen?

Dos: uno llamado *absoluto*, que es el que representa la cifra por sí misma, y otro llamado *relativo*, que es el que toma con arreglo al lugar que ocupa á la izquierda de las otras cifras.

Puede presentarse alguna dificultad para escribir cualquier número dictado en idioma vulgar?

No puede presentar dificultad alguna, cuidando de empezar á escribir por el período de las unidades de órden superior, é ir colocando á su derecha los demas períodos por el órden de magnitud de sus unidades, siendo necesario no omitir los ceros que deben ocupar los lugares de los órdenes de unidades que falten, lo cual no debe ofrecer dificultad observando que cada período ha de constar de tres cifras escepto el primero de la izquierda, que podrá tener dos ó una.

Queda algo que advertir para completar el sistema de numeracion?

Dar á conocer los quebrados que forman parte de él.

De cuántos términos se compone una fraccion y cómo se denominan?

De dos: el uno que se llama *denominador* indica las partes *iguales* en que se ha dividido la unidad, y el otro llamado *numerador* indica las partes que se han de tomar de aquellas en que la unidad queda dividida.

De qué modo se escribe el quebrado?

Poniendo el numerador encima de una línea y el denominador debajo de ella.

Cómo se lee un quebrado?

Leyendo el numerador y despues el denominador seguido de la terminacion *avos;* pero si el denominador es 2, 3, 4,......10, se lee el numerador y luego se dice *medio, tercio, cuarto......décimo*.

Qué es Aritmética?

La ciencia que tiene por objeto establecer reglas fijas y seguras para efectuar con los números todas las operaciones posibles.

Cuáles son las operaciones fundamentales de la aritmética?

ADICION, SUSTRACCION, MULTIPLICACION Y DIVISION.

Qué es *teorema?*

Una proposicion cuya verdad es necesario probar.

Qué es *corolario?*

La consecuencia inmediata de un teorema.

Qué es *problema?*

Una cuestion que tiene por objeto la determinacion de ciertas cosas desconocidas.

Qué es *lema?*

Una proposicion que sirve de base á la demostracion de un teorema.

Qué es *axioma?*

Una proposicion evidente por sí misma.

Cuáles son los axiomas principales?

Los siguientes:

1.º *Solo pueden compararse entre sí las cantidades de una misma especie.*

2.º *El todo es igual á la reunion de sus partes.*

3.º *Cada parte es igual al todo menos el conjunto de todas las demas partes.*

4.º *El todo es mayor que una cualquiera de sus partes y esta menor que el todo.*

5.º *Una cantidad no varia aunque se le añada y quite simultáneamente otra de su misma especie.*

6.º *Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.*

7.º *Cuando dos cantidades son iguales, si se ejecuta sobre cada una de ellas una misma operacion, los resultados que se obtienen son tambien iguales.*

8.º *Si á cantidades desiguales se añaden ó quitan otras iguales, los resultados que se obtengan serán tan desiguales como en su principio.*

CAPÍTULO II.

DE LA ADICION.

Qué es ADICION?

La reunion de varios números en uno solo.

De qué signo nos valemos para indicar esta operacion?

De este $+$ que se lee *mas*, y se llama *positivo*, colocándose entre los números que se trata de reunir.

Qué nombre toman los números que entran en la adicion?

El de *partidas* ó *sumandos* y el resultado final el de *suma*.

Cuál es el signo de igualdad, y para qué se emplea?

Este $=$ que se lee *igual á* y sirve para denotar la igualdad de dos magnitudes, situándolo entre ellas.

Qué otro nombre se dá á la igualdad de dos magnitudes?

El de *ecuacion*, la cual se compone de dos *miembros*; siendo el primero todo lo que está escrito á la izquierda del signo $=$ y segundo lo que está á su derecha.

Cuáles son los signos empleados para indicar la desigualdad de dos cantidades?

Estos $<$ $>$ que se llaman respectivamente de *minoría* y *mayoría*, y se leen *menor que* y *mayor que*.

De qué modo se emplean para espresar una desigualdad?

Colocando siempre la cantidad mayor hácia la abertura del signo.

Cómo se efectúa la suma de varios números ó partidas?

Se colocan todos los sumandos unos debajo de otros de tal manera que formen columnas verticales las cifras de un mismo órden; se tira una raya por debajo de todas las partidas y se empieza á sumar por la columna de las unidades simples, despues la de las decenas, luego la de las centenas y así sucesivamente, colocando debajo de la raya la suma da cada columna si no pasa de nueve; pero en pasando, solo se escriben las unidades y se llevan en la memoria las decenas que resulten para agregarlas como simples unidades á los números que forman la columna inmediata de la izquierda, siendo esta la razon de empezar el cálculo por la columna de la derecha.

CAPÍTULO III.

DE LA SUSTRACCION.

Qué es SUSTRACCION?

La operacion que tiene por objeto hallar la diferencia que existe entre dos números dados, ó bien dada una suma compuesta de dos sumandos y uno de ellos hallar el otro.

De qué signo nos valemos para indicar esta operacion?

De este—que se lee *menos* y se llama *negativo*, acostumbrándose colocarlo entre los números que se quieren sustraer.

Qué nombre toman los números que entran en la sustraccion?

Llámase *minuendo* al número de que se quiere restar otro llamado *sustraendo*, y resíduo ó diferencia el resultado de esta operacion.

Cómo se efectúa la sustraccion de dos cantidades?

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo de modo que formen columna las unidades de un mismo órden y se subraya todo; luego se restan las unidades del sustraendo de las del minuendo, las decenas de las decenas, las centenas de las centenas, etc. y se coloca cada una de estas diferencias debajo de los números de que ha provenido; el número que siguiendo este órden se obtenga será la diferencia pedida.

La marcha que se acaba de esplicar, es general para todos los números que se quieran sustraer?

No señor, puede suceder que una cualquiera de las cifras del minuendo sea menor que su correspondiente del sustraendo, en cuyo caso será necesario agregar *diez* á la primera, cuidando de *llevar uno* para agregarlo á la cifra inmediata del sustraendo.

Puede presentarse otro caso en la sustraccion?

Puede suceder que una ó mas cifras del minuendo estén representadas por ceros, en cuyo caso debe tomarse la unidad de la primera cifra colocada á la izquierda de los ceros, restando de *diez* la cifra del sustraendo que esté colocada debajo del primer cero y las restantes de *nueve*.

Qué es *complemento aritmético* de un número?

La diferencia que hay entre el número dado y la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el número.

Cómo se obtiene el complemento aritmético de un número?

Restando todas sus cifras de *nueve* menos la de las unidades que se resta de *diez*.

Y cuando el número termina en ceros?

En este caso la cifra que se resta de *diez* es la última significativa de la derecha, escribiendo despues tantos ceros como tenga el número.

Para qué se emplea el complemento aritmético?

Para convertir en suma la diferencia de dos cantidades; pues si en lugar de restar el sustraendo del minuendo se agrega á este el complemento aritmético del sustraendo debe resultar el mismo resíduo aumentado en una unidad superior que se suprime.

DEMOST. I. Supongamos que se quiere restar 847 de 953. Es evidente que se tendrá (axioma 5.° pág. 5).

$$953-847=953-847+1000-1000$$

que puede escribirse

$$953-847=953+1000-847-1000.$$

en el segundo miembro se puede restar 847 de 1000 que equivale á tomar el complemento aritmético de 847 y resulta

$$953-847=953+153-1000$$

ó bien

$$953-847=953+\bar{1}153.$$

Cuándo puede presentar ventaja el uso de los complementos?

Cuando se tienen que sumar y restar varias cantidades, pues en vez de sumar separadamente las cantidades positivas y las negativas para hallar el resultado, no hay mas que sumar las cantidades positivas con los complementos aritméticos de las negativas, teniendo cuidado de escribir delante de la nota de órden superior de cada complemento, la unidad con el signo negativo encima, para indicar que al efectuar la suma de cada columna se han de quitar tantas unidades como *unos* negativos se encuentran en ella.

CAPÍTULO IV.

DE LA MULTIPLICACION.

Qué es MULTIPLICACION?

Repetir un número tantas veces como unidades tiene otro.

Cómo se llaman los números que entran en la multiplicacion?

Multiplicando el que se repite, *multiplicador* el que indica las veces que se ha de repetir y *producto* el resultado de la operacion.

Tambien se dá el nombre de *factores* del producto al multiplicando y multiplicador considerados juntamente.

Puede definirse de otro modo la multiplicacion?

Se puede decir que es hallar un número que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

A qué equivale la multiplicacion?

A sumar el multiplicando consigo mismo tantas veces como unidades tenga el multiplicador.

De qué signo nos valemos para indicar esta operacion?

De este ×, que se lee *multiplicado por* y que se coloca entre los números que se quieren multiplicar.

Cuando un número se multiplica por sí mismo varias veces, qué nombre toma el producto?

El de *potencia* de dicho número y esta será segunda ó *cuadrado*, tercera ó *cubo*, cuarta, quinta, etc. segun que el número propuesto se haya tomado por factor dos, tres, cuatro, cinco, etc. veces.

Qué se entiende por *esponente?*

El número que colocado á la derecha y un poco mas alto que otro dado, indica las veces que este entra como factor en la potencia que se quiere formar.

Un producto no varía aun cuando se tome el multiplicando por multiplicador y este por multiplicando.

DEMOST. II. Sean los números 4 y 3 y se quiere probar que $4 \times 3 = 3 \times 4$.

Sabemos que multiplicar es sumar las unidades de que está compuesto el multiplicando tantas veces como unidades contiene el multiplicador, luego de 4×3 tendremos

$$\begin{array}{r} 4 = 1+1+1+1 \\ 4 = 1+1+1+1 \\ 4 = 1+1+1+1 \\ \hline \end{array}$$

y sumando miembro á miembro $4 \times 3 = 3+3+3+3 = 3 \times 4$

Cómo se efectúa la multiplicacion de dos números dígitos?

Con el auxilio de la tabla de Pitágoras, en la cual están comprendidos los productos de todos estos números.

Cómo se hace la multiplicacion de un número compuesto de varias cifras por un número dígito?

Multiplicando las unidades, decenas, centenas, etc. del multiplicando por el multiplicador y escribiendo estos productos parciales en el lugar correspondiente; teniendo cuidado de agregar al producto de las unidades de cada órden las que del mismo órden resultaren del producto anterior.

Demost. III. Sea por ejemplo, 859 × 4: como esto equivale á tomar 859 cuatro veces por sumando, podremos presentar el producto bajo la forma

$$\begin{array}{r} 859 \\ 859 \\ 859 \\ 859 \\ \hline 3436 \end{array}$$

Al efectuar esta suma vemos que hay que tomar la cifra 9 de las unidades cuatro veces por sumando, lo que equivale á 9×4 ó á 6 unidades y 3 decenas; en la suma de la columna de las decenas debe tomarse igualmente la cifra 5 cuatro veces por sumando, que es lo mismo que 5×4 ó veinte decenas, á las que agregadas las 3 que de esta clase dió el producto anterior se obtienen 23 decenas, ó sean 3 decenas y 2 centenas; en la columna de las centenas se ha de tomar tambien el 8 cuatro veces por sumando y dá 32 centenas á las que unidas las dos del producto anterior resultan 34 centenas; con lo que queda demostrada la regla que antecede.

Cómo se hace un número 10, 100, 1000.......veces mayor?

Agregando á la derecha del número tantos ceros como tenga la unidad superior por que se quiere multiplicar.

Demost. IV. Supongamos que 427 se quiere multiplicar por 1000; el producto debe ser 427000, porque el 7 que representaba unidades simples representa ahora unidades de millar, que son mil veces mayores; el 2 era decenas y es ahora decenas de millar, el 4 que primtivamente ocupaba el lugar de las centenas ha pasado á ocupar el correspondiente á las centenas de millar; y puesto que cada cifra ha venido á quedar de este modo multiplicada por 1000 es evidente que lo estará tambien el número total 427.

Cómo se multiplica un número por una cifra significativa seguida de uno ó mas ceros?

Multiplicando por la cifra significativa y agregando al producto tantos ceros como sigan á dicha cifra.

Demost. V. Sea 893×6000. Segun la definicion de la multiplicacion hay que repetir el multiplicando 6000 veces ó lo que es lo mismo hacer la suma de 6000 sumandos iguales á 893; pero estos 6000 sumandos se pueden separar en 1000 grupos, cada uno de los cuales contendrá 6 veces al multiplicando 893, y por lo tanto será igual á 893 × 6 ó sea 5358; como este es el valor de cada grupo, el de los mil será 5358 × 1000 ó bien 5358000, que era lo que se queria demostrar.

Cómo se multiplican dos números compuestos de varias cifras?

En este caso es preciso multiplicar á uno de los factores por todas las cifras del otro sucesivamente, y escribir cada uno de estos productos parciales de manera que sus unidades queden colocadas en el mismo órden que la cifra del multiplicador de donde ha provenido, efectuándose despues la suma de todos los productos parciales que hayan resultado.

Demost. VI. Sea 7853 × 354.

Aquí debemos repetir el multiplicando 354 veces ó lo que es lo mismo 300 veces + 50 veces + 4 veces, puesto que 354 = 300+50 + 4.

El producto por 4 dá	31412
El producto por 50, segun lo dicho, (V.) dá. . .	392650
El producto por 300, por igual razon que el anterior, es	2355900
La suma de estos productos parciales dá	2779962

que es el producto pedido; mas como los ceros no influyen en la adicion, se pueden suprimir, y así no habrá mas que multiplicar el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador, cuidando de escribir cada producto parcial un lugar mas á la izquierda que el producto anterior.

Qué deberá hacerse cuando en medio del multiplicador haya uno ó mas ceros?

Se suprimirá la multiplicacion por los ceros y el producto correspondiente á la cifra que siga á su izquierda se atrasará tantos lugares mas uno, con relacion al producto precedente, como ceros intermedios haya.

Y si al fin del multiplicando y multiplicador hay ceros, qué se debe hacer?

Considerar los ceros como suprimidos y efectuar la multiplicacion de las cifras significativas; pero cuidando de agregar á continuacion del producto tantos ceros como se cuenten en los dos factores reunidos.

DEMOST. VII. Sea 47800×26000. Digo que el producto es igual á $478 \times 26 \times 100000$. En efecto el producto propuesto equivale á tomar la cantidad 47800 que hace de multiplicando 26000 veces por sumando; pero estos sumandos podremos descomponerlos en 1000 grupos de á 26 sumandos cada uno, y entonces el valor de cada grupo estará representado por 47800×26; al hallar este resultado por medio de la adicion los ceros que ocupan el lugar de las unidades y decenas entrarán del mismo modo en la suma, y por lo tanto cada uno de estos grupos equivaldrá á $478 \times 26 \times 100$; luego el valor de los mil grupos ó sea el producto propuesto será, $478 \times 26 \times 100 \times 1000$, ó bien $478 \times 26 \times 100000$, que era lo que se queria demostrar.

De cuántas cifras consta el producto de dos factores?

De tantas como tengan los dos factores reunidos ó de una menos.

DEMOST. VIII. Sea por ejemplo 4283×725. Como se tiene que $725 > 100$, será

$$4283 \times 725 > 4283 \times 100$$

ó bien

$$4283 \times 725 > 428300$$

y por lo tanto, el producto tendrá cuando menos seis cifras.

Pero como tambien se tiene $725 < 1000$ será igualmente

$$4283 \times 725 < 4283 \times 1000$$

ó bien

$$4283 \times 725 < 4283000$$

para lo cual es preciso que el producto no tenga mas de siete cifras. Luego el producto propuesto tendrá seis ó siete cifras.

CAPÍTULO V.

DE LA DIVISION.

Qué es DIVISION?

Una operacion cuyo objeto es, dado un producto y uno de los factores, hallar el otro factor.

Qué nombre toman los números que entran en la division?

Llámase *dividendo* el producto, *divisor* el factor conocido y *cuociente* el factor que se busca.

De qué signos nos valemos para indicar esta operacion?

De estos — , : que se leen *dividido por*. Cuando se hace uso del primero se coloca el dividendo sobre la raya y el divisor debajo; y cuando se usa el segundo se le coloca entre el dividendo y el divisor.

Cómo se efectúa la division de un número compuesto de varias cifras por un dígito?

Si el cuociente no ha de tener mas que una cifra, esta se encuentra fácilmente con el auxilio de la tabla; pero en el caso de tener dos ó mas cifras se separan de la izquierda del dividendo las que sean necesarias para contener al divisor; se halla el número de veces que este está contenido en las cifras separadas, y el número que lo esprese se escribe debajo del divisor, que es el lugar asignado al cuociente: se multiplica este número por el divisor y el producto se resta de las cifras separadas: al lado del resíduo que resulte se bajará la cifra siguiente y se averiguará las veces que el divisor está contenido en este nuevo dividendo parcial; encontrada que sea esta cifra se colocará á la derecha de la que se habia escrito antes en el cuociente; el producto de esta nota por el divisor se restará del número que ha servido de dividendo; al lado de este nuevo resíduo se baja la cifra siguiente, continuando del mismo modo hasta haber bajado todas las cifras del dividendo.

Si algun dividendo parcial resultare menor que el divisor se escribe *cero* en el cuociente y se baja la cifra siguiente del dividendo.

Cómo se dividen dos números compuestos de varias cifras?

Se toman en el dividendo tantas cifras como hay en el divisor, ó una mas si el conjunto de cifras tomadas en aquel forman un número menor que el divisor; tendremos de este modo el primer dividendo parcial, y operando con él como si fuese único, se halla la primera cifra de la izquierda del cuociente, del mismo órden que las unidades del dividendo parcial. Este cuociente se multiplica por el divisor y el producto se resta del dividendo parcial, dando así orígen á un resíduo á cuya derecha se baja la cifra siguiente del dividendo propuesto, para continuar la misma operacion y obtener con ella la segunda cifra del cuociente, siempre del mismo órden que la cifra tomada del dividendo, teniendo cuidado en cada operacion de escribir la cifra que se obtenga para el cuociente á la derecha de las precedentes á fin de darles su verdadero valor; si hecho esto no queda nada se dice que la divion es *exacta*, y en caso contrario se llama *inexacta*.

Demost. IX. Supongamos que se quiere dividir 36295 por 85; como el dividendo ha de ser igual al producto del divisor por el cuociente, segun la definicion, es claro que dicho cuociente será mayor que 100 y menor que 1000, puesto que se tiene $85 \times 100 < 36295$, y $85 \times 1000 > 36295$, y por tanto el cuociente se compondrá de unidades, decenas y centenas. Veamos, pues, como podemos ir restando del dividendo el producto del divisor por cada una de las cifras del cuociente; para esto consideremos que como el producto del divisor por las centenas del cuociente ha de terminar precisamente en dos ceros, las dos cifras de la derecha del número 36295 no pueden formar parte de este producto, el cual por lo tanto estará contenido en 362. El mayor número de veces que el divisor está contenido en 362 es 4, que será la cifra de las centenas del cuociente y se tiene $85 \times 4 = 340$, cuyo producto se convierte en 34000 en razon á que el 4 representa centenas; restando 34000 de 36295, el resíduo 2295 será el producto del divisor por las decenas y unidades del cuociente; y como el producto por las decenas ha de terminar en un cero, la cifra 5 no podrá formar parte de él y se separará del resto del número; ahora bien, el divisor 85 está contenido en 229 dos veces y por consiguiente 2 debe ser la cifra de las decenas del cuociente y se obtiene $85 \times 2 = 170$; producto que se convierte en 1700, porque la cifra 2 representa decenas; restando 1700 de 2295, el resíduo 595 representará el producto del divisor por las unidades del cuociente, y como $85 \times 7 = 595$ la cifra de las unidades será 7; puede suceder que quede un resíduo de esta última operacion lo cual provendrá de no ser el dividendo el producto exacto del divisor por el cuociente. En este caso es evidente que el último resíduo espresa el número de unidades en que el dividendo escede al producto del divisor por el cuociente, y por consiguiente se deduce que *en toda division inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cuociente mas el residuo.*

$$\begin{array}{r|l} 36295 & 85 \\ \hline & 427 \\ 34000 & \\ \hline 2295 & \\ 1700 & \\ \hline 595 & \\ 595 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

El cuociente completo de toda division inexacta se compone del cuociente entero mas un quebrado, cuyo numerador es el resíduo y cuyo denominador es el divisor.

DEMOST. X. Si representamos por D el dividendo, por n el divisor, por q el cuociente y por r el resíduo tendremos, con arreglo á la demostracion anterior

$$D = n \times q + r$$

y dividiendo por n los dos miembros de esta ecuacion

$$\frac{D}{n} = q + \frac{r}{n}$$

que era lo que se queria demostrar.

Cómo se divide por 10, 100, 1000, etc. un número que termina en ceros?

Suprimiendo de la derecha del número tantos ceros como siguen á la unidad.

DEMOST. XI. Supongamos que 427000 se quiere dividir por 1000; el cuociente debe ser 427, porque el 7 que representaba unidades de millar representa ahora unidades simples que son mil veces menores; el 2 era decenas de millar y es ahora decenas simples; el 4 que primitivamente ocupaba el lugar de las centenas de millar ha pasado á ocupar el correspondiente á las centenas simples; y puesto que cada cifra ha venido á quedar de este modo dividida por 1000, es evidente que lo estará tambien el número total 427000.

CAPÍTULO VI.

OTRAS PROPIEDADES REFERENTES Á LA MULTIPLICACION Y DIVISION.

El producto de varios factores no se altera cualquiera que sea el órden con que se ejecuten las multiplicaciones.

DEMOST. XII. Desde luego se vá á probar que se puede invertir el órden de los últimos factores sin alterar el valor del productor.

Sea, en efecto, el producto

$$2 \times 4 \times 6 \times 3 \times 5;$$

efectuemos el producto 48 de los factores 2, 4, 6, que preceden á los dos últimos, y tendremos, por consiguiente, que multiplicar 48×3 y luego el producto por 5. Ahora bien, multiplicar 48×3 es lo mismo que repetir este número 3 veces, luego

$$48 \times 3 = 48 + 48 + 48.$$

Para multiplicar este producto por 5, no hay mas que multiplicar cada una de sus partes por 5, luego

$$48 \times 3 \times 5 = 48 \times 5 + 48 \times 5 + 48 \times 5;$$

pero repetir tres veces el producto 48×5 es lo mismo que multiplicarlo por 3: luego

$$48 \times 3 \times 5 = 48 \times 5 \times 3;$$

ó bien poniendo en lugar de 48 la cantidad equivalente $2 \times 6 \times 4$, se obtendrá

$$2 \times 6 \times 4 \times 3 \times 5 = 2 \times 6 \times 4 \times 5 \times 3$$

lo que debiamos demostrar.

Digo ahora que en un producto de varios factores, se puede invertir el órden de dos factores consecutivos cualesquiera, sin alterar el valor del producto.

Sea en efecto el producto

$$2 \times 6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 8 \times 9,$$

y supongamos que se quiera invertir el órden de los factores 3 y 5.

Consideraremos desde luego el producto $2 \times 6 \times 4 \times 3 \times 5$, que acaba por el último de los que queremos cambiar de lugar, y podremos invertir el órden de sus dos últimos factores, lo que dará

$$2 \times 6 \times 4 \times 3 \times 5 = 2 \times 6 \times 4 \times 5 \times 3.$$

Ahora, es claro que si se multiplican dos cantidades iguales por una misma cantidad, los productos serán iguales; luego, multiplicando los dos productos anteriores por 8 y en seguida por 9, se tendrá

$$2 \times 6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 8 \times 9 = 2 \times 6 \times 4 \times 5 \times 3 \times 8 \times 9.$$

lo que debiamos demostrar.

De este último principio se sigue que, permutando sucesivamente un factor con su inmediato, se le podrá llevar al lugar que se quiera, y por consiguiente invertir del modo que se juzgue conveniente el órden de todos los factores, sin que se altere por ello el valor del producto.

Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número cualquiera el producto resulta multiplicado por el mismo número.

DEMOST. XIII. Sea el producto $7\times5\times3\times6\times4$ y digo que si uno de los factores, 3 por ejemplo, se multiplica por un número cualquiera tal como 8, todo el producto quedará tambien multiplicado por 8.

En efecto, multiplicando el factor 3 por 8 el producto se convierte en $7\times5\times24\times6\times4$; pero segun la demostracion anterior este producto puede escribirse bajo la forma

$$24\times7\times5\times6\times4$$

y esto equivale á

$$3\times8\times7\times5\times6\times4$$

Haciendo que el 3 ocupe el mismo lugar que en el producto propuesto, y que el 8 venga á colocarse para último factor se tiene

$$7\times5\times3\times6\times4\times8.$$

Donde vemos que el producto propuesto queda multiplicado por 8.

COROLARIO. *Para multiplicar un producto por un número cualquiera bastará multiplicar uno cualquiera de los factores por dicho número.*

ADVERTENCIA. *Fácilmente se probaria que si uno de los factores de un producto se divide por un número cualquiera el producto queda dividido por dicho número; y que para dividir un producto por un número basta dividir por dicho número uno cualquiera de los factores.*

Si se multiplica uno de los factores y se divide otro por el mismo número el producto no se altera.

DEMOST. XIV. Es claro que si uno de los factores se multiplica por un número el producto queda multiplicado por el mismo número, y que si el otro factor se divide por el mismo número el producto queda dividido; luego por un lado aumenta lo que por otro disminuye, y el producto por lo tanto permanece invariable.

Si el dividendo se $\left\{\begin{matrix}\textit{multiplica}\\ \textit{divide}\end{matrix}\right\}$ *por un número el cuociente queda* $\left\{\begin{matrix}\textit{multiplicado}\\ \textit{dividido}\end{matrix}\right\}$ *por el mismo número.*

DEMOST. XV. Como la division equivale á una multiplicacion cuyo producto es el dividendo, y cuyos factores son el divisor y el cuociente, es evidente (XIII) que si tenemos el producto $\left\{\begin{matrix}\text{multiplicado}\\ \text{dividido}\end{matrix}\right\}$ por un número cualquiera y uno de los factores, que es el divisor, no ha sufrido alteracion ninguna, el otro factor, que es el cuociente, ha de estar $\left\{\begin{matrix}\text{multiplicado}\\ \text{dividido}\end{matrix}\right\}$ por dicho número.

Si el divisor se $\left\{\begin{matrix}\textit{multiplica}\\ \textit{divide}\end{matrix}\right\}$ *por un número el cuociente resulta* $\left\{\begin{matrix}\textit{dividido}\\ \textit{multiplicado}\end{matrix}\right\}$ *por el mismo número.*

DEMOST. XVI. En efecto, el producto, que aquí es el dividendo, no ha sufrido alteracion ninguna, y para esto es indispensable (XIV) que si uno de los factores, que es el divisor, se ha $\left\{\begin{matrix}\text{muttiplicado}\\ \text{dividido}\end{matrix}\right\}$ por un número cualquiera el otro factor, que es el cuociente, se haya $\left\{\begin{matrix}\text{dividido}\\ \text{multiplicado}\end{matrix}\right\}$ por el mismo número.

Si el dividendo y divisor se multiplican ó dividen por un mismo número el cuociente no varia.

DEMOST. XVII. $\left\{\begin{matrix}\text{Multiplicando}\\ \text{Dividiendo}\end{matrix}\right\}$ el dividendo se sabe que se $\left\{\begin{matrix}\text{multiplica}\\ \text{divide}\end{matrix}\right\}$ el cuociente y $\left\{\begin{matrix}\text{multiplicando}\\ \text{dividiendo}\end{matrix}\right\}$ el divisor se $\left\{\begin{matrix}\text{divide}\\ \text{multiplica}\end{matrix}\right\}$ el cuociente: de suerte que dicho cuociente se hace por un lado tantas veces mayor cuantas menor por otro y de consiguiente no se altera.

Cuando el dividendo y divisor terminan en ceros se puede suprimir de uno y otro igual número de ellos sin que el cuociente sufra alteracion.

DEMOST. XVIII. Al suprimir *igual* número de ceros del dividendo y divisor no se hace otra cosa que dividirlos por 10, 100, 1000, etc. segun sean uno, dos, tres, etc. ceros los suprimidos, lo cual segun lo demostrado, (XVII) no altera el cuociente.

Si se multiplican el dividendo y divisor de una division inexacta por un número entero, el cuociente entero no varia, pero el resíduo queda multiplicado por el mismo número.

Demost. XIX. Sea D el dividendo, d el divisor, q el cuociente y r el resíduo; resulta la ecuacion

$$D = d \times q + r.$$

Si se multiplican los dos miembros de esta igualdad por un número cualquiera n, se tiene

$$D \times n = d \times q \times n + r \times n$$

ó bien

$$D \times n = dn \times q + r \times n$$

en la cual aparecen multiplicados por n el dividendo, el divisor y el resíduo, sin que haya esperimentado variacion alguna el cuociente entero.

Se infiere de lo dicho que si D y d se hubieran dividido por n el resíduo r hubiera quedado dividido por n.

CAPITULO VII.

PROPIEDADES DE LOS DIVISORES COMUNES Á VARIOS NÚMEROS.—CONDICIONES DE DIVISIBILIDAD.

Si dos números son divisibles por otro, la suma y la diferencia de dichos números serán tambien divisibles por el otro.

Demost. XX. Sea S la suma y d la diferencia de dos números a y b divisibles por un mismo número n; tendremos

$$s = a + b \qquad d = a - b$$

y dividiendo por n

$$\frac{s}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \qquad \frac{d}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}$$

pero $\frac{a}{n}$ y $\frac{b}{n}$ son números enteros por lo supuesto, y como la suma ó diferencia de dos números enteros precisamente ha de ser otro entero, se infiere que s y d han de ser tambien divisibles por n.

Si se tiene una suma descompuesta en dos partes tal como $s = a + b$, resulta que:

1.° *Si uno de los sumandos*, a *por ejemplo, es divisible por otro número* d, *sin serlo* b, *tampoco lo será* s *y el resíduo de la division de* s *por* d *será el mismo que resulte de la division de* b *por* d.

2.° *Si la suma* s *y uno de los sumandos* a *son divisibles por* d, *tambien lo será el otro sumando* b.

DEMOST. XXI. 1.° Dividamos por d toda la ecuacion $s = a + b$ y se tendrá

$$\frac{s}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d}$$

Siendo a divisible por d, $\frac{a}{d}$ será un número entero, pero como b no es divisible por d, $\frac{b}{d}$ no podrá serlo, de suerte que el segundo miembro de la ecuacion es un número fraccionario, y lo mismo le sucederá al primero, pues de lo contrario resultaria un número entero igual á uno fraccionario, lo que es imposible. Además de esto, haciendo $\frac{a}{d} = q$ (número entero) y considerando que por no ser b divisible por d debe dar esta division un cuociente entero q' y un resíduo r tendremos:

$$a = d \times q \qquad b = d \times q' + r$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion $s = a + b$ resulta

$$s = d \times q + d \times q' + r$$

ó bien

$$s = d\,(q + q') + r$$

donde se vé que si se divide s por d resultaria el cuociente entero $q + q'$ y el resíduo r.

2.° Para demostrar la segunda parte dividamos por d toda la ecuacion propuesta y tendremos

$$\frac{s}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d}$$

Si a y s son divisibles por d, $\frac{a}{d}$ y $\frac{s}{d}$ serán números enteros y lo mismo sucederá con $\frac{b}{d}$, pues de lo contrario resultaria que un número entero seria igual á uno fraccionario, lo que es imposible.

Si un número es divisible por otro, todos los múltiplos del primero serán divisibles por el segundo.

Demost. XXII. Sea *a* divisible por *d*; $a \times m$ será tambien divisible por *d*, porque se tiene

$$a \times m = a + a + a + a + \ldots\ldots \text{ hasta } m \text{ veces.}$$

Siendo *a* divisible por *d* el segundo miembro de esta igualdad será tambien divisible por *d* y en su consecuencia el primero, que era lo que se queria demostrar.

Qué es número *par*?

El que termina en 0, 2, 4, 6, 8, siendo impar el que no termina en ninguna de estas cifras.

Cuándo es un número divisible por 10, 100, 1000......?

Cuando termina en uno, dos, tres,....... ceros, porque el cuociente exacto de la division de este número por 10, 100, 1000, es el mismo número suprimiéndole uno, dos, tres,..... ceros. (XI).

Cuándo es un número divisible por 2?

Cuando termina en *cero* ó *cifra par*.

Demost. XXIII. En efecto, todo número terminado en cero es divisible por 10, y como 10 lo es por 2, tambien lo será el número propuesto (XXII).

Sea ahora el número 8754 que podemos descomponer en 8750+4; la primera parte es siempre divisible por 2 por terminar en cero; luego para que lo sea el número propuesto es necesario que lo sea la segunda parte que no es otra cosa que la cifra de las unidades; pero esta cifra no puede ser divisible por 2, sino siendo un número par, luego queda demostrado lo que se pedia.

¿Cuándo es un número divisible por 5?

Cuando termina en cero ó cinco.

(Se demuestra como el anterior).

¿Cuándo es un número divisible por 4?

Cuando termina en dos ceros ó cuando las dos cifras de la derecha componen un múltiplo de 4.

DEMOST. XXIV. En efecto, todo número terminado en dos ceros es divisible por 100, y como 100 lo es por 4 tambien lo será el número propuesto (XXII).

Consideremos en segundo lugar el número 47956; este número equivale á 47900 + 56. La primera parte es divisible por 4 por terminar en dos ceros; luego para que lo sea el número propuesto se necesita que lo sea la segunda parte, que no es otra cosa que el número formado por las dos cifras de la derecha.

Cuándo es un número divisible por 8?

Cuando termina en tres ceros, ó cuando las tres cifras de la derecha componen un múltiplo de 8.

(La demostracion es análoga á la que se ha hecho para el 2 y para el 4.)

Un número cuando es divisible por 9?

Cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es 9 ó un múltiplo de 9.

DEMOST. XXV. Para demostrarlo tenemos que anteponer dos lemas.

1.° *Toda cifra significativa seguida de ceros es igual á un múltiplo de* 9 *mas el valor absoluto de dicha cifra.*

Sea el número 6000, el cual equivale á 1000×6 y como $1000 = 999 + 1$ se tendrá

$$6000 = 1000 \times 6 = (999 + 1) \times 6 = 999 \times 6 + 6.$$

Pero 999 es un múltiplo de 9 y tambien lo es 999×6, luego

$$6000 = \text{m. de } 9 + 6.$$

que era lo que se queria demostrar.

2.° *Todo número se compone de un múltiplo de* 9 *mas la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

Sea el número 7894325. Descomponiéndolo en sus diferentes clases de unidades y llevando en cuenta lo demostrado en el lema anterior se tendrá

$$
\begin{aligned}
7000000 &= \text{m. de } 9+7\\
800000 &= \text{m. de } 9+8\\
90000 &= \text{m. de } 9+9\\
4000 &= \text{m. de } 9+4\\
300 &= \text{m. de } 9+3\\
20 &= \text{m. de } 9+2\\
5 &= \qquad\quad\ \ 5\\
\text{y sumando } 7894325 &= \text{m. de } 9+(7+8+9+4+3+2+5)
\end{aligned}
$$

Ya podemos pasar á la demostracion de nuestro teorema.

Siendo N un número cualquiera y S la suma de los valores absolutos de sus cifras, tendremos en virtud del lema 2.°

$$N = \text{m. de } 9 + S.$$

Ahora bien, la primera parte es un múltiplo de 9, luego para que lo sea el número N es necesario y basta que lo sea la segunda parte S, ó sea la suma de todas las cifras consideradas con sus valores absolutos, que era lo que se queria demostrar.

Cuándo es un número divisible por 3?

Cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras dan 3 ó un múltiplo de 3.

Demost. XXVI. Segun lo que se acaba de ver para todo número N se tiene la igualdad

$$N = \text{m. de } 9 + S.$$

Siendo S la suma de los valores absolutos de sus cifras; pero como todo múltiplo de 9 lo es tambien de 3, la igualdad anterior se transforma en

$$N = \text{m. de } 3 + S.$$

Siendo la 1.ª parte un múltiplo de 3, para que lo sea el número N es necesario que lo sea la segunda parte S, la cual como se sabe representa la suma de los valores absolutos de las cifras.

Cuándo es un número divisible por 11?

Cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar (contando de derecha á izquierda) y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par es 0, 11 ó un múltiplo de 11.

Demost. XXVII. Es preciso ante todo demostrar los tres lemas siguientes:

1.° *Toda cifra significativa seguida de un número par de ceros es igual á un múltiplo de 11 mas el valor absoluto de dicha cifra.*

Sea el número 60000, que equivale á 10000×6, y como 10000 es igual á $9999 + 1$, se tendrá

$$60000 = 10000 \times 6 = (9999 + 1) \times 6 = 9999 \times 6 + 6$$

y como 9999 es un múltiplo de 11, tambien lo será 9999×6, luego

$$60000 = \text{m. de } 11 + 6.$$

2.° *Toda cifra significativa seguida de un número impar de ceros es igual á un múltiplo de 11 menos el valor absoluto de dicha cifra.*

En efecto, sea el número 600000: se tiene claramente

$$600000 = 60000 \times 10$$

pero segun se ha visto $60000 = \text{m. de } 11 + 6$ luego

$600000 = (\text{m. de } 11 + 6) \times 10 = \text{m. de } 11 \times 10 + 6 \times 10 = \text{m. de } 11 + 6 \times 10;$

pero como $10 = 11 - 1$ se tendrá tambien

$600000 = \text{m. de } 11 + 6 \times 10 = \text{m. de } 11 + (11 - 1) \times 6 = \text{m. de } 11 + 11 \times 6 - 6$

que claramente se reduce á

$$600000 = \text{m. de } 11 - 6.$$

3.° *Todo número se compone de un múltiplo de 11 mas la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar (contando de derecha á izquierda) menos la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par.*

Sea el número 7438956

Descomponiéndolo en sus diversos órdenes de unidades y llevando en cuenta lo demostrado en los dos primeros lemas tendremos

$$\begin{array}{rl}
7000000 = & \text{m. de } 11 + 7 \\
400000 = & \text{m. de } 11 - 4 \\
30000 = & \text{m. de } 11 + 3 \\
8000 = & \text{m. de } 11 - 8 \\
900 = & \text{m. de } 11 + 9 \\
50 = & \text{m. de } 11 - 5 \\
6 = & \qquad\qquad 6 \\
\hline
\end{array}$$

y sumando $7438956 = \text{m. de } 11 + (7 + 3 + 9 + 6) - (4 + 8 + 5)$

que era lo que se queria demostrar.

Ya podemos demostrar nuestro teorema y para ello sea *N* un número cualquiera, *I* la suma de las cifras de lugar impar y *P* la suma de las cifras de lugar par; se tendrá

$$N = \text{m. de } 11 + I - P.$$

Ahora bien, puede ser $I > P$, $I = P$, $I < P$.

Si $I > P$, llamando *D* su diferencia será

$$N = \text{m. de } 11 + D,$$

en cuya igualdad vemos que para que *N* sea divisible por 11 es necesario que *D* sea un múltiplo de 11.

Si $I = P$ se tiene

$$N = \text{m. de } 11$$

lo que quiere decir que el número en este caso es divisible por 11.

Si $I < P$ el número *N* puede considerarse como la diferencia entre los números m. de $11 + I$ y *P*; restando I del minuendo y sustraendo, sale

$$N = \text{m. de } 11 - (P - I)$$

y siendo *D* la diferencia entre P é I

$$N = \text{m. de } 11 - D.$$

Donde vemos que si *D* es divisible por 11 lo será tambien *N* y no lo será en el caso contrario.

CAPÍTULO VIII.

MÁXIMO COMUN DIVISOR.

Qué es número PRIMO?

El que no es divisible exactamente mas que por sí mismo y por la unidad.

Y número *compuesto?*

El que además de ser divisible por sí mismo y por la unidad puede dividirse exactamente por uno ó mas números.

Qué son números *primos entre sí?*

Dos números que aunque compuestos no tienen mas divisor comun que la unidad.

A qué se dá el nombre de *máximo comun divisor?*

Al mayor número que pueda dividir exactamente á dos ó mas números dados.

Si dos números se dividen por su máximo comun divisor los cuocientes serán números primos entre sí.

DEMOST. XXVIII. Sean A y B los dos números, D su máximo comun divisor, a y b los cuocientes de la division de A y B por D; digo que a y b son números primeros entre sí.

En efecto, se tiene visiblemente

$$A = a \times D \qquad B = b \times D.$$

Si a y b tienen un factor comun d serán de la forma

$$a = a' \times d \text{ y } b = b' \times d;$$

estos valores sustituidos en los primeros dan

$$A = a' \times d \times D \qquad B = b' \times d \times D.$$

Donde se vé que A y B son divisibles por $d \times D$ y por consiguiente D no es el máximo comun divisor de dichos números, contra lo supuesto.

Todo divisor comun al dividendo y al divisor de una division inexacta es divisor del resíduo; y al contrario todo divisor comun al divisor y al resíduo es divisor del dividendo.

DEMOST. XXIX. Sea a el dividendo, b el divisor, q el cuociente y r el resíduo, se tendrá

$$a = b \times q + r$$

1.° Todo número que divida á a y b, debiendo dividir á $b \times q$, dividirá tambien á r, diferencia entre a y $b \times q$.

2.° Todo número que divida á b y r deberá dividir á a suma de $b \times q$ y r.

El máximo comun divisor del dividendo y divisor de una division inexacta es el mismo que existe entre el divisor y el resíduo.

DEMOST. XXX. Siendo a el dividendo, b el divisor, q el cuociente y r el resíduo, se tiene

$$a = b \times q + r.$$

Ahora bien; el máximo comun divisor de a y b por ser un factor comun á ambos números debe dividir á r, y siendo divisor de b y r no podrá ser mayor que el máximo comun divisor de b y r. El máximo comun divisor de b y r, por ser un factor comun á estos dos números dividirá tambien á a, y siendo entonces divisor de a y b no podrá ser mayor que el máximo comun divisor de estos números.

Luego, si el máximo comun divisor de a y b no puede ser mayor que el de b y r, y el de estos no debe ser mayor que el de aquellos, es claro que ambos serán iguales, que era lo que se queria demostrar.

Cómo se halla el máximo comun divisor de dos números?

Se divide el uno por el otro, luego el divisor por el resíduo, y se continúa así tomando cada resíduo como divisor del resíduo precedente hasta que se halle un cuociente exacto; el divisor de donde este resulte será el máximo comun divisor que se busca; pero si continuando la division se viene á parar en un resíduo *uno*, esto nos probará que los números propuestos no tienen mas divisor comun que la unidad, y por lo tanto serán primos entre sí.

DEMOST. XXXI. Sean dos números A y B, siendo B el menor de ellos. Como el máximo comun divisor ha de dividir á B, es claro que no podrá ser mayor que este número; luego si A es divisible por B el máximo comun divisor será B.

Efectuemos la division de A por B, y supongamos que queda un resíduo R; ya se sabe (XXX) que el máximo comun divisor de A y B es el mismo que el de B y R.

Por consiguiente, todo se reduce á hallar el máximo comun divisor de B y R; sucede como antes que si B es divisible por R, este número R será el máximo comun divisor de B y R y por consiguiente el de A y B; probemos la division B por R y supongamos que queda un resíduo R', el máximo comun divisor de R y R' debe ser el mismo que el de B y R, y por lo tanto el mismo que el de A y B.

De modo que no habrá mas que seguir el mismo razonamiento y la misma serie de operaciones hasta llegar á un divisor exacto y este será el máximo comun divisor buscado.

COROLARIOS. 1.° *Como los resíduos van siendo cada vez menores, forzosamente se ha de dar en un divisor exacto, cuando menos con la unidad, en cuyo estremo caso los dos números son primos entre sí.*

2.° *Como el máximo comun divisor de dos números debe dividir á todos los resíduos que sucesivamente vaya dando el progreso del cálculo, si el uno de estos fuese un número primo que no divida al resíduo precedente hay ya seguridad de que el cálculo terminará en el divisor 1, que es el único comun á los números propuestos.*

Todo divisor de dos números lo es tambien del máximo comun divisor de dichos números.

DEMOST. XXXII. Supongamos que se haya querido obtener el máximo comun divisor de A y B; que la division de estos números haya dado el resíduo R; la de B por R el resíduo R'; la de R por R' el resíduo R'', y que este R'' divida exactamente á R', ó bien que R'' sea el máximo comun divisor buscado, tendremos la serie de números,

$$A,\ B,\ R,\ R',\ R''.$$

Fundándonos en la demostracion XXIX vemos que todo número que divida á A y B dividirá tambien á R, y por consiguiente á B y R; que todo número que divida á B y R dividirá tambien á R' y por lo tanto á R y R'; y por último, que todo número que divida á R y R' dividirá á R''.

De donde se concluye que todo divisor de A y B divide tambien á su máximo comun divisor R''.

COROLARIO. Como todo número que divida á R'' ha de dividir á A y B (XXII) y todo el que divida á estos debe dividir á R'', segun acabamos de ver, se infiere *que el máximo comun divisor de dos números es el producto de todos los factores comunes á entrambos.*

Si dos números se multiplican por un número entero su máximo comun divisor queda tambien multiplicado por el mismo número.

DEMOST. XXXIII. Sean los dos números A y B, su máximo comun divisor R''; y supongamos que antes de obtener R'' se hallen los resíduos R y R'; por último, sean C, C', C'', C''', los diversos cuocientes á que la operacion ha dado lugar; esta operacion es

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & B & R & R' & R'' & 0 \\ \hline & C & C' & C'' & C''' & \end{array}$$

Si A y B se multiplican por n serán $A\times n$ y $B\times n$, cuyo cuociente entero será C y el resíduo $R\times n$ (XIX); la division de $R\times n$ por $R'\times n$ dará C'' de cuociente y $R''\times n$ de resíduo; por último, cuando se divide $R'\times n$ por $R''\times n$ el cuociente será C''' y el resíduo *cero*. Luego el máximo comun divisor es $R''\times n$, que era lo que se queria demostrar.

Es evidente, atendiendo á la misma demostracion, que si A y B se hubiesen dividido por n, R'' hubiera resultado dividido por n.

COROLARIO. De lo espuesto se deduce que la operacion del máximo comun divisor puede simplificarse á veces. *Porque si en los dos números propuestos ó en dos resíduos consecutivos hay un factor comun que á primera vista pueda descubrirse, se suprimirá este factor en dividendo y divisor; pero hallado que sea el máximo comun divisor habrá de multiplicársele por el factor suprimido. Y por la inversa, si se echa de ver que uno de los números propuestos ó de los resíduos tiene un factor primo que no divida al otro número ó al resíduo anterior, se le puede suprimir sin alterar por eso el divisor comun.*

Cómo se halla el máximo comun divisor de varios números?

Hallando el máximo comun divisor entre dos de ellos, despues entre este máximo comun divisor y otro de los números dados, y así sucesivamente hasta llegar al último.

DEMOST. XXXIV. Sean los números A, B, C, E.

Supongamos que se haya hallado el máximo comun divisor de A y B y que este sea D, que el de D y C sea D' y que el de D' y E sea D'', digo que D'' es el máximo comun divisor de A, B, C, E.

Para mayor claridad pondremos la operacion bajo la forma siguiente:

$$\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}D\\C\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}D'\\E\end{matrix}\right\}D''$$

Vamos á demostrar que D'' es el máximo comun divisor de A, B, C, E.

En efecto, como el máximo comun divisor de estos números ha de dividir á A y B dividirá tambien á su máximo comun divisor D

(XXXII); pero como entonces debe dividir á D y C dividirá precisamente á D' y dividiendo á D' y E debe dividir á D'' que es el máximo comun divisor de estos dos números. Luego el máximo comun divisor de los números propuestos no ha de ser mayor que D''.

Además, siendo D'' el máximo comun divisor de D' y E debe dividir á estos dos números y dividiendo á D' divide necesariamente á D y C, como tambien á A y B, cuyo máximo comun divisor es D; por lo tanto, puesto que D'' divide á A, B, C, E ha de dividir al máximo comun divisor de estos números, y por consiguiente este máximo comun divisor no será menor que D''.

Resulta, pues, que el máximo comun divisor de los cuatro números propuestos no puede ser ni mayor ni menor que D'': luego será D''.

Lo mismo se seguiria la demostracion si se considerasen mas de cuatro números.

CAPÍTULO IX.

NÚMEROS PRIMOS.

DESCOMPOSICION EN FACTORES SIMPLES Y COMPUESTOS.

MÍNIMO MÚLTIPLO.

Demost. XXXV. Dos números que se diferencian en una unidad son primos entre sí, porque si tuvieran algun divisor comun, este deberia serlo tambien de su diferencia, lo que es imposible.

Demost. XXXVI. Si un número primo no es divisor de otro número los dos serán primos entre sí; porque el único divisor comun que tienen es la unidad.

Todo divisor del producto de dos factores que sea primo con uno de ellos ha de dividir al otro factor.

Demost. XXXVII. Sea $A \times B$ el producto y C un divisor de este producto, primo con el factor A; digo que C será divisor de B.

En efecto, puesto que A y C son primos entre sí, su máximo comun divisor es 1; luego si los multiplicamos por B, el máximo comun divisor de los productos $A \times B$ y $C \times B$ será $1 \times B$ ó B (XXXIII). Mas como C es por hipótesis divisor de $A \times B$ y lo es evidentemente de $C \times B$ lo será tambien de B, que es el máximo comun divisor de $A \times B$ y de $C \times B$ (XXXII).

Corolario. *De aquí se deduce que todo número primo que sea divisor de un producto es por lo menos divisor de uno de los factores; porque si se supone que no* *divide á uno de ellos será primo con él, y entonces habrá de dividir al otro segun acabamos de ver.*

Todo número primo que divide á A^2 y en general á una potencia cualquiera de A tal como A^m debe dividir á A.

DEMOST. XXXVIII. En efecto, A^2 es lo mismo que $A \times A$ y todo número primo que divida á este producto debe dividir á uno de sus factores (XXXVII *Corol.*) es decir á A; si fuese A^3 como se tiene $A^3 = A^2 \times A$, todo número que divida á A^3 deberá ser divisor de A ó de A^2; pero ya se ha visto que para dividir á A^2 debe dividir á A.

Así se seguirá cualquiera que fuese la potencia de A.

COROLARIO. *De aquí se deduce que si dos números son entre sí primos dos potencias cualesquiera de estos números tambien darán números primos entre sí.*

Porque si un número primo absoluto P, divide exactamente á A^m y B^n, deberá dividir separadamente á cada uno de los números A y B, y entonces estos números no serian primos entre sí contra lo supuesto.

Todo número P que es primo con cada uno de los factores de un producto $A \times B$ es tambien primo con dicho producto.

DEMOST. XXXIX. El número P puede ser primo ó no serlo; si es primo, para que divida al producto $A \times B$ es preciso que divida á uno de los factores (XXXVII. Corol.) contra lo supuesto.

Si P no es número primo, será divisible por algun número primo p; pero si $A \times B$ es múltiplo de P tambien lo será de p; luego p seria divisor de uno de los factores, y entonces este factor y el número P tendrian un divisor comun p contra el supuesto de ser primos.

COROLARIO. *El producto de varios números primos no es divisible por ningun otro número primo.*

El producto de dos factores que son entrambos menores que un número primo dado no puede ser divisible por dicho número primo.

DEMOST. XL. Sean A y B los factores y P un número primo mayor que cada uno de ellos.

Si se supone que P divida el producto $A\times B$ deberá dividir á uno de estos factores; pero esto es imposible por ser P mayor que cada uno de ellos.

El producto de dos números primos no admite mas divisores que estos mismos números, á mas de la unidad y del propio producto.

DEMOST. XLI. Sean A y B dos números primos.
Si suponemos que su producto sea divisible por un número primo P que no esté comprendido en los casos que se enuncian en el teorema, este número P dividirá á uno de los factores A ó B contra lo supuesto de ser números primos.

Diversos factores no pueden formar un producto que sea divisible por un número primo, sino en tanto que uno de los factores cuando menos, sea divisible por dicho número.

DEMOST. XLII. Sean los diversos factores A, B, C, D,......Si hay un número primo P, que divida á su producto sin dividir á D, deberá dividir á $A\times B\times C$. Del mismo modo, para que este producto sea divisible por P sin que lo sea C es necesario que $A\times B$ sea un múltiplo de P; para lo cual este último número deberá dividir á A ó á B.

Donde se vé que el producto $A\times B\times C\times D$......no puede ser divisible por un número primo P sin que lo sea uno de sus factores.

Todo número N divisible por varios números primos entre sí, a, b, c,... es divisible por el producto de dichos números.

DEMOST. XLIII. En efecto, como a divide exactamente á N, siendo q el cuociente de esta division se tendrá

$$N=a\times q;$$

pero como b divide tambien á N deberá dividir á $a\times q$ y siendo primo con a dividirá forzosamente á q (XXXVII), de suerte que se tendrá

$$q=b\times q'$$

y sustituyendo

$$N=a\times b\times q',$$

donde se vé que el número N es ya divisible por $a\times b$.
Asimismo siendo N divisible por c lo será su equivalente $a\times b\times q'$,

y como a y b son primos con c, q' deberá ser divisible por c y se tendrá $q' = c \times q''$, lo que dá

$$N = a \times b \times c \times q''$$

lo cual demuestra que N es divisible por $a \times b \times c$.

Lo mismo se haria cualquiera que fuese el número de factores.

Cómo se descompone un número en sus factores primos?

Se divide cuantas veces sea posible con exactitud por 2; despues por 3, 5, 7, 11,......y demas números primos, hasta que resulte de cuociente la unidad; la unidad y los divisores anteriores serán los factores primos del número.

Un número no puede admitir dos descomposiciones diferentes en factores primos, es decir: que una nueva descomposicion no puede dar ningun factor primo diferente de los primeros, ni ningun factor primo con diferente esponente que en la primera descomposicion.

DEMOST. XLIV. Supongamos que el número descompuesto en factores simples sea $2^5 \times 3^2 \times 11$ y admitamos que una nueva descomposicion del mismo número dé $2^3 \times 3 \times 7 \times 11$; se tendrá en este caso

$$2^5 \times 3^2 \times 11 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$$

como el segundo miembro es divisible por 7 el primero debe serlo tambien y por consiguiente (XLII) el factor primo 7 ha de ser divisor de uno de los factores primos 2, 3 ú 11, lo que es absurdo.

Para demostrar la segunda parte admitamos que la primera descomposicion de un número nos haya dado $2^5 \times 3^2 \times 11$ y la segunda $2^2 \times 3^3 \times 11^2$, tendremos en este caso

$$2^5 \times 3^2 \times 11 = 2^2 \times 3^3 \times 11^2 \, .$$

Dividiendo los dos miembros por 11 resulta

$$2^5 \times 3^2 = 2^2 \times 3^3 \times 11$$

y como el segundo miembro es divisible por 11 el primero lo será tambien, y por consiguiente 11 será divisor de 2 ó de 3, lo que es mposible.

De todo lo espuesto se deduce, que un número es divisor de otro si todos los factores simples del primero entran en el segundo con esponentes no menores que en dicho primer número; y ademas que un número no es divisor de otro si contiene algun factor simple que no entre en este otro; ó si alguno de los factores simples tiene en el primero mayor esponente que en el segundo.

Cómo hallaremos todos los factores simples y compuestos de un número?

Con las potencias de cada factor simple, escepto la unidad, se forma una série de términos, empezando por la unidad y siguiendo con las potencias 1.ª, 2.ª, 3.ª, etc. del factor, hasta aquella á que esté elevado en el producto. Se multiplica cada término de la segunda série por todos los de la primera, y se tendrá una nueva série cuyos términos se multiplicarán por los de la tercera, continuando la misma operacion con las demas séries, la última dará todas las combinaciones posibles de los factores primos y por tanto todos los factores del número.

A qué se dá el nombre de *mínimo múltiplo*?

Al menor número que puede ser divisible exactamente por varios números dados.

Cómo se halla el mínimo múltiplo de varios números?

Se empieza por suprimir los números que dividan exactamente á los demas, y se pasará á descomponer los restantes en sus factores primos; el producto de estos distintos factores, cada uno de ellos tomado con el mayor esponente que le asigne el procedimiento de la descomposicion dará el número apetecido.

Demost. XLV. Sean varios números 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 20, 35, 42, 54, cuyo mínimo múltiplo queremos hallar.

Es evidente que si todos estos números se multiplican entre sí, el producto será divisible por cada uno de ellos, y lo mismo sucederá si este producto se multiplica por un número cualquiera. Donde se vé que hay una infinidad de números divisibles por todos los propuestos. El menor de estos números es el que queremos hallar.

Como todo número que sea divisible por 12 ha de serlo por 6 y por 3, todo el que lo sea por 20 lo es tambien por 5, todo el que lo es por 42 debe serlo por 7 y todo número divisible por 54 lo es igualmente por 9, se pueden suprimir los números 3, 6, 5, 7, 9, y solo nos quedará que hallar el mínimo múltiplo de los números 8, 12, 20, 35, 42 y 54.

Si descomponemos estos en sus factores primos, tendremos

$8 = 2^3$, $12 = 2^2 \times 3$, $20 = 2^2 \times 5$, $35 = 5 \times 7$, $42 = 2 \times 3 \times 7$, $54 = 2 \times 3^3$.

El número que se busca ha de ser divisible por cada uno de los factores que componen los números anteriores, es decir por 2^3, 2^2, 3, 2^2, 5, 5, 7, 2, 3, 7, 2, 3^3; y suprimiendo los que están contenidos en otros y los repetidos, nos resultará que este número que vamos buscando ha de ser múltiplo de 2^3, 3^3, 5, 7; y como estos números son primos entre sí, todo el que sea divisible por ellos lo será tambien por su producto $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$ y no hay ningun número divisible por este producto que sea menor que dicho producto.

Luego el mínimo múltiplo de los números propuestos es $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$.

Es claro que si los números son primos entre sí su mínimo múltiplo será el producto de todos ellos.

CAPITULO X.

PRUEBAS DE LAS CUATRO REGLAS.

Cómo se prueba si la suma de varias cantidades está bien hecha?

Se vuelve á sumar empezando por la columna de la izquierda, y restando esta suma de la que ya teniamos debajo de la misma columna, se tendrá la reserva de la columna siguiente. Repítase en esta y en las demas la misma operacion hasta la columna de las unidades, cuyo resto debe ser cero.

Tambien se puede comprobar la adicion sumando de abajo para arriba, y deberá dar la misma suma que primitivamente.

Cómo se prueba la sustraccion?

Se suma el sustraendo con el resíduo y debe dar el minuendo.

Cómo se efectúa la prueba de la multiplicacion?

Se trocará el multiplicador en multiplicando, lo que no altera el producto (II), ó bien se multiplicarán ó dividirán los dos factores por números arbitrarios, debiendo esperimentar el producto alteraciones análogas á las que hayan esperimentado los factores (XIII).

Cómo se prueba la division exacta?

Multiplicando el divisor por el cuociente y debe dar por producto el dividendo.

Cómo se prueba la division inexacta?

Agregando el resíduo al producto del divisor por el cuociente y debe dar el dividendo.

LIBRO SEGUNDO.

DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

CAPITULO PRIMERO.

Naturaleza y transformacion de las fracciones.

Todo quebrado multiplicado por su denominador produce el numerador.

DEMOST. XLVI. Sea el quebrado $\frac{5}{7}$, que se quiere multiplicar por 7. Es evidente que cada séptimo tomado siete veces compone una unidad; luego los $\frac{5}{7}$ tomados siete veces componen 5 unidades, y por tanto $\frac{5}{7}\times 7 = 5$.

COROLARIO. *Toda fraccion es el cuociente de su numerador dividido por su denominador, ó al contrario, toda division es equivalente á un quebrado cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.*

De cuántas maneras puede ser un quebrado?

De dos, *propio* é *impropio*.

Qué es quebrado *propio?*

Aquel cuyo numerador es menor que el denominador, en cuyo caso vale menos que una unidad.

Qué es quebrado *impropio?*

Aquel en que el numerador es mayor que el denominador y entonces el quebrado vale mas que la unidad.

A qué equivale un quebrado cuando sus dos términos son iguales?

A la unidad; porque toda cantidad dividida por sí misma dá de cuociente *uno*.

Cómo se reduce un quebrado impropio á número misto ó entero?

Dividiendo el numerador por el denominador; pues todo quebrado es el cuociente del numerador dividido por el denominador. (XLVI, corolario.)

A cualquier entero se le puede dar la forma de quebrado?

Sí, señor; poniéndole por denominador la unidad; porque toda cantidad dividida por *uno* produce la misma cantidad.

Cómo se reduce un entero á determinada especie de quebrado?

Multiplicando el entero por el denominador que se le quiere dar, y poniéndole al producto el mismo denominador.

Demost. XLVII. Sea a un número entero que se quiere reducir á quebrado cuyo denominador sea n.

Es claro que un número no sufre alteracion multiplicándolo y dividiéndolo al propio tiempo por un mismo número, de suerte que se tiene

$$a = \frac{a \times n}{n},$$

En todo quebrado: 1.° *Si el numerador se* $\left\{\begin{array}{c}\textit{multiplica}\\ \textit{divide}\end{array}\right\}$ *por un número cualquiera, el quebrado queda* $\left\{\begin{array}{c}\textit{multiplicado}\\ \textit{dividido}\end{array}\right\}$ *por el mismo número.*

2.° *Si el denominador se* $\left\{\begin{array}{c}\textit{multiplica}\\ \textit{divide}\end{array}\right\}$ *por un número el quebrado resulta* $\left\{\begin{array}{c}\textit{dividido}\\ \textit{multiplicado}\end{array}\right\}$ *por dicho número.*

3.° *Si el numerador y el denominador se multiplican ó dividen por un mismo número, el quebrado no se altera.*

Demost. XLVIII. Representando el numerador de un quebrado el dividendo, el denominador el divisor y el mismo quebrado el cuociente de la division del uno por el otro, se ha demostrado que:

1.° Si el dividendo se $\left\{\begin{array}{c}\text{multiplica}\\ \text{divide}\end{array}\right\}$ por un número, el cuociente, que aquí es el quebrado queda $\left\{\begin{array}{c}\text{multiplicado}\\ \text{dividido}\end{array}\right\}$ por el mismo número (XV).

2.° Si el divisor se $\left\{\begin{array}{c}\text{multiplica}\\ \text{divide}\end{array}\right\}$ por un número, el cuociente que representa el quebrado resulta $\left\{\begin{array}{c}\text{dividido}\\ \text{multiplicado}\end{array}\right\}$ por el mismo número (XVI).

3.° Si el dividendo y divisor se multiplican ó dividen por un mismo número, el cuociente, ó lo que es lo mismo el quebrado, no se altera (XVII).

Cuando varios quebrados tienen el mismo denominador ¿cuál será el mayor?

El que tenga mayor numerador.

Cuando varios quebrados tienen el mismo numerador ¿cuál será el mayor?

El que tenga menor denominador.

Y cuando los denominadores y numeradores son diferentes ¿cómo se conocerá cuál es el mayor?

Reduciéndolos á un comun denominador, y el que despues de reducidos tenga mayor numerador será el mayor.

¿Cómo se reducen varios quebrados á un comun denominador?

Multiplicando el numerador de cada uno por el producto de todos los denominadores menos por el suyo; estos productos formarán los nuevos numeradores y el denominador comun será el producto de todos los denominadores.

Demost. XLIX. Efectuando lo que prescribe esta regla, no se hace otra cosa que multiplicar los dos términos de cada quebrado por un mismo número, operacion que en nada altera el valor de los quebrados propuestos (XLVIII, 3.°) y se ha conseguido el objeto de darles á todos un denominador comun.

Puede hacerse de algun otro modo la reduccion de quebrados á un comun denominador?

Hallando el mínimo múltiplo de todos los denominadores, partiendo este mínimo múltiplo por el denominador de cada quebrado y multiplicando este cuociente por el numerador; el mínimo múltiplo será el denominador comun.

Si un quebrado es igual á otro cuyos dos términos son primos entre sí, los dos términos del primero son iguales respectivamente á los del segundo multiplicados por un mismo número entero.

Demost. L. Sea $\frac{c}{d}$ una fraccion que suponemos ser igual á otra $\frac{a}{b}$ cuyos dos términos son primos entre sí.

Se tiene desde luego $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, de donde se deduce, reduciendo á un comun denominador

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}$$

pero si estas dos fracciones son iguales y lo son tambien sus denominadores, habrán de serlo igualmente sus numeradores y se tendrá

$$a \times d = b \times c.$$

de donde se saca

$$c = \frac{a \times d}{b}$$

como c es un número entero es necesario que $\frac{a \times d}{b}$ lo sea tambien; pero por hipótesis b es primo con a, luego b debe dividir á d (XXXVII) y se tendrá

$$d = b \times q$$

sustituyendo este valor de *d* en el que antes se halló para *c* resulta

$$c = \frac{a \times bq}{b}$$

ó bien

$$c = a \times q.$$

Puesto que hemos hallado $c = a \times q$ y $d = b \times q$ queda demostrado lo que se queria.

Qué es quebrado irreducible?

Aquel cuyos términos son primos entre sí.

Qué se entiende por *simplificar* un quebrado?

Hallar otro quebrado que sea irreducible y equivalente al propuesto.

Cómo se simplifica un quebrado?

Buscando el máximo comun divisor de sus dos términos y dividiéndolos por él; ó bien dividiendo ambos términos sucesivamente por todos los factores comunes que tengan.

Si á los dos términos de un quebrado $\left\{\begin{array}{l}\textit{propio}\\ \textit{impropio}\end{array}\right\}$ *se añade un mismo número, el quebrado que resulte será* $\left\{\begin{array}{l}\textit{mayor}\\ \textit{menor}\end{array}\right\}$ *que el propuesto.*

Demost. LI. Sea un quebrado $\frac{a}{b}$. Si agregamos *m* á sus dos términos resultará

$$\frac{a+m}{b+m}$$

y reduciendo estos dos quebrados á un comun denominador resulta

$$\frac{a}{b} = \frac{ab+am}{b(b+m)} \qquad \frac{a+m}{b+m} = \frac{ab+bm}{b(b+m)}.$$

Como estos quebrados tienen un mismo denominador, el mayor será el que tenga mayor numerador; por consiguiente solo tenemos que comparar los numeradores $(ab+am)$ y $(ab+bm)$; pero como en estos hay una parte comun *ab*, el mayor será el que tenga mayor la otra parte. Ahora bien, si $\frac{a}{b}$ es quebrado propio será $a < b$ y por consiguiente $am < bm$, de donde se deduce

$$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}.$$

Por el contrario si $\frac{a}{b}$ fuese impropio será $a > b$ y por lo tanto

$$\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}.$$

Lo contrario hubiera tenido lugar si el número *m* se hubiera restado á los dos términos del quebrado propuesto.

Dos quebrados irreducibles iguales tienen iguales los numeradores y tambien los denominadores.

Demost. LII. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ los dos quebrados irreducibles. Digo que $a = c$ y $b = d$.

En efecto, segun el teorema (L) *a* es múltiplo de *c* y *c* lo es de *a*; luego $a = c$.

Tambien se tiene que *b* es múltiplo de *d*, y *d* lo es de *b*, por consiguiente $b = d$.

Un quebrado irreducible no puede ser igual á un número entero.

Demost. LIII. Sea $\frac{a}{b}$ un quebrado irreducible; si este quebrado pudiese ser igual á un número entero, *b* seria divisor de *a*; luego *a* y *b* serian divisibles por *b* y el quebrado no seria irreducible contra lo supuesto.

CAPÍTULO II.

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ORDINARIAS.

Cómo se suman varios quebrados cuando tienen un mismo denominador?

Sumando los numeradores y dando á la suma el denominador comun.

Cómo se hace la suma cuando los denominadores son diferentes?

Reduciéndolos á un comun denominador, sumando los nuevos numeradores y dando á la suma el denominador comun.

Cómo se suman los números mistos?

Se suman primero los quebrados, y si de su suma resulta algun entero se agrega á la suma de los enteros.

Un número misto cómo se reduce á quebrado?

Multiplicando el entero por el denominador del quebrado, agregando al producto el numerador y poniéndole por denominador el mismo que tiene el quebrado.

Demost. LIV. Sea $a+\frac{b}{n}$ el número misto que se quiere reducir á quebrado impropio; digo que $a+\frac{b}{n}=\frac{a\times n+b}{n}$

En efecto, se tiene (XLVII) $a=\frac{a\times n}{n}$ de modo que será

$$a+\frac{b}{n}=\frac{a\times n}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a\times n+b}{n}$$

con lo que queda demostrado lo que se pedia.

Cómo se restan los quebrados, cuando tienen un mismo denominador?

Restando los numeradores y poniendo á la diferencia el denominador comun.

Y cuando los denominadores son diferentes?

Se reducen á un comun denominador y á la diferencia de los nuevos numeradores se le dá el denominador comun.

Cómo se restan los números mistos?

Se resta quebrado de quebrado y entero de entero; pero si el quebrado del minuendo es menor que el del sustraendo, se le agrega á aquel una unidad de su entero correspondiente, reducida á quebrado de la especie que indique el denominador comun, y al efectuar la resta de los enteros se tendrá presente que al minuendo se le ha quitado una unidad.

Cómo se multiplica un quebrado por un entero?

Multiplicando el numerador por el entero y poniendo al producto el mismo denominador del quebrado; ó bien partiendo el denominador por el entero, si este fuese submúltiplo de aquel.

Demost. LV. En efecto, ya se ha visto (XLVIII) que si el numerador se multiplica ó el denominador se divide por un número el quebrado queda multiplicado por dicho número.

Cómo se multiplica un entero por un quebrado?

Multiplicando el numerador por el entero y poniendo al producto el mismo denominador del quebrado; ó bien partiendo el denominador por el entero si este fuese submúltiplo de él.

Demost. LVI. Para comprenderlo mejor sea $7 \times \frac{5}{8}$, digo que se tiene $7 \times \frac{5}{8} = \frac{7 \times 5}{8} = \frac{35}{8}$.

Ateniéndonos á la segunda definicion de la multiplicacion, vemos que siendo el multiplicador $\frac{5}{8}$ las cinco octavas partes de la unidad, el producto debe ser las cinco octavas partes del multiplicando 7, ó lo que es lo mismo cinco veces la octava parte de 7.

La octava parte de 7 es visiblemente $\frac{7}{8}$ y por consiguiente se tiene

$$7 \times \frac{5}{8} = \frac{7}{8} \times 5 = \frac{7 \times 5}{8} = \frac{35}{8}.$$

De aquí se deduce que para tomar de un número las partes que indica un quebrado hay que multiplicar el número propuesto por dicho quebrado.

Tambien se infiere que multiplicar un entero por un quebrado es lo mismo que multiplicar un quebrado por un entero; y por tanto en vez de multiplicar el numerador por el entero se podria dividir el denominador, como se dijo en el teorema anterior.

Cómo se parte un quebrado por un entero?

Multiplicando el entero por el denominador, ó bien partiendo el numerador por el entero si este fuése submúltiplo de aquel.

Demost. LVII. En efecto, ya se vió (XLVIII) que si el numerador se divide ó el denominador se multiplica por un número cualquiera el quebrado queda dividido por dicho número.

Cómo se divide un entero por un quebrado?

Se multiplica el entero por el denominador y el producto se divide por el numerador.

Demost. LVIII. Sea $n : \frac{a}{b}$

Multiplicando dividendo y divisor por *b* resulta

$$n \times b : a \quad \text{ó} \quad \frac{n \times b}{a}$$

Cómo se multiplican dos quebrados?

Se forma el producto de los numeradores y se divide por el de los denominadores.

Demost. LIX. Propongámonos multiplicar $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8}$.

Segun se vió (LVI) esto equivale á tomar las siete octavas partes del multiplicando $\frac{2}{3}$, ó bien siete veces la octava parte. Por consiguiente

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = \left(\frac{2}{3} : 8\right) \times 7 = \frac{2}{3 \times 8} \times 7 = \frac{2 \times 7}{3 \times 8}.$$

Cómo se multiplican los números mistos?

Se reducirán los números mistos á quebrados y se multiplican como tales.

Cómo se dividen los quebrados?

Se multiplica el numerador del quebrado dividendo por el denominador del quebrado divisor; y esto se divide por el producto de los otros dos términos.

DEMOST. LX. Sea $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Multiplicando el dividendo y divisor por *d* se tiene

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times d : c$$

pero $\frac{a}{b} \times d = \frac{a \times d}{b}$, luego

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b} : c = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Cómo se parten los números mistos?

Se reducen á quebrados y se parten como quebrados.

CAPÍTULO III.

DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

Qué son fracciones decimales?

Unos quebrados que tienen por denominador la unidad seguida de ceros.

Pueden escribirse estos quebrados sin denominador?

Sí, señor: poniendo los numeradores á la derecha de la clase de las unidades, separados de ella con una vírgula, y estendiendo á las clases decimales la ley de los enteros; «*que cada nota sea diez veces menor por cada lugar que adelante á la derecha*», se colocarán sucesivamente despues de la vírgula los décimos, centésimos, milésimos, diez milésimos, cien milésimos; etc.

Cómo se escribe una fraccion decimal?

Se escribe despues de la vírgula, y se interponen entre esta y la cantidad los ceros necesarios para que haya tantas cifras decimales como ceros tiene el denominador.

Cómo se lee una fraccion decimal?

Como si fuese entera, agregándole al fin la denominacion del último guarismo.

Cómo se hace una fraccion decimal diez, ciento, mil, diez mil.....veces mayor ó menor?

Corriendo la vírgula á la derecha ó á la izquierda uno, dos, tres, cuatro....lugares.

Demost. LXI. Sea, por ejemplo, 346,54 y queremos hacerlo diez veces mayor: segun la regla dada el número propuesto se convierte en 3465,4; y si espresamos esta última y la propuesta en la forma de quebrado, resulta

$$\frac{34654}{100} \text{ y } \frac{34654}{10}$$

En lo que se vé evidentemente que la segunda es diez veces mayor que la primera.

Sin alterar el valor de una fraccion decimal se pueden añadir ó quitar cuantos ceros se quiera de su derecha.

Demost. LXII. Supongamos que $0,48 = 0,480$.
Para comprobarlo pongamos las dos fracciones bajo la forma de quebrados comunes y resultará $\frac{48}{100} = \frac{480}{1000}$, lo cual es evidente pues para obtener la segunda fraccion no hay mas que multiplicar por 10 los dos términos de la primera, operacion que como sabemos no altera el valor de un quebrado.

Cómo se reducen varias fracciones decimales á un denominador comun?

Igualándolas en cifras, para lo cual basta agregar ceros á la derecha de la que tenga menos, puesto que los ceros á la derecha de una fraccion decimal no alteran su valor.

Entre varias cantidades decimales cómo se conocerá cuál es la mayor?

Atendiendo, no al número de cifras, sino al valor de ellas empezando desde la vírgula.

Cómo se efectúa la suma de las cantidades decimales?

Se colocan unas debajo de otras con las correspondencias de sus clases; y se suman como enteros, colocando la vírgula delante de la suma de las unidades.

Cómo se restan las cantidades decimales?

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo y se restan como enteros, colocando la vírgula delante de las unidades; pero si el minuendo tiene menos cifras decimales que el sustraendo, se le agregan á su derecha los ceros necesarios para que tengan uno y otro igual número de cifras.

Cómo se multiplican las cantidades decimales?

Lo mismo que los enteros y luego se separan de la derecha del producto tantas cifras decimales como se cuenten en ambos factores.

Demost. LXIII. Propongámonos multiplicar 48,36 por 91,8. Escribiendo estas cantidades en forma de quebrados tendremos

$$\frac{4836}{100} \times \frac{918}{10} = \frac{4836 \times 918}{1000} = \frac{4439448}{1000}.$$

Este último quebrado es impropio y para reducirlo á entero hay que partir el numerador por el denominador y por otra parte se sabe que dividir por 1000 equivale á separar tres cifras para decimales; luego

$$48{,}36 \times 91{,}8 = 4439{,}448$$

que era lo que se queria demostrar.

Cómo se divide una cantidad decimal por un número entero?

Se efectúa la division como si el dividendo fuese entero y de la derecha del cuociente se separan tantas cifras como decimales tiene el dividendo.

Demost. LXIV. El suprimir la coma en el dividendo equivale á multiplicarlo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene; de este modo el cuociente queda multiplicado por el mismo número, y para que resulte como debe habrá que dividirlo por la misma cantidad, ó lo que es igual separar para decimales tantas cifras como hay en el dividendo.

Cómo se divide una cantidad entera ó decimal por una decimal?

Se multiplican dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor.

Demost. LXV. Ya se sabe que el cuociente no se altera porque el dividendo y divisor se multipliquen por un mismo número, y de este modo quedará reducida la division á la de dos números enteros ó al caso anterior.

CAPÍTULO IV.

DE LAS APROXIMACIONES Y DE LOS PERÍODOS.

Qué se entiende por aproximarse á una fraccion en menos de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, etc.

Es hallar una fraccion mas sencilla que se le diferencie en menos de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ etc.?

Cómo se efectúa dicha aproximacion?

Se multiplica el numerador por el denominador del quebrado que marca la aproximacion, y partiendo el producto por el denominador del propuesto, el cuociente entero que resulte será el numerador de la fraccion aproximada y el denominador será el mismo de la aproximacion.

Demost. LXVI. Supongamos que queremos aproximarnos al verdadero valor de la fraccion $\frac{a}{b}$ en menos de $\frac{1}{q}$. Si multiplicamos la fraccion $\frac{a}{b}$ por q tendremos $\frac{a \times q}{b}$; y figurándonos que x sea el cuociente entero que resulte al dividir $a \times q$ por b, x será menor que el cuociente completo, porque se debe haber obtenido en general un resíduo y como ningun resíduo puede ser igual al divisor, el cuociente completo será menor que $x+1$; luego el verdadero cuociente estará comprendido entre x y $x+1$, y se tendrá

$$x<\frac{a\times q}{b}<x+1$$

y dividiendo por q

$$\frac{x}{q}<\frac{a}{b}<\frac{x+1}{q}$$

esto es, que $\frac{a}{b}$ está comprendida entre $\frac{x}{q}$ y $\frac{x+1}{q}$; y como la diferencia entre estas es $\frac{1}{q}$, la diferencia entre $\frac{x}{q}$ y $\frac{a}{b}$ será menos de $\frac{1}{q}$.

COROLARIO. *Para aproximarse al valor de una fraccion con una diferencia menor que* 0,1, 0,01 0,001 *etc. se divide el numerador de la fraccion propuesta por el denominador, agregando un cero al resíduo de cada division parcial hasta llegar en el cuociente á una cifra del órden de la aproximacion propuesta.*

Una fraccion comun irreducible, cuándo puede convertirse exactamente en decimales?

Cuando el denominador no contenga mas que potencias del 2 ó del 5; y en este caso el número de cifras decimales será tantas como unidades tenga el esponente de la potencia superior de 2 ó de 5, que entre en dicho denominador.

DEMOST. LXVII. Una fraccion de esta especie se puede representar por $\frac{a}{2^m\times 5^n}$ y si representamos su valor absoluto por x, resulta

$$x=\frac{a}{2^m\times 5^n}.$$

Supongamos que sea $m>n$. Ya se sabe que para efectuar la reduccion á decimales se necesita agregar un cero á la derecha de cada resíduo; admitamos que se hayan agregado m ceros, lo cual equivale á multiplicar desde luego el numerador por la unidad seguida de m ceros ó 10^m.

Si multiplicamos los dos miembros de la ecuacion anterior por 10^m, tendremos

$$10^m \times x = \frac{a \times 10^m}{2^m \times 5^n} = \frac{a \times 2^m \times 5^m}{2^m \times 5^n} = a \times 5^{m-n}.$$

Donde se vé que se llega á un cuociente exacto; dividiendo ahora por 10^m se obtiene para el valor de x

$$x = \frac{a \times 5^{m-n}}{10^m}.$$

Se vé tambien que siendo el denominador 10^m ó la unidad seguida de m ceros el número de cifras decimales será m.

Cuándo no se podrá convertir exactamente en decimales una fraccion comun irreducible?

Cuando el denominador contenga algun factor primo diferente de 2 ó de 5, en cuyo caso la fraccion decimal se llama *periódica*, porque algunas de sus cifras se repiten periódicamente hasta el infinito.

Demost. LXVIII. Como al multiplicar por 10, 100, 1000 el numerador solo introducimos en él potencias del 2 y del 5, el factor primo que el denominador tenga sin tenerle el numerador no podremos conseguir que aparezca en el producto del numerador por cualquiera potencia de 10. Luego por mas ceros que á la derecha del numerador se escriban, nunca podremos obtener un cuociente entero, así que el número de divisiones parciales que deberán efectuarse será infinito.

Respecto á que alguna de las cifras se han de repetir periódicamente, sabemos que como los resíduos de las divisiones sucesivas han de ser menores que el divisor y son por otra parte en número infinito, es claro que pronto se ha de repetir alguno de ellos, en cuyo caso se obtiene por segunda vez el mismo dividendo y por tanto el cuociente y resíduo que ya se habia hallado y con estos todos los subsiguientes, empezando desde este punto á repetirse las cifras ya obtenidas en el cuociente; y como los resíduos han de ser menores que el divisor, el número de estos ha de ser cuando mas igual al de las unidades de este divisor menos una.

En cuántas clases se dividen las fracciones decimales periódicas?

En dos: llamadas *fracciones periódicas simples y fracciones periódicas mistas.*

Cuándo es *periódica simple?*

Cuando el período empieza desde la primera cifra decimal, y proviene de una fraccion comun irreducible en cuyo denominador no entra ninguna potencia de 2 ni de 5.

Demost. LXIX. Como para efectuar la reduccion á decimales se necesita escribir un cero á la derecha del numerador, lo que equivale á multiplicarlo por 10, y dividir en seguida por el denominador, tendremos, siendo $\frac{a}{b}$ la fraccion, y representando el cuociente por q y el resíduo por r

$$a \times 10 = b \times q + r \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

como el resíduo r tenemos asimismo que multiplicarlo por 10 y partirlo por el mismo divisor, siguiendo en todos los demás resíduos sucesivos la misma operacion, se irán obteniendo

$$\begin{array}{ll} r \times 10 = b \times q' + r' \quad . \quad . & (2) \\ r' \times 10 = b \times q'' + r'' \quad . \quad . & (3) \\ r'' \times 10 = b \times q''' + r''' \quad . \quad . & (4) \\ r''' \times 10 = b \times q^{\text{IV}} + r^{\text{IV}} \quad . \quad . & (5) \end{array}$$

Mas como de ser periódica la fraccion se han de repetir algunos de los resíduos ya encontrados, se puede suponer que sea $r'' = r^{\text{IV}}$, en cuyo caso restando la ecuacion (5) de la (3) se obtiene

$$10\,(r' - r''') = b\,(q'' - q^{\text{IV}}).$$

Siendo el primer miembro un múltiplo de 10, tendrá que serlo tambien el segundo; pero b se ha supuesto primo con 10, y $(q'' - q^{\text{IV}})$ que es la diferencia de dos números dígitos no puede ser tampoco divisible por 10, luego para que subsista la ecuacion se debe tener $q'' = q^{\text{IV}}$ lo que dá

$$10\,(r' - r''') = 0$$

y de aquí se deduce

$$r' = r'''.$$

Operando con las ecuaciones (2) y (4) del mismo modo que con las anteriores se obtendrá $r = r''$; y empleando igual razonamiento para las (1) y (3) se obtiene por último $a = r'$, lo que demuestra que se ha de llegar á un resíduo igual al numerador de la fraccion propuesta; y por tanto el período empezará desde la cifra de los décimos.

Cuándo es *periódica mista?*

Cuando el período empieza despues de haber obtenido algunas cifras decimales, y proviene de una fraccion comun irreducible en cuyo denominador entran otros factores á mas de 2 y de 5; en este caso el período va precedido de tantas cifras como unidades hay en el exponente mas elevado de 2 ó de 5.

Demost. LXX. Una fraccion de esta especie está representada por la fórmula $\frac{a}{2^m \times 5^n \times b}$, en la cual b representa un número primo con 10, y para fijar las ideas supondremos $m > n$.

Representando por x el valor absoluto de esta fraccion se tendrá

$$x = \frac{a}{2^m \times 5^n \times b}$$

y multiplicando los dos miembros por b

$$b \times x = \frac{a}{2^m \times 5^n}.$$

Ahora bien, la fraccion $\frac{a}{2^m \times 5^n}$ reducida á decimales dará un número limitado de cifras, que siendo $m > n$ serán en número m (LXVII); para convertir esta fraccion en entero hay que suprimir la vírgula, lo cual equivale á multiplicarla por 10^m; y para que la ecuacion subsista habrá que multiplicar el primer miembro por 10^m, de suerte que representando por p la fraccion decimal, ya considerada como número entero, será

$$10^m \times b \times x = p$$

de donde

$$10^m \times x = \frac{p}{b}.$$

Al efectuar la division de p por b se obtendrá en general un cociente entero q (que no podrá tener mas de m cifras, que son las que hay en p) y un resíduo r; así, pues,

$$10^m \times x = q + \frac{r}{b}.$$

Si ahora se reduce á decimales la fracion $\frac{r}{b}$, dará un número infinito de cifras y además el período empezará desde la vírgula (LXIX). Sea este período $(cd. \ . \ .)$ y se tendrá

$$10^m \times x = q + o, (cd. \ . \ . \ .)$$

ó bien

$$10^m \times x = q, (cd. \ . \ . \ . \ . \ . \ .).$$

En fin, si se dividen los dos miembros por 10^m, en el primero quedará x y en el segundo no habrá mas sino separar para decimales m cifras mas de las que antes habia, y por lo tanto se obtendrá una fraccion decimal en que el período irá precedido de m cifras, que era lo que se queria demostrar.

De una fraccion decimal completa ¿cómo se pasa á la fraccion comun que le ha dado orígen?

Se escribe la fraccion decimal en forma de quebrado y ya no hay mas que reducirla á su menor espresion.

De una fraccion periódica simple ¿cómo se pasa á la fraccion que la ha originado?

Dividiendo el período por un número compuesto de tantos *nueves* como cifras contenga el período.

Demost. LXXI. Sea o, *abcd abcd abcd*..... la fraccion propuesta; si designamos por x el valor, hasta ahora desconocido, de esta fraccion tendremos

$$x = o, abcd\ abcd\ abcd....$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras hay en el período, lo que equivale á multiplicar por 10000 en el caso que consideramos, se tiene

$$10000 \times x = abcd, abcd\ abcd....$$

Si de esta ecuacion restamos miembro á miembro la anterior, resulta

$$10000 \times x - x = abcd$$

ó bien

$$9999\, x = abcd$$

y dividiendo los dos miembros por 9999 se obtiene

$$x = \frac{abcd}{9999}$$

que era lo que se queria demostrar.

A qué equivale una fraccion decimal periódica mista?

A un quebrado comun cuyo numerador es la diferencia entre el número que espresa las primeras cifras de la fraccion decimal hasta el primer período inclusive y el que esprese las de la parte no periódica; y su denominador un número compuesto de tantos *nueves* como cifras tenga la parte periódica seguidos de tantos *ceros* como sean las cifras de la parte no periódica.

Demost. LXXII. Sea la fraccion decimal propuesta 0,*pqrabcd abcd*...; representando su valor por x tendremos

$$x = 0,\, pqrabcdabcd\ldots\ldots$$

Multiplicando los dos miembros primero por 10000000, con el objeto de que la coma venga á colocarse despues del primer período, y luego por 1000 á fin de que se coloque antes de dicho primer período resultan las ecuaciones

$$10000000\, x = pqrabcd,\, abcd\ldots$$
$$1000\, x = pqr,abcdabcd\ldots$$

Restando y observando que la parte decimal es igual en minuendo y sustraendo se obtiene

$$9999000\, x = pqrabcd - pqr$$

de donde

$$x = \frac{pqr\, abcd - pqr}{9999000}$$

que era lo que se queria demostrar.

CAPÍTULO V.

DE LOS NÚMEROS CONCRETOS Y COMPLEJOS.

Qué son números *complejos*?

Unos números concretos compuestos de diferentes partes, referidas á unidades de diferentes tamaños, pero de una misma especie.

Cómo se reduce un número complejo á su menor denominacion?

Se multiplican las unidades superiores por una unidad de esta misma especie espresada en unidades de la especie inmediata inferior, agregando á este producto las unidades que de dicha especie inferior inmediata se tengan en el número propuesto; este resultado, que aparece espresado en unidades de la segunda especie, se multiplica por una unidad de dicho órden reducida á la denominacion inmediata inferior, agregando al producto las unidades que se tengan de la misma especie, y de este modo se continúa hasta llegar á la última denominacion.

Dado un número complejo, cómo se le reduce á un solo quebrado de la unidad principal?

Reduciendo todo el número á su denominacion inferior y poniéndole por denominador una unidad de la denominacion superior reducida á la inferior.

Cómo se reduce á número complejo un quebrado comun de unidad superior?

Se partirá el numerador por el denominador y el cuociente que se obtenga espresará unidades de la especie superior; el resíduo obtenido se multiplicará por una unidad de la especie superior reducida á la inferior inmediata; este nuevo dividendo se parte por el mismo divisor, y resultarán en el cuociente las unidades del segundo órden; el nuevo resíduo se multiplicará por una unidad del órden de las últimamente obtenidas en el cuociente espresada en unidades de su especie inferior inmediata, continuando del mismo modo hasta llegar á la última denominacion.

Cómo se reduce un número de especie inferior á número complejo?

Poniéndole por denominador una unidad de la especie superior reducida á la inferior y aplicando al quebrado que resulte la regla anteriormente dada.

Cómo se suman los números complejos?

Se colocan los sumandos de modo que formen columnas las unidades de un mismo órden y se empieza á sumar por las de menor denominacion; si su suma no llega á componer una unidad de la especie inmediata superior se escribe debajo de su columna; pero si dicha suma contiene una ó muchas unidades de la especie inmediata, solo se escribe debajo de la columna lo que quede en la suma despues de haber estraido las unidades que en ella haya de la denominacion superior inmediata, y estas se retienen para agregarlas á la de la especie siguiente, sobre la que se operará del mismo modo.

Cómo se restan los números complejos?

Se escribe el sustraendo debajo del minuendo formando columna las unidades de un mismo órden, y se efectuará la sustraccion por partes empezando por las unidades de especie inferior. Si alguna de las restas parciales fuese imposible se añadirá al número de que se debe restar una unidad de la especie inmediata superior, reducida á la especie con que se opera, aumentándose en la misma unidad el número correspondiente á dicha especie en el sustraendo.

Cómo se efectúa la multiplicacion de un número complejo por un entero?

Se multiplica todo el multiplicando por el multiplicador y se reduce cada uno de los productos á las especies superiores inmediatas.

Cómo se efectúa la multiplicacion de un número entero por un complejo, ó la de un complejo por otro?

Se descomponen las diferentes subdivisiones de que consta el multiplicador en *partes alicuotas*, ya sea de la unidad principal, ya unas de otras, y se toman despues del multiplicando ó de los productos que resulten las partes indicadas por estas partes alicuotas. Algunas veces se ofrece el tener que formar un producto auxiliar con el objeto de hallar por medio de él algunos de los que indiquen las partes alicuotas en que se han dividido las unidades de las diferentes denominaciones del multiplicador; pero despues que haya llenado el objeto, se tendrá cuidado de tacharlo para que no quede comprendido en la suma de los productos parciales que deben componer el producto total. El producto ha de ser siempre de la misma especie que el multiplicando, y por lo tanto el multiplicador, aunque complejo, debe considerarse como un número abstracto que solo indica las veces que se ha de repetir el multiplicando.

Cómo se efectúa la division de un número complejo por un entero?

Se empieza por dividir la denominacion superior del dividendo por el divisor y el resíduo que resulte se reducirá á la denominacion inmediata, agregando al producto las unidades que de esta clase haya en el dividendo; el número que resulte se divide por el mismo divisor y se continúa de este modo hasta llegar á la última denominacion del dividendo. El cuociente será siempre de la misma especie que el dividendo.

Cuando el dividendo y divisor son complejos y de una misma especie ¿cómo se efectúa la division?

Reduciendo tanto el dividendo como el divisor á la menor de las denominaciones que en ellos entran y partiendo como números enteros; el cuociente en este caso debe considerarse como número abstracto; pero si el enunciado de la cuestion designa la naturaleza á que debe pertenecer, entonces se debe hacer la misma operacion que para reducir un quebrado comun á complejo.

Si el dividendo y divisor son complejos de diferente especie, ¿cómo se obtiene el cuociente?

Se convertirá el divisor en quebrado de la especie superior, con lo cual queda reducida la operacion á dividir un número complejo por uno fraccionario, lo que se efectúa multiplicando el dividendo por el denominador del quebrado y partiendo el producto por el numerador.

Puesta ya la operacion en este estado no hay mas que aplicar la regla dada para dividir un número complejo por un entero.

CAPÍTULO VI.

DE LOS NÚMEROS SEXAGESIMALES.

Qué son números *sexagesimales?*

Aquellos en que sus respectivas unidades van siendo sesenta veces menores que las precedentes, tales como horas, minutos, segundos etc.

Cómo se reduce un número sexagesimal á su especie inferior?

Se multiplica por 6 la denominacion superior y al producto se agrega la especie inmediata inferior, adelantándola un lugar á la derecha; este resultado se multiplica nuevamente por 6 y al producto se agrega la denominacion siguiente adelantándola tambien un lugar á la derecha; con este resultado se opera como antes y así sucesivamente hasta llegar á la última denominacion.

Cómo se reduce un número sexagesimal espresado en especie inferior á sus especies superiores?

Se separa con una coma la cifra de las unidades y se saca la sesta parte de lo que queda á la izquierda; el cuociente espresa unidades de la denominacion inmediata superior y el resíduo, unido con la cifra separada produce unidades de la denominacion propuesta. Con la denominacion obtenida repítase la misma operacion y continúese del mismo modo hasta llegar á la denominacion superior.

Cómo se reduce un número sexagesimal á decimal de la especie superior?

Se toma la sesta parte de la denominacion inferior y el resultado dará dicha especie inferior espresada en fraccion decimal de la especie inmediata; continuando con igual procedimiento hasta llegar á la especie superior.

Cómo se suman los números sexagesimales?

Como en estos números cada unidad superior contiene sesenta de la inferior inmediata no hay mas que sumar cada columna y estraer de las decenas de cada una de ellas los *seis* que contengan, poniendo el resíduo en lugar de las decenas y llevando la reserva para agregarla á la columna inmediata.

Cómo se restan los números sexagesimales?

Lo mismo que los complejos.

Cómo se multiplica un número sexagesimal por un número entero?

Se empieza á multiplicar por la especie inferior, estrayendo de las decenas del producto los *seis* que contengan, escribiendo el resto en el lugar de las decenas y llevando la reserva para agregarla al producto de la denominacion siguiente, con la que se operará del mismo modo.

Cómo se efectúa la division de un sexagesimal por un entero?

Lo mismo que la de un complejo pór un entero.

Cómo se multiplica ó se parte un sexagesimal por 15 ó por 12?

Para la multiplicacion se toma la cuarta ó la quinta parte del sexagesimal propuesto, elevando todas sus denominaciones á la superior inmediata; y para la division se multiplica por 4 ó por 5 despues de deprimidas igualmente todas las denominaciones del número propuesto.

CAPÍTULO VII.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL.

Qué se entiende por sistema *métrico decimal?*

Un conjunto de medidas y pesos arreglados á la escala decimal lo mismo que nuestro sistema de numeracion, llamándose *métrico* por la voz griega *metro*, que significa medida.

Cuáles son las unidades fundamentales de este sistema?

Las siguientes:

1.ª El *metro* que sirve para medir las longitudes. (*)
2.ª El *área* empleada para la medicion de los terrenos.
3.ª El *litro* usado para medir áridos y líquidos.
4.ª El *gramo* que se emplea para los pesos.

Cómo se forman los múltiplos y submúltiplos de estas unidades principales?

Anteponiendo á los nombres anteriores las voces griegas

myria, *kilo*, *hecto*, *deca*,

que significan

diezmil, mil, ciento, diez,

y las tomadas del latin

deci, *centi*, *mili*,

que significan

décimo, centésimo, milésimo.

Todas las operaciones esplicadas en los números complejos se simplifican con el sistema métrico?

Sí, señor, porque en este todo se reduce á operar con números enteros y fracciones decimales.

(*) El *metro* es la diezmillonésima parte del arco del meridiano de París, contando desde el Polo al Ecuador.
El *área* equivale á un decámetro cuadrado ó sean 100 metros cuadrados.
El *litro* equivale á un decímetro cúbico.
El *gramo* es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada en su máxima densidad que es á unos 4 grados del termómetro centígrado.

1.º El *metro* que sirve para medir las longitudes.
2.º El *área* empleada para la medición de los terrenos.
3.º El *litro* usado para medir áridos y líquidos.
4.º El *gramo* que se emplea para los pesos.

¿Cómo se forman los múltiplos y submúltiplos de estas unidades principales?

Anteponiendo á los nombres anteriores las voces griegas

miria, kilo, hecto, deca

que significan

diezmil, mil, ciento, diez

y las tomadas del latin

deci, centi, mili

que significan

décimo, centésimo, milésimo.

¿Todas las operaciones explicadas en los números complejos se simplifican con el sistema métrico?

Sí, señor, porque en este todo se reduce á operar con números enteros y fracciones decimales.

(1) El metro es la diezmillonésima parte del arco del meridiano terrestre comprendido entre el Polo y el Ecuador.
El área equivale á un decámetro cuadrado ó sean 100 metros cuadrados.
El litro equivale á un decímetro cúbico.
El gramo es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada en su máximo de densidad que es 4 grados del termómetro centígrado.

LIBRO III.

POTENCIAS Y RAICES.

CAPÍTULO PRIMERO.

FORMACION DE LAS POTENCIAS Y PROPIEDADES GENERALES Á LAS RAICES DE UN GRADO CUALQUIERA.

A qué se llama *potencia* de un número?

Potencia de un número, segun se dijo (pág. 10) es el producto que se obtiene tomando dicho número por factor dos, tres, ó mas veces.

A qué se llama *raiz* de un número?

Raiz cuadrada de un número es otro número que elevado al cuadrado da el número propuesto.

Raiz cúbica de un número es otro número que elevado al cubo produce el primero.

En general, se llama raiz de cierto grado de un número otro número que elevado á la potencia de igual grado que la raiz da el número propuesto. Las raices se indican con el signo $\sqrt{}$, que se llama radical y se pone en la parte superior el grado de que sea.

Cómo se forma una potencia algo crecida de un número?

Se descompone la potencia propuesta en varias partidas ó sumandos, y formando cada una de estas potencias parciales en que el número queda dividido, se multiplican estos resultados entre sí.

Demost. LXXIII. Supongamos por ejemplo, que un número tal como a, se quiera elevar á la potencia p; descomponiendo p en los sumandos m, n, r, se tendrá

$$p = m + n + r.$$

Digo que se tiene $a^p = a^m \times a^n \times a^r$.

En efecto

$$a^m = a \times a \times a \dots \text{ hasta } m \text{ veces}$$
$$a^n = a \times a \times a \dots \text{ hasta } n \text{ veces}$$
$$a^r = a \times a \times a \dots \text{ hasta } r \text{ veces.}$$

y por consiguiente

$$a^m \times a^n \times a^r = a \times a \times a \times a \dots \text{ hasta } (m + n + r) \text{ veces}$$

ó bien

$$a^m \times a^n \times a^r = a^{m+n+r} = a^p.$$

¿Cómo se eleva una potencia dada á otra nueva potencia?

Multiplicando el esponente de la primera por el de la segunda, despues de lo cual solo queda que elevar el número propuesto á la potencia que indica aquel producto.

Demost. LXXIV. Supongamos que a^m se quiere elevar á la potencia n.

Se debe obtener $(a^m)^n = a^{m \times n}$.

En efecto $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \dots$ hasta n veces

y por lo tanto

$$(a^m)^n = a^{m+m+m+ \dots \dots \text{ hasta } n \text{ veces}}$$

ó bien

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

que era lo que se queria demostrar.

¿Cómo se eleva un quebrado á una potencia cualquiera?

Elevando sus dos términos á dicha potencia.

Demost. LXXV. Sea $\frac{a}{b}$ un quebrado que se quiere elevar á la potencia n.

Es evidente que se tiene

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \text{ hasta } n \text{ veces}$$

ó bien

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a \times a \times a \times a \ldots \text{ hasta } n \text{ veces}}{b \times b \times b \times b \ldots \text{ hasta } n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

que era lo que se queria demostrar.

Qué son números *conmensurables* ó *racionales?*
Los que tienen una medida comun con la unidad.
Y qué son números *inconmensurables* ó *irracionales?*
Los que no tienen medida comun con la unidad.

Todo número entero que no es potencia exacta de otro entero tampoco podrá serlo de un número fraccionario y por lo tanto el número propuesto no tiene raiz exacta de aquel grado.

Demost. LXXVI. Sea un número N que suponemos que no tiene raiz exacta entera del grado m.

Si admitimos que la raiz m de dicho número puede estar representada exactamente por el quebrado $\frac{a}{b}$, tendremos

$$\sqrt[m]{N} = \frac{a}{b}$$

y elevando á la potencia m (LXXV) resulta

$$N = \frac{a^m}{b^m}.$$

Ahora bien, como el quebrado $\frac{a}{b}$ puede reducirse á sus menores términos, a y b serán primos entre sí, y lo mismo sucederá con a^m y b^m (XXXVIII, *Corol.*), luego $\frac{a^m}{b^m}$ es un quebrado irreducible, y se seguiria que un número entero podria ser igual á un número fraccionario lo que es absurdo.

Una raiz cualquiera de un número menor que 1, es tambien menor que 1, pero mayor que dicho número.

DEMOST. LXXVII. Sea $a < 1$; digo que $\sqrt[m]{a} < 1$.

En efecto, no puede ser $\sqrt[m]{a} = 1$ ni $\sqrt[m]{a} > 1$, porque elevando á la potencia m saldria $a = 1$ ó $a > 1$, resultados contrarios á lo supuesto.

Tambien $\sqrt[m]{a} > a$, pues si fuese $\sqrt[m]{a} = a$, elevando á la potencia m se tendria $a = a^m$, lo que es absurdo; tampoco podria tenerse $\sqrt[m]{a} < a$ pues de aquí saldria $a < a^m$, ó bien $a < a \times a \times a \times a \ldots$ hasta m veces, lo que es igualmente absurdo, pues siendo a un quebrado el producto $a \times a \times a \times a \ldots$ ha de ser menor que a.

Una raiz cualquiera de un número mayor que 1 es tambien mayor que 1, pero menor que dicho número.

DEMOST. LXXVIII. Sea un número $a > 1$, será $\sqrt[m]{a} > 1$.

Con efecto, no puede ser $\sqrt[m]{a} = 1$ ni $\sqrt[m]{a} < 1$, pues elevando á la potencia m se tendria $a = 1$ ó $a < 1$, que son resultados contrarios á la hipótesis.

Se ha de tener tambien $\sqrt[m]{a} < a$, pues si fuera $\sqrt[m]{a} = a$ ó $\sqrt[m]{a} > a$, elevando á la potencia m se tendria $a = a^m$ ó $a > a^m$, que son resultados imposibles.

Si alguno de los dos términos de un quebrado irreducible no es potencia perfecta del grado m, el quebrado no puede tener raiz exacta de dicho grado.

DEMOST. LXXIX. Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$, cuyo numerador suponemos que no sea potencia perfecta del grado m digo que este quebrado no tiene raiz m^a exacta.

En efecto, no se puede admitir que la raiz sea un número entero, porque elevando dicha raiz á la potencia m se tendrá otro número entero que no podrá ser igual al quebrado $\frac{a}{b}$.

Supongamos ahora que la raiz m^a exacta de $\frac{a}{b}$ sea otro quebrado $\frac{c}{d}$, que supondremos ya reducido á su mas sencilla espresion;

se tendrá pues,

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{c}{d},$$

y elevando á la potencia m^a

$$\frac{a}{b}=\frac{c^m}{d^m}.$$

El quebrado $\frac{c^m}{d^m}$ es tambien irreducible (XXXVIII, *Corol.*) y por lo tanto será $a=c^m$, $b=d^m$, de donde se deduce que a es potencia perfecta del grado m contra lo supuesto.

Lo mismo se haria la demostracion suponiendo que el denominador no tuviese raiz m^a exacta, ó que no la tuviera ninguno de los dos términos del quebrado propuesto.

¿Cómo se estrae la raiz m^a de un quebrado cuyos dos términos son potencias perfectas del grado m?

Estrayendo la de cada uno de sus dos términos.

Demost. LXXX. Sea un quebrado $\frac{a^m}{b^m}$, del cual se quiere estraer la raiz m. Se debe tener

$$\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{a}{b}$$

porque elevando los dos miembros á la potencia m se tiene

$$\frac{a^m}{b^m}=\frac{a^m}{b^m};$$

y como esta igualdad es evidente, la anterior lo será tambien en virtud del axioma 7.° (pág. 5).

¿Cómo se estrae la raiz m^a de un quebrado cuyo denominador es potencia perfecta del grado m?

Se estrae la raiz entera del numerador y se divide por la del denominador.

Demost. LXXXI. Sea un quebrado $\frac{a}{b^m}$. Llamando r á la mayor raiz entera del grado m contenida en a se tendrá

$$r^m < a < (r+1)^m$$

y dividiendo por b^m

$$\frac{r^m}{b^m} < \frac{a}{b^m} < \frac{(r+1)^m}{b^m}$$

y estrayendo la raiz m^a

$$\frac{r}{b} < \sqrt[m]{\frac{a}{b^m}} < \frac{r+1}{b}.$$

Los dos quebrados $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$ difieren entre sí en $\frac{1}{b}$; y como $\sqrt[m]{\frac{a}{b^m}}$ está comprendida entre ellos, se infiere que la raiz buscada difiere de $\frac{r}{b}$ menos de la cantidad $\frac{1}{b}$.

Luego el error cometido siguiendo la regla establecida es menos de una unidad dividida por la raiz m^a del denominador del quebrado propuesto.

¿Es posible acercarse cuanto se quiera al valor de una raiz m^a de un número?

Si, señor; para esto se fija la aproximacion que se quiera obtener; es decir, se determina si la aproximacion ha de ser menor que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . . Se multiplica el número propuesto por la potencia m^a del denominador de la aproximacion; se estrae la raiz m^a del producto y á esta raiz se le pone por denominador el mismo de la aproximacion.

Demost. LXXXII. Sea a un número cuya raiz m^a se quiere obtener en menos de $\frac{1}{n}$; esto es, que la diferencia entre el número pedido y la raiz verdadera de a sea menor que $\frac{1}{n}$.

Es evidente que se tiene

$$a = \frac{a \times n^m}{n^m}.$$

Si suponemos que la raiz m^a del producto $a \times n^m$ esté comprendida entre r y $(r+1)$, se tendrá segun la demostracion anterior

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{\frac{a \times n^m}{n^m}}=\frac{r}{n}$$

en menos de $\frac{1}{n}$.

CAPÍTULO II.

FORMACION DEL CUADRADO Y ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA.

Qué productos entran en el cuadrado de un número compuesto de dos partes ó de la suma de dos números?

Tres que son: el cuadrado de la primera parte, el duplo de la primera por la segunda y el cuadrado de la segunda.

Demost. LXXXIII. Sea $a+b$ un número compuesto de dos partes, el cual se quiere elevar al cuadrado; como para esto no hay mas que multiplicar el número por sí mismo una vez, tendremos

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Luego

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

que era lo que se queria demostrar.

Corolarios. 1.º Si el número dado estuviese descompuesto en decenas y unidades, siendo a las decenas y b las unidades, podríamos decir que *el cuadrado de un número formado de decenas y unidades consta: del cuadrado de las decenas, duplo de las decenas por las unidades, y cuadrado de las unidades.*

2.º *La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor mas una unidad.*

En efecto sean a y $(a+1)$ dos números enteros consecutivos; segun se ha demostrado se tiene

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

y restando a^2 de los dos miembros resulta

$$(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$$

que era lo que se queria demostrar.

Cómo se forman los cuadrados de los números 10, 100, 1000, 10000, etc.?

Agregando á la unidad doble número de ceros de los que tiene la raiz.

Cómo se estrae la raiz cuadrada de un número entero?

Se divide el número en secciones de dos cifras procediendo de derecha á izquierda. Se estrae la raiz cuadrada del mayor cuadrado contenido en la primera seccion de la izquierda, y se resta de ella el cuadrado de la cifra que se encuentre. Al lado del resíduo se baja la seccion siguiente, se separa con un punto su última cifra y lo que quede á la izquierda se divide por el duplo de la raiz hallada. El cuociente se escribe á la derecha del divisor; el número que así se forme se multiplica por este cuociente y el producto se resta de todo el dividendo. A la derecha del nuevo resíduo se baja la tercera seccion, se separa su última cifra, y la parte que quede á la izquierda se divide por el duplo de la raiz hallada; se escribe el cuociente á la derecha del divisor; se multiplica el número así formado por el cuociente y se resta el producto de todo el nuevo dividendo, continuando de este modo hasta haber bajado la última seccion. Si despues de haber hallado la última cifra de la raiz no se obtiene ningun resíduo dicha raiz será exacta y en el caso contrario será inexacta y solo se obtiene su parte entera.

DEMOST. LXXXIV. Pueden presentarse tres casos que son: 1.° que el número propuesto no tenga mas que una ó dos cifras. 2.° que tenga tres ó cuatro. 3.° que tenga mas de cuatro.

1.er *caso*. Si el número no tiene mas de una ó dos cifras se hallará su raiz cuadrada con solo saber los cuadrados de los números dígitos.

2.° *caso.* Sea un número de cuatro cifras tal como 7056. Siendo este número mayor que 100 y menor que 10000 se tendrá

$$\sqrt{100} < \sqrt{7056} < \sqrt{10000}$$

ó bien

$$10 < \sqrt{7056} < 100.$$

Esto nos dice que la raiz buscada ha de constar de dos cifras ó sea de decenas y unidades; pero como todo número es el cuadrado de su raiz cuadrada, segun la definicion, tendremos que el número propuesto 7056 contendrá (LXXXIII) el cuadrado de las decenas de la raiz, mas el duplo de las decenas por las unidades de la misma, mas el cuadrado de las unidades. Pero como el cuadrado de las decenas ha de producir centenas, las dos cifras de la derecha del número propuesto, que componen 56, no pueden formar parte de dicho cuadrado, por lo cual se las separa con un punto; de este modo las 70 centenas contendrán el cuadrado de la cifra de las decenas de la raiz cuadrada buscada y además las centenas que provengan de las otras dos partes del cuadrado. La raiz cuadrada de 70 es 8 que es la cifra de las decenas, pues siendo $80^2 = 6400$ y $90^2 = 8100$, y estando el número propuesto comprendido entre estos dos cuadrados, su raiz será mayor que 80 y menor que 90. Ahora bien, si del número propuesto restamos 80^2 ó 6400 (bien se ve que se podrá restar 8^2 ó 64 de la seccion propuesta y bajar á la derecha del número que forma el resíduo la seccion siguiente), el resíduo 656 contendrá el duplo de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades, y como el duplo de las decenas por las unidades ha de producir un número exacto de decenas la cifra 6 de las unidades no podrá formar parte de dicho doble producto; por cuya razon se separa con un punto, y entonces 65 contendrá solamente el duplo de la *cifra* de las decenas por las unidades mas las decenas que dé el cuadrado de las unidades. De aquí se sigue que si se divide 65 por el duplo de la cifra de las decenas, que es 16, el cuociente 4 será las unidades ó un número mayor en razon á las decenas que hay en 65 procedentes del cuadrado de las unidades. Para comprobar esta cifra se la escribe á la derecha del divisor y el número que se obtenga, 164, se multiplica por dicha cifra, ya que así queda formado el duplo de decenas por unidades y el cuadrado de unidades, pues se tiene

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{70.56} = 84 & \\ 6400 & \\ \hline 656 & 164 \\ & 4 \\ 656 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$164 \times 4 = (160 + 4) \times 4 = (2 \times 80 + 4) \times 4$$
$$= 2 \times 80 \times 4 + 4^2.$$

Siendo $164 \times 4 = 656$ la cifra 4 es buena y la raiz exacta del número propuesto es 84. Si 164×4 fuese mayor que 656, habria que rebajar la cifra de las unidades; y si fuese menor, el número 7056 no seria cuadrado exacto de 84 y el resíduo que se obtuviera indicaria el número de unidades en que 7056 escederia á dicho cuadrado.

3.er *caso.* Sea un número de mas de cuatro cifras 568516 cuya raiz cuadrada se quiere obtener; como se tiene

$$568516 > 10000 \text{ y } < 1000000$$

será tambien

$$\sqrt{568516} > \sqrt{10000} \text{ ó } 100 \text{ y } < \sqrt{1000000} \text{ ó } 1000.$$

Luego la raiz cuadrada consta de tres cifras; pero aun se puede suponer que se compone de decenas y unidades. (Por ejemplo, $478 = 470 + 8$ equivale á 47 decenas y 8 unidades.) Por consiguiente, el número propuesto se compondrá del cuadrado de las decenas, del duplo de las decenas por las unidades y del cuadrado de las unidades; pero como el cuadrado de las decenas ha de producir un número exacto de centenas, 16 no podrá formar parte de este cuadrado y por consiguiente se separa del resto del número.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{56.85.16} = 754 & \\ 49 & \\ \hline 785 & 145 \times 5 \\ 6016 & 1504 \times 4 \\ 0000 & \end{array}$$

Ahora bien, si se busca la raiz del mayor cuadrado contenido en 5685, considerándolo como unidades simples, se tendrá el número de decenas de la raiz buscada. En efecto, sea a la raiz del mayor cuadrado contenido en 5685; es claro que la raiz pedida tendrá por lo menos un número a de decenas, porque si a^2 se puede restar de 5685, $a^2 \times 100$ se podrá restar de 568500 y con mas razon de 568516. Por otra parte la raiz no puede tener $(a+1)$ decenas; pues $(a+1)^2$ es mayor que 5685, en una unidad cuando menos y por tanto $(a+1)^2 \times 100$ debe ser mayor que 568500 al menos en una centena, y será por consiguiente mayor que 568516. Luego la raiz buscada se compone de a decenas mas un cierto número de unidades.

Queda pues reducida la cuestion á estraer la raiz cuadrada de 5685 considerado como unidades simples. Esta operacion, que ya se sabe efectuar por lo dicho en el caso anterior, da 75 por raiz y 60 por resíduo.

Luego el número de decenas de la raiz buscada es 75; si al lado del resíduo 60 se baja la seccion siguiente 16 que se habia separado, claro es, que 6016 contendrá el duplo de las decenas por las unidades, mas el cuadrado de las unidades, y por iguales raciocinios que en el caso anterior, se llega á determinar la cifra de las unidades que es 4; por tanto la raiz buscada es 754.

Si el número tuviese mas de seis cifras se seguirá una marcha completamente análoga.

Cómo se hace la prueba de la estraccion de la raiz cuadrada?

Elevando la raiz al cuadrado, y viendo si este, mas el resíduo, dan el número propuesto.

El resíduo de la raiz cuadrada de un número entero es menor que el duplo de la raiz mas 1.

DEMOST. LXXXV. Sea N un número cuya raiz cuadrada entera es a y el resíduo r, digo que debe ser $r < 2a + 1$.

En efecto, ya se sabe que se tiene

$$N = a^2 + r.$$

Si fuese $r = 2a + 1$ se tendria

$$N = a^2 + 2a + 1$$

pero como tambien se tiene

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

se sigue que

$$N = (a + 1)^2$$

y por consiguiente

$$\sqrt{N} = a + 1$$

contra lo que se habia supuesto. Por consiguiente, no se puede tener $r = 2a + 1$, y es claro que con menos razon podrá ser $r > 2a + 1$. Luego $r < 2a + 1$.

Cómo se estrae la raiz cuadrada de un quebrado cuyos dos términos la tienen exacta?

Estrayendo la de cada uno de sus términos (LXXX).

Y si el denominador es el único que tiene raiz exacta?

Se estrae la raiz entera del numerador y la del denominador exacta, y se parten despues (LXXXI).

Y cuando ninguno de los términos son cuadrados perfectos?

Se multiplican sus dos términos por el denominador, con lo cual se obtiene un quebrado que está comprendido en la regla anterior.

Cómo se estrae la raiz cuadrada de un número con una aproximacion determinada?

Se multiplica el número propuestro por el cuadrado del denominador de la aproximacion; se estrae la raiz cuadrada del mayor cuadrado contenido en el producto y á esta raiz se le pone por denominador el mismo de la aproximacion (LXXXII).

Cuando el quebrado que marca la aproximacion sea una fraccion decimal, el multiplicar el número propuesto por el cuadrado de dicho denominador equivale á agregar tantas veces dos ceros como cifras decimales se pidan en la raiz ó como ceros siguen á la unidad en el denominador. Para la agregacion de estos ceros basta colocar dos de ellos á la derecha de cada resíduo.

Cuando el número propuesto sea una fraccion comun ó decimal se hace la misma operacion, estrayendo la raiz de los enteros contenidos en el antedicho producto. Si el número es un quebrado comun y la aproximacion es por decimales se reduce el quebrado propuesto á decimal, obteniendo doble número de cifras del que se pide en la raiz, y despues se estrae la raiz cuadrada de esta fraccion decimal con la aproximacion pedida, lo cual claramente se ve que entra en la regla general dada anteriormente.

CAPÍTULO III.

FORMACION DEL CUBO Y ESTRACCION DE LA RAIZ CÚBICA.

Qué productos entran en el cubo de un número compuesto de dos partes ó de la suma de dos números?

Cuatro, que son: el cubo de la primera, triplo del cuadrado de la primera por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda y cubo de la segunda.

DEMOST. LXXXVI. Sea $a+b$ un número compuesto de dos partes, el cual se quiere elevar al cubo; y como para esto hay que multiplicar dicho número por su cuadrado resulta

$$\begin{array}{l} a^2+2ab\ +b^2 \\ a\ +b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

Luego $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, que era lo que se queria demostrar.

COROLARIOS. 1.° Si el número dado estuviese descompuesto en decenas y unidades, siendo a las decenas y b las unidades, podriamos decir que *el cubo de un número formado de decenas y unidades consta: del cubo de las decenas, triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y cubo de las unidades.*

2.° *La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor mas uno.*

En efecto, sean a y $(a+1)$ dos números enteros consecutivos; segun se ha demostrado se tiene

$$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$$

y restando a^3 de ambos miembros, resulta

$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$$

que era lo que se queria demostrar.

Cómo se forman los cubos de los números 10, 100, 1000, etc.?

Agregando á la unidad triple número de ceros de los que tiene la raiz.

Cómo se estrae la raiz cúbica de un número entero?

Se divide el número en secciones de tres cifras, procediendo de derecha á izquierda. Se estrae la raiz cúbica del mayor cubo contenido en la primera seccion de la izquierda y se resta de ella el cubo de la cifra que se encuentre. Al lado del resíduo se baja la seccion siguiente, se separan con un punto las dos últimas cifras, y lo que quede á la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la raiz encontrada, con lo cual se obtiene la segunda cifra de la raiz. Se multiplica esta segunda nota por el divisor y se tendrá el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades. Se forma el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y el cubo de las unidades, y estos productos se colocan debajo del primero adelantando cada uno de ellos un lugar mas hácia la derecha. Se suman los tres y el resultado se resta del dividendo incluyendo las dos cifras separadas. Al lado del resíduo que se obtenga se baja la seccion siguiente, operando con ella como con la anterior, y así en este órden hasta haberlas apurado todas.

Demost. LXXXVII. Pueden presentarse tres casos, que son: 1.º que el número propuesto tenga menos de cuatro cifras; 2.º que tenga cuatro, cinco ó seis cifras; 3.º que tenga mas de seis cifras.

1.er *caso*. Si el número tiene menos de cuatro cifras se hallará su raiz cúbica con solo saber los cubos de los números dígitos.

2.º *caso*. Sea un número 24389; como este número es mayor que 1000 y menor que 1000000 será tambien

$$\sqrt[3]{1000} < \sqrt[3]{24389} < \sqrt[3]{1000000}$$

ó bien

$$10 < \sqrt[3]{24389} < 100$$

esto nos dice que la raiz buscada ha de constar de dos cifras ó sea de decenas y unidades; pero como todo número es el cubo de su raiz cúbica, segun la definicion, tendremos que el número propuesto 24389 contendrá (LXXXVI) el cubo de las decenas de la raiz mas el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, mas el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de las unidades. Pero el cubo de las decenas ha de producir millares, y por consiguiente las tres cifras de la derecha del número propuesto, que componen 389, no pueden formar parte de dicho cubo, por lo cual se las separa con un punto; de este modo los 24 millares contendrán el cubo de la cifra de las decenas de la raiz cúbica buscada y además los millares que provengan de las demás partes del cubo. La raiz cúbica de 24 es 2, que es exactamente la cifra de las decenas, pues siendo $20^3 = 8000$ y $30^3 = 27000$, y estando el número propuesto comprendido entre estos dos cubos su raiz será mayor que 20 y menor que 30. Ahora bien, si del número propuesto restamos 20^3

$\sqrt[3]{24.389} = 29$	
8 000	
16389	12
16389	9
0	
108	
486	
729	
16389	

ú 8000 (bien se ve que se puede restar 2^3 ú 8 de la 1.ª seccion y bajar al lado del resíduo la seccion siguiente) el resíduo 16389 contendrá el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y el cubo de las unidades; y como el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades debe producir un número exacto de centenas, las dos cifras de la derecha que componen 89, no podrán formar parte de este triplo producto, por cuya razon se separan con un punto, y entonces 163 contendrá el triplo del cuadrado de la cifra de las decenas por las unidades y además todas las centenas que dén las otras dos partes del cubo. De aquí se sigue que si se divide 163 por el triplo del cuadrado de la cifra de las decenas, que es 12, el cuociente 9 será las unidades ó un número mayor en razon á las centenas que en el número 163 existen procedentes de las dos últimas partes del cubo.

Para comprobar esta cifra se forman las tres partes del cubo y si su suma no se puede restar de 16389 será demasiado crecida la cifra que se ha supuesto para unidades. En el ejemplo que nos ocupa si decimos 163 entre 12 á 9 tendremos que formar

$$3 \times 20^2 \times 9 + 3 \times 20 \times 9^2 + 9^3$$

y se tiene

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3 \times 20^2 \times 9 & = & 10800 & \ldots & 3 \times 2^2 \times 9 & = & 108 \\
3 \times 20 \times 9^2 & = & 4860 & \ldots & 3 \times 2 \times 9^2 & = & 486 \\
9^3 & = & 729 & \ldots & 9^3 & = & 729 \\
3 \times 20^2 \times 9 + 3 \times 20 \times 9^2 + 9^3 & = & 16389 & \ldots & & & 16389
\end{array}$$

Cuyo resultado es igual al dividendo empleado y esto nos dice que 29 es la raiz cúbica exacta del número propuesto.

Los ceros que se han escrito son inútiles y basta formar los productos con el valor absoluto de cada cifra, corriendo cada uno un lugar á la derecha con relacion al precedente como se ve al lado.

Si la última operacion dejase algun resíduo, esto nos probaria que el número propuesto no seria cubo exacto de 29, y dicho resíduo indicaria el número de unidades en que 24389 escederia al cubo de 29.

3.^{er} *caso.* Si el número propuesto tuviese mas de seis cifras se haria un razonamiento análogo al que se efectuó en el 3.^{er} caso de la demostracion LXXXIV, salvo las alteraciones consiguientes.

Cómo se hace la prueba de la estraccion de la raiz cúbica?

Elevando la raiz al cubo y viendo si este mas el resíduo dan el número propuesto.

El resíduo de la raiz cúbica de un número entero es menor que el triplo del cuadrado de la raiz mas el triplo de la misma mas 1.

DEMOST. LXXXVIII. Sea N un número cuya raiz cúbica entera es a y el resíduo r; digo que debe ser

$$r < 3a^2 + 3a + 1.$$

En efecto, ya se sabe que se tiene

$$N = a^3 + r.$$

Si fuese $r = 3a^2 + 3a + 1$ se tendria

$$N = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

pero como tambien se tiene

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

se sigue que

$$N = (a + 1)^3$$

y por consiguiente

$$\sqrt[3]{N} = a + 1$$

contra lo que se habia supuesto. Luego no se puede tener

$$r = 3a^2 + 3a + 1$$

y es claro que con menos razon podrá ser

$$r > 3a^2 + 3a + 1.$$

Por consiguiente

$$r < 3a^2 + 3a + 1.$$

Cómo se estrae la raiz cúbica de un quebrado cuyos dos términos la tienen exacta?

Estrayendo la de cada uno de sus términos (LXXX).

Y si el denominador es el único que tiene raiz cúbica exacta?

Se estrae la del numerador aproximada y la del denominador exacta y se parten despues (LXXXI).

Y cuando ninguno de los dos términos son cubos perfectos?

Se multiplican sus dos términos por el cuadrado del denominador, con lo cual se obtiene un quebrado que está comprendido en la regla anterior.

Cómo se estrae la raiz cúbica de un número con una aproximacion determinada?

Se multiplica el número propuesto por el cubo del denominador de la aproximacion; se estrae la raiz cúbica del mayor cubo contenido en el producto y á esta raiz se da por denominador el de la aproximacion (LXXXII).

Cuando el quebrado que marca la aproximacion es una fraccion decimal, el multiplicar el número propuesto por el cubo del denominador de la aproximacion equivale á agregar tantas veces tres ceros como cifras decimales se pidan en la raiz ó como ceros sigan á la unidad en el denominador. Para la agregacion de estos ceros basta colocar *tres* de ellos á la derecha de cada resíduo.

Cuando el número propuesto sea una fraccion comun ó decimal, se hace la misma operacion, estrayendo la raiz cúbica de los enteros contenidos en el antedicho producto. Si el número es un quebrado comun y la aproximacion es por decimales se reduce el quebrado propuesto á decimal, obteniendo triple número de cifras del que se pide en la raiz y despues se estrae la raiz cúbica de esta fraccion decimal con la aproximacion pedida.

Claramente se ve que todo lo dicho entra en la regla general dada anteriormente.

LIBRO IV.

DE LAS APLICACIONES DE LA ARITMÉTICA.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LAS EQUIDIFERENCIAS Y PROPORCIONES.

Qué es *razon aritmética* ó por *diferencia?*

La comparacion que se hace de dos números de igual especie para averiguar en lo que el uno escede al otro.

Qué es *razon geométrica* ó por *cuociente?*

La comparacion que se hace de dos números de igual especie para indagar las veces que el uno contiene al otro. A este número es al que comunmente se da el nombre de *razon* ó *relacion*, llamándole simplemente diferencia cuando la razon es *aritmética*.

Qué nombre se da á los números que forman una razon, bien sea esta por diferencia ó por cuociente?

Al primero *antecedente* y al segundo *consecuente*.

Qué es *equidiferencia?*

La igualdad de dos razones aritméticas ó la igualdad de dos diferencias.

Cómo se representa en la escritura una equidiferencia?

De dos modos; bien en forma de ecuacion ó igualdad, ó bien separando con un punto los términos de cada razon y con dos la primera de la segunda, de este modo:

$$8-6=7-5 \text{ ó } 8\,.\,6:7\,.\,5.$$

Esta última se lee: 8 *es á* 6 *como* 7 *es á* 5.

Qué nombre toman los términos de una equidiferencia?

El primero y cuarto se llaman *estremos* y el segundo y tercero *medios*.

Cuál es la propiedad fundamental de toda equidiferencia?

Que la suma de estremos es igual á la de medios.

Demost. LXXXIX. Sea la equidiferencia

$$a.b\dot{:}c.d$$

que equivale á

$$a-b=c-d.$$

Si agregamos á los dos miembros de esta igualdad los dos consecuentes tendremos

$$a-b+b+d=c-d+b+d$$

y puesto que $-b+b$ en el primer miembro y $-d+d$ en el segundo son cantidades que se destruyen entre sí, quedará la última reducida á

$$a+d=c+b$$

que era lo que se queria demostrar.

Reciprocamente. Si hay dos sumas iguales se puede formar una equidiferencia.

Supongamos que se tiene

$$a+d=c+b.$$

Si restamos de los dos miembros b y d resulta

$$a+d-b-d=c+b-b-d$$

de donde se obtiene

$$a-b=c-d.$$

Cuando en una equidiferencia no se conoce un estremo ó un medio ¿cómo se encuentra?

Si el término desconocido es un estremo, este será igual á la suma de los términos medios menos el estremo conocido; y si es un medio será igual á la suma de estremos menos el medio conocido.

Demost. XC. Para demostrar la primera parte consideremos la equidiferencia

$$a.b\dot{:}c.x$$

en la que suponemos que x es el término desconocido. Segun la propiedad fundamental (LXXXIX) tendremos

$$a+x=b+c$$

y restando a de los dos miembros

$$x=b+c-a$$

con lo que queda probada la primera parte.

Para probar la segunda consideremos la equidiferencia

$$a.x:c.d$$

de donde

$$x+c=a+d$$

y restando c de los dos miembros

$$x=a+d-c$$

lo que demuestra la segunda parte.

Qué es equidiferencia *contínua?*

Aquella en que los términos medios son iguales.

Cómo se espresan en la escritura estas equidiferencias?

Anteponiéndoles este signo ÷ que se lee *como*, y escribiendo los dos estremos y uno de los medios, separando un término de otro con un punto en esta forma

$$\div 8.6.4$$

que equivale á

$$8.6:6.4.$$

Qué propiedad tienen las equidiferencias contínuas?

Que la suma de los estremos es igual al duplo del término medio.

Demost. XCI. Sea la equidiferencia contínua

$$\div a.x.b$$

ó bien

$$a.x:x.b.$$

Segun la demostracion LXXXIX resulta

$$a+b=x+x$$

ó bien

$$a+b=2x$$

que era lo que se queria demostrar.

Cuando en la equidiferencia contínua no se conoce un estremo ó el término medio ¿cómo se encuentra?

Si es uno de los estremos se dupla el término medio y se le resta el estremo conocido, y si es el término medio el que se quiere hallar, se suman los estremos y á esta suma se saca la mitad.

Demost. XCII. Sea la equidiferencia contínua

$$\div a.b.x.$$

Suponiendo que es el término x el que queremos hallar, tendremos, segun se acaba de ver,

$$a+x=2b$$

y restando a de los dos miembros

$$x=2b-a$$

con lo que queda demostrada la primera parte.

Para demostrar la segunda parte, sea la equidiferencia contínua

$$\div a.x.b$$

en la cual se quiere hallar el término medio, x.

Se tiene, segun se sabe,

$$2x=a+b$$

y dividiendo por 2 los dos miembros se obtiene

$$x=\frac{a+b}{2}$$

que era lo que se queria demostrar.

De esto se deduce que para hallar un medio proporcional aritmético entre dos números, ó el medio diferencial de dichos números, se suman estos y su mitad será el número buscado.

Qué es *proporcion?*

La igualdad de dos razones por cuociente; y como la razon de dos números no es otra cosa que el cuociente que resulta de la division de dichos números, y por otra parte un quebrado representa la division del numerador por el denominador, se infiere que una proporcion no es otra cosa que la igualdad de dos quebrados.

Cómo se escribe una proporcion?

De dos modos: ó igualando los quebrados que se pueden formar con cada una de las razones, ó bien los dos términos de cada razon se separan con dos puntos, y la primera razon de la segunda con cuatro, de este modo:

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3}, \text{ ó bien } 8:4::6:3$$

que se enuncian 8 *es á* 4 *como* 6 *es á* 3.

Qué nombres toman los términos de una proporcion?

Se llaman *estremos* el primero y cuarto, y *medios* el segundo y tercero.

Cuál es la propiedad fundamental de las proporciones?

Que el producto de los términos estremos es igual al de los medios.

DEMOST. XCIII. Sea la proporcion

$$a:b::c:d$$

que segun se sabe equivale á

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $b \times d$

$$\frac{a \times b \times d}{b}=\frac{c \times b \times d}{d}$$

y reduciendo

$$a \times d = b \times c$$

que era lo que se queria demostrar.

RECÍPROCAMENTE. *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos hay proporcion entre ellos, siendo estremos de la proporcion los factores de un producto y medios los factores del otro.*

Sea por ejemplo

$$a \times d = b \times c.$$

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por $b \times d$ resulta

$$\frac{a \times d}{b \times d}=\frac{b \times c}{b \times d}$$

y simplificando

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ó bien

$$a:b::c:d.$$

Cuando en una proporcion no se conoce un medio ó un estremo ¿cómo se halla su valor?

Si el término desconocido es un estremo, este será igual al producto de los medios dividido por el estremo conocido; y si el que se busca es uno de los medios será igual al producto de los estremos dividido por el medio conocido.

Demost. XCIV. Para demostrar la primera parte consideremos la proporcion

$$a:b::c:x$$

en la cual se quiere hallar el término x.

Segun la propiedad fundamental se tiene

$$a\times x=b\times c$$

y dividiendo por a los dos miembros resulta

$$x=\frac{b\times c}{a}$$

con lo que queda demostrada la primera parte.

Para demostrar la segunda consideremos la proporcion

$$a:x::c:d$$

en la cual se quiere hallar el término x.

Se tiene

$$x\times c=a\times d$$

y dividiendo por c

$$x=\frac{a\times d}{c}$$

lo que demuestra la segunda parte.

Qué es proporcion *contínua?*

Aquella cuyos términos medios son iguales.

Cómo se escriben estas proporciones?

Anteponiéndoles el signo ÷ que se lee *como*, y escribiendo los dos estremos y un medio separados cada uno de ellos con dos puntos, en esta forma

$$\div 8 : 4 : 2$$

que equivale á

$$8 : 4 :: 4 : 2.$$

Qué propiedad tienen las proporciones contínuas?

Que el producto de los estremos es igual al cuadrado del termino medio.

DEMOST. XCV. Sea la proporcion contínua

$$\div a : b : c$$

lo cual equivale á

$$a : b :: b : c.$$

Segun la propiedad fundamental (XCIV) se tiene

$$b \times b = a \times c$$

ó lo que es lo mismo

$$b^2 = a \times c$$

que era lo que se queria demostrar.

Cuando en una proporcion contínua no se conoce el término medio ó uno de los estremos ¿cómo se podrá hallar?

Si es el término medio el que no se conoce será igual á la raiz cuadrada del producto de los estremos; y si el término desconocido es un estremo será igual al cuadrado del término medio dividido por el otro estremo.

DEMOST. XCVI. Sea la proporcion contínua

$$\div a : x : b.$$

Se tiene segun se acaba de ver

$$x^2 = a \times b$$

y por consiguiente

$$x = \sqrt{a \times b}$$

con lo cual queda demostrada la primera parte.

Dedúcese de aquí que para hallar un medio proporcional entre dos números dados no hay mas que multiplicar dichos dos números y estraer la raiz cuadrada de su producto.

Para demostrar la segunda parte consideremos la proporcion contínua

$$\div a : b : x$$

en la cual no se conoce el término x. Segun se sabe se tiene

$$b^2 = a \times x$$

y dividiendo por a los dos miembros

$$x = \frac{b^2}{a}$$

que era lo que se queria demostrar.

En toda proporcion se puede: 1.° Poner los estremos ó los medios uno en lugar de otro, lo cual se llama *comparar alternando*. 2.° Poner los estremos en lugar de los medios y vice-versa, lo que se llama *comparar invirtiendo*. 3.° Multiplicar ó dividir por un mismo número un estremo y un medio, sin que los nuevos números dejen de formar proporcion.

DEMOST. XCVII. Porque siempre se conserva el producto de estremos igual al de medios.

Si dos proporciones tienen una razon comun, las otras dos razones forman proporcion.

DEMOST. XCVIII. Sean las proporciones

$$a : b :: c : d \quad \text{y} \quad a : b :: m : n$$

de las cuales se deduce

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

y como dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí (axioma 6.°, pág. 5) se tendrá

$$\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

ó bien

$$c : d :: m : n.$$

Si los antecedentes ó los consecuentes de dos proporciones son respectivamente iguales, hay proporcion entre los otros cuatro términos.

DEMOST. XCIX. Sean las dos proporciones

$$a:b::c:d \quad \text{y} \quad a:m::c:n$$

cuyos antecedentes son iguales. Alternando los medios resulta

$$a:c::b:d \quad \text{y} \quad a:c::m:n$$

de donde se deduce

$$b:d::m:n.$$

Lo mismo se haria la demostracion suponiendo que fuesen iguales los consecuentes.

Si se multiplican ordenadamente los términos de varias proporciones los productos forman proporcion.

DEMOST. C. Sean las proporciones

$$a:b::c:d$$
$$a':b'::c':d'$$
$$a'':b''::c'':d''$$

las cuales equivalen á

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$$
$$\frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$$

Multiplicando estas ecuaciones miembro á miembro

$$\frac{a\times a'\times a''}{b\times b'\times b''}=\frac{c\times c'\times c''}{d\times d'\times d''}$$

ó bien

$$a\times a'\times a'':b\times b'\times b''::c\times c'\times c'':d\times d'\times d''$$

que era lo que se queria demostrar.

Las potencias ó raices iguales de los cuatro términos de una proporcion forman tambien proporcion.

DEMOST. CI. Sea la proporcion

$$a:b::c:d$$

que escrita bajo la forma de quebrado da

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

elevando á una misma potencia m los dos miembros de esta igualdad (axioma 7.°, pág. 5) será

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{c}{d}\right)^m$$

y segun se sabe (LXXV)

$$\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$$

y por consiguiente

$$a^m : b^m :: c^m : d^m.$$

Por otra parte, estrayendo de los dos miembros de la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ la raiz m, se tiene

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$$

y por tanto (LXXX)

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$$

de donde

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

En toda proporcion la suma de los dos primeros términos es á la de los dos últimos como el 1.° *al* 3.° *ó como el* 2.° *al* 4.°

DEMOST. CII. Sea la proporcion

$$a : b :: c : d$$

de la cual se deduce

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Sumando 1 á los dos miembros se tiene

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

é incorporando

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

ó bien

$$a+b : b :: c+d : d$$

y alternando los medios

$$a+b : c+d :: b : d$$

tambien se sacaria y demostraria muy fácilmente

$$a+b:c+d::a:c.$$

La diferencia de los dos primeros términos es á la de los dos últimos como el 1.° al 3.° ó como el 2.° al 4.°

DEMOST. CIII. Sea la proporcion

$$a:b::c:d$$

que da

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Restando 1 de los dos miembros se tiene

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

é incorporando

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Escribiéndola en forma de proporcion y alternando despues los medios se obtiene

$$a-b:c-d::b:d.$$

Tambien se obtendria

$$a-b:c-d::a:c.$$

En toda proporcion la suma de los dos primeros términos es á su diferencia como la suma de los dos últimos es á su diferencia.

DEMOST. CIV. Sea la proporcion

$$a:b::c:d$$

de la cual se deduce (CII)

$$a+b:c+d::a:c$$

y tambien (CIII)

$$a-b:c-d::a:c.$$

Por consiguiente se tendrá (XCVIII)

$$a+b:a-b::c+d:c-d.$$

En toda proporcion 1.° *La suma de antecedentes es á la de los consecuentes como un antecedente es á su consecuente.* 2.° *La diferencia de antecedentes es á la de los consecuentes como un antecedente es á su consecuente.* 3.° *La suma de antecedentes es á su diferencia como la suma de consecuentes es á su diferencia*

DEMOST. CV. Sea la proporcion

$$a:b::c:d$$

alternando los medios resulta

$$a:c::b:d.$$

Aplicando á esta las propiedades demostradas (CII, CIII y CIV) tendremos

$$a+c:b+d::a:b \text{ ó } ::c:d$$
$$a-c:b-d::a:b \text{ ó } ::c:d$$
$$a+c:a-c::b+d:b-d.$$

En toda série de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la de todos los consecuentes como un antecedente es á su consecuente.

DEMOST. CVI. Supongamos una série de razones iguales

$$a:b::c:d::e:f::g:h$$

lo que equivale á

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}.$$

Si hacemos $\frac{a}{b}=q$, todas las demás fracciones serán tambien iguales á q puesto que lo son á $\frac{a}{b}$, y se tendrá

$$a=b\times q$$
$$c=d\times q$$
$$e=f\times q$$
$$g=h\times q.$$

Sumando estas ecuaciones miembro á miembro resulta

$$a+c+e+g=q(b+d+f+h)$$

y dividiendo los dos miembros por $b+d+f+h$ se obtiene

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=q$$

por ser $q=\frac{a}{b}$ se tendrá

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{a}{b}$$

ó bien

$$a+c+e+g:b+d+f+h::a:b$$

que era lo que se queria demostrar.

CAPÍTULO II.

DE LA REGLA DE TRES.

Qué es *regla de tres simple?*

La que se aplica á todas las cuestiones en que dos cantidades de una misma especie están en proporcion con otras dos tambien de igual especie entre sí, siendo una de estas incógnita.

A qué se llaman *datos?*

A las dos cantidades conôcidas de una misma especie.

Y *resultados?*

A las otras dos cantidades que completan la proporcion una de las cuales es la incógnita.

Cuándo es *directa* la regla?

Cuando aumentando ó disminuyendo los datos aumentan ó disminuyen los resultados.

Y cuándo es *inversa?*

Cuando aumentando los datos disminuyen los resultados ó disminuyendo los datos aumentan los resultados.

Cómo se resuelve la directa?

Diciendo: dato del resultado conocido es al dato del resultado incógnito como el resultado conocido es al incógnito, y se busca el cuarto término.

Demost. CVII. Sea r el resultado conocido, r' el incógnito y d y d' sus respectivos datos.

Siendo directa la regla los resultados r, r' aumentarán en proporcion de los datos d, d'.

Por consiguiente tomando un dato dos, tres.... veces mayor ó menor se obtendrá un resultado dos, tres.... veces mayor ó menor. Luego si el dato d produce r, dividiendo uno y otro por d resultará que el dato 1 producirá $\frac{r}{d}$; y multiplicando estos por d' se tendrá que el dato d' producirá $\frac{r}{d}\times d'$ ó $\frac{r\times d'}{d}$; pero como por hipótesis d' produce r' se tendrá

$$r'=\frac{r\times d'}{d}$$

de donde multiplicando por d

$$r' \times d = r \times d'$$

y segun la recíproca de la demostracion (XCIII)

$$d : d' :: r : r'.$$

Cómo se resuelve la inversa?

Diciendo: dato del resultado incógnito es al dato del resultado conocido como el resultado conocido es al incógnito, y se busca el cuarto término de esta proporcion.

Demost. CVIII. Sea r el resultado conocido, r' el incógnito, d, d' sus respectivos datos.

Siendo inversa la regla los resultados aumentarán al par que disminuyan los datos; esto es, que si se toma un dato dos, tres.... veces menor ó mayor el resultado que se obtenga será dos, tres.... veces mayor ó menor. Luego si el dato d produce r, el dato 1 produce $r \times d$ y el dato d' producirá $\frac{r \times d}{d'}$; pero por hipótesis d' produce r' luego

$$r' = \frac{r \times d}{d'}$$

de donde multiplicando por d'

$$r' \times d' = r \times d$$

y de aquí

$$d' : d :: r : r'$$

que era lo que se queria demostrar.

Qué es regla de tres compuesta?

Aquella en que cada resultado depende de mas de un dato.

Cómo se resuelve la regla de tres compuesta?

Se forma de cada dos datos de igual especie una razon que deberá invertirse si aquellos datos son inversos con los resultados; se multiplican dichas razones y su producto se compara con los resultados; quedando reducida de este modo á una simple proporcion.

Demost. CIX. Sea R el resultado conocido que supondremos dependiente de los datos D, d; R' el resultado incógnito, y D', d' sus datos. Supongamos que los datos $\left\{\begin{matrix} D, D' \\ d, d' \end{matrix}\right\}$ están en razon $\left\{\begin{matrix} \text{directa} \\ \text{inversa} \end{matrix}\right\}$ con los resultados.

Esta operacion se acostumbra poner bajo la forma siguiente

$$\begin{array}{l} D\text{——}d\text{——}R \\ D'\text{——}d'\text{——}R' \\ \hline \end{array}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} D : D' \\ d' : d \end{array}\right\} :: R : R'$$

$$R' = \frac{D' \times d \times R}{D \times d'}.$$

Este es el resultado que se busca.

En efecto, hallemos el resultado r correspondiente á unos datos D', d y se tendrá

$$\begin{array}{l} D\text{—}d\text{—}R \\ D'\text{—}d\text{—}r. \end{array}$$

Como los resultados R, r dependen de un mismo dato d podremos hacer abstraccion de este y será (CVII)

$$D : D' :: R : r. \ . \ . \ . \ (1)$$

Pero como los resultados r, R' dependen tambien de un mismo dato D' podemos prescindir de él y se tendrá (CVIII)

$$d' : d :: r : R' \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Multiplicando ordenadamente los términos de las dos proporciones (1) y (2) resulta

$$D \times d' : D' \times d :: R \times r : r \times R'$$

y dividiendo por r los dos términos de la segunda razon (XCVII, 3.º) se obtiene

$$D \times d' : D' \times d :: R : R'$$

de donde

$$R' = \frac{D' \times d \times R}{D \times d'}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

CAPÍTULO III.

DE LA REGLA DE COMPAÑÍA.

Qué es *regla de compañía?*

La que enseña á dividir la ganancia ó pérdida de un fondo en proporcion con los capitales de los asociados.

En qué principios se funda la regla de compañía?

En dos: 1.° Las ganancias ó pérdidas de dos capitales que están un mismo tiempo en la sociedad son proporcionales á los capitales. (Este principio es evidente por sí mismo).

2.° Las ganancias ó pérdidas de un capital son proporcionales á los tiempos que dicho capital está en la sociedad. (Este principio se admite como cierto, aunque no lo es en realidad).

De estos dos principios se deduce que las ganancias ó pérdidas de dos capitales diferentes que están distintos tiempos en la sociedad son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.

Demost. CX. Sean C y C' dos capitales, T y T' los tiempos respectivos que han permanecido en fondo y G y G' las ganancias ó pérdidas que han producido. Sea además g la ganancia ó pérdida que produciria el capital C' en el tiempo T.

En virtud del primer principio se tendrá

$$C:C'::G:g$$

y en virtud del segundo

$$T:T'::g:G'$$

de donde se deduce

$$C\times T:C'\times T'::G\times g:g\times G'$$

ó dividiendo por g los dos términos de la segunda razon

$$C\times T:C'\times T'::G:G'.$$

En cuántas clases se divide la regla de compañía?

En dos: simple y compuesta. La primera es aquella en que los capitales de los asociados han permanecido el mismo tiempo en fondo, y la segunda aquella en que dichos capitales no han permanecido el mismo tiempo en la asociacion.

Cómo se resuelve la regla de compañía simple?

Formando esta proporcion: Fondo total es á la totalidad de la ganancia ó pérdida como el capital de cada asociado es á la ganancia ó pérdida que le corresponde. (Esta regla es evidente en virtud del 1.er principio).

¿Cómo se resuelve la regla de compañía con tiempo?

Se multiplica el capital de cada asociado por el tiempo que ha estado en la compañía: se consideran estos productos como si fuesen los capitales y para cada uno de ellos se forma la misma proporcion que en la regla de compañía simple.

Demost. CXI. Sean C, C', C'' tres capitales, T, T', T'' los tiempos que han permanecido en fondo, G la ganancia ó pérdida total y g, g', g'' las respectivas ganancias parciales. Es evidente que se tiene (CX)

$$C\times T:g::C'\times T':g'::C''\times T'':g''$$

de donde se deduce

$$C\times T+C'\times T'+C''\times T'':G::C\times T:g$$
$$C\times T+C'\times T'+C''\times T'':G::C'\times T':g'$$
$$C\times T+C'\times T'+C''\times T'':G::C''\times T'':g''.$$

CAPÍTULO IV.

DE LA REGLA DE INTERÉS SIMPLE.

Qué es regla de *interés simple?*

La que tiene por objeto hallar el premio que debe percibirse por una suma de dinero dada á préstamo bajo ciertas condiciones, ó lo que es lo mismo el rédito de un *capital* prestado.

Cómo se estipula este rédito?

Designando el tanto por ciento, que es la cantidad que debe redituar al año una suma de cien unidades, y suponiendo que sea 5 se escribe así 5 p. $\frac{o}{o}$

Cómo se resuelve esta regla?

Formando esta proporcion: 100 es al tanto por ciento como el capital es al interés ó rédito. (Esta proporcion es evidente en virtud del principio primero de la regla de compañía).

El rédito se busca siempre para un año?

Algunas veces hay que hallarlo para cierto número de meses ó de dias, advirtiendo para este último caso que en el comercio se considera el año de 360 dias.

Cómo se resuelve en estos casos la regla de interés?

Se halla el rédito correspondiente á un año por medio de la proporcion ya citada, y luego se establece otra que es: $\left\{\begin{matrix}12\\360\end{matrix}\right\}$ es al interés en un año como el número de $\left\{\begin{matrix}\text{meses}\\\text{dias}\end{matrix}\right\}$ es al rédito que se busca. (Esta última proporcion es evidente en virtud del segundo principio de la regla de compañía).

Estas dos proporciones que hay que resolver están comprendidas en la siguiente regla. *Para hallar el rédito de un capital multiplíquese este por el número de* $\left\{\begin{matrix}\textit{meses}\\\textit{dias}\end{matrix}\right\}$ *y por el tanto por* 100 *y divídase por* $\left\{\begin{matrix}1200\\36000\end{matrix}\right\}$.

Demost. CXII. Sea C el capital, i el tanto por ciento, R el interés en un año, t el número de meses, y r el interés correspondiente á este tiempo.

Ya se sabe que se tienen que resolver las proporciones

$$100 : i :: C : R$$
$$12 : R :: t : r.$$

Multiplicando estas dos proporciones ordenadamente y dividiendo por R un estremo y un medio, se obtiene

$$1200 : i :: C \times t : r$$

de donde

$$r = \frac{C \times t \times i}{1200}.$$

Si el tiempo estuviese espresado en dias, la segunda proporcion se convertiria, segun se ha dicho, en

$$360 : R :: t : r.$$

Multiplicándola por la primera y suprimiendo el factor R, se obtiene

$$36000 : i :: C \times t : r$$

de donde

$$r = \frac{C \times t \times i}{36000}.$$

CAPÍTULO V.

DE LA REGLA DE DESCUENTO.

Qué es *regla de descuento*?

La que enseña á hallar la disminucion que debe hacerse á una letra ó pagaré cuando se paga antes del término en que cumple, cuya disminucion debe ser el interés que se supone estar acumulado en la letra.

Cómo se resuelve la *regla de descuento*?

Formando la proporcion: 100 mas el tanto del descuento es á 100 como el valor nominal de la letra es á su valor actual; y si se quiere hallar el descuento se dirá: 100 mas el tanto del descuento es á dicho tanto, como el valor nominal de la letra es al descuento.

Demost. CXIII. Sea C el valor nominal de la letra, C' su valor actual, r el descuento, i el tanto por ciento. Como cada 100 unidades de dinero producen i en un año, al cabo de dicho año, las 100 unidades se habrán convertido en $100+i$; recíprocamente, por $100+i$ unidades de la letra se deben tener hoy 100 unidades y por consiguiente será la proporcion

$$100+i:100::C:C'$$

y como esto equivale á descontar i de cada $100+i$ unidades de la letra, será tambien

$$100+i:i::C:r$$

que era lo que se queria demostrar.

Qué debe hacerse cuando el tiempo que falta para el vencimiento de la letra no es justamente un año?

Se halla primero el tanto por ciento del descuento que corresponde al tiempo de que se trata, lo que se consigue por medio de la proporcion: $\left\{\begin{matrix} 12 \\ 360 \end{matrix}\right\}$ es al tanto por ciento del descuento como el número de $\left\{\begin{matrix} \text{meses} \\ \text{dias} \end{matrix}\right\}$ que faltan para que cumpla la letra es al tanto por ciento correspondiente. (Esta proporcion es evidente en vista del segundo principio de la regla de compañía).

Despues se resuelve la misma proporcion que antes empleando el tanto por ciento que se acaba de determinar.

Es este el método que se usa generalmente para el descuento de letras?

No, señor; en el comercio está establecido por el uso el emplear para el descuento el mismo método que se esplicó en la regla de interés.

CAPÍTULO VI.

DE LA REGLA CONJUNTA Y DE LA DE CAMBIO.

Qué es regla *conjunta*?

La que enseña á reducir cantidades de una especie á otra, con el auxilio de varias especies intermedias.

Cómo se resuelve esta regla?

Formando una série de igualdades bajo el órden siguiente: 1.° Que el primer miembro de la primera igualdad sea el término desconocido, y el segundo de la misma la cantidad que se va á reducir.

2.° Que el segundo miembro de la última ecuacion sea de la especie á que se va á reducir la cantidad propuesta.

3.° Que el primer miembro de cada igualdad sea de la misma especie que el segundo de la anterior. Despues no queda mas que hallar el valor de la incógnita que es igual al producto de todos los segundos miembros dividido por el producto de las cantidades conocidas que constituyen los primeros.

La regla conjunta se funda en el teorema siguiente: *Si se multiplican ordenadamente varias equivalencias (como las siguientes: 4 libras=3 duros, 8 duros=7 va-*

ras, 5 varas=3 fanegas), en las que la especie del primer miembro de cada una sea la misma que la del segundo miembro anterior, los productos serán equivalentes, siendo el primer producto de la primera especie y el segundo producto de la última especie.

DEMOST. CXIV. Pueden suponerse dos casos: 1.° que sean dos solas las equivalencias; 2.° que sea cualquiera el número de equivalencias.

1.^{er} *caso.* Sean las dos equivalencias:

$$3^a = 5^b$$
$$6^b = 8^c$$

digo que

$$3 \times 6^a = 5 \times 8^c$$

ó que

$$18^a = 40^c.$$

En efecto, multiplicando los dos miembros de la primera equivalencia por el número abstracto 6, y los dos de la segunda por el número abstracto 5, tendremos

$$18^a = 30^b \qquad 30^b = 40^c$$

luego

$$18^a = 40^c.$$

2.° *caso.* Sean las equivalencias

$$3^a = 4^b$$
$$7^b = 8^c$$
$$14^c = 5^d$$
$$9^d = 22^e$$

digo que

$$3 \times 7 \times 14 \times 9^a = 4 \times 8 \times 5 \times 22^e.$$

En efecto, segun el primer caso, de las dos equivalencias primeras resulta

$$3 \times 7^a = 4 \times 8^c.$$

De esta y la 3.ª resulta, segun el primer caso

$$3 \times 7 \times 14^a = 4 \times 8 \times 5^d.$$

De esta y de la 4.ª resulta asimismo

$$3 \times 7 \times 14 \times 9^a = 4 \times 8 \times 5 \times 22^e.$$

Del mismo modo se continuaria, si hubiera mas equivalencias.

Qué es regla de cambio y cómo se resuelve?

No es otra cosa que una regla conjunta aplicada á la reduccion de monedas de unos paises á otros, y se resuelve del mismo modo que aquella.

CAPÍTULO VII.

DE LA REGLA DE ALIGACION.

Qué es regla de *aligacion?*

La que enseña á hallar el precio medio, ó precio de la mezcla de varias especies, conociendo las cantidades de cada especie que deben entrar en la mezcla, y sus precios respectivos.

Tambien enseña á hallar las cantidades de cada especie que deben entrar en una mezcla, conociendo el precio medio y los de las especies.

Cómo se determina el precio medio cuando se conocen las cantidades y precios de las especies que se mezclan?

Se hallan los valores de las cantidades que se mezclan y la suma, que será el valor de la mezcla, se divide por la suma de las cantidades mezcladas; el cuociente será el valor de una unidad de la mezcla, ó el precio medio.

Cómo se determinan las cantidades que se han de mezclar de cada especie, cuando se conocen sus precios respectivos y el precio medio?

Se halla la diferencia entre cada precio y el precio medio, despues de lo cual queda reducida la operacion á una simple proporcion, puesto que las cantidades que se han de tomar de cada especie están en razon inversa de las diferencias de sus precios al precio medio.

Demost. CXV. Sean p, p', los precios de dos especies que han de mezclarse, P, el precio medio (que evidentemente está comprendido entre aquellos). Para fijar las ideas supondremos $P>p$ $P<p'$; sean además x, y las cantidades respectivas que se han de tomar de cada especie.

Digo que se tiene $x:y::p'-P:P-p$.

En efecto, x unidades de la primera especie al precio p importan

$x \times p$, y al precio P importarán $x \times P$; pero como se tiene $P > p$, es claro que habrá una ganancia espresada por $x \times P - x \times p$ ó bien

$$(P-p) \times x.$$

Las y unidades de la segunda especie al precio p' importan $y \times p'$, y como han de venderse al precio P, se sacará por ellas $y \times P$; pero como se tiene $P < p'$ se ha de tener una pérdida espresada por $y \times p' - y \times P$ ó bien $(p'-P) \times y$.

Ahora bien, como el precio medio ha de ser tal que compense la ganancia y la pérdida, se tendrá

$$(P-p) \times x = (p'-P) \times y$$

de donde se deduce (XCIII, recíprocamente)

$$x : y :: p'-P : P-p.$$

Como esta proporcion contiene dos incógnitas, se ve que la cuestion admite un sin número de soluciones; solo se puede determinar la relacion que debe existir entre las cantidades de cada especie; por lo tanto multiplicando por 2, 3, 4.... etc. cada una de las diferencias $p'-P$, $P-p$ se obtendrán diversas soluciones.

Si se conoce el número de unidades que se ha de tomar de una de las especies, por ejemplo a unidades de la primera, la proporcion anterior se cambiará en

$$a . y :: p'-P : P-p$$

ó bien

$$p'-P : P-p :: a : y$$

proporcion que solo contiene una incógnita y por lo tanto solo se obtiene una solucion.

Si se da préviamente el número de unidades que ha de haber en la mezcla, S por ejemplo, el problema no admitirá tampoco sino una sola solucion.

En efecto, la proposicion demostrada (CII), da

$$x+y : (p'-P)+(P-p) :: x : p'-P$$
$$x+y : (p'-P)+(P-p) :: y : P-p$$

y como se ha de tener $x+y = S$, será tambien

$$S : (p'-P)+(P-p) :: x : p'-P$$
$$S : (p'-P)+(P-p) :: y : P-p$$

ó bien, como es mas usual

$$(p'-P)+(P-p) : S :: p'-P : x$$
$$(p'-P)+(P-p) : S :: P-p : y.$$

LIBRO V.

TEORÍA DE LAS PROGRESIONES Y DE LOS LOGARITMOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LAS PROGRESIONES POR DIFERENCIA.

Qué es *progresion aritmética ó por diferencia?*

Una série de términos que de uno en otro y sin intermision van creciendo ó disminuyendo en una misma cantidad llamada *razon* ó *diferencia.*

Cómo se forma una progresion por diferencia?

Agregando á cada término la razon y se obtendrá el siguiente, continuando del mismo modo hasta el infinito.

Cómo se escribe una progresion por diferencia?

Anteponiéndole el signo ÷ que se lee *como*, y colocando entre cada dos términos un punto que se lee *es á*.

A qué es igual un término cualquiera de una progresion por diferencia?

Al primero mas tantas veces la razon como términos le preceden.

DEMOST. CXVI. Sea la progresion

$$\div a.b.c.d\ .\ .\ .\ .\ .\ k.l.$$

en la cual supondremos que sea r la razon y n el número de términos hasta l inclusive.

Segun la definicion se tiene

$$b=a+r$$
$$c=b+r$$
$$d=c+r$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$l=k+r.$$

Es evidente que aquí resultan $(n-1)$ ecuaciones, que sumadas darán $b+c+d+\ldots\ldots+l=a+b+c\ldots+k+r(n-1)$.

Restando de ambos miembros $b, c, d, \ldots k$, resulta

$$l=a+r\,(n-1)$$

que era lo que se queria demostrar.

Cómo se intercalan entre dos números dados varios medios proporcionales por diferencia?

Se resta del último término el primero y la diferencia se divide por el número de medios que se quieren intercalar mas uno; este cuociente será la razon.

Demost. CXVII. Supongamos que entre a y b se quieren interpolar m medios por diferencia. Si se conociese la razon no habria mas que agregarla al primer término y se obtendria el segundo; despues al segundo y se hallaria el tercero y asi sucesivamente; de suerte que todo consiste en hallar la razon, la cual podemos representar por x. Puesto que entre a y l se quieren interpolar m medios, claro es que antes del término l se tendrán estos m medios mas el término dado a; esto es, que delante de l habrá en todo $(m+1)$ términos; por lo tanto, si suponemos ya formada la progresion, se tendrá (CXVI)

$$l=a+x\,(m+1)$$

y restando a de ambos miembros:

$$l-a=x\,(m+1).$$

Dividiendo los dos miembros por $(m+1)$ se tiene

$$x=\frac{l-a}{m+1}$$

que era lo que se queria demostrar.

Si entre cada dos términos consecutivos de una progresion por diferencia, se interpola un mismo número de medios diferenciales, todas las progresiones parciales que así se formen constituyen una sola progresion.

Demost. CXVIII. En efecto, sea la progresion

$$\div a.b.c.d.e.f\ldots..$$

y sea m el número de medios que se quiere interpolar, primero entre a y b, luego entre b y c, despues entre c y d, etc. La razon de las progresiones parciales será (CXVII)

$$\frac{b-a}{m+1},\ \frac{c-b}{m+1},\ \frac{d-c}{m+1}\ \ldots\ldots$$

Los numeradores ó sean las diferencias $b—a$, $c—b$, $d—c$, no representan otra cosa que la diferencia de cada dos términos consecutivos de la progresion dada; y como esta diferencia ha de ser la razon, que es un número constante, todos los numeradores serán iguales entre sí; y como los denominadores son los mismos, se sigue que todas aquellas cantidades serán tambien iguales; esto es, que todas las progresiones parciales tendrán una misma razon; pero como el último término de cada una es el primero de la siguiente, todas las referidas progresiones vienen á enlazarse y á no formar sino una sola, que era lo que se queria demostrar.

La suma de dos términos cualesquiera tomados á igual distancia de los estremos es igual á la suma de los estremos.

Demost. CXIX. Sean a y l los dos estremos; x é y dos términos tomados á igual distancia de aquellos; esto es que si delante de x hay $(p—1)$ términos, despues de y haya tambien $(p—1)$ términos.

Si consideramos la progresion desde el término a hasta el término x inclusive, tendremos (CXVI) siendo r la razon,

$$x=a+r\,(p-1).$$

Considerando ahora la progresion desde el término y (como primero de ella) hasta el último término l, se tendrá tambien

$$l=y+r\,(p-1).$$

Restando esta ecuacion de la anterior se obtiene

$$x-l=a-y$$

de donde se deduce (LXXXIX)

$$x+y=a+l$$

que era lo que se queria demostrar.

La suma de los términos de una progresion por diferencia es igual á la mitad del producto de la de los estremos multiplicada por el número de términos.

Demost. CXX. Sea la progresion

$$\div a.b.c.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ i.k.l$$

cuyo número de términos representamos por n.

Llamando S la suma tendremos

$$S=a+b+c\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +i+k+l$$

y escrita en órden inverso

$$S = l + k + i \ldots\ldots + c + b + a.$$

Sumando ordenadamente

$$2S = (a+l) + (b+k) + (c+i) \ldots\ldots + (i+c) + (k+b) + (l+a)$$

ó bien (CXIX)

$$2S = (a+l)n$$

y de aquí

$$S = \frac{(a+l)n}{2}.$$

CAPÍTULO II.

DE LAS PROGRESIONES POR CUOCIENTE.

Qué es *progresion geométrica* ó *por cuociente?*

Una série de términos cada uno de los cuales contiene al que le precede ó está contenido en él un cierto número de veces.

Cómo se forma una progresion por cuociente?

Multiplicando cada término por la razon, y se obtendrá el siguiente, continuando del mismo modo hasta el infinito.

Cómo se escribe una progresion por cuociente?

Anteponiéndole el signo $\div\!\!\div$ que se lee *como* y colocando entre cada dos términos dos puntos que se leen *es á.*

A qué es igual un término cualquiera de una progresion por cuociente?

Al primero multiplicado por la razon elevada á la potencia indicada por el número de términos que hayan de precederle.

Demost. CXXI. Sea la progresion

$$\div\!\!\div a : b : c : d : \ldots\ldots : k : l$$

cuya razon suponemos que sea q, y n el número de términos hasta l inclusive.

Segun la definicion se tiene

$$b = a \times q$$
$$c = b \times q$$
$$d = c \times q$$
$$\ldots\ldots$$
$$l = k \times q.$$

Multiplicando miembro á miembro estas $(n-1)$ ecuaciones resultará

$$b\times c\times d\ldots l=a\times b\times c\ldots\times k\times q^{n-1}$$

y suprimiendo los factores comunes $b, c, d\ldots k$ se tiene

$$l=a\times q^{n-1}$$

que era lo que se queria demostrar.

Cómo se intercalan entre dos números dados varios medios proporcionales por cuociente?

Se divide el último por el primero y del cuociente se estrae una raiz de grado igual al número de medios que se quieran interpolar mas uno.

DEMOST. CXXII. Supongamos que entre a y l se quieren interpolar m medios por cuociente. Si se conociese la razon no habria mas que multiplicarla por el primer término y se obtendria el segundo; despues se multiplicaria por el segundo y se obtendria el tercero, y así sucesivamente; de suerte que todo está reducido á determinar la razon, la cual podemos representar por x. Puesto que entre a y l se quieren interpolar m medios, claro es que antes del término l se tendrán estos m medios mas el término dado a; esto es, que delante de l habrá en todo $(m+1)$ términos; por lo tanto, si suponemos ya formada la progresion, se tendrá (CXXI)

$$l=a\times x^{m+1}$$

de donde

$$x^{m+1}=\frac{l}{a}$$

y estrayendo la raiz $m+1$ será

$$x=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$$

que era lo que se queria demostrar.

Si entre cada dos términos consecutivos de una progresion por cuociente se interpola un mismo número de medios proporcionales, todas las progresiones parciales que así se forman constituyen una sola progresion.

DEMOST. CXXIII. En efecto, sea la progresion

$$\div\div a:b:c:d:\ldots\ldots$$

y sea m el número de medios que se quieren interpolar, primero entre a y b, despues entre b y c, luego entre c y d, etc.

La razon de cada una de las progresiones parciales será respectivamente

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \quad \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}} \quad \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}} \ldots\ldots$$

todas estas espresiones son iguales, porque los quebrados $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{c}$ .... no representan otra cosa que la razon de la progresion dada, lo cual da á conocer que todas las progresiones parciales tienen una misma razon; y como el último término de cada una es el primero de la siguiente todas quedarán enlazadas y formarán una sola progresion, que era lo que se queria demostrar.

El producto de dos términos cualesquiera tomados á igual distancia de los estremos es igual al producto de los estremos.

DEMOST. CXXIV. Sean a y l los dos estremos, x é y dos términos cualesquiera tomados á igual distancia de ellos; esto es, que si antes de x hay $(p-1)$ términos, tambien haya $(p-1)$ despues de y: además sea q la razon; es evidente (CXXI) que considerando la progresion desde el termino a hasta el término x, se tendrá

$$x = a \times q^{p-1}$$

y considerándola desde el término y hasta el término l será

$$l = y \times q^{p-1}.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, tendremos

$$\frac{x}{l} = \frac{a}{y}$$

ó bien

$$x : l :: a : y$$

de donde (XCIII)

$$x \times y = a \times l$$

que era lo que se queria demostrar.

El producto de todos los términos de una progresion por cuociente se obtiene multiplicando los dos estremos, elevando este producto á la potencia indicada por el número de términos de la progresion y estrayendo la raiz cuadrada de este resultado.

DEMOST. CXXV. Sea la progresion

$$\div\!\div a:b:c\ldots:i:k:l$$

cuyo número de términos representamos por n.

Llamando P al producto será

$$P=a\times b\times c\ldots\times i\times k\times l$$

y escrito en órden inverso

$$P=l\times k\times i\times\ldots\times c\times b\times a.$$

Multiplicando ordenadamente resulta

$$P^2=(a.l)\times(b.k)\times(c.i)\ldots\times(i.c)\times(k.l)\times(l.a)$$

de donde (CXXIV)

$$P^2=(a.l)^n$$

y de aquí

$$P=\sqrt{(a.l)^n}.$$

La suma de todos los términos de una progresion por cuociente es igual al último multiplicado por la razon menos el primero, dividido por la diferencia que existe entre la razon y la unidad.

DEMOST. CXXVI. Sea la progresion

$$\div\!\div a:b:c:\ldots:i:k:l.$$

Llamando S á la suma se tendrá

$$S=a+b+c+\ldots+i+k+l.$$

Multiplicando ambos miembros por la razon, la cual representaremos por q, y observando que cada término multiplicado por la razon produce el siguiente se tiene

$$Sq=b+c+\ldots+i+k+l+l\times q.$$

Restando de esta igualdad la anterior, y haciendo las reducciones sale

$$Sq-S=lq-a$$

ó bien

$$S(q-1)=lq-a$$

y de aquí

$$S=\frac{lq-a}{q-1}$$

que era lo que se queria demostrar.

CAPÍTULO III.

DE LOS LOGARITMOS.

Qué son *logaritmos?*

Unos números en progresion por diferencia, que corresponden término á término á otros que están en progresion por cuociente; pero siempre con la condicion de que el primer término de la progresion por cuociente sea 1 y el de la progresion por diferencia sea 0.

A qué se da el nombre de *base* de un sistema de *logaritmos?*

Al número que ha servido de razon para formar la progresion geométrica.

Qué propiedades se deducen de la condicion de que en todo sistema de logaritmos el primer término de la progresion por diferencia sea 0 y el de la progresion por cuociente sea 1?

Que el logaritmo de la unidad es siempre *cero* y el de la base es el número que ha servido de razon para formar la progresion por diferencia.

Cuántos sistemas de logaritmos pueden formarse?

Infinitos; porque son infinitas las bases que se pueden elegir para formar la progresion por cuociente, y por consiguiente un mismo número tiene una infinidad de logaritmos.

Cuál es la principal ventaja de los logaritmos?

Convertir algunas de las operaciones de la aritmética en otras menos complicadas.

Cómo se multiplican dos números por medio de los logaritmos?

Se suman sus logaritmos y la suma será el logaritmo del producto; búsquese esta suma entre los logaritmos y el número correspondiente será el producto.

Demost. CXXVII. Sea la progresion por cuociente que ha servido para componer un sistema de logaritmos

$$\div\!\div 1 : \ldots : a : \ldots : b : \ldots c$$

en la cual consideramos únicamente el primer término 1, dos términos cualesquiera a y b y otro término c, tal que entre b y c haya el mismo número de términos que entre 1 y a. Como en este caso a y b serán dos términos equidistantes de los estremos se tendrá (CXXIV)

$$1 \times c = a \times b$$

ó bien

$$c = a \times b.$$

En la progresion por diferencia que ha servido tambien para la formacion del sistema de logaritmos, consideremos los términos correspondientes á los números 1, a, b, c los cuales se pueden representar por 0, $\log a$, $\log b$, $\log c$; y como $\log a$ y $\log b$ serán términos equidistantes de los estremos 0 y $\log c$ se tendrá (CXIX)

$$0 + \log c = \log a + \log b$$

ó bien

$$\log c = \log a + \log b$$

y poniendo en lugar de c su valor $a \times b$, que se halló antes, será

$$\log (a \times b) = \log a + \log b.$$

En general, el logaritmo del producto de varios factores es igual á la suma de los logaritmos de los factores.

En efecto, sea un producto

$$a \times b \times c \times d \ldots\ldots$$

considerando el producto $b \times c \times d \ldots\ldots$ como un solo número tendremos:

$$\log (a.b.c.d. \ldots) = \log (a \times bcd\ldots) = \log a + \log bcd\ldots$$

Del mismo modo tendremos, considerando á $cd\ldots$ como un solo número

$$\log (bcd\ldots) = \log (b \times cd\ldots) = \log b + \log (cd\ldots)$$

Tambien se tiene

$$\log (cd\ldots) = \log c + \log d\ldots.$$

Luego será

$$\log (abcd\ldots) = \log a + \log b + \log c + \log d + \ldots\ldots$$

Cómo se parten dos números por medio de los logaritmos?

Se resta el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, y el resíduo será el logaritmo del cuociente; búsquese este resíduo entre los logaritmos y el número correspondiente será el cuociente que se busca.

DEMOST. CXXVIII. Sea c el cuociente de la division de a por b; será

$$c=\frac{a}{b}$$

de donde

$$a=b\times c$$

y de aquí (CXXVII)

$$log\,a=log\,b+log\,c$$

y por consiguiente

$$log\,c=log\,a-log\,b.$$

Poniendo en lugar de c su valor $\frac{a}{b}$ se tiene

$$log\frac{a}{b}=log\,a-log\,b.$$

Cómo se eleva un número á una potencia?

Se multiplicará su logaritmo por el esponente de la potencia, y el producto será el logaritmo de la potencia; búsquese dicho producto entre los logaritmos y el número correspondiente será la potencia buscada.

DEMOST. CXXIX. Supongamos que se quiere hallar el logaritmo de a^m.

Como se tiene

$$a^m=a\times a\times a\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{hasta } m \text{ veces}$$

será tambien

$$log\,a^m=log\,(a\times a\times a\ .\ .\ .\ .)=log\,a+log\,a+log\,a+\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ \text{hasta } m \text{ veces y por tanto}$$

$$log\,a^m=m\,log\,a.$$

Cómo se estrae una raiz cualquiera de un número?

Se divide el logaritmo de dicho número por el índice de la raiz, y el cuociente será el logaritmo de la raiz; búsquese dicho cuociente entre los logaritmos y el número correspondiente será la raiz que se desea.

DEMOST. CXXX. Supongamos que se quiere hallar el logaritmo de $\sqrt[m]{a}$, y para simplificar haremos

$$\sqrt[m]{a}=b.$$

Elevando á la potencia m resulta

$$a=b^m.$$

Tomando los logaritmos resulta

$$log\, a=m\, log\, b$$

de donde se deduce

$$log\, b=\frac{log\, a}{m}$$

y poniendo en lugar de b su valor $\sqrt[m]{a}$ se tendrá

$$log \sqrt[m]{a}=\frac{log\, a}{m}$$

que era lo que se queria demostrar.

¿Cuáles son las progresiones adoptadas para la formacion de las tablas?

Las siguientes:

$$\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots \text{ Números}$$
$$\div 0 .\ 1 .\ 2 .\ \ 3 .\ \ \ 4 .\ \ldots \text{ Logaritmos.}$$

Estas progresiones dan solamente los logaritmos de los números 1, 10, 100, 1000,... y para hallar los de los números intermedios se intercala un mismo número de medios proporcionales entre cada dos términos de la progresion por cuociente. Suponiendo muy considerable el número de medios interpolados, es evidente que entonces se irá ascendiendo desde 1 hasta 10, desde 10 hasta 100,.... por grados tan próximos que los números 2, 3, 4... 11, 12, 13... se encontrarán entre dichos medios sino exactamente, por lo menos con todo el grado de aproximacion que se apetezca. Esto supuesto, si entre los diversos términos de la progresion por diferencia se interpola el mismo número de medios que se habia interpolado en la progresion por cuociente, los que correspondan á los números 2, 3, 4... serán los logaritmos de dichos números.

Este método, impracticable á causa de las raices de grado tan elevado que habria que estraer, se simplifica muchísimo por medio de raices cuadradas sucesivas, interpolando de cada vez un solo medio; pero aun de esta manera y apesar de no tener necesidad de calcular sino los logaritmos de los números primos, puesto que de ellos se derivan los demás (CXXVII), queda lo muy suficiente para desechar tal procedimiento. Otros métodos existen mucho mas expeditos, pero no es posible darlos á conocer en la aritmética.

Qué consecuencias se deducen de las dos progresiones adoptadas para formar las tablas?

Varias muy importantes: 1.ª Todo logaritmo está compuesto de una parte entera llamada *característica* y de una fraccion decimal llamada *mantisa*.

2.ª Los logaritmos no crecen en proporcion de los números.

3.ª Los números de una cifra, como comprendidos entre 1 y 10 tienen sus logaritmos comprendidos entre 0 y 1 y por lo tanto su característica es 0; los números de dos cifras, que son los comprendidos entre 10 y 100, tienen sus logaritmos comprendidos entre 1 y 2 y por consiguiente su característica es 1. De donde se infiere que la característica del logaritmo de un número consta de tantas unidades *menos una* como cifras hay en dicho número antes del signo decimal. Y por la inversa, por la característica del logaritmo se sabe cuantas cifras ha de tener el número antes del signo decimal, que han de ser tantas *mas una* como unidades se cuenten en dicha característica.

4.ª Siendo 1, 2, 3,... los logaritmos de 10, 100, 1000, ...y siendo el logaritmo de un producto igual á la suma de los logaritmos de los factores, se infiere claramente

que $\left\{\begin{array}{c}\text{multiplicando}\\ \text{dividiendo}\end{array}\right\}$ un número por 10, 100, 1000,...

su logaritmo queda $\left\{\begin{array}{c}\text{aumentado}\\ \text{disminuido}\end{array}\right\}$ en 1, 2, 3,... unidades, operacion que solo recae sobre la característica permaneciendo invariable la mantisa. De aquí se deduce que todos los números compuestos de unas mismas cifras, cualquiera que sea el lugar que el signo decimal ocupa en ellos tienen una misma mantisa.

5.ª La simple inspeccion de las dos progresiones nos hace ver además que los logaritmos de los números comprendidos desde el 1 hasta el 10 se dividen entre sí una unidad; los comprendidos entre 10 y 100 comparten tambien entre sí otra unidad, y así sucesivamente; luego la diferencia de los logaritmos de dos números consecutivos es tanto menor cuanto mayores son estos números.

Cómo se halla el logaritmo de un quebrado?

Restando el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador, puesto que todo quebrado equivale á la division del numerador por el denominador; pero esta sustraccion es imposible cuando el quebrado es propio y entonces se aumenta el logaritmo del numerador en una ó mas decenas (las suficientes para efectuar la sustraccion), las cuales aparecerán de mas en el resíduo, ó sea el logaritmo del quebrado. A estas características se les llama *aumentadas*, y se indican escribiendo el signo decimal por la parte superior del número, si bien seria mas propio y menos espuesto á error acostumbrarse siempre á escribir delante de dichos logaritmos—10,—20,—30... segun tengan una, dos, tres,.... decenas de aumento.*

Qué debe advertirse en particular acerca de los logaritmos de las fracciones decimales?

Que la mantisa se hallará, conforme á lo que ya se ha dicho, considerando la fraccion como un número entero y la característica se determina restando de 10 el lugar que ocupa la primera cifra significativa despues de la vírgula; si la sustraccion fuera imposible habria que restar dicho lugar de 10, 20, 30, 40,.... quedando así aumentada esta característica en una, dos, tres.... decenas.

Demost. CXXXI. Sea F una fraccion decimal equivalente á $\frac{p}{10^n}$ se tendrá

$$F=\frac{p}{10^n}$$

* Hemos creido no deber hablar sino de las características aumentadas, dejando para el Algebra el tratar de las negativas, puesto que en ella es donde se pone la teoría de las cantidades negativas.

y tomando los logaritmos

$$log\,F = log\,p - n.$$

Suponiendo que el número p esté compuesto de $(c+1)$ cifras, su logaritmo tendrá una característica c y una mantisa cualquiera tal como m, de modo que será

$$log\,p = c+m$$

y por tanto $\quad log\,F = c+m-n = (c-n)+m;$

como no es posible efectuar la sustraccion indicada por $c-n$, agreguemos á c una decena, que al mismo tiempo habrá que disminuir para que no se altere la ecuacion y se tendrá

$$log\,F = (10+c-n)+m-10$$

ó bien $\quad log\,F = (10-n+c)+m-10.$

Ahora bien, restar n y agregar c equivale visiblemente á restar de una vez la diferencia entre n y c y por consiguiente se tendrá

$$log\,F = 10-(n-c)+m-10$$

como el número n representa el número total de cifras de la fraccion propuesta, contada desde la primera decimal, y c el número de cifras significativas menos una, es evidente que la diferencia $n-c$ indicará el lugar que la primera cifra significativa ocupa despues de la coma.

Si fuese $10 < n-c$ se restaria $n-c$ de 20, y así sucesivamente.

Luego la característica es igual al lugar que la primera cifra significativa ocupa despues de la coma restado de 10, 20, 30, . . . segun se pueda, quedando aumentada en la misma cantidad.

Y por la inversa; cuando por resultado de un cálculo se viene á parar á un logaritmo con característica aumentada, ya estaremos seguros de que el número correspondiente ha de ser una fraccion decimal, y solo quedará que averiguar el lugar que debe ocupar la primera cifra significativa despues de la coma, que será igual al número en que esté aumentada la característica menos el valor de ella.

Cómo se halla el logaritmo de una potencia cualquiera de una fraccion decimal?

Lo mismo que si el número fuese entero (CXXIX); pero la característica resultante estará aumentada en tantas decenas como unidades haya en el producto del esponente por el número de decenas en que esté aumentada la característica del logaritmo de la fraccion propuesta. Si resultaran decenas en la característica se suprimirán todas las que sea posible y estas menos tendrá de aumento.

DEMOST. CXXXII. Supongamos que se quiere hallar el logaritmo de $(0{,}0005473)^7$. Segun se sabe (CXXXI) se tiene

$$log\,(0{,}0005473)=6'7382254$$

en la inteligencia de que la característica lleva una decena de aumento.

Tambien será

$$log\,(0{,}0005473)^7=6'7382254\times 7$$

ó bien

$$log\,(0{,}0005473)^7=47{,}1675778.$$

Ahora bien, como el logaritmo de la fraccion estaba aumentado en una decena al multiplicar por 7 habrá resultado el producto con 7 decenas mas; y como de 47 podemos quitar 40 ó 4 decenas, nos resultará 7 de característica con 3 decenas de aumento, lo que puede escribirse así

$$log\,(0{,}0005473)^7=-30+7{,}1675778.$$

El número correspondiente á este logaritmo, segun lo que antes se dijo, es

0,000 000 000 000 000 000 000 0147.....

Cómo se halla el logaritmo de una raiz cualquiera de una fraccion decimal?

Hállese el logaritmo de la fraccion decimal propuesta y agréguense á la característica tantas decenas como unidades tenga el índice del radical menos el número de decenas en que esté aumentada la característica de la fraccion; divídase el resultado por el índice del radical y se obtendrá el logaritmo de la raiz aumentado en una decena.

DEMOST. CXXXIII. Supongamos que se quiere hallar el logaritmo de

$$\sqrt[9]{0{,}0089356}.$$

Se tiene desde luego

$$log\,0{,}0089356=7'9511237.$$

Si como prescribe la regla (CXXX) dividimos este logaritmo por 9, la decena que hay de aumento en su característica quedará así mismo dividida por 9, y el resultado estará aumentado en $\frac{1}{9}$ de de decena, lo que debemos evitar, pues estos aumentos deben ser siempre de un número justo de decenas.

Ahora bien, agregando 8 decenas á la característica esta se convierte en 87, y si antes tenia una decena escedente ahora tendrá 9 y al dividir por 9 solo tendrá una decena de aumento.

Así pues,

$$log \sqrt[9]{0,0089356} = \frac{87,9511237}{9} - 10 = -10 + 9,7723471.$$

El número correspondiente á este logaritmo es 0,5920347.

Podrá suceder alguna vez que el número de decenas en que esté aumentada la característica sea mayor que el de unidades contenidas en el índice, en cuyo caso no es aplicable la regla que se acaba de demostrar. Entonces se agregan á la característica dos, tres.... veces tantas decenas como unidades tiene el índice, menos el número de decenas en que esté aumentada la característica, y dividiendo por el referido índice se obtendrá el logaritmo pedido, cuya característica estará aumentada en dos, tres,... decenas.

Qué debe hacerse para hallar el complemento de un logaritmo cuya característica esté aumentada?

Tómese el complemento de este logaritmo como si no tuviese aumento ninguno y agréguense á la característica que se obtenga tantas decenas menos una como sean las decenas en que estuviera aumentado el logaritmo antes de tomar el complemento.

Demost. CXXXIV. Supongamos que del logaritmo L se quiera restar otro logaritmo L', cuya característica esté aumentada en un número n de decenas.

El resultado de la operacion será

$$L-(L'-10\times n).$$

Sumando $10\times n$ á minuendo y sustraendo se tiene

$$L+10\times n-L'.$$

Tomando el complemento de L' y suponiendo que la característica de este logaritmo solo consta de una cifra, lo que siempre tiene lugar resulta

$$L+10\times n+c.a.L'-10$$

ó bien

$$L+c.a.L'+10(n-1)$$

donde se vé que despues de agregar el complemento, todavía se deben agregar $(n-1)$ decenas.

Cómo se halla el logaritmo de un número mayor que el último de las tablas?

Se coloca ó se mueve la coma decimal de modo que la parte entera del número que resulte sea menor que el último de las tablas, pero haciendo de suerte que dicha parte entera sea la mayor que satisfaga á esta condicion; hállese la mantisa del logaritmo de dicha parte entera y la diferencia entre esta y la siguiente de la tabla; calcúlese el cuarto término de la proporcion: 1 *es á la diferencia de las mantisas como las cifras separadas del número*, consideradas como decimales, *es á la cantidad que se busca;* la cual debe sumarse con las últimas cifras de la mantisa tomada de las tablas, y se tendrá la mantisa del logaritmo buscado. La característica se pone con arreglo al número de cifras de la cantidad propuesta.

Demost. CXXXV. Supongamos que se quiere hallar el logaritmo de 9475464. La mantisa del logaritmo de este número es la misma, segun se sabe, que la del logaritmo de 94754,64.

Las tablas dan

$$log.\ 94754 = 9765976$$
$$log.\ 94755 = 9766021.$$

No se han escrito las características por ser inútiles para nuestro objeto.

Ya se sabe que los logaritmos no crecen proporcionalmente á los números; pero cuando estos son muy próximos se puede considerar que esta propiedad tiene lugar, como aparece de la inspeccion de las tablas. Fundados en esto restemos las mantisas anteriores y veremos que por cada unidad que varian los números los logaritmos varian 45, y como queremos hallar el logaritmo de 94754,64, cuya diferencia con 94754 es 0,64 tendremos

$$1 : 45 :: 0,64 : x = 28,8 = 29$$ sin error sensible.

Es decir, que para una diferencia de 0,64 entre los números los logaritmos difieren 29, y por lo tanto

$$log.\ 94754,64 = 9765976 + 29 = 9766005$$

ó bien $$log.\ 9475464 = 6,9766005.$$

Cómo se halla el número correspondiente á un logaritmo cuya mantisa no se encuentra exactamente en las tablas?

Se busca el número correspondiente á la mantisa mas próxima por defecto que se encuentre en las tablas y se dice: *diferencia* que hay entre la mantisa tomada en las tablas y la inmediata mayor en las mismas es á 1, como la diferencia entre la mantisa menor y la dada es á la diferencia entre el número pedido y el correspondiente á la mantisa *menor*. Este cuarto término se reduce á decimales y las notas que dé se unen á la derecha del número de la mantisa próxima menor.

La reduccion á decimales no debe estenderse mas que á dos cifras por no haber ya exactitud en la tercera.

Demost. CXXXVI. Supongamos que se quiere hallar el número correspondiente al logaritmo 6,9766005.

El número correspondiente ha de tener siete cifras; pero haciendo abstraccion de las características dan las tablas

$$9765976 = \log.\ 94754$$
$$9766021 = \log.\ 94755.$$

Los dos números 94754 y 94755 difieren en una unidad y las mantisas de sus logaritmos difieren en 45; y como queremos hallar el número correspondiente á la mantisa 9766005 cuya diferencia con la primera es 29, tendremos con arreglo á lo mismo que ya se había dicho

$$45 : 1 :: 29 : x = 0{,}64.$$

Por lo tanto el número correspondiente á la mantisa 9766005 es 94754,64 ó atendiendo á que la característica es 6, el número correspondiente será 9475464.

TABLA DE MULTIPLICAR.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

CUADRADOS Y CUBOS

DE LOS NÚMEROS DÍGITOS.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729

ANTIGUO SISTEMA DE MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS.

Medidas lineales.

Estadales.	Brazas.	Varas.	Pies.	Pulgadas.	Líneas.	Puntos.
1	2	4	12	144	1728	20736
	1	2	6	72	864	10368
		1	3	36	432	5184
			1	12	144	1728
				1	12	144
					1	12

Itinerarias.

Leguas marinas.	Millas.	Varas.
1	3	6651
	1	2217

Medidas superficiales.

Varas cuadradas.	Pies cuadrados.	Pulgadas cuadradas.
1	9	1296
	1	144

Agrarias.

Fanegas.	Aranzadas.	Celemines.	Cuartillos.	Estadales cuadrados.	Varas cuadradas.
1	$1\frac{11}{25}$	12	48	576	9216
	1	$8\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	400	6400
		1	4	48	768
			1	12	192
				1	16

Medidas de capacidad.

Varas cúbicas.	Pies cúbicos.	Pulgadas cúbicas.
1	27	46656
	1	1728

Para áridos.

Lastres.	Cahices.	Fanegas.	Celemines.	Cuartillos.
1	4	48	576	2304
	1	12	144	576
		1	12	48
			1	4

El lastre se usa para medir la sal.

Para líquidos.

Moyos.	Cántaras ó arrobas.	Azumbres.	Cuartillos.	Copas.
1	16	128	512	2048
	1	8	32	128
		1	4	16
			1	4

Para aceite.

Arrobas mensurales.	Libras.	Panillas.
1	25	100
	1	4

Medidas ponderales.

Quintales.	Arrobas.	Libras.	Marcos.	Onzas.	Adarmes.	Tomines.	Granos.
1	4	100	200	1600	25600	76800	921600
	1	25	50	400	6400	19200	230400
		1	2	16	256	768	9216
			1	8	128	384	4608
				1	16	48	576
					1	3	36
						1	12

Medicinales.

Libras.	Onzas.	Dracmas.	Escrúpulos.	Granos.
1	12	96	288	6912
	1	8	24	576
		1	3	72
			1	24

Para las monedas.

Marcos.	Onzas.	Ochavas.	Tomines.	Granos.
1	8	64	384	4608
	1	8	48	576
		1	6	72
			1	12

Division del tiempo.

Dias.	Horas.	Minutos.	Segundos.	Terceros.
1	24	1440	86400	5184000
	1	60	3600	216000
		1	60	3600
			1	60

Monedas.

Duros ó pesos fuertes.	Reales.	Maravedís.
1	20	680
	1	34

NUEVO SISTEMA DE MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS.

Medidas lineales.

Miriámetros.	Kilómetros.	Hectómetros.	Decámetros.	Metros.	Decímetros.	Centímetros.	Milímetros.
1......	10....	100..	1000	10000	100000	1000000	10000000
	1....	10..	100	1000	10000	100000	1000000
		1..	10	100	1000	10000	100000
			1	10	100	1000	10000
				1	10	100	1000
					1	10	100
						1	10

Medidas superficiales.

Hectáreas.	Decáreas.	Areas.	Deciáreas.	Centiáreas ó metros cuadrados.
1......	10....	100....	1000......	10000
	1....	10....	100......	1000
		1....	10......	100
			1......	10

Metros cuadrados.	Decímetros cuadrados.	Centímetros cuadrados.	Milímetros cuadrados.
1.........	100......	10000....	1000000
	1......	100....	10000
		1....	100

Medidas de capacidad.

Metros cúbicos.	Decímetros cúbicos.	Centímetros cúbicos.	Milímetros cúbicos.
1......	1000....	1000000....	1000000000
	1....	1000....	1000000
		1....	1000

Para áridos y líquidos.

Kilólitros.	Hectólitros.	Decálitros.	Litros.	Decílitros.	Centílitros.
1	10	100	1000 ..	10000	100000
	1	10	100 ..	1000	10000
		1	10 ..	100	1000
			1 ..	10	100
				1	10

MEDIDAS PONDERALES.

Múltiplos del gramo.

Tonelada métrica.	Quintales métricos.	Miriágramos.	Kilógramos.	Hectógramos.	Decágramos.	Gramos.
1....	10......	100	1000 ..	10000	100000	1000000
	1......	10	100 ..	1000	10000	100000
		1	10 ..	100	1000	10000
			1 ..	10	100	1000
				1	10	100
					1	10

Submúltiplos del gramo.

Gramos.	Decígramos.	Centígramos.	Milígramos.
1	10	100	1000
	1	10	100
		1	10

Division del tiempo.

Es igual á la del antiguo sistema.

Monedas.

Duros ó pesos fuertes.	Reales.	Céntimos.
1	20......	2000
	1......	100

Relaciones entre las medidas y pesas del antiguo sistema y las del nuevo.

Medidas lineales.

1 vara.. 0,835905 metros.
1 legua marina.. 5,555556 kilómetros.

Medidas superficiales.

1 vara cuadrada.............. $\begin{cases}0{,}698739 \text{ metros cuadrados.}\\ 0{,}006987 \text{ áreas.}\end{cases}$
1 fanega.................... 64,395741 áreas.

Medidas de capacidad.

1 vara cúbica.................. 0,584079 metros cúbicos.

Para áridos.

1 fanega...................... 55,500056 litros.

Para líquidos.

1 cántara................................ 16,132935 litros.
1 arroba de aceite equivale á.............. 12,56300 litros.

Medidas ponderales.

1 libra................................ 0,460093 kilógramos.

Relaciones entre las medidas y pesas del nuevo sistema y las del antiguo.

Medidas lineales.

1 metro..........................	1,196308 varas.

Medidas superficiales.

1 metro cuadrado................	1,431151 varas cuadradas.
1 área	0,015529 fanegas.

Medidas de capacidad.

1 metro cúbico..................	1,712095 varas cúbicas.

Para áridos.

1 litro..........................	0,018018 fanegas.

Para líquidos.

1 litro..........................	0,061985 cántaras.
1 litro de aceite equivale á	0,079599 arrobas.

Medidas ponderales.

1 kilógramo.....................	2,173474 libras.

Relaciones aproximadas entre las medidas y pesas de los dos sistemas.

Medidas lineales.

5 metros	6	varas.
mas exacto 51 ,,	61	,,

Medidas superficiales.

7 metros cuadrados	10	varas cuadradas.
9 hectáreas	14	fanegas.

Medidas de capacidad.

7 metros cúbicos	12	varas cúbicas.

Para áridos.

5 hectólitros	9	fanegas.

Para liquidos.

2 litros	1	cuartillo.
1 litro de aceite	2	libras.

Medidas ponderales.

6 kilógramos	13	libras.
46 quintales nuevos	100	qq. antiguos.

INDICE.

LIBRO PRIMERO.

DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

LIBRO SEGUNDO.

DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

LIBRO TERCERO.

POTENCIAS Y RAICES.

LIBRO CUARTO.

DE LAS APLICACIONES DE LA ARITMÉTICA.

LIBRO QUINTO.

TEORÍA DE LAS PROGRESIONES Y DE LOS LOGARITMOS.

53

20000 | 365
0975.0 | 54.2

0355
355 | 365
7 0 | 2