Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

Departamento de Anlisis Matemtico

TRANSITIVIDAD DE LA NORMA.

Por

Julio Becerra Guerrero.

Granada, 1.999

CONTENIDO.

Introducción.

Los resultados que se expondrán en esta memoria responden a la filosofía seguida en los trabajos de investigación realizados a raíz del famoso problema de Banach-Mazur. Tal problema reza como sigue:

¿Es todo espacio de Banach transitivo y separable un espacio de Hilbert?.

Por espacio de Banach transitivo entendemos un espacio de Banach en el que, dados dos puntos arbitrarios de su esfera unidad, siempre hay una isometría lineal sobreyectiva que aplica uno en el otro. En la actualidad, el problema de Banach-Mazur permanece abierto. No obstante, ha generado una literatura que, hoy por hoy, tiene interés por sí misma, principalmente debido a las diferentes debilitaciones del concepto de transitividad que aparecen en las diferentes aproximaciones al problema. En orden decreciente de fortaleza, tales debilitaciones son la casi-transitividad, convexo-transitividad y maximalidad de la norma (Definiciones I.2.1, I.4.1 y I.5.1). A grandes rasgos, podemos distinguir tres líneas de trabajo. A saber:

1) Caracterizaciones de los espacios de Hilbert (no necesariamente separables) en la clase de los espacios de Banach mediante algún tipo de transitividad y alguna propiedad adicional.

2) Estudio de los diferentes tipos de transitividad de la norma en espacios de Banach dotados de estructura algebraica.

3) Estudio de las relaciones existentes entre los diferentes tipos de transitividad y las condiciones isomórficas más usuales en la teoría de los espacios de Banach.

Hemos dedicado el primer capítulo de esta memoria a recopilar los resultados que, a nuestro juicio, son los más relevantes que aparecen en la literatura generada por el problema de Banach-Mazur. Merece la pena destacar, tanto por su belleza como por su proximidad a dicho problema, el teorema de W. Lusky según el cual todo espacio de Banach separable se puede ver como subespacio 1-complementado de un espacio de Banach casi-transitivo y separable (Teorema I.2.8).

También hemos utilizado este capítulo para presentar algunos resultados que, si bien son fácilmente deducibles de teoremas conocidos, no están explícitamente recogidos en la literatura. Tal es, por ejemplo, el caso del Teorema I.3.5 en el que demostramos que todo espacio de Banach 1-complementado en su bidual, es copia isométrica de un subespacio 1-complementado en un espacio de Banach transitivo. Presentamos además una nueva debilitación del concepto de transitividad de un espacio de Banach, que creemos es novedosa y a la que denominamos "norma fuertemente maximal" (Definición I.5.3). Este concepto es estrictamente más débil que la convexo-transitividad y estrictamente más fuerte que el de la norma maximal. Así, c_0 tiene norma fuertemente maximal y no es convexo-transitivo, mientras que la norma de ℓ_1 es maximal pero no fuertemente maximal (Proposición I.5.7 y Corolario I.5.6).

Los resultados que se exponen en el segundo capítulo corresponden a los estudios realizados en la línea de trabajo 1) enumerada anteriormente. A este respecto, conviene resaltar que hemos tenido muy presente los trabajos realizados por Kalton-Wood, Skorik-Zaidenberg y F. Cabello, referidos en los Teoremas I.4.8, I.2.10 y I.2.11, respectivamente, para el desarrollo del capítulo.

Sea X un espacio de Banach. Denotaremos por B_X y S_X la bola y la esfera unidad de X, respectivamente. $\mathcal{G}$ denotará el grupo de las isometrías lineales y sobreyectivas en X, y $\mathcal{G}_0$ será la componente conexa de la identidad en $\mathcal{G}$ relativa a la topología fuerte de operadores. En lo que concierne al resultado de Kalton-Wood, hemos obtenido una versión del mísmo para espacios reales (Teorema II.3.5) cuyo enunciado damos a continuación.

Supongamos que $\mathcal{G}_0$ no es trivial, que existe una reflexión isométrica en el espacio de Banach real X y que existe $\delta > 0$ tal que $\overline{co}\{\mathcal{G}(x)\} \supseteq \delta B_X$ para todo x en S_X. Entonces X es isomorfo a un espacio de Hilbert. Más concretamente, existe un natural $n \leq \delta^{-2}$ y subespacios hilbertianos $H_1, H_2, ..., H_n$ de X, dos a dos isomorfos, satisfaciendo:

(i) $X = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$.

(ii) Para $i = 1, 2, ..., n$ *y* F *en* $\mathcal{G}$, *existe* $j = 1, 2, ..., n$ *con* $F(H_i) = H_j$.

(iii) Para $i = 1, 2, ..., n$, H_i *es* $\mathcal{G}_0$*-invariante.*

Como una primera consecuencia, si en el teorema anterior se exige $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (lo que ocurre por ejemplo si X es convexo-transitivo), entonces X es un espacio de Hilbert (Corolarios II.3.6 y II.3.8). Otra consecuencia de nuestro Teorema II.3.5 es el propio resultado de Kalton-Wood al que estamos haciendo alusión (ver Corolario II.4.4).

Los resultados de Skorik-Zaidenberg y F. Cabello, Teoremas I.2.10 y I.2.11, respectivamente, se pueden unificar diciendo que, si un espacio de Banach (real o complejo) convexo-transitivo tiene una reflexión isométrica, entonces tal espacio es de Hilbert. La generalización que nosotros contemplamos de esta afirmación pasa por la utilización de los conceptos de conjunto no raro en un espacio topológico y de vector de perturbación unidimensional isométrica de la identidad en un espacio de Banach. Concretamente, nuestros Teoremas II.2.4 y II.5.5 pueden refundirse en el siguiente enunciado.

Sea X un espacio de Banach real o complejo y $\mathcal{P}$ el subconjunto de S_X formado por los vectores de perturbación unidimensional isométrica de la identidad. Si $\mathcal{P}$ no es raro en S_X entonces X es un espacio de Hilbert.

El tercer capítulo se encuentra a caballo entre las líneas de trabajo 1) y 2) presentadas anteriormente. En efecto, en él se dan caracterizaciones de los espacios de Hilbert mediante transitividad y condiciones adicionales, y se extienden gran parte de los resultados sobre los diferentes tipos de transitividad en los espacios de funciones $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ a ciertos ambientes donde estos espacios de funciones tienen hoy en día una más amplia comprensión (a saber, C^*-álgebras, JB-álgebras o JB^*-triples). En términos de la abundancia de los llamados "elementos que actúan como unidad", conseguimos un nuevo teorema de caracterización de los espacios de Hilbert reales, Teorema III.3.2, que se deriva del Teorema II.2.4 antes citado y cuyo enunciado es el siguiente.

Sea X un espacio de Banach real. Supongamos que el conjunto de elementos de X que actúan como unidad en X no es raro en S_X. Entonces X es un espacio de Hilbert.

En el caso de que el espacio de Banach X sea complejo, la hipótesis del teorema anterior implica de hecho que X es unidimensional (Teorema III.2.2).

También se recogen en el tercer capítulo caracterizaciones de los espacios de Hilbert complejos en la clase de los JB^*-triples así como en la clase de los preduales de los JBW^*-triples. En esta linea, el trabajo pionero se debe a S. K. Tarasov, quien prueba que el problema de Banach-Mazur tiene respuesta afirmativa en la clase de los JB^*-triples. Nosotros generalizamos este resultado y por otro lado probamos que el problema de Banach-Mazur también tiene respuesta afirmativa en la clase de los preduales de los JBW^*-triples. Tales hechos se obtienen como consecuencia del siguiente resultado (Teoremas III.5.1 y III.5.4),

Sea X el predual de un JBW^*-triple. Supongamos que o bien X es atómico y su norma es fuertemente maximal o bien que el conjunto de los puntos extremos de B_X no es raro en S_X. Entonces X es un espacio de Hilbert.

Uno de los grandes problemas que se presentan en el estudio de los diferentes tipos de transitividad de los espacios de Banach es la escasez de ejemplos de tales espacios. A este respecto, en este capítulo damos el primer ejemplo conocido de C^*-álgebra no conmutativa cuyo espacio de Banach es convexo-transitivo. Tal ejemplo se obtiene como consecuencia sencilla del siguiente teorema (Teorema III.6.6), en cuyo enunciado utilizamos el concepto de punto grande de un espacio de Banach. Un elemento x de un espacio de Banach X se dirá ser grande si pertenece a S_X y $\overline{co}\mathcal{G}(x) = B_X$. Así, el concepto de punto grande "localiza" la convexo-transitividad: un espacio de Banach X es convexo-transitivo si y sólo si todos los puntos de S_X son grandes.

Para H espacio de Hilbert complejo, separable e infinito dimensional, denotemos por X la C^*-álgebra $L(H)$, y sea x en S_X. Entonces x es un punto grande de X si y sólo si $\|x + K(H)\| = 1$, donde $K(H)$ es el ideal cerrado de $L(H)$ formado por los operadores compactos en H.

La consecuencia de este teorema a la que nos referíamos anteriormente, es que el álgebra de Calkin $L(H)/K(H)$ es convexo-transitiva.

Con independencia del interés intrínseco del estudio de la transitividad en espacios de Banach dotados de estructura algebraica, gran parte del trabajo realizado en este sentido viene motivado por la conjetura de Wood (Conjetura I.3.3):

Si $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ es casi-transitivo, entonces L se reduce a un punto.

En el supuesto de que $\mathbb{K}$ sea el cuerpo de los números reales, P. Greim y M. Rajalopagan [GR] (ver también [Cal]) demuestran que la anterior conjetura es cierta. Si se tiene en cuenta que las JB-álgebras asociativas coinciden con los espacios $C_0^{\mathbb{R}}(L)$, el siguiente resultado (Corolario III.7.4) supone una razonable generalización del teorema de Greim-Rajalopagan.

Toda JB-álgebra casi-transitiva es unidimensional.

En realidad, el resultado anterior se obtiene sin más que yuxtaponer el teorema de Greim-Rajalopagan con el teorema que sigue (Teorema III.7.3).

Sea X una JB-álgebra. Si algún elemento positivo de X es punto grande de X (por ejemplo, si X es convexo-transitiva), entonces X es asociativa.

El capítulo cuarto y último de esta memoria queda totalmente encuadrado dentro de la línea de trabajo 3) citada al principio de esta introducción. Los precedentes en esta línea se deben principalmente a C. Finet [F] y a F. Cabello [Ca4]. C. Finet prueba que, si X es un espacio de Banach superreflexivo casi-transitivo, entonces tanto X como su dual X^* son uniformemente suaves. F. Cabello demuestra que un espacio de Banach casi-transitivo que o bien sea Asplund o bien tenga la propiedad de Radon-Nikodym es superreflexivo. Como consecuencia, no todo espacio de Banach se puede renormar (equivalentemente) de manera casi-transitiva. También obtiene que los conceptos de casi-transitividad y convexo-transitividad coinciden en la clase de los espacios de Banach superreflexivos.

De los principales resultados del capítulo cuarto, se deduce que un espacio de Banach convexo-transitivo que o bien sea Asplund o bien tenga la propiedad de Radon-Nikodym es de hecho superrreflexivo, y por tanto casi-transitivo (Corolario IV.5.2). En consecuencia, no todo espacio de Banach se puede renormar convexo-transitivamente. Esto supone la respuesta a una pregunta que permanecía abierta (ver [W], [Pa] y [Ca4]).

Un resumen razonable de los principales resultados del capítulo que estamos comentando, requiere la introducción del concepto de norma extremadamente ruda, para cuya definición remitimos al lector a la primera sección del capítulo. Baste decir aquí que la extrema rudeza de la norma es la situación diametralmente opuesta a la suavidad uniforme. Compendiamos los Teoremas IV.3.8, IV.5.1 y IV.5.10 en el siguiente enunciado.

Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) X es superreflexivo y casi-transitivo.

(ii) La norma de X es Frechét diferenciable en un punto grande de X.

(iii) X *es convexo-transitivo y su norma no es extremadamente ruda.*

(iv) X^* *posee la* w^**-propiedad de intersección de Mazur (es decir, toda parte convexa, acotada y* w^**-cerrada de* X^* *es intersección de bolas cerradas), y existe un punto grande en* X.

Con el enunciado anterior cerramos la reseña de los resultados obtenidos en esta memoria. La mayoría de ellos están recogidos en los artículos [Bec], [BR1], [BR2], [BR3], [BR4] y [BR5], que están en trámite de publicación.

AGRADECIMIENTOS.

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento:

Al Profesor Angel Rodríguez Palacios por enseñarme las Matemáticas que sé y por la dedicación y el entusiasmo puesto en la dirección de esta Tesis. Espero que los esfuerzos que ha hecho para mejorar mi formación humanística no hayan caido en saco roto.

Al Profesor Antonio Moreno, por la grandísima ayuda prestada en la redacción de esta memoria. A él y a la profesora María Victoria Velasco les agradezco los ánimos que me han dado en este tiempo.

A los Profesores María Dolores Acosta, Félix Cabello, Juan Carlos Cabello, Wilhem Kaup, Ginés López, Michael Mackey, Juan Francisco Mena y Rafael Payá, quienes, en mayor o menor cantidad pero siempre con excelente calidad, aportaron ideas matemáticas sin las cuales muchos de los resultados de esta memoria no habrían visto la luz.

Al Grupo de Investigación "Análisis Funcional y sus Aplicaciones", cuyos componentes me consideraron merecedor de una beca, con cargo a los fondos propios del grupo, de la que disfruto (en excedencia en el momento presente).

A todos los Profesores del Departamento de Análisis Matemático por su amabilidad y estímulo.

Granada, Febrero de 1999.

Julio Becerra Guerrero.

Capítulo I

Nociones y resultados básicos sobre transitividad de la norma.

I.1 Espacios de Banach transitivos: el problema de rotación de Banach-Mazur.

El propósito de este primer capítulo es presentar el escenario en el que la acción se va a desarrollar. Así introduciremos el concepto de transitividad de la norma en un espacio de Banach y las sucesivas debilitaciones de este concepto que han ido apareciendo en la literatura. En relación con estas nociones, recordaremos los resultados conocidos más relevantes, haciendo una criba de los mísmos en función de que o bien nos sean necesarios para nuestro trabajo, o bien constituyan precedentes de algunos de los resultados que se demostrarán a lo largo de la memoria. El lector interesado en una visión más completa del tema puede consultar el libro de S. Rolewicz [Ro] y el reciente artículo de F. Cabello [Ca3]. En ocasiones, aprovecharemos también este capítulo para incluir algunas aportaciones propias que, aunque deducibles sin demasiada dificultad de resultados conocidos, no están explícitamente recogidas en la literatura.

A lo largo de esta memoria, $\mathbb{K}$ denotará bien el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, o bien el de los números complejos $\mathbb{C}$. Para un espacio de Banach $X = (X, \|.\|)$ sobre $\mathbb{K}$, X^* será su dual (topológico), S_X y B_X la esfera unidad y la bola unidad cerrada de X, respectivamente, y $\mathcal{G} := \mathcal{G}(X)$ el grupo de todas las isometrías lineales de X sobre X.

El arranque de nuestra historia consiste en la siguiente observación elemental:

Dado un espacio de Hilbert H, para cualesquiera elementos x, y en S_H se puede encontrar T en $\mathcal{G}(H)$ tal que $T(x) = y$.

La verificación de la observación anterior es espectacularmente sencilla si uno sabe que el resultado es cierto en el caso en que la dimensión de H es menor o igual a dos. En efecto: para H arbitrario, y para x, y en S_H, podemos considerar el subespacio vectorial M de H engendrado por x e y. Sea P la proyección ortogonal de H sobre M, y elijamos G en $\mathcal{G}(M)$ satisfaciendo $G(x) = y$. Entonces es fácil verificar que $T := G \circ P + (I - P)$ es un elemento de $\mathcal{G}(H)$ que transforma x en y.

En términos más académicos, la observación que acabamos de demostrar puede reformularse diciendo que el grupo de las isometrías lineales sobreyectivas de un espacio de Hilbert H actúa transitivamente sobre la esfera unidad de H. Uno puede preguntarse si la propiedad anterior caracteriza a los espacios de Hilbert entre los espacios de Banach. Por si sí o si no, empezaremos codificando la propiedad anterior.

DEFINICIÓN I.1.1. Dado un espacio de Banach X, diremos que su **norma** es **transitiva** (o bien, que X es **transitivo**), si para cualesquiera x, y en S_X existe T en $\mathcal{G}$ tal que $T(x) = y$.

Parece ser que Banach ya conocía ejemplos de espacios de Banach transitivos no separables que no eran espacios de Hilbert. Así en su libro [B] propone el siguiente famoso problema, conocido con el nombre de **problema de rotación de Banach-Mazur**.

PROBLEMA I.1.2. *¿Es todo espacio de Banach transitivo y separable un espacio de Hilbert?.*

Que sepamos, este problema permanece abierto. Como hemos comentado, la respuesta al problema es negativa si la hipótesis de separabilidad se suprime. El primer contraejemplo que aparece en la literatura se debe a A. Pelczynnski y S. Rolewicz [PR] (ver también [Ro, Propositions 9.6.7 y 9.6.8]), y se recoge a continuación.

EJEMPLO I.1.3. Sea Γ la unión disjunta de una familia no numerable de copias del intervalo cerrado $[0,1]$ y μ la medida en Γ cuyos conjuntos medibles son aquellos subconjuntos A de Γ cuya intersección con cada tal copia es medible respecto a la medida de Lebesgue, con $\mu(A)$ igual a la suma de las medidas de aquellas intersecciones. Entonces para $1 \leq p < \infty$, el espacio de Banach $L_p(\Gamma, \mu)$ es transitivo.

En realidad, la abundancia de espacios de Banach transitivos es tal que todo espacio de Banach se puede sumergir (lineal e isométricamente) en un espacio de Banach transitivo. Este hecho se verá con más detalle en la sección 3 de este capítulo. Por otra parte, merece la pena mencionar que el problema de rotación de Banach-Mazur tiene respuesta afirmativa si la hipótesis de separabilidad de X se fortalece a la de que X sea finito dimensional. En tal caso, incluso la hipótesis de transitividad de la norma se puede relajar sustancialmente. Estos resultados se verán con precisión en la sección 5 de este capítulo. Recordemos que un espacio de Banach X se dice ser **suave en un punto** x de S_X si hay un único elemento f en S_{X^*} satisfaciendo $f(x) = 1$, y que X es **suave** si X es suave en todo punto x de S_X. Es claro que un espacio de Banach transitivo es suave en cuanto sea suave en un punto de su esfera unidad. En particular, como los espacios de Banach separables tienen puntos de suavidad en abundancia (gracias a un conocido teorema de Mazur), resulta que el espacio separable transitivo que aparece en el problema de rotación de Banach-Mazur es suave. En consecuencia el Problema I.1.2 tiene respuesta afirmativa cuando se restringe a cualquier clase de espacios de Banach cuyos miembros suaves sean espacios de Hilbert . Un ejemplo de una tal clase es la de los espacios del tipo $C_0^{\mathbb{K}}(L)$, donde L es un espacio topológico de Hausdorf localmente compacto y $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ denota el espacio de todas las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ que se anulan en el infinito. En realidad, el único espacio suave en esta clase es $\mathbb{K}$ ($= C_0^{\mathbb{K}}(L)$, con L reducido a un punto) [Si L tiene más de un punto, entonces el lema de Uryson permite encontrar x, y elementos no cero de $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ con $xy = 0$, y en consecuencia la envolvente lineal de $\{x, y\}$ es una copia isométrica del espacio de Banach no suave ℓ_∞^2 sobre $\mathbb{K}$]. Sabido pues que, si $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ es separable y transitivo, L ha de reducirse a un punto, uno puede preguntarse si lo mismo sería cierto sin hipótesis de separabilidad. La respuesta es afirmativa si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, incluso con una ligera rebaja de la hipótesis de transitividad [GR] (para más precisión ver el Teorema I.2.5). Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se conjetura el resultado análogo.

CONJETURA I.1.4. *Si $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es transitivo, entonces L se reduce a un punto.*

En cualquier caso, la siguiente caracterización de la transitividad de $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ parece ser interesante.

Teorema I.1.5. [GR]. *Sea* $X := C_0^{\mathbb{C}}(L)$. *Entonces* X *es transitivo si y sólo si, para* x, y *en* S_X *con* $x, y \geq 0$ *existe un homeomorfismo* $\sigma : L \to L$ *tal que* $x(l) = y(\sigma(l))$ *para todo* l *en* L, *y todo elemento* z *en* X *tiene una "descomposición polar"* $z = ut$ *con* $t \geq 0$ *en* X *y* u *una función continua de* L *en la esfera unidad de* $\mathbb{C}$.

Bajo la filosofía de la transitividad de la norma, la clase de los espacios del tipo $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ no es muy instructiva, debido a la enorme escasez de miembros hilbertianos que contiene. Más sugestiva al respecto es la clase más amplia de los llamados JB^*-triples. En el Capítulo 3 de esta memoria daremos la definición precisa de JB^*-triple, y comentaremos la importancia de estos espacios de Banach en relación con el análisis complejo. Por el momento, baste decir que todo espacio de Hilbert complejo es un JB^*-triple y que, de acuerdo con el principal resultado en [Ta], todo JB^*-triple suave es un espacio de Hilbert. Se tiene en consecuencia la siguiente respuesta parcial al Problema I.1.2.

Corolario I.1.6. [Ta]. *Todo* JB^**-triple transitivo y separable es un espacio de Hilbert.*

No se sabe si el corolario anterior sigue siendo cierto sin la hipótesis de separabilidad. De ser así, se dispondría de una bonita caracterización de los espacios de Hilbert complejos en términos de transitividad de la norma. Para finalizar esta sección, daremos una caracterización de la transitividad de la norma que, si bien podría ser folklórica, no la hemos encontrado explícitamente recogida en la literatura.

Teorema I.1.7. *Un espacio de Banach* X *es transitivo si y sólo si existe* x *en* S_X *tal que* $\mathcal{G}(x) := \{T(x) : T \in \mathcal{G}\}$ *tiene interior no vacío relativo a* S_X.

Demostración. Sea x en S_X de manera que $\mathcal{G}(x)$ tiene interior no vacío en S_X. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{z \in S_X : \|z - x\| < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{G}(x)$. También podemos suponer que la dimensión de X sobre $\mathbb{R}$ es mayor o igual a dos. Dado z en S_X, existen

$y_0, ..., y_n$ en S_X con $y_0 = x$, $y_n = z$ y $\|y_i - y_{i-1}\| < \varepsilon$ para todo $i = 1, ..., n$. Claramente $y_1 \in \mathcal{G}(x)$. Sea $0 \leq k < n$ con $y_k \in \mathcal{G}(x)$. Eligiendo T en $\mathcal{G}$ tal que $T(y_k) = x$, se tiene $\|T(y_{k+1}) - x\| = \|T(y_{k+1} - y_k)\| < \varepsilon$, con lo que y_{k+1} pertenece a $\mathcal{G}(x)$. En consecuencia $z = y_n$ pertenece a $\mathcal{G}(x)$. ∎

I.2 Espacios de Banach casi-transitivos.

En esta sección presentamos la primera de las sucesivas debilitaciones de la transitividad de la norma que aparecen en la literatura, a saber, la casi-transitividad de la norma.

DEFINICIÓN I.2.1. Diremos que un espacio de Banach X tiene **norma casi-transitiva** (o bien, que X es **casi-transitivo**) si el grupo de isometrías $\mathcal{G}$ de X actúa transitivamente sobre un subconjunto denso de la esfera unidad, es decir, existe D subconjunto denso de S_X tal que para cualquier u en D se tiene $\mathcal{G}(u) = D$.

Obviamente todo espacio transitivo es casi-transitivo. La casi-transitividad de la norma admite varias reformulaciones que nos serán útiles en el futuro y que recogemos en la siguiente proposición. Recordemos que un subconjunto R de un espacio topológico E es **raro** en E si el interior de la clausura de R en E es vacío.

PROPOSICIÓN I.2.2. *Para un espacio de Banach X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es casi-transitivo.

(ii) Existe x en S_X tal que $\mathcal{G}(x)$ es denso en S_X.

(iii) Para todo x en S_X, $\mathcal{G}(x)$ es denso en S_X.

(iv) Para todo x en S_X, $\mathcal{G}(x)$ no es raro en S_X.

(v) Existe x en S_X tal que $\mathcal{G}(x)$ no es raro en S_X.

Demostración. $i) \Leftrightarrow ii)$.- Para mostrar que $i) \Rightarrow ii)$ basta tomar x en el subconjunto D denso en S_X sobre el cual $\mathcal{G}$ actúa transitivamente, pues entonces $\mathcal{G}(x) = D$. Para la implicación recíproca tómese $D = \mathcal{G}(x)$.

Antes de continuar formalmente la demostración, observemos que, para $x, y \in S_X$ con $y \in \overline{\mathcal{G}(x)}$, se tiene que $\overline{\mathcal{G}(x)} = \overline{\mathcal{G}(y)}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe T en $\mathcal{G}$ con $\|y - T(x)\| \leq \varepsilon$, equivalentemente, $\|T^{-1}(y) - x\| \leq \varepsilon$, de donde se sigue que $x \in \overline{\mathcal{G}(y)}$. Ahora si $u \in \overline{\mathcal{G}(x)}$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $F \in \mathcal{G}$ tal que $\|u - F(x)\| < \varepsilon$ y así

$$\|u - FT^{-1}(y)\| \leq \|u - F(x)\| + \|F(x) - FT^{-1}(y)\| < 2\varepsilon.$$

$ii) \Rightarrow iii)$.- Consecuencia inmediata de la observación anterior.

$iii) \Rightarrow iv)$.- Es claro.

$iv) \Rightarrow v)$.- Es igualmente claro.

$v) \Rightarrow ii)$.- Podemos suponer que la dimensión de X sobre $\mathbb{R}$ es mayor o igual que dos. Sea x en S_X tal que $\mathcal{G}(x)$ no es raro en S_X. Es suficiente probar que $\overline{\mathcal{G}(x)}$ es abierto, ya que obviamente es cerrado no vacío en el conexo S_X. Tomemos $y \in \overset{\circ}{\overline{\mathcal{G}(x)}}$ (luego por la observación previa $\overline{\mathcal{G}(x)} = \overline{\mathcal{G}(y)}$). Por ser $\mathcal{G}(y)$ denso en $\overline{\mathcal{G}(x)}$ y ser $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{G}(y)}}$ un abierto no vacío de $\overline{\mathcal{G}(x)}$ se sigue que existe z en $\mathcal{G}(y) \cap \overset{\circ}{\overline{\mathcal{G}(x)}}$. Para tal z existe T en $\mathcal{G}$ tal que $z = T(y)$ y se tiene

$$y = T^{-1}(z) \in T^{-1}\left(\overset{\circ}{\overline{\mathcal{G}(x)}}\right) = \overset{\circ}{\overline{T^{-1}\mathcal{G}(x)}} = \overset{\circ}{\overline{\mathcal{G}(x)}}.$$

■

La proposición que acabamos de presentar, contiene dos caracterizaciones de la casi-transitividad que creemos son novedosas, a saber, iv) y v). Notemos también que la prueba de la proposición muestra que, para un espacio de Banach X, el conjunto $\{\overline{\mathcal{G}(x)} : x \in S_X\}$ es una partición de S_X que, o bien se reduce a un solo elemento (justo si X es casi-transitivo), o bien es no numerable (gracias al teorema de Baire y a la caracterización v) de la casi-transitividad).

El concepto de casi-transitividad de la norma presentado en esta sección permite obtener cierta información sobre el espacio transitivo separable del problema de Banach-Mazur.

COROLARIO I.2.3. *Si X es un espacio de Banach transitivo y separable, entonces X^* es casi-transitivo.*

De hecho, se tiene el siguiente resultado más general.

PROPOSICIÓN I.2.4. *Si X es un espacio de Banach transitivo y suave, entonces X^* es casi-transitivo.*

Demostración. Sea f en S_{X^*} funcional que alcanza su norma. Por ser X suave y transitivo, el subconjunto $\{T^*(f) : T \in \mathcal{G}\}$ de S_{X^*} contiene al conjunto de todos los funcionales de norma uno que alcanzan su norma. Por el teorema de Bishop-Phelps [BD, Theorem 16.1], este último conjunto es norma-denso en S_{X^*}. A fortiori, $\mathcal{G}(X^*)(f)$ es denso en S_{X^*}.
■

La casi-transitividad de la norma en los espacios del tipo $C_0^{\mathbb{R}}(L)$ carece de interés después del reciente teorema de Greim-Rajalopagan (ver también [Ca1]), que transcribimos a continuación.

TEOREMA I.2.5. [GR]. *Si $C_0^{\mathbb{R}}(L)$ es casi-transitivo, entonces $C_0^{\mathbb{R}}(L) = \mathbb{R}$.*

La transitividad y casi-transitividad de la norma en los espacios $L_p(\mu)$, para $1 \leq p < \infty$, ha sido estudiada con detalle en [GJK]. Destacamos a continuación uno de los resultados en el trabajo que acabamos de citar que, aunque no es el más importante, sí nos parece el de formulación más sencilla.

PROPOSICIÓN I.2.6. [GJK, Proposition 1.1]. *Si $1 \leq p < \infty$, si $p \neq 2$, si $L_p^{\mathbb{K}}(\mu)$ es casi-transitivo, y si μ tiene átomos, entonces $L_p^{\mathbb{K}}(\mu) = \mathbb{K}$.*

En el siguiente párrafo recogemos ejemplos de espacios de Banach casi-transitivos.

EJEMPLOS I.2.7. Para $1 \leq p < \infty$ con $p \neq 2$, $L_p[0,1]$ es casi-transitivo [Ro, Theorems 9.6.3 and 9.6.4] pero no transitivo [GJK, Theorem 1.3]. Lo mismo le ocurre al espacio de Banach separable G que Gurarij construye en 1966 con la siguiente propiedad de extensión [G]:

Dados F espacio de Banach de dimensión finita, E subespacio de F, T operador lineal e inyectivo de E en G, y $\varepsilon > 0$, existe un operador lineal inyectivo $\tilde{T}$ de F en G que extiende a T y satisface

$$\|\tilde{T}\| \, \|\tilde{T}^{-1}\| \leq (1+\varepsilon)\|T\| \, \|T^{-1}\| .$$

Diez años después, W. Lusky [Lu1] demuestra que todos los espacios de Banach separables con esta propiedad de extensión son esencialmente el mismo (salvo isometría lineal), y que la norma de un tal espacio es casi-transitiva. Una demostración abstracta de que el espacio de Gurarij G no es transitivo podría ser la siguiente. Se sabe que $G^* = L_1(\mu)$ [Wo] para una cierta medida μ que obviamente tiene átomos. Así G^* no puede ser casi-transitivo (por la Proposition I.2.6), y en consecuencia G no puede ser transitivo en vista del Corolario I.2.3.

Los ejemplos de espacios de Banach que acabamos de presentar, ponen de manifiesto que, si en el problema de Banach-Mazur la hipótesis sobre la transitividad de la norma se debilita a la de casi-transitividad, la respuesta al mismo es negativa.

Independientemente de que la gama de ejemplos de espacios de Banach clásicos casi-transitivos no es muy amplia, la abundancia de espacios de Banach casi-transitivos (separables o no) está asegurada por un bonito resultado de W. Lusky, que exponemos a continuación. Recordemos que, dado un espacio de Banach X, su **carácter de densidad** es el menor cardinal $\aleph$ para el cual X tiene un subconjunto denso de cardinalidad $\aleph$. Un subespacio M de un espacio de Banach X está **1-complementado** en X si existe una proyección (lineal) contractiva P de X sobre M.

TEOREMA I.2.8. [Lu2]. *Todo espacio de Banach X se puede ver isométricamente como un subespacio 1-complementado de un espacio de Banach casi-transitivo con igual carácter de densidad que X.*

En el trabajo original de Lusky el lector sólo encontrará una versión paticular del teorema que acabamos de enunciar, a saber,

Todo espacio de Banach separable está 1*-complementado en un espacio de Banach separable casi-transitivo.*

No obstante, tal como ha sido señalado por muchos autores, pequeños cambios en la demostración original de Lusky permiten cubrir el caso más general anteriormente enunciado. Como quiera que ninguno de los autores que hacen esta observación especifica los cambios que se necesitan, ofrecemos a continuación una prueba completa del Teorema I.2.8. La mayor parte de ella es gentileza de F. Cabello.

LEMA I.2.9. [Lu2]. *Sea X un espacio de Banach con caracter de densidad $\aleph$, $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de subespacios de X, y para cada $\alpha\in\Gamma$ sean $T_\alpha : E_\alpha \to X$ isometría, $P_\alpha : X \to E_\alpha$ y $Q_\alpha : X \to T_\alpha(E_\alpha)$ proyecciones contractivas. Entonces existen, un espacio de Banach $\widetilde{X}$ que contiene isométricamente a X y tiene caracter de densidad $\aleph$, $\widetilde{T}_\alpha : X \to \widetilde{X}$ extensión isométrica de T_α para todo $\alpha\in\Gamma$, $\widetilde{Q}_\alpha : \widetilde{X} \to \widetilde{T}_\alpha(X)$ proyección contractiva para todo $\alpha\in\Gamma$ y $P : \widetilde{X} \to X$ proyección contractiva.*

Demostración. Consideremos el espacio $X\oplus^{\ell_1}(\oplus^{\ell_1}_{\alpha\in\Gamma}X)$ cuyos elementos escribiremos de la forma $(x;(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma})$, y en él el subespacio cerrado V engendrado por

$$\{(-T_\gamma(e);(\delta_{\gamma\alpha}e)_{\alpha\in\Gamma}) : \gamma\in\Gamma\,, e\in E_\gamma\}.$$

Tomemos como $\widetilde{X}$ el espacio de Banach que se obtiene al cocientar $X\oplus^{\ell_1}(\oplus^{\ell_1}_{\alpha\in\Gamma}X)$ por V. Es inmediato verificar que $\|x\| = \|(x;(0)_{\alpha\in\Gamma})+V\|$ para todo x en X, y así $\widetilde{X}$ contiene una copia isométrica de X. Por otra parte, obsérvese que para cada $\gamma\in\Gamma$ se tiene:

$$(T_\gamma(e);(0)_{\alpha\in\Gamma}) + V = (0;(\delta_{\gamma\alpha}e)_{\alpha\in\Gamma}) + V$$

para todo e en E_γ. Para $\gamma\in\Gamma$, podemos extender ahora T_γ a todo X definiendo $\widetilde{T}_\gamma : X \to \widetilde{X}$ por

$$\widetilde{T}_\gamma\{(x;(0)_{\alpha\in\Gamma}) + V\} = \{(0;(\delta_{\gamma\alpha}x)_{\alpha\in\Gamma}) + V\}.$$

Claramente, para todo $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{T}_\gamma$ está bien definida. Además

$$\|\tilde{T}_\gamma\{(x;(0)_{\alpha\in\Gamma})+V\}\| = \|(0;(\delta_{\gamma\alpha}x)_{\alpha\in\Gamma})+V\|$$

dado que

$$\|x\| \geq \|(x;(0)_{\alpha\in\Gamma})+V\| =$$

$$inf_{e_\alpha\in E_\alpha}\{\|\sum_{\alpha\in\Gamma}T_\alpha(e_\alpha)\| + \|x-e_\gamma\| + \sum_{\alpha\in\Gamma_{\alpha\neq\gamma}}\|e_\alpha\|\} \geq$$

$$inf_{e_\alpha\in E_\alpha}\{\|T_\gamma(e_\gamma)\| + \|x-e_\gamma\| + \sum_{\alpha\in\Gamma_{\alpha\neq\gamma}}(\|e_\alpha\| - \|T_\alpha(e_\alpha)\|)\} \geq$$

$$\|x\|.$$

Para la proyección $P:\widetilde{X}\to X$ basta poner:

$$P\{(x;(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma})+V\} = \{(x;(P_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in\Gamma})+V\}.$$

Finalmente, para cada $\gamma\in\Gamma$ la proyección $\tilde{Q}_\gamma:\widetilde{X}\to\tilde{T}_\gamma(X)$, está dada por:

$$\tilde{Q}_\gamma\{(x;(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma})+V\} = \{(Q_\gamma(x+\sum_{\alpha\in\Gamma_{\alpha\neq\gamma}}T_\alpha P_\alpha x_\alpha);(\delta_{\gamma\alpha}x_\gamma)_{\alpha\in\Gamma})+V\}.$$

■

Demostración del Teorema I.2.8.

Sea X espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ con caracter de densidad $\aleph$.

Para $X_0 := X$, elijamos un conjunto de elementos $D_0 := \{x_\lambda^0\}_{\lambda\in\Lambda_0}$ de S_{X_0} denso en S_{X_0} y de cardinal $\aleph$. Pongamos $\Gamma_0 := \Lambda_0\times\Lambda_0$ y, para $\alpha := (\lambda,\mu)$ en Γ_0, consideremos el subespacio $E_\alpha^0 := \mathbb{K}x_\lambda^0$ de X_0 y sea $T_\alpha^0 : E_\alpha^0 \to X_0$ la única aplicación lineal (automáticamente isométrica) que satisface $T_\alpha^0(x_\lambda^0) = x_\mu^0$. Por otra parte, debido al teorema de Hahn-Banach, podemos elegir proyecciones P_α^0 y Q_α^0 de X_0 en E_α^0 y en $T_\alpha^0(E_\alpha^0)$, respectivamente. Llamemos R^0 a la identidad en X que, metodológicamente, convendrá ver como una proyección contractiva de X_0 sobre X. Aplicando el lema anterior a las familias $\{E_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma_0}$, $\{T_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma_0}$, $\{P_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma_0}$ y $\{Q_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma_0}$, se obtiene:

(i) Un espacio de Banach X_1 que contiene a X_0 y tiene caracter de densidad $\aleph$.

(ii) $\widetilde{T}^0_\alpha : X_0 \to X_1$ extensión isométrica de T^0_α para todo $\alpha \in \Gamma_0$.

(iii) $\widetilde{Q}^0_\alpha : X_1 \to \widetilde{T}^0_\alpha(X_0)$ proyección contractiva para todo $\alpha \in \Gamma_0$.

(iv) $P^0 : X_1 \to X_0$ proyección contractiva.

De nuevo por razones metodológicas, escribiremos $R^1 := R^0 \circ P^0$, que es una proyección contractiva de X_1 sobre X.

Para cada α en Γ_0 definamos:

(i) $E^1_\alpha := \widetilde{T}^0_\alpha(X_0)$

(ii) $T^1_\alpha := j_0 \circ (\widetilde{T}^0_\alpha)^{-1} : E^1_\alpha \to X_1$, donde j_0 denota la aplicación inclusión de X_0 en X_1.

(iii) $Q^1_\alpha := P^0$.

(iv) $P^1_\alpha := \widetilde{Q}^0_\alpha$.

Del lema previo, se sigue la existencia de:

(i) X_2 espacio de Banach que contiene a X_1 y tiene caracter de densidad $\aleph$.

(ii) $\widetilde{T}^1_\alpha : X_1 \to X_2$ extensión isométrica de T^1_α para todo $\alpha \in \Gamma_0$.

(iii) $\widetilde{Q}^1_\alpha : X_2 \to \widetilde{T}^1_\alpha(X_1)$ proyección contractiva para todo $\alpha \in \Gamma_0$.

(iv) $P^1 : X_2 \to X_1$ proyección contractiva.

Sea $D_2 := \{x^2_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_2}$ subconjunto de S_{X_2} denso en S_{X_2} y de cardinal $\aleph$, y sea Γ_2 la unión disjunta de Γ_0 y $\Lambda_2 \times \Lambda_2$. Para α en Γ_2 consideraremos:

(i) El subespacio E^2_α de X_2 dado por $E^2_\alpha := X_0$ si α pertenece a Γ_0, y $E^2_\alpha := \mathbb{K} x^2_\lambda$ si $\alpha = (\lambda, \mu)$ pertenece a $\Lambda_2 \times \Lambda_2$.

(ii) La isometría T_α^2 en X_2 dada por $T_\alpha^2 := \widetilde{T}_\alpha^0$ si α pertenece a Γ_0, y T_α^2 igual a la única función lineal de E_α^2 en X_2 que satisface $T_\alpha^2(x_\lambda^2) = x_\mu^2$ si $\alpha = (\lambda, \mu)$ pertenece a $\Lambda_2 \times \Lambda_2$.

(iii) La proyección contractiva P_α^2 de X_2 sobre E_α^2 dada por $P_\alpha^2 := P^0 \circ P^1$ si α pertenece a Γ_0, y elegida arbitrariamente en caso contrario.

(iv) La proyección contractiva Q_α^2 de X_2 sobre $T_\alpha^2(E_\alpha^2)$ dada por $Q_\alpha^2 := \widetilde{Q}_\alpha^0 \circ P^1$ si α pertenece a Γ_0, y elegida arbitrariamente en caso contrario.

Por otra parte, ponemos $R^2 := R^0 \circ P^1$, proyección contractiva de X_2 sobre X.

Ahora la séxtupla

$$(X_2, \{E_\alpha^2\}_{\alpha\in\Gamma_2}, \{T_\alpha^2\}_{\alpha\in\Gamma_2}, \{P_\alpha^2\}_{\alpha\in\Gamma_2}, \{Q_\alpha^2\}_{\alpha\in\Gamma_2}, R^2)$$

está en la misma situción que

$$(X_0, \{E_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma_0}, \{T_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma_0}, \{P_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma_0}, \{Q_\alpha^0\}_{\alpha\in\Gamma_0}, R^0),$$

lo que permite contiruar el proceso, obteniéndose así una sucesión

$$(X_n, \{E_\alpha^n\}_{\alpha\in\Gamma_n}, \{T_\alpha^n\}_{\alpha\in\Gamma_n}, \{P_\alpha^n\}_{\alpha\in\Gamma_n}, \{Q_\alpha^n\}_{\alpha\in\Gamma_n}, R^n)_{n\geq 0}$$

cuyas propiedades puede adivinar el lector. Recalcamos que, en la definición inductiva de la sucesión anterior, el paso del término n-ésimo al siguiente debe hacerse de manera similar a como se ha procedido para pasar del término 0-ésimo al 1-ésimo si n es par, mientras que, en caso contrario, el proceso queda ilustrado por el procedimiento que hemos aplicado para pasar del término 1-ésimo al 2-ésimo. El espacio de Banach casi-transitivo que buscamos no es otro que $Z := \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n}$, y la proyección contractiva de Z sobre X está determinada por R^n, para n en $\mathbb{N}$. ∎

En la sección primera de este capítulo sugeríamos la posibilidad de que la transitividad de la norma (o incluso algunas de sus debilitaciones), junto con alguna otra propiedad adicional, pudiera caracterizar a los espacios de Hilbert en la clase de los espacios de Banach. Tal posibilidad ha sido contemplada con éxito en la literatura y constituye de hecho una de las líneas fundamentales del tema que estamos contemplando. Damos a continuación algunos resultados en esta dirección. Un operador lineal F en un espacio de Banach X se dice ser una **reflexión** si hay un subespacio maximal M de X y un elemento no cero e en X tal que F fija los elementos de M y satisface $F(e) = -e$. Nótese que toda reflexión es una perturbación unidimensional de la identidad. Si X es un espacio de Hilbert, X posee reflexiones isométricas en abundancia, a saber, las aplicaciones de la forma $x \mapsto x - 2(x|e)e$ donde e es cualquier elemento en S_X.

TEOREMA I.2.10 . [SZ]. *Un espacio de Banach real es un espacio de Hilbert si (y sólo si) es casi-transitivo y tiene una reflexión isométrica.*

En su tesis, F. Cabello observa que en espacios de Banach reales no existen más reflexiones isométricas que las isometrías que son perturbaciones unidimensionales de la identidad, y prueba el siguiente teorema, que es la versión compleja del resultado que acabamos de presentar.

TEOREMA I.2.11 . [Ca1]. *Un espacio de Banach complejo es un espacio de Hilbert si (y sólo si) es casi-transitivo y tiene una isometría que es perturbación unidimensional de la identidad.*

I.3 Cómo obtener espacios transitivos a partir de casi-transitivos, y viceversa.

El Teorema I.2.8 junto con la noción de ultraproducto de una familia de espacios de Banach (ver [H]) es la clave para construir espacios de Banach transitivos, no hilbertianos y, como es de esperar, no separables. Empezaremos resumiendo aquellos aspectos de la teoría de ultraproductos que necesitaremos para nuestros propósitos.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en un conjunto no vacio I, y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach. Podemos considerar el espacio de Banach $\oplus_{i\in I}^{\ell_\infty} X_i$, ℓ_∞-suma de dicha familia, y el subespacio cerrado $N_{\mathcal{U}}$ de $\oplus_{i\in I}^{\ell_\infty} X_i$ dado por

$$N_{\mathcal{U}} := \{\{x_i\}_{i\in I} \in \oplus_{i\in I}^{\ell_\infty} X_i : \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\} .$$

Se define el **ultraproducto** $(X_i)_{\mathcal{U}}$ de la familia de espacios de Banach $\{X_i\}_{i\in I}$ según el ultrafiltro $\mathcal{U}$ como el espacio cociente $\oplus_{i\in I}^{\ell_\infty} X_i / N_{\mathcal{U}}$. Si denotamos por (x_i) el elemento de $(X_i)_{\mathcal{U}}$ que contiene a $\{x_i\}$, es fácil comprobar que se tiene

$$\|(x_i)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| .$$

Gracias a esta fórmula, si, para cada i en I, Y_i es un subespacio cerrado de X_i, podemos identificar de manera natural $(Y_i)_{\mathcal{U}}$ con un subespacio de $(X_i)_{\mathcal{U}}$. Si $X_i = X$ para todo i en I, donde X es un cierto espacio de Banach prefijado, entonces el ultraproducto $(X_i)_{\mathcal{U}}$ se llamará la **ultrapotencia** del espacio de Banach X según el ultrafiltro $\mathcal{U}$, que denotamos por $X_{\mathcal{U}}$. En este caso la aplicación lineal $x \mapsto \widehat{x}$ de X en $X_{\mathcal{U}}$, donde $\widehat{x} = (x_i)$ con $x_i = x$ para todo i en I, es una isometría lineal.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en un conjunto I se dirá que es **trivial** si existe i_0 en I tal que $\{i_0\} \in \mathcal{U}$. En tal caso una parte U de I pertenece a $\mathcal{U}$ si y solo si i_0 pertenece a U. Es claro que, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no trivial en I, entonces $I \setminus \{i\}$ pertenece a $\mathcal{U}$ cualquiera que sea i en I, y en consecuencia $\mathcal{U}$ contiene al filtro de las partes cofinitas de I. Diremos que el ultrafiltro $\mathcal{U}$ es **numerablemente incompleto** si hay una familia numerable $U_1, ..., U_n, ...$ de elementos de $\mathcal{U}$ cuya intersección (sea U) no pertenece a $\mathcal{U}$. Si este es el caso, es suficiente definir inductivamente $I_1 = I, I_{n+1} = I_n \cap U_n \cap (I \setminus U)$, para tener de hecho una sucesión $\{I_n\}$ de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $I = I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ..... \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Es claro que un ultrafiltro numerablemente incompleto en cualquier conjunto I es no trivial. Es igualmente claro que, si I es numerable, los conceptos de no trivialidad y de numerable incomplitud para ultrafiltros en I son equivalentes.

El siguiente resultado se considera folklore en la teoría (ver [Ca2, Lemma 1.4] o [GJK, Remark pág. 479]).

PROPOSICIÓN I.3.1. *Si I es un conjunto numerable, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no trivial en I, y si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios de Banach casi-transitivos, entonces $(X_i)_{\mathcal{U}}$ es transitivo.*

Presentamos a continuación una extensión razonable del resultado anterior.

PROPOSICIÓN I.3.2. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto en un conjunto I y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach casi-transitivos, entonces $(X_i)_{\mathcal{U}}$ es un espacio de Banach transitivo.*

Demostración. Por lo comentado anteriormente, existe una sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $I = I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Consideremos la aplicación $\sigma : I \to \mathbb{N}$ dada por $\sigma(i) := \max\{n \in \mathbb{N} : i \in I_n\}$. Comprobemos que para (x_i) e (y_i) en $S_{(X_i)_{\mathcal{U}}}$ existe T en $\mathcal{G}((X_i)_{\mathcal{U}})$ tal que $T((x_i)) = (y_i)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que x_i, y_i pertenecen a S_{X_i} cualquiera que sea i en I. Dado $i \in I$ existe T_i en $\mathcal{G}(X_i)$ con $\|y_i - T_i(x_i)\| \leq \frac{1}{\sigma(i)}$. Si definimos el operador T de $(X_i)_{\mathcal{U}}$ en $(X_i)_{\mathcal{U}}$ por $T((z_i)) := (T_i(z_i))$ para (z_i) en $(X_i)_{\mathcal{U}}$, se comprueba fácilmente que T es una isometría sobreyectiva. Veamos que $T((x_i)) = (y_i)$, es decir, para $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{i \in I : \|y_i - T_i(x_i)\| \leq \varepsilon\}$ pertenece a $\mathcal{U}$. Esto último es cierto ya que $\{i \in I : \|y_i - T_i(x_i)\| \leq \varepsilon\}$ contiene a $\{i \in I : \sigma(i) \geq p\}$ para p en $\mathbb{N}$ con $\frac{1}{p} < \varepsilon$, quien a su vez contiene a I_p. ∎

Una primera consecuencia de la Proposición I.3.1 es que, si una clase de espacios de Banach es estable por ultrapotencias y contiene un espacio de Banach casi-transitivo no Hilbert, entonces también contiene un espacio de Banach transitivo no Hilbert. La clase de los espacios del tipo $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es estable por ultrapotencias [esta afirmación es casi obvia si se sabe que, gracias al teorema conmutativo de Gelfand-Naimark [S, Corollary 1.2.2], los espacios $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ no son otra cosa que las C^*-álgebras conmutativas; el concepto de C^*-álgebra se establecerá con precisión en el capítulo tercero de esta memoria]. Así la Conjetura I.1.4 es equivalente a la que sigue (aparentemente más ambiciosa).

CONJETURA I.3.3. (WOOD [W]). *Si* $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ *es casi-transitivo, entonces* L *se reduce a un punto.*

Es bien conocido (ver [W, Section 3]) que la respuesta a la conjetura anterior es afirmativa si el espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L es de hecho compacto. Una consecuencia inmediata del Teorema I.2.8 de Lusky y de la Proposición I.3.1 es el siguiente resultado:

COROLARIO I.3.4 . *Todo espacio de Banach se puede ver isométricamente como subespacio de un espacio de Banach transitivo.*

En el próximo teorema obtenemos una interesante variante del resultado anterior.

TEOREMA I.3.5 . *Todo espacio de Banach 1-complementado en su bidual, es copia isométrica de un subespacio 1-complementado en un espacio de Banach transitivo.*

Demostración. Como la relación "estar 1-complementado en" es transitiva, es suficiente probar que todo espacio de Banach dual está 1-complementado en un espacio de Banach transitivo (por cierto, que también es necesario probar lo anterior, en vista de que todo espacio de Banach dual está 1-complementado en su bidual). Sea X espacio de Banach dual, y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no trivial en $\mathbb{N}$. Por el Teorema I.2.8, existe un espacio de Banach casi-transitivo Z que contiene a X como subespacio 1-complementado con proyección contractiva $Q_1 : Z \to X$. Entonces $X_{\mathcal{U}}$ está 1-complementado en $Z_{\mathcal{U}}$, a saber, por la proyección "ultrapotencia" $\widehat{Q_1}$ dada por $\widehat{Q_1}(x_i) := (Q_1(x_i))$ para (x_i) en $Z_{\mathcal{U}}$. Por otro lado, viendo a X como subespacio de $X_{\mathcal{U}}$ de la manera natural, X está 1-ccmlementado en $X_{\mathcal{U}}$ con proyección contractiva $Q_2 : (x_n) \mapsto w^* - \lim_{\mathcal{U}}\{x_n\}$. Mediante la proyección $Q_2 \circ \widehat{Q_1} : Z_{\mathcal{U}} \to X$ obtenemos que X es un subespacio 1-complementado de $Z_{\mathcal{U}}$. Pero $Z_{\mathcal{U}}$ es transitivo por la Proposición I.3.1. ∎

Como hemos comentado en la demostración del teorema anterior, todo espacio de Banach dual está 1-complementado en su bidual. Ahora bien, la clase de los espacios de Banach 1-complementados en su bidual es sensiblemente más amplia que la de los espacios de Banach duales. Un ejemplo significativo de un espacio de Banach no dual pero 1-complementado en su bidual podría ser $L_1(\mu)$ para cualquier medida μ sin átomos.

Recordemos que un espacio de Banach X tiene la **propiedad de aproximación** si, para todo conjunto compacto K de X y para todo $\varepsilon > 0$, existe un operador lineal continuo T de X en X con rango finito tal que $\|T(x) - x\| \leq \varepsilon$, para todo $x \in K$. Por los años 70, no se descartaba que todo espacio de Banach poseyera la propiedad de aproximación. Esta cuestión se saldó con el trabajo de P. Enflo [E], donde se presenta un espacio de Banach separable sin dicha propiedad. Como quiera que la propiedad de aproximación se hereda por subespacios complementados, W. Lusky [Lu2] utiliza el ejemplo de Enflo y su Teorema I.2.8 para obtener un espacio de Banach separable casi-transitivo, que falla a la propiedad de aproximación. Después del ejemplo dado por P. Enflo, han aparecido incluso ejemplos de espacios de Banach reflexivos sin la propiedad de aproximación. Tal es el caso de ciertos subespacios de ℓ_p para $2 < p < \infty$ (ver [LT, Theorem 2.d.6]). De este hecho, del Teorema I.3.5, y del ya comentado caracter hereditario de la propiedad de aproximación con respecto a subespacios complementados, se sigue inmediatamente el siguiente corolario, cuyo contenido aparece anunciado sin demostración en [Ca1, Pág. 57].

COROLARIO I.3.6 . *Existen espacios de Banach transitivos sin la propiedad de aproximación.*

El resto de esta sección lo dedicamos a exponer cómo obtener espacios casi-transitivos a partir de transitivos, siguiendo la línea desarrollada por F. Cabello en [Ca2]. En el recién citado trabajo, el autor se ocupa de obtener espacios separables casi-transitivos a partir de espacios transitivos. La mayor generalidad que nosotros contemplaremos no supone ideas esencialmente nuevas sobre las aportadas por F. Cabello.

TEOREMA I.3.7 . [Ca2]. *Sea X un espacio de Banach transitivo, y M un subespacio cerrado de X. Entonces M puede ser agrandado a* *un subespacio cerrado Z de X que es casi-transitivo y tiene el mismo caracter de densidad que M.*

Demostración. Pongamos $Y_0 := M$, y denotemos por $\aleph$ el caracter de densidad de M. Existe un subconjunto D_0 de S_{Y_0} de cardinal $\aleph$ y denso en S_{Y_0}. Para x_0 e y_0 en D_0 elíjase T_{x_0,y_0} en $\mathcal{G}$ con $T_{x_0,y_0}(x_0) = y_0$. Podemos considerar $\mathcal{G}_1$ el subgrupo de $\mathcal{G}$ generado por $\{T_{x_0,y_0} : x_0, y_0 \in D_0\}$. Es claro que el cardinal de $\mathcal{G}_1$ es $\aleph$. Si definimos $Y_1 := \overline{Lin}\left(\bigcup_{T\in\mathcal{G}_1} T(Y_0)\right)$, se tiene que el caracter de densidad de Y_1 es $\aleph$ (puesto que $\aleph\aleph = \aleph$) y que Y_1 es $\mathcal{G}_1$-invariante. Sea D_1 un subconjunto de S_{Y_1} de cardinal $\aleph$, denso en S_{Y_1} con $D_0 \subseteq D_1$. Como antes, para x_1, y_1 en D_1, podemos elegir T_{x_1,y_1} en $\mathcal{G}$ con $T_{x_1,y_1}(x_1) = y_1$. Denotamos por $\mathcal{G}_2$ el subgrupo de $\mathcal{G}$ generado por $\{T_{x_1,y_1} : x_1, y_1 \in D_1\} \bigcup \mathcal{G}_1$, que tiene cardinal $\aleph$. Para el subespacio de X, $Y_2 := \overline{Lin}\left(\bigcup_{T\in\mathcal{G}_2} T(Y_1)\right)$, se concluye, que tiene caracter de densidad $\aleph$, que contiene a Y_1, que es $\mathcal{G}_2$-invariante y para x, y en D_1 existe T en $\mathcal{G}_2$ con $T(x) = y$.

Prosiguiendo de esta forma obtenemos sucesiones $\{Y_n\}$, $\{D_n\}$, $\{G_n\}$ organizadas de forma que:

(i) Y_n es un subespacio de X con caracter de densidad $\aleph$.

(ii) $Y_n \subset Y_{n+1}$.

(iii) cada D_n es un conjunto denso con cardinal $\aleph$ de S_{Y_n}.

(iv) cada $\mathcal{G}_n$ es un subgrupo de $\mathcal{G}$ de cardinal $\aleph$.

(v) $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$.

(vi) Y_n es $\mathcal{G}_n$-invariante.

(vii) dados $x, y \in D_n$, existe $T \in \mathcal{G}_{n+1}$ tal que $y = T(x)$.

Consideremos $Z = Y_\infty := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n}$, $D_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ y $\mathcal{G}_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$. Es claro que Y_∞ es un subespacio de X con caracter de densidad $\aleph$ y que D_∞ es un subconjunto denso en S_{Y_∞} tal que para x, y en D_∞ existe T en

$\mathcal{G}_\infty$ con $T(x) = y$. Para concluir, veamos que Y_∞ es $\mathcal{G}_\infty$-invariante. Para $T \in \mathcal{G}_\infty$, existe $\mathcal{G}_m$ con $T \in \mathcal{G}_m$. Entonces

$$TY_\infty = T\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n} = T\overline{\bigcup_{n>m} Y_n} = \overline{\bigcup_{n>m} TY_n} = \overline{\bigcup_{n>m} Y_n} = Y_\infty. \blacksquare$$

Si el espacio de Banach transitivo X en el teorema anterior tiene una cierta perfección adicional, es lícito preguntarse si el agrandamiento casi-transitivo Z del subespacio M, cuya existencia se garantiza en el teorema, se puede elegir de manera que herede la perfección de X. La respuesta a esta pregunta es afirmativa si la perfección en cuestión es "categorizable", en un cierto sentido que especificamos a continuación. Dada una subcategoría $\mathcal{J}$ de espacios de Banach (ver [Se, p.161, Definition 9.13]), entenderemos por **$\mathcal{J}$-espacio** un objeto de $\mathcal{J}$, y un **$\mathcal{J}$-subespacio** de un $\mathcal{J}$-espacio X será un subespacio cerrado Y de X tal que Y es un $\mathcal{J}$-espacio y la inclusión $Y \hookrightarrow X$ es un $\mathcal{J}$-morfismo. Una subcategoría $\mathcal{J}$ de espacios de Banach se dice ser **admisible** si satisface las siguientes condiciones:

(i) Dado un $\mathcal{J}$-espacio X y un subespacio separable Z de X, existe un $\mathcal{J}$-subespacio Y de X que es separable y contiene a Z.

(ii) Dado un $\mathcal{J}$-espacio X y una sucesión creciente $\{Y_n\}$ de $\mathcal{J}$-subespacios de X, el espacio $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n}$ es un $\mathcal{J}$-espacio.

TEOREMA I.3.8. [Ca2]. *Sea $\mathcal{J}$ una subcategoría admisible de espacios de Banach, X un $\mathcal{J}$-espacio transitivo, y M un subespacio separable de X. Entonces existe un subespacio separable casi-transitivo de X que es un $\mathcal{J}$-espacio y contiene a M.*

Ni que decir tiene que la particularización del Teorema I.3.7 al caso $\aleph = \aleph_0$ es un corolario inmediato del teorema que acabamos de enunciar. Basta tener en cuenta que la categoría de todos los espacios de Banach es admisible. En realidad, si uno se emperra, se puede derivar la versión general del Teorema I.3.7 de un resultado categórico cuya formulación seguiría las pautas que a continuación se indican. Dado un cardinal transfinito $\aleph$, definiríamos la categoría $\aleph$-admisible de espacios de Banach manteniendo la condición ii) en la definición de categoría admisible pero sustituyendo la condición i) en dicha definición por:

$i_{\aleph}$) Dado un $\mathcal{J}$-espacio X y un subespacio Z de X con caracter de densidad $\aleph$, existe un $\mathcal{J}$-subespacio Y de X que contiene a Z y con caracter de densidad $\aleph$.

Entonces, pequeños cambios en la demostración original del Teorema I.3.8 (que, a su vez, difiere poco de la que hemos dado para el Teorema I.3.7) permitirían demostrar que

> *Si $\mathcal{J}$ es una subcategoría $\aleph$-admisible de espacios de Banach, si X es un $\mathcal{J}$-espacio transitivo, y si M es un subespacio de X con caracter de densidad $\aleph$, entonces existe un subespacio casi-transitivo de X que es un $\mathcal{J}$-espacio, contiene a M y tiene caracter de densidad $\aleph$.*

Una brillante aplicación del Teorema I.3.8 aparece en el artículo de F. Cabello, que estamos reseñando, en orden a reducir la conjetura de Wood (Conjetura I.3.3) a un caso realmente sangrante. La idea consiste en utilizar la ya comentada identificación entre los espacios del tipo $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ con las C^*-álgebras conmutativas, categorizar la clase de las C^*-álgebras conmutativas tomando como morfismos de la categoría aquellos morfismos de álgebra que preservan la involución, observar que tal categoría es admisible, y finalmente aplicar el Teorema I.3.8. Se obtiene así que la conjetura de Wood es equivalente a la siguiente.

CONJETURA I.3.9. [Ca2]. *Si L es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto cuya compactificación por un punto es metrizable, y si $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es casi-transitivo, entonces L se reduce a un punto.*

I.4 Espacios de Banach convexo-transitivos.

Después del inciso que ha supuesto la sección anterior, proseguimos presentando las sucesivas debilitaciones del concepto de transitividad de la norma que aparecen en la literatura.

DEFINICIÓN I.4.1 . Dado un espacio de Banach X, diremos que su **norma** es **convexo-transitiva** (o que X es **convexo-transitivo**) si para todo x en S_X se tiene $\overline{co}(\mathcal{G}(x)) = B_X$, donde $\overline{co}$ significa envolvente convexo cerreda.

Claramente todo espacio de Banach casi-transitivo es convexo-transitivo. En el siguiente teorema recogemos una caracterización de la convexo-transitividad debida a E.R. Cowie, que se ha demostrado ser muy útil en el desarrollo de la teoría de los espacios convexo-transitivos.

TEOREMA I.4.2 . [Co]. *Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es convexo-transitivo.

(ii) Toda norma continua en X que agrande el grupo de isometrías de X es un múltiplo positivo de la norma de X.

(iii) Toda norma equivalente en X que agrande el grupo de isometrías de X es un múltiplo positivo de la norma de X.

El teorema original de Cowie sólo establece la equivalencia entre las condiciones i) y iii) de arriba. Por otra parte, la implicación $ii) \Rightarrow iii)$ es clara. Veamos que iii) implica ii). Si $|\!|\!|.|\!|\!|$ es una norma continua en X que agranda el grupo de isometrías, entonces la norma $|.|$ en X dada por $|x| := \|x\| + |\!|\!|x|\!|\!|$ es equivalente a la inicial y agranda el grupo de isometrías. Así, si se supone iii), se tiene que $|.|$ es múltiplo de $\|.\|$, y en consecuencia también $|\!|\!|.|\!|\!|$ es múltiplo de $\|.\|$.

Entre la tecnología desarrollada por Cowie en la demostración de su teorema, figura la observación (elemental, gracias al teorema de Hanh-Banach) de que un espacio de Banach X es convexo-transitivo si y sólo si, para cada x en S_X y para cada f en S_{X^*}, se tiene

$$\sup\{Ref(T(x)) : T \in \mathcal{G}\}(= \sup\{|f(T(x))| : T \in \mathcal{G}\}) = 1.$$

Reescribiendo la igualdad anterior en la forma

$$\sup\{ReT^*(f)(x) : T \in \mathcal{G}\} = 1,$$

y aplicando de nuevo el teorema de Hanh-Banach, obtenemos la siguiente caracterización dual de la convexo-transitividad, que puede considerarse folklórica.

PROPOSICIÓN I.4.3. *Un espacio de Banach X es convexo-transitivo si y sólo si, para todo f en S_{X^*}, la envolvente convexa de $\{T^*(f) : T \in \mathcal{G}\}$ es w^*-densa en B_{X^*}.*

La convexo-transitividad de la norma en los espacios del tipo $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ ha sido estudiada con cierto detalle por G. V. Wood en [W]. En los dos teoremas que siguen recogemos los resultados principales obtenidos por Wood al respecto.

TEOREMA I.4.4. [W]. *$C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es convexo-transitivo si y sólo si, para toda medida positiva μ sobre L con $\|\mu\| = 1$ y para todo t en L, existe una red $\{\gamma_\alpha\}$ de homeomorfismos de L tal que $\{\mu \circ \gamma_\alpha\}$ converge a δ_t en la topología w^*.*

En el teorema anterior (así como en el siguiente), para μ medida sobre L y γ homeomorfismo de L, $\mu \circ \gamma$ denota la medida sobre L definida por $\int x d(\mu \circ \gamma) = \int (x \circ \gamma) d(\mu)$, para todo x en $C_0^{\mathbb{K}}(L)$, y, para t en L, δ_t denota la medida de Dirac concentrada en t.

TEOREMA I.4.5. [W]. *$C_0^{\mathbb{R}}(L)$ es convexo-transitivo si y sólo si L es totalmente desconectado y, para toda medida positiva μ sobre L con $\|\mu\| = 1$ y para todo t en L, existe una red $\{\gamma_\alpha\}$ de homeomorfismos de L tal que $\{\mu \circ \gamma_\alpha\}$ converge a δ_t en la topología w^*.*

Destacamos la siguiente consecuencia obvia de los dos teoremas anteriores.

COROLARIO I.4.6. *Si $C_0^{\mathbb{R}}(L)$ es convexo-transitivo, entonces $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es convexo-transitivo.*

A nuestro juicio, los Teoremas I.4.4 y I.4.5 son teóricamente muy bellos pero no demasiado útiles para la obtención de ejemplos concretos de espacios convexo-transitivos. Su interés reside esencialmente en el corolario anterior y en el hecho advertido en [Cal] de que el Teorema I.2.5 es fácilmente deducible del Teorema I.4.5. Que sepamos, los únicos ejemplos conocidos de espacios de Banach convexo-transitivos no casi-transitivos se encuentran entre los del tipo $C_0^{\mathbb{K}}(L)$, tal cual se recoge a continuación. Todos ellos fueron descubiertos por A. Pelczynski y S. Rolewicz en [PR] (ver también [Ro] y [W]).

EJEMPLOS I.4.7. Los siguientes espacios de Banach son convexo-transitivos:

(i) $C_0^{\mathbb{C}}(L)$, con $L = (0, 1)$.

(ii) $C^{\mathbb{K}}(K)$, donde K es el conjunto de Cantor.

(iii) $C^{\mathbb{C}}(K)$, con $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(iv) $L_\infty^{\mathbb{K}}([0, 1], \gamma)$, donde γ es la medida de Lebesgue. Nótese que, como $L_\infty^{\mathbb{C}}([0, 1], \gamma)$ es una C^*-álgebra conmutativa con unidad, se tiene $L_\infty^{\mathbb{K}}([0, 1], \gamma) = C^{\mathbb{K}}(K)$, para un conveniente espacio topológico de Hausdorff compacto K.

Como se demuestra en [W, pag. 180], $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ no puede ser casi-transitivo si L tiene más de un punto y, o bien L es compacto, o bien L tiene un subconjunto conexo y compacto con interior no vacío. Se sigue de aquí que ninguno de los espacios convexo-transitivos enumerados arriba puede ser casi-transitivo.

Pasamos ahora a reseñar una bonita caracterización de los espacios de Hilbert complejos en términos de transitividad convexa de la norma, que se debe a N. J. Kalton y G. V. Wood. Recuérdese que un operador lineal continuo F en un espacio de Banach complejo X se dice ser **hermítico** si, para todo λ en $\mathbb{R}$, $exp(i\lambda F)$ es una isometría. Si X es un espacio de Hilbert complejo, las proyecciones ortogonales sobre los subespacios cerrados de X constituyen ejemplos de proyecciones hermíticas.

TEOREMA I.4.8. [KW, Theorem 6.4]. *Sea X un espacio de Banach complejo convexo-transitivo, y supóngase que existe una proyección hermítica en X cuya imagen es un subespacio unidimensional de X. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Terminaremos esta sección relatando una anécdota historico-literaria en relación con la transitividad convexa de la norma, que puede inducir a error al lector no habituado con el tema. Se trata de dos resultados que aparecen en el libro de S. Rolewicz [Ro, Theorems 9.7.3 and 9.7.7], quien los atribuye a G. V. Wood en un trabajo no plublicado que tiene igual título que [W]. Tales resultados rezan como sigue.

> *$C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es convexo-transitivo si y solo si, para cada s en L, el conjunto $\{\gamma(s) : \gamma$ homeomorfismo de $L\}$ es denso en L.*

> *$C_0^{\mathbb{R}}(L)$ es convexo-transitivo si y solo si L es totalmente disconexo y, para cada s en L, el conjunto $\{\gamma(s) : \gamma$ homeomorfismo de $L\}$ es denso en L.*

Ambos resultados son claramente falsos. En efecto, si los aceptáramos, el espacio c_0 sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ sería convexo-transitivo, contrariamente a lo que un cálculo elemental muestra (si el espacio c_0 complejo fuese convexo-transitivo, entonces sería un espacio de Hilbert en vista del Teorema I.4.8). Otro disparate que se seguiría de los resultados citados arriba es que los espacios ℓ_∞^n $(n \geq 2)$ sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ serían convexo-transitivos. El error en la demostración es de tipo infantil, y se presenta cuando se pretende probar que, si el conjunto $\{\gamma(s) : \gamma$ homeomorfismo de $L\}$ es denso en L para todo s en L, entonces $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ es convexo-transitivo. Para ello se utiliza el Teorema I.4.2, que reduce la prueba a la verificación de una cierta igualdad. Como es habitual, tal igualdad se pretende establecer por la doble desigualdad (ver (9.7.6) y (9.7.9) en las páginas 417 y 418, respectivamente, de [Ro]), con tan mala fortuna que, en ambos casos, se escribe justo la desigualdad contraria a la que el argumento de prueba permite. Podría parecer entonces que el argumento es correcto. Pero esto no es así, ya que la demostración de (9.7.9) utiliza la versión escrita (y por tanto incorrecta) de (9.7.6).

Tenemos la impresión de que los resultados que acabamos de discutir no son otra cosa que versiones preliminares erroneas de los Teoremas I.4.4 y I.4.5. En cualquier caso, algo de verdad hay en ellos, tal cual se desprende de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN I.4.9 . *Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y pongamos $X := C_0^{\mathbb{C}}(L)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $Lin\{\mathcal{G}(x)\}$ es densa en X, cualquiera que sea x en S_X.

(ii) El grupo de homeomorfismos de L, Γ, actúa "casi-transitivamente" en L, es decir, $\Gamma(s) := \{\gamma(s) : \gamma \in \Gamma\}$ es denso en L para todo s en L.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$.- Supongamos que existe s en L tal que $\overline{\Gamma(s)} \neq L$. Si consideramos el subespacio de X dado por $I := \{x \in X : x(\Gamma(s)) = 0\}$, se tiene que éste es un subespacio cerrado no nulo de X. Del conocido teorema de Stone que describe las isometrías lineales y sobreyectivas de X, se sigue inmediatamente que I es $\mathcal{G}$-invariante. Ahora, para x en $I \cap S_X$, se tiene que $Lin\{\mathcal{G}(x)\}$ está contenido en I y, por tanto, no es denso en X.

$ii) \Rightarrow i)$.- Para x en S_X consideremos $I := \overline{Lin(\mathcal{G}(x))}$. Comprobemos que I es un ideal de X. Para ello veremos que el producto de un elemento de X real valuado por cualquier elemento de I, pertenece a I. Sea z en X un elemento real valuado. Entonces para α en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ la multiplicación por $exp(i\alpha z)$ es una isometría lineal y sobreyectiva. Para y en I, se tiene que

$$\frac{exp(i\alpha z)y - y}{\alpha} \in I$$

y, tomando límites cuando α tiende a cero, obtenemos que zy pertenece a I. Al ser I un ideal de X, existe E subconjunto cerrado de L tal que $I = \{y \in X : y(E) = 0\}$. Aplicando nuevamente que I es $\mathcal{G}$-invariante, se deduce que E es invariante por los homeomorfismos de L. De la hipótesis $ii)$ y del hecho de ser I distinto de cero se sigue que E tiene que ser vacio, de donde $I = X$. ∎

En la prueba de la proposición anterior hemos utilizado el teorema de Stone, según el cual para una isometría lineal y sobreyectiva T en $X := C_0^{\mathbb{K}}(L)$ existe θ función continua de L en $\mathbb{K}$ de módulo uno y γ homeomorfismo de L, tal que $T(x)(s) = \theta(s)x(\gamma(s))$ para todo x en X y s en L.

I.5 Espacios de Banach con norma maximal.

En esta sección presentamos la más débil condición de transitividad de la norma que aparece en la literarura, a saber la de norma maximal.

DEFINICIÓN I.5.1 . Dado un espacio de Banach X, diremos que su **norma es maximal**, si no existe una norma en X equivalente a ella cuyo grupo de isometrías contenga estrictamente a $\mathcal{G}$.

El concepto de maximalidad de la norma, en cierto modo, es menos intuitivo que los anteriores. Por otra parte, que la propiedad de maximalidad de la norma venga implicada por la convexo-transitividad no es evidente aunque sí cierto como bien se puede comprobar en el Teorema I.4.2 $(i) \Rightarrow (iii)$. En resumen, disponemos de la siguiente cadena de implicaciones entre propiedades de la norma de un espacio de Banach:

$$\boxed{\text{Hilbertiana}} \Rightarrow \boxed{\text{Transitiva}} \Rightarrow \boxed{\text{Casi-transitiva}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\text{Convexo-transitiva}} \Rightarrow \boxed{\text{Maximal}}$$

En secciones anteriores hemos visto que las tres primeras implicaciones en la cadena anterior no son reversibles. Con los ejemplos que damos a continuación nos convencemos de que la última implicación tampoco lo es.

EJEMPLOS I.5.2. Recordemos que una base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach X se dice ser (1-)**simétrica** si para toda biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y para cualesquiera dos sucesiónes finitas de escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ con $|\beta_1| = \ldots = |\beta_n| = 1$ se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i e_{\sigma(i)} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| .$$

Sea X un espacio de Banach con una base simétrica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Fijada una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y una sucesión $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares de módulo 1, para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ en X la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n e_{\sigma(n)}$ es convergente, y la función $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n e_{\sigma(n)}$ es una isometría sobreyectiva en X. Pelczinski y Rolewicz demuestran que en un espacio de Banach distinto de ℓ_2 con base simétrica no hay más isometrías sobreyectivas que las anteriormente descritas (véase [Ro, Chapter 9, section 8]). Como consecuencia, todo espacio de Banach que no sea isomorfo a ℓ_2 y que tenga base simétrica tiene norma maximal. Así los espacios c_0 y ℓ_p $(1 \leq p < \infty, p \neq 2)$ tienen norma maximal, y es fácil ver que no son convexo-transitivos.

J. R. Partington [Pa, Theorem 1] prueba que la norma del supremo en $C_0^{\mathbb{R}}([0,1])$ no es maximal. En 1976 Kalton y Wood [KW, Theorem 8.2] prueban que, si L es un espacio localmente compacto Hausdorff, entonces la norma de $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es maximal cuando se verifica algunas de las siguientes hipótesis:

i) L es infinito y contiene un subconjunto denso de puntos aislados.

ii) Existe en L un subconjunto denso de puntos que admiten un entorno homeomorfo a un conjunto abierto de un espacio euclídeo.

En particular, la norma de $C_0^{\mathbb{C}}([0,1])$ es maximal. Tenemos así otro ejemplo de un espacio de Banach con norma maximal que no es convexo-transitiva [Co, Example 3]. Para avances recientes sobre espacios $C_0(L)$ con norma maximal, remitimos al lector a [Li].

Con objeto de dar cierta originalidad a la sección que nos ocupa, vamos a introducir un concepto intermedio entre la convexo-transitividad de la norma y la maximalidad, que creemos es nuevo.

Definición I.5.3 . Dado un espacio de Banach X, diremos que su **norma es fuertemente maximal**, si no existe una norma continua en X cuyo grupo de isometrías contenga estrictamente a $\mathcal{G}$.

Claramente, la maximalidad fuerte de la norma implica la maximalidad. Por otra parte, en vista del Teorema I.4.2 $(i) \Rightarrow (ii)$, la convexo-transitividad de la norma implica la maximalidad fuerte. Para extraer provecho al concepto recién introducido, permítasenos presentar la definición de producto escalar invariante.

Definición I.5.4 . Un **producto escalar invariante** en un espacio de Banach X es un producto escalar continuo $(.|.)$ en X que satisface $(F(x)|F(x)) = (x|x)$ para todo x en X y todo $F \in \mathcal{G}$.

Ahora, la demostración del resultado que sigue es realmente muy fácil.

Proposición I.5.5 . *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que la norma de X es fuertemente maximal y que existe un producto escalar invariante en X. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Denotemos por $|.|$ la norma asociada al producto escalar invariante cuya existencia se supone. Claramente, la norma $|.|$ es continua y su correspondiente grupo de isometrías agranda a $\mathcal{G}$. Como la norma de X es fuertemente maximal, se tiene $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, |.|)$. Pero $\mathcal{G}(X, |.|)$ actúa transitivamente en $S_{(X,|.|)}$ (la demostración de este hecho es idéntica a la que hicimos para espacios de Hilbert). Ahora, sin pérdida de generalidad podemos suponer la existencia de un elemento x_0 de X tal que $|x_0| = \|x_0\| = 1$. Entonces

$$S_{(X,|.|)} = \{T(x_0) : T \in \mathcal{G}\} \subseteq S_X ,$$

de donde $\|.\| = |.|$. ∎

Aplicando la proposición que acabamos de probar, encontramos un ejemplo de espacio de Banach con norma maximal no fuertemente maximal.

COROLARIO I.5.6. *La norma de ℓ_1 no es fuertemente maximal.*

Demostración. Para $x = \{\alpha_n\}$, $y = \{\beta_n\}$ en ℓ_1, escribimos $(x|y) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}$. Entonces $(.|.)$ es un producto escalar invariante en ℓ_1. Si la norma de ℓ_1 fuese fuertemente maximal, entonces por la proposición anterior ℓ_1 sería un espacio de Hilbert. ∎

Parece razonable ahora mostrar también un ejemplo de espacio de Banach cuya norma sea fuertemente maximal y no convexo-transitiva.

PROPOSICIÓN I.5.7. *c_0 tiene norma fuertemente maximal.*

Demostración. Como c_0 tiene norma maximal, es suficiente probar que toda norma continua en c_0 cuyo grupo de isometrías agrande a $\mathcal{G}(c_0)$ es de hecho equivalente a la norma natural. Demostraremos algo mejor. A saber, toda norma en c_0 cuyo grupo de isometrías agrande a $\mathcal{G}(c_0)$ genera una topología más fuerte que la de la norma natural. Sea por tanto $|\!|\!|.|\!|\!|$ una norma en c_0 satisfaciendo $\mathcal{G}(c_0) \subseteq \mathcal{G}(c_0, |\!|\!|.|\!|\!|)$. Denotemos por $U := \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base natural de c_0 y por $V := \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base natural de ℓ_1, vista como subconjunto de c_0^*. Como $U \subseteq \mathcal{G}(c_0)(u_1)$, también $U \subseteq \mathcal{G}(c_0, |\!|\!|.|\!|\!|)(u_1)$ con lo que, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|\!|\!|u_n|\!|\!| = 1$ para todo n en $\mathbb{N}$. Por otra parte, para $n \in \mathbb{N}$, la función $x \mapsto x - 2v_n(x)u_n$ de c_0 en c_0 pertenece a $\mathcal{G}(c_0)$, y por tanto a $\mathcal{G}(c_0, |\!|\!|.|\!|\!|)$. Se sigue que, para todo n en $\mathbb{N}$, v_n pertenece a $(c_0, |\!|\!|.|\!|\!|)^*$ y que $|\!|\!|v_n|\!|\!| = 1$. Sea $f := \{\lambda_n\} \in \ell_1$. Entonces la serie $\sum \lambda_n v_n$ satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\!|\!|\lambda_n v_n|\!|\!| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|,$$

y por tanto converge en $(c_0, |\!|\!|.|\!|\!|)^*$. Pero, vista como elemento del dual algebraico de c_0, la suma de esa serie en $(c_0, |\!|\!|.|\!|\!|)^*$ tiene que ser la misma que la correspondiente suma en c_0^* puesto que $|\!|\!|.|\!|\!|$-convergencia en $(c_0, |\!|\!|.|\!|\!|)^*$ y $\|.\|$-convergencia en c_0^* implican convergencia puntual en $\mathbb{K}$. Así se ha demostrado que $c_0^* \subseteq (c_0, |\!|\!|.|\!|\!|)^*$ y que para f en c_0^* se tiene que

$$|\!|\!|f|\!|\!| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\!|\!|\lambda_n v_n|\!|\!| \leq \|f\|.$$

Sea x en c_0. Eligiendo f en $S_{c_0^*}$ con $f(x) = \|x\|$, se tiene finalmente

$$\|x\| = f(x) \leq \|f\| \, \|x\| \leq \|f\| \, \|x\| = \|x\|. \blacksquare$$

Terminaremos esta sección convenciéndonos del hecho ya anunciado anteriormente de que, en el caso finito dimensional, la respuesta al problema de Banach-Mazur es afirmativa [Ro, Proposition 9.6.1]. En realidad, se tiene algo mejor: las cinco condiciones de transitividad de la norma con las que comenzábamos la sección son equivalentes en el caso de la dimensión finita. Tal hecho es consecuencia directa de la Proposición I.5.5 y del siguiente famoso teorema de Auerbach (ver [A1], [A2] o [Ro, Theorem 9.5.1]). Otras demostraciones realmente elegantes de este teorema aparecen en la Tesis de F. Cabello [Ca3].

TEOREMA I.5.8 . *En todo espacio de Banach finito-dimensional existe un producto escalar invariante.*

COROLARIO I.5.9 . *Todo espacio de Banach finito-dimensional cuya norma sea maximal es un espacio de Hilbert.*

I.6 Transitividad de la norma y condiciones isomórficas.

Dedicamos esta última sección del primer capítulo a uno de los aspectos más abiertos de la materia que estamos tratando, a saber, el de la relación entre las varias condiciones de transitividad de la norma que hemos introducido y las más usuales condiciones isomórficas en la teoría de los espacios de Banach.

Para ir concretando las ideas, empecemos recordando las diversas condiciones de transitividad de la norma de un espacio de Banach y las más usuales condiciones isomórficas sobre un espacio de Banach, que se recogen en los diagramas I y II, respectivamente.

Diagrama I

$$\begin{array}{c}\boxed{\text{Hilbertiana}}\\ \Downarrow\\ \boxed{\text{Transitiva}}\\ \Downarrow\\ \boxed{\text{Casi-transitiva}}\\ \Downarrow\\ \boxed{\text{Convexo-transitiva}}\\ \Downarrow\\ \boxed{\text{Maximal}}\end{array}$$

Diagrama II

$$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{\boxed{\text{Finito-dimensional}}}\\ \multicolumn{2}{c}{\Downarrow}\\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{\text{Hilbertizable}}}\\ \multicolumn{2}{c}{\Downarrow}\\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{\text{Superreflexivo}}}\\ \multicolumn{2}{c}{\Downarrow}\\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{\text{Reflexivo}}}\\ \Downarrow & \Downarrow\\ \boxed{\text{Asplund}} & \boxed{\text{Radon-Nikodym}}\end{array}$$

Resulta natural formular las dos siguientes cuestiones:

(i) Si la norma de un espacio de Banach X satisface alguna de las propiedades del diagrama I, ¿está X obligado a satisfacer alguna de las propiedades del diagrama II?.

(ii) Si un espacio de Banach X satisface alguna de las propiedades del diagrama II, ¿se puede renormar equivalentemente X de manera que la nueva norma satisfaga alguna de las propiedades del diagrama I?.

En relación a la cuestión (i), si olvidamos que obviamente los espacios con norma hilbertiana son hilbertizables, la contestación no puede ser más desastrosa: ni siquiera la transitividad de la norma implica cualquiera de las dos condiciones más débiles del diagrama II. Esto es consecuencia de que todo espacio de Banach se puede ver como subespacio de un espacio de Banach con norma transitiva (Corolario I.3.4) y de que todas las condiciones del diagrama II son hereditarias. El desastre que acabamos de describir ha llevado a algunos autores (ver [W], [Pa] y [Ca4]) a conjeturar que la condición más débil en el diagrama I, a saber la maximalidad de la norma, pudiera ser isomórficamente inócua. En otras palabras, el siguiente problema permanece abierto que sepamos:

PROBLEMA I.6.1. *Sea X un espacio de Banach. ¿Se puede renormar equivalentemente X de manera que la nueva norma sea maximal?.*

El problema anterior admite la siguiente sencilla reformulación: *¿Hay en todo espacio de Banach X un subgrupo acotado maximal del grupo de todos los automorfismos de X?.* Para convencerse de que esta última pregunta es equivalente al Problema I.6.1, adviértase que, si G es un grupo acotado de automorfismos lineales de un espacio de Banach X, podemos renormar X equivalentemente de manera que todo elemento de G es una isometría para la nueva norma. En efecto, es suficiente definir $\|x\|_G := \sup\{\|F(x)\| : F \in G\}$.

En lo que concierne a la cuestión (ii), la situación es, si cabe, bastante peor, pues ni siquiera se sabe si un espacio de Banach superreflexivo se puede renormar maximalmente. No obstante, a juicio de algunos autores, la posibilidad de que todo espacio de Banach superrreflexivo se pueda renormar casi-transitivamente no debe ser descartada (ver [F] y [DGZ]).

Una vez que sabemos que la respuesta a la cuestión (i) es esencialmente negativa y que la respuesta a la cuestión (ii) es esencialmente desconocida, el lector comprenderá que una linea razonable de trabajo consiste en yuxtaponer alguna de las condiciones del diagrama I con alguna otra del diagrama II, esperando obtener alguna información adicional no trivial, y acaso deducir al menos de tal información la no inocuidad isomórfica de la transitividad, casi-transitividad y convexo-transitividad de la norma.

El primer trabajo en esta linea se debe a C. Finet [F] (ver también [DGZ]), quien demuestra que un espacio de Banach superreflexivo casi-transitivo es uniformemente convexo y uniformemente suave. Más tarde, F. Cabello [Ca4] prueba que todo espacio de Banach casi-transitivo que o bien sea Asplund o bien tenga la propiedad de Radon-Nikodym es de hecho superreflexivo (gráficamente, sube dos escalones en el diagrama II). Como consecuencia, la casi-transitividad de la norma no es isomórficamente inócua. En el mismo trabajo, se prueba que todo espacio de Banach superreflexivo que sea convexo-transitivo es de hecho casi-transitivo (gráficamente, sube un escalón en el diagrama I).

Rompiendo la costumbre seguida en este capítulo de no anunciar nuestras aportaciones, no nos resistimos a citar que, como consecuencia de los resultados que probaremos en el Capítulo IV, todo espacio de Banach convexo-transitivo que o bien sea Asplund o bien tenga la propiedad de Radon-Nikodym es de hecho superreflexivo (sube dos escalones en el diagrama II) y casi-transitivo (sube un escalón en el diagrama I). Como consecuencia, la convexo-transitividad de la norma no es isomórficamente inócua.

Capítulo II

Isometrías que son perturbación unidimensional de la identidad.

II.1 Introducción al capítulo 2.

Como ya se ha comentado en el primer capítulo, gran parte del trabajo que se ha realizado en relación con el problema de Banach-Mazur trata de caracterizar los espacios de Hilbert en la clase de los espacios de Banach mediante algún tipo de transitividad de su norma y alguna propiedad adicional. En esta línea se encuentran los resultados de Kalton-Wood, Skorik-Zaidenberg y F. Cabello, referidos en los Teoremas I.4.8, I.2.10 y I.2.11, respectivamente, y que van a motivar gran parte de los resultados de este capítulo.

Comenzamos definiendo algunos conceptos que serán imprescindibles en el desarrollo de las próximas secciones. Como siempre $X := (X, \|.\|)$ denotará un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

DEFINICIÓN II.1.1. Diremos que un operador lineal F en X es una **perturbación unidimensional de la identidad**, si existe un subespacio maximal M de X y un elemento $e \in X \setminus M$ tales que F actúa como la identidad en M y $F(e) \in \mathbb{K}e \setminus \{e\}$. Si la segunda condición se fortalece en el sentido de ser $F(e) = -e$, la perturbación unidimensional de la identidad recibirá el nombre de **reflexión**.

Denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de vectores e de S_X tales que $\mathbb{K}e = (I - T)(X)$ para alguna isometría T que es perturbación unidimensional de la identidad. Los elementos de $\mathcal{P}$ recibirán el nombre de **vectores de perturbación unidimensional isométrica de la identidad**. En el caso particular de que tal perturbación sea una reflexión, e recibirá el nombre de **vector de reflexión isométrica**. Si $e \in \mathcal{P}$, entonces existe un único funcional de norma uno e^* (que llamaremos **funcional asociado a** e) satisfaciendo $e^*(e) = 1$ y con la propiedad de que, si T es una isometría perturbación unidimensional de la identidad tal que $\mathbb{K}e = (I - T)(X)$, uno puede encontrar $\mu \in S(\mathbb{K}) \setminus \{1\}$ de manera que $T(x) = x + (\mu - 1)e^*(x)e$ para todo x en X (es decir, $T = I + (\mu - 1)e^* \otimes e$). En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la afirmación anterior no es otra cosa que la observación de F. Cabello en [Ca1] de que las reflexiones isométricas en los espacios de Banach reales coinciden con las isometrías que son perturbación isométrica de la identidad. La demostración para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se verá en la sección quinta de este capítulo.

Recordemos que, según el Teorema I.2.10 de Skorik-Zaidenberg,

Si existe un vector de reflexión isométrica en un espacio de Banach real X casi-transitivo, entonces X es un espacio de Hilbert.

Cuestiones naturales sobre los límites del teorema anterior son las siguientes:

Q1. ¿Puede relajarse en el Teorema I.2.10 la casi-transitividad de la norma a la convexo-transitividad?.

Q2. ¿Puede relajarse en el Teorema I.2.10 la densidad de $\mathcal{P}$ en S_X a la no rareza de $\mathcal{P}$ en S_X?.

Nuestro Teorema II.2.4 dará una respuesta afirmativa a la segunda cuestión. En cuanto a la primera, nuestro Corolario II.3.8 contestará "casi" afirmativamente, en el sentido de que la respuesta es positiva si se añade la hipótesis de que la componente conexa de la identidad en $\mathcal{G}$, relativa a la topología fuerte de operadores, no se reduzca a un punto.

Sea ahora X un espacio de Banach complejo. Recordemos que un operador lineal acotado T en X se llama **hermítico** si, para todo λ en $\mathbb{R}$, $exp(i\lambda T)$ es una isometría. Si el operador en cuestión es una proyección P, es inmediato comprobar que es hermítico si y sólo si $I+(\mu-1)P$ es una isometría para todo μ en $S_{\mathbb{C}}$. En consecuencia (tómese $\mu = -1$), si e está en S_X y si $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica en X, entonces e es un vector de reflexión isométrica. Por supuesto, por definición, todo vector de reflexión isométrica en X es un vector de perturbación isométrica de la identidad. Al final de la sección 5 daremos ejemplos de vectores de perturbación isométrica de la identidad que no son vectores de reflexión isométrica, y de vectores de reflexión isométrica e tales que $\mathbb{C}e$ no es el rango de una proyección hermítica. Por otra parte, en la Proposición II.4.1 demostraremos que, para e en S_X, $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica si y sólo si e es un vector de reflexión isométrica en el espacio de Banach real subyacente.

Este hecho convierte el Teorema I.4.8 de Kalton-Wood en una consecuencia directa de nuestro anteriormente comentado Corolario II.3.8, e igualmente permite derivar de nuestro Teorema II.2.4 un resultado debido a Berkson [Ber] según el cual *un espacio de Banach complejo X es Hilbert si (y sólo si) para todo elemento e en S_X se tiene que $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica.*

En realidad, el resultado de Berkson que acabamos de reseñar se verá enormemente mejorado en la última sección del presente capítulo. En ella demostraremos que, si X es un espacio de Banach complejo tal que $\mathcal{P}$ no es raro en S_X, entonces X es un espacio de Hilbert. Notamos que este resultado también contiene el Teorema I.2.11 de F. Cabello.

II.2 No rareza del conjunto de los puntos de reflexión isométrica.

En esta sección X denotará un espacio de Banach REAL.

Si F es una reflexión en X, por definición existe un subespacio maximal M de X y un elemento e de $X \setminus \{0\}$ tales que F actúa como la identidad en M y $F(e) = -e$. En consecuencia, podemos elegir un funcional lineal e^* en X de manera que $\ker e^* = M$ y $e^*(e) = 1$, con lo que la reflexión F toma la forma $F = s_{e,e^*} : x \mapsto x - 2e^*(x)e$. Recíprocamente, eligiendo arbitrariamente e en X y e^* funcional lineal en X^* con $e^*(e) = 1$, la aplicación $s_{e,e^*} : x \mapsto x - 2e^*(x)e$ es una reflexión en X. Para e en S_X hay como mucho un elemento e^* en X^* tal que s_{e,e^*} es una reflexión isométrica. Esto es conocido (ver [SZ, Remark 2.2.b]), pero nosotros damos a continuación una demostración independiente. Supongamos que, para e en S_X, e_1^* y e_2^* son elementos de X^* tales que s_{e,e_i^*} es una isometría para $i = 1, 2$. En tal caso, el operador en X dado por $T(x) = (s_{e,e_1^*} - s_{e,e_2^*})(x) = 2(e_2^* - e_1^*)(x)e$ verifica $T^2 = 0$ e $I + T = s_{e,e_1^*} \circ s_{e,e_2^*}$. Una fácil comprobación permite concluir que $I + nT = (I + T)^n$ es una isometría para todo n en $\mathbb{N}$, de donde $T = 0$ y en consecuencia $e_1^* = e_2^*$. Los vectores de reflexión isométrica, en el sentido que dimos en la sección anterior, no son otra cosa que los elementos e de S_X para los que existe e^* en X^* de manera que s_{e,e^*} es una isometría. Para un tal vector e, el único elemento e^* que aparece arriba se llamará el **funcional de reflexión isométrica asociado a** e. Es fácil ver que el funcional asociado a un vector de reflexión isométrica tiene norma uno (a saber, para x en X se tiene $|e^*(x)| = \|e^*(x)e\| = \|\frac{x-s_{e,e^*}(x)}{2}\| \leq \|x\|$).

Los ejemplos más típicos de reflexiones isométricas son las llamadas **reflexiones ortogonales** en un espacio de Hilbert real H, que responden a la ley $x \mapsto x - 2(x|e)e$ donde $e \in S_H$.

Empezamos reseñando dos resultados, extraidos del trabajo de Skorik-Zaidenberg [SZ], que utilizaremos en la demostración del teorema principal de esta sección.

LEMA II.2.1. [SZ, Corollary 2.4]. *Si e_1 y e_2 son dos vectores de reflexión isométrica en X con $0 < \|e_1 - e_2\| < 1$, y si e_1^*, e_2^* denotan los funcionales asociados, entonces s_{e_1,e_1^*} y s_{e_2,e_2^*} no conmutan.*

Para $\mathcal{A}$ conjunto de reflexiones isométricas en X, denotaremos por $\mathcal{W}$ el grupo generado por $\mathcal{A}$ y por $\Gamma_{\mathcal{A},\mathcal{W}}$ el grafo de $\mathcal{W}$ relativo a $\mathcal{A}$. Por definición, los vértices de $\Gamma_{\mathcal{A},\mathcal{W}}$ son los elementos de $\mathcal{A}$ y dos vértices están conectados por un arco si las correspondientes reflexiones no conmutan. Pasamos a enunciar una proposición, combinación de dos resultados, a saber, [Bo, Ch. V, 3.7] (ver también [SZ, Lemma 1.1]) y [SZ, Corollary 1.4], que, en dimensión finita, caracteriza los espacios de Hilbert entre los espacios de Banach en función de la abundancia de reflexiones isométricas.

PROPOSICIÓN II.2.2. *Supongamos que X es finito dimensional. Si existe un conjunto $\mathcal{A}$ de reflexiones isométricas en X tal que $\mathcal{W}$ es infinito, si el origen es el único punto fijo de $\mathcal{W}$, y si $\Gamma_{\mathcal{A},\mathcal{W}}$ está conectado, entonces X es un espacio de Hilbert.*

Nuestro argumento comienza ahora con el siguiente lema.

LEMA II.2.3. *El conjunto $\mathcal{P}$ es norma-cerrado en X. Además, si e es un vector de reflexión isométrica y e^* su funcional asociado, la aplicación $e \mapsto e^*$ de $\mathcal{P}$ en X^* es norma-w^* continua.*

Demostración. Consideremos una sucesión $\{e_n\}$ en $\mathcal{P}$ que converja en norma a un vector e. Demostraremos que este vector está en $\mathcal{P}$ y que su funcional asociado es $e^* = w^* - \lim\{e_n^*\}$. Por ser B_{X^*} w^*-compacta, la sucesión $\{e_n^*\}$ tiene un valor de adherencia (sea f) en la topología w^* de B_{X^*}. Si denotamos por $\mathbf{n}$ la topología de la norma en X, entonces la aplicación $(x, g) \to g(x)$ de $(S_X, \mathbf{n}) \times (B_{X^*}, w^*)$ a $\mathbb{R}$ es continua (basta observar que $|h(y) - g(x)| \leq |(h-g)(y)| + \|y - x\|$ para x, y en S_X, g, h en B_{X^*}). Se sigue que $f(e)$ es un valor de adherencia en $\mathbb{R}$ de la sucesión $\{e_n^*(e_n)\}$, que por otra parte es constantemente igual a 1, de donde $f(e) = 1$. Además, para cada x en X, $x - 2f(x)e$ es un valor de adherencia de la sucesión $\{x - 2e_n^*(x)e_n\}$ en la topología $\mathbf{n}$, con lo que obtenemos que la reflexión $s_{e,f}$ es una isometría. Ahora es claro que e pertenece a $\mathcal{P}$ y que su funcional asociado es f. Ya que f es un valor de adherencia arbitrario de la sucesión $\{e_n^*\}$ en la topología w^*, de nuevo la w^*-compacidad de B_{X^*} nos dá $e^* = f = w^* - \lim\{e_n^*\}$. ∎

Recuérdese que un subespacio M de un espacio de Banach X es un L^2-**sumando** de X si existe una proyección lineal π de X sobre M satisfaciendo

$$\|x\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2$$

para todo x en X. Si M es un L^2-sumando de X, entonces la proyección π dada anteriormente está determinada de manera única por M, y se llama la L^2-proyección de X sobre M. Si e está en S_X y si $\mathbb{R}e$ es un L^2-sumando en X, entonces e es un vector de reflexión isométrica en X cuyo funcional asociado está determinado por la condición $\pi(x) = e^*(x)e$ para todo x en X, donde π es la L^2-proyección de X sobre $\mathbb{R}e$.

Obviamente, si X es un espacio de Hilbert y e un punto de su esfera unidad, entonces $\mathbb{R}e$ es un L^2-sumando de X. Pasamos ahora a dar contestación afirmativa a la cuestión *Q2* propuesta en la sección anterior.

Nótese, que una reflexión s_{e,e^*} en un espacio de Banach X deja invariante cualquier subespacio M de X que contenga a e, y, vista como operador en tal subespacio, no pierde la propiedad de reflexión (isométrica, si lo era la de partida).

TEOREMA II.2.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El conjunto de todos los elementos e en S_X tales que $\mathbb{R}e$ es un L^2-sumando de X no es raro en S_X.

(ii) El conjunto $\mathcal{P}$ de los puntos de reflexión isométrica de X no es raro en S_X.

(iii) X es un espacio de Hilbert.

Demostración. Sólo necesitamos probar que *ii)* implica *iii)*. Por hipótesis $\mathcal{P}$ no es raro en S_X y por tanto, en virtud del lema anterior, dicho conjunto tiene interior no vacío en S_X. Luego existen $\varepsilon < \frac{1}{2}$ y e en $\mathcal{P}$ de manera que para x en S_X con $\|e-x\| < \varepsilon$ se tiene que x pertenece a $\mathcal{P}$. Sea M un subespacio finito dimensional de X, que contenga a e. Para $\mathcal{A} := \{s_{x,x^*} : x \in S_X \cap M, \|e-x\| < \varepsilon\}$ (conjunto de reflexiones isométricas en M), consideremos $\mathcal{W}$ (claramente infinito) y $\Gamma_{\mathcal{A},\mathcal{W}}$. Sean s_{x,x^*}, s_{y,y^*} dos elementos distintos de $\mathcal{A}$, entonces $\|x-y\| \leq \|x-e\|+\|e-y\| < 1$ y por el Lema II.2.1, dichas reflexiones no conmutan, de donde $\Gamma_{\mathcal{A},\mathcal{W}}$ está conectado. Comprobemos que $\mathcal{W}$ no deja fijo a ningún vector no nulo de M. Supongamos que un elemento z de M es punto fijo de $\mathcal{W}$, y tomemos $e_1, e_2, ..., e_n$ una base de M de manera que $\|e-e_i\| < \varepsilon$ y $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1, ..., n$. Por ser M finito dimensional en virtud del Teorema I.5.8 existe un producto escalar $(.|.)$ en M, $\mathcal{G}(M)$-invariante, y por lo tanto $(e_i|e_i)e_i^*(x) = (e_i|x)$ para todo x en M y todo $i = 1, ..., n$. Ahora la condición $s_{e_i,e_i^*}(z) = z$ para todo $i = 1, ..., n$, implica que $(e_i|z) = 0$ para todo $i = 1, ..., n$, de donde $z = 0$. Se sigue de la Proposición II.2.2 que M es un espacio de Hilbert. En realidad se ha demostrado que cualquier subespacio finito dimensonal N de X es Hilbert (tómese $M := Lin\{N, e\}$), y por tanto X es un espacio de Hilbert. ∎

Para finalizar esta sección, notamos que el teorema anterior contiene el Teorema I.2.10 de Skorik-Zaidenberg así como el siguiente resultado.

COROLARIO II.2.5 . [CH]. *Un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si (y sólo si)* $\mathbb{R}x$ *es un* L^2*-sumando de* X *para todo* x *en* S_X.

II.3 Reflexiones isométricas y convexo-transitividad.

Esta sección la dedicaremos a obtener la versión real del Teorema I.4.8 de Kalton-Wood. El resultado que obtendremos en esta linea se convertirá a su vez en una respuesta parcial a la cuestión *Q.1* planteada en la introducción de este capítulo, a saber, ¿se puede rebajar la hipótesis de casi-transitividad a convexo-transitividad en el Teorema I.2.10 ?.

Al igual que en la sección anterior X será un espacio de Banach REAL. Denotaremos por $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G}_0(\|.\|)$ la componente conexa de la identidad en $\mathcal{G}$ relativa a la topología fuerte de operadores. Diremos que $\mathcal{G}_0$ es trivial, si $\mathcal{G}_0 = I$.

Presentamos a continuación algunos de los principales resultados del reciente artículo [SZ] de A. Skorik y M. Zaidenberg, que necesitaremos para la demostración del teorema principal de esta sección.

TEOREMA II.3.1 . [SZ, Theorem 1]. *Si* e *es un vector de reflexión isométrica en el espacio de Banach real* X, *si* $\mathcal{G}_0(e) \neq \{e\}$, *y si* H *denota la envolvente lineal cerrada de* $\mathcal{G}_0(e)$, *entonces* H *es un espacio de Hilbert,* S_H *coincide con* $\mathcal{G}_0(e)$, *y existe una única proyección* p *de* X *sobre* H *tal que* $I-2p$ *es una isometría. Además, si ponemos* $N := Ker(p)$, *entonces toda isometría sobreyectiva en* H *puede ser extendida a una isometría sobreyectiva de* X *cuya restricción a* N *es la identidad, y toda isometría de* X *que deje invariante a* H *también deja invariante a* N.

La unicidad de la proyección $p : X \to H$ bajo la condición $I - 2p \in \mathcal{G}$ no está explícitamente recogida en [SZ], pero se puede demostrar fácilmente mediante un argumento similar al que hicimos al principio de la sección anterior para probar la unicidad del funcional asociado a un vector de reflexión isométrica.

Recuérdese que una familia de funcionales lineales en un espacio de Banach, es **total**, si dado x en X no nulo, existe un funcional f de dicha familia tal que $f(x) \neq 0$.

LEMA II.3.2 . [SZ, Lemma 5.4]. *Supongamos que existe una familia total de funcionales de reflexión isométrica en X. Sean e_1, e_2 vectores de reflexión isométrica en X tales que $\mathcal{G}_0(e_i) \neq \{e_i\}$ para $i = 1, 2$. Entonces o bien $\mathcal{G}_0(e_1) = \mathcal{G}_0(e_2)$ o bien $\mathcal{G}_0(e_1) \cap \mathcal{G}_0(e_2) = \emptyset$. Si ocurre la segunda posibilidad, entonces las proyecciones $p_i : X \to H_i = \overline{Lin \mathcal{G}_0(e_i)}$ $(i = 1, 2)$ son ortogonales.*

En este momento comenzamos nuestra argumentación.

LEMA II.3.3 . *Sea e en S_X tal que la envolvente lineal cerrada de $\mathcal{G}(e)$ es X. Entonces $\mathcal{G}_0$ es trivial si y sólo si $\mathcal{G}_0(e) = \{e\}$.*

Demostración. Supongamos que se verifica $T(e) = e$ para todo T en $\mathcal{G}_0$. Si tomamos F en $\mathcal{G}$ ocurre que $T(F(e)) = F(e)$ ya que $F^{-1} \circ T \circ F$ pertenece a $\mathcal{G}_0$ por ser éste un subgrupo normal de $\mathcal{G}$. Como la envolvente lineal cerrada de $\mathcal{G}(e)$ es igual a X, obtenemos $T(x) = x$ para todo x en X, y en consecuencia $T = I$. ∎

LEMA II.3.4. *Supongamos que los únicos subespacios cerrados $\mathcal{G}$-ivariantes de X son los triviales y que existe un vector de reflexión isométrica e en X. Entonces existe una familia total de funcionales de reflexión isométrica en X. Más concretamente, la familia de funcionales $\{T^*(e^*) : T \in \mathcal{G}\}$ es total, donde e^* es el funcional asociado a e.*

Demostración. Por hipótesis, para cada vector no nulo x de X, la envolvente lineal de $\mathcal{G}(x)$ es densa en X. Por ser el funcional e^* no nulo, existe T en $\mathcal{G}$ tal que $e^*(T(x)) \neq 0$. ▪

TEOREMA II.3.5. *Supongamos que $\mathcal{G}_0$ no es trivial, que existe un vector de reflexión isométrica en X y que existe $\delta > 0$ tal que $\overline{co}\{\mathcal{G}(x)\} \supseteq \delta B_X$ para todo x en S_X. Entonces X es isomorfo a un espacio de Hilbert. Más concretamente, existe un natural $n \leq \delta^{-2}$ y subespacios hilbertianos $H_1, H_2, \ldots\ldots, H_n$ de X, dos a dos isomorfos, satisfaciendo:*

(i) $X = \oplus_{i=1}^{n} H_i$.

(ii) Para $i = 1, 2, ..., n$ *y* F *en* $\mathcal{G}$*, existe* $j = 1, 2, ..., n$ *con* $F(H_i) = H_j$.

(iii) Para $i = 1, 2, ..., n$, H_i *es* $\mathcal{G}_0$*-invariante.*

Demostración. De las hipótesis y de los Lemas II.3.3 y II.3.4 se sigue que $\mathcal{G}_0(x) \neq \{x\}$ para todo x en S_X, y que existe una familia total de funcionales de reflexión isométrica en X. Sea e el vector de reflexión isométrica cuya existencia hemos supuesto. Pongamos $\mathcal{B} := \{\mathcal{G}_0(x) : x \in \mathcal{G}(e)\}$. De acuerdo con la primera parte del Lema II.3.2, $\mathcal{B}$ es una partición de $\mathcal{G}(e)$. Por el Teorema II.3.1, para β en $\mathcal{B}$, $H_\beta := \overline{Lin \mathcal{G}_0(x)}$ (para $x \in \beta$) es un espacio de Hilbert y existe una única proyección $p_\beta : X \to H_\beta$ bajo la condición $I - 2p_\beta \in \mathcal{G}$.

El hecho de que $\overline{co}(\mathcal{G}(e)) \supseteq \delta B_X$ implica que $X = \overline{\sum_{\beta \in \mathcal{B}} H_\beta}$. Por el Lema II.3.2, se tiene $p_\beta \circ p_\alpha = 0$ para α, β en $\mathcal{B}$ con $\beta \neq \alpha$, y por tanto $X = \overline{\oplus_{\beta \in \mathcal{B}} H_\beta}$. A partir de ahora seguimos con ligeros cambios un argumento en la demostración de [KW, Theorem 6.4].

Para toda F en $\mathcal{G}$, $F(e)$ pertenece a H_γ para algún γ en $\mathcal{B}$ (tómese $\gamma := \mathcal{G}_0(F(e))$), luego $\sum_{\beta \in \mathcal{B}} \|p_\beta(F(e))\| = \|F(e)\| = 1$. Ahora, si Γ es un subconjunto finito de $\mathcal{B}$, el conjunto $\{x \in X : \sum_{\beta \in \Gamma} \|p_\beta(x)\| \leq 1\}$ es cerrado, convexo y contiene a $\mathcal{G}(e)$. Como $\overline{co}\{\mathcal{G}(e)\} \supseteq \delta B_X$, se sigue que, para todo x en X, la familia $\{\|p_\beta(x)\|\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ es sumable en $\mathbb{R}$ y

$$\delta \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \|p_\beta(x)\| \leq \|x\|. \quad (\$)$$

Notamos que cada F en $\mathcal{G}$ induce una biyección $F_* : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ dada por $F_*(\beta) = F(\beta)$ para toda β en $\mathcal{B}$, y que la aplicación $F \to F_*$ es una acción del grupo $\mathcal{G}$ en $\mathcal{B}$ (ver [SZ, section 5.3]). De la definición de $\mathcal{B}$, es claro que $\mathcal{G}$ actúa transitivamente sobre $\mathcal{B}$, de aquí que los espacios de Hilbert H_β $(\beta \in \mathcal{B})$ sean dos a dos isomorfos. Tomemos $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ elementos dos a dos distintos de $\mathcal{B}$ y sean $x_1 \in \beta_1$, $x_2 \in \beta_2$,...,$x_n \in \beta_n$. Para F en $\mathcal{G}$ se tiene

$$\max\{\|p_\beta(F(x_1 + x_2 + ... + x_n))\| : \beta \in \mathcal{B}\} = 1.$$

Como el conjunto $\{x \in X : \max\{\|p_\beta(x)\| : \beta \in \mathcal{B}\} \leq \}$ es convexo-cerrado, contiene a $\mathcal{G}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ y $\delta\|x_1 + ... + x_n\|e$ pertenece a $\mathcal{G}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$, se sigue

$$\delta\|x_1 + ... + x_n\| \max\{\|p_\beta(e)\| : \beta \in \mathcal{B}\} \leq 1 .$$

Pero, por un lado, este máximo (claramente) vale uno, y por otro, de ($) obtenemos

$$n\delta = \delta\sum_{i=1}^{n}\|p_{\beta_i}(x_i)\| = \delta\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\|p_\beta(x_1 + ... + x_n)\| \leq \|x_1 + ... + x_n\|.$$

En consecuencia $n\delta^2 \leq 1$. ∎

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente corolario.

COROLARIO II.3.6 . *Supongamos que $\mathcal{G}_0$ es no trivial, que existe un vector de reflexión isométrica en X y que existe $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ tal que $\delta B_X \subseteq \overline{co}(\mathcal{G}(x))$ para todo x en S_X. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Obsérvese que en el anterior corolario, la hipótesis de no trivialidad de $\mathcal{G}_0$ no se puede suprimir. Para ello basta considerar en $\mathbb{R}^2$ una norma cuya bola unidad sea un polígono regular con $2(n+1)$ lados y centrada en el origen. Para n suficientemente grande se verifican todas las hipótesis del corolario salvo la no trivialidad de $\mathcal{G}_0$.

Corolario II.3.7 . *Supongamos que $\mathcal{G}_0$ no es trivial, que existe un vector de reflexión isométrica, que la norma de X es maximal y que existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_X \subseteq \overline{co}(\mathcal{G}(x))$ para todo x en S_X. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sean n y $H_1, ..., H_n$ el número natural y los subespacios hilbertianos de X, respectivamente, dados por el Teorema II.3.5. Para $j = 1, ..., n$, sea p_j la proyección de X sobre H_j correspondiente a la descomposición $X = \oplus_{i=1}^n H_i$, y consideremos la norma hilbertiana equivalente $|.|$ en X dada por $|x|^2 := \sum_{i=1}^n \|p_i(x)\|^2$ para x en X. Del apartado ii) del teorema se sigue que $\mathcal{G}(|.|)$ agranda a $\mathcal{G}(\|.\|)$. Supongamos $n > 1$. Entonces podemos elegir elementos no cero x_1 y x_2 en H_1 y H_2, respectivamente, con $|x_1 + x_2| = 1$, así como un elemento F en $\mathcal{G}(|.|)$ satisfaciendo $F(x_1) = |x_1|(x_1 + x_2)$. De nuevo por el apartado *ii)* del teorema, el elemento F arriba elegido no puede pertenecer a $\mathcal{G}(\|.\|)$. En consecuencia $\mathcal{G}(|.|)$ agranda estrictamente a $\mathcal{G}(\|.\|)$, lo que contradice la hipótesis de que la norma de X es maximal. ∎

De cualquiera de los dos corolarios anteriores se deriva directamente el siguiente, que constituye la respuesta "casi" afirmativa a la cuestión *Q.1* propuesta en la introducción de este capítulo.

Corolario II.3.8. *Supongamos que $\mathcal{G}_0$ no es trivial, que existe un vector de reflexión isométrica en X, y que X es convexo-transitivo. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

No sabemos si la hipótesis sobre la no trivialidad de $\mathcal{G}_0$, se puede suprimir en los Corolarios II.3.7 y II.3.8. En todo caso, la convexo-transitividad de la norma no implica por sí sola que $\mathcal{G}_0$ sea no trivial. Para convencernos de esto, pongamos $X := C^{\mathbb{R}}(K)$ donde K denota el conjunto de Cantor. Sabemos que X es convexo-transitivo (Ejemplo I.4.7 (ii)). Recuérdese que, según el teorema de Stone, si T es una isometría en X, entonces existen, $\theta : K \to \mathbb{R}$ continua de módulo uno y γ homeomorfismo de K tales que $T(x)(s) = \theta(s)x(\gamma(s))$ para todo x en X y s en K. En consecuencia, si $\mathbf{1}$ denota la función constantemente igual a uno sobre

K, y si T pertenece a $\mathcal{G}$ y satisface $T(\mathbf{1}) \neq \mathbf{1}$, entonces $\|\mathbf{1} - T(\mathbf{1})\| = 2$. Por lo tanto $\mathcal{G}(\mathbf{1})$ es discreto luego totalmente desconectado. Por otra parte, al considerar en $\mathcal{G}$ la topología fuerte de operadores se tiene que la aplicación $F \mapsto F(\mathbf{1})$ de $\mathcal{G}$ en X es continua. De las anteriores consideraciones obtenemos que $\mathcal{G}_0(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ y, como consecuencia del Lema II.3.3, que $\mathcal{G}_0$ es trivial.

El resto de la sección la dedicaremos a a comprobar que el número $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en el Corolario II.3.6 es óptimo. Así, la hipótesis de la maximalidad de la norma en el Corolario II.3.7 no se puede suprimir. Para ello comenzaremos por el siguiente lema.

LEMA II.3.9. *Sea x en S_X y ρ un número positivo. Entonces $\rho B_X \subseteq \overline{co}(\mathcal{G}(x))$ si y sólo si*

$$\inf\{\sup\{|f(F(x))| : F \in \mathcal{G}\}\} : f \in S_{X^*}\} \geq \rho \ .$$

Demostración. Supongamos $\rho B_X \subseteq \overline{co}(\mathcal{G}(x))$. Entonces, para f en S_{X^*}, se tiene que $\sup\{|f(F(x))| : F \in \mathcal{G}\} = \sup\{|f(y)| : y \in \overline{co}\mathcal{G}(x)\} \geq \rho\sup\{|f(y)| : y \in B_X\} = \rho$. Supongamos ahora que existe y en $\rho B_X \setminus \overline{co}(\mathcal{G}(x))$. Por el teorema de Hanh-Banach, existe g en S_{X^*} tal que

$$\sup\{|g(y)| : y \in \overline{co}\mathcal{G}(x)\} < g(y) \leq \rho \ ,$$

y en consecuencia

$$\inf\{\sup\{|f(F(x))| : F \in \mathcal{G}\} : f \in S_{X^*}\} < \rho . \blacksquare$$

El siguiente lema posiblemente sea bien conocido por todos. No obstante, a falta de una referencia accesible, damos su demostración.

LEMA II.3.10. *Sean Ω y K espacios topológicos metrizables con Ω localmente compacto y K compacto, y sea h una aplicación continua de $\Omega \times K$ en $\mathbb{R}$. Entonces la aplicación*

$$s : t \mapsto \inf\{h(t,k) : k \in K\}$$

de Ω a $\mathbb{R}$ es continua.

Demostración. Para demostrar la continuidad de s en un punto t_0 es suficiente demostrar la continuidad de la restricción de s a un entorno compacto de t_0 en Ω, de aquí que se puede suponer sin pérdida de generalidad que Ω es compacto. Entonces, por el teorema de Heine, h es uniformemente continua en $\Omega \times K$, de donde la familia de funciones $\{h(.,k) : k \in K\}$ es equicontinua en Ω. En otras palabras, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|h(t_1,k) - h(t_2,k)| \leq \varepsilon$ para todo k en K y t_1, t_2 en Ω con $d(t_1,t_2) \leq \delta$. Dados k en K y t_1, t_2 en Ω con $d(t_1,t_2) \leq \delta$, se tiene que $s(t_1) \leq h(t_1,k) \leq h(t_2,k) + \varepsilon$ y $s(t_2) \leq h(t_2,k) \leq h(t_1,k) + \varepsilon$, de donde $s(t_1) \leq s(t_2) + \varepsilon$ y $s(t_2) \leq s(t_1) + \varepsilon$, es decir, $|s(t_1) - s(t_2)| \leq \varepsilon$. ∎

PROPOSICIÓN II.3.11 . *Dado cualquier número positivo $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ existe un espacio de Banach no Hilbert X con las siguientes propiedades:*

(i) $\mathcal{G}_0(X)$ no es trivial.

(ii) Existen vectores de reflexión isométrica en X.

(iii) $\overline{co}\mathcal{G}(x) \supseteq \delta B_X \quad \forall x \in S_X$.

Demostración. El espacio de Banach en cuestión será $X := H \times H$ con la norma

$$\|(\eta,\xi)\|^p := \|\eta\|^p + \|\xi\|^p$$

siendo H un espacio de Hilbert real de dimensión mayor o igual a dos y p un número real a determinar con $1 < p \neq 2$. Claramente $\mathcal{G}_0$ es no trivial ($\mathcal{G}_0(X) \supseteq \{T \times T : T \in \mathcal{G}_0(H)\}$) y existen vectores de reflexión isométrica en X. En lo que sigue veremos que, si $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces podemos elegir $p := p(\delta)$ con $1 < p \neq 2$, satisfaciendo la propiedad iii) de la proposición. Consideremos la función continua

$$h : (p,\lambda,\mu) \mapsto \max\{\lambda(1-\mu^q)^{\frac{1}{q}} + (1-\lambda^p)^{\frac{1}{p}}\mu, \lambda\mu + (1-\lambda^p)^{\frac{1}{p}}(1-\mu^q)^{\frac{1}{q}}\}$$

de $]1,\infty[\times[0,1] \times [0,1]$ en $\mathbb{R}$, donde q está determinado por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si definimos la función $s : p \to \inf\{h(p,\lambda,\mu) : (\lambda,\mu) \in [0,1] \times [0,1]\}$ de $]1,\infty[$ en $\mathbb{R}$, del Lema II.3.10 se sigue su continuidad. Se comprueba fácilmente que $s(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (véase la nota siguiente), de donde, para $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ existe $1 < p = p(\delta) \neq 2$ con $s(p) \geq \delta$. Para este p considérese el espacio de Banach X construido anteriormente. Sean x y f en S_X y S_{X^*}, respectivamente. Entonces existen η, ξ, χ, ζ en H tales que $x = (\eta, \xi)$, $\|\eta\|^p + \|\xi\|^p = 1$, $\|\chi\|^q + \|\zeta\|^q = 1$, $f((y,z)) = (\chi|y) + (\zeta|z)$ para todo (y,z) en X. Por otra parte, al ser los espacios de Hilbert transitivos, existen M, P, Q, T en $\mathcal{G}(H)$ con $\|\zeta\|P(\xi) = \|\xi\|\zeta$, $\|\chi\|M(\eta) = \|\eta\|\chi$, $\|\zeta\|Q(\eta) = \|\eta\|\zeta$ y $\|\chi\|T(\xi) = \|\xi\|\chi$. Ya que los operadores, $(y,z) \mapsto (M(y), P(z))$ y $(y,z) \mapsto (T(z), Q(y))$ son isometrías lineales y sobreyectivas en X, tenemos

$$\begin{aligned}
&\sup\{f(F(x)) : F \in \mathcal{G}(X)\} \\
&\geq \max\{(\chi|M(\eta)) + (\zeta|P(\xi)), (\chi|T(\xi)) + (\zeta|Q(\eta))\} \\
&\geq \max\{\|\eta\|\|\chi\| + \|\xi\|\|\zeta\|, \|\xi\|\|\chi\| + \|\eta\|\|\zeta\|\} \\
&\geq \inf\{\max\{ac + bd, bc + ad\} : a, b, c, d \geq 0, a^p + b^p = 1, c^q + d^q = 1\} \\
&= s(p) \geq \delta\ .
\end{aligned}$$

Al ser x y f elementos arbitrarios en S_X y S_{X^*}, respectivamente, aplicando el Lema II.3.9 se concluye la prueba. ∎

NOTA II.3.12. Supongamos que se tiene

$$\lambda\mu + (1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

$$\lambda(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} + (1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\mu < \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

para algún $(\lambda, \mu) \in [0,1] \times [0,1]$. De (1) se deduce que $(\mu^2 + \lambda^2) > \frac{2}{\sqrt{2}}\lambda\mu + \frac{1}{2}$. Utilizando esto, (2) y de nuevo (1) llegamos a la siguiente contradicción:

$$2\lambda\mu\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}\right] < 2\lambda^2\mu^2 < 2\lambda\mu\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}\right]$$

Esto prueba que $s(2) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Finalmente para $\lambda = 0, \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se tiene $h(2, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

II.4 Reflexiones isométricas en el espacio real subyacente a un espacio de Banach complejo.

Como ya se anunció en la introducción, en esta sección reencontraremos el Teorema I.4.8 de Kalton y Wood, como consecuencia del teorema de la sección anterior. A su vez, también daremos una primera versión compleja de los resultados más relevantes obtenidos en la sección segunda de este capítulo.

En lo que sigue X será un espacio de Banach COMPLEJO. Denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$ el espacio de Banach real subyacente a X. La herramienta clave para nuestros objetivos es la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN II.4.1 . *Sea e en S_X. Entonces $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica en X si y sólo si e es un vector de reflexión isométrica en $X_{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica Π en X. Consideremos el funcional e^* determinado por $\Pi(x) = e^*(x)e$ para todo x en X (luego $e^*(e) = 1$). Dado x en X, existe λ en $\mathbb{R}$ de manera que $\overline{e^*(x)} = |e^*(x)| \left(sen\frac{\lambda}{2} - i\cos\frac{\lambda}{2}\right)$. Por ser Π una proyección tenemos

$$exp(i\lambda\Pi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k\lambda^k\Pi^k(x)}{k!} = x + (exp(i\lambda) - 1)\Pi(x) \quad \forall x \in X\,,$$

y por ser hermítica, $exp(i\lambda\Pi)$ es una isometría, de donde,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|exp(i\lambda\Pi)(x)\| = \|x + (exp(i\lambda) - 1)\Pi(x)\| \\
&= \left\|x - 2sen\tfrac{\lambda}{2}(sen\tfrac{\lambda}{2} - i\cos\tfrac{\lambda}{2})\Pi(x)\right\| \\
&= \left\|x - 2sen\tfrac{\lambda}{2}(sen\tfrac{\lambda}{2} - i\cos\tfrac{\lambda}{2})e^*(x)e\right\| \\
&= \left\|x - 2sen\tfrac{\lambda}{2}|e^*(x)|e\right\| = \|x - 2Re(e^*(x))e\| \quad .
\end{aligned}$$

Luego para todo x en X se tiene que $\|x\| = \|x - 2Re(e^*(x))e\|$, de donde e es un vector de reflexión isométrica en $X_{\mathbb{R}}$ con funcional asociado $x \mapsto Re(e^*(x))$.

Recíprocamente, si e es un vector de reflexión isométrica en $X_{\mathbb{R}}$, entonces existe un funcional e^* en S_{X^*} con $e^*(e) = 1$ y tal que $\|x\| = \|x - 2Re(e^*(x))e\|$ para todo x en X. Dado x en X y λ en $\mathbb{R}$ tomemos μ en $\mathbb{C}$ con $|\mu| = 1$ de manera que se verifique $\mu|e^*(x)| = \overline{e^*(x)}\left(sen\frac{\lambda}{2} + i\cos\frac{\lambda}{2}\right)$. Si Π denota la proyección de X sobre $\mathbb{C}e$ dada por $y \mapsto e^*(y)e$, se tiene que

$$\|x\| = \|\mu x\| = \|\mu x - 2Re(e^*(\mu x))e\| = \|x - 2\overline{\mu}Re(e^*(\mu x))e\| =$$

$$= \|x - 2sen\frac{\lambda}{2}(sen\frac{\lambda}{2} - i\cos\frac{\lambda}{2})e^*(x)e\| = \|exp(i\lambda\Pi)(x)\|$$

y por tanto Π es hermítica (con rango igual a $\mathbb{C}e$). ∎

Esta proposición nos permite obtener versiones complejas de los resultados presentados en este capítulo para espacios de Banach reales. El siguiente corolario recoge una variante compleja del Teorema II.2.4, generalizando el resultado de Berkson [Ber] (ver también [KW, Corollary 4.4]) que afirma que

Dado un espacio de Banach X, si para todo elemento e en S_X, $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica en X, entonces X es un espacio de Hilbert.

COROLARIO II.4.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El conjunto de los elementos e en S_X tales que $\mathbb{C}e$ es un L^2-sumando de X, no es raro en S_X.

(ii) El conjunto de todos los elementos e en S_X tales que $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica en X no es raro en S_X.

(iii) X es un espacio de Hilbert.

Demostración. Sea e en S_X tal que $\mathbb{C}e$ es un L^2-sumando de X y denotemos por Π la L^2-proyección de X sobre $\mathbb{C}e$ ($\|x\|^2 = \|\Pi(x)\|^2 + \|x - \Pi(x)\|^2$ para todo x en X). Para λ en $\mathbb{R}$ se tiene $exp(i\lambda\Pi)(x) = x + (exp(i\lambda) - 1)\Pi(x)$ para todo x en X. De estos dos hechos se deduce la hermitianidad de Π.

Por otra parte, si $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica entonces por la proposición anterior e es un vector de reflexión isométrica en $X_{\mathbb{R}}$, luego el conjunto de vectores de reflexión isométrica en $X_{\mathbb{R}}$ es no raro ralativo a $S_{X_{\mathbb{R}}}$, y por el Teorema II.2.4 se concluye que X es un espacio de Hilbert. ∎

El corolario que acabamos de demostrar será mejorado en la sección siguiente, por supuesto a costa de introducir nuevas técnicas.

Es claro que $\mathcal{G}(X_{\mathbb{R}})$ contiene a $\mathcal{G}(X)$ y que $\mathcal{G}_0(X)$ contiene a todas las multiplicaciones de la identidad por números complejos de módulo uno. Esto nos permite concluir que $\mathcal{G}_0(X_{\mathbb{R}})$ es no trivial. Así, el próximo resultado, es consecuencia inmediata de la Proposición II.4.1 y el Teorema II.3.5.

COROLARIO II.4.3. *Supongamos que existe una proyección hermítica en X con rango unidimensional y que existe $\delta > 0$ tal que $\overline{co}\{\mathcal{G}(x)\} \supseteq \delta B_X$ para todo x en S_X. Entonces X es isomorfo a un espacio de Hilbert. Más concretamente, existe un natural $n \leq \delta^{-2}$ y subespacios hilbertianos $H_1, H_2, ..., H_n$ de X, dos a dos isomorfos, satisfaciendo:*

(i) $X = \oplus_{i=1}^{n} H_i$.

(ii) Para $i = 1, 2, ..., n$ *y* F *en* $\mathcal{G}$, *existe* $j = 1, 2, ..., n$ *con* $F(H_i) = H_j$.

(iii) Para $i = 1, 2, ..., n$, H_i *es* $\mathcal{G}_0$*-invariante.*

El siguiente corolario contiene el resultado de Kalton-Wood, al que venimos haciendo alusión a lo largo de este capítulo. Su demostración es similar a la que hicimos para obtener los Corolarios II.3.6 y II.3.7 a partir del Teorema II.3.5.

COROLARIO II.4.4 . *Supongamos que existe una proyección hermítica en X con rango unidimensional y que se satisface alguna de las siguientes hipótesis:*

(i) Existe $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ tal que $\delta B_X \subseteq \overline{co}(\mathcal{G}(x))$ para todo x en S_X.

(ii) Existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_X \subseteq \overline{co}(\mathcal{G}(x))$ para todo x en S_X y la norma de X es maximal.

Entonces X es un espacio de Hilbert.

OBSERVACIÓN II.4.5 . Para $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, sea $p = p(\delta)$ como en la demostración de la Proposición II.3.11, y, para todo espacio de Hilbert complejo H no cero, denotamos por X al espacio de Banach complejo $H \times H$ con la norma $\|(\eta, \xi)\| := (\|\eta\|^p + \|\xi\|^p)^{\frac{1}{p}}$. Entonces X no es un espacio de Hilbert, existe una proyección hermítica en X de rango uno, y, argumentando como en la demostración de la Proposición II.3.11, se comprueba que $\delta B_X \subseteq \overline{co}(\mathcal{G}(x))$ para todo x en S_X.

II.5 Isometrías que son perturbaciones unidimensionales de la identidad en espacios complejos.

En esta sección supondremos que el espacio de Banach X es COMPLEJO. Como ya se dejó entrever en la introducción al capítulo, el trabajo que realizaremos en esta sección viene motivado, principalmente, por el resultado de F. Cabello, Teorema I.2.11.

Recuérdese que una proyección P en X se dice ser **bicontractiva** si P y $I - P$ son aplicaciones contractivas.

LEMA II.5.1. *Sea P una proyección no nula en X, y α en $\mathbb{C}$ tal que $I+(\alpha-1)P$ es una isometría sobreyectiva. Entonces $|\alpha|=1$. Además tenemos:*

(i) P es bicontractiva siempre que $\alpha \neq 1$.

(ii) P es hermítica si el argumento de α es irracional módulo π.

Demostración. Eligiendo x en $X\backslash\{0\}$ tal que $P(x)=x$, se tiene que $|\alpha|=1$ por ser $I+(\alpha-1)P$ una isometría.

Si definimos $Q := I - P$ se sigue que $Q+\alpha P = I+(\alpha-1)P$ es una isometría sobreyectiva. Para β en $S_{\mathbb{C}}$, $Q+\beta P$ es un elemento del grupo $GL(X)$ de todos los automorfismos de X, y la aplicación de $S_{\mathbb{C}}$ en $GL(X)$ dada por $\beta \mapsto Q+\beta P$ es un homomorfismo continuo de grupos. En consecuencia el conjunto

$$G := \{\beta \in S_{\mathbb{C}} : Q+\beta P \in \mathcal{G}\},$$

es un subgrupo cerrado de $S_{\mathbb{C}}$ que contiene a α. Recuérdese que los subgrupos cerrados de $S_{\mathbb{C}}$ son $S_{\mathbb{C}}$ y los conjuntos formados por las raices n-ésimas de la unidad, para n en $\mathbb{N}$. En cualquier caso, si suponemos $\alpha \neq 1$, existe $n \neq 1$ en $\mathbb{N}$ tal que G contiene las raices n-ésimas de la unidad, $\beta_1, ..., \beta_n$. Ya que $\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$, tenemos que $Q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Q+\beta_i P)$ es contractiva. Para comprobar que P es contractiva, téngase en cuenta que $P+\overline{\alpha}Q = \overline{\alpha}(Q+\alpha P)$ es una isometría sobreyectiva y repítase el argumento anterior.

Si el argumento de α es irracional módulo π, entonces $G = S_{\mathbb{C}}$ y por tanto $I+(\beta-1)P = Q+\beta P$ es una isometría para todo β en G, de donde P es hermítica. ∎

Los dos próximos lemas resultarán familiares ya que en la sección segunda de este capítulo encontramos una versión real de los mismos.

LEMA II.5.2. *Sea e un vector de perturbación unidimensional isométrica de la identidad en X. Entonces existe un único elemento e^* en X^* satisfaciendo que $e^*(e) = 1$ y con la propiedad de que si F es cualquier*

LEMA II.5.1. *Sea P una proyección no nula en X, y α en $\mathbb{C}$ tal que $I+(\alpha-1)P$ es una isometría sobreyectiva. Entonces $|\alpha|=1$. Además tenemos:*

(i) P es bicontractiva siempre que $\alpha \neq 1$.

(ii) P es hermítica si el argumento de α es irracional módulo π.

Demostración. Eligiendo x en $X\backslash\{0\}$ tal que $P(x)=x$, se tiene que $|\alpha|=1$ por ser $I+(\alpha-1)P$ una isometría.

Si definimos $Q := I-P$ se sigue que $Q+\alpha P = I+(\alpha-1)P$ es una isometría sobreyectiva. Para β en $S_{\mathbb{C}}$, $Q+\beta P$ es un elemento del grupo $GL(X)$ de todos los automorfismos de X, y la aplicación de $S_{\mathbb{C}}$ en $GL(X)$ dada por $\beta \mapsto Q+\beta P$ es un homomorfismo continuo de grupos. En consecuencia el conjunto

$$G := \{\beta \in S_{\mathbb{C}} : Q+\beta P \in \mathcal{G}\},$$

es un subgrupo cerrado de $S_{\mathbb{C}}$ que contiene a α. Recuérdese que los subgrupos cerrados de $S_{\mathbb{C}}$ son $S_{\mathbb{C}}$ y los conjuntos formados por las raices n-ésimas de la unidad, para n en $\mathbb{N}$. En cualquier caso, si suponemos $\alpha \neq 1$, existe $n \neq 1$ en $\mathbb{N}$ tal que G contiene las raices n-ésimas de la unidad, $\beta_1, ..., \beta_n$. Ya que $\sum_{i=1}^{n}\beta_i = 0$, tenemos que $Q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Q+\beta_i P)$ es contractiva. Para comprobar que P es contractiva, téngase en cuenta que $P+\overline{\alpha}Q = \overline{\alpha}(Q+\alpha P)$ es una isometría sobreyectiva y repítase el argumento anterior.

Si el argumento de α es irracional módulo π, entonces $G = S_{\mathbb{C}}$ y por tanto $I+(\beta-1)P = Q+\beta P$ es una isometría para todo β en G, de donde P es hermítica. ∎

Los dos próximos lemas resultarán familiares ya que en la sección segunda de este capítulo encontramos una versión real de los mismos.

LEMA II.5.2. *Sea e un vector de perturbación unidimensional isométrica de la identidad en X. Entonces existe un único elemento e^* en X^* satisfaciendo que $e^*(e) = 1$ y con la propiedad de que si F es cualquier* *isometría sobreyectiva perturbación unidimensional de la identidad en X con $e \in (I - F)(X)$, entonces podemos encontrar α en $S_{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$ tal que*

$$F = I + (\alpha - 1)e^* \otimes e\,.$$

Además, el funcional e^* tiene norma uno.

Demostración. Sea F una isometría perturbación unidimensional de la identidad en X con $e \in (I - F)(X)$. Entonces existe h en $X^* \setminus \{0\}$ tal que $F = I + h \otimes e$. Si $h(e) = 0$, se tiene que $I + n(h \otimes e) = (I + h \otimes e)^n$ es una isometría, para todo n en $\mathbb{N}$, lo cual no es posible siendo $h \neq 0$. Si definimos $e^* := (h(e))^{-1}h$ y $\alpha := 1 + h(e)$, tenemos que $e^*(e) = 1$ y que $F := I + (\alpha - 1)e^* \otimes e$. Por el lema anterior $|\alpha| = \|e^*\| = 1$. Ahora sólo nos queda probar que el funcional e^* que hemos encontrado anteriormente no depende de F. Puesto que para cualquier subespacio finito dimensional Y de X que contenga a e, F restringido a Y es una isometría perturbación unidimensional de la identidad de Y, por el Teorema I.5.8 existe un producto escalar $(.|.)$ en Y con $(e|e) = 1$ y cuyo grupo de isometrías sobreyectivas contiene a F, de donde $e^*(x) = (x|e)$ para todo x en Y. ∎

LEMA II.5.3 . *El conjunto de todos los vectores de perturbación unidimensional isométrica de la identidad es norma cerrado.*

Demostración. Tomemos $\{e_n\}$ sucesión de vectores de perturbación unidimensional isométrica de la identidad, que convergen en norma a un elemento e de X. Por el lema anterior para cada n en $\mathbb{N}$ existen α_n en $S_{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$ y e_n^* en S_{X^*} tal que $e_n^*(e_n) = 1$ y $I + (\alpha_n - 1)e_n^* \otimes e_n$ es una isometría sobreyectiva. Puesto que $\{\beta \in S_{\mathbb{C}} : I + (\beta - 1)e_n^* \otimes e_n \in \mathcal{G}\}$ es un subgrupo cerrado de $S_{\mathbb{C}}$ podemos suponer que $|\alpha_n - 1| \geq 1$ para todo n en $\mathbb{N}$. El resto de la demostración es análoga a la del Lema II.2.3. Sea (α, e^*) un valor de adherencia de la sucesión (α_n, e_n^*) en $S_{\mathbb{C}} \times (B_{X^*}, w^*)$. Si denotamos por $\mathbf{n}$ la topología de la norma en X entonces la aplicación $(x, g) \to g(x)$ de $(S_X, \mathbf{n}) \times (B_{X^*}, w^*)$ a $\mathbb{C}$ es continua, luego $e^*(e)$ es un valor de adherencia en $\mathbb{C}$ de la sucesión $\{e_n^*(e_n)\}$, que es constantemente igual a 1, de donde $e^*(e) = 1$. Por otra parte, para cada x en X, $x + (\alpha - 1)e^*(x)e$ es un valor de adherencia de la sucesión $\{x+(\alpha_n - 1)e_n^*(x)e_n\}$ en la topología $\mathfrak{n}$, y en consecuencia $I+(\alpha-1)e^*\otimes e$ es una isometría. Al ser $\alpha \neq 1$ y $e^* \neq 0$, se sigue que e es un vector de perturbación unidimensional isométrica de la identidad. ∎

El siguiente lema supone ya una novedad en las técnicas que necesitamos para la demostración del resultado que perseguimos.

Lema II.5.4. *Para H espacio de Hilbert complejo, $e \in S_H$ y $\alpha \neq 1$ en $S_\mathbb{C}$, sea Ω el subconjunto abierto no vacío de S_H dado por*

$$\Omega := \left\{ z \in S_H : |(e|z)| > \sqrt{\left(\frac{Re(\alpha)+1}{2}\right)} \right\}.$$

Entonces existen funciones continuas $\gamma : \Omega \to S_\mathbb{C}$ y $x : \Omega \to S_H$ satisfaciendo $x(e) = e$ y

$$e + (\alpha - 1)(e|x(z))x(z) = \gamma(z)z \ \forall z \in \Omega.$$

Demostración. Sea $\lambda \in]0, \pi[$ tal que $\alpha = exp(2i\lambda)$ (de donde $\sqrt{\frac{Re(\alpha)+1}{2}} = |\cos\lambda|$). Entonces la aplicación

$$\gamma : y \mapsto \frac{exp(i\lambda)(e|y)}{|(e|y)|^2}\left[\cos\lambda + i\sqrt{|(e|y)|^2 - \cos^2\lambda}\right]$$

de Ω en $S_\mathbb{C}$ es continua. Además, $S_\mathbb{C}e$ está contenido en Ω y, para $y = \mu e \in S_\mathbb{C}e$ tenemos que $\gamma(y)y = \alpha\overline{\mu}y = \alpha e$. Como consecuencia, se tiene que $(e|\gamma(y)y) \neq 1$, ya que, en caso contrario, de la desigualdad de Cauchy-Schawarz se llegaría a que $\alpha = 1$.

Ahora la aplicación continua

$$x : y \mapsto \frac{(e|\gamma(y)y - e)}{|(e|\gamma(y)y - e)|\|\gamma(y)y - e\|}(\gamma(y)y - e)$$

de Ω en S_H satisface $x(e) = e$. Para obtener que

$$e + (\alpha - 1)(e|x(y))x(y) = \gamma(y)y \ \ \forall y \in \Omega$$

basta tener en cuenta la siguiente igualdad

$$(\alpha - 1)(e|\gamma(y)y - e) = \|\gamma(y)y - e\|^2 \quad \forall y \in \Omega,$$

que probamos a continuación. De la propia definición de γ se tiene:

$$\overline{\gamma(y)}(e|y) = exp(-i\lambda)\left[\cos\lambda - i\sqrt{|(e|y)|^2 - \cos^2\lambda}\,\right] \tag{2.1}$$

y

$$\gamma(y)\overline{(e|y)} = exp(i\lambda)\left[\cos\lambda + i\sqrt{|(e|y)|^2 - \cos^2\lambda}\,\right]. \tag{2.2}$$

Para y en Ω se sigue que

$$(\alpha - 1)(e|\gamma(y)y - e) = \|\gamma(y)y - e\|^2$$

si y sólo si

$$\alpha\overline{\gamma(y)}(e|y) - \overline{\gamma(y)}(e|y) - \alpha + 1 = 2 - \gamma(y)(y|e) - \overline{\gamma(y)}(e|y),$$

igualdad que es cierta por (2.1), (2.2) y ser $\alpha = exp(2i\lambda)$. ∎

El resultado que perseguimos reza como sigue.

TEOREMA II.5.5. *Sea $\mathcal{P}$ el subconjunto de S_X formado por los vectores de perturbación unidimensional isométrica de la identidad. Si $\mathcal{P}$ no es raro en S_X entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. En virtud del Lema II.5.3 y la no rareza de $\mathcal{P}$, se tiene que $\mathcal{P}$ tiene interior no vacío en S_X. Una simplificación de la demostración del Lema II.5.3 muestra que, para β en $S_{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$, el siguiente conjunto es norma cerrado en S_X

$$\mathcal{P}_\beta := \{e \in S_X : \exists e^* \in S_{X^*} \,/\, e^*(e) = 1, I + (\beta - 1)e^* \otimes e \in \mathcal{G}\}.$$

Dado δ en $S_{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$ con argumento irracional módulo π, del Lema II.5.1, se deduce que $\mathcal{P}_\delta \subseteq \mathcal{P}_\beta$ para todo β en $S_{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$. Así, si llamamos

$$Q := \{\delta \in S_{\mathbb{C}} \setminus \{1\} : \text{ argumento de } \delta \text{ racional módulo } \pi\},$$

se tiene que $\mathcal{P} = \bigcup_{\delta \in Q} \mathcal{P}_\delta$. Del teorema de Baire, se sigue la existencia de un δ en Q tal que $\mathcal{P}_\delta$ tiene interior no vacio en S_X (sea W). Fijemos e en W. Concluiremos la demostración probando que todo subespacio finito dimensional de X que contenga a e es un espacio de Hilbert. Sea M un tal subespacio. Por el Teorema de Auerbach I.5.8 existe un producto escalar $(.|.)$ en dicho subespacio que es $\mathcal{G}(M)$-invariante, con $(e|e) = 1$. Denotemos por $|.|$ la norma que deriva de dicho producto escalar y consideremos el espacio de Hilbert $H := (M, |.|)$ y el homeomorfismo $h : y \mapsto \frac{y}{|y|}$ de S_M sobre S_H. Para el espacio de Hilbert H, y para los elementos δ en $S_{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$ y e en S_H presentados anteriormente, sean Ω el subconjunto no vacío de S_H y γ y x las funciones continuas de Ω a $S_{\mathbb{C}}$ y a S_H, respectivamente, dados por el lema anterior. Entonces el conjunto $L := \{y \in S_M : h(y) \in \Omega, h^{-1}(x(h(y))) \in W\}$ es abierto en S_M y no vacío ($e \in L$). Sea y en L. Ya que W está contenido en $\mathcal{P}_\delta$, existe una isometría perturbación unidimensional de la identidad en X de manera que $x(h(y))$ es un vector propio para dicha isometría con valor propio δ. Esta isometría sobreyectiva puede ser vista como isometría sobreyectiva en M, que denotaremos por F_y. Dado que F_y es tambien una isometría sobreyectiva en H y $x(h(y))$ pertenece a S_H, se sigue que F_y no es más que la aplicación dada por

$$z \mapsto z + (\delta - 1)(z|x(h(y)))x(h(y))$$

de M a M. Por las propiedades de las funciones γ y x en el Lema II.5.4 se tiene que

$$F_y(e) = \gamma(h(y))h(y)\,,$$

así $h(y) = y$ (ya que F_y es una isometría en M), de donde

$$\overline{\gamma(y)}F_y(e) = y.$$

Al ser y arbitrario en L, tenemos $L \subset \mathcal{G}(M)(e)$, luego $\mathcal{G}(M)(e)$ tiene interior no vacío en S_M, y en consecuencia, por el Teorema I.1.7, M es transitivo. Esto implica que la norma de H coincide con la de M en todos los puntos de S_M, y por tanto ambas normas son iguales, y M es un espacio de Hilbert. ∎

Notemos que el anterior teorema generaliza el resultado obtenido por F. Cabello, Teorema I.2.11. Igualmente, a partir de él, también se reencuentra el Corolario II.4.2, así como las consecuencias del mísmo, como por ejemplo el ya citado resultado de Berkson.

Terminamos el capítulo con dos notas. En la primera de ellas mostramos dos contraejemplos prometidos.

NOTA II.5.6. Sea e en S_X, y consideremos las siguientes condiciones:

(i) $\mathbb{C}e$ es el rango de una proyección hermítica en X.

(ii) e es un vector de reflexión isométrica en X.

(iii) e es un vector de perturbación unidimensional isométrica de la identidad en X.

Entonces sabemos que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$, pero las implicaciones recíprocas no son ciertas. Consideremos el espacio de Banach $X := \mathbb{C}^2$ con la norma del máximo

$$\|(\lambda,\mu)\| := \max\{|\lambda|, |\mu|\}$$

y tomemos $e := (1,1)$. Si e^* es el funcional en X dado por $e^*(\lambda,\mu) := \frac{\lambda+\mu}{2}$, es de comprobación inmediata ver que $F := I - 2e^* \otimes e$ es una reflexión isométrica en X con $F(e) = -e$, luego e es un vector de reflexión isométrica en X. Sin embargo, $\mathbb{C}e$ no puede ser el rango de una proyección hermítica en X ya que, en caso contrario, por el Lema II.5.2, se tendría $\|x + (\beta - 1)e^*(x)e\| = \|x\|$ para todo β en $S_{\mathbb{C}}$ y x en X, lo cual no es cierto para $\beta = i$ y $x = (0,1)$. Tomemos ahora como espacio de Banach $X := \mathbb{C}^2$ con la norma

$$\|(\lambda,\mu)\| := \max\{|\lambda|, |\mu|, |(\alpha+1)\lambda - \alpha\mu|\}$$

donde $\alpha := exp(\frac{2\pi i}{3})$, y elijamos $e := (1,\overline{\alpha})$. Si denotamos por e^* el funcional en X dado por $e^*(\lambda,\mu) := \frac{\mu-\lambda}{\overline{\alpha}-1}$, entonces el operador

$$I + (\alpha - 1)e^* \otimes e$$

es una isometría perturbación unidimensional de la identidad en X, y por lo tanto e es un vector de perturbación unidimensional isométrica de la identidad. Si e fuese un vector de reflexión isométrica en X, de nuevo por el Lema II.5.2, se tendría que $\|x - 2e^*(x)e\| = \|x\|$ para todo x en X, lo que no es cierto para $x = (0, 1 - \overline{\alpha})$.

Nota II.5.7. Las técnicas que hemos utilizado en el ambiente complejo para demostrar el Teorema II.5.5 pueden ser aplicadas con notables simplificaciones en el caso real para conseguir una nueva demostración del Teorema II.2.4. Esta nueva demostración, cuyos detalles dejamos al lector interesado, es completamente independiente de los resultados del artículo de Skorik-Zaidenberg [SZ].

Capítulo III

Transitividad de la norma en espacios de Banach con una estructura algebraica añadida.

III.1 Introducción al Capítulo 3.

A lo largo de este capítulo estudiaremos las propiedades que se derivan de la coincidencia, en un espacio de Banach X, de una conveniente estructura algebraica y de las características analíticas que aportan a la geometría de su bola unidad los diferentes tipos de transitividad de su norma. De este modo en las secciones segunda y tercera, introduciremos el concepto de elemento que "actúa como unidad" en un espacio de Banach X. Este concepto lo utilizaremos para obtener caracterizaciones multiplicativas de los espacios de Hilbert, que en el caso complejo se derivan del teorema de Bohnenblust-Karlin, mientras que en el caso real hacen uso del Teorema II.2.4. Como consecuencia de estos resultados obtendremos que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ (el álgebra absolutamente valuada de los cuaternios de Halminton) son las únicas álgebras de Banach reales unitales con normas casi-transitivas.

Como ya se puso de manifiesto en el capítulo introductorio de esta memoria, una gran parte de la literatura que trata de condiciones de transitividad de la norma centra su atención en el estudio de tales condiciones en los espacios de Banach $C_0^{\mathbb{K}}(L)$ y $L_1^{\mathbb{K}}(\mu)$. Estos espacios de Banach clásicos tienen hoy una más amplia comprensión en el ambiente de las C^*-álgebras (o incluso en el contexto más general de los JB^*-triples) y en el de las JB-álgebras. En efecto, los espacios $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ no son otra cosa que las C^*-álgebras conmutativas y los espacios $L_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ son precisamente los preduales de las W^*-álgebras conmutativas. Análogamente, los espacios $C_0^{\mathbb{R}}(L)$ y $L_1^{\mathbb{R}}(\mu)$ coinciden con las JB-álgebras asociativas y los preduales de las JBW-álgebras asociativas, respectivamente. Motivados por estas ideas, en las restantes secciones estudiaremos condiciones de transitividad en las normas de los JB^*-triples y las JB-álgebras, así como en los preduales de los mismos. Plantearemos algunos problemas, a la vez que se extenderán resultados ya conocidos, entre los que figuran los Teoremas I.1.5, I.1.6, I.2.5 y I.4.4. Por ejemplo, la Conjetura de Wood I.3.3 pasa a ser un caso particular de otro problema más ambicioso, a saber, ¿es todo JB^*-triple transitivo un espacio de Hilbert? (ver Problema III.4.1), y el resultado ya comentado de que L se reduce a un punto si $C_0^{\mathbb{R}}(L)$

es casi-transitivo se seguirá del hecho más general de que $\mathbb{R}$ es la única JB-álgebra casi-transitiva (Corolario III.7.4).

En las secciones 4 y 5, se tratarán las condiciones de transitividad de la norma en JB^*-triples así como en los preduales de los JBW^*-triples. Como ya se comentó en el capítulo introductorio de esta memoria, el primer tabajo en este terreno se debe a S. K. Tarasov (Corolario I.1.6), quien demuestra que el Problema de Banach-Mazur I.1.2 tiene respuesta afirmativa en la clase de los JB^*-triples. Reencontraremos este resultado y se probará que tal problema también tiene respuesta afirmativa en la clase de los preduales de los JBW^*-triples (Corolario III.4.5). También demostraremos que, si X es el predual de un JBW^*-triple, y bien el conjunto de los puntos extremos de B_X no es raro en S_X, o bien B_X tiene algún punto extremo y X es convexo-transitivo, entonces X es un espacio de Hilbert (Teorema III.5.4 y Corolario III.5.2). Como consecuencia de estos resultados obtendremos una generalización del ya comentado teorema de Tarasov, mostrando que el Problema de Banach-Mazur I.1.2 tiene respuesta afirmativa en la clase de las extensiones no asociativas de los L_1-preduales complejos (a saber, la clase de los espacios de Banach cuyos duales son preduales de JBW^*-triples).

Ni que decir tiene que todos los resultados obtenidos para JB^*-triples se aplican a las C^*-álgebras, con la ventaja adicional de que $\mathbb{C}$ es la única C^*-álgebra que es espacio de Hilbert. No obstante, las C^*-álgebras poseen su propia filosofía (debida principalmente a su estructura de orden), y, con tal filosofía las condiciones de transitividad de la norma obtienen formulaciones especialmente bellas. Así, en la sección sexta se caracterizarán la casi-transitividad (Proposición III.6.2) y la convexo-transitividad (Teorema III.6.4) de la norma de éstas, resultados éstos que extienden los análogos para C^*-álgebras conmutativas, Teoremas I.1.5 y I.4.4. También demostraremos que el álgebra de Calkin es convexo-transitiva, hecho que representa el primer ejemplo de una C^*-álgebra convexo-transitiva no conmutativa que aparece en la literatura.

Finalmente, en la última sección probaremos que, si X es una JB-álgebra, y si X tiene predual convexo-transitivo o si la norma de X es convexo-transitiva, entonces X es asociativa (Proposición III.7.2 y

Teorema III.7.4). Ahora, junto con el Teorema I.2.5, obtenemos que $\mathbb{R}$ es la única JB-álgebra casi-transitiva (Corolario III.7.4).

III.2 No rareza del conjunto de puntos que actúan como unidad en espacios de Banach complejos.

Un álgebra normada se dirá ser **unital** si tiene unidad $\mathbf{1}$ y $\|\mathbf{1}\| = 1$. En un espacio de Banach X sobre $\mathbb{K}$, un elemento e se dice que **actúa como unidad** en X si existe un álgebra de Banach unital $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ y una isometría lineal (no necesariamente sobreyectiva) ϕ de X en $\mathcal{A}$ tal que $\phi(e) = \mathbf{1}$. No se supone que el álgebra $\mathcal{A}$ sea asociativa, pero, realmente esta álgebra se puede elegir con esta propiedad adicional. Para ello basta reemplazar $\mathcal{A}$ por el álgebra $L(\mathcal{A})$ de todos los operadores lineales acotados en $\mathcal{A}$, y ϕ por la isometría lineal $x \mapsto L_{\phi(x)}$ de X en $L(\mathcal{A})$, donde, para a en $\mathcal{A}$, L_a denota el operador de multiplicación izquierda por a en $\mathcal{A}$. Obviamente, si dado $e \in S_X$, existe un producto en X para el que e es su unidad, entonces e actúa como unidad. Mostraremos que el recíproco no es cierto por medio de sendos ejemplos (ver Ejemplos III.2.5 y III.3.5 para el caso complejo y real, respectivamente).

LEMA III.2.1 . *El conjunto U de todos los elementos de un espacio de Banach X que actúan como unidad en X es norma cerrado.*

Demostración. Sea $\{e_n\}$ una sucesión en U que converge en norma a un elemento e de X. Para cada n en $\mathbb{N}$, existe un algebra de Banach unital $\mathcal{A}_n$ y una isometría lineal ϕ_n de X en $\mathcal{A}_n$ tal que $\phi_n(e_n) = \mathbf{1}_n$, donde $\mathbf{1}_n$ es la unidad de $\mathcal{A}_n$. Tomemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $\mathbb{N}$ que refine el filtro de Fréchet, y considérese el álgebra de Banach $(\mathcal{A}_n)_{\mathcal{U}}$, es decir, el ultraproducto de la familia de espacios de Banach $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativo a $\mathcal{U}$, visto como álgebra de Banach con el producto dado por $(a_n)(b_n) := (a_n b_n)$. Claramente $(\mathcal{A}_n)_{\mathcal{U}}$ es unital (con unidad $(\mathbf{1}_n)$). Entonces la aplicación $\phi : x \mapsto (\phi_n(x))$ de X en $(\mathcal{A}_n)_{\mathcal{U}}$ es una isometría lineal de X en $(\mathcal{A}_n)_{\mathcal{U}}$ con $\phi(e) = (\mathbf{1}_n)$. ∎

Un **vértice** de un espacio de Banach X es un elemento en X de norma uno que no es punto de suavidad para ningún subespacio de dimensión dos que lo contenga. Por el teorema de Hanh-Banach, esta definición puede ser equivalentemente reformulada como sigue. Para un espacio de Banach X y un elemento de norma uno u en X, denotaremos por $D(X,u)$ o simplemente por $D(u)$ al conjunto de los estados de u,

$$\{f \in S_{X^*} : f(u) = 1\}.$$

Entonces u es un vértice de X si y sólo si $D(u)$ separa los puntos de X (es decir, para $x \in X \setminus \{0\}$ existe $f \in D(u)$ tal que $f(x) \neq 0$). Recuérdese que del teorema de Bohnenblust-Karlin [BK] se desprende que la unidad de un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ es un vértice de $B_{\mathcal{A}}$. Como quiera que la propiedad de vértice es claramente hereditaria, se sigue que, en un espacio de Banach complejo X, todo elemento que actúe como unidad en X es un vértice de X.

TEOREMA III.2.2. *Sea X un espacio de Banach complejo. Supongamos que el conjunto de elementos de X que actúan como unidad en X es no raro en S_X. Entonces $X = \mathbb{C}$.*

Demostración. Si denotamos por U el conjunto de elementos de X que actúan como unidad en X del lema anterior se sigue que U tiene interior no vacío en S_X. Tomemos e en el interior de U y para x en X, denotemos por M el subespacio engendrado por x y e. Del teorema de Mazur, se sigue que M es suave en un cierto v en $S_M \cap U$. Como v es un vértice de M, se tiene que $x \in \mathbb{C}e$, de donde $X = \mathbb{C}e$. ∎

COROLARIO III.2.3 . *Si X es un espacio de Banach complejo casi-transitivo y existe un elemento en X que actúa como unidad en X, entonces $X = \mathbb{C}$.*

Una consecuencia totalmente inocente del corolario anterior es que $\mathbb{C}$ *es la única álgebra de Banach compleja unital casi-transitiva.*

En realidad este hecho puede ser refinado, como recogemos en la siguiente proposición. Recuérdese que dados dos espacios de Banach X e Y, la **distancia de Banach-Mazur** entre ellos viene dada por

$$d(X,Y) := \inf\{\|\phi\|\|\phi^{-1}\| : \phi \text{ isomorfismo de } X \text{ en } Y\}.$$

PROPOSICIÓN III.2.4 . *Existe una constante universal $C > 1$ tal que, para todo espacio de Banach complejo casi-transitivo X con dimensión mayor o igual que dos, y para todo subespacio M de cualquier álgebra de Banach compleja unital $\mathcal{A}$ que contenga la unidad de $\mathcal{A}$, se tiene que $d(X,M) \geq C$, donde $d(.,.)$ es la distancia de Banach-Mazur.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces, para cada n en $\mathbb{N}$, podemos elegir un espacio de Banach complejo casi-transitivo X_n de dimensión mayor o igual que dos y un álgebra de Banach compleja unital $\mathcal{A}_n$ junto con una aplicación lineal bicontinua inyectiva $\phi_n : X_n \to \mathcal{A}_n$ satisfaciendo que $\mathbf{1}_n \in \phi_n(X_n)$ (donde $\mathbf{1}_n$ es la unidad de $\mathcal{A}_n$), $\|\phi_n\| = 1$, y $\|\phi_n{}^{-1}\| \leq 1 + \frac{1}{n}$. Tomemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $\mathbb{N}$ que refine el filtro de Fréchet y consideremos la aplicación $\phi : (x_n) \mapsto (\phi_n(x_n))$ del espacio de Banach complejo $(X_n)_\mathcal{U}$ en el álgebra de Banach compleja unital $(\mathcal{A}_n)_\mathcal{U}$. De la propia definición de ϕ, se deduce que es una isometría lineal con $\mathbf{1} \in \phi((X_n)_\mathcal{U})$, donde $\mathbf{1} := (\mathbf{1}_n)$ es la unidad de $(\mathcal{A}_n)_\mathcal{U}$. Por otra parte, al ser X_n espacio de Banach casi-transitivo para todo n en $\mathbb{N}$ se tiene que $(X_n)_\mathcal{U}$ es transitivo por la Proposición I.3.1. Del corolario anterior, se sigue que $(X_n)_\mathcal{U}$ es de dimensión uno. Pero esto no es posible ya que, para cada n en $\mathbb{N}$ podemos elegir elementos de norma uno u_n, v_n en X_n con $\|u_n + \mathbb{C}v_n\| \geq 1$, luego $(u_n), (v_n)$ son elementos de norma uno en $(X_n)_\mathcal{U}$ con $\|(u_n) + \mathbb{C}(v_n)\| \geq 1$. ∎

Terminamos la sección mostrando un espacio de Banach complejo X y un elemento en él que actúa como unidad y no es unidad para ningún producto en X de norma uno. Recordamos que, dado un espacio de Banach X y u en S_X, el **rango numérico** de un elemento x de X relativo a u, $V(X,u,x)$, se define por la igualdad

$$V(X,u,x) := \{f(x) : f \in D(X,u)\}.$$

El **índice numérico** de X relativo a u, $n(X,u)$, viene dado por

$$n(X,u) := \operatorname{Inf}\{\operatorname{Sup}\{|\lambda| : \lambda \in V(X,u,x)\} : x \in S_X\}.$$

Si X es complejo, notamos $H(X,u) := \{x \in X : V(X,u,x) \subset \mathbb{R}\}$. Recordamos también que una **V-álgebra** es un álgebra de Banach compleja unital A satisfaciendo $A = H(A,\mathbf{1}) + iH(A,\mathbf{1})$.

EJEMPLO III.2.5. Primero probamos la existencia de subespacios cerrados M $*$-invariantes de $C^{\mathbb{C}}(K)$, para algún compacto K, conteniendo la unidad $\mathbf{1}$ de $C^{\mathbb{C}}(K)$ y tal que, como espacios de Banach punteados, $(M,\mathbf{1})$ no puede ser de la forma $(C^{\mathbb{C}}(K'),\mathbf{1})$, para ningún K' compacto. Tomemos el siguiente subespacio del espacio complejo ℓ_∞^4, $M := Lin\{(1,1,1,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$. Si $(M,\mathbf{1})$ fuese de la forma $(C^{\mathbb{C}}(K'),\mathbf{1})$, con K' compacto, entonces $(M,(1,1,1,1)) = (\ell_\infty^3,(1,1,1))$ como espacios de Banach punteados. Pero ello es imposible pues las isometrías conservan el rango numérico, y $V(M,(1,1,1,1),(1,-1,i,-i))$ es un cuadrado mientras que $V(\ell_\infty^3,(1,1,1),x)$ es un triángulo (posiblemente degenerado) cualquiera que sea x en ℓ_∞^3.

Claramente $(1,1,1,1)$ actúa como unidad en M. Supongamos que existe un producto de norma uno en M para el cual $(1,1,1,1)$ sea unidad. Entonces M, con ese producto, es una V-álgebra (puesto que M es $*$-invariante en ℓ_∞^4). Como quiera que $n(M,(1,1,1,1))$, vale uno (ya que $n(\ell_\infty^4,(1,1,1,1)) = 1$), por [R1, Corollary 32], M es asociativa y conmutativa. Por el teorema de Vidav-Palmer [BD, Theorem 38.14] y el teorema conmutativo de Gelfand-Naimark [Di, Théorème 1.4.1], M es de la forma $C^{\mathbb{C}}(K')$, en contradicción con lo probado en el párrafo anterior.

III.3 No rareza del conjunto de puntos que actúan como unidad en espacios de Banach reales.

En la sección anterior hemos visto cómo la abundancia de puntos que actúan como unidad en un espacio de Banach complejo es muy restrictiva. Afortunadamente, en el caso real esta limitación no es tan fuerte, lo que nos va a permitir obtener caracterizaciones multiplicativas de los espacios de Hilbert reales. La geometría de las álgebras de Banach unitales en sus unidades es muy peculiar y todo espacio de Hilbert real posee dicha peculiaridad en todo elemento de norma uno, a saber: *todo elemento de norma uno de un espacio de Hilbert real H puede verse como unidad para conveniente producto (no-asociativo) que hace de H un álgebra de Banach unital* (ver [R5, Observation 1.3]). Efectivamente, para e en S_H considérese la aplicación bilineal F de $H \times H$ en H dada por $F(x,y) := (x|e)y + (y|e)x - (x|y)e$. Dicha aplicación bilineal tiene norma uno y satisface que $F(x,e) = F(e,x) = x$ para todo x en H. Por lo tanto si en H definimos el producto de dos elementos x, y como $x \circ y := F(x,y)$, se tiene que $(H, \circ)$ es un álgebra de Banach unital con unidad e.

El lema que presentamos a continuación es imprescindible para derivar el principal resultado de esta sección del Teorema II.2.4. En su demostración haremos uso de la siguiente consecuencia del teorema de Sinclair [BD, Corollary 26.6] recogida en [R3, Lemma 2.2 iii)]: *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real unital y sea E el subespacio cerrado de todos los elementos x de $\mathcal{A}$ que satisfacen $V(\mathcal{A}, \mathbf{1}, x) = \{0\}$. Entonces $\|\lambda\mathbf{1} + x\|^2 = \lambda^2 + \|x\|^2$ para todo $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

LEMA III.3.1. *Si e actúa como unidad en un espacio de Banach real X, y si X es suave en e, entonces $\mathbb{R}e$ es un L^2-sumando de X.*

Demostración. Consideremos $\mathcal{A}$ álgebra de Banach real unital y ϕ isometría lineal de X en $\mathcal{A}$ con $\phi(e) = \mathbf{1}$ y sea f el único elemento de X^* tal que $\|f\| = f(e) = 1$. Entonces para todo g en $\mathcal{A}^*$ con $\|g\| = g(\mathbf{1}) = 1$, tenemos que $\|g \circ \phi\| = g \circ \phi(e) = 1$, de donde $g \circ \phi = f$. Se sigue que, para todo x en $Ker(f)$, $V(\mathcal{A}, \mathbf{1}, \phi(x)) = \{0\}$. Como para λ en $\mathbb{R}$, y a en $\mathcal{A}$ con rango numérico cero, se tiene

$$\|\lambda \mathbf{1} + a\|^2 = \lambda^2 + \|a\|^2,$$

concluimos que para λ en $\mathbb{R}$ y x en $Ker(f)$

$$\|\lambda e + x\|^2 = \|\phi(\lambda e + x)\|^2 = \|\lambda \mathbf{1} + \phi(x)\|^2 = \lambda^2 + \|\phi(x)\|^2 = \lambda^2 + \|x\|^2. \blacksquare$$

Para e en S_X y x en X, la función $\alpha \mapsto \|e+\alpha x\|$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es convexa, y por lo tanto el límite

$$\tau(e,x) := \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|e + \alpha x\| - 1}{\alpha}$$

tiene sentido, y se tiene

$$\tau(e,x) := \inf \left\{ \frac{\|e + \alpha x\| - 1}{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Se dice que la norma de un espacio de Banach X es **fuertemente subdiferenciable** en un punto e de S_X si

$$\tau(e,x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|e + \alpha x\| - 1}{\alpha}$$

uniformemente para x en B_X.

TEOREMA III.3.2 . *Supongamos que el conjunto U de todos los elementos de un espacio de Banach real X que actúan como unidad en X es no raro en S_X. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Para e en U, tomemos un álgebra de Banach real unital $\mathcal{A}$ y una isometría ϕ de X en $\mathcal{A}$ tal que $\phi(e) = \mathbf{1}$. Como se pone de manifiesto en la demostración de [R5, Claim 5.8], las pruebas de [MMPR, Proposition 4.5] y [AOPR, Theorem 5.1] muestran que la unidad de un álgebra de Banach es un punto de subdiferenciabilidad fuerte de la norma. Más concretamente, para todo número positivo ε, tenemos

$$\frac{\|\mathbf{1}+\alpha a\|-1}{\alpha} - \tau(\mathbf{1},a) < \varepsilon$$

siempre que a está en B_A y $0<\alpha<\min\{\frac{\varepsilon}{4},\frac{1}{2}\}$. Utilizando que ϕ es una isometría se llega a

$$\frac{\|e+\alpha x\|-1}{\alpha} - \tau(e,x) < \varepsilon$$

para todo x en B_X y para todo α con $0<\alpha<\min\{\frac{\varepsilon}{4},\frac{1}{2}\}$. Ahora, para demostrar que X es suave en todo punto interior de U, seguiremos la línea del argumento que dan C. Franchetti y R. Payá en la demostración de [FP, Proposition 4.1]. Como hemos probado, la convergencia

$$\frac{\|e+\alpha x\|-1}{\alpha} \overset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} \tau(e,x)$$

es uniforme cuando $(e,x)\in U\times B_X$, luego la función $(e,x)\mapsto\tau(e,x)$ de $U\times B_X$ a $\mathbb{R}$ es continua, y por consiguiente, si fijamos un elemento no cero x en X, la aplicación $e\mapsto\tau(e,x)$ de U en $\mathbb{R}$ es continua. Es claro que X es suave en un punto $z\in S_X$ si y sólo si cualquier subespacio dos-dimensional de X que contenga a z, es suave en z. Sea e en $\overset{\circ}{U}$ y M subespacio de X de dimensión dos que contenga a e. El conjunto $M\cap\overset{\circ}{U}$ es abierto en S_M y contiene a e, luego por el teorema de Mazur, existe $\{e_n\}$ sucesión de puntos de $M\cap\overset{\circ}{U}$ que converge a e y tal que M es suave en e_n para todo n en $\mathbb{N}$. Entonces, para todo y en M, se tiene que $\{\tau(e_n,y)\}$ converge a $\tau(e,y)$. Al ser M suave en e_n, $\tau(e_n,-y)=-\tau(e_n,y)$ para todo n en $\mathbb{N}$ y todo y en M. Se sigue que $\tau(e,-y)=-\tau(e,y)$ para todo y en M, de donde M es suave en e. Aplicando el lema anterior y el Teorema II.2.4, se concluye que X es un espacio de Hilbert. ∎

Un consecuencia inmediata del teorema anterior, es el siguiente corolario.

COROLARIO III.3.3 . *Supongamos que M es un subespacio cerrado casi-transitivo de un álgebra de Banach real unital $\mathcal{A}$ que contenga la unidad de $\mathcal{A}$. Entonces M es un espacio de Hilbert.*

Nótese que la hipótesis sobre la casi-transitividad de la norma del subespacio no se puede relajar a convexo-transitividad. Basta recordar que, como se vió en los Ejemplos I.4.7, el álgebra de Banach de las funciones continuas real valuadas en el conjunto de Cantor es convexo-transitiva y obviamente posee unidad. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real unital (no necesariamente asociativa) casi-transitiva. Se desprende del corolario anterior que la norma de $\mathcal{A}$ deriva de un producto escalar $(.|.)$, y por tanto la estructura de $\mathcal{A}$ está dada por [R2, Theorem 27]. En particular, para x, y en $\mathcal{A}$, tenemos

$$\frac{1}{2}(xy + yx) = (x|\mathbf{1})y + (y|\mathbf{1})x - (x|y)\mathbf{1}$$

donde $\mathbf{1}$ denota la unidad de $\mathcal{A}$. Así, $\mathcal{A}$ es un **álgebra cuadrática** (es decir, para todo $x \in \mathcal{A}$ se tiene que $x^2 = \alpha\mathbf{1} + \beta x$ para convenientes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) y todo elemento no nulo x de $\mathcal{A}$ tiene un inverso en la subálgebra (asociativa) de $\mathcal{A}$ generada por x. En consecuencia, aplicando el teorema de Frobenius-Zorn [EHHK, pag. 229 y 262], obtenemos que, si $\mathcal{A}$ es **alternativa** (es decir, para todo $x, y \in \mathcal{A}$ se tiene $x(xy) = x^2y$, $(xy) = xy^2$), entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ u $\mathbb{O}$ (el álgebra absolutamente valuada de los octoniones reales). Esto extiende un resultado de L. Ingelstam en [I.2]. En ambiente asociativo se sigue como corolario el resultado de L. Ingelstam en [I.1] según el cual las únicas álgebras de Banach reales asociativas unitales cuya norma procede de un producto interior son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$.

NOTA III.3.4 . Para un elemento e de norma uno en un espacio de Banach real X, estudiamos ahora algunas propiedades que van desde el ser unidad en X hasta el actuar como unidad en X, a saber:

(i) Existe una aplicación bilineal de norma uno $f : X \times X \to X$ satisfaciendo $f(e, x) = f(x, e) = x$ para todo x en X.

(ii) $m(X,e) = 1$, donde $m(X,e)$ es el ínfimo del conjunto de números $\|f\|$ donde f se mueve en el conjunto de aquellas aplicaciones bilineales continuas de $X \times X \to X$ que satisfacen $f(e,x) = f(x,e) = x$ para todo x en X.

(iii) $sm(X,e) = 1$, donde $sm(X,e)$ es el ínfimo del conjunto de números de la forma $\max\{\|f\|, 1+\|L_e^f - I\|, 1+\|R_e^f - I\|\}$ donde f pertenece al conjunto de las aplicaciones bilineales continuas de $X \times X \to X$ (I denota el operador identidad en X, L_e^f y R_e^f denotan los operadores en X dados por $x \mapsto f(e,x)$ y $x \mapsto f(x,e)$, respectivamente).

(iv) e actúa como unidad en X.

Es claro que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$. Veamos que $iii) \Rightarrow iv)$. Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$, una aplicación bilineal continua f_n de $X \times X \to X$ que satisface, $\|f_n\| \leq 1+\frac{1}{n}$, $\|L_e^f - I\| \leq \frac{1}{n}$ y $\|R_e^f - I\| \leq \frac{1}{n}$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro que refine el filtro de Frechet y consideremos la ultrapotencia $X_\mathcal{U}$ de X según este ultrafiltro. La aplicación bilineal (f_n) de $X_\mathcal{U} \times X_\mathcal{U} \to X_\mathcal{U}$ dada por $(f_n)((x_n),(y_n)) := (f_n(x_n,y_n))$ es un producto en $X_\mathcal{U}$ de norma uno que tiene al elemento $\hat{e}$ como unidad, llegando de este modo a que e actúa como unidad en X.

Se sigue del teorema anterior que si, para e en S_X, $\mathcal{P}_e$ denota alguna de las condiciones $i)$, $ii)$ o $iii)$, y si el conjunto $\{e \in S_X : e \text{ satisface } \mathcal{P}_e\}$ es no raro en S_X, entonces X es un espacio de Hilbert.

Por otra parte, la información dada en el Teorema III.3.2 contiene de manera estricta la proporcionada en la nota anterior ya que, en general, la condición $iv)$ en dicha nota no implica la $iii)$. Para convencernos, basta considerar el siguiente ejemplo.

EJEMPLO III.3.5. Para un espacio de Hilbert real H no cero, definamos el subespacio de $L(H)$, dado por $Y := \{T \in L(H) : T^* = -T\}$, y sea E el subespacio cerrado de $L(H)$ dado por $E := \mathbb{R}e \oplus Y$, donde e denota el operador identidad en H. Entonces para λ en $\mathbb{R}$ y T en E, tenemos

$$\|\lambda e + T\|^2 = \|(\lambda e + T)^*(\lambda e + T)\| = \|\lambda^2 e - T^2\| = \lambda^2 + \|T\|^2$$

luego E contiene a $\mathbb{R}e$ como L^2-sumando y por tanto E es suave en e. Claramente e actúa como unidad en E. Cuando la dimensión de H es mayor o igual que cuatro, podemos elegir cuatro elementos distintos de H dos a dos ortogonales x, y, z, t, con lo que la expansión lineal de $\{x \otimes y - y \otimes x, z \otimes t - t \otimes z\}$ en $L(H)$ es una copia de ℓ_∞^2 contenida en E. En consecuencia, $sm(E, e)$ no puede valer uno, ya que si este fuese el caso se tendría que E es un espacio de Hilbert (ver [R5, Theorem 2.5]: *Un espacio de Banach X es un espacio de Hilbert si (y sólo si) para algún elemento de norma uno e en X, X es suave en e y $sm(X, e) = 1$.*).

III.4 Condiciones de transitividad de la norma en JB^*-triples: primeras observaciomes y comentarios.

Un espacio de Banach complejo X es un **JB^*-triple** si está equipado con un triple producto continuo $\{...\}$ que es conjugado lineal en la variable central, lineal y simétrico en las variables extremas, y satisface las siguientes condiciones:

(i) $D(a,b)D(x,y) - D(x,y)D(a,b) = D(D(a,b)(x),y) - D(x, D(b,a)(y))$ para todo a, b, x, y en X, donde el operador $D(a,b) : X \to X$ está definido por $D(a,b)(x) := \{abx\}$ para todo x en X.

(ii) Para todo x en X, $D(x,x)$ es hermítico con espectro no negativo y satisface $\|D(x,x)\| = \|x\|^2$.

Los JB^*-triples fueron introducidos por W. Kaup [K1], y son de gran interés en el Análisis complejo ya que su bola unidad abierta es un dominio simétrico acotado, y todo dominio simétrico acotado de un espacio de Banach complejo es biholomórficamente equivalente a la bola unidad abierta de un cierto JB^*-triple [K2]. Todo espacio de Hilbert complejo es un JB^*-triple, cuyo triple producto viene dado por

$$\{xyz\} := \frac{1}{2}((x|y)z + (z|y)x).$$

Ahora, es razonable plantearse el siguiente problema.

Problema III.4.1. *Si X es un JB^*-triple transitivo, ¿es X un espacio de Hilbert?.*

Nótese que el espacio de Banach $C_0^{\mathbb{C}}(L)$, para L espacio topológico Hausdorff localmente compacto, con el producto $\{xyz\} := \frac{1}{2}(xy^*z+zy^*x)$ para x, y, z en $C_0^{\mathbb{C}}(L)$, es un JB^*-triple, donde $y^*(s) = \overline{y(s)}$ para s en L (en realidad, toda C^*-álgebra es un JB^*-triple con el producto dado anteriormente). Por lo tanto, una respuesta afirmativa al problema anterior llevaría consigo la resolución de la Conjetura de Wood I.3.3.

Cuando un JB^*-triple posee un predual completo recibe el nombre de **JBW^*-triple**. Si este es el caso, tal predual es único [BT] en el más fuerte sentido de la palabra: dos preduales de un JBW^*-triple X, vistos canónicamente como subespacios de X^*, son el mismo.

La clase de los JBW^*-triples es bastante amplia, por ejemplo, el bidual de todo JB^*-triple X es un JBW^*-triple bajo cierto triple producto que extiende el producto dado en X (ver [D]). El hecho de que todo espacio de Hilbert complejo es el predual de un JBW^*-triple, invita a considerar la siguiente cuestión.

Cuestión III.4.2 . *Si X es el predual de un JBW^*-triple, y si la norma de X es transitiva, ¿es X un espacio de Hilbert?.*

Contrariamente a lo que ocurre con el Problema III.4.1 que permanece abierto, es conocido que sin hipótesis adicionales la respuesta a la cuestión anterior es negativa. Para ello basta recordar el Ejemplo I.1.3 y observar que, dado (Γ, μ) espacio de medida, el espacio de Banach $L_\infty(\Gamma, \mu)$ dotado del producto $\{xyz\} := \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x)$ para x, y, z en $L_\infty(\Gamma, \mu)$ donde $y^*(s) := \overline{y(s)}$ para todo s en Γ, es un JB^*-triple, cuyo predual $L_1(\Gamma, \mu)$ tiene norma transitiva.

El siguiente lema es una herramienta común para probar respuestas parciales afirmativas tanto al Problema III.4.1 como a la Cuestión III.4.2. Dicho lema probado por S. K. Tarasov (ver [Ta]) admite también una demostración similar a la dada en [R4, Lemma 1].

LEMA III.4.3. *Sea X un JB^*-triple tal que para todo x en X se tiene $\{xxx\} = \|x\|^2 x$. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Como ya se dijo en el primer capítulo (Sección 1), el Problema de Banach-Mazur I.1.2 tiene respuesta afirmativa en ciertas clases de espacios de Banach, en las que los miembros suaves son espacios de Hilbert. Se vió que si L es un espacio topológico localmente compacto Hausdorff y si $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es suave, entonces L se reduce a un punto. Por otra parte, si X es un JB^*-triple, para e en S_X, el menor subtriple cerrado de X que contiene a e es isométricamente isomorfo a un JB^*-triple de la forma $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ para conveniente L espacio topológico localmente compacto Hausdorff [K1]. Luego si suponemos que un JB^*-triple X es suave, se tiene que todo elemento e en S_X es un **tripotente** (es decir, $\{eee\} = e$), y por tanto la igualdad $\{xxx\} = \|x\|^2 x$ es cierta para todo x en X. Del lema anterior, se concluye que X es un espacio de Hilbert. De este modo obtenemos que el problema de Banach-Mazur tiene respuesta afirmativa en la clase de los JB^*-triples. Reencontramos de este modo el resultado ya observado por S. K. Tarasov, Corolario I.1.6 de esta memoria.

Ahora supongamos que X es el predual de un JBW^*-triple. Dado un elemento e en S_X, entre los elementos de $D(X, e)$ podemos encontrar tripotentes de X^* (por ejemplo el conocido por el nombre de **soporte** de e [FR, p.75]). Se sigue que si X es suave, todo elemento de S_{X^*} que alcance su norma es un tripotente. Por el teorema de Bishop-Phelps, los tripotentes son norma-densos en S_{X^*}. Pero es completamente obvio comprobar que el conjunto de los tripotentes de un JB^*-triple es norma cerrado y por lo tanto tendríamos que todo elemento de S_{X^*} es tripotente. Así, según el Lema III.4.3, esto sólo ocurre si X^* es un espacio de Hilbert. Recogemos en la siguiente proposición esta nueva caracterización geométrica de los espacios de Hilbert complejos en la clase de los preduales de los JBW^*-triples.

PROPOSICIÓN III.4.4. *Sea X el predual de un JBW^*-triple. Si X es suave, entonces X es un espacio de Hilbert.*

Esta proposición proporciona la siguiente respuesta parcial conjunta al Problema de Banach-Mazur I.1.2 y a la Cuestión III.4.2.

COROLARIO III.4.5. *Sea X el predual de un JBW^*-triple. Si X es separable y transitivo, entonces X es un espacio de Hilbert.*

Es conocido (ver [K1, Proposition 5.4]) que las isometrías lineales y sobreyectivas en un JB^*-triple X no son otra cosa que los biyecciones lineales de X en X que conservan el triple producto de X. Una consecuencia del Lema III.4.3 sería que *todo JB^*-triple casi-transitivo con algún tripotente no nulo es un espacio de Hilbert*. Como consecuencia tenemos una respuesta a una variante natural del Problema III.4.1.

COROLARIO III.4.6. *Sea X un JBW^*-triple casi-transitivo. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

El hecho de que $L_\infty([0,1])$ es convexo-transitivo (ver Ejemplos I.4.7) pone de manifiesto que la casi-transitividad de la norma de X en el anterior corolario no puede ser rebajada.

El hecho señalado anteriormente de que los subtriples cerrados unigenerados de un JB^*-triple son JB^*-triples lleva fácilmente a ver que todos los subtriples cerrados de un JB^*-triple son también JB^*-triples. En consecuencia, si X es un JB^*-triple, y si Y es un subespacio separable y cerrado de X, entonces existe Z JB^*-subtriple de X separable que contiene a Y. Así, los JB^*-triples forman una subcategoría admisible de espacios de Banach. Esto, unido al hecho de que la clase de los JB^*-triples es cerrada respecto a los ultraproductos [D], nos permite reformular el Problema III.4.1 utilizando el resultado de F. Cabello Teorema I.3.8.

PROPOSICIÓN III.4.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Todo JB^*-triple transitivo es un espacio de Hilbert.

(ii) Todo JB^*-triple casi-transitivo es un espacio espacio de Hilbert.

(iii) Todo JB^*-triple separable casi-transitivo es un espacio de Hilbert.

III.5 Condiciones de transitividad de la norma en JB^*-triples: principales resultados.

En esta sección se darán algunas respuestas parciales a variantes naturales de la Cuestión III.4.2: nosotros supondremos que el espacio de Banach X en dicha cuestión es de hecho el predual de un JBW^*-triple "atómico", pero la hipótesis de transitividad de X será relajada sustancialmente.

Se dice que un JBW^*-triple X^* es **atómico** si su predual X coincide con la expansión lineal cerrada de los puntos extremos de B_X.

Supongamos que X es el predual de un JBW^*-triple atómico. Entonces existe una aplicación contractiva conjugado lineal $\pi : X \to X^*$ que a cada punto extremo e de B_X le asocia su soporte $s(e)$ (ver [FR, Lemma 2.11]). Por otra parte, de [FR, Remark 2.8 y Theorem 1], para x en X existen dos sucesiones (posiblemente finitas), $\{\lambda_n\}$ de números positivos y $\{e_n\}$ de puntos extremos de B_X tal que $\|x\| = \sum_n \lambda_n$, los tripotentes $\{s(e_n)\}$ son dos a dos ortogonales (es decir, $D(s(e_n), s(e_m)) = 0$ si $n \neq m$), y $x = \sum_n \lambda_n e_n$, condiciones que implican $\|\pi(x)\| = \max\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto es claro que e en B_X es un punto extremo de B_X si y sólo si $\|\pi(e)\| = 1$. De la obvia unicidad de esta aplicación π se sigue que, para F en $\mathcal{G}$, se tiene $\pi \circ F = (F^*)^{-1} \circ \pi$.

TEOREMA III.5.1 . *Sea X el predual de un JBW^*-triple atómico. Supongamos que la norma de X es fuertemente maximal. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Consideremos π la aplicación contractiva conjugado lineal de X en X^* definida en el párrafo anterior. Si para x, y en X ponemos $(x|y) := \pi(y)(x)$, entonces $(.|.)$ es un producto escalar en X [BFR, Pag. 270], claramente continuo. Ya que para todo F en $\mathcal{G}$ se tiene $\pi \circ F = (F^*)^{-1} \circ \pi$, el producto escalar $(.|.)$ es invariante. Por la Porposición I.5.5, X es un espacio de Hilbert. ∎

Consecuencias inmediatas del teorema anterior son los siguientes corolarios.

COROLARIO III.5.2. *Sea X el predual de un JBW^*-triple. Supongamos que X es convexo-transitivo y que B_X tiene algún punto extremo. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

COROLARIO III.5.3. *Sea X un JB^*-triple. Si X^* es convexo-transitivo, entonces X es un espacio de Hilbert.*

El resultado que enunciaremos a continuación caracteriza los espacios de Hilbert en la clase de los preduales de los JBW^*-triples, en principio, lejos de cualquier tipo de transitividad de la norma.

TEOREMA III.5.4. *Sea X el predual de un JBW^*-triple. Supongamos que el conjunto de los puntos extremos de B_X no es raro en S_X. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Al ser el conjunto de puntos extremos de B_X no raro en S_X, se sigue que X es la expansión lineal cerrada de los punto extremos de B_X y por tanto X^* es atómico. Sea π la aplicación contractiva conjugado lineal de X en X^* presentada inmediatamente antes del Teorema III.5.1. Ya que los puntos extremos de B_X se caracterizan como aquellos x en B_X tales que $\|\pi(x)\| = 1$, se tiene que éstos forman un conjunto norma cerrado. Ahora, por hipótesis, existe $0 < \varepsilon < 1$ y e en S_X tal que todo punto del conjunto $E := \{x \in S_X : \|e - x\| < \varepsilon\}$ es punto extremo de B_X. Sea x en E. Entonces $\pi(x)$ y $\pi(e)$ son tripotentes minimales de X^* (ya que x y e son puntos extremos de B_X, y se aplica [FR, Proposition 4]) no ortogonales (pues $\|\pi(e) - \pi(x)\| < 1$). En consecuencia, aplicando [FR, Corollary 2.5 y Lemma 1.1], existe T en $\mathcal{G}(X^*)$, tal que $T(\pi(x)) = \pi(e)$. Como todo elemento de $\mathcal{G}(X^*)$ es w^*-continuo (por la unicidad del predual), existe F en $\mathcal{G}(X)$ con $T = F^*$. Se sigue que

$$\pi(e) = T(\pi(x)) = F^*(\pi(x)) = \pi(F^{-1}(x)),$$

y así $x = F(e)$ (ya que π es inyectiva). Hemos demostrado que $E \subseteq \mathcal{G}(X)(e)$, luego por el Teorema I.1.7, X es transitivo. Del Corolario III.5.2 se sigue que X es un espacio de Hilbert. ■

Tanto del Teorema III.5.1 como del Teorema III.5.4 se deduce la siguiente consecuencia: si X es el predual de un JBW^*-triple, si X es casi-transitivo y si B_X tiene algún punto extremo, entonces X es un espacio de Hilbert. En lo que sigue, nos limitaremos a obtener diferentes corolarios de los Teoremas anteriores. El primero de ellos, involucra el Teorema III.5.1 y el siguiente lema.

LEMA III.5.5. *Sea X el predual de un JBW^*-triple. Si X^* es convexo-transitivo, entonces X tiene norma convexo-transitiva.*

Demostración. Por la Proposición I.4.3, X es convexo-transitivo si y sólo si, para todo x en S_X y para todo f en S_{X^*} se tiene

$$\sup\{|f(F(x))| \ : \ F \in \mathcal{G}(X)\} = 1 \, .$$

La convexo transitividad de X^* implica

$$\sup\{|G(f)(x)| \ : \ G \in \mathcal{G}(X^*)\} = 1$$

para todo x en S_X y f en S_{X^*}. Ya que los elementos de $\mathcal{G}(X^*)$ son de la forma T^* para T en $\mathcal{G}(X)$, tenemos

$$\sup\{|f(F(x))| \ : \ F \in \mathcal{G}(X)\} = 1$$

para todo x en S_X y f en S_{X^*}. ■

COROLARIO III.5.6. *Sea X el predual de un JBW^*-triple atómico convexo-transitivo. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Como consecuencia, si X es un espacio de Banach complejo, y si X^{**} es un JB^*-triple convexo-transitivo, entonces X es un espacio de Hilbert. La hipótesis en el anterior corolario de que X^* es atómico no puede ser omitida pues $L_\infty([0,1])$ es convexo-transitivo (ver Ejemplos I.4.7).

Corolario III.5.7. *Supongamos que el espacio de Banach X es suave y que X^{**} es un JB^*-triple. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Al ser X suave implica que todo elemento en S_{X^*} que alcanza su norma es punto extremo de B_{X^*}. Por el teorema de Bishop-Phelps, este conjunto es denso en S_{X^*} y, aplicando el Teorema III.5.4, X es un espacio de Hilbert. ∎

Pasamos a formular el corolario típico a un resultado como el anterior.

Corolario III.5.8. *Supongamos que X es un espacio de Banach separable transitivo y que X^{**} es un JB^*-triple. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Nótese que los corolarios anteriores extienden los resultados de S. K. Tarasov [Ta] comentados en repetidas ocasiones, a una clase más amplia de espacios de Banach complejos, a saber, la clase de los espacios de Banach complejos cuyos biduales son JB^*-triples. En el Corolario III.5.11 que sigue aportamos información adicional sobre la transitividad de la norma en tales espacios. Por el momento, para un espacio de Banach X arbitrario, y para x en X, definimos

$$\rho(X,x) := \max\{\rho \geq 0 \ : \ \rho B_X \subseteq \overline{co}\mathcal{G}(x)\} .$$

Lema III.5.9. *La función $\rho(X,.)$ es continua en X. Más precisamente, para u y v en X, tenemos $|\rho(X,u) - \rho(X,v)| \leq \|u - v\|$.*

Demostración. Sean u, v en X. Para f en S_{X^*}, tenemos

$$\begin{aligned}\rho(X,u) &\leq \sup\{Re[f(F(u))] : F \in \mathcal{G}\} \\ &\leq \|u - v\| + \sup\{Re[f(F(v))] : F \in \mathcal{G}\},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\rho(X,u) \leq \|u - v\| + \inf\{\sup\{Re[f(F(v))] : F \in \mathcal{G}\} \ : \ f \in S_{X^*} \} .$$

Pero, por el teorema de separación de Hahn-Banach $\rho B \subseteq \overline{co}\mathcal{G}(v)$ si y sólo si $\inf\{\sup\{Re[f(F(v))] : F \in \mathcal{G}\} \ : \ f \in S_{X^*}\} \geq \rho$, de donde

$$\rho(X,v) = \inf\{\sup\{Re[f(F(v))] : F \in \mathcal{G}\} \ : \ f \in S_{X^*}\}.$$

Se sigue que $|\rho(X,u) - \rho(X,v)| \leq \|u - v\|$. ∎

PROPOSICIÓN III.5.10. *Supongamos que X es transitivo y que todo elemento de $B_{X^{**}}$ es el w^*-límite de una sucesión de elementos de B_X. Entonces X^* es convexo-transitivo.*

Demostración. Sea f un elemento de S_{X^*} que alcanza su norma. Por la transitividad de la norma, para x en S_X, existe g en $\{F^*(f) : F \in \mathcal{G}\}$ tal que g alcanza su norma en x. Esto, junto con la hipótesis adicional sobre X, nos permite aplicar [DGZ, Lemma I.5.10], en virtud del cual $\overline{co}\{F^*(f) : F \in \mathcal{G}\} = B_{X^*}$, luego $\overline{co}\mathcal{G}(X^*)(f) = B_{X^*}$ y $\rho(X^*, f) = 1$. Del teorema de Bishop-Phelps y el lema anterior, se sigue que $\rho(X^*, g) = 1$ para todo g en S_{X^*}, es decir, X^* es convexo-transitivo. ∎

Como consecuencia de esta proposición y del Corolario III.5.2 tenemos:

COROLARIO III.5.11. *Sea X un espacio de Banach complejo transitivo tal que X^{**} es un JB^*-triple en el que todo elemento de $B_{X^{**}}$ es el w^*-límite de una sucesión de elementos de B_X. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Los espacios de Banach cuyo bidual son JB^*-triples han sido estudiados en [ER] (ver también [C]). A pesar de ello, no hemos sido capaces de encontrar en la literarura un ejemplo de espacio de Banach cuyo bidual sea un JB^*-triple sin que lo sea el espacio. No obstante, damos un procedimiento para demostrar que tales espacios existen.

Sea X un espacio de Banach. Un subespacio P de X es un L^1-**sumando** de X si existe una proyección lineal π de X sobre P satisfaciendo

$$\|x\| = \|\Pi(x)\| + \|x - \Pi(x)\|$$

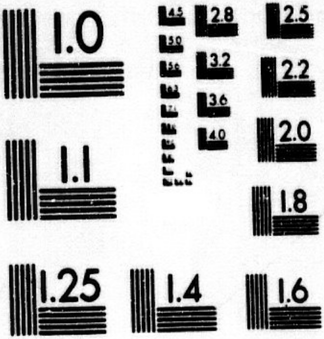
para todo x en X. Un subespacio P de X es un **M-ideal** de X si el anulador de P, P^o, es un L^1-sumando de X^*. Diremos que X es **M-sumergido** si X es un M-ideal de X^{**}.

Consideremos ahora Y la C^*-álgebra de todos los operadores compactos en un espacio de Hilbert complejo infinito-dimensional. Entonces Y es M-sumergido en su bidual [HWW, Example III.1.4.(f)]. Por [HWW, Proposition III.2.10.(b)], existe un espacio de Banach complejo X y una isometría lineal y sobreyectiva $F : X^* \to Y^*$ que no es la traspuesta de una isometría de Y sobre X. Probaremos que X no puede ser linealmente isométrico a Y. Efectivamente, si X fuese linealmente isométrico a Y, entonces X sería M-sumergido y, argumentando como en la demostración de [HWW, Proposition III.2.2] (véase [CN, Theorem 4.2]) obtenemos que $F^* = G^{**}$ para alguna isometría lineal de Y sobre X, y por tanto se llegaría a la contradicción de que $F = G^*$. Ahora, viendo Y como un JB^*-triple, Y^{**} es un factor de Cartan, X^{**} es linealmente isométrico a Y^{**}, pero X no es linealmente isométrico a Y. Se sigue de [BC, Lemma 3.2] que X no puede ser un JB^*-triple. Este argumento demuestra que para todo factor de Cartan Z no reflexivo, existe un espacio de Banach complejo X que no es un JB^*-triple y satisface $X^{**} = Z$.

Dado un número entero no negativo n, consideramos la clase $\mathcal{J}_n$ de los espacios de Banach complejos cuyo n-dual es un JB^*-triple. Se tiene entonces dos sucesiones $\{\mathcal{J}_{2p-2}\}_{p\in\mathbb{N}}$ y $\{\mathcal{J}_{2p-1}\}_{p\in\mathbb{N}}$ de espacios de Banach complejos, tal que los primeros miembros de ellas son los JB^*-triples y los preduales de JBW^*-triples, respectivamente. Por ota parte, ya que para todo espacio de Banach complejo X, X^* es el rango de una proyección contractiva en X^{***}, y la clase de los JB^*-triples es cerrada por paso a subespacios 1-complementados (ver [K3] o [St]), se tiene de lo comentado anteriormente la siguiente situación:

$$\mathcal{J}_0 \subsetneq \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_4 = \ldots = \mathcal{J}_{2p} = \ldots \ \text{ y } \ \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_3 = \ldots = \mathcal{J}_{2p-1} = \ldots .$$

Por lo tanto, siguiendo la filosofía de los últimos corolarios, ente las clases $\mathcal{J}_n$, solo $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, y $\mathcal{J}_2$ merecen ser consideradas.



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

$$\|x\| = \|\Pi(x)\| + \|x - \Pi(x)\|$$

para todo x en X. Un subespacio P de X es un **M-ideal** de X si el anulador de P, P^o, es un L^1-sumando de X^*. Diremos que X es **M-sumergido** si X es un M-ideal de X^{**}.

Consideremos ahora Y la C^*-álgebra de todos los operadores compactos en un espacio de Hilbert complejo infinito-dimensional. Entonces Y es M-sumergido en su bidual [HWW, Example III.1.4.(f)]. Por [HWW, Proposition III.2.10.(b)], existe un espacio de Banach complejo X y una isometría lineal y sobreyectiva $F : X^* \to Y^*$ que no es la traspuesta de una isometría de Y sobre X. Probaremos que X no puede ser linealmente isométrico a Y. Efectivamente, si X fuese linealmente isométrico a Y, entonces X sería M-sumergido y, argumentando como en la demostración de [HWW, Proposition III.2.2] (véase [CN, Theorem 4.2]) obtenemos que $F^* = G^{**}$ para alguna isometría lineal de Y sobre X, y por tanto se llegaría a la contradicción de que $F = G^*$. Ahora, viendo Y como un JB^*-triple, Y^{**} es un factor de Cartan, X^{**} es linealmente isométrico a Y^{**}, pero X no es linealmente isométrico a Y. Se sigue de [BC, Lemma 3.2] que X no puede ser un JB^*-triple. Este argumento demuestra que para todo factor de Cartan Z no reflexivo, existe un espacio de Banach complejo X que no es un JB^*-triple y satisface $X^{**} = Z$.

Dado un número entero no negativo n, consideramos la clase $\mathcal{J}_n$ de los espacios de Banach complejos cuyo n-dual es un JB^*-triple. Se tiene entonces dos sucesiones $\{\mathcal{J}_{2p-2}\}_{p\in\mathbb{N}}$ y $\{\mathcal{J}_{2p-1}\}_{p\in\mathbb{N}}$ de espacios de Banach complejos, tal que los primeros miembros de ellas son los JB^*-triples y los preduales de JBW^*-triples, respectivamente. Por ota parte, ya que para todo espacio de Banach complejo X, X^* es el rango de una proyección contractiva en X^{***}, y la clase de los JB^*-triples es cerrada por paso a subespacios 1-complementados (ver [K3] o [St]), se tiene de lo comentado anteriormente la siguiente situación:

$$\mathcal{J}_0 \subsetneq \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_4 = ... = \mathcal{J}_{2p} = ... \text{ y } \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_3 = \ldots = \mathcal{J}_{2p-1} = \ldots .$$

Por lo tanto, siguiendo la filosofía de los últimos corolarios, ente las clases $\mathcal{J}_n$, solo $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, y $\mathcal{J}_2$ merecen ser consideradas.

III.6 Condiciones de transitividad de la norma en C^*-álgebras.

Comenzaremos definiendo aquellos conceptos que nos serán imprescindibles a lo largo de la sección así como también se enunciarán aquellos resultados que utilizaremos, la mayoría de los cuales pueden ser encontrados en [Di], [Pe] y [S]. Recuérdese que una **involución** en un álgebra compleja X no es otra cosa que una aplicación conjugado lineal $*$ de X en X que satisface $(x^*)^* = x$ y $(xy)^* = y^*x^*$ para todo x, y en X. Una **C^*-álgebra** es un espacio de Banach complejo X con una involución $*$ que satisface $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo x en X. Claramente, la involución de toda C^*-álgebra es isométrica.

Se dirá que un elemento x de una C^*-álgebra X es:

(i) **normal** si $x^*x = xx^*$,

(ii) **autoadjunto** si $x^* = x$,

(iii) **unitario** si $x^*x = xx^* = \mathbf{1}$, (supuesto que X tiene unidad $\mathbf{1}$).

Sea X una C^*-álgebra. Un elemento x de X se dice ser **positivo** si es autoadjunto y su espectro $Sp(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda\mathbf{1} \text{ no es invertible}\}$ (donde $\mathbf{1}$ denota la unidad de la envolvente unital de X) está contenido en $\mathbb{R}_0^+$. Los elementos positivos de X son aquellos de la forma x^*x para todo x en X [S, Theorem 1.4.4.]. Denotaremos por $Pos(X)$ el conjunto de los elementos positivos de X. Un elemento f de X^* se dice **positivo** si $f(Pos(X)) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, o sea, $f(x^*x) \geq 0$ para x en X. Denotaremos por $Pos(X^*)$ el conjunto de los elementos positivos de X^*. Si X tiene unidad, los elementos positivos de X^* se caracterizan como aquellos funcionales lineales continuos f satisfaciendo $f(\mathbf{1}) = \|f\|$ [S, Proposition 1.5.1]. En general, si f pertenece a X^* y verifica $f(y) = \|f\|\,\|y\|$ para algún elemento positivo y de X, entonces f es positivo [S, Proposition 1.5.2]. Todo funcional positivo f es automáticamente autoadjunto (esto es, $f(x^*) = \overline{f(x)}$ para todo x en X) y satisface la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|f(y^*x)|^2 \leq f(x^*x)f(y^*y)$$

para todo x, y en X.

Como ya se ha comentado en repetidas ocasiones, toda C^*-álgebra es un JB^*-triple cuyo triple producto está dado por $\{xyz\} := \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x)$. Luego todos los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores anteriores para JB^*-triples siguen siendo ciertos para C^*-álgebras, con la ventaja de que la única C^*-álgebra que es un espacio de Hilbert es $\mathbb{C}$. Efectivamente, del cálculo funcional continuo para un elemento autoadjunto de una C^*-álgebra, se tiene que la subálgebra generada por un elemento autoadjunto es isométricamente isomorfa a $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ para conveniente L espacio topológico localmente compacto. Se sigue que si X es una C^*-álgebra suave, entonces todo elemento de norma uno e en la parte autoadjunta X_{sa} de X satisface que $e^2 = e$ o que $e^2 = -e$ (ya que, como se vió en el primer capítulo, si $C_0^{\mathbb{C}}(L)$ es suave entonces L se reduce a un punto), de donde $S_{X_{sa}}$ es desconectada, y por tanto el espacio de Banach real X_{sa} es de dimensión uno. Pero $X = X_{sa} + iX_{sa}$, luego $X = \mathbb{C}$.

Ni que decir tiene que una respuesta afirmativa al Problema III.4.1 implicaría una respuesta afirmativa a la Conjetura de Wood I.3.3, es más, se tendría que $\mathbb{C}$ es la única C^*-álgebra (no necesariamente conmutativa) casi-transitiva. Nótese, como ya se comentó en su momento en el primer capítulo de esta memoria, que la categoría de las C^*-álgebras es admisible. Del Teorema I.3.8 y del hecho de que la clase de las C^*-álgebras es cerrada por paso a ultraproductos, se sigue el siguiente corolario. Por comodidad, diremos que una C^*-álgebra es **propia** si es distinta de $\mathbb{C}$.

COROLARIO III.6.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe una C^*-álgebra propia transitiva.

(ii) Existe una C^*-álgebra propia casi-transitiva y separable.

(iii) Existe una C^*-álgebra propia casi-transitiva.

De los comentarios de la sección cuarta se desprende que no existen, ni C^*-álgebras propias transitivas y separables, ni C^*-álgebras propias casi-transitivas con idempotentes no nulos. En la siguiente proposición caracterizaremos la transitividad de la norma de una C^*-álgebra en términos puramente algebraicos, resultado que extiende a su análogo para C^*-álgebras conmutativas ya presentado en el primer capítulo, Teorema I.1.5. Tal caracterización hace uso de un resultado de Kadison-Paterson-Sinclair, que caracteriza las isometrías lineales y sobreyectivas de una C^*-álgebra [PS].

Sea X una C^*-álgebra. Es bien conocido que X^{**} tiene una estructura natural de C^*-álgebra con unidad de manera que X se convierte en una subálgebra $*$-invariante de X^{**}. Denotamos por $M(X)$ el **álgebra de los multiplicadores** de X, es decir, $M(X) := \{x^{**} \in X^{**} : x^{**}X \subseteq X, Xx^{**} \subseteq X\}$, la cual es una C^*-subálgebra de X^{**}. Los llamados $*$-automorfismos de Jordan, así como los operadores de multiplicación por la izquierda en X por elementos unitarios en $M(X)$, representan los ejemplos más típicos de isometrías lineales y sobreyectivas en X. Un **$*$-automorfimo de Jordan** en X no es otra cosa que una biyección lineal de X en X que conserva la involución y los cuadrados. Por lo tanto, si F es un $*$-automorfismo de Jordan en X, se tiene que $F(S_X \cap Pos(X)) = S_X \cap Pos(X)$. Denotamos por U el conjunto de todos los elementos unitarios de $M(X)$, y por $\mathcal{G}^+$ el grupo de todos los $*$-automorfismos de Jordan en X. El teorema de Kadison-Paterson-Sinclair afirma que toda isometría lineal y sobreyectiva en X es la composición de un elemento de $\mathcal{G}^+$ con el operador de multiplicación izquierda por un elemento de U. Teniendo presente que dado x en $Pos(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un único elemento positivo y en X tal que $y^n = x$ [S, Proposition 1.4.1], denotaremos a este único elemento y por $x^{\frac{1}{n}}$ o $\sqrt[n]{x}$. El **módulo** $|x|$ de un elemento x de X, se define como el único elemento positivo de X cuyo cuadrado es x^*x.

PROPOSICIÓN III.6.2. *Sea X una C^*-álgebra. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es transitiva.

(ii) $\mathcal{G}^+$ actúa transitivamente en $S_X \cap Pos(X)$, y todo elemento x de X admite una "descomposición polar" $x = u|x|$, donde u pertenece a U.

Demostración. Primeramente, supongamos que X es transitiva. En tal caso, para x, y en $S_X \cap Pos(X)$ existe F en $\mathcal{G}^+$ y v en U tal que $x^{1/2} = vF(y^{1/2})$. Se sigue que $x = F(y^{1/2})v^*vF(y^{1/2}) = (F(y^{1/2}))^2 = F(y)$. Por lo tanto $\mathcal{G}^+$ actúa transitivamente en $S_X \cap Pos(X)$. Por otra parte, para x en S_X existe G en $\mathcal{G}^+$ y u en U con $x = uG(x^*x)$, lo que implica $x^*x = (G(x^*x))^2$, de donde $G(x^*x) = |x|$.

Si suponemos que *ii*) es cierto, para x, y en S_X, se tiene la siguiente descomposición $x = u|x|$ e $y = v|y|$ para convenientes u, v en U, y la existencia de F en $\mathcal{G}^+$ tal que $F(|x|) = |y|$. Si consideramos la isometría lineal y sobreyectiva de X en X dada por $G : z \to vF(u^*z)$, se concluye que $G(x) = y$. ∎

Ahora, obtendremos una caracterización de las C^*-álgebras convexo-transitivas, que extiende el Teorema I.4.4 de Wood para el caso conmutativo. Si X es una **W^*-álgebra** (C^*-álgebra que es dual de un espacio de Banach X_*, que resulta ser único), es bien conocido que el predual X_* de X es un X-bimódulo en un sentido natural. A saber, dado que el producto de X es separadamente w^*-continuo [S, Theorem 1.7.8], si u pertenece a X y f a X_*, es suficiente definir uf y fu como los funcionales lineales (automáticamente w^*-continuos) en X dados por $(uf)(x) := f(xu)$ y $(fu)(x) := f(ux)$, respectivamente, para todo x en X.

LEMA III.6.3. *Sea X una C^*-álgebra. Entonces el conjunto*

$$\{uf \ : \ f \in Pos(X^*) \cap S_{X^*},\ u \in U\}$$

es norma-denso en S_{X^*}.

Demostración. Sea h en S_{X^*}, y $0 < \varepsilon < 2$. En virtud del teorema de Russo-Dye [BD, Theorem 30.2], $B_{M(X)}$ es la envolvente convexo cerrada de U, luego existe v en U tal que $|1 - h(v)| < \frac{\varepsilon^2}{16}$. Por el teorema de Bishop-Phelps-Bollobás [BD, Theorem 16.1], existen x y g en $S_{X^{**}}$ y S_{X^*}, respectivamente, satisfaciendo $\|x - v\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|g - h\| < \frac{\varepsilon}{2}$, y $g(x) = 1$. Consideremos $u := v^*$ y $f := xg$. Entonces u pertenece a U, f pertenece a $Pos(X^*) \cap S_{X^*}$, ya que si denotamos por $\mathbf{1}$ la unidad de X^{**}, se tiene que $1 = g(x) = (xg)(\mathbf{1}) = f(\mathbf{1}) \leq \|f\| = \|xg\| \leq \|x\|\|g\| = 1$. Además se verifica

$$\begin{aligned} \|h - uf\| = \|u^*h - f\| \leq & \ \|u^*h - u^*g\| + \|u^*g - xg\| \\ \leq & \ \|h - g\| + \|u^* - x\| < \varepsilon \,. \blacksquare \end{aligned}$$

Dada una C^*-álgebra X, los **estados puros** de X son los puntos extremos del conjunto convexo w^*-compacto $Pos(X^*) \cap B_{X^*}$ salvo el cero. Es conocido que todo estado puro de X es un punto extremo de B_{X^*}.

TEOREMA III.6.4. *Sea X una C^*-álgebra. Entonces X es convexo-transitiva si y sólo si, para todo funcional lineal positivo de norma uno f en X, el w^*-cierre en X^* del conjunto $\{F^*(f) : F \in \mathcal{G}^+\}$ contiene los estados puros de X.*

Demostración. Supongamos que X es convexo-transitiva. Entonces, por la Proposición I.4.3, para todo φ en S_{X^*} se tiene que

$$B_{X^*} = {}^{w^*}\overline{co}\{G^*(\varphi) \ : \ G \in \mathcal{G}\}$$

En virtud de [Be, Theorem 36.10], los puntos extremos de B_{X^*} pertenecen al w^*-cierre de $\{G^*(\varphi) \ : \ G \in \mathcal{G}\}$. En el caso particular de tomar f en S_{X^*} positivo, para g estado puro de X, existen dos redes $\{u_\alpha\}$ y $\{F_\alpha\}$ en U y $\mathcal{G}^+$, respectivamente, tales que $\{f(u_\alpha F_\alpha(x))\} \to g(x)$ para todo x en X. Si denotamos por h un w^*-valor de adherencia en B_{X^*} de la red $\{F_\alpha^*(f)\}$, para demostrar que g pertenece al w^*-cierre del conjunto $\{F^*(f) \ : \ F \in \mathcal{G}^+\}$ es suficiente probar que $h = g$. Sea $x = x^*$ en X. Entonces, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue

$$|f(u_\alpha F_\alpha(x))|^2 \leq f(u_\alpha^* u_\alpha) f((F_\alpha(x)^2) = f(\mathbf{1}) f(F_\alpha(x^2)) = F_\alpha^*(f)(x^2) \ ,$$

y por tanto $(g(x))^2 \leq h(x^2)$. De ello se tiene que $\|h\| = h(\mathbf{1}) = 1$. Consideremos $\{x_\lambda\}$ una unidad aproximada creciente y acotada por uno en X [Di, Proposition 1.7.2]. Entonces $\{x_\lambda\}$ converge a $\mathbf{1}$ en la w^*-topología de X^{**}, así $0 \le h((\mathbf{1}-x_\lambda)^2) \le h(\mathbf{1}-x_\lambda) \to 0$ (pues los funcionales positivos conservan el orden), y de este modo $h(\mathbf{1}) - 2h(x_\lambda) + h(x_\lambda^2) \to 0$. De donde $h(x_\lambda^2) \to 1$. Ahora, para ρ en $\mathbb{R}$, tenemos

$$\rho^2 + 2\rho g(x) + (g(x))^2 = \lim\{(g(\rho x_\lambda + x))^2\}$$

$$\le \lim\{h((\rho x_\lambda + x)^2)\} = \rho^2 + 2\rho h(x) + h(x^2) \ ,$$

luego $2\rho(g(x)-h(x)) \le h(x^2)-(g(x))^2$. Al ser ρ arbitrario en $\mathbb{R}$, se sigue que $g(x) - h(x) = 0$ y por tanto $h = g$.

Recíprocamente, supongamos que, para todo f en $Pos(X^*) \cap S_{X^*}$, el w^*-cierre de $\{F^*(f) : F \in \mathcal{G}^+\}$ en X^* contiene a los estados puros de X. Sea $|\!|\!|.|\!|\!|$ una norma equivalente en (el espacio de Banach) X con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}(X, |\!|\!|.|\!|\!|)$. Entonces, para g estado puro de X y f en $Pos(X^*) \cap S_{X^*}$, la norma dual $|\!|\!|.|\!|\!|$ es constante (igual a $|\!|\!|f|\!|\!|$) en $\{F^*(f) : F \in \mathcal{G}^+\}$, de forma que, por la hipótesis, $|\!|\!|g|\!|\!| \le |\!|\!|f|\!|\!|$. Como consecuencia, $|\!|\!|.|\!|\!|$ es constante (sea igual a M) en el conjunto de los estados puros de X. Para f en $Pos(X^*) \cap S_{X^*}$, se satisface que $M \le |\!|\!|f|\!|\!|$. Pero la desigualdad contraria también es cierta, puesto que el conjunto $\{h \in X^* : |\!|\!|h|\!|\!| \le M\}$ es w^*-cerrado, convexo y contiene todos los puntos extremos de $B_{X^*} \cap Pos(X^*)$, y en consecuencia, por el teorema de Krein-Milman, contiene a $B_{X^*} \cap Pos(X^*)$. Ya que, para u en U, la aplicación $G : x \mapsto xu$ de X en X pertenece a $\mathcal{G}$, para todo f en $Pos(X^*) \cap S_{X^*}$ se tiene que $|\!|\!|uf|\!|\!| = |\!|\!|G^*(f)|\!|\!| = |\!|\!|f|\!|\!| = M$. Por el Lema III.6.3, $|\!|\!|.|\!|\!|$ es constante en S_{X^*}, luego la norma $|\!|\!|.|\!|\!|$ en X es múltiplo por una constante de la norma original. Del Teorema I.4.2, X es convexo-transitiva. ∎

Terminaremos esta sección, demostrando que el álgebra de Calkin [Ca] es convexo-transitiva. Como ya se dijo en la introducción, con este resultado disponemos del primer ejemplo conocido de C^*-álgebra no conmutativa con norma convexo-transitiva. Recuérdese que el **álgebra de Calkin** se define como el cociente $L(H)/K(H)$, donde H es un espacio de Hilbert separable infinito-dimensional, $L(H)$ la C^*-álgebra de todos los operadores lineales y acotados en H y $K(H)$ el ideal cerrado de $L(H)$ formado por los operadores compactos en H. Como todo cociente de una

C^*-álgebra respecto a un ideal cerrado, el álgebra de Calkin es de manera natural una C^*-álgebra [Di, Proposition 1.8.2].

LEMA III.6.5. *Sea X una C^*-álgebra, x en X e y, z en $B_{M(X)}$. Entonces yxz pertenece a $\overline{co}\mathcal{G}(x)$.*

Demostración. El conjunto $\{t \in M(X) : tx \in \overline{co}\mathcal{G}(x)\}$ es cerrado y convexo en $M(X)$ y contiene a U. Por el teorema de Russo-Dye, también contiene a y. Por otra parte, el conjunto $\{t \in M(X) : yxt \in \overline{co}\mathcal{G}(x)\}$ es convexo y cerrado en $M(X)$ y contiene a U, luego, aplicando el teorema de Russo-Dye, contiene a z. ∎

En el resto de esta sección, H denotará un espacio de Hilbert complejo, separable e infinito-dimensional. Para cada x en $L(H)$, definiremos $\|x\|_{ess} := \|x + K(H)\|$.

TEOREMA III.6.6. *Denotemos por X la C^*-álgebra $L(H)$ y sea x en S_X. Entonces $\overline{co}\mathcal{G}(x) = B_X$ si y sólo si $\|x\|_{ess} = 1$.*

Demostración. Sea π un idempotente autoadjunto en X cuyo rango es un subespacio infinito dimensional de H. Siendo M el rango de π, por ser infinito dimensional, podemos tomar una isometría sobreyectiva F de H en M. Entonces existe $u := i_M \circ F$ (i_M la inclusión de M en H) en X satisfaciendo $u^*u = \mathbf{1}$ y $uu^* = \pi$, de donde $\mathbf{1} = u^*\pi u$. Por el Lema III.6.5, $\mathbf{1}$ pertenece a $\overline{co}\mathcal{G}(\pi)$, pero $B_X = \overline{co}\mathcal{G}(\mathbf{1})$ (por el teorema de Russo-Dye), con lo cual $B_X = \overline{co}\mathcal{G}(\pi)$.

Consideremos x en $S_X \cap Pos(X)$ con $\|x\|_{ess} = 1$. Sea $0 < \varepsilon < 1$. Por la descomposición polar de x (ver por ejemplo [HS, Proposition 4.2.3]), existen idempotentes autoadjuntos dos a dos ortogonales $\pi_1, ..., \pi_n$ en X y números reales $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que $\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i\| \leq \varepsilon$. Podemos suponer que existe $k = 1, ..., n$ tal que $\pi_1, ..., \pi_k$ tienen rango de dimensión infinita, $\pi_{k+1}, ..., \pi_n$ tienen rango de dimensión finita y $|\lambda_1| \geq |\lambda_j|$ para todo $j = 2, ..., k$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} |\lambda_1| = \|\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i \pi_i\| &\geq \|x - \textstyle\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \pi_i\| - \|x - \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i\| \\ &\geq \|x\|_{ess} - \varepsilon = 1 - \varepsilon . \end{aligned}$$

Si tomamos $v := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi_i$, se sigue que $\lambda_1 \pi_1 = \pi_1 v = \pi_1 v \pi_1$, luego por el Lema III.6.5 $\lambda_1 \pi_1$ pertenece a $\overline{co}\mathcal{G}(v)$. Por lo demostrado en el primer párrafo de la prueba, obtenemos la inclusión $\lambda_1 B_X \subseteq \overline{co}\mathcal{G}(v)$. Utilizando la notación del Lema III.5.9, esto último se traduce en que $\rho(X, v) \geq |\lambda_1|$. Y por lo tanto,

$$\rho(X, x) \geq \rho(X, v) - \|x - v\| \geq |\lambda_1| - \varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon .$$

Si hacemos tender ε a cero, obtenemos que $\rho(X, x) = 1$, es decir, $B_X = \overline{co}\mathcal{G}(x)$.

Consideremos ahora x en S_X tal que $\|x\|_{ess} = 1$. Entonces $x^* x$ pertenece a $S_X \cap Pos(X)$, $\|x^* x\|_{ess} = 1$ y por tanto, como acabamos de probar, $B_X = \overline{co}\mathcal{G}(x^* x)$. Aplicando el Lema III.6.5 ($x^* x = x^* x \mathbf{1} \in \overline{co}\mathcal{G}(x)$) concluimos que $B_X = \overline{co}\mathcal{G}(x)$.

Recíprocamente, supongamos que para x en S_X se tiene que $B_X = \overline{co}\mathcal{G}(x)$. Nótese primeramente que $K(H)$ es un subespacio de X $\mathcal{G}$-invariante (ver por ejemplo [HWW, Proposition III.2.2]), de manera que, si denotamos por Y el álgebra de Calkin, y si $P : X \to Y$ es la aplicación cociente, entonces todo elemento F en $\mathcal{G}$ define un elemento $\hat{F}$ en $\mathcal{G}(Y)$ verificando $P \circ F = \hat{F} \circ P$. Entonces se deduce fácilmente que $B_Y \subseteq \overline{co}\mathcal{G}(Y)(P(x))$, de donde $\|x\|_{ess} = \|P(x)\| = 1$. ■

COROLARIO III.6.7. *El álgebra de Calkin es convexo-transitiva.*

Demostración. Siguiendo con la notación del teorema anterior y de su demostración, para y en S_Y existe x en S_X tal que $P(x) = y$ (ya que $K(H)$ es proximinal en S_Y, [HWW, Proposition II.1.1]). Por lo tanto $\|x\|_{ess} = 1$. Aplicando el Teorema III.6.6 a x se tiene que $B_X = \overline{co}\mathcal{G}(x)$. Finalmente, al ser $K(H)$ un subespacio de X $\mathcal{G}$-invariante, argumentando como en el final de la prueba del teorema anterior, concluimos que $B_Y = \overline{co}\mathcal{G}(Y)(P(x))$. ■

III.7 Condiciones de transitividad de la norma de JB-álgebras.

Un **álgebra de Jordan** es un álgebra conmutativa verificando el conocido axioma de Jordan, esto es, $x.(y.x^2) = (x.y).x^2$ para cualesquiera elementos x, y en el álgebra. Las JB**-álgebras** son álgebras de Jordan Banach reales X satisfaciendo $\|x\|^2 \leq \|x^2 + y^2\|$ para todo x, y en X. Los ejemplos más naturales de JB-álgebras son los espacios de Banach X de los operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert complejo, cuyo producto de Jordan está dado por $x.y := \frac{1}{2}(xy + yx)$ para x, y en X. Otros ejemplos son las álgebras $C_0^{\mathbb{R}}(L)$, con L espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Es conocido que éstas últimas son las únicas JB-álgebras asociativas [HS, Theorem 3.2.2]. Hay que comentar que las JB-álgebras guardan una estrecha relación con los JB^*-triples, en tanto en cuanto que, dada una JB-álgebra X, podemos definir un triple producto en X dado por $\{xyz\} := (x.y).z + x.(y.z) - (x.z).y$, tal que $(X, \{...\})$ es un subtriple real cerrado de un cierto JB^*-triple (como consecuencia de la concatenación de los siguientes resultados [HS, Theorem 3.3.9], [Wr] y [BKU]).

Recordemos que el **centro** de un álgebra está formado por todos los elementos que conmutan con cualquier otro y asocian con cualesquiera otros dos. A dichos elementos les llamaremos centrales. Sea X una JB-álgebra con unidad $\mathbf{1}$. Diremos que un elemento u de X es una **simetría** en X si satisface $u^2 = \mathbf{1}$. Las simetrías centrales en X son caracterizadas como los puntos aislados del conjunto de todos los puntos extremos de B_X [IR, Proposition 1.3]. Se sigue que la órbita $\mathcal{G}(\mathbf{1})$ está contenida en el centro de X. Como consecuencia de esto obtenemos:

PROPOSICIÓN III.7.1 . *Sea X una JB-álgebra con unidad $\mathbf{1}$. Si la envolvente lineal de $\mathcal{G}(\mathbf{1})$ es densa en X (por ejemplo, si X es convexo-transitiva), entonces X es asociativa.*

Las JBW**-álgebras** son las JB-álgebras que son espacios de Banach duales y en tal caso el predual es único (ver [HS, 4.1.1 y Theorem 4.4.6]).

Toda JBW-álgebra es unital [HS, Lemma 4.1.7] y su producto es separadamente w^*-continuo [HS, Corollary 4.4.16 y Theorem 4.1.6].

PROPOSICIÓN III.7.2. *Sea X el predual de una JBW-álgebra. Si X no tiene subespacios cerrados propios $\mathcal{G}$-invariantes (por ejemplo, si X es convexo-transitiva), entonces X^* es asociativa.*

Demostración. Supongamos que X^* no es asociativa. Entonces, denotando por $\mathbf{1}$ la unidad de X^*, la envolvente lineal de $\mathcal{G}(X^*)(\mathbf{1})$ no puede ser w^*-densa en X^*. Por lo tanto existe un elemento no nulo x en X tal que $\mathcal{G}(X^*)(\mathbf{1})(x) = 0$. Como consecuencia, para toda F en $\mathcal{G}$ se tiene que $\mathbf{1}(F(x)) = 0$, luego la envolvente lineal cerrada de $\mathcal{G}(x)$ es un subespacio cerrado, propio y $\mathcal{G}$-invariante de X. ▪

Sea X una JB-álgebra. Entonces el bidual X^{**} de X es una JBW-álgebra que contiene a X como subálgebra [HS, Theorem 4.4.3], y el conjunto $M(X) := \{z \in X^{**} : z.X \subseteq X\}$ es una subálgebra de X^{**} [Ed] que recibe el nombre de **álgebra de los multiplicadores** de X. En [IR] se obtiene un resultado del tipo de Kadison para JB-álgebras, a saber: *toda isometría lineal y sobreyectiva en X es la composición de un automorfismo de álgebra en X con el operador de multiplicación en X por una simetría central de $M(X)$.* Recordamos que un elemento p en X se dice ser **positivo** si existe y en X tal que $p = y^2$. Teniendo en cuenta [HS, Proposition 3.3.10 y Lemma 1.2.5], un elemento p de una JB-álgebra con unidad es positivo si y sólo si $f(p) \geq 0$ para todo estado f.

TEOREMA III.7.3. *Sea X una JB-álgebra. Si existe un elemento positivo p en S_X, tal que $\overline{co}\mathcal{G}(p) = B_X$ (por ejemplo, si X es convexo-transitiva), entonces X es asociativa.*

Demostración. Primeramente recordemos que un JBW-**factor** es una JBW-algebra que no posee idempotentes centrales no triviales y que una **representación factorial** de X es un homomorfismo de álgebras de X en algún JBW-factor Y, cuyo rango es w^*-denso en Y. Asímismo, un idempotente e se dice ser **minimal** si no es cero y, para cualquier idempotente i tal que $e.i = i.e = i$, se tiene que $i = e$.

Supongamos que existe algún elemento positivo p en S_X tal que $\overline{co}\mathcal{G}(p) = B_X$. Puesto que la familia de representaciones factoriales de X separa puntos [HS, Proposition 4.6.4], para probar que X es asociativa es suficiente demostrar que, para toda representación factorial Φ de X, el JBW-factor de evaluación de Φ es isomorfo a $\mathbb{R}$. Sea $\Phi : X \to Y$ una tal representación factorial. Por [HS, Proposition 4.6.2], podemos suponer que $Y = e.X^{**}$ para algún idempotente central minimal en X^{**}, y que Φ no es otra cosa que la aplicación $x \mapsto e.x$. Tomemos x en $\mathcal{G}(p)$. Entonces existe un automorfismo de álgebras F en X y una simetría central u en $M(X)$ tal que $x = u.F(p)$, y por tanto $x = u.q$ para $q := F(p)$, elemento positivo de S_X. Al ser $\frac{1}{2}(\mathbf{1}+u)$ un idempotente central en X^{**} y e un idempotente central minimal en X^{**}, se llega a que el idempotente central $\frac{1}{2}(\mathbf{1}+u).e \in \{0, e\}$, de donde $\Phi(x) = -e.q$ o bien $\Phi(x) = e.q$. Al ser x un elemento arbitrario de $\mathcal{G}(p)$, hemos demostrado que, si P denota el conjunto de todos los elementos positivos en B_Y, entonces $\Phi(\mathcal{G}(p)) \subseteq P \cup (-P)$. Como P es convexo y w^*-compacto, $co(P \cup (-P))$ es w^*-compacto y por tanto norma cerrado en Y. Por hipótesis, $\overline{co}\mathcal{G}(p) = B_X$, de donde se sigue que $\Phi(B_X) \subseteq co(P \cup (-P))$. Aplicando [HS, Theorem 3.4.2 y Proposition 3.4.3], para y en $\Phi(X)$ con $\|y\| < 1$ existe x en X verificando $\|x\| < 1$ y $\Phi(x) = y$, luego la bola unidad cerrada de $\Phi(X)$ está contenida en (el cerrado) $co(P \cup (-P))$. Ya que $\Phi(X)$ es w^*-denso en Y, podemos aplicar el teorema de densidad de Kaplansky [HS, Theorem 4.5.12] obteniendo que $co(P \cup (-P)) = B_Y$. Como consecuencia, si z es un punto extremo de B_Y, entonces z pertenece a $P \cup (-P)$. Ya que un tal z es una simetría en Y $(= e.X^{**})$ [IR, Lemma 1.2], obtenemos $z = e$ o $z = -e$. En virtud del teorema de Krein-Milman se llega a que $Y = \mathbb{R}e$ como se pretendía demostrar. ▪

Como se comentó en el primer capítulo de esta memoria, si L es un espacio topológico localmente compacto Hausdorff y si $C_0^{\mathbb{R}}(L)$ es casi-transitivo, entonces L se reduce a un punto [GR, Theorem 3.1].

COROLARIO III.7.4. *$\mathbb{R}$ es la única JB-álgebra casi-transitiva.*

Se sigue del Teorema III.7.3 y de la Proposición III.7.2, que el estudio de la convexo-transitividad de la norma de una JB-álgebra o del predual de una JBW-álgebra, se reduce al estudio de tal propiedad en los espacios de Banach clásicos $C_0^{\mathbb{R}}(L)$ (para L espacio topológico Hausdorff localmente compacto) y $L_1^{\mathbb{R}}(\Gamma, \mu)$ (para cierto espacio de medida (Γ, μ)), respectivamente. Recuérdese, que para los espacios del tipo $C_0^{\mathbb{R}}(L)$, en el primer capítulo de esta memoria dimos una caracterización de la convexo-transitividad de la norma debida a Wood (Teorema I.4.5). Acerca de los espacios $L_1^{\mathbb{R}}(\Gamma, \mu)$ no tenemos noticia de ningún estudio sobre la convexo-transitividad de su norma. En el caso particular de la casi-transitividad de la norma de estos últimos espacios tenemos un precedente, ya citado, que se recoge en [GJK, Theorem 1.2].

Capítulo IV

Geometría de los espacios de Banach convexo-transitivos.

IV.1 Introducción al capítulo 4.

Salvo que se diga explícitamente lo contrario, a lo largo del capítulo trabajaremos con espacios de Banach REALES. No obstante, cuando apliquemos este convenio, los resultados que se presentan siguen siendo ciertos para espacios de Banach complejos sin más que pasar al espacio de Banach real subyacente.

Comenzaremos el capítulo observando en la sección segunda una de las muchas peculariedades que poseen los espacios de Banach convexo-transitivos, a saber: $\mathbb{R}$ es el único espacio de Banach convexo-transitivo cuya bola unidad posee caras con interior no vacío relativo a la esfera. Para abordar las restantes secciones definimos aquellos conceptos que nos serán imprescindibles.

Para X espacio de Banach, x en S_X y f en S_{X^*}, diremos que:

(i) x es un punto **grande** de X, si $\overline{co}(\mathcal{G}(x)) = B_X$.

(ii) f es un punto w^***-grande** de X^*, si $^{w^*}\overline{co}(\mathcal{G}(X^*)(f)) = B_{X^*}$.

(iii) f es un punto w^***-supergrande** de X^*, si $^{w^*}\overline{co}(\mathcal{G}^*(f)) = B_{X^*}$.

Nótese que con las anteriores definiciones, decir que un espacio de Banach X es convexo-transitivo es lo mismo que decir que todos los puntos de S_X son grandes, equivalentemente, que todos los puntos de S_{X^*} son w^*-supergrandes (Proposición I.4.3).

Iniciamos la tercera sección presentando caracterizaciones de los puntos grandes y w^*-supergrandes y, como una consecuencia totalmente obvia, se dará una nueva caracterización de los espacios de Hilbert en la clase de los JB^*-triples.

La norma de un espacio de Banach X es **Fréchet diferenciable** en un punto u de S_X, si existe un funcional lineal continuo $\tau(u,.)$ en X (que resulta ser único) tal que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\|u+h\| - 1 - \tau(u,h)|}{\|h\|} = 0 .$$

Si X es Fréchet diferenciable en todo punto de S_X, y si se tiene que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\|v+h\| - 1 - \tau(v,h)|}{\|h\|} = 0$$

uniformemente para v en S_X, entonces se dice que X es **uniformemente suave**.

Para u en S_X, definimos el **índice de rudeza** de u en X como

$$\eta(X,u) = \limsup_{\|h\|\to 0} \frac{\|u+h\| + \|u-h\| - 2}{\|h\|} .$$

Nótese que $0 \leq \eta(X,u) \leq 2$. En [DGZ, Lemma I.1.3] se demuestra que la norma de X es Frechèt diferenciable en un punto u de S_X si y sólo si $\eta(X,u) = 0$. De la prueba dada en [DGZ] de este hecho, se desprende que X es uniformemente suave si y sólo si

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|v+h\| + \|v-h\| - 2}{\|h\|} = 0$$

uniformemente para v en S_X.

Denotaremos por $\mathcal{J}$ a la clase de los espacios de Banach **superreflexivos** (que admiten una norma equivalente uniformemente suave) y casi-transitivos. Esta clase ha sido considerada por C. Finet [F] (ver también [DGZ, Corollary IV.5.7]) y, muy recientemente, por F. Cabello [Ca4]. El trabajo de Cabello contiene los siguientes resultados relevantes:

(i) Todo espacio de Banach superreflexivo y convexo-transitivo está en $\mathcal{J}$.

(ii) Un espacio de Banach casi-transitivo está en $\mathcal{J}$ *si es Asplund o tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

En la sección tercera damos una caracterización de los miembros de $\mathcal{J}$, en principio lejos de cualquier tipo de transitividad de la norma, a saber: un espacio de Banach pertenece a $\mathcal{J}$ si $\eta(X,u) = 0$ en un punto grande u de X (Teorema IV.3.8). En la siguiente sección probamos que si existe un punto grande u en X tal que $\eta(X,u) < 2$, entonces X es uniformemente descuadrado, y por tanto superreflexivo (Teorema IV.4.4). Los resultados anteriores admiten sendas versiones duales, Teoremas IV.3.9 y IV.4.5.

Totalmente opuesto al concepto de uniforme suavidad de la norma de un espacio de Banach se encuentra el de norma ruda (ver [DGZ, Definition 1.10]). Dado $\varepsilon > 0$, diremos que la norma de X es **ε-ruda** si para todo x en X,

$$\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\| + \|x-h\| - 2\|x\|}{\|h\|} \geq \varepsilon .$$

La norma de X es **ruda** si es ε-ruda para algún $\varepsilon > 0$, y es **extremadamente ruda** si es 2-ruda. La relevancia de tales normas radica en el hecho de que los espacios de Banach que son Asplund son caracterizados como aquellos espacios de Banach que no admiten renormaciones (equivalentes) rudas [DGZ, Theorem I.5.3].

En relación a la Fréchet diferenciabilidad de la norma, los espacios de Banach convexo-transitivos presentan una dicotomía extrema. En la sección quinta (Teorema IV.5.1) demostraremos que si X es un espacio de Banach convexo-transitivo entonces o bien la norma de X es extremadamente ruda o bien X es uniformemente suave. En el segundo caso se obtendrá también que X es casi-transitivo, y de este modo, según los resultados de [F] y [Ca4], X es **uniformemente convexo** (es decir, X^* es uniformemente suave). En el primer caso, se obtendrá que la norma de X^* es también extremadamente ruda. Estos resultados proporcionan abundantes ejemplos de espacios de Banach que no se pueden renormar convexo-transitivamente, cuestión natural que permanecía abierta hasta ahora (comparar [W], [Pa] y [Ca4]). En efecto, si X no es superreflexivo, y si o bien X no se puede renormar rudamente (por ejemplo, si X es Asplund) o bien X^* sólo admite renormamientos duales no rudas (por ejemplo, si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym), entonces X no admite renormaciones convexo-transitivas. El Teorema IV.5.1, también se aplica para obtener otras caracterizaciones de los miembros de la clase $\mathcal{J}$. Así por ejemplo, en la sección quinta veremos que un espacio de Banach X está en $\mathcal{J}$ si y sólo si tiene la propiedad de intersección de Mazur y hay algún punto w^*-grande en X^* (Teorema IV.5.10).

IV.2 Caras de la bola unidad de un espacio de Banach convexo-transitivo.

En esta sección mostramos que los espacios de Banach convexo-transitivos comparten con los espacios de Hilbert la siguiente curiosa propiedad. A saber, si X es un espacio de Banach real o complejo convexo-transitivo de dimensión mayor o igual que dos sobre $\mathbb{R}$, entonces toda cara propia de B_X tiene interior vacío en S_X. Sea X un espacio de Banach. Recuérdese que un conjunto convexo C de B_X se dice ser una **cara** de B_X si dado $0 < \alpha < 1$ y elementos x, y de B_X tales que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$, entonces x, y pertenecen a C. Una cara C de X es **propia** si no coincide con B_X. Nótese que toda cara propia de B_X está contenida en S_X.

PROPOSICIÓN IV.2.1 . *Sea X un espacio de Banach real o complejo no cero. Supongamos que existe una cara propia C de B_X y un punto grande u de X que pertenece al interior de C relativo a S_X. Entonces la dimensión de X sobre $\mathbb{R}$ es igual a uno.*

Demostración. Ya que u pertenece a $\overset{\circ}{C}$ existe $0 < \delta < 1$ tal que $\frac{u+y}{\|u+y\|}$ se queda en C siempre que $y \in X$ con $\|y\| \leq \delta$. Luego si $y \in X$ con $\|y\| \leq \delta$, entonces

$$2(\|u+y\| + \|u-y\|)^{-1}u =$$
$$\frac{\|u+y\|}{\|u+y\| + \|u-y\|}\frac{u+y}{\|u+y\|} + \frac{\|u-y\|}{\|u+y\| + \|u-y\|}\frac{u-y}{\|u-y\|} \in C.$$

Como C está contenido en S_X, obtenemos $2 = \|u-y\| + \|u+y\|$ para todo y en X con $\|y\| \leq \delta$. Por otra parte, se comprueba que el conjunto

$$\{x \in X : \|x-y\| + \|x+y\| - 2 \leq 0,\ \forall y \in X \text{ con } \|y\| \leq \delta\}$$

es convexo, cerrado, $\mathcal{G}$-invariante y contiene a u. Al ser u punto grande de X, se sigue que $2 = \|x-y\| + \|x+y\|$ para todo x en S_X e y en X con $\|y\| \leq \delta$. Como quiera que esta condición es hereditaria por paso a subespacios, basta ver que todo subespacio finito dimensional M no cero de X tiene dimensión real igual a uno. Sea x punto extremo de B_M. Entonces para todo $y \in M$ con $\|y\| \leq \delta$ se tiene

$$x = \frac{\|x+y\|}{2}\frac{x+y}{\|x+y\|} + \frac{\|x-y\|}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|},$$

de donde se llega a que $M = \mathbb{R}x$. ∎

El resultado dual al anterior sería el siguiente.

PROPOSICIÓN IV.2.2. *Sea X un espacio de Banach real o complejo no cero. Supongamos que existe una cara propia C de B_{X^*} y un punto w^*-grande f de X^* que pertenece al interior de C relativo a S_{X^*}. Entonces la dimensión de X sobre $\mathbb{R}$ es igual a uno.*

Para finalizar daremos unos corolarios obvios que se desprenden de las proposiciones anteriores.

COROLARIO IV.2.3. *Sea X un espacio de Banach real o complejo no cero convexo-transitivo distinto de $\mathbb{R}$. Entonces todas las caras propias de B_X y B_{X^*} tienen interior vacío en S_X y S_{X^*}, respectivamente.*

COROLARIO IV.2.4. *Sea X un espacio de Banach real o complejo no cero convexo-transitivo distinto de $\mathbb{R}$. Entonces $D(X,x)$ y $D(X^*,f)$ tienen interior vacio en S_{X^*} y S_X, respectivamente, para todo x en S_X y f en S_{X^*}.*

IV.3 Primer teorema de caracterización de los espacios de Banach superreflexivos casi-transitivos.

Comenzaremos presentando dos proposiciones en las que recogemos las caracterizaciones duales tanto de un punto grande de X así como la de un punto w^*-supergrande de X^*. Recuérdese que para x en S_X, $D(X,x) = D(x)$ denota el conjunto de los estados del punto x.

PROPOSICIÓN IV.3.1. *Sea X un espacio de Banach y u un elemento de S_X. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) u es un punto grande de X.

(ii) Para todo número positivo δ, el conjunto $\Delta_\delta(u)$ es denso en S_{X^*}, donde

$$\Delta_\delta(u) = \{f \circ T : f \in D(x), x \in S_X, \|x - u\| \leq \delta, T \in \mathcal{G}\}.$$

Demostración. Supongamos que $\overline{co}(\mathcal{G}(u)) = B_X$. Fijemos un número positivo δ y tomemos g en S_{X^*}. Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe T^{-1} en $\mathcal{G}$ tal que $|g(T^{-1}(u)) - 1| < \frac{\varepsilon'^2}{4}$ donde $\varepsilon' := \min\{\varepsilon, \delta\}$. Por el teorema de Bishop-Phelps-Bollobás [BD, Theorem 16.1] aplicado al funcional $g \circ T^{-1}$, tenemos garantizada la existencia de x en S_X y f en $D(x)$ de manera que $\|u - x\| < \varepsilon' \leq \delta$ y $\|g \circ T^{-1} - f\| < \varepsilon' \leq \varepsilon$, en otras palabras, $\|g - f \circ T\| < \varepsilon$. Al ser ε arbitrario, $g \in \overline{\Delta_\delta(u)}$.

Para el recíproco razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $z \in B_X \setminus \overline{co}(\mathcal{G}(u))$. Por el teorema de Hanh-Banach, existe f en S_{X^*} tal que

$$1 \geq f(z) > \sup\{|f(a)| : a \in \overline{co}(\mathcal{G}(u))\} \qquad (\$)$$

Dado n en $\mathbb{N}$, el conjunto $\Delta_{\frac{1}{n}}(u)$ es por hipótesis denso en S_{X^*}. Luego existen x_n en S_X con $\|u - x_n\| \leq \frac{1}{n}$, g_n en $D(x_n)$ y T_n en $\mathcal{G}$ tales que $\|f - g_n \circ T_n\| \leq \frac{1}{n}$. Así,

$$|f(T_n^{-1}(u)) - 1| \leq |f(T_n^{-1}(u)) - g_n(u)| + |g_n(u) - g_n(x_n)| \leq \frac{2}{n}.$$

De donde $\sup\{|f(a)| : a \in \mathcal{G}(u)\} = 1$, lo que contradice ($). ∎

La demostración del siguiente resultado es igual que la demostración de la proposición anterior salvo pequeños cambios razonables.

PROPOSICIÓN IV.3.2. *Sea X un espacio de Banach y f un elemento de S_{X^*}. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) f es un punto w^*-supergrande de X^*.

(ii) Para todo número positivo δ, el conjunto $\Delta_\delta^*(f)$ es denso en S_X, donde

$$\Delta_\delta^*(f) = \{T(x) : x \in D(g) \cap X \,, g \in S_{X^*}, \|f - g\| \leq \delta \,, T \in \mathcal{G}\}.$$

En vista de las proposiciones anteriores, obtenemos una nueva reformulación de las normas convexos-transitivas.

COROLARIO IV.3.3. *Para un espacio de Banach X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es convexo-transitivo.

(ii) Para todo u en S_X y $\delta > 0$, $\Delta_\delta(u)$ es denso en S_{X^*}.

(iii) Para todo f en S_{X^*} y $\delta > 0$, $\Delta_\delta^*(f)$ es denso en S_X.

Antes de continuar permítasenos hacer un inciso y retomar las caracterizaciones de los espacios de Hilbert complejos en la clase de los JB^*-triples. De las proposiciones anteriores se desprende el siguiente corolario. Para un espacio de Banach X denotaremos por S (por S^*) el conjunto de puntos de S_X (respectivamente, de S_{X^*}) en los que X (respectivamente, X^*) es suave.

COROLARIO IV.3.4. *Sea X un espacio de Banach.*

(i) Si el interior de S en S_X contiene un punto grande de X, entonces el conjunto de puntos extremos de B_{X^*} es norma-denso en S_{X^*}.

(ii) Si el interior de S^* en S_{X^*} contiene un punto w^*-supergrande de X^*, entonces el conjunto de puntos extremos de B_X es norma-denso en S_X.

Si recordamos que en un JB^*-triple X los puntos extremos de B_X son tripotentes de X, el Lema III.4.3 y el Teorema III.5.4, se sigue el siguiente corolario.

COROLARIO IV.3.5. *Para un JB^*-triple X supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(i) El interior de S en S_X contiene un punto grande u de X.

(ii) El interior de S^* en S_{X^*} contiene un punto w^*-supergrande de X^*.

Entonces X es un espacio de Hilbert.

Hecho este inciso, seguimos con los espacios de Banach no necesariamente dotados de estructura algebraica.

Recuérdese que la norma de un espacio de Banach X es fuertemente subdiferenciable en un punto u de S_X si

$$\tau(u,x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u+\alpha x\| - 1}{\alpha}$$

uniformemente para x en B_X. Si denotamos por D la aplicación de dualidad, $D(x) = \{f \in S_{X^*} : f(x) = 1\}$ para todo x en S_X, decir que la norma de X es fuertemente subdiferenciable en un punto u es equivalente a decir que la aplicación D es $\mathbf{n}$-$\mathbf{n}$-semicontinua inferiormente en u, donde $\mathbf{n}$ denota la topología de la norma tanto de X como de X^* (ver por ejemplo [FP, Theorem 1.2]), es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $D(x) \subseteq D(u) + \varepsilon B_{X^*}$ siempre que $x \in S_X$ con $\|u - x\| \leq \delta$.

PROPOSICIÓN IV.3.6 . *Si la norma de un espacio de Banach X es fuertemente subdiferenciable en un punto grande u, entonces el conjunto $\{T^*(f) : f \in D(u), T \in \mathcal{G}\}$ es norma-denso en S_{X^*}.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y g en S_{X^*}. Por ser la norma de X fuertemente subdiferenciable en u se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $D(x) \subseteq D(u) + \frac{\varepsilon}{2} B_{X^*}$ siempre que $x \in S_X$ con $\|u - x\| \leq \delta$. Por ser u punto grande en X, se sigue de la Proposición IV.3.1 que $\Delta_\delta(u)$ es norma-denso en S_{X^*}. Entonces existe $x \in S_X$ con $\|u - x\| \leq \delta$, $h \in D(x)$ y $T \in \mathcal{G}$ de manera que $\|g - T^*(h)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por otra parte, existe $f \in D(u)$ tal que $\|f - h\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de donde finalmente se llega a que $\|g - T^*(f)\| \leq \varepsilon$. ∎

La versión dual del anterior resultado es:

PROPOSICIÓN IV.3.7 . *Para un espacio de Banach X, supongamos que la norma de X^* es fuertemente subdiferenciable en un punto w^*-supergrande f. Entonces $\{T(x) : x \in D(f) \cap X, T \in \mathcal{G}\}$ es norma-denso en S_X.*

Es bien sabido que un espacio de Banach es superreflexivo si y sólo si lo es su dual. Como ya dijimos en la introducción, llamaremos $\mathcal{J}$ a la clase de los espacios de Banach superreflexivos casi-transitivos. Ha sido probado por C. Finet [F] (ver también [DGZ, Corollary IV.5.7]) que todos los miembros de $\mathcal{J}$ son uniformemente suaves y uniformemente convexos (su dual es uniformemente suave). Entonces, como demuestra F. Cabello [Ca4] (ver también [O, Lemma 2.5]), la clase $\mathcal{J}$ es **autodual**, es decir, un espacio de Banach X pertenece a $\mathcal{J}$ si y sólo si X^* pertenece a $\mathcal{J}$. No obstante, con las técnicas que vamos a usar para demostrar los siguientes teoremas no es necesario utilizar esta última propiedad. Se sabe que la norma de X es Fréchet diferenciable en un punto u de S_X si y sólo si X es suave en u y su norma es fuertemente subdiferenciable en u.

TEOREMA IV.3.8. *Si la norma de un espacio de Banach X es Fréchet diferenciable en un punto grande u de X, entonces X pertenece a $\mathcal{J}$.*

Demostración. Sea u en S_X punto grande de X donde la norma de X es Fréchet diferenciable. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\|u+h\| + \|u-h\| - 2}{\|h\|} \leq \varepsilon$$

para todo h en $X \backslash \{0\}$ con $\|h\| \leq \delta$. Consideremos el subconjunto de X dado por

$$\left\{ v \in X : \frac{\|v+h\| + \|v-h\| - 2}{\|h\|} \leq \varepsilon \ \forall h \in X \backslash \{0\} \text{ con } \|h\| \leq \delta \right\}.$$

Se comprueba fácilmente que este subconjunto es norma-cerrado, convexo, $\mathcal{G}$-invariante y claramente contiene a u. Al ser u punto grande de X se sigue que

$$\frac{\|v+h\|+\|v-h\|-2}{\|h\|} \leq \varepsilon$$

para todo v en S_X y h en $X\setminus\{0\}$ con $\|h\| \leq \delta$. Por lo tanto X es uniformemente suave (luego superreflexivo). Por la Proposición IV.3.6, X^* es casi-transitivo y puesto que también es superreflexivo, la existencia de puntos en X^* donde la norma es Fréchet diferenciable está garantizada. Aplicando la Proposición IV.3.7 se tiene que X es casi-transitivo. ∎

Al ser la norma de X^* w^*-semicontinua inferiormente, siguiendo los mismos pasos que en la demostración anterior, se obtiene que si la norma de X^* es Fréchet diferenciable en un punto w^*-grande f de X^*, entonces X^* es uniformemente suave. En particular, X es reflexivo, y por lo tanto $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}(X^*)$ y la topologías w^* y w en X^* coinciden. Luego f es un punto grande de X^* y aplicando la Proposición IV.3.6 se obtiene la versión dual del teorema anterior.

TEOREMA IV.3.9 . *Si la norma de X^* es Fréchet diferenciable en un punto w^*-grande f de X^*, entonces X pertenece a $\mathcal{J}$.*

IV.4 Puntos grandes y espacios de Banach uniformemente descuadrados.

Un espacio de Banach X es **uniformemente descuadrado** si existe a en $(0,1)$ tal que $\|x+y\| < 2a$ para cualesquiera x, y en B_X verificando $\|x-y\| \geq 2a$. Supongamos que X no es uniformemete descuadrado y sea a en $(0,1)$. Entonces existen x, y en B_X tales que $\|x+y\| \geq a+1$ y $\|x-y\| \geq a+1$. Tomemos $f \in D\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right)$ y $g \in D\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)$. Entonces se demuestra fácilmente que $f(x), f(y), g(x), -g(y) \geq a$, de donde

$$\|f+g\| \geq (f+g)(x) \geq 2a$$

$$\|f-g\| \geq (f-g)(y) \geq 2a\,,$$

luego X^* no es uniformemente descuadrado. Los espacios uniformemente descuadrados fueron estudiados por Robert C. James, quién primeramente demuestra en [J] que todo espacio de Banach uniformemente descuadrado es reflexivo. Posteriormente, James y Schaffer muestran que en realidad dichos espacios son superreflexivos (ver [JS] y [Da, Theorem 4]). Del argumento anterior se sigue que la clase de los espacios uniformemente descuadrados es autodual.

El índice de rudeza nos permitirá determinar si un espacio de Banach con puntos grandes es uniformemente descuadrado. Recuérdese que, dado u en S_X, el índice de rudeza de u en X es el número

$$\eta(X,u) = \lim_{\|h\|\to 0} \sup \frac{\|u+h\| + \|u-h\| - 2}{\|h\|}\,.$$

y que $0 \leq \eta(X,u) \leq 2$.

Una **rebanada** en X es un conjunto de la forma

$$S(f, B_X, \alpha) := \{x \in B_X : f(x) > 1-\alpha\}$$

para algún f en S_{X^*} y $\alpha > 0$. Una **w^*-rebanada** en X^* es un conjunto de la forma

$$S(u, B_{X^*}, \alpha) := \{g \in B_{X^*} : g(u) > 1-\alpha\}$$

para algún u en S_X y $\alpha > 0$. Según [DGZ, Proposition I.1.11], la norma de X no es ruda si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una w^*-rebanada en X^* de diámetro menor que ε. Entonces, con el algún esfuerzo adicional, se puede demostrar que la norma de X^* no es ruda si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una rebanada en X de diámetro menor que ε. Nótese que estos últimos comentarios implican que, si la norma de X no es ruda, entonces la norma de X^{**} tampoco es ruda.

El siguiente resultado es una versión puntual, más adecuada a nuestros intereses, de [DGZ, Proposition I.1.11], cuya prueba recogemos por complitud.

LEMA IV.4.1 . [DGZ, Proposition I.1.11]. *Para u en S_X y $\varepsilon > 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\eta(X, u) \geq \varepsilon$.

(ii) Para todo $\alpha > 0$, diam $(S(u, B_{X^*}, \alpha)) \geq \varepsilon$.

Demostración. Supongamos $\eta(X, u) \geq \varepsilon$ y sea $\alpha > 0$. Por hipótesis, para n en $\mathbb{N}$ existe h_n en $X \setminus \{0\}$ tal que

$$\|u + h_n\| + \|u - h_n\| - 2 \geq \left(\varepsilon - \frac{1}{n}\right) \|h_n\| \qquad (\$)$$

con $\{\|h_n\|\}$ tendiendo a cero. Sean f_n, g_n en S_{X^*} tales que $f_n(u + h_n) = \|u + h_n\|$ y $g_n(u - h_n) = \|u - h_n\|$ para n en $\mathbb{N}$. Nótese que $\{f_n(u)\} \to 1$ y $\{g_n(u)\} \to 1$. Entonces existe n_0 en $\mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $f_n, g_n \in S(u, B_{X^*}, \alpha)$, luego de ($) se concluye que $\|f_n - g_n\| \geq \varepsilon - \frac{1}{n}$. En consecuencia, diam $(S(u, B_{X^*}, \alpha)) \geq \varepsilon$.

Supongamos ahora que para todo $\alpha > 0$, diam$(S(u, B_{X^*}, \alpha)) \geq \varepsilon$. Sean λ y δ números reales positivos. Por hipótesis existen f, g en $S(u, B_{X^*}, \delta\lambda\varepsilon)$ con $\|f - g\| > \varepsilon(1 - \delta)$. Tomemos h en S_X tal que $(f - g)(h) > \varepsilon(1 - \delta)$. Entonces se tiene que

$$\|u + \lambda h\| + \|u - \lambda h\| \geq f(u + \lambda h) + g(u - \lambda h) \geq 2 + \lambda\varepsilon(1 - 3\delta)$$

y por tanto

$$\frac{\|u + \lambda h\| + \|u - \lambda h\| - 2}{\lambda} \geq \varepsilon(1 - 3\delta) .$$

Tomando una sucesión $\{\lambda_n\} \to 0$ tal que

$$\left\{ \frac{\|u + \lambda_n h\| + \|u - \lambda_n h\| - 2}{\lambda_n} \right\}$$

sea convergente a un cierto número real r, obtenemos

$$\eta(X, u) \geq r \geq \varepsilon(1 - 3\delta).$$

Como δ es arbitrariamente positivo, se tiene $\eta(X, u) \geq \varepsilon$. ∎

Una consecuencia del resultado anterior es el siguiente lema.

LEMA IV.4.2 . *Si un espacio de Banach X es uniformemente descuadrado, entonces $\eta(X,u) < 2$ para todo u en S_X.*

Demostración. Supongamos que existe u en S_X tal que $\eta(X,u) = 2$. Del lema anterior se sigue que, para cada n en $\mathbb{N}$, existen f_n, g_n en $S(u, B_{X^*}, \frac{1}{n})$ con $\|f_n - g_n\| \geq 2 - \frac{1}{n}$. Como X es uniformemente descuadrado, X^* también lo es, con lo que existe a en $(0,1)$ tal que $\|f+g\| < 2a$ para cualesquiera f, g en B_{X^*} verificando $\|f - g\| \geq 2a$. Tomando n suficientemente grande para tener $\|f_n - g_n\| > 2a$, $f_n(u) > a$ y $g_n(u) > a$, se concluye

$$2a < (f_n + g_n)(u) \leq \|f_n + g_n\| < 2a,$$

lo cual es contradictorio. ∎

Este resultado admite una versión dual que recogemos en el siguiente lema.

LEMA IV.4.3 . *Si un espacio de Banach X es uniformemente descuadrado, entonces $\eta(X^*, f) < 2$ para todo f en S_{X^*}.*

Nuestro siguiente resultado es el más importante de la sección y puede verse como una especie de recíproco del Lema IV.4.2.

TEOREMA IV.4.4. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que existe un punto grande u de X satisfaciendo $\eta(X,u) < 2$. Entonces X es uniformemente descuadrado.*

Demostración. Por comodidad, dado ε en $(0,2)$ y δ en $(0,1)$, notaremos

$$M_{\varepsilon,\delta}(X) := \left\{ x \in B_X : \frac{\|x+h\| + \|x-h\| - 2}{\|h\|} \leq \varepsilon \quad \forall h \in \delta B_X \backslash \{0\} \right\}.$$

Supongamos que $\eta(X,u) < 2$. Tomemos ε con $\eta(X,u) < \varepsilon < 2$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\|u+h\| + \|u-h\| - 2}{\|h\|} \leq \varepsilon$$

para todo h en $X\backslash\{0\}$ con $\|h\| \leq \delta$. Puesto que $M_{\varepsilon,\delta}(X)$ es convexo, cerrado, $\mathcal{G}$-invariante y contiene a u, por ser u punto grande de X se tiene que $M_{\varepsilon,\delta}(X) = B_X$. En lo que resta, demostraremos que esta última igualdad implica que X es uniformemente descuadrado. Fijemos σ en $(\varepsilon, 2)$ y consideremos a en $(\frac{1}{2}\max\{2-(\sigma-\varepsilon)\delta, 2-(2-\sigma)\delta\}\ , 1)$. Sean x, y elementos de B_X con $\|x+y\| \geq 2a$. En tal caso se tiene que $\|x+y\| \geq 2-(\sigma-\varepsilon)\delta$, luego $\|x+\delta y\| \geq 2-(\sigma-\varepsilon)\delta-(1-\delta)$. Como, por otra parte, la desigualdad $\|x-\delta y\| \geq \|x-y\|-(1-\delta)$ es cierta, obtenemos

$$\|x+\delta y\| + \|x-\delta y\| \geq \|x-y\| + (2-\sigma+\varepsilon)\delta.$$

Se sigue de la igualdad $M_{\varepsilon,\delta}(X) = B_X$ que

$$\|x-y\| + (2-\sigma+\varepsilon)\delta \leq 2+\varepsilon\delta,$$

y en consecuencia

$$\|x-y\| \leq 2-(2-\sigma)\delta < 2a\ . \blacksquare$$

Al ser la norma de X^* w^*-semicontinua inferiormente, se tiene que para $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, el conjunto $M_{\varepsilon,\delta}(X^*)$ es w^*-cerrado, convexo y $\mathcal{G}(X^*)$-invariante. Así, se puede argumentar como en la demostración del teorema anterior para obtener la versión dual de dicho teorema.

TEOREMA IV.4.5. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que existe un punto w^*-grande f de X^* tal que $\eta(X^*, f) < 2$. Entonces X es uniformemente descuadrado.*

El siguiente corolario es una consecuencia de los teoremas anteriores.

COROLARIO IV.4.6. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que se verifica alguna de las siguientes hipótesis:*

(i) Existe u en S_X punto grande de X que determina en B_{X^*} una w^*-rebanada de diámetro menor que dos.

(ii) Existe f en S_{X^*} punto w^*-grande de X^* que determina en $B_{X^{**}}$ una rebanada de diámetro menor que dos.

Entonces X es uniformemente descuadrado.

Recuérdese que los puntos de la esfera unidad de un espacio de Banach X, donde la norma es fuertemente subdiferenciable, son aquellos puntos en los que la aplicación de dualidad es $\mathbf{n}-\mathbf{n}$-inferiormente semicontinua. Teniendo presente el resultado de J. R. Giles, D. A. Gregory y Brailey Sims [GGS.2, Theorem 2.1] particularizado al caso que nos ocupa, se tiene que si la aplicación de dualidad es $\mathbf{n}-\mathbf{n}$-inferiormente semicontinua en u entonces para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $D(u) + \varepsilon B_{X^*}$ contiene una w^*-rebanada determinada por u. Si suponemos que para u en S_X el diámetro de $D(u)$ es menor que dos, se sigue que para $\varepsilon > 0$ con $\operatorname{diam}(D(u)) + \varepsilon < 2$ el conjunto $D(u) + \frac{\varepsilon}{2} B_{X^*}$ tiene diámetro menor que dos.

COROLARIO IV.4.7 . *Sea X espacio de Banach, u un punto grande de X donde la norma de X es fuertemente subdiferenciable y tal que* diam $(D(u)) < 2$. *Entonces X es uniformemente descuadrado.*

Denotando por D^* la aplicación de dualidad de X^* en X^{**} tenemos:

COROLARIO IV.4.8 . *Sea X espacio de Banach, f un punto w^*-grande de X^* donde la norma de X^* es fuertemente subdiferenciable y tal que* diam $(D^*(f)) < 2$. *Entonces X es uniformemente descuadrado.*

IV.5 Rudeza de las normas convexo-transitivas.

Esta sección la dedicaremos a obtener consecuencias de los resultados de las secciones anteriores. Dichos corolarios generalizan los trabajos realizados previamente sobre el tema que aparecen en la literatura, a saber, los ya comentados de C. Finet y los de F. Cabello. Como consecuencia, responderemos negativamente a la pregunta formulada en la introducción, ¿admite todo espacio de Banach un renormamiento equivalente convexo-transitivo?.

Diremos que X^* es w^*-**convexo-transitivo** si todo punto de S_{X^*} es w^*-grande. Por lo tanto si X es convexo-transitivo, entonces X^* es w^*-convexo-transitivo (puesto que todo elemento de S_{X^*} es w^*-supergrande, Proposición I.4.3).

Seguiremos denotando por $\mathcal{J}$ la clase de los espacios de Banach superreflexivos casi-transitivos.

TEOREMA IV.5.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X *es un miembro de* $\mathcal{J}$.

(ii) X *es convexo-transitivo y la norma de* X *no es extremadamente ruda.*

(iii) X^* *es* w^**-convexo-transitivo y la norma de* X^* *no es extremadamente ruda.*

Demostración. Claramente $i) \Rightarrow ii)$ y $i) \Rightarrow iii)$. Para las implicaciones recíprocas, nótese que si X es un espacio de Banach convexo-transitivo cuya norma no es extremadamente ruda, del Teorema IV.4.4 se sigue que X es uniformemente descuadrado. Se tiene pues garantizada la existencia de puntos de la esfera unidad donde la norma es Fréchet diferenciable (ya que X es supereflexivo), y, como todo elemento de la esfera es punto grande, por el Teorema IV.3.8 se concluye que X pertenece a $\mathcal{J}$. De manera análoga se prueba $iii) \Rightarrow i)$, reemplazando en el argumento anterior los teoremas usados por sus versiones duales, a saber, Teoremas IV.4.5 y IV.3.9. ∎

La no extremada rudeza de la norma requerida en el anterior teorema, es una condición más débil que exigir que la norma sea no ruda que a su vez está bastante lejos de la suavidad uniforme que poseen los miembros de $\mathcal{J}$.

En el próximo resultado obtendremos caracterizaciones intermedias de los espacios de Banach casi-transitivos superreflexivos en términos de la convexo-transitividad y relajamientos de la superreflexividad.

Recuérdese que un punto u de S_X (respectivamente f de S_{X^*}) se dice que es un **punto de diente** (**w^*-diente**) de B_X (de B_{X^*}) si existen rebanadas (w^*-rebanadas) contiendo a u (a f) y de diámetro menor que cualquier $\varepsilon > 0$ prefijado. En las definiciones anteriores los elementos de S_{X^*} y S_X, respectivamente, que determinan las rebanadas y w^*-rebanadas pueden depender de ε; cuando tal dependencia no se da, se dice que u y f son **puntos fuertemente expuestos** de B_X y **fuertemente w^*-expuestos** de B_{X^*}, respectivamente. Nótese que la existencia de puntos en S_X donde la norma de X es Fréchet diferenciable, implica la existencia de puntos fuertemente w^*-expuestos en B_{X^*}, luego w^*-dientes, y la existencia en B_{X^*} de w^*-dientes implica la no rudeza de la norma de X. Análogamente, la existencia de puntos en S_{X^*} donde la norma de X^* es Fréchet diferenciable, implica la existencia de puntos fuertemente expuestos (y por lo tanto la existencia de puntos de dientes) en B_X, de donde la norma de X^* es no ruda.

Para un espacio de Banach X el hecho de tener la **propiedad de Radon-Nikodym**, así como el de ser **Asplund**, admite muchas reformulaciones equivalentes. Para fijar de alguna manera estos conceptos vamos a elegir formulaciones de los mismos, quizá no las más frecuentes, pero sí las más adecuadas a nuestro desarrollo. Así, el espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si para toda norma equivalente en X la norma dual es no ruda [Bou, Pag. 30]. De manera análoga, como comentamos en la introducción del capítulo, el espacio de Banach X es Asplund si y sólo si toda norma equivalente en X es no ruda. En realidad, si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym entonces, para toda norma equivalente en X, la norma dual es Fréchet diferenciable en un conjunto denso de la correspondiente esfera unidad [Bou, Theorem 5.7.4]. De manera análoga, si X es Asplund, entonces toda norma equivalente en X es Fréchet diferenciable en un conjunto denso de la correspondiente esfera unidad [Bou, Proposition 5.6.13]. Referimos al lector a [DU, Pag. 217-218] para un completo catálogo de formulaciones equivalentes de la propiedad de Radon-Nikodym.

Ahora del Teorema IV.5.1 se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

COROLARIO IV.5.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X pertenece a $\mathcal{J}$.

(ii) X es convexo-transitivo y Asplund.

(iii) X^* es w^*-convexo-transitivo y X posee la propiedad de Radon-Nikodym.

NOTA IV.5.3. Como ya anunciamos en la introducción al capítulo el Teorema IV.5.1 implica que "muchos" espacios de Banach carecen de renormaciones equivalentes convexo-transitivas. En efecto, como ejemplos de tales espacios de Banach uno puede elegir cualquier espacio de Banach que no sea superreflexivo pero o bien sea Asplund o bien tenga la propiedad de Radon-Nikodym. Enfatizamos que algunos de tales espacios, como por ejemplo c_0 y ℓ_1, tienen sin embargo normas maximales. El espacio $\oplus_{n\in\mathbb{N}}^{\ell_2}\ell_1^n$ es otro curioso ejemplo de espacio de Banach que no se puede renormar convexo-transitivamente.

Una versión en principio distinta del Teorema IV.5.1, sería relajar la hipótesis de convexo-transitividad de la norma a que el conjunto de puntos grandes sea no raro en la esfera unidad. Si este es el caso se tendría una nueva caracterización de los miembros de $\mathcal{J}$. Para demostrar este resultado daremos los siguientes lemas.

LEMA IV.5.4. *Sean u y v puntos grandes de X. Si la norma de X^* no es ruda, entonces u pertenece a la clausura de $\mathcal{G}(v)$ en S_X.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Si la norma de X^* no es ruda, entonces existe f en S_{X^*} y $\alpha > 0$ tales que el diámetro del conjunto $S(f, B_X, \alpha)$ es menor que ε. Ahora el conjunto $\{x \in B_X : f(x) \leq 1 - \alpha\}$ es convexo, cerrado y está contenido de manera extricta en B_X. Al ser u y v puntos grandes de X, existen F y G en $\mathcal{G}$ satisfaciendo $f(F(u)) > 1 - \alpha$ y $f(G(v)) > 1 - \alpha$. Por lo tanto si definimos $H := F^{-1} \circ G$, se tiene que $H \in \mathcal{G}$ y que $\|u - H(v)\| = \|F(u) - G(v)\| < \varepsilon$. ∎

Análogamente se demuestra este otro lema.

LEMA IV.5.5. *Sean f y g puntos w^*-grandes de X^*. Si la norma de X no es ruda, entonces f pertenece a la clausura de $\mathcal{G}(X^*)(g)$ en S_{X^*}.*

TEOREMA IV.5.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X pertenece a $\mathcal{J}$.

(ii) El conjunto de los puntos grandes de X no es raro en S_X y la norma de X^* no es ruda.

(iii) El conjunto de los puntos w^*-grandes de X^* no es raro en S_{X^*} y la norma de X no es ruda.

Demostración. Claramente $(i) \Rightarrow (ii)$ y $(i) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que se verifica (ii). Entonces, por la hipótesis y el Lema IV.5.4, para cada punto grande u en X, $\mathcal{G}(u)$ no es raro en S_X. Por la Proposición I.2.2, se tiene que X es casi-transitivo. Por el Teorema IV.5.1 $iii) \Rightarrow i)$, X está en $\mathcal{J}$. Supongamos ahora que se verifica (iii). Entonces, por la hipótesis y el Lema IV.5.5, para cada punto grande f en X^*, $\mathcal{G}(X^*)(f)$ no es raro en S_{X^*}. Por la Proposición I.2.2, se tiene que X^* es casi-transitivo. En consecuencia, X^{**} es w^*-convexo transitivo. Por otra parte, la norma de X^{**} no es ruda ya que la norma de X no es ruda. Se sigue del Teorema IV.5.1 $iii) \Rightarrow i)$ que X^* está en $\mathcal{J}$. ∎

Por el teorema de Hahn-Banach, un elemento u en S_X es un punto grande de X si y sólo si, para todo g en S_{X^*}, se tiene

$$\sup \{|g(T(u))| : T \in \mathcal{G}\} = 1.$$

Análogamente, un elemento f en S_{X^*} es un punto w^*-grande si y sólo si, para todo x en S_X, se tiene

$$\sup \{|F(f)(x)| : F \in \mathcal{G}(X^*)\} = 1.$$

Luego el conjunto de todos los puntos grandes de X es cerrado en S_X, y el conjunto de todos los puntos w^*-grandes es norma cerrado en S_{X^*}.

Bajo la hipótesis de no rareza en S_X de los puntos grandes de X y condiciones isomórficas se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO IV.5.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X pertenece a $\mathcal{J}$.*

(ii) *El conjunto de los puntos grandes de X no es raro en S_X y X es Asplund.*

(iii) *El conjunto de los puntos grandes de X no es raro en S_X y X tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

(iv) *El conjunto de todos los puntos w^*-grandes no es raro en S_{X^*} y X es Asplund.*

(v) *El conjunto de todos los puntos w^*-grandes no es raro en S_{X^*} y X tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Las implicaciones *iii)* $\Rightarrow$ *i)* y *iv)* $\Rightarrow$ *i)*, se desprenden del Teorema IV.5.6.

ii) $\Rightarrow$ *i)*. De la hipótesis se tiene que el conjunto de puntos grandes de X tiene interior no vacio en S_X. Por ser X Asplund, el conjunto de puntos de S_X donde la norma de X es Fréchet diferenciable es denso. Finalmente basta aplicar el Teorema IV.3.8.

$v) \Rightarrow i)$. Por tener X la propiedad de Radon-Nikodym el conjunto de puntos de S_{X^*} donde la norma es Fréchet diferenciable es denso, luego estamos en iguales circunstancias que en el caso anterior. ∎

Desconocemos si, en general, suponer que en un espacio de Banach X el conjunto de puntos grandes en X no sea raro en S_X es estrictamente más débil que la convexo-transitividad. En otras palabras, si el conjunto de puntos grandes en X tiene interior no vacío en S_X, ¿es X convexo-transitivo?. En todo caso, los resultados anteriores dan cierta información no trivial respecto a la anterior pregunta. Por ejemplo, la respuesta a tal pregunta es afirmativa si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym o es Asplund. Como consecuencia, si X es un espacio de Banach finito dimensional y si el conjunto de puntos grandes de X tiene interior no vacío en S_X, entonces X es un espacio de Hilbert (recuérdese el Corolario I.5.9). Similar comentario cabe hacer sobre la relación de la w^*-convexo-transitividad de X^* y la no rareza en S_{X^*} de los puntos w^*-grandes de X^*.

Los lemas que siguen preparan el terreno a nuestro último teorema de caracterización de los miembros de la clase $\mathcal{J}$.

LEMA IV.5.8. *Sea v un punto de diente de B_X. Si u es un punto grande de X, entonces v pertenece al cierre de $\mathcal{G}(u)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Ya que v es un punto de diente de B_X, existe f en S_{X^*} y $\alpha > 0$ tal que $f(v) > 1 - \alpha$ y diam $S(f, B_X, \alpha) < \varepsilon$. Por otra parte $\{x \in B_X : f(x) \leq 1 - \alpha\}$ es un subconjunto cerrado y convexo de X contenido estrictamente en B_X, luego, al ser u punto grande de X, existe F en $\mathcal{G}$ tal que $f(F(u)) < 1 - \alpha$. Como $v, F(u) \in S(f, B_X, \alpha)$, se sigue que $\|F(u) - v\| < \varepsilon$. ∎

Pequeños cambios en la demostración del anterior lema permiten obtener este otro.

LEMA IV.5.9. *Sea g un punto w^*-diente de B_{X^*} y f es un punto w^*-grande de X^*. Entonces g pertenece al cierre (en norma) de $\mathcal{G}(X^*)(f)$ en S_{X^*}.*

En el siguiente resultado caracterizamos los elementos de $\mathcal{J}$ entre los espacios de Banach que bien él o bien su dual poseen puntos grandes o w^*-grandes, respectivamente, y como es de suponer satisfacen alguna hipótesis (de tipo isométrico) adicional como la que recordamos a continuación. Sea X un espacio de Banach. Se dice que X posee la **propiedad de intersección de Mazur** si todo subconjunto acotado, convexo y cerrado de X se puede expresar como intersección de bolas cerradas. Análogamente, se dirá que X^* tiene la **w^*-propiedad de intersección de Mazur** si todo subconjunto acotado, convexo y w^*-cerrado de X^* se puede expresar como intersección de bolas cerradas. En el trabajo de J. R. Giles, D. A. Gregory y Brailey Sims [GGS.1] se caracterizan las anteriores propiedades en términos de la abundancia de w^*-dientes y dientes. Tales caracterizaciones rezan como sigue:

(i) [GGS.1, Theorem 2.1]. *Un espacio de Banach X posee la propiedad de intersección de Mazur si y sólo si el conjunto de los puntos w^*-dientes de B_{X^*} es norma-denso en S_{X^*}.*

(ii) [GGS.2, Theorem 3.1]. *El dual de un espacio de Banach X posee la w^*-propiedad de intersección de Mazur si y sólo si el conjunto de los puntos dientes de B_X es denso en S_X.*

TEOREMA IV.5.10. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X pertenece a $\mathcal{J}$.*

(ii) *El conjunto de todos los puntos de diente de B_X no es raro en S_X, y existe un punto grande en X.*

(iii) *El conjunto de todos los puntos w^*-dientes de B_{X^*} no es raro en S_{X^*}, y existe un punto w^*-grande en X^*.*

(iv) *X^* posee la w^*-propiedad de intersección de Mazur, y existe un punto grande en X.*

(v) *X posee la propiedad de intersección de Mazur, y existe un punto w^*-grande en X^*.*

Demostración. Teniendo en cuenta las caracterizaciones dadas anteriormente de la propiedad y w^*-propiedad de intersección de Mazur, claramente $i) \Rightarrow iv) \Rightarrow ii)$ y $i) \Rightarrow v) \Rightarrow iii)$.

$ii) \Rightarrow i)$. Sea u punto grande de X. Por el Lema IV.5.8, el conjunto de los puntos dientes de B_X está contenido en $\overline{\mathcal{G}(u)}$. Como quiera que suponemos que tal conjunto no es raro en S_X, se tiene que $\mathcal{G}(u)$ no es raro, con lo que, por la Proposición I.2.2, X es casi-transitivo. Finalmente se aplica el Teorema IV.5.6 (concretamente, $ii) \Rightarrow i)$).

$iii) \Rightarrow i)$. Basta reemplazar en el anterior argumento el Lema IV.5.8 por el Lema IV.5.9, y aplicar el Teorema IV.5.6 $iii) \Rightarrow i)$. ∎

De las caracterizaciones de la propiedad y w^*-propiedad de intersección de Mazur y del teorema de Bishop-Phelps se tiene que si la norma de un espacio de Banach X (respectivamente, X^*) es Fréchet diferenciable en todo punto de S_X (de S_{X^*}) entonces X (X^*) tiene la propiedad (w^*-propiedad) de intersección de Mazur. Así obtenemos el siguiente corolario.

COROLARIO IV.5.11. *Las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

(i) X *es un miembro de* $\mathcal{J}$.

(ii) La norma de X^* *es Frechet diferenciable en todo punto de* S_{X^*} *y existe un punto grande de* X.

(iii) La norma de X *es Frechet diferenciable en todo punto de* S_X *y existe un punto* w^**-grande de* X^*.

Concluimos esta sección aplicando el Teorema IV.3.8 para obtener una nueva caracterización de los espacios de Hilbert. Dado $1 \leq p \leq \infty$, un subespacio M de un espacio de Banach X es un **L^p-sumando** de X si existe una proyección lineal π de X sobre M tal que, para todo x en X, se tiene

$$\|x\|^p = \|\pi(x)\|^p + \|x - \pi(x)\|^p \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|x\| = \max\{\|\pi(x)\|, \|x - \pi(x)\|\} \quad (p = \infty).$$

Si M es un L^p-sumando de X, entonces la proyección π dada anteriormente está determinada de manera única por M, y se conoce con el nombre de la **L^p-proyección** de X sobre M.

COROLARIO IV.5.12. *Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ y u un punto grande de X tal que $\mathbb{K}u$ es un L^p-sumando con $1 < p \leq \infty$. Entonces X es un espacio de Hilbert. Si además $p \neq 2$, entonces dim $(X) = 1$.*

Demostración. Es de comprobación inmediata que la norma de X es Fréchet diferenciable en u. Aplicando el Teorema IV.3.8, se tiene que X es casi-transitivo.

Si X es complejo, entonces es claro que la L^p-proyección π es un operador hermítico (pues $I + (\mu - 1)\pi$ es una isometría para todo μ en $S_{\mathbb{C}}$) y por el Teorema I.4.8 X es un espacio de Hilbert.

Supongamos ahora que X es real. En este caso, denotando por π la L^p-proyección de X sobre $\mathbb{R}u$, $I - 2\pi$ resulta ser una reflexión isométrica en X. Aplicando el Teorema I.2.10 se tiene que X es un espacio de Hilbert.

Por último, el único espacio de Hilbert con L^p-sumandos unidimensionales para $p \neq 2$ es el cuerpo base. ∎

El corolario anterior no es cierto cuando $p = 1$, pues entonces no se puede decir absolutamente nada ya que si X es ℓ_1 o ℓ_1^n $(n \in \mathbb{N})$, entonces todo elemento u en la base natural de X es un punto grande de X tal que $\mathbb{K}u$ es un L^1-sumando de X. En todo caso, el siguiente corolario recoge una versión del anterior incluyendo el caso $p = 1$.

Sea u en S_X tal que $\mathbb{K}u$ es un L^1-sumando de X, y denotemos por π la L^1-proyección de X sobre $\mathbb{K}u$. Entonces el polar de $(I - \pi)(X)$ en X^* es un L^∞-sumando en X^* de dimensión uno y así la norma de X^* es Fréchet diferenciable en algún punto de S_{X^*}.

COROLARIO IV.5.13 . *Supongamos que un espacio de Banach (real o complejo) convexo-transitivo X posee un L^p-sumando de dimensión uno para algún $p \in [1, \infty]$. Entonces X es un espacio de Hilbert. Si $p \neq 2$, entonces X es de dimensión uno.*

Demostración. Para $p \neq 1$, aplicamos el corolario anterior. Sea $p = 1$. En el caso de que X sea complejo, se tiene que la L^1-proyección es hermítica y se razona como en el corolario anterior. En el caso real, se tiene que la norma de X^* no es ruda, luego por el Teorema IV.5.1, X^* es casi-transitivo. Como X^* posee vectores de reflexión isométrica la prueba se concluye como en el corolario anterior. ∎

Problemas y futuras líneas de investigación.

Debido al reciente trabajo de F. Cabello [Ca3], que recoge la mayoría de las cuestiones importantes relacionadas con el Problema de Banach-Mazur, en esta nota final haremos sólamente una recapitulación de aquellas que están más cercanas a los resultados obtenidos en esta memoria.

Uno de estos problemas está relacionado con el concepto de norma fuertemente maximal en un espacio de Banach, que hemos introducido en esta memoria por primera vez. En vista de que no todo espacio de Banach se puede renormar equivalentemente de modo que la nueva norma sea convexo-transitiva y de que no sabemos si cualquier espacio de Banach admite una norma equivalente maximal, cabe plantearse la siguiente pregunta:

¿Se puede renormar equivalentemente cualquier espacio de Banach de manera que la nueva norma sea fuertemente maximal?.

En lo referente al segundo capítulo, queda pendiente la cuestión *Q.1*, a saber:

Sea X un espacio de Banach real. Si X es convexo-transitivo y tiene una reflexión isométrica, ¿es X un espacio de Hilbert?.

Respecto al tercer capítulo, el problema que más nos preocupa es el de la extensión de la conjetura de Wood a la clase de los JB^*-triples (ver Problema III.4.1).

Si X es un JB^*-triple transitivo, ¿es X un espacio de Hilbert?.

Para finalizar esta nota planteamos una cuestión que queda pendiente en el cuarto capítulo y que sería la siguiente:

Si el conjunto de puntos grandes en un espacio de Banach X no es raro en S_X, ¿es X convexo-transitivo?.

Bibliografía.

[AOPR] C. APARICIO, F. OCAÑA, R. PAYA y A. RODRIGUEZ, A non-smooth extension of Fréchet differentiability of tle norm with applications to numerical ranges, *Gasgow Math. J.* **28** (1986), 121-137.

[A1] H. AUERBACH, Sur les groupes linéaires, *Studia Math.* **4** (1933), 113-127.

[A2] H. AUERBACH, Sur les groupes linéaires, *Studia Math.* **5** (1934), 158-166.

[B] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne **1**, Warszawa, 1932.

[BFR] T. J. BARTON, Y. FRIEDMAN y B. RUSSO, Hilbertian seminorms and local order in JB^*-triples, *Quart. J. Math. Oxford* **46** (1995), 257-278.

[BT] T. J. BARTON y R. M. TIMONEY, Weak*-continuity of Jordan triple products and applications, *Math. Scand.* **59** (1986), 177-191.

[Bec] J. BECERRA, JB^*-triples and transitivity of the norm, *Proccedings of the International Conference on Jordan Structures, Málaga, 1997* (en prensa).

[BR1] J. BECERRA y A. RODRÍGUEZ, Isometric reflections on Banach spaces after a paper of A. Skorik and M. Zaidenberg, *Rocky Mountain J. Math.* (en prensa).

[BR2] J. BECERRA y A. RODRÍGUEZ, Isometries which are one-dimensional perturbations of the identity, *Quarterly J. Math. Oxford* (en prensa).

[BR3] J. BECERRA y A. RODRÍGUEZ, Transistivity of the norm on Banach spaces having a Jordan structure (en trámite de publicación).

[BR4] J. BECERRA y A. RODRÍGUEZ, The geometry of convex transitive Banach spaces, *Bull. London Math. Soc.* (en prensa).

[BR5] J. BECERRA y A. RODRÍGUEZ, Characterizations of almost transitive superrreflexive Banach spaces (en trámite de publicación).

[Be] S. K. BERBERIAN, *Lectures in functional analysis and operator theory*, Graduate Texts in Math. **15**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.

[Ber] E. BERKSON, A characterization of complex Hilbert spaces, *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 313-315.

[BK] H. F. BOHNENBLUST y S. KARLIN, Geometrical properties of the unit ball of Banach algebras, *Ann. Math.* **62** (1955), 217-229.

[BD] F. F. BONSALL y J. DUNCAN, *Numerical ranges II*, Cambridge University press, Cambridge, 1973.

[Bo] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. IV-VI, Hermann, Paris, 1968.

[Bou] R. D. BOURGIN, *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym property*, Lecture Notes in Mathematics **993**, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[BKU] R. BRAUN, W. KAUP y H. UPMEIER, A holomorphic characterization of Jordan C^*-algebras, *Math. Z.* **161** (1978), 277-290.

[BC] L. J. BUNCE y C. H. CHU, Dual spaces of JB^*-triples and the Radon-Nikodym property, *Math. Z.* **208** (1991), 327-334.

[Ca1] F. CABELLO, *10 variaciones sobre un tema de Mazur*, Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura, 1996.

[Ca2] F. CABEL LO, Transitivity of M-spaces and Wood's conjecture, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* (en prensa).

[Ca3] F. CABELLO, Regards sur le problème des rotations de Mazur, *Extracta Math.* **12** (1997), 97-116.

[Ca4] F. CABELLO, Maximal symmetric norms on Banach spaces, *Proc. Roy. Irish Acad.* (en prensa).

[CN] J. C. CABELLO y E. NIETO, On properties of M-ideals, *Rocky Mountain J. Math.* **28** (1998), 61-93.

[Ca] J. W. CALKIN, Two sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, *Ann. of Math.* **42** (1941), 839-873.

[CH] J. W. CARLSON y T. L. HICKS, A characterization of inner product spaces, *Math. Japon.* **23** (1978), 371-373.

[C] C. H. CHU, Von Neumann algebras which are second dual spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1991), 999-1000.

[Co] E. R. COWIE, A note on uniquely maximal Banach spaces, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **26** (1983), 85-87.

[Da] MAHLON M. DAY, *Normed linear spaces*, 3rd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **21**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[DGZ] R. DEVILLE, G. GODEFROY, y V. ZIZLER, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. **64**, 1993.

[DU] J. DIESTEL y J. J. UHL, *Vector Measures*, Mathematical Surveys **15**, Amer. Math. Soc. , Providence, Rhode Island, 1977.

[D] S. DINEEN, The second dual of a JB^*-triple system. En *Complex analysis, functional analysis and approximation theory* (ed. by J. Mújica), 67-69, (North-Holland Math. Stud. **125**), North-Holland, Amsterdam 1986.

[Di] J. DIXMIER, *Les C^*-algèbres et leurs representations*, Gautiers-Villars, Paris, 1969.

[EHHK] E. D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL y R. REMMERT, *Numbers*, Graduate texts in Mathematics **123**, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Ed] C. M. EDWARDS, Multipliers of JB-algebras, *Math. Ann.* **249** (1980), 265-272.

[ER] C. M. EDWARDS y G. T. RÜTTIMANN, Compact tripotents in bi-dual JB^*-triples, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **120** (1996), 155-173.

[E] P. ENFLO, A counterexample to the approximation property in Banach spaces, *Acta Math.* **130** (1973), 309-317.

[F] C. FINET, Uniform convexity properties of norms on superreflexive Banach spaces, *Israel J. Math.* **53** (1986), 81-92.

[FP] C. FRANCHETTI y R. PAYA, Banach spaces with strongly subdifferntiable norm, *Bolletino U. M. I.* **7-B** (1993), 45-70.

[FR] Y. FRIEDMAN y B. RUSSO, Structure of the predual of a JBW^*-triple, *J. Reine Angew. Math.* **356** (1985), 67-89.

[GGS.1] J. R. GILES, D. A. GREGORY y BRAILEY SIMS, Characterisation of normed linear spaces with Mazur's intersection property, *Bull. Austral. Math. Soc.* **18** (1978), 105-123.

[GGS.2] J. R. GILES, D. A. GREGORY y BRAILEY SIMS, Geometrical implications of upper semi-continuity of the duality mapping on a Banach space, *Pacific J. Math.* **79** (1978), 99-109.

[GJK] P. GREIM, J. E. JAMISON, y A. KAMINSKA, Almost transitivity of some function spaces, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **116** (1994), 475-488.

[GR] P. GREIM y M. RAJALOPAGAN, Almost transitivity in $C_0(L)$, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **121** (1997), 75-80.

[G] V. I. GURARIJ, Space of universal disposition, isotopic spaces and Mazur problem on rotations of Banach spaces, *Sibirsk Math. Z.* **7** (1966), 1002-1013.

[HS] H. HANCHE-OLSEN y E. STORMER, *Jordan operator algebras*, Monographs Stud. Math. **21**, Pitman, Boston-London-Melbourne 1984.

[HWW] P. HARMAND, D. WERNER, y W. WERNER, *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras*, Lecture Notes in Math. **1547**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1993.

[H] S. HEINRICH, Ultraproducts in Banach space theory, *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980), 72-104.

[I.1] L. INGELSTAM, Hilbert algebras with identity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 794-796.

[I.2] L. INGELSTAM, Non-associative normed algebras and Hurwitz problem, *Ark. Math.* **5** (1964), 231-238.

[IR] J. M. ISIDRO y A. RODRIGUEZ, Isometries of JB-algebras, *Manuscripta Math.* **86** (1995), 337-348.

[J] R. C. JAMES, Uniformly non-square Banach spaces, *Ann. of Math.* **80** (1964), 542-550.

[JS] R. C. JAMES and J. J. SCHAFFER, Super-reflexivity and the girth of spheres, *Israel J. Math.* **11** (1972), 398-404.

[KW] N. J. KALTON y G. V. WOOD, Orthonormal systems in Banach spaces and their applications, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79** (1976), 493-510.

[K1] W. KAUP, Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds, *Math. Ann.* **228** (1977), 39-64.

[K2] W. KAUP, A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, *Math. Z.* **183** (1983), 503-529.

[K3] W. KAUP, Contractive projections on Jordan C^*-algebras and generalizations, *Math. Scand.* **54** (1984), 95-100.

[Li] P.-K. LIN, Maximal norm of $C(S)$, *Bull. London Math. Soc.* **29** (1997), 345-349.

[LT] J. LINDENSTRAUSS y L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[Lu1] W. LUSKY, The Gurarij spaces are unique, *Arch. Math.* **27** (1976), 627-635.

[Lu2] W. LUSKY, A note on rotations in separable Banach spaces, *Studia Math.* **65** (1979), 239-242.

[MMPR] J. MARTINEZ, J. F. MENA, R. PAYA y A. RODRIGUEZ, An approach to numerical ranges without Banach algebra theory, *Illinois J. Math.* **29** (1985), 609-629.

[O] V. P. ODINEC, On a property of reflexive Banach spaces with a transitive norm, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **25** (1982), 353-357.

[Pa] J. R. PARTINGTON, Maximal norms on Banach spaces, *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), 55-56.

[PS] A. L. T. PATERSON y A. M. SINCLAIR, Characterisation of isometries between C^*-algebras, *J. London Math. Soc.* **5** (1972), 755-761.

[Pe] G. K. PEDERSEN, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.

[PR] A. PELCZYNSKI y S. ROLEWICZ, Best norms with respect to isometry groups in normed liner spaces, en *Short communications on International Math. Congress in Stockholm* (1962), p. 104.

[R1] A. RODRÍGUEZ, A Vidav-Palmer Theorem for Jordan C^*-algebras and related topics, *J. London Math. Soc.* (2), **22** (1980), 318-332.

[R2] A. RODRÍGUEZ, Nonassociative normed algebras spanned by hermitian elements, *Proc. London Math. Soc.* **47** (1983), 258-274.

[R3] A. RODRÍGUEZ, An aproach to Jordan-Banach algebras from the theory of nonassociative complete normed algebras, *Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal, Clermont II, Sér. Math.* **27** (1991), 1-57.

[R4] A. RODRÍGUEZ, Absolute-valued algebras of degree two. En *Non-associative algebra and its applications*, 350-356, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1994.

[R5] A. RODRÍGUEZ, Multiplicative characterization of Hilbert spaces and other interesting classes of Banach spaces, *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **9** (1996), 149-189.

[Ro] S. ROLEWICZ, *Metric linear spaces*, Reidel, Dordrecht, 1985.

[S] S. SAKAI, *C^*- and W^*-algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Se] Z. SEMADENI, *Banach spaces of continuous functions*, Monografie Matematyczne **55**, PWN, Warszawa 1971.

[SZ] A. SKORIK y M. ZAIDENBERG, On isometric reflexions in Banach spaces, *Math. Physics, Analysis, Geometry* **4** (1997), 212-247.

[St] L. L. STACHO, A projection principle concerning biholomorphic automorphisms, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **44** (1982), 99-124.

[Ta] S. K. TARASOV, Banach spaces with a homogeneous ball, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Matematika* **43** (1988), 62-64.

[Wo] P. WOJTASZCZYK, Some remarks on thle Gurarij space. *Studia Math.* **41** (1972), 207-210.

[W] G. V. WOOD, Maximal symmetry in Banach spaces, *Proc. Royal Irish Acad.* **82A** (1982), 177-186.

[Wr] J. D. M. WRIGHT, Jordan C^*-algebras, *Michigan Math. J.* **24** (1977), 291-302.