UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

APLICACIONES DE LIE EN ÁLGEBRAS DE BANACH.

TESIS DOCTORAL

María Isabel Berenguer Maldonado

Granada, 1999

Tesis Doctoral dirigida por el Doctor D. Armando R. Villena Muñoz, profesor del Departamento de Análisis Matemático, defendida por Dña. María Isabel Berenguer Maldonado el día 12 de Abril de 1999, ante el Tribunal formado por los siguientes profesores: D. Angel Rodríguez Palacios (Presidente), D. Garth Dales, D. José E. Galé Gimeno, D. Pere Ara Bertran (Vocales) y D. Miguel Cabrera García (Secretario). Obtuvo la calificación de Sobresaliente "cum laude" (por unanimidad).

A mi familia

A Francisco

Contenido.

Introducción.

La estructura de Lie inducida por el producto de Lie

$$[a, b] = ab - ba$$

en un álgebra de Banach ha despertado y despierta hoy en día gran interés por su íntima conexión con la geometría de variedades modeladas en espacios de Banach. Dos son fundamentalmente los tipos de aplicaciones que armonizan con la estructura de Lie inducida por tal producto: las derivaciones de Lie y los homomorfismos de Lie.

Sean A y B álgebras de Banach. Una *derivación de Lie* en A es una aplicación lineal D de A en A verificando que

$$D([a, b]) = [D(a), b] + [a, D(b)] \quad \forall a, b \in A.$$

Un *homomorfismo de Lie* de A en B es una aplicación lineal Φ de A en B verificando que

$$\Phi([a, b]) = [\Phi(a), \Phi(b)] \quad \forall a, b \in A.$$

Si d es una derivación (ordinaria) de A y τ es una aplicación lineal de A en el centro de A que aplica los conmutadores de A en cero, entonces $d + \tau$ es una derivación de Lie de A y es éste el modelo estandard de derivación de Lie. Por otra parte, si ϕ es un homomorfismo (ordinario) de A en B y τ es una aplicación lineal de A en el centro de B que aplica los conmutadores de A en el cero, entonces $\phi + \tau$ es el modelo estandard de homomorfismo de Lie de A en B. Una intensa actividad investigadora se ha llevado a cabo en la línea de estudiar cuan cercanas están las derivaciones y homomorfismos de Lie arbitrarios de poseer la estructura estandard antes descrita. Invitamos al lector a consultar los trabajos que seguidamente citamos:

- B. Banning y M. Mathieu [5], M. Brešar [17], L. Hua [38], W. S. Martindale [48, 51 y 52] entre otros, sobre la estructura de los isomorfismos de Lie en anillos.

- M. Brešar y C. R. Miers [20], C. R. Miers [59 y 61] sobre la estructura de los isomorfismos de Lie en álgebras de von Neumann, M. Mathieu [56] para C^*-álgebras más generales, y P. De la Harpe [33].

- R. Banning y M. Mathieu [5], M. Brešar [17 y 18], I. N. Herstein [36] y W. S. Martindale III [49] en el estudio de las derivaciones de Lie en anillos asociativos.

- P. De la Harpe [33], B. E. Johnson [42], M. Mathieu [56], y C. R. Miers [60 y 62] sobre derivaciones de Lie en algunas clases muy particulares de álgebras de Banach.

El objetivo fundamental de la presente Memoria es el estudio del comportamiento analítico de las aplicaciones de Lie en álgebras de Banach. Desgraciadamente, los resultados relativos a la estructura de las aplicaciones de Lie que encontramos en los trabajos antes reseñados son ineficientes para estudiar el comportamiento analítico de las aplicaciones de Lie en álgebras de Banach arbitrarias. Por este motivo nos vemos obligados a obtener teoremas de estructura para las aplicaciones de Lie en álgebras de Banach que son susceptibles de ser utilizados para el estudio de la continuidad de éstas. El estudio de la estructura algebraica lo llevamos a cabo en el primer capítulo de esta Memoria y el resto de ésta lo dedicamos al estudio de la continuidad de los isomorfismos y de las derivaciones de Lie en las álgebras de Banach semisimples arbitrarias.

En la segunda sección del primer capítulo, que dedicamos al estudio de la estructura de las derivaciones e isomorfismos de Lie en álgebras de Banach, recordamos algunas cuestiones fundamentales acerca del centroide extendido. El centroide extendido (véase [1, 2, 7, 25, 31, 50, 51 y 72]) es una herramienta fundamental en el estudio de la estructura de las álgebras primas y de la estructura de las aplicaciones de Lie sobre éstas. En este ámbito, el centroide extendido es un cuerpo extensión del cuerpo base, resultando especialmente interesante cuando el centroide extendido se reduce al cuerpo, en cuyo caso el álgebra se llama centralmente cerrada. Nos parece relevante señalar que esta condición acontece para las álgebras de Banach complejas primitivas y para las C^*-álgebras primas.

En la tercera sección del primer capítulo el lector encontrará un teorema de estructura de la traza de una aplicación bilineal en un álgebra de Banach verificando una determinada "propiedad de conmutatividad". Concretamente, si A un álgebra de Banach, y L de $A \times A$ en A es una aplicación bilineal, estudiaremos la estructura de la aplicación q de A en A, llamada *traza* de L, definida por

$$q(a) = L(a, a)$$

cuando q verifica la condición

$$[q(a), a] = 0 \quad \forall a \in A.$$

El resultado al que nos referimos será una de las herramientas fundamentales en el estudio de la estructura de las aplicaciones de Lie. La razón para ello es desvelada inmediatamente.

a) Si D es una derivación de Lie en un álgebra de Banach A entonces la aplicación q definida en A como

$$q(a) = D(a^2) - (Da)a - a(Da)$$

es la traza de la aplicación bilineal de $A \times A$ en A definida por

$$L(a, b) = D(ab) - (Da)b - a(Db)$$

y satisface la propiedad $[q(a), a] = 0$ para todo $a \in A$.

b) Si $\Phi : A \to B$ es un isomorfismo de Lie de un álgebra de Banach A sobre otra álgebra de Banach B entonces la aplicación q definida en B como

$$q(b) = \Phi((\Phi^{-1}(b))^2)$$

es la traza de la aplicación bilineal de $B \times B$ en B definida por

$$L(b_1, b_2) = \Phi(\Phi^{-1}(b_1)\Phi^{-1}(b_2))$$

y verifica que $[q(b), b] = 0$ para todo $b \in B$.

Muchos han sido los trabajos publicados sobre la estructura de las aplicaciones f (especialmente derivaciones y endomorfismos) en anillos primos que satisfacen $[f(x), x] = 0$ o $[f(x), x] \in Z(R)$ desde que en [65], E. C. Posner iniciara el estudio de las aplicaciones f de un anillo R en sí mismo verificando la propiedad $[f(x), x] = 0$, para todo $x \in R$. Citamos la siguientes referencias en este tema [5, 9, 10, 15, 16, 18, 21 22, 46 y 83]. Sin embargo la aportación más notable se debe a Brešar, quien probó el siguiente teorema de estructura para las trazas antes comentadas.

TEOREMA 1.9 ([17; Teorema 1]). *Sea R un anillo primo de característica distinta de 2 y sea $q : R \to R$ la traza de una aplicación biaditiva. Supongamos que q verifica que $[q(x), x] = 0$ para cualquier $x \in R$. Si R no satisface la identidad polinómica S_4 entonces q es de la forma*

$$q(x) = \lambda x^2 + \mu(x)x + \nu(x) \quad \forall x \in R$$

donde λ es un elemento de $C(R)$, μ es una aplicación aditiva de R en $C(R)$ y ν es una aplicación de R en $C(R)$, donde $C(R)$ denota al centroide extendido de R.

Con el resultado anterior Brešar consigue obtener formidables teoremas de estructura para los isomorfismos de Lie y las derivaciones de Lie en anillos primos que en breve presentaremos. A pesar de ser resultados realmente sobresalientes no resultan ser útiles para el estudio de la continuidad de las derivaciones e isomorfismos. Sin embargo al adentrarnos en la técnica usada por Brešar en la demostración de éstos descubrimos el teorema de estructura que exponemos a continuación y que constituye nuestra primera aportación al tema.

TEOREMA 1.10. *Sea A un álgebra de Banach compleja unital, P un ideal primitivo de A de manera que A/P no satisface la identidad polinómica S_4 y $q : A \to A$ la traza de una aplicación bilineal de A verificando que $[q(a), a] = 0$ para todo $a \in A$. Existen entonces un número complejo λ, un funcional lineal μ en A y un funcional ν en A, satisfaciendo que*

$$q(a) - (\lambda a^2 + \mu(a)a + \nu(a)\mathbf{1}) \in P$$

para todo $a \in A$.

A partir del Teorema 1.9, Brešar obtiene el siguiente teorema de estructura para los isomorfismos de Lie entre anillos primos:

TEOREMA 1.12 ([17; Teorema 3]). *Sean R y R' dos anillos primos de característica distinta de 2 que no satisfacen la identidad polinómica S_4. Si $\Phi : R \to R'$ es un isomorfismo de Lie, entonces Φ es de la forma $\varphi + \xi$ donde φ es un homomorfismo o el opuesto de un antihomomorfismo de R en la clausura central de R', φ es inyectiva y ξ es una aplicación aditiva de R en $C(R')$ que aplica los conmutadores en cero.*

Imitando de nuevo las técnicas usadas por Brešar, nosotros obtenemos a partir del Teorema 1.10 el siguiente teorema de estructura para los isomorfismos de Lie entre álgebras de Banach (no necesariamente primas) que será la base para el estudio de la continuidad de éstos.

TEOREMA 1.15. *Sean A y B álgebras de Banach complejas unitales, Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B y P un ideal primitivo de B. Se satisface entonces una de las siguientes afirmaciones:*

i. *B/P es isomorfo a $\mathbb{C}$.*

ii. *B/P es isomorfo al álgebra de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.*

iii. *Existe un funcional lineal μ sobre A verificando que*

$$\pi_P\Phi(a^2) - \mu(a)\pi_P\Phi(a) \in Z(B/P)$$

para todo $a \in A$.

iv. *Existe un homomorfismo continuo φ de A sobre B/P, una aplicación lineal ξ de A en el centro de B/P y $\alpha \in \mathbb{C}$ verificando que*

$$\pi_P\Phi = \alpha\varphi + \xi.$$

v. *Existe un antihomomorfismo continuo φ de A sobre B/P, una aplicación lineal ξ de A en el centro de B/P y $\alpha \in \mathbb{C}$ verificando que*

$$\pi_P\Phi = \alpha\varphi + \xi.$$

Terminaremos este largo y sustancioso primer capítulo con el estudio de la estructura de las derivaciones de Lie. También durante los últimos años se han hecho considerables esfuerzos en el estudio de la estructura de las derivaciones de Lie en anillos y en álgebras de Banach. El teorema obtenido por Brešar en [17] acerca de esta cuestión y cuyas técnicas de demostración también imitamos es el siguiente:

TEOREMA 1.17 ([17; Teorema 5]). *Sea R un anillo primo de característica distinta de 2. Supongamos que $D : R \to R$ es una derivación de Lie de R. Si R no satisface la identidad polinómica S_4 entonces D es de la forma*

$$D = d + \xi$$

donde d es una derivación de R en su clausura central y ξ es una aplicación aditiva de R en $C(R)$ que aplica los conmutadores en cero.

Nuestra aportación al estudio de la estructura de una derivación de Lie y que constituirá la base de nuestro estudio analítico quedará plasmado en el siguiente resultado:

TEOREMA 1.21. *Sean A un álgebra de Banach compleja unital, D una derivación de Lie en A y P un ideal primitivo de A. Entonces se verifica una de las siguientes condiciones:*

i. El cociente A/P es isomorfo al álgebra de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

ii. Existen una derivación d de A en A/P y una aplicación lineal ξ de A en el centro de A/P verificando que

$$\pi_P D = d + \xi.$$

En el segundo capítulo, comenzamos el estudio de la continuidad de las aplicaciones de Lie. La continuidad automática es una disciplina que se ocupa principalmente de investigar la continuidad de operadores f actuando entre dos espacios de Banach X e Y sobre los que acontece alguna perfección de naturaleza algebraica. Es ésta una disciplina principal en el campo de las álgebras de Banach, en la que existe una cantidad ingente de investigación. La mejor orientación en el tema la descubrirá el lector en la obra de Dales [29] (libro de próxima aparición) en donde podrá encontrar un excelente relato acerca de esta materia.

La continuidad de las derivaciones y de los homomorfismos constituye un problema fundamental en el campo de las álgebras de Banach. Más aún, el estudio de las derivaciones e isomorfismos en álgebras de Banach, y fundamentalmente en C*-álgebras, es una importantísima cuestión por su íntima conexión con algunos modelos matemáticos de los sistemas dinámicos. No debemos olvidar tampoco el papel protagonista que los isomorfismos y derivaciones de Lie desempeñan en la

Geometría Diferencial. Tres son los tipos de derivaciones consideradas tradicionalmente: derivaciones, derivaciones de Jordan y derivaciones de Lie asociadas, estas últimas, a las estructuras de Jordan y de Lie del álgebra y tres los tipos de isomorfismos: isomorfismos, isomorfismos de Jordan e isomorfismos de Lie.

Un artilugio de uso habitual en los problemas de continuidad automática es el *subespacio separador*. Concretamente si X e Y son dos espacios normados y F es un operador lineal de X en Y, el *subespacio separador* de F, que será denotado por $\mathcal{S}(F)$, es el subespacio vectorial de Y definido por

$$\mathcal{S}(F) = \{y \in Y : \exists\{x_n\} \text{ en } X \text{ tal que } \lim x_n = 0 \text{ y } \lim F(x_n) = y\}.$$

Es éste un subespacio cerrado de Y que mide la continuidad del operador F cuando éste actúa entre espacios de Banach. Concretamente, el Teorema de la Gráfica Cerrada establece que cuando X e Y son espacios de Banach entonces F es continuo si, y sólo si, $\mathcal{S}(F) = 0$.

En lo que respecta a la continuidad de los homomorfismos, nuestro conocimiento al respecto es bastante completo y satisfactorio desde que B. E. Johnson probara en [40] que la continuidad automáticamente acontece para cualquier epimorfismo de un álgebra de Banach sobre un álgebra de Banach semisimple. Esta misma cualidad fue obtenida por B. Aupetit en el contexto de las álgebras de Jordan-Banach (véase [3 y 4]). Remitimos también al lector a [69] en donde A. Rodríguez proporciona la más definitiva y general respuesta al problema.

El objetivo de la primera sección del segundo capítulo es estudiar la continuidad de los isomorfismos de Lie entre álgebras de Banach semisimples cualesquiera. La investigación que llevamos a cabo culmina con la demostración del siguiente teorema que demostramos en [13].

TEOREMA 2.4. *Sean A y B álgebras de Banach semisimples y sea Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B. Entonces el subespacio separador de Φ está contenido en el centro de B. Consecuentemente, Φ es continuo si el centro de B es trivial.*

Para la prueba del anterior teorema mostraremos que para cualquier ideal primitivo P de B se verifica la inclusión $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$. Relatamos brevemente la técnica usada para este menester. La prueba se reduce como es lógico al caso de álgebras de Banach complejas unitales. En este caso, [69; Proposición 1.9] que asegura que si A y B son dos álgebras (no necesariamente asociativas) normadas completas y Φ es un isomorfismo de A sobre B entonces el subespacio separador de Φ está incluido en el radical débil de B, nos permite obtener fácilmente la inclusión cuando P tiene codimensión finita y obtener el siguiente resultado.

LEMA 2.8. *Sean A y B álgebras de Banach complejas, Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B y P un ideal primitivo de B de codimensión finita. Entonces $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$.*

Para el estudio de la inclusión $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$ cuando P es un ideal primitivo de codimensión infinita, el teorema de estructura de los isomorfismos de Lie en álgebras de Banach que enunciamos anteriormente será la herramienta fundamental. Obtendremos a partir de éste el siguiente resultado:

LEMA 2.9. *Sean A y B álgebras de Banach complejas unitales y Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B. Entonces se verifica que*

$$\Phi([[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]]) \in \mathrm{Rad}(B)$$

para cualesquiera $a_1 \in A$ y $a_2 \in \Phi^{-1}(\mathcal{S}(\Phi))$. En consecuencia, si B es semisimple, entonces se verifica que $[[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]] = 0$ para cualesquiera $a_1 \in A$ y $a_2 \in \Phi^{-1}(\mathcal{S}(\Phi))$.

El Lema 2.9 lo demostramos sin problema en los casos *i*, *ii*, *iv* y *v* del Teorema 1.15. El caso de especial interés es el caso en que se verifica la condición *iii* del teorema citado. Aplicando el Lema 2.9 al isomorfismo

Φ^{-1} y dada la semisimplicidad del álgebra A obtenemos que

$$[[b_1^2, b_2], [b_1, b_2]] = 0$$

para cualesquiera $b_1 \in B$ y $b_2 \in \Phi(\mathcal{S}(\Phi^{-1}))$ y en consecuencia deducimos que $\pi_P\mathcal{S}(\Phi) \subset Z(B/P)$ o bien $\dim(B/P) < \infty$. En la primera situación será $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$, como se requiere. En la segunda situación aplicamos el Lema 2.8 para obtener que $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$.

La continuidad de las derivaciones ordinarias es también uno de los más clásicos problemas planteados en el marco de las álgebras de Banach. Desde que Singer y Wermer probaron que la imagen de una derivación continua de un álgebra de Banach conmutativa está contenida en el radical, los investigadores en álgebras de Banach han estudiado con gran intensidad y animosidad cuándo la continuidad acontece automáticamente. B. E. Johnson en [41] demostró la continuidad de cualquier derivación en un álgebra de Banach conmutativa semisimple, resultado que fue extendido por el propio B. E. Johnson y por A. M. Sinclair en [43] demostrando que cualquier derivación en un álgebra de Banach semisimple es continua. Por otro lado la continuidad de las derivaciones de Jordan también ha suscitado gran interés desde que A. M. Sinclair conjeturara que toda derivación de Jordan en un álgebra de Banach semisimple es continua. Este resultado que fue encontrado cierto, como consecuencia del Teorema de Johnson y Sinclair, cuando en 1975, J. M. Cusak en [26] probó que toda derivación de Jordan en un anillo semiprimo libre de 2 torsión es una derivación ordinaria. El antes mencionado teorema de Johnson y Sinclair fue extendido al ámbito de las álgebras de Jordan-Banach por A. R. Villena en [81].

Como precedentes más directos en la continuidad de derivaciones de Lie podemos establecer el trabajo de P. de la Harpe [33], en el que consigue demostrar la continuidad de las derivaciones sobre álgebras de Banach-Lie clásicas de operadores sobre espacios de Hilbert. En la primera sección del tercer capítulo presentamos nuestra aportación al estudio de la continuidad de las derivaciones de Lie en álgebras de

Banach generales que aparece en [11].

TEOREMA 3.4. *Sea D una derivación de Lie en un álgebra de Banach semisimple A. Entonces el subespacio separador de D está contenido en el centro de A. En consecuencia, D es continua si el centro de A es cero.*

La línea de demostración para la prueba del resultado anterior que seguimos es muy clásica. Ésta es conocida con el nombre de "*gliding hump procedure*". A grandes rasgos el procedimiento consta de dos partes. La parte algebraica es presentada a continuación.

LEMA 3.5 ([43; Teorema 2.2]). *Sea A un álgebra de Banach y X un A-módulo izquierdo de Banach irreducible de dimensión infinita. Existen entonces sucesiones $\{a_n\}$ en A, y $\{x_n\}$ en X verificando las siguientes propiedades:*

i. $a_n \cdots a_1 x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii. $a_{n+1} a_n \cdots a_1 x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

El sustento analítico es proporcionado por el siguiente resultado que ilustra uno de los principios fundamentales en continuidad automática.

LEMA 3.6 ([79; Proposición 1.3]). *Sean X e Y espacios de Banach, $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores lineales y continuos de X en sí mismo y para cada natural n, sea R_n un operador lineal continuo de Y en otro espacio de Banach Y_n. Si F es un operador lineal de X en Y tal que*

$$R_n F T_1 \cdots T_m \text{ es continuo para } m > n,$$

existe entonces un natural N tal que

$$R_n F T_1 \cdots T_n \text{ es continuo para } n \geq N.$$

El teorema de estructura obtenido para las derivaciones de Lie en álgebras de Banach junto con los resultados antes enunciados nos sirve para probar que $[\mathcal{S}(D), A] \subset P$ para los ideales primitivos P de A de codimensión infinita, situación que se recoge en el Lema 3.7. Para el estudio de la inclusión cuando P es un ideal primitivo de codimensión finita efectuamos en el caso de no satisfacerse la inclusión deseada, una curiosa contrucción de una sucesión de ideales primitivos $\{P_n\}$ de A y una sucesión de elementos $\{a_n\}$ de A satisfaciendo las siguientes condiciones para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

i. $[A, \mathcal{S}(D)] \not\subset P_n$,

ii. $a_n \in I_{n-1}$, donde $I_n = I_0 \cap P_1 \cap \cdots \cap P_n$, siendo

$$I_0 = \bigcap_{\substack{P \text{ ideal primitivo,} \\ [\mathcal{S}(D), A] \subset P}} P,$$

iii. $\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_n(A) \not\subset P_n$.

Las sucesiones obtenidas nos permiten finalmente aplicar el "*gliding hump procedure*" para llegar a una contradicción.

Las segundas secciones de los capítulos segundo y tercero están dedicadas al estudio de las aplicaciones de Lie definidas en la parte antisimétrica de un álgebra de Banach con involución lineal. Si A es un álgebra con involución lineal $*$, entonces

$$K_A = \{a \in A : a^* = -a\}$$

es un álgebra de Lie. En esta Memoria estudiamos las derivaciones e isomorfismos de las álgebras de este tipo y obtenemos los siguientes resultados fundamentales que demostramos en [12].

TEOREMA 2.12. *Sean A y B álgebras de Banach complejas primas centralmente cerradas con involución lineal y supongamos que A es* *además semisimple. Si Φ es un isomorfismo de Lie de K_B sobre K_A, entonces Φ es continuo.*

TEOREMA 3.10. *Sea D una derivación de Lie de la parte antisimétrica de un álgebra de Banach compleja semisimple prima centralmente cerrada con involución lineal A. Entonces D es continua.*

Aunque las referencias en lo que concierne al estudio de las aplicaciones de Lie definidas en la parte antisimétrica de un anillo con involución son diversas (véanse [8, 53 y 70]), la inspiración para considerar este tipo de problemas reside en el trabajo de P. de la Harpe [33]. En él aparece un estudio detallado acerca de las álgebras de Banach-Lie clásicas de operadores acotados y de operadores compactos. Recordamos éstas brevemente. Sea H un espacio de Hilbert complejo y denotemos por $L(H)$ a la C^*-álgebra primitiva de todos los operadores lineales y continuos en H. Para cada $a \in L(H)$, sea $a^\bullet$ el operador adjunto de a. Si J es una conjugación en H, la aplicación $*$ de $L(H)$ en sí mismo definida por $a^* = Ja^\bullet J$ es una involución lineal en $L(H)$ y si J es una anticonjugación de H, entonces la aplicación $a^* = -Ja^\bullet J$ es también una involución lineal en $L(H)$. Los elementos antisimétricos relativos a las precedentes involuciones son álgebras de Banach-Lie complejas clásicas de operadores acotados. Por otro lado, sea C_∞ el conjunto de todos los operadores lineales compactos en H, y $\|\cdot\|_\infty$ la norma usual de operadores. Para $1 \leq p < \infty$, sea C_p la clase de los operadores lineales compactos a de H para los que $\|a\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^p)^{1/p} < \infty$, donde $\{\mu_n\}$ es la sucesión de valores propios del operador $(a^\bullet a)^{1/2}$ ordenada de manera decreciente y considerando cada valor propio tantas veces como indique su multiplicidad. Es bien conocido que C_p es un ideal bilátero de $L(H)$ y que C_p es un álgebra de Banach compleja primitiva para la norma $\|\cdot\|_p$. Las involuciones introducidas anteriormente dejan invariante a C_p y sus partes antisimétricas son álgebras de Banach-Lie complejas clásicas de operadores compactos.

En el trabajo de P. De la Harpe citado con anterioridad, el autor probó que todos los $*$-automorfismos de Lie y todas las derivaciones de Lie de las álgebras de Banach-Lie de los ejemplos anteriores son continuos.

Estos resultados aparecen ahora como consecuencia de nuestro teorema ya que todas las álgebras consideradas en los ejemplos anteriores son complejas y primitivas y en consecuencia son centralmente cerradas. Además los Teoremas 2.12 y 3.10 serán particularizados al ámbito de las C^*-álgebras primas y las álgebras de Banach complejas primitivas (puesto que en estas situaciones sabemos que las álgebras son centralmente cerradas) para obtener los siguientes corolarios:

COROLARIO 2.13. *Los automorfismos de Lie de la parte antisimétrica de un álgebra de Banach compleja primitiva con involución lineal son continuos.*

COROLARIO 2.14. *Los automorfismos de Lie de la parte antisimétrica de una C^*-álgebra prima con involución lineal son continuos.*

COROLARIO 3.11. *Cualquier derivación de Lie en la parte antisimétrica de un álgebra de Banach compleja primitiva con involución lineal es continua.*

COROLARIO 3.12. *Cualquier derivación de Lie de la parte antisimétrica de una C^*-álgebra prima con involución lineal es continua.*

Desde que Singer y Wermer [76] conjeturaran que la imagen de una derivación de un álgebra de Banach conmutativa está contenida en el radical del álgebra, conjetura que fue probada por M. P. Thomas en [78], muchas han sido las generalizaciones no conmutativas del teorema de Singer-Wermer y del teorema de Thomas (véase [15, 19, 23, 55, 57, 58, 73, 84 y 85]). En la tercera sección del tercer capítulo (y última de la Memoria) abordamos uno de los problemas fundamentales en la teoría actual de álgebras de Banach, el conocido como conjetura de Singer-Wermer no conmutativa. Una de sus posibles formulaciones es la siguiente: si d es una derivación de un álgebra de Banach A, verificando la propiedad $[a, d(a)] \in \mathrm{Rad}(A)$ para todo $a \in A$, ¿ha de satisfacerse que $d(A) \subset \mathrm{Rad}(A)$?

Para una derivación de Lie D en un álgebra de Banach A, en el mejor de los casos existirá una derivación d de A y una aplicación lineal τ de A en el centro de A de manera que $D = d + \tau$. En estas circunstancias la propiedad $[a, D(a)] \in \mathrm{Rad}(A)$ se traducirá en el hecho de que $[a, d(a)] \in \mathrm{Rad}(A)$ lo cual debiera de conducir a que $d(A) \subset \mathrm{Rad}(A)$ y en consecuencia $D(A) \subset \mathrm{Rad}(A) + Z(A)$.

Para $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a, b \in A$ denotaremos

$$[a, b]_k = [a, [a, b]_{k-1}]$$

siendo $[a, b]_1 = [a, b]$.

Demostraremos el siguiente teorema recogido en [14], el cual constuye una respuesta a una variante natural de la conjetura de Singer-Wermer no comuntativa.

TEOREMA 3.13. *Sea A un álgebra de Banach y sea D una derivación de Lie en A verificando para algún $k \in \mathbb{N}$ que $[a, D(a)]_k \in \mathrm{Rad}(A)$ para todo $a \in A$. Entonces $[D(A), A] \subset \mathrm{Rad}(A)$.*

Para llevar a cabo la tarea de demostrar el resultado anunciado, además de nuestro teorema de estructura para las derivaciones de Lie es fundamental el siguiente teorema de C. Lanski [47].

TEOREMA 3.14. ([47; Teorema 1]). *Sean D una derivación no cero en un anillo primo R e I un ideal no cero de R tales que para cierto $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$[r, D(r)]_k = 0 \quad \forall r \in I.$$

Entonces R es conmutativo.

El resultado anterior nos permitió probar que si la derivación verifica para cierto $k \in \mathbb{N}$ fijo que $[a, D(a)]_k \in \mathrm{Rad}(A)$ para todo $a \in A$, también en el caso *i* del Teorema 1.21 se obtiene una descomposición de la misma forma que en *ii*. Concretamente probamos el siguiente resultado:

LEMA 3.15. *Sean A un álgebra de Banach compleja unital y sea D una derivación de Lie de A verificando para algún $k \in \mathbb{N}$ que*

$$[a, D(a)]_k \in \mathrm{Rad}(A) \text{ para todo } a \in A.$$

Si P es un ideal primitivo de A, entonces existen una derivación d de A en A/P y una aplicación lineal ξ de A en $Z(A/P)$ tales que

$$\pi_P D = d + \xi.$$

Usando técnicas similares a las usadas en el Lema 3.15 demostramos lo siguiente:

LEMA 3.16. *Sean A un álgebra de Banach compleja, P un ideal primitivo de A y d una derivación de A en A/P verificando para algún $k \in \mathbb{N}$ que*

$$[a, d(a)]_k = 0 + P$$

para cualquier $a \in A$. Entonces se satisface una de las siguientes condiciones:

i. *El álgebra A/P es isomorfa a $\mathbb{C}$.*

ii. $d(P) = 0 + P$.

Finalmente todos los ingredientes anteriores entran en juego para demostrar el Teorema 3.13 en el caso complejo unital. Para el caso general se procede como es habitual a unitizar y complexificar el álgebra.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis agradecimientos más sinceros, en primer lugar, y muy especialmente, a mi director de tesis, el profesor Dr. D. Armando R. Villena Muñoz, por su acertada dirección, su ayuda inestimable y supervisión, durante todo el proceso seguido a lo largo de la realización de este proyecto. Su extraordinaria capacidad, preparación y calidad humana hacen que sienta hacia él una inmensa gratitud y admiración.

Gracias también, a los compañeros de los Departamentos de Análisis Matemático y de Matemática Aplicada, que me han facilitado la labor y me han apoyado.

Y por último, a toda mi familia, por su comprensión, y especialmente a mis padres, a mis abuelos y a Francisco, que con su apoyo entusiasta, me dieron ánimo en todo momento.

A todos, GRACIAS

María Isabel Berenguer.

Capítulo 1

Estructura de las aplicaciones de Lie en álgebras de Banach.

DEFINICIÓN 1.1. Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach real o complejo A provisto de un producto asociativo verificando la propiedad

$$||ab|| \leq ||a|| ||b||$$

para cualesquiera a y b de A.

Si X es un espacio de Banach, entonces el espacio de Banach $L(X)$ de los operadores lineales y continuos sobre X es, con la composición por producto, un álgebra de Banach que constituye, junto con sus subálgebras cerradas los ejemplos más significativos de álgebras de Banach no conmutativas. Cuando X es un espacio de Hilbert complejo, el álgebra de Banach $L(X)$ se ve enriquecida con una involución: la adjunción de operadores. La adjunción $*$ verifica la siguiente propiedad fundamental

$$||a^*a|| = ||a||^2 \quad \forall a \in L(X).$$

Una C*-*álgebra* es un álgebra de Banach compleja A con una involución de álgebra $*$, esto es $*$ es conjugado-lineal, $a^{**} = a$ y $(ab)^* = b^*a^*$ $\forall a, b \in A$, verificando

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A.$$

Para un espacio de Hilbert complejo H, las subálgebras cerradas y autoadjuntas de $L(H)$ son el prototipo de C*-álgebras. El Teorema de Gelfand-Naimark [32] asegura que toda C*-álgebra resulta ser totalmente isomorfa a una de las C*-álgebras antes presentadas.

La perfección del producto de un álgebra de Banach A puede ser medida mediante la consideración de su radical, que a partir de ahora designaremos por Rad(A). A grandes rasgos Rad(A) permite conocer cuan fielmente puede representarse A mediante álgebras de Banach del tipo $L(X)$. Si X es un espacio de Banach, entonces una *representación de A en X* es un homomorfismo φ de A en $L(X)$. En tal caso X quedará provisto de una estructura de A-módulo de Banach definiendo el siguiente producto

$$ax = \varphi(a)(x) \quad \forall a \in A, x \in X.$$

Cuando este A-módulo sea *irreducible*, esto es cuando $AX \neq 0$ y 0 y X sean los únicos submódulos de X, diremos que la representación φ es *irreducible*. En esta situación Ker(φ) es un ideal primitivo de A y es bien conocido que Rad(A) coincide con la intersección de todos los ideales primitivos de A.

1.1 La estructura de Lie de un álgebra de Banach.

El producto de Lie

$$[a, b] = ab - ba$$

induce en cualquier álgebra de Banach una estructura de Lie de gran interés por su conexión con la geometría de las variedades diferenciales modeladas en espacios de Banach. Más concretamente, si A es un álgebra asociativa y reemplazamos el producto asociativo ab por el producto de Lie:

$$[a, b] = ab - ba \quad \text{para cualesquiera } a, b \in A$$

obtenemos la llamada *álgebra de Lie asociada a* A, que denotamos A^-. De modo natural, podemos considerar las subálgebras del álgebra A^-, llamadas *subálgebras de Lie de* A, es decir los subespacios de A que contienen el producto de Lie de cualesquiera dos de sus elementos. Unos muy interesantes ejemplos de subálgebras de Lie aparecen cuando en el álgebra se considera una involución lineal $*$. En esta situación el conjunto de elementos antisimétricos, que denotaremos

$$K_A = \{a \in A : a^* = -a\}$$

es naturalmente una subálgebra de Lie de A.

Obsérvese que la forma más elemental de medir la perfección del producto de Lie de un álgebra de Banach consiste en considerar su centro

$$Z(A) := \{a \in A : [a, A] = 0\}.$$

En esta Memoria estamos interesados en el estudio de la estructura de Lie de un álgebra de Banach y más concretamente de ciertas aplicaciones que de alguna manera preservan la estructura de Lie inducida por el producto

$$[a, b] = ab - ba.$$

Dos son los tipos de aplicaciones consideradas con tal perfección: las derivaciones de Lie y los homomorfismos de Lie.

DEFINICIÓN 1.2. Si A es un álgebra asociativa, una *derivación de Lie* en A es una derivación del álgebra A^-, es decir una aplicación lineal

D de A en A verificando que

$$D([a,b]) = [D(a),b] + [a,D(b)]$$

para cualesquiera elementos a y b de A.

Naturalmente cualquier derivación (ordinaria) de A es también una derivación de Lie de A. Si d es una derivación de A y τ es una aplicación lineal de A en $Z(A)$ que aplica los conmutadores en el cero entonces también el operador $D = d + \tau$ es una derivación de Lie de A. Si $a \in A$, denotaremos por $\mathrm{ad}(a)$ a la *derivación interna determinada por a*, esto es a la derivación de A definida por

$$\mathrm{ad}(a)(b) = ab - ba \quad \forall b \in A.$$

DEFINICIÓN 1.3. Si A y B son álgebras asociativas, un *homomorfismo de Lie* de A en B es un homomorfismo de A^- en B^-, es decir una aplicación lineal Φ de A en B que verifica la propiedad

$$\Phi([a,b]) = [\Phi(a),\Phi(b)]$$

para cualesquiera a y b de A.

Igual que sucede con las derivaciones de Lie, cualquier homomorfismo (ordinario) de A en B es un homomorfismo de Lie y también los homomorfismos de Lie típicos son aquellos de la forma $\varphi + \tau$ siendo φ un homomorfismo de A en B y τ una aplicación lineal de A en el centro de B que aplica los conmutadores de A en el cero.

Una cuestión fundamental en la que se desarrolla una intensa actividad consiste en estudiar cuan próximas están las derivaciones y homomorfismos de Lie de tener la forma típica ya descrita. Dos son los objetivos fundamentales de este capítulo: por un lado, el estudio de la estructura de los isomorfismos de Lie y por otro, el estudio de la estructura de las derivaciones de Lie en álgebras de Banach. Con los propósitos mencionados, haremos una breve revisión de algunas cuestiones básicas acerca de las nociones de centroide extendido e identidades polinómicas. Estas cuestiones las consideramos imprescindibles para la consecución de los objetivos señalados.

1.2 Centroide extendido e identidades polinómicas.

El centroide extendido es una noción fundamental en el estudio de la estructura de las álgebras primas y de la estructura de las aplicaciones de Lie sobre éstas. En este ámbito, el centroide extendido es un cuerpo extensión del cuerpo base, siendo especialmente interesante el hecho de que el centroide extendido se reduzca al cuerpo base, en cuyo caso el álgebra se llamará centralmente cerrada. El concepto de centroide extendido fue introducido en 1969 por W. S. Martindale III en [50] para anillos primos con el propósito de caracterizar los anillos que verifican una identidad polinómica generalizada. La utilidad de esta noción fue también puesta de manifiesto por Martindale en [51] en el estudio de la estructura de los isomorfismos de Lie en anillos primos. Posteriormente el concepto de centroide fue introducido en el ambiente de las álgebras no asociativas primas e incluso semiprimas por el propio Martindale y otros (véanse [1, 7, 31 y 72]).

En lo que sigue A denotará un álgebra prima. Un *centralizador parcialmente definido* de A es un operador lineal f definido en un ideal no cero de A (llamado dominio de f y denotado por $dom(f)$) y con valores en A verificando la siguiente propiedad:

$$f(ab) = af(b) \quad \text{y} \quad f(ba) = f(b)a$$

para cualesquiera elementos $a \in A$ y $b \in dom(f)$.

Si f y g son dos centralizadores parcialmente definidos de A, definimos la suma $f+g$ como el nuevo centralizador parcialmente definido en

A definido por

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

en $dom(f+g) = dom(f) \cap dom(g)$, y definimos el producto fg como el nuevo centralizador parcialmente definido en A, definido por

$$(fg)(a) = f(g(a))$$

en $dom(fg) = \{a \in dom(g) : g(a) \in dom(f)\}$.

La relación

$$f \sim g \Leftrightarrow f(a) = g(a), \quad \forall a \in dom(f) \cap dom(g)$$

es una relación de equivalencia en el conjunto de los centralizadores parcialmente definidos de A que además es compatible con las operaciones antes definidas. El *centroide extendido*, $C(A)$, de A se define clásicamente como el conjunto cociente con las operaciones inducidas. En [25] se comprobó que para cada centralizador parcialmente definido f de A, existe un único centralizador parcialmente definido maximal g de A que es una extensión de f, donde la maximalidad se entiende en el sentido de que no existen centralizadores parcialmente definidos de A que extiendan estrictamente a g. Este hecho permite considerar $C(A)$ como el conjunto de los centralizadores parcialmente definidos maximales de A, definiendo la suma y el producto de dos centralizadores parcialmente definidos maximales en A como el único centralizador parcialmente definido maximal de A que extiende la suma y el producto usuales, respectivamente.

El conjunto de los centralizadores totalmente definidos de A constituye un subanillo de $C(A)$ que recibe el nombre de *centroide* de A y se denota $\Gamma(A)$.

Es claro que para cualquier escalar α el operador αId_A es un centralizador totalmente definido de A, por lo que podemos considerar que $\mathbb{K} \subset C(A)$. Cuando sea $\mathbb{K} = C(A)$, diremos que A es *centralmente cerrada*. Es ésta una propiedad fundamental en el estudio que realizamos en la presente Memoria de la estructura de las aplicaciones de Lie en las álgebras de Banach y puede ser formulada de la siguiente manera: cualquier aplicación lineal f definida en un ideal bilátero I de A y con valores en A satisfaciendo la propiedad

$$f(ab) = af(b) \quad \text{y} \quad f(ba) = f(b)a$$

para cualesquiera $a \in A$ y $b \in I$ es necesariamente de la forma αId para conveniente escalar α.

Nos parece pertinente recordar que "agrandando" el cuerpo base al centroide extendido, y el álgebra a la llamada *clausura central*, $AC(A) + C(A)$, cada álgebra prima se convierte en un álgebra prima centralmente cerrada.

EJEMPLOS 1.4.

1. Resultará de suma importancia a lo largo de esta Memoria, la notable propiedad de que toda álgebra de Banach compleja primitiva es centralmente cerrada. Este hecho se desprende inmediatamente de [51; Teorema 12] y será frecuentemente usado en lo sucesivo.

2. En [2] P. Ara muestra una descripción del centroide extendido de una C*-álgebra y consecuencia del cual obtiene la importante propiedad de que las C*-álgebras primas son centralmente cerradas. En [54] se obtiene también una demostración de este hecho.

DEFINICIÓN 1.5. Un *polinomio de variables no conmutativas* es una combinación lineal finita de monomios donde cada monomio es un producto finito de símbolos. El *grado de un polinomio* de variables no conmutativas es la longitud de su monomio "más largo". La *identidad polinómica standard* en n variables se define como:

$$S_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\alpha \in \Sigma_n} sgn(\alpha) x_{\alpha(1)} x_{\alpha(2)} \cdots x_{\alpha(n)}$$

donde Σ_n es el grupo de todas las permutaciones de $\{1, 2, ..., n\}$ y $sgn(\alpha)$ es +1 o -1 dependiendo de si α es par o impar. Evidentemente la identidad standard S_n es de grado n y es multilinear y alternada.

DEFINICIÓN 1.6. Sea A un álgebra y sea $P = P(x_1, x_2, ..., x_n)$ un polinomio de variables no conmutativas. Se dice que A satisface la *identidad polinómica* P si $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ para cualesquiera $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.

El resultado más importante en el campo de las identidades polinómicas en álgebras de Banach es el debido a I. Kaplansky, que el lector podrá encontrar en [64] y que a continuación exponemos:

TEOREMA 1.7 ([64; Teorema 7.1.14]). *Un álgebra de Banach primitiva compleja que satisface una identidad polinómica de grado d es isomorfa al álgebra de las matrices $\mathcal{M}_n$ con $n \leq \frac{d}{2}$.*

1.3 Teorema de estructura de la traza de una aplicación bilineal.

DEFINICIÓN 1.8. Sea A un álgebra de Banach, y $L : A \times A \to A$ una aplicación bilineal. A la aplicación q de A en A definida por

$$q(a) = L(a, a) \quad \forall a \in A$$

se le llama *traza* de L.

Estudiaremos en las dos secciones siguientes la estructura de las derivaciones y los isomorfismos de Lie en las álgebras de Banach. Tienen estos dos tipos de aplicaciones una característica común: están relacionados con la traza de una aplicación bilineal satisfaciendo la propiedad

$$[q(a), a] = 0.$$

En efecto, si D es una derivación de Lie en un álgebra de Banach A, se verifica entonces que

$$0 = D([a^2, a]) = [Da^2, a] + [a^2, Da] = [Da^2 - (Da)a - a(Da), a] \quad \forall a \in A.$$

Esto nos permite deducir que la aplicación q de A en A definida por

$$q(a) = Da^2 - (Da)a - a(Da)$$

es la traza de la aplicación bilineal de $A \times A$ en A definida por

$$L(a, b) = D(ab) - (Da)b - a(Db)$$

y satisface la propiedad $[q(a), a] = 0$ para todo $a \in A$. Por otro lado, si A y B son álgebras de Banach y $\Phi : A \to B$ es un isomorfismo de Lie de A sobre B, entonces se verifica que

$$[(\Phi^{-1}(b))^2, \Phi^{-1}(b)] = 0 \quad \forall b \in B$$

y en consecuencia obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(0) = \Phi([(\Phi^{-1}(b))^2, \Phi^{-1}(b)]) \\ &= [\Phi((\Phi^{-1}(b))^2), \Phi(\Phi^{-1}(b))] = [\Phi((\Phi^{-1}(b))^2), b]. \end{aligned}$$

Esta identidad nos asegura que la aplicación q de B en B definida por

$$q(b) = \Phi((\Phi^{-1}(b))^2)$$

que es la traza de la aplicación bilineal de $B \times B$ en B

$$L(b_1, b_2) = \Phi(\Phi^{-1}(b_1)\Phi^{-1}(b_2)),$$

satisface que $[q(b), b] = 0$, para cualquier $b \in B$.

Nuestro objetivo inmediato es obtener un teorema de estructura de la traza q de una aplicación bilineal en un álgebra de Banach, verificando la propiedad

$$[q(a), a] = 0 \quad \forall a \in A.$$

Una parte importante de este capítulo consiste en la demostración de este resultado que ciertamente resulta ser laboriosa y meticulosa en todas las comprobaciones y exige una cierta concentración para no perderse en ella. Sin embargo, debido a su importancia apelamos a la paciencia del lector, pues será este resultado una de las herramientas fundamentales en el estudio posterior de la estructura de las aplicaciones de Lie.

En [65], E. C. Posner inició el estudio de las aplicaciones f de un anillo R en sí mismo que verifican la propiedad $[f(x), x] = 0$, para todo $x \in R$. Consiguió probar que si R es un anillo primo y existe una derivación d distinta de cero en R que verifica $[d(x), x] \in Z(R)$, entonces R es conmutativo. Desde entonces, muchos han sido los trabajos publicados sobre la estructura de las aplicaciones f (especialmente derivaciones y endomorfismos) en anillos primos que satisfacen $[f(x), x] = 0$ o $[f(x), x] \in Z(R)$. Destacamos las siguientes referencias en este tema [5, 9, 10, 15, 16, 18, 21, 22, 46 y 83].

En [18], M. Brešar, prueba que si f es una aplicación aditiva de un anillo primo R verificando que $[f(x), x] = 0$, entonces

$$f(x) = \lambda x + \xi(x)$$

donde $\lambda \in C(R)$ y ξ es una aplicación aditiva de R en $C(R)$, resultado análogo al que se obtiene para álgebras de von Neumann en [15]. Parece ser que el primer resultado sobre aplicaciones f que no sean aditivas verificando la anterior propiedad fue dado por J. Vukman en [83]. Vukman probó que si d es una derivación en un anillo primo R de característica distinta de 2 tal que la aplicación $q(x) = [d(x), x]$ verifica $[q(x), x] = 0$, entonces $q = 0$. En [16], Brešar generalizó este resultado mostrando la misma conclusión para cualquier aplicación aditiva y en [17], usando técnicas similares a las que usó en [16], hizo un estudio de la estructura de la traza q de las aplicaciones biaditivas $B : R \times R \to R$ para un anillo primo R con ciertas propiedades adicionales, satisfaciendo $[x, q(x)] = 0$ para todo $x \in R$. El resultado obtenido por Brešar [17] es el siguiente:

TEOREMA 1.9 ([17; Teorema 1]). *Sea R un anillo primo de característica distinta de 2 y sea $q : R \to R$ la traza de una aplicación biaditiva. Supongamos que q verifica que $[q(x), x] = 0$ para cualquier $x \in R$. Si R no satisface la identidad polinómica S_4, entonces q es de la forma*

$$q(x) = \lambda x^2 + \mu(x)x + \nu(x) \quad \forall x \in R$$

donde λ es un elemento de $C(R)$, μ es una aplicación aditiva de R en $C(R)$ y ν es una aplicación de R en $C(R)$.

Más recientemente, R. Banning y M. Mathieu han extendido este resultado a los anillos semiprimos (véase [5]).

Nosotros usaremos en esta sección los argumentos usados por Brešar en [17] para obtener un teorema de estructura de la traza de una aplicación bilineal en un álgebra de Banach (no necesariamente prima). Aunque podría ser obtenido con mayor generalidad preferimos establecerlo en el ambiente que realmente nos interesa. Nuestro teorema de estructura es el siguiente:

TEOREMA 1.10. *Sea A un álgebra de Banach compleja unital, P un ideal primitivo de A de manera que A/P no satisface la identidad polinómica S_4, y $q : A \to A$ la traza de una aplicación bilineal de A verificando que $[q(a), a] = 0$ para todo $a \in A$. Existen entonces un número complejo λ, un funcional lineal μ en A y un funcional ν en A, satisfaciendo que*

$$q(a) - (\lambda a^2 + \mu(a)a + \nu(a)\mathbf{1}) \in P$$

para todo $a \in A$.

Al amparo de las dos observaciones que hicimos al principio de la sección, las potentes aplicaciones que se harán del Teorema 1.10 en las secciones siguientes, justifican de sobra todo el tiempo que dedicamos a la demostración.

DEMOSTRACIÓN. Con el objeto de que la notación no resulte excesivamente tediosa, dados a y b en A, escribiremos $a \equiv b$ cuando $b - a \in P$.

Por ser q la traza de una aplicación bilineal, existe una aplicación bilineal L de $A \times A$ en A satisfaciendo que $q(a) = L(a,a)$. Obsérvese que podemos suponer que L es simétrica (esto es, que $L(a,b) = L(b,a)$, si $a, b \in A$) ya que en otro caso, basta considerar la aplicación

$$L_1(a,b) = \frac{1}{2}(L(a,b) + L(b,a))$$

en lugar de L.

Como $[L(a,a),a] = 0$ si $a \in A$, entonces

$$[L(a+cd+zb, a+cd+zb), a+cd+zb] = 0 \tag{1.1}$$

para cualesquiera $a, b, c, d \in A$, y cualquier número complejo z. En consecuencia el coeficiente de z en este polinomio es cero, es decir:

$$\begin{aligned} &2[L(a,cd),b] + 2[L(a,b),a] + 2[L(b,a),cd] + 2[L(b,cd),cd] \\ &+2[L(b,cd),a] + [L(a,a),b] + [L(cd,cd),b] = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Tomando $c = 0$ en la anterior identidad obtenemos que

$$[L(a,a),b] + 2[L(b,a),a] = 0, \quad \forall a, b \in A \tag{1.3}$$

y haciendo $a = 0$, en la identidad (1.2) obtenemos que

$$2[L(b,cd),cd] + [L(cd,cd),b] = 0, \quad \forall c, d \in A. \tag{1.4}$$

Con la información dada en (1.3) y (1.4) deducimos de (1.2) que

$$[L(a,cd),b] + [L(a,b),cd] + [L(cd,b),a] = 0 \quad \forall a,b,c,d \in A \tag{1.5}$$

y de ello podemos obtener que

$$[L(a,cd),b] + c[L(a,b),d] + [L(a,b),c]d + [L(cd,b),a] = 0 \quad \forall a,b,c,d \in A. \tag{1.6}$$

Cuando $c = 1$, deducimos de (1.5) que

$$[L(a,d),b] + [L(a,b),d] + [L(d,b),a] = 0 \quad \forall a,b,d \in A \tag{1.7}$$

y usando (1.7), la relación (1.6) puede escribirse:

$$\begin{aligned}[L(a,cd),b] &+ [L(cd,b),a] = c[L(a,d),b] + c[L(d,b),a] + \\ &+ [L(a,c),b]d + [L(c,b),a]d \quad \forall a,b,c,d \in A.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Si ahora fijamos c, d en A y consideramos la aplicación M de $A \times A$ en A definida por:

$$M(a,b) = [L(a,cd),b] + c[b, L(a,d)] + [b, L(a,c)]d \tag{1.9}$$

de (1.8) obtenemos que:

$$M(a,b) = [a, L(cd,b)] + c[L(d,b),a] + [L(c,b),a]d. \tag{1.10}$$

A la vista de (1.9) se deduce que la aplicación $b \to M(a,b)$ es la suma de composiciones de derivaciones internas y operadores multiplicación y de (1.10) se deduce la misma afirmación para la aplicación $a \to M(a,b)$. Comparando (1.9) y (1.10) se tiene que:

$$M(a,a) = 0, \quad \forall a \in A. \tag{1.11}$$

Si consideramos ahora $M(b,ad)$, donde a, b son elementos arbitrarios en A, usando (1.9) llegamos a que

$$\begin{aligned} M(b,ad) &= [L(b,cd),ad] + c[ad, L(b,d)] + [ad, L(b,c)]d \\ &= a[L(b,cd),d] + [L(b,cd),a]d + ca[d, L(b,d)] + \\ &\quad + c[a, L(b,d)]d + a[d, L(b,c)]d + [a, L(b,c)]d^2, \end{aligned}$$

y sacando factor común obtenemos que

$$\begin{aligned} M(b,ad) &= \{[L(b,cd),a] + c[a, L(b,d)] + [a, L(b,c)]d\}d + \\ &\quad + a\{[L(b,cd),d] + c[d, L(b,d)] + [d, L(b,c)]d\} + \\ &\quad + [c,a][d, L(b,d)]. \end{aligned}$$

Si escribimos la anterior igualdad teniendo en cuenta la definición de M, observamos que

$$M(b,ad) = M(b,a)d + aM(b,d) + [c,a][d,L(b,d)] \quad \forall a,b \in A \tag{1.12}$$

y en particular

$$M(ab,ad) = M(ab,a)d + aM(ab,d) + [c,a][d,L(ab,d)] \quad \forall a,b \in A. \tag{1.13}$$

A la vista de (1.13), consideremos ahora la expresión de $M(ab,e)$. Usando la relación (1.10) deducimos que

$$\begin{aligned} M(ab,e) &= [ab,L(cd,e)] + c[L(d,e),ab] + [L(c,e),ab]d \\ &= a[b,L(cd,e)] + [a,L(cd,e)]b + ca[L(d,e),b] \\ &\quad +c[L(d,e),a]b + a[L(c,e),b]d + [L(c,e),a]bd \\ &\qquad \forall a,b,e \in A \end{aligned}$$

y obsérvese que esta relación puede también escribirse como

$$\begin{aligned} M(ab,e) &= aM(b,e) + [c,a][L(e,d),b] + M(a,e)b \\ &\quad +[L(e,c),a][b,d] \quad \forall a,b,e \in A \end{aligned} \tag{1.14}$$

lo que en particular nos permite obtener que

$$\begin{aligned} M(ab,d) &= aM(b,d) + [c,a][L(d,d),b] + M(a,d)b \\ &\quad +[L(d,c),a][b,d] \quad \forall a,b \in A. \end{aligned}$$

Por otro lado, las relaciones (1.14) y (1.11) nos permiten deducir que

$$M(ab,a) = aM(b,a) + [c,a][L(a,d),b] + [L(a,c),a][b,d]$$

y sustituyendo las dos últimas relaciones en (1.13) obtenemos que para cualesquiera $a,b \in A$ se verifica que

$$\begin{aligned} M(ab,ad) &= aM(b,a)d + [c,a][L(a,d),b]d + [L(a,c),a][b,d]d \\ &\quad +a^2M(b,d) + a[c,a][L(d,d),b] + aM(a,d)b \\ &\quad +a[L(d,c),a][b,d] + [c,a][d,L(ab,d)]. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Vamos ahora a expresar $M(ab, ad)$ de otro modo. Usemos para ello la información obtenida en (1.14) para deducir que

$$\begin{aligned} M(ab,ad) &= aM(b,ad)+[c,a][L(ad,d),b]+M(a,ad)b \\ &\quad +[L(ad,c),a][b,d] \quad \forall a,b\in A. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Si utilizamos ahora (1.11) y (1.12) deducimos que:

$$M(a,ad) = aM(a,d)+[c,a][d,L(a,d)],$$

identidad que junto con (1.12) y (1.16), nos permite obtener que

$$\begin{aligned} M(ab,ad) &= aM(b,a)d+a^2M(b,d)+a[c,a][d,L(b,d)] \\ &\quad +[c,a][L(ad,d),b]+aM(a,d)b+[c,a][d,L(a,d)]b \\ &\quad +[L(ad,c),a][b,d] \quad \forall a,b\in A. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Comparando (1.15) y (1.17) obtenemos que:

$$\begin{aligned} &[c,a][L(a,d),b]d+[L(a,c),a][b,d]d+a[c,a][L(d,d),b] \\ &+a[L(d,c),a][b,d]+[c,a][d,L(ab,d)] \\ =\ & a[c,a][d,L(b,d)]+[c,a][L(ad,d),b] \\ &+[c,a][d,L(a,d)]b+[L(ad,c),a][b,d] \quad \forall a,b,c,d\in A. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Si multiplicamos (1.18) por 2 y sustituimos las siguientes identidades que podemos deducir de (1.3):

$$2[L(a,c),a][b,d]d = -[L(a,a),c][b,d]d$$

$$2[c,a][d,L(ab,d)] = -[c,a][ab,L(d,d)]$$

$$2a[c,a][d,L(b,d)] = -a[c,a][b,L(d,d)]$$

obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
& 2[c,a]L(a,d)bd - 2[c,a]bL(a,d)d - [L(a,a),c]bd^2 \\
& +[L(a,a),c]dbd + 2a[c,a]L(d,d)b - 2a[c,a]bL(d,d) \\
& +2a[L(d,c),a]bd - 2a[L(d,c),a]db - [c,a]abL(d,d) \\
& +[c,a]L(d,d)ab \\
= \;& -a[c,a]bL(d,d) + a[c,a]L(d,d)b + 2[c,a]L(ad,d)b \\
& -2[c,a]bL(ad,d) + 2[c,a][d,L(a,d)]b + 2[L(ad,c),a]bd \\
& -2[L(ad,c),a]db
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}
& [c,a]bf_1(a,d) + [a^2,c]bq(d) + [c,L(a,a)]bd^2 \\
& +f_2(a,c,d)bd + f_3(a,c,d)b = 0 \quad \forall a,b,c,d \in A
\end{aligned} \tag{1.19}$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned}
f_1(a,d) &= 2L(ad,d) - 2L(a,d)d, \\
f_2(a,c,d) &= 2[c,a]L(a,d) + [L(a,a),c]d \\
&\quad +2a[L(d,c),a] - 2[L(ad,c),a], \\
f_3(a,c,d) &= a[c,a]L(d,d) - 2a[L(d,c),a]d \\
&\quad +[c,a]L(d,d)a - 2[c,a]L(ad,d) \\
&\quad -2[c,a][d,L(a,d)] + 2[L(ad,c),a]d.
\end{aligned}$$

Reemplazando ahora b por $b[c,a]e$ en (1.19), deducimos que para todo $a,b,c,d,e \in A$ se verifica que

$$\begin{aligned}
-[c,a]b[c,a]ef_1(a,d) &= [a^2,c]b[c,a]eq(d) + [c,L(a,a)]b[c,a]ed^2 \\
&\quad +f_2(a,c,d)b[c,a]ed + f_3(a,c,d)b[c,a]e.
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando (1.19) obtendremos que

$$\begin{aligned}
-[c,a]b[c,a]ef_1(a,d) &= [c,a]b(-[c,a]ef_1(a,d)) \\
&= [c,a]b[a^2,c]eq(d) + [c,a]b[c,L(a,a)]ed^2 \\
&\quad +[c,a]bf_2(a,c,d)ed + [c,a]bf_3(a,c,d)e
\end{aligned}$$

y comparando las dos últimas relaciones obtenemos

$$\begin{aligned} &([a^2,c]b[c,a]-[c,a]b[a^2,c])eq(d) = \\ = \;& g_1(a,b,c)ed^2+g_2(a,b,c,d)ed+g_3(a,b,c,d)e \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned} g_1(a,b,c) &= [c,a]b[c,L(a,a)]-[c,L(a,a)]b[c,a] \\ g_2(a,b,c,d) &= [c,a]bf_2(a,c,d)-f_2(a,c,d)b[c,a] \\ g_3(a,b,c,d) &= [c,a]bf_3(a,c,d)-f_3(a,c,d)b[c,a]. \end{aligned}$$

Veamos seguidamente que podemos elegir $a_0, b_0, c_0 \in A$ verificando que:

$$[a_0^2, c_0]b_0[a_0, c_0] - [a_0, c_0]b_0[a_0^2, c_0] = x_0 \not\equiv 0.$$

Si no sucediera esto, entonces para cualesquiera $a, b, c \in A$, se verificaría que

$$[a^2, c]b[a, c] - [a, c]b[a^2, c] \equiv 0.$$

En estas circunstancias, si $[a^2, c] \equiv 0$ entonces $[[a^2, c], [a, c]] \equiv 0$, y si por el contrario $[a^2, c] \not\equiv 0$ por ser A/P un álgebra prima centralmente cerrada, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $[a, c] \equiv \lambda[a^2, c]$ puesto que [50; Teorema 1] garantiza que

si dos elementos a, b en un anillo primo R satisfacen que $axb = bxa$ para cualquier $x \in R$ siendo $a \neq 0$ entonces $b = \lambda a$ para algún $\lambda \in C(R)$.

En cualquier caso obtenemos que $[[a^2, c], [a, c]] \equiv 0$, para cualesquiera a y c de A. Esta propiedad asegura que A/P satisface la identidad polinómica S_4 ya que es bien conocido (véase [17; Lema 1]), que

un anillo primo satisface la identidad polinómica S_4, si, y sólo si satisface la identidad de Kaplansky $[[x^2, y], [x, y]]$.

Puesto que hemos supuesto que A/P no satisface la identidad S_4, podemos concluir que, como ya anunciábamos, existen $a_0, b_0, c_0 \in A$ tales que :

$$x_0 = [a_0^2, c_0]b_0[a_0, c_0] - [a_0, c_0]b_0[a_0^2, c_0] \not\equiv 0.$$

Si llamamos

$$\begin{aligned} y_0 &= g_1(a_0, b_0, c_0), \\ F(d) &= g_2(a_0, b_0, c_0, d) \quad \forall d \in A, \text{ y} \\ G(d) &= g_3(a_0, b_0, c_0, d) \quad \forall d \in A, \end{aligned}$$

usando (1.20) podemos escribir que

$$x_0eq(d) = y_0ed^2 + F(d)ed + G(d)e \quad \forall d, e \in A \tag{1.21}$$

y reemplazando e por cx_0e en (1.21) obtenemos que

$$x_0cx_0eq(d) = y_0cx_0ed^2 + F(d)cx_0ed + G(d)cx_0e \quad \forall c, d, e \in A.$$

Por otro lado la información que nos suministra (1.21), puede utilizarse para deducir que

$$x_0cx_0eq(d) = x_0c(x_0eq(d)) = x_0cy_0ed^2 + x_0cF(d)ed + x_0cG(d)e$$

y comparando las dos últimas relaciones obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (y_0cx_0 - x_0cy_0)ed^2 + (F(d)cx_0 - x_0cF(d))ed + \\ &\quad + (G(d)cx_0 - x_0cG(d))e \quad \forall c, d, e \in A. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Multiplicando ahora por a por la derecha concluimos que:

$$\begin{aligned} &(y_0cx_0 - x_0cy_0)ed^2a + (F(d)cx_0 - x_0cF(d))eda + \\ &+ (G(d)cx_0 - x_0cG(d))ea = 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

y reemplazando e por ea en (1.22) obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (y_0cx_0 - x_0cy_0)ead^2 + (F(d)cx_0 - x_0cF(d))ead \\ &\quad + (G(d)cx_0 - x_0cG(d))ea \end{aligned}$$

lo cual nos permite, comparando las dos últimas relaciones, afirmar que:

$$(y_0 c x_0 - x_0 c y_0) e[d^2, a] + (F(d) c x_0 - x_0 c F(d)) e[d, a] = 0 \quad \forall a, c, d, e \in A. \tag{1.24}$$

Si sustituimos e por $e[d,a]b$ en (1.24), obtendremos para cualesquiera $a, b, c, d, e \in A$ que

$$(y_0 c x_0 - x_0 c y_0) e[d, a] b[d^2, a] + (F(d) c x_0 - x_0 c F(d)) e[d, a] b[d, a] = 0$$

y utilizando ahora en el segundo sumando de esta relación (1.24) podemos escribir que

$$(y_0 c x_0 - x_0 c y_0) e([d, a] b[d^2, a] - [d^2, a] b[d, a]) = 0 \quad \forall a, b, c, d, e \in A. \tag{1.25}$$

En consecuencia acabamos de comprobar que

$$(y_0 c x_0 - x_0 c y_0) A([d, a] b[d^2, a] - [d^2, a] b[d, a]) = 0 \quad \forall a, b, c, d \in A \tag{1.26}$$

y por tanto

$$(y_0 c x_0 - x_0 c y_0) A/P([d, a] b[d^2, a] - [d^2, a] b[d, a]) = 0 + P \quad \forall a, b, c, d \in A. \tag{1.27}$$

Análogamente a como hemos señalado anteriormente, podemos afirmar que existen a_1, b_1, $d_1 \in A$ verificando que:

$$[d_1, a_1] b_1 [d_1^2, a_1] - [d_1^2, a_1] b_1 [d_1, a_1] \not\equiv 0$$

y por ser el álgebra A/P un álgebra prima, de (1.27) deducimos que

$$y_0 c x_0 - x_0 c y_0 \equiv 0 \quad \forall c \in A.$$

Como $x_0 \not\equiv 0$, nuevamente podemos asegurar la existencia de un número complejo λ_0 verificando que

$$y_0 \equiv \lambda_0 x_0 \tag{1.28}$$

y de la relación (1.24) obtenemos ahora que

$$(F(d)cx_0 - x_0cF(d))e[d,a] \equiv 0 \quad \forall a,c,d,e \in A$$

y en consecuencia

$$(F(d)cx_0 - x_0cF(d))A/P[d,a] = 0 + P \quad \forall a,c,d \in A. \tag{1.29}$$

Supongamos que existen $d, c \in A$, verificando que

$$F(d)cx_0 - x_0cF(d) \not\equiv 0$$

entonces por (1.29) obtendríamos que $d + P \in Z(A/P)$. Si existiese $d' \in A$, verificando que $d' + P \notin Z(A/P)$, sería $F(d')ex_0 - x_0eF(d') \equiv 0$ para todo $e \in A$. Consecuentemente por ser lineal la aplicación $\pi_P F$ sería $F(d + zd')cx_0 - x_0cF(d + zd') \not\equiv 0$ para todo número complejo z y de nuevo por (1.29) deduciríamos que $(d + zd') + P \in Z(A/P)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Esto nos permitiría obtener que $d' + P \in Z(A/P)$, ya que el coeficiente del polinomio en la variable compleja z

$$[d + zd', u] \equiv 0$$

sería cero para todo $u \in A$. Sin embargo estamos suponiendo que $d' + P \notin Z(A/P)$. En consecuencia, si existiesen $d, c \in A$, verificando que $F(d)cx_0 - x_0cF(d) \not\equiv 0$, el álgebra A/P sería conmutativa. Como esto no puede ocurrir, podemos asegurar que

$$F(d)cx_0 - x_0cF(d) \equiv 0 \quad \forall c,d \in A$$

y en consecuencia como $x_0 \not\equiv 0$, existe $\mu(d) \in \mathbb{C}$ tal que

$$F(d) \equiv \mu(d)x_0. \tag{1.30}$$

Observemos que la linealidad de μ está asegurada por ser lineal la aplicación $\pi_P F$. Viendo la relación (1.22) en el cociente A/P y teniendo en cuenta que los dos primeros términos son cero, obtenemos que

$$G(d)cx_0 \equiv x_0cG(d) \quad \forall c,d \in A$$

y nuevamente deducimos que si $d \in A$, entonces

$$G(d) \equiv \nu(d)x_0 \tag{1.31}$$

para conveniente número complejo $\nu(d)$. Aplicando ahora (1.28), (1.30) y (1.31) en la siguiente relación obtenida proyectando (1.21)

$$x_0eq(d) \equiv y_0ed^2 + F(d)ed + G(d)e \quad \forall e, d \in A \tag{1.32}$$

deducimos que:

$$x_0e(q(d) - \lambda_0d^2 - \mu(d)d - \nu(d)1) \equiv 0 \quad \forall e, d \in A$$

y utilizando de nuevo que $x_0 \not\equiv 0$ y que A/P es un álgebra prima, resulta que

$$q(d) \equiv \lambda_0d^2 + \mu(d)d + \nu(d)1$$

para todo $d \in A$, quedando así la demostración completa. ♣

1.4 Teorema de estructura de los isomorfismos de Lie.

Una vez que hemos obtenido el teorema de estructura de la traza de una aplicación bilineal de un álgebra de Banach, entramos de lleno a abordar el problema de determinar la estructura de los isomorfismos de Lie. Durante los últimos años se han hecho considerables esfuerzos en el estudio de la estructura de los isomorfismos de Lie en anillos y en álgebras de Banach. En [38], L. Hua probó que cualquier automorfismo de Lie del anillo R de todas las matrices de orden $n \times n$ ($n \geq 3$) sobre un anillo de división es de la forma $\varphi + \xi$, donde φ es un automorfismo o el opuesto de un antiautomorfismo de R, y ξ es una aplicación aditiva de R en el centro que aplica los conmutadores en cero. W. S. Martindale en [48, 51 y 52] extendió el teorema de Hua a anillos más generales. En [51], estableció el siguiente resultado:

TEOREMA 1.11 ([51; Teorema 11]). *Si R es un anillo primo con unidad de característica distinta de 2 y de 3 y que contiene dos idempotentes distintos de cero cuya suma es 1 entonces todo isomorfismo de Lie de R sobre otro anillo primo R' con unidad, es de la forma $\varphi + \xi$, donde φ es un homomorfismo o el opuesto de un antihomomorfismo de R en la clausura central de R' y ξ es una aplicación aditiva de R en $C(R')$ que aplica los conmutadores en cero.*

En [17], M. Brešar generalizó lo obtenido por Martindale sin la hipótesis de existencia de idempotentes del siguiente modo:

TEOREMA 1.12 ([17; Teorema 3]). *Sean R y R' dos anillos primos de característica distinta de 2 que no satisfacen la identidad polinómica S_4. Si $\Phi : R \to R'$ es un isomorfismo de Lie, entonces Φ es de la forma $\varphi+\xi$ donde φ es un homomorfismo o el opuesto de un antihomomorfismo de R en la clausura central de R', φ es inyectiva y ξ es una aplicación aditiva de R en $C(R')$ que aplica los conmutadores en cero.*

B. Banning y M. Mathieu también han extendido el resultado anterior al ambiente de anillos semiprimos (véase [5; Teorema 3.10]). El resultado análogo para álgebras de von Neuman fue obtenido por C. R. Miers en [59].

TEOREMA 1.13 ([59; Teorema 4]). *Sea $\Phi : M \to N$ un isomorfismo de Lie entre dos álgebras de von Neumann con centro trivial, entonces Φ tiene una de las dos siguientes formas:*

i. $\Phi = \varphi+\xi$, *donde φ es un isomorfismo y ξ es un funcional $*-$lineal, tal que $\xi([a,b]) = 0$, para todo $a, b \in M$.*

ii. $\Phi = -\varphi + \xi$, *donde φ es un anti-isomorfismo y ξ es un funcional $*-$lineal, tal que $\xi([a,b]) = 0$, para todo $a, b \in M$.*

Señalemos por último el resultado obtenido por M. Mathieu [56] que generaliza lo obtenido por M. Brešar y C.R. Miers para el caso de álgebras de von Neuman en [20; Teorema 4].

TEOREMA 1.14 ([56; Teorema 1]). *Sea A una C^*-álgebra unital verificando las siguientes propiedades:*

(a) Todo centralizador esencialmente definido y continuo de A puede ser extendido a un centralizador totalmente definido de A.

(b) El segundo ideal de Kaplansky K_2, esto es el ideal generado por los elementos de la forma $[x^2, y]z[x, y] - [x, y]z[x^2, y]$, es esencial.

Entonces para cada isomorfismo de Lie $\Phi : A \to A$ existen aplicaciones lineales determinadas de forma única, $\varphi : A \to A$, y $\xi : A \to Z(A)$, en el centro de A con la propiedad $\xi(xy) = \xi(yx)$ para todo $x, y \in A$ verificando que

$$\Phi = \varphi + \xi$$

y $\varphi|_{pA}$ es un isomorfismo mientras que $\varphi|_{(1-p)A}$ es el opuesto de un anti-isomorfismo para una única proyección central p en A.

Estos resultados, salvo en casos excepcionales, no permiten estudiar el comportamiento analítico de los isomorfimos de Lie en un álgebra de Banach. Sin embargo en la línea de los resultados mencionados conseguimos en esta Memoria el siguiente teorema de estructura para isomorfismos de Lie en un álgebra de Banach compleja unital que nos permitirá estudiar la continuidad de los isomorfismos de Lie en álgebras de Banach. Nos parece conveniente advertir al lector que nuevamente usamos las técnicas usadas por Brešar en [17]. Nuestro resultado es el siguiente:

TEOREMA 1.15. *Sean A y B álgebras de Banach complejas unitales, Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B, y P un ideal primitivo de B. Se satisface entonces una de las siguientes afirmaciones:*

i. *B/P es isomorfo a $\mathbb{C}$.*

ii. *B/P es isomorfo al álgebra de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.*

iii. *Existe un funcional lineal μ sobre A verificando que*

$$\pi_P\Phi(a^2) - \mu(a)\pi_P\Phi(a) \in Z(B/P)$$

para todo $a \in A$.

iv. *Existe un homomorfismo continuo φ de A sobre B/P, una aplicación lineal ξ de A en el centro de B/P, y $\alpha \in \mathbb{C}$ verificando que*

$$\pi_P\Phi = \alpha\varphi + \xi.$$

v. *Existe un antihomomorfismo continuo φ de A sobre B/P, una aplicación lineal ξ de A en el centro de B/P, y $\alpha \in \mathbb{C}$ verificando que*

$$\pi_P\Phi = \alpha\varphi + \xi.$$

Demostración. Si B/P satisface la identidad polinómica S_4, el Teorema 1.7 garantiza que B/P es isomorfa a $\mathbb{C}$ o bien a $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ y consecuentemente se satisface *i* o *ii*.

Procedemos ahora a probar que si B/P no satisface la identidad polinómica S_4 entonces se verifica una de las restantes propiedades. Con este fin observemos que B/P es un álgebra centralmente cerrada, y que se verifica la siguiente propiedad

$$[(\Phi^{-1}(b))^2, \Phi^{-1}(b)] = 0 \text{ si } b \in B.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(0) = \Phi([(\Phi^{-1}(b))^2, \Phi^{-1}(b)]) = \\ &= [\Phi((\Phi^{-1}(b))^2), \Phi(\Phi^{-1}(b))] = [\Phi((\Phi^{-1}(b))^2), b] \end{aligned}$$

y por tanto, la aplicación q definida en B como

$$q(b) = \Phi((\Phi^{-1}(b))^2)$$

es la traza de la aplicación bilineal $L(b_1, b_2) = \Phi(\Phi^{-1}(b_1)\Phi^{-1}(b_2))$ de $B \times B$ en B y satisface que $[q(b), b] = 0$, para todo $b \in B$. Por el Teorema 1.10 existen λ en $\mathbb{C}$, η y τ funcionales de B, siendo η lineal, de forma que

$$\Phi((\Phi^{-1}(b))^2) \equiv \lambda b^2 + \eta(b)b + \tau(b)\mathbf{1}$$

para todo $b \in B$. Si llamamos $\mu = \eta\Phi$ y $\nu = \tau\Phi$, la anterior igualdad se escribe como

$$\Phi(a^2) \equiv \lambda\Phi(a)^2 + \mu(a)\Phi(a) + \nu(a)\mathbf{1} \tag{1.33}$$

para todo $a \in A$.

Si $\lambda = 0$, entonces la identidad anterior se convierte en

$$\Phi(a^2) - \mu(a)\Phi(a) \equiv \nu(a)\mathbf{1}$$

para todo $a \in A$, y en consecuencia

$$\pi_P\Phi(a^2) - \mu(a)\pi_P\Phi(a) \in Z(B/P)$$

que es justamente la situación descrita en *iii*.

Supongamos ahora que $\lambda \neq 0$ y sea φ' la aplicación lineal de A en B definida por

$$\varphi'(a) = \lambda\Phi(a) + \frac{1}{2}\mu(a)\mathbf{1}.$$

Veremos que la aplicación lineal de A en B/P, $\pi_P\varphi'$ es un homomorfismo de Jordan, es decir que

$$\varphi'(ab + ba) \equiv \varphi'(a)\varphi'(b) + \varphi'(b)\varphi'(a) \quad \forall a, b \in A.$$

Por un lado obtenemos usando (1.33) que

$$\begin{aligned}
\varphi'(a^2) &\equiv \lambda\Phi(a^2) + \frac{1}{2}\mu(a^2)\mathbf{1} \\
&\equiv \lambda(\lambda\Phi(a)^2 + \mu(a)\Phi(a) + \nu(a)\mathbf{1}) + \frac{1}{2}\mu(a^2)\mathbf{1} \\
&\equiv \lambda^2\Phi(a)^2 + \lambda\mu(a)\Phi(a) + \lambda\nu(a)\mathbf{1} + \frac{1}{2}\mu(a^2)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

mientras que por otro

$$\varphi'(a)^2 \equiv (\lambda\Phi(a) + \frac{1}{2}\mu(a)\mathbf{1})^2 \equiv \lambda^2\Phi(a)^2 + \lambda\mu(a)\Phi(a) + \frac{1}{4}\mu(a)^2\mathbf{1}.$$

Comparando estas dos relaciones obtenemos que

$$(\varphi'(a^2) - \varphi'(a)^2) + P \in \mathbb{C}(\mathbf{1} + P), \tag{1.34}$$

y en consecuencia

$$\varphi'(ab + ba) - \varphi'(a)\varphi'(b) - \varphi'(b)\varphi'(a) \equiv \epsilon(a,b)\mathbf{1} \tag{1.35}$$

para conveniente funcional bilineal y simétrico ϵ de $A \times A$. Evidentemente $\pi_P\varphi'$ es un homomorfismo de Jordan si y sólo si $\epsilon(a,b) = 0$, cualesquiera que sean a y b en A. Fijemos $a, b \in A$ y consideremos

$$w = \varphi'(a(ab + ba) + (ab + ba)a).$$

Por (1.35), podemos obtener que

$$\begin{aligned}
w &\equiv \varphi'(a)\varphi'(ab + ba) + \varphi'(ab + ba)\varphi'(a) + \epsilon(a, ab + ba)\mathbf{1} \\
&\equiv \varphi'(a)\{\varphi'(a)\varphi'(b) + \varphi'(b)\varphi'(a) + \epsilon(a,b)\mathbf{1}\} \\
&\quad +\{\varphi'(a)\varphi'(b) + \varphi'(b)\varphi'(a) + \epsilon(a,b)\mathbf{1}\}\varphi'(a) + \epsilon(a, ab + ba)\mathbf{1} \\
&\equiv \varphi'(a)^2\varphi'(b) + 2\varphi'(a)\varphi'(b)\varphi'(a) + \varphi'(b)\varphi'(a)^2 \\
&\quad +2\epsilon(a,b)\varphi'(a) + \epsilon(a, ab + ba)\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Por otro lado como por (1.35), $\varphi'(a^2) \equiv \varphi'(a)^2 + \frac{1}{2}\epsilon(a,a)\mathbf{1}$, deducimos que

$$\begin{aligned} w &\equiv 2\varphi'(aba) + \varphi'(a^2b + ba^2) \\ &\equiv 2\varphi'(aba) + \varphi'(a^2)\varphi'(b) + \varphi'(b)\varphi'(a^2) + \epsilon(a^2,b)\mathbf{1} \\ &\equiv 2\varphi'(aba) + \{\varphi'(a)^2 + \frac{1}{2}\epsilon(a,a)\mathbf{1}\}\varphi'(b) \\ &\quad +\varphi'(b)\{\varphi'(a)^2 + \frac{1}{2}\epsilon(a,a)\mathbf{1}\} + \epsilon(a^2,b)\mathbf{1} \\ &\equiv 2\varphi'(aba) + \varphi'(a)^2\varphi'(b) + \varphi'(b)\varphi'(a)^2 \\ &\quad +\epsilon(a,a)\varphi'(b) + \epsilon(a^2,b)\mathbf{1} \end{aligned}$$

y comparando las dos últimas expresiones obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(cba) &\equiv \varphi'(a)\varphi'(b)\varphi'(a) + \epsilon(a,b)\varphi'(a) - \frac{1}{2}\epsilon(a,a)\varphi'(b) \\ &\quad +\frac{1}{2}\epsilon(a,ab+ba)\mathbf{1} - \frac{1}{2}\epsilon(a^2,b)\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Entonces si z es un número complejo, por (1.36), podemos deducir que

$$\begin{aligned} \varphi'((a+zc)b(a+zc)) &\equiv \varphi'(a+zc)\varphi'(b)\varphi'(a+zc) \\ &\quad +\epsilon(a+zc,b)\varphi'(a+zc) - \frac{1}{2}\epsilon(a+zc,a+zc)\varphi'(b) \\ &\quad +\frac{1}{2}\epsilon(a+zc,(a+zc)b+b(a+zc))\mathbf{1} \\ &\quad -\frac{1}{2}\epsilon((a+zc)^2,b)\mathbf{1} \end{aligned}$$

e identificando el coeficiente de z en ambos miembros de la equivalencia anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(abc+cba) &\equiv \varphi'(a)\varphi'(b)\varphi'(c) + \varphi'(c)\varphi'(b)\varphi'(a) \\ &\quad +\epsilon(a,b)\varphi'(c) + \epsilon(c,b)\varphi'(a) \\ &\quad -\epsilon(a,c)\varphi'(b) + \frac{1}{2}\epsilon(a,cb+bc)\mathbf{1} \\ &\quad +\frac{1}{2}\epsilon(c,ab+ba)\mathbf{1} - \frac{1}{2}\epsilon(ac+ca,b)\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Sea $d = \varphi'(aba^2 + a^2ba)$. Usando (1.37), obtenemos que

$$\begin{aligned} d &\equiv \varphi'(a)\varphi'(b)\varphi'(a^2) + \varphi'(a^2)\varphi'(b)\varphi'(a) \\ &\quad +\epsilon(a,b)\varphi'(a^2) + \epsilon(a^2,b)\varphi'(a) \\ &\quad -\epsilon(a,a^2)\varphi'(b) + \frac{1}{2}\epsilon(a,a^2b+ba^2)\mathbf{1} \\ &\quad +\frac{1}{2}\epsilon(a^2,ab+ba)\mathbf{1} - \epsilon(a^3,b)\mathbf{1} \end{aligned} \tag{1.38}$$

y utilizando de nuevo que $\varphi'(a^2) \equiv \varphi'(a)^2 + \frac{1}{2}\epsilon(a,a)\mathbf{1}$, podemos deducir que

$$\begin{aligned} d &\equiv \varphi'(a)\varphi'(b)\varphi'(a)^2 + \varphi'(a)^2\varphi'(b)\varphi'(a) \\ &\quad +\frac{1}{2}\epsilon(a,a)\varphi'(a)\varphi'(b) + \frac{1}{2}\epsilon(a,a)\varphi'(b)\varphi'(a) \\ &\quad +\epsilon(a,b)\varphi'(a)^2 + \epsilon(a^2,b)\varphi'(a) \\ &\quad -\epsilon(a,a^2)\varphi'(b) + \frac{1}{2}\epsilon(a,b)\epsilon(a,a)\mathbf{1} \\ &\quad +\frac{1}{2}\epsilon(a,a^2b+ba^2)\mathbf{1} + \frac{1}{2}\epsilon(a^2,ab+ba)\mathbf{1} - \epsilon(a^3,b)\mathbf{1} \end{aligned} \tag{1.39}$$

y por otro lado usando (1.35) y (1.36) obtenemos que

$$\begin{aligned} d &\equiv \varphi'((aba)a + a(aba)) \\ &\equiv \varphi'(aba)\varphi'(a) + \varphi'(a)\varphi'(aba) + \epsilon(aba,a)\mathbf{1} \\ &\equiv \varphi'(a)\varphi'(b)\varphi'(a)^2 + \varphi'(a)^2\varphi'(b)\varphi'(a) + 2\epsilon(a,b)\varphi'(a)^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\epsilon(a,a)\varphi'(b)\varphi'(a) - \frac{1}{2}\epsilon(a,a)\varphi'(a)\varphi'(b) \\ &\quad +\epsilon(a,ab+ba)\varphi'(a) - \epsilon(a^2,b)\varphi'(a) + \epsilon(aba,a)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Comparando las dos expresiones obtenidas para d, observamos que para todo $a, b \in A$ se verifica que:

$$\begin{aligned} &\epsilon(a,a)\varphi'(a)\varphi'(b) + \epsilon(a,a)\varphi'(b)\varphi'(a) - \epsilon(a,b)\varphi'(a)^2 - \epsilon(a,a^2)\varphi'(b) \\ &+(2\epsilon(a^2,b) - \epsilon(a,ab+ba))\varphi'(a) + P \in \mathbb{C}(\mathbf{1}+P) \end{aligned} \tag{1.40}$$

y en particular si $a = b$ concluimos que

$$(\epsilon(a,a)\varphi'(a)^2 - \epsilon(a,a^2)\varphi'(a)) + P \in \mathbb{C}(1+P) \quad \forall a \in A \tag{1.41}$$

y en consecuencia,

$$\epsilon(a,a)[[\varphi'(a)^2, c], [\varphi'(a), c]] \equiv 0 \quad \forall a \in A, c \in B. \tag{1.42}$$

Vamos a demostrar que si $a \in A$, entonces se tiene que verificar una de las siguientes afirmaciones:

- $\epsilon(a,b) = 0$, para todo $b \in A$, o bien
- a satisface que $[[\varphi'(a)^2, c], [\varphi'(a), c]] \equiv 0 \quad \forall c \in B$.

Para ello supongamos que $a \in A$ no satisface la condición:

$$[[\varphi'(a)^2, c], [\varphi'(a), c]] \equiv 0 \quad \forall c \in B. \tag{1.43}$$

Existe entonces $c_0 \in B$ tal que

$$[[\varphi'(a)^2, c_0], [\varphi'(a), c_0]] \not\equiv 0$$

y por (1.42) resultará que $\epsilon(a,a) = 0$ y por tanto $\epsilon(a,a^2) = 0$ ya que en otro caso, por (1.41), se verificaría que $\epsilon(a,a^2)\varphi'(a) + P \in \mathbb{C}(1+P)$, y entonces $\varphi'(a) + P \in \mathbb{C}(1+P)$ con lo que a satisfacería la condición (1.43). Entonces de (1.40) obtenemos que:

$$(-\epsilon(a,b)\varphi(a)^2 + (2\epsilon(a^2,b) - \epsilon(a,ab+ba))\varphi'(a)) + P \in \mathbb{C}(1+P), \quad \forall b \in A$$

y por tanto

$$0 \equiv [(2\epsilon(a^2,b) - \epsilon(a,ab+ba))\varphi'(a) - \epsilon(a,b)\varphi'(a)^2, c_0].$$

En consecuencia obtenemos que

$$0 \equiv [[2\epsilon(a^2,b)\varphi'(a) - \epsilon(a,ab+ba)\varphi'(a) - \epsilon(a,b)\varphi'(a)^2, c_0], [\varphi'(a), c_0]]$$

de donde podemos deducir que

$$-\epsilon(a,b)[[\varphi'(a)^2, c_0], [\varphi'(a), c_0]] \equiv 0 \quad \forall b \in A.$$

Luego por ser $[[\varphi'(a)^2, c_0], [\varphi'(a), c_0]] \not\equiv 0$, obtenemos que $\epsilon(a,b) = 0$, para cualquier $b \in A$. Por tanto, hemos probado que dado $a \in A$, se tiene que verificar una de las siguientes afirmaciones:

- $\epsilon(a,b) = 0$, para todo $b \in A$, o bien
- a satisface (1.43).

Veamos ya que $\pi_P\varphi'$ es un homomorfismo de Jordan. Supongamos que no lo fuese. Entonces existen $a, b \in A$ tales que $\epsilon(a,b) \neq 0$ y por lo dicho anteriormente, a satisface la condición (1.43). Supongamos que existe $a' \in A$ que no satisface (1.43). Entonces $\epsilon(a', d) = 0$ para cualquier $d \in A$, y como $\epsilon(a,b) \neq 0$, se verifica que

$$\epsilon(a + za', b) \neq 0$$

para cualquier complejo z, y por tanto

$$[[\varphi'(a+za')^2, u], [\varphi(a+za'), u]] \equiv 0, \quad \forall u \in B.$$

En consecuencia el coeficiente de z^3, que es $[[\varphi'(a')^2, u], [\varphi(a'), u]]$, deberá pertenecer a P, es decir,

$$[[\varphi'(a')^2, u], [\varphi(a'), u]] \equiv 0 \quad \forall u \in B$$

pero esto no es posible, pues estamos suponiendo que a' no satisface (1.43). En consecuencia, si $\pi_P\varphi'$ no es un homomorfismo de Jordan, todo $a \in A$ satisface (1.43). Pero obsérvese que esto no puede ocurrir puesto que si todo elemento de A satisfaciera (1.43), como $\lambda \neq 0$ obtendríamos que

$$[[\Phi(a)^2, c], [\Phi(a), c]] \equiv 0 \quad \forall a \in A \ \text{ y } c \in B,$$

y por ser Φ es un isomorfismo de Lie, deduciríamos entonces que B/P satisface el polinomio de Kaplansky y por tanto la identidad polinómica S_4. Puesto que hemos supuesto que B/P no satisface la identidad S_4, podemos concluir que $\pi_P\varphi'$ es un homomorfismo de Jordan. En resumen, si llamamos φ a la aplicación $\pi_P\varphi'$ de A en B/P, acabamos de comprobar que φ es un homomorfismo de Jordan.

En vista de que $[\mathbf{1}, A] = 0$, podemos asegurar que

$$[\pi_P\Phi(\mathbf{1}), B/P] = [\pi_P\Phi(\mathbf{1}), \pi_P\Phi(A)] = \pi_P\Phi([\mathbf{1}, A]) = 0 + P$$

y en consecuencia podemos concluir que $\pi_P\Phi(\mathbf{1}) \in Z(B/P)$, y por tanto

$$\varphi(\mathbf{1}) = \lambda\pi_P\Phi(\mathbf{1}) + \frac{1}{2}\mu(\mathbf{1})(\mathbf{1} + P) \in Z(B/P) = \mathbb{C}(\mathbf{1} + P).$$

Nuestro siguiente objetivo es ver que $\varphi(\mathbf{1}) \neq 0$. Para ello supongamos que fuera $\varphi(\mathbf{1}) = 0$, obtendríamos entonces que

$$\varphi(a) = \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{1}a + a\mathbf{1}) = \varphi(\mathbf{1} \cdot a) = \varphi(\mathbf{1}) \cdot \varphi(a) = \varphi(\mathbf{1})\varphi(a) = 0$$

cualquiera que fuese $a \in A$ y por tanto

$$B/P = \lambda\pi_P\Phi(A) \subset \mu(A)(\mathbf{1} + P) \subset Z(B/P),$$

lo que mostraría que B/P es conmutativa, en contra de lo que estamos suponiendo. Por tanto $\varphi(\mathbf{1}) = \rho(\mathbf{1} + P)$ para conveniente número complejo no cero ρ. En consecuencia

$$\mathbf{1} + P = \rho^{-1}\varphi(\mathbf{1}) = \varphi(\rho^{-1}\mathbf{1})$$

y puesto que $\lambda\pi_P\Phi = \varphi - \frac{1}{2}\mu$, deducimos que

$$\pi_P\Phi(a) = \lambda^{-1}\varphi(a) - \frac{\lambda^{-1}}{2}\mu(a)(\mathbf{1} + P) = \varphi(\lambda^{-1}a - \frac{\lambda^{-1}}{2}\mu(a)\rho^{-1}\mathbf{1})$$

para todo $a \in A$. Esto nos permite asegurar la sobreyectividad de φ. Puesto que [34; Teorema H] asegura que *si φ es un homomorfismo de Jordan sobreyectivo de un anillo R sobre un anillo primo R' de característica distinta de 2 y de 3, entonces φ es un homomorfismo o un antihomomorfismo,*

deducimos que φ es o un homomorfismo o un antihomomorfismo de A sobre B/P. Además φ es necesariamente continuo puesto que [3; Teorema 1] afirma que

si A es un álgebra de Banach compleja, y B es un álgebra de Banach compleja semisimple, entonces toda aplicación lineal sobreyectiva T de A sobre B tal que $r(Tx) \leq r(x)$ para cualquier $x \in A$ es continua.

En consecuencia φ, $\alpha = \lambda^{-1}$ y $\xi = -\frac{\alpha}{2}\mu$, satisfacen las propiedades requeridas en la afirmación *iv* o bien en la *v*. ♣

1.5 Teorema de estructura de las derivaciones de Lie.

Las investigaciones en la determinación de la estructura de las derivaciones de Lie se han centrado fundamentalmente en cuán próxima está una derivación de Lie de ser una derivación ordinaria. Muchos autores han estudiado las derivaciones de Lie en anillos asociativos, cabe citar, los trabajos de R. Banning y M. Mathieu [5], M. Brešar [15 y 17], I. N. Herstein [36], W. S. Martindale III [49], M. Mathieu [56] entre otros, y los trabajos sobre derivaciones de Lie en algunas álgebras de Banach, entre los que citamos el trabajo de P. De la Harpe [33] y los de de C. R. Miers [60 y 62].

Que nosotros sepamos, el problema de determinar la estructura de una derivación de Lie aparece tratado por primera vez en un trabajo no publicado de Kaplansky (véase [36; página 529]), mostrando que cualquier derivación de Lie del anillo de matrices $\mathcal{M}_n$ para $n \geq 3$ es una derivación ordinaria más una aplicación aditiva cuya imagen está contenida en el centro. En [36], I. N. Herstein planteó la validez del anterior teorema de estructura para anillos simples. En 1964, W. S. Martindale III, demuestra en [49] el siguiente resultado.

TEOREMA 1.16 ([49; Teorema 2]). *Sea R un anillo primitivo de característica distinta de 2 que contiene un idempotente no trivial. Si D es una derivación de Lie de R, entonces D es de la forma*

$$D = d + \xi$$

donde d es una derivación ordinaria de R en un anillo primitivo $\bar{R}$, que contiene a R, y ξ es una aplicación aditiva de R en el centro de $\bar{R}$ que aplica los conmutadores en 0.

Como consecuencia del Teorema 1.9, M. Brešar en [17] obtuvo la estructura de las derivaciones de Lie obteniendo una conclusión análoga a la del teorema de M. Martindale antes mencionado sin requerir la existencia de idempotentes. Más concretamente, demostró lo siguiente:

TEOREMA 1.17 ([17; Teorema 5]). *Sea R un anillo primo de característica distinta de 2. Supongamos que $D : R \rightarrow R$ es una derivación de Lie de R. Si R no satisface la identidad polinómica S_4 entonces D es de la forma*

$$D = d + \xi$$

donde d es una derivación de R en su clausura central y ξ es una aplicación aditiva de R en $C(R)$ que aplica los conmutadores en cero.

Consideramos fundamental para nuestro trabajo el resultado anterior. En realidad, más que el resultado, para nosotros será esencial la tecnología usada en la demostración, pues es ésta la que nosotros imitamos para obtener nuestro teorema de estructura válido para investigar la continuidad de las derivaciones de Lie. A él nos referiremos más adelante.

En [5] R. Banning y M. Mathieu extendieron el teorema de Brešar a los anillos semiprimos. Citemos también el teorema de estructura en el ambiente de las álgebras de von Neumann obtenido por C. R. Miers en [60].

TEOREMA 1.18 ([60; Teorema 3]). *Sea M un álgebra de von Neumann y $D : M \to M$ una derivación de Lie en M. Entonces*

$$D(x) = [a, x] + \lambda(x),$$

donde $a \in M$, y λ es una aplicación lineal de M en $Z(M)$ verificando que $\lambda([a, b]) = 0$, para cualquier $a, b \in M$.

También M. Mathieu ha probado un resultado que generaliza el obtenido por C. R. Miers. Más concretamente, ha probado el siguiente resultado:

TEOREMA 1.19 ([56; Teorema 2]). *Sea A una C^*-álgebra unital verificando las siguientes propiedades:*

a) Todo centralizador esencialmente definido y continuo de A puede ser extendido a un centralizador totalmente definido de A.

b) El segundo ideal de Kaplansky K_2, esto es el ideal generado por los elementos de la forma $[x^2, y]z[x, y] - [x, y]z[x^2, y]$, es esencial.

Entonces para cada derivación de Lie $D : A \to A$ existe una derivación d de A determinada de modo único y una única aplicación lineal ξ de A en $Z(A)$ con la propiedad de que $\xi(xy) = \xi(yx)$ para cualesquiera x e y de A, tales que

$$D = d + \xi.$$

Mencionamos también el teorema de estructura para derivaciones de Lie continuas obtenido por B. E. Johnson [42] como consecuencia del estudio que realiza en ámbiente más general.

TEOREMA 1.20 ([42; Teorema 9.5]). *Sean A una C^*-álgebra, X un A-bimódulo de Banach y D una derivación de Lie continua de A en X. Existen entonces una derivación continua d de A en X y una aplicación ξ lineal y continua de A con valores en $Z(X)$ que aplica los conmutadores en 0 verificando que*

$$D = d + \xi.$$

Desgraciadamente, salvo en situaciones excepcionales, ninguno de los teoremas de estructura anteriores nos ha permitido estudiar el comportamiento analítico de las derivaciones de Lie. Afortunadamente, como hemos dicho, la técnica usada por Brešar en su estudio de la estructura de las aplicaciones de Lie es susceptible de ser imitada para lograr el teorema de estructura que constituirá la base de nuestro estudio analítico. Nuestra aportación al estudio de la estructura de las derivaciones de Lie en un álgebra de Banach queda plasmado en el siguiente resultado.

TEOREMA 1.21. *Sean A un álgebra de Banach compleja unital, D una derivación de Lie en A y P un ideal primitivo de A. Entonces se verifica una de las siguientes condiciones:*

i. El cociente A/P es isomorfo al álgebra de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

ii. Existen una derivación d de A en A/P y una aplicación lineal ξ de A en el centro de A/P verificando que

$$\pi_P D = d + \xi.$$

Demostración. En el caso de que el cociente A/P satisfaga la identidad polinómica S_4 entonces el Teorema 1.7 nos asegura que el álgebra A/P es isomorfa a $\mathbb{C}$ o al álgebra $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si el álgebra A/P es isomorfa a $\mathbb{C}$, tomando $d = 0$ y $\xi = \pi_P D$ aseguramos que se da la condición *ii* y si A es isomorfa a $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ entonces se verificará *i*.

Si el álgebra A/P no satisface la identidad polinómica S_4, vamos a ver que se cumple la condición *ii* enunciada. En primer lugar, recuérdese que habíamos comentado al principio de la sección 1.3 que la traza de la aplicación bilineal L de $A \times A$ en A definida por

$$L(a,b) = D(ab) - (Da)b - a(Db).$$

satisface la propiedad $[q(a), a] = 0$ para todo $a \in A$ y por tanto, aplicando el Teorema 1.10, existen un número complejo λ y funcionales μ y ν en A, con μ lineal, tales que

$$D(a^2) - (Da)a - a(Da) \equiv \lambda a^2 + \mu(a)a + \nu(a)\mathbf{1} \qquad (1.44)$$

para todo $a \in A$. Consideremos ahora la aplicación lineal δ de A en A definida por

$$\delta(a) = D(a) + \lambda a + \frac{1}{2}\mu(a)\mathbf{1}, \quad \forall a \in A.$$

Nuestro primer objetivo es demostrar que $\pi_P\delta$ es una derivación de Jordan de A en A/P, esto es que para $a, b \in A$ se verifica que

$$\delta(a \cdot b) \equiv \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b)$$

donde $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, o equivalentemente que

$$\delta(ab + ba) \equiv \delta(a)b + b\delta(a) + a\delta(b) + \delta(b)a.$$

Usando la información obtenida en (1.44) deducimos que, para cualquier $a \in A$, se verifica:

$$\begin{aligned}
\delta(a^2) &\equiv D(a^2) + \lambda a^2 + \frac{1}{2}\mu(a^2)\mathbf{1} \\
&\equiv (Da)a + a(Da) + \lambda a^2 + \mu(a)a + \nu(a)\mathbf{1} + \lambda a^2 + \frac{1}{2}\mu(a^2)\mathbf{1} \\
&\equiv (Da)a + a(Da) + 2\lambda a^2 + \mu(a)a + \frac{1}{2}\mu(a^2)\mathbf{1} + \nu(a)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned}
\delta(a)a + a\delta(a) &\equiv (Da + \lambda a + \frac{1}{2}\mu(a)\mathbf{1})a + a(Da + \lambda a + \frac{1}{2}\mu(a)\mathbf{1}) \\
&\equiv (Da)a + \lambda a^2 + \frac{1}{2}\mu(a)a + a(Da) + \lambda a^2 + \frac{1}{2}\mu(a)a \\
&\equiv (Da)a + aD(a) + 2\lambda a^2 + \mu(a)a.
\end{aligned}$$

Por tanto, si utilizamos las dos últimas relaciones, podemos deducir que

$$\delta(a^2) - (\delta(a)a + a\delta(a)) \equiv \frac{1}{2}\mu(a^2)\mathbf{1} + \nu(a)\mathbf{1} \in \mathbf{1}\mathbb{C} \quad \forall a \in A \tag{1.45}$$

y en consecuencia, para cualesquiera a y b en A, se tiene que

$$\delta((a+b)^2) - (\delta(a+b)(a+b) + (a+b)\delta(a+b)) + P \in (\mathbf{1} + P)\mathbb{C}. \tag{1.46}$$

Consecuentemente podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
&\delta((a+b)^2) - (\delta(a+b)(a+b) + (a+b)\delta(a+b)) \\
&- \delta(a^2) + (\delta(a)a + a\delta(a)) - \delta(b^2) + (\delta(b)b + b\delta(b)) \equiv \rho(a,b)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

para conveniente funcional bilineal y simétrico ρ de $A \times A$ y podemos deducir que para todo $a, b \in A$ se verifica que:

$$\begin{aligned}
\delta(ab + ba) &\equiv \delta((a+b)^2 - a^2 - b^2) \\
&\equiv \delta((a+b)^2) - \delta(a^2) - \delta(b^2) \\
&\equiv \delta((a+b)^2) - (\delta(a+b)(a+b) + (a+b)\delta(a+b)) \\
&\quad + (\delta(a+b)(a+b) + (a+b)\delta(a+b)) \\
&\quad - \delta(a^2) + (\delta(a)a + a\delta(a)) - (\delta(a)a + a\delta(a)) \\
&\quad - \delta(b^2) + (\delta(b)b + b\delta(b)) - (\delta(b)b + b\delta(b)) \\
&\equiv \delta(a+b)(a+b) + (a+b)\delta(a+b) - (\delta(a)a + a\delta(a)) \\
&\quad - (\delta(b)b + b\delta(b)) + \rho(a,b)\mathbf{1} \\
&\equiv \delta(a)a + \delta(b)a + \delta(a)b + \delta(b)b + a\delta(a) + a\delta(b) + b\delta(a) \\
&\quad + b\delta(b) - (\delta(a)a + a\delta(a)) - (\delta(b)b + b\delta(b)) + \rho(a,b)\mathbf{1} \\
&\equiv \delta(a)b + \delta(b)a + a\delta(b) + b\delta(a) + \rho(a,b)\mathbf{1}
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Si consideramos $c = \delta(a(ab+ba)+(ab+ba)a)$, utilizando (1.47) deducimos que

$$\begin{aligned}
c &\equiv \delta(a)(ab+ba)+\delta(ab+ba)a+a\delta(ab+ba)\\
&\quad +(ab+ba)\delta(a)+\rho(a,ab+ba)\mathbf{1}\\
&\equiv \delta(a)ab+\delta(a)ba+(\delta(a)b+\delta(b)a+a\delta(b)+b\delta(a)+\rho(a,b)\mathbf{1})a\\
&\quad +a(\delta(a)b+\delta(b)a+a\delta(b)+b\delta(a)+\rho(a,b)\mathbf{1})\\
&\quad +ab\delta(a)+ba\delta(a)+\rho(a,ab+ba)\mathbf{1}\\
&\equiv \delta(a)ab+\delta(a)ba+\delta(a)ba+\delta(b)a^2+a\delta(b)a+b\delta(a)a+\rho(a,b)a\\
&\quad +a\delta(a)b+a\delta(b)a+a^2\delta(b)+ab\delta(a)+a\rho(a,b)\\
&\quad +ab\delta(a)+ba\delta(a)+\rho(a,ab+ba)\mathbf{1}\\
&\equiv \delta(a)ab+2\delta(a)ba+2a\delta(b)a+2ab\delta(a)+\delta(b)a^2+\\
&\quad b\delta(a)a+a\delta(a)b+a^2\delta(b)+ba\delta(a)+2\rho(a,b)a+\rho(a,ab+ba)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

y por otro lado, usando la información dada en (1.47) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
c &\equiv \delta(a^2b+aba+aba+ba^2)\\
&\equiv 2\delta(aba)+\delta(a^2b+ba^2)\\
&\equiv 2\delta(aba)+\delta(a^2)b+\delta(b)a^2+a^2\delta(b)+b\delta(a^2)+\rho(a^2,b)\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora de nuevo por (1.47) que:

$$\begin{aligned}
\delta(2a^2) &\equiv 2\delta(a^2)\equiv\delta(a)a+\delta(a)a+a\delta(a)+a\delta(a)+\rho(a,a)\mathbf{1}\\
&\equiv 2\delta(a)a+2a\delta(a)+\rho(a,a)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\delta(a^2)\equiv\delta(a)a+a\delta(a)+\frac{1}{2}\rho(a,a)\mathbf{1}$$

podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
c &\equiv 2\delta(aba)+(\delta(a)a+a\delta(a)+\frac{1}{2}\rho(a,a)\mathbf{1})b+\delta(b)a^2+a^2\delta(b)\\
&\quad +b(\delta(a)a+a\delta(a)+\frac{1}{2}\rho(a,a)\mathbf{1})+\rho(a^2,b)\mathbf{1}\\
&\equiv 2\delta(aba)+\delta(a)ab+a\delta(a)b+\delta(b)a^2+a^2\delta(b)\\
&\quad +b\delta(a)a+ba\delta(a)+\rho(a,a)b+\rho(a^2,b)\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Comparando las dos expresiones que hemos obtenido para c deducimos que:

$$\begin{aligned} & 2\delta(a)ba + 2a\delta(b)a + 2ab\delta(a) + 2\rho(a,b)a + \rho(a, ab+ba)\mathbf{1} \\ \equiv \; & 2\delta(aba) + \rho(a,a)b + \rho(a^2,b)\mathbf{1} \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} 2\delta(aba) \equiv \; & 2\delta(a)ba + 2a\delta(b)a + 2ab\delta(a) + 2\rho(a,b)a \\ & + \rho(a, ab+ba)\mathbf{1} - \rho(a,a)b - \rho(a^2,b)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Dividiendo ahora por 2, para cualesquiera a y b en A obtenemos que

$$\begin{aligned} \delta(aba) \equiv \; & \delta(a)ba + a\delta(b)a + ab\delta(a) + \rho(a,b)a \\ & + \frac{1}{2}\rho(a, ab+ba)\mathbf{1} - \frac{1}{2}\rho(a,a)b - \frac{1}{2}\rho(a^2,b)\mathbf{1} \end{aligned} \tag{1.48}$$

y si z es un número complejo, por (1.48), concluimos que:

$$\begin{aligned} \delta((a+zc)b(a+zc)) \equiv \; & \delta(a+zc)b(a+zc) + (a+zc)\delta(b)(a+zc) \\ & + (a+zc)b\delta(a+zc) + \rho(a+zc,b)(a+zc) \\ & + \frac{1}{2}\rho(a+zc, (a+zc)b + b(a+zc))\mathbf{1} \\ & - \frac{1}{2}\rho(a+zc, a+zc)b \\ & - \frac{1}{2}\rho((a+zc)^2, b)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Identificando ahora el coeficiente de z en ambos miembros de la equivalencia anterior podemos obtener que:

$$\begin{aligned} \delta(abc+cba) \equiv \; & \delta(a)bc + \delta(c)ba + a\delta(b)c + c\delta(b)a \\ & + ab\delta(c) + cb\delta(a) + \rho(c,b)a + \rho(a,b)c - \rho(a,c)b \\ & + \frac{1}{2}\rho(a, cb+bc)\mathbf{1} + \frac{1}{2}\rho(c, ab+ba)\mathbf{1} \\ & - \frac{1}{2}\rho(b, ac+ca)\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Sea $d = \delta(aba^2 + a^2ba)$. Aplicando lo obtenido en (1.49) y que $\delta(a^2) \equiv \delta(a)a + a\delta(a) + \frac{1}{2}\rho(a,a)\mathbf{1}$ deducimos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} d &\equiv \delta(a)ba^2 + \delta(a^2)ba + a\delta(b)a^2 + a^2\delta(b)a \\ &\quad + ab\delta(a^2) + a^2b\delta(a) + \rho(a^2,b)a + \rho(a,b)a^2 \\ &\quad - \rho(a,a^2)b + \frac{1}{2}\rho(a, a^2b + ba^2)\mathbf{1} \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho(a^2, ab + ba)\mathbf{1} - \frac{1}{2}\rho(2a^3, b)\mathbf{1} \\ &\equiv \delta(a)ba^2 + \delta(a)aba + a\delta(a)ba + \frac{1}{2}\rho(a,a)ba \\ &\quad + a\delta(b)a^2 + a^2\delta(b)a + ab\delta(a)a + aba\delta(a) \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho(a,a)ab + a^2b\delta(a) + \rho(a^2,b)a \\ &\quad + \rho(a,b)a^2 - \rho(a,a^2)b + \frac{1}{2}\rho(a, a^2b + ba^2)\mathbf{1} \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho(a^2, ab + ba)\mathbf{1} - \rho(a^3, b)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Por otro lado usando (1.47) y (1.48) obtenemos que:

$$\begin{aligned} d &\equiv \delta(aba^2 + a^2ba) \equiv \delta((aba)a + a(aba)) \\ &\equiv \delta(aba)a + \delta(a)aba + aba\delta(a) + a\delta(aba) + \rho(aba, a)\mathbf{1} \\ &\equiv \delta(a)ba^2 + a\delta(b)a^2 + ab\delta(a)a + \rho(a,b)a^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho(a, ab + ba)a - \frac{1}{2}\rho(a,a)ba - \frac{1}{2}\rho(a^2,b)a \\ &\quad + \delta(a)aba + aba\delta(a) + a\delta(a)ba + a^2\delta(b)a \\ &\quad + a^2b\delta(a) + \rho(a,b)a^2 + \frac{1}{2}\rho(a, ab + ba)a \\ &\quad - \frac{1}{2}\rho(a,a)ab - \frac{1}{2}\rho(a^2,b)a + \rho(aba,a)\mathbf{1} \\ &\equiv \delta(a)ba^2 + a\delta(b)a^2 + ab\delta(a)a + 2\rho(a,b)a^2 \\ &\quad + \rho(a, ab + ba)a - \frac{1}{2}\rho(a,a)ba - \rho(a^2,b)a \\ &\quad + \delta(a)aba + aba\delta(a) + a\delta(a)ba + a^2\delta(b)a \\ &\quad + a^2b\delta(a) - \frac{1}{2}\rho(a,a)ab + \rho(aba,a)\mathbf{1} \end{aligned}$$

y comparando las expresiones obtenidas para d concluimos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho(a,a)ba + \frac{1}{2}\rho(a,a)ab + \rho(a^2,b)a + \rho(a,b)a^2 \\
&-\rho(a,a^2)b + \frac{1}{2}\rho(a,a^2b+ba^2)1 + \frac{1}{2}\rho(a^2,ab+ba)1 - \rho(a^3,b)1 \\
\equiv\ & 2\rho(a,b)a^2 + \rho(a,ab+ba)a - \frac{1}{2}\rho(a,a)ba \\
&-\rho(a^2,b)a - \frac{1}{2}\rho(a,a)ab + \rho(aba,a)1
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
&\rho(a,a)ba + \rho(a,a)ab + 2\rho(a^2,b)a \\
&-\rho(a,b)a^2 - \rho(a,a^2)b - \rho(a,ab+ba)a \\
\equiv\ & \rho(aba,a)1 - \frac{1}{2}\rho(a,a^2b+ba^2)1 \\
&-\frac{1}{2}\rho(a^2,ab+ba)1 + \rho(a^3,b)1 \in \mathbb{C}1 \quad \forall a,b \in A. \qquad (1.50)
\end{aligned}$$

En particular si $a = b$ obtenemos que

$$(\rho(a,a)a^2 - \rho(a,a^2)a) + P \in \mathbb{C}(1+P) \quad \forall a \in A \qquad (1.51)$$

y tendremos en consecuencia que

$$[\rho(a,a)a^2 - \rho(a,a^2)a, c] \equiv 0 \quad \forall a, c \in A \qquad (1.52)$$

y por tanto se verifica que

$$\rho(a,a)[[a^2,c],[a,c]] \equiv 0 \quad \forall a, c \in A. \qquad (1.53)$$

Vamos a demostrar que si $a \in A$, entonces ha de verificarse una de las siguientes afirmaciones:

- $\rho(a,b) = 0$, para todo $b \in A$, o bien
- a satisface que $[[a^2,c],[a,c]] \equiv 0 \quad \forall c \in A$.

Para ello supongamos que $a \in A$ no satisface la condición:

$$[[a^2, c], [a, c]] \equiv 0 \quad \forall c \in A. \tag{1.54}$$

Existe entonces $c_0 \in A$ verificando que

$$[[a^2, c_0], [a, c_0]] \not\equiv 0.$$

y por (1.53) resulta que $\rho(a, a) = 0$ y por tanto $\rho(a, a^2) = 0$ ya que en otro caso, por (1.51), se verificaría que $\rho(a, a^2)a + P \in \mathbb{C}(1 + P)$, y entonces $a + P \in \mathbb{C}(1 + P)$ con lo que a satisfacería la condición (1.54). En consecuencia de (1.50) obtenemos la siguiente información:

$$(2\rho(a^2, b)a - \rho(a, b)a^2 - \rho(a, ab + ba)a) + P \in \mathbb{C}(1 + P), \quad \forall b \in A$$

y por tanto

$$0 \equiv [2\rho(a^2, b)a - \rho(a, ab + ba)a - \rho(a, b)a^2, c_0].$$

De la relación anterior, podemos trivialmente deducir que

$$0 \equiv [[2\rho(a^2, b)a - \rho(a, ab + ba)a - \rho(a, b)a^2, c_0], [a, c_0]]$$

y consecuentemente que

$$-\rho(a, b)[[a^2, c_0], [a, c_0]] \equiv 0 \quad \forall b \in A.$$

Como $[[a^2, c_0], [a, c_0]] \not\equiv 0$ deberá ser $\rho(a, b) = 0$, para cualquier $b \in A$, y así hemos probado que dado $a \in A$, se tiene que verificar una de las siguientes afirmaciones:

- $\rho(a, b) = 0$, para todo $b \in A$.
- a satisface (1.54).

Veamos ya que $\pi_P \delta$ es una derivación de Jordan. Para ello, supongamos que no lo fuese. Por (1.47) existen $a, b \in A$ tales que $\rho(a, b) \neq 0$ y por lo dicho anteriormente, a satisface (1.54).

Si suponemos ahora que xiste $a' \in A$ que no satisface (1.54), entonces $\rho(a', d) = 0$ para cualquier $d \in A$ y como $\rho(a, b) \neq 0$, se verifica que

$$\rho(a + za', b) \neq 0$$

para cualquier complejo z. En consecuencia

$$[[(a + za')^2, u], [a + za', u]] \equiv 0 \quad \forall u \in A.$$

La relación anterior nos permite asegurar que el coeficiente de z^3, que es $[[a'^2, u], [[a', u]]$ pertenece a P, es decir que,

$$[[a'^2, u], [[a', u]] \equiv 0 \quad \forall u \in A,$$

sin embargo no es posible que se verifique la anterior identidad pues estamos suponiendo que a' no satisface (1.54). Por tanto acabamos de ver que si $\pi_P\delta$ no es una derivación de Jordan, todo $a \in A$ satisface (1.54). Obsérvese ahora que si todo elemento de A satisface (1.54), entonces A/P satisface la identidad de Kaplansky y consecuentemente satisface la identidad polinómica S_4, en contra de la hipótesis. Por tanto podemos asegurar que $\pi_P\delta$ es una derivación de Jordan.

Veamos ahora que $\pi_P\delta$ es una derivación. I o hacemos de igual forma que se demuestra el [17; Teorema 3]. Veamos p 'mero que

$$a^b r[a, b] + [a, b]ra^b \equiv 0 \quad \forall a, b, r \in A \tag{1.55}$$

donde $a^b = \delta(ab) - \delta(a)b - a\delta(b)$. Para ello, como acabamos de ver que $\pi_P\delta$ es una derivación de Jordan, es fácil comprobar que:

a) $a^b \equiv -b^a$,

b) $\delta(abc + cba) \equiv \delta(a)bc + a\delta(b)c + ab\delta(c) + \delta(c)ba + c\delta(b)a + cb\delta(a)$, y en particular,

c) $\delta(aba) \equiv \delta(a)ba + a\delta(b)a + ab\delta(a)$.

Consideremos $w = \delta(abrba + barab)$, entonces usando *c)*:

$$\begin{aligned} w &\equiv \delta(a(brb)a + b(ara)b) \equiv \delta(a(brb)a) + \delta(b(ara)b) \\ &\equiv \delta(a)brba + a\delta(brb)a + abrb\delta(a) + \delta(b)arab + b\delta(ara)b + bara\delta(b) \\ &\equiv \delta(a)brba + a\delta(b)rba + ab\delta(r)ba + abr\delta(b)a + abrb\delta(a) \\ &\quad \delta(b)arab + b\delta(a)rab + ba\delta(r)ab + bar\delta(a)b + bara\delta(b) \end{aligned}$$

y por otro lado usando *b)*, obtenemos que

$$\begin{aligned} w &\equiv \delta((ab)r(ba) + (ba)r(ab)) \\ &\equiv \delta(ab)rba + ab\delta(r)ba + abr\delta(ba) + \delta(ba)rab + ba\delta(r)ab + bar\delta(ab). \end{aligned}$$

Comparando estas dos últimas expresiones obtendremos que:

$$\begin{aligned} &\delta(a)brba + a\delta(b)rba + abr\delta(b)a + abrb\delta(a) + \delta(b)arab \\ &+b\delta(a)rab + bar\delta(a)b + bara\delta(b) \\ \equiv\; &\delta(ab)rba + abr\delta(ba) + \delta(ba)rab + bar\delta(ab) \end{aligned}$$

y sacando factor común, podemos escribir

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (\delta(ab) - a\delta(b) - \delta(a)b)rba + (\delta(ba) - \delta(b)a - b\delta(a))rab \\ &\quad + abr(\delta(ba) - \delta(b)a - b\delta(a)) + bar(\delta(ab) - \delta(a)b - a\delta(b)) \end{aligned}$$

Usando ahora *a)*, es fácil comprobar que la expresión anterior puede escribirse como

$$a^b r[b,a] + [b,a]ra^b \equiv 0.$$

Por tanto hemos obtenido lo que afirmábamos, esto es que

$$a^b r[a,b] + [a,b]ra^b \equiv 0, \quad \forall a,b,r \in A.$$

Es conocido por [37; Lema 3.10] que

si R es un anillo primo de característica distinta de 2 y $a,b \in R$ verifican que $axb + bxa = 0$ para cualquier $x \in R$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

En consecuencia si $a^b \not\equiv 0$ para ciertos a y b en A, entonces $[a,b] \equiv 0$. Si fuese $[a,c] \not\equiv 0$ para algún c, entonces para cualquier complejo z, sería $a^{zc} \equiv 0$ y por tanto $a^{b+zc} \not\equiv 0$ si $z \in \mathbb{C}$. Por tanto $[a, b+zc] \equiv 0$ si $z \in \mathbb{C}$, y en consecuencia el coeficiente de z será cero, es decir, $[a,c] \equiv 0$, pero esto no es posible porque estamos suponiendo que $[a,c] \not\equiv 0$. En consecuencia, si $a^b \not\equiv 0$ deberá tenerse $a + P \in Z(A/P)$.

Si existiése $c \in A$ tal que $c + P \notin Z(A/P)$, entonces, $c^e \equiv 0$ para todo $e \in A$, y por tanto $(a + zc)^b \not\equiv 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Como consecuencia $(a + zc) + P \in Z(A/P)$, y por tanto $(c + P) \in Z(A/P)$, en contradicción con lo que estamos suponiendo. Luego acabamos de ver que si $a^b \not\equiv 0$ para ciertos a y b en A, entonces A/P sería conmutativa, pero cómo ésto no ocurre, deducimos que, $a^b \equiv 0$ para cualesquiera elementos a y b de A, o lo que es lo mismo $\pi_P\delta$ es una derivación, que era lo nos habíamos propuesto probar.

Resumiendo, existen un número complejo λ, y un funcional lineal μ en A verificando que la aplicación δ de A en A definida para cualquier elemento a de A, como

$$\delta(a) = D(a) + \lambda a + \frac{1}{2}\mu(a)\mathbf{1}$$

satisface que

$$\delta(ab) - (\delta(a)b + a\delta(b)) \in P, \quad a, b \in A,$$

o lo que es lo mismo, si llamamos $d = \pi_P\delta$, la condición anterior equivale evidentemente a que d es una derivación de A en A/P. Mostraremos a continuación que el complejo λ es cero. Para ello observemos que cualesquiera que sean a y b dos elementos del álgebra A, se verifica que

$$\delta([a,b]) \equiv D([a,b]) + \lambda[a,b] + \frac{1}{2}\mu([a,b])\mathbf{1}$$

y

$$\begin{aligned}
\delta([a,b]) &\equiv [\delta(a),b]+[a,\delta(b)] \\
&\equiv [D(a)+\lambda a+\frac{1}{2}\mu(a)\mathbf{1},b]+[a,D(b)+\lambda b+\frac{1}{2}\mu(b)\mathbf{1}] \\
&\equiv [D(a),b]+\lambda[a,b]+\frac{1}{2}[\mu(a)\mathbf{1},b]+[a,D(b)] \\
&\quad +\lambda[a,b]+\frac{1}{2}[a,\mu(b)\mathbf{1}] \\
&\equiv D([a,b])+2\lambda[a,b].
\end{aligned}$$

Si comparamos estas dos expresiones, obtendremos que

$$\lambda[a,b]\equiv\frac{1}{2}\mu([a,b])\mathbf{1}$$

y como consecuencia

$$\lambda[a,b]+P\in\mathbb{C}(\mathbf{1}+P)$$

de donde obtenemos que

$$\lambda[A/P,A/P]\subset Z(A/P).$$

Si suponemos ahora que λ es distinto de cero, entonces la inclusión anterior conducirá a la inclusión

$$[A/P,A/P]\subset Z(A/P),$$

y en consecuencia si a es un elemento de A, resulta que

$$[a,[a,b]]\equiv 0,\quad \forall b\in A$$

o lo que es lo mismo que

$$[a+P,[a+P,b+P]]=0+P\quad \forall b\in A.$$

Si denotamos por $\mathrm{ad}(a+P)$ a la aplicación de A/P en A/P definida como $\mathrm{ad}(a+P)(b+P)=[a+P,b+P]$, la condición obtenida anteriormente se traduce en que $(\mathrm{ad}(a+P))^2 = 0$ y el Primer Teorema de Posner garantiza que

$$\mathrm{ad}(a+P) = 0.$$

Esto nos lleva a que

$$[a+P, A/P] = 0, \quad \forall a \in A,$$

y consecuentemente $[A/P, A/P] = 0$. Sin embargo, obsérvese que esto no es posible ya que A/P no es conmutativa. La única salida posible entonces es que λ sea cero, y en consecuencia si $a \in A$,

$$\delta(a) = D(a) + \frac{1}{2}\mu(a)\mathbf{1}$$

y en vista de la igualdad anterior, obtendremos que

$$d(a) = \pi_P D(a) + \frac{1}{2}\mu(a)(\mathbf{1}+P)$$

para todo $a \in A$. Definiendo ahora $\xi(a) = \pi_P D(a) - d(a)$, resulta que ξ es una aplicación lineal de A con valores en el centro de A/P, ya que

$$\xi(a) = -\frac{1}{2}\mu(a)(\mathbf{1}+P)$$

y se verifica que $\pi_P D = \xi + d$.

♣

PROBLEMA ABIERTO: Sería interesante conocer cuando D es una derivación de Lie en un álgebra cualquiera A, si para todo ideal P primitivo de A existe una derivación d_P de A en A/P y una aplicación lineal τ_P de A en $Z(A/P)$ tales que

$$\pi_P D = d_P + \tau_P.$$

Capítulo 2

Continuidad de los isomorfismos de Lie.

Con el propósito de estudiar ahora la continuidad de los isomorfismos de Lie y posteriormente la continuidad de las derivaciones de Lie presentaremos un artilugio de uso habitual en los problemas de continuidad automática. Es éste el *subespacio separador*, el cual posee la peculiar facultad de medir la continuidad de los operadores lineales que actúan entre espacios de Banach.

DEFINICIÓN 2.1. Sean X e Y dos espacios normados y sea F un operador lineal de X en Y. Definimos el *subespacio separador* de F, que será denotado por $\mathcal{S}(F)$, como sigue:

$$\mathcal{S}(F) = \{y \in Y : \exists\{x_n\} \text{ en } X \text{ tal que } \lim x_n = 0 \text{ y } \lim F(x_n) = y\}.$$

Es inmediato comprobar que $\mathcal{S}(F)$ es un subespacio vectorial cerrado de Y.

La utilidad del subespacio separador la proporciona el famoso Teorema de la Gráfica Cerrada. Tal teorema, para nuestras necesidades, puede ser enunciado del siguiente modo que involucra la noción de subespacio separador.

TEOREMA 2.2 ([75; Lema 1.2.(*ii*)]). *Sean X e Y dos espacios de Banach y sea F un operador lineal de X en Y. Entonces F es continuo si, y sólo si, $\mathcal{S}(F) = 0$.* ♣

Es justamente la anterior equivalencia la que ha hecho del subespacio separador una de las herramientas más usadas en los problemas de continuidad automática. El lector podrá encontrar en [27 y 75] un estudio detallado acerca de las propiedades y uso del subespacio separador. Seguidamente enunciamos varias propiedades básicas del subespacio separador de uso frecuente en lo que resta de la Memoria.

PROPOSICIÓN 2.3 ([75; Lema 1.3]). *Sean X, Y y Z espacios de Banach. Si F es un operador lineal de X en Y y R es un operador lineal continuo de Y en Z, entonces*

i. *RF es continuo si, y sólo si, $R\mathcal{S}(F) = 0$.*

ii. $\mathcal{S}(RF) = \overline{R(\mathcal{S}(F))}$. ♣

2.1 Isomorfismos de Lie en álgebras de Banach.

Nuestra intención es estudiar la continuidad de los isomorfismos de Lie entre álgebras de Banach semisimples cualesquiera. La investigación que llevaremos a cabo culminará con la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 2.4. *Sean A y B álgebras de Banach semisimples y sea Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B. Entonces el subespacio separador* *de Φ está contenido en el centro de B. Consecuentemente, Φ es continuo si el centro de B es trivial.*

Iniciamos el estudio del comportamiento analítico de los isomorfismos de Lie entre álgebras de Banach comprobando que el subespacio separador de un isomorfismo de Lie de un álgebra de Banach A sobre otra B es un ideal de Lie de B. En efecto, si A y B son álgebras de Banach y Φ es un isomorfismo de A sobre B, puesto que $\mathcal{S}(\Phi)$ es un subespacio vectorial de B, comprobemos que $[c, b] \in \mathcal{S}(\Phi)$ para todo $c \in \mathcal{S}(\Phi)$ y $b \in B$. Cómo $c \in \mathcal{S}(\Phi)$, existe $\{a_n\}$ en A verificando que $\lim a_n = 0$ y $\lim \Phi(a_n) = c$. Entonces

$$[c, b] = [\lim \Phi(a_n), b] = \lim[\Phi(a_n), b] = \lim \Phi[a_n, \Phi^{-1}(b)],$$

y puesto que la sucesión $\{[a_n, \Phi^{-1}(b)]\}$ de A verifica que $\lim[a_n, \Phi^{-1}(b)] = 0$ resulta que $[c, b] \in \mathcal{S}(\Phi)$.

LEMA 2.5. *Sean A y B álgebras de Banach y sea Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B. Entonces para cualquier $b \in \mathcal{S}(\Phi)$, el operador* $\mathrm{ad}(b)$, *es cuasinilpotente.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $FM(B)$ a la subálgebra plena de $L(B)$ generada por los operadores $\{\mathrm{ad}(b) : b \in B\}$ y sea $W(B)$ el subespacio formado por aquellos elementos b de B para los que $\mathrm{ad}(b)$ está en el radical de $FM(B)$. El mayor subespacio de B $FM(B)$-invariante (que es obviamente un ideal de Lie de B) contenido en $W(B)$ es el radical débil de B^-. En [69; Proposición 1.9] A. Rodríguez prueba que

> *si A y B son dos álgebras (no necesariamente asociativas) normadas completas y Φ es un isomorfismo de A sobre B, entonces el subespacio separador de Φ está incluido en el radical débil de B.*

De lo anterior deducimos que el subespacio separador de Φ está contenido en el radical débil del álgebra de Lie B^-, y en consecuencia si $b \in \mathcal{S}(\Phi)$, el operador $\mathrm{ad}(b)$ es cuasinilpotente. ♣

Es obvio que el radical débil del álgebra de Lie asociada a un álgebra de Banach A contiene al centro de A. Desafortunadamente, no conocemos si el radical débil del álgebra de Lie de un álgebra de Banach semisimple es igual al centro del álgebra. Por ello, para probar nuestro teorema, requeriremos algún trabajo adicional. Nuestro método consiste en probar que $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$ para cualquier ideal primitivo P de B. Como es usual en continuidad automática distinguiremos entre ideales primitivos de codimensión finita e ideales primitivos de codimensión infinita. Recogemos seguidamente un par de resultados bien conocidos que serán necesarios en lo sucesivo.

LEMA 2.6 ([36; Teorema 2]). *Si U es un ideal de Lie de un anillo simple R de característica distinta de 2 se verifica una de las siguientes condiciones:*

i. $U \subset Z(R)$.

ii. $[R, R] \subset U$. ♣

LEMA 2.7 ([36; Corolario 1]). *Si R es un anillo simple y no es un cuerpo, entonces $[R, R] = R$.* ♣

LEMA 2.8. *Sean A y B álgebras de Banach complejas, Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B y P un ideal primitivo de B de codimensión finita. Entonces $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$.*

DEMOSTRACIÓN. Es bien conocido que B/P es un álgebra de Banach simple, de hecho B/P es isomorfa al álgebra de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ para cierto $n \in \mathbb{N}$.

Si fuese $\dim(B/P) = 1$, entonces B/P sería conmutativa y obtendríamos la inclusión $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$.

Supongamos ahora que $\dim(B/P) > 1$. Como B/P es simple y $\pi_P(\mathcal{S}(D))$ es un ideal de Lie de B/P por el Lema 2.6 podemos concluir que $\pi_P(\mathcal{S}(D)) \subset Z(B/P)$ o bien $[B/P, B/P] \subset \pi_P(\mathcal{S}(D))$. Es sabido además por el Lema 2.7 que $[B/P, B/P] = B/P$. Por tanto $\pi_P(\mathcal{S}(\Phi))$ está contenido en el centro de B/P y en consecuencia $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$ o bien se tendrá que $\pi_P(\mathcal{S}(\Phi)) = B/P$.

Obsérvese que el Lema 2.5 garantiza que el operador $\mathrm{ad}(b)$ de B en sí mismo es un operador cuasinilpotente para cualquier $b \in \mathcal{S}(\Phi)$ y como consecuencia el operador $\mathrm{ad}(b + P)$ de B/P en sí mismo es también cuasinilpotente para cualquier $b + P \in \pi_P(\mathcal{S}(\Phi))$. Si ocurriese que $\pi_P(\mathcal{S}(\Phi)) = B/P$, resultaría que $\mathrm{ad}(b + P)$ sería un operador cuasinilpotente cualquiera que fuese $b + P$ en B/P. Si llamamos $b + P$ a la matriz con 1 en su entrada superior izquierda y 0 en las demás entradas y $c + P$ a la matriz con 1 en su entrada superior derecha y 0 en las demás entradas, en vista de que $\mathrm{ad}(b + P)(c + P) = c + P$, resulta que 1 está en el espectro de $\mathrm{ad}(b + P)$, lo que contradice la cuasinilpotencia del operador $\mathrm{ad}(b + P)$. En consecuencia, la única posibilidad es que se verifique la inclusión $\pi_P(\mathcal{S}(\Phi)) \subset Z(B/P)$ y por tanto $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$. ♣

Para el estudio de la inclusión $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$ cuando P sea un ideal primitivo de codimensión infinita utilizaremos el teorema de estructura de los isomorfismos de Lie en álgebras de Banach que obtuvimos en el Capítulo 2.

LEMA 2.9. *Sean A y B álgebras de Banach complejas unitales y Φ un isomorfismo de Lie de A sobre B. Entonces se verifica que*

$$\Phi([[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]]) \in \mathrm{Rad}(B)$$

para cualesquiera $a_1 \in A$ y $a_2 \in \Phi^{-1}(\mathcal{S}(\Phi))$. En consecuencia, si B es *semisimple, entonces se verifica que* $[[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]] = 0$ *para cualesquiera* $a_1 \in A$ *y* $a_2 \in \Phi^{-1}(\mathcal{S}(\Phi))$.

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente si probamos que

$$\Phi([[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]]) \in P$$

para cualquier ideal primitivo P de B, y cualesquiera elementos $a_1 \in A$ y $a_2 \in \Phi^{-1}(\mathcal{S}(\Phi))$, habremos finalizado la demostración.

Si se verifican las condiciones *i* o *ii* del Teorema 1.15, es decir si B/P es isomorfo a $\mathbb{C}$ o B/P es isomorfo al álgebra de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, el Lema 2.8 nos garantiza que $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$. Si por el contrario se satisfacen las condiciones *iv* o *v*, entonces es fácil comprobar que $\pi_P(\mathcal{S}(\Phi)) \subset Z(B/P)$ y por tanto $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$. En estos cuatro casos obtenemos que

$$\Phi([a_1, a_2]) = [\Phi(a_1), \Phi(a_2)] \in [B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P,$$

para cualesquiera $a_1 \in A$ y $a_2 \in \Phi^{-1}(\mathcal{S}(\Phi))$, lo que nos permite afirmar que

$$\Phi([[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]]) = [\Phi([a_1^2, a_2]), \Phi([a_1, a_2])] \in [\Phi([a_1^2, a_2]), P] \subset P.$$

El único caso que nos queda por discutir es cuando se verifica la condición *iii*, es decir el caso en que existe un funcional lineal μ de A verificando que

$$\pi_P\Phi(a^2) - \mu(a)\pi_P\Phi(a) \in Z(B/P)$$

para todo $a \in A$. Como quiera que B/P es un álgebra centralmente cerrada, deducimos que

$$\pi_P\Phi(a^2) - \mu(a)\pi_P\Phi(a) \in \mathbb{C}(1 + P)$$

de donde resultará que para $a_1 \in A$, $\Phi(a_1^2) \equiv \rho 1 + \mu(a_1)\Phi(a_1)$ para conveniente número complejo ρ, y por tanto

$$\begin{aligned} \Phi([[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]]) &\equiv [[\Phi(a_1^2), \Phi(a_2)], [\Phi(a_1), \Phi(a_2)]] \\ &\equiv [[\mu(a_1)\Phi(a_1), \Phi(a_2)], [\Phi(a_1), \Phi(a_2)]] \equiv 0, \end{aligned}$$

Esto prueba que $\Phi([[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]]) \in P$.

En cualquier caso, si P es un ideal primitivo de B obtenemos que para cualesquiera $a_1 \in A$ y $a_2 \in \Phi^{-1}(\mathcal{S}(\Phi))$ se verifica que

$$\Phi([[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]]) \in P,$$

quedando así completa esta demostración. ♣

LEMA 2.10. *Sea A un álgebra de Banach primitiva compleja y sea L un ideal de Lie de A verificando que $[[a_1^2, a_2], [a_1, a_2]] = 0$ para cualesquiera $a_1, a_2 \in L$. Se satisface entonces una de las siguientes propiedades:*

i. $L \subset Z(A)$.

ii. $\dim(A) < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. En [51; Lema 8] se prueba que

> *si R es un anillo primo de característica distinta de 2, y U es un ideal de Lie de R, entonces $U \subset Z(R)$ o existe un ideal distinto de cero I de R verificando que $[I, R] \subset U$.*

Si no se verifica *i* podemos asegurar entonces la existencia de un ideal I distinto de cero de A verificando que $[I, A] \subset L$. Esta inclusión junto con la hipótesis nos permite asegurar que

$$[[[a_1, a_2]^2, [a_3, a_4]], [[a_1, a_2], [a_3, a_4]]] = 0$$

para cualesquiera $a_1, a_2, a_3, a_4 \in I$. Consecuentemente, si denotamos por J a la clausura de I en A, J es un álgebra de Banach compleja primitiva que satisface la identidad polinómica

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[[x_1, x_2]^2, [x_3, x_4]], [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]].$$

El Teorema 1.7 nos garantiza que la dimensión de J es finita. Si para cada $a \in A$, L_a es el operador lineal multiplicación por la izquierda por a de J en sí mismo, como A es un álgebra primitiva y por tanto prima, la aplicación $a \mapsto L_a$ de A en $L(J)$ es evidentemente inyectiva y por tanto la dimensión de A es menor o igual que la dimensión de $L(J)$. En consecuencia, la dimensión de A es finita. ♣

Demostración del Teorema 2.4. Supongamos en primer lugar que A y B son además complejas y unitales. Aplicamos el Lema 2.9 al isomorfismo Φ^{-1}, y dada la semisimplicidad de A obtenemos que

$$[[b_1^2, b_2], [b_1, b_2]] = 0$$

para cualesquiera $b_1 \in B$ y $b_2 \in \Phi(\mathcal{S}(\Phi^{-1}))$. Es fácil comprobar que $\Phi(\mathcal{S}(\Phi^{-1})) = \mathcal{S}(\Phi)$.

Si vemos que cuando P es un ideal primitivo de B se verifica la inclusión $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$, podremos deducir que $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset \mathrm{Rad}(B) = 0$, y por tanto obtendremos que $\mathcal{S}(\Phi) \subset Z(B)$ como queríamos. Para comprobar la inclusión $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$ observemos que $\pi_P \mathcal{S}(\Phi)$ es un ideal de Lie de B/P que satisface las hipótesis del Lema 2.10. En consecuencia $\pi_P \mathcal{S}(\Phi) \subset Z(B/P)$ o bien $\dim(B/P) < \infty$. En la primera situación será $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$, cómo se requiere. En la segunda situación aplicamos el Lema 2.8 para obtener que $[B, \mathcal{S}(\Phi)] \subset P$.

Supongamos ahora que A y B son álgebras de Banach complejas de manera que A o B no tienen unidad. Las unitizaciones A_1 y B_1 de A y B, respectivamente, son álgebras semisimples y podemos extender Φ a un isomorfismo de Lie Φ_1 de A_1 sobre B_1, definiendo $\Phi_1(1,0) = (1,0)$. Por la primera parte de la demostración podemos concluir que $\mathcal{S}(\Phi_1) \subset Z(B_1)$. Por otro lado, es inmediato que $\mathcal{S}(\Phi) \subset \mathcal{S}(\Phi_1)$ resultando entonces que $\mathcal{S}(\Phi) \subset B \cap \mathcal{S}(\Phi_1) \subset B \cap Z(B_1) = Z(B)$.

Finalmente, si A y B son álgebras de Banach reales, entonces consideramos sus complexificaciones $A_{\mathbb{C}}$ y $B_{\mathbb{C}}$ y extendemos Φ a un isomorfismo de Lie $\Phi_{\mathbb{C}}$ de $A_{\mathbb{C}}$ sobre $B_{\mathbb{C}}$ definiendo $\Phi_{\mathbb{C}}(a_1 + ia_2) = \Phi(a_1) + i\Phi(a_2)$

para $a_1, a_2 \in A$. Como $A_{\mathbb{C}}$ y $B_{\mathbb{C}}$ son álgebras de Banach complejas semisimples, obtenemos que $\mathcal{S}(\Phi_{\mathbb{C}}) \subset Z(B_{\mathbb{C}})$. Por otro lado, resulta que $\mathcal{S}(\Phi) \subset B \cap \mathcal{S}(\Phi_{\mathbb{C}})$ y, en consecuencia, $\mathcal{S}(\Phi) \subset B \cap Z(B_{\mathbb{C}}) = Z(B)$. ♣

Desafortunadamente desconocemos si el Teorema 2.4 mantiene también su validez para epimorfismos de Lie entre álgebras de Banach complejas semisimples cualesquiera.

Problema abierto: Sean A y B álgebras de Banach semisimples y sea Φ un epimorfismo de Lie de A sobre B. ¿Está el subespacio separador de Φ contenido en el centro de B?

2.2 Isomorfismos de Lie de la parte antisimétrica.

Respecto al estudio de los isomorfismos de Lie definidos en la parte antisimétrica de un anillo con involución la teoría ha sido éxitosamente desarrollada (véanse [8, 53 y 70]). También los isomorfismos de Lie en la parte antisimétrica de ciertas álgebras de Banach fueron estudiados por P. De la Harpe en [33] considerando los siguientes ejemplos.

Ejemplos 2.11. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $L(H)$ la C^*-álgebra primitiva de todos los operadores lineales y continuos en H. Para cada $a \in L(H)$ denotemos por $a^\bullet$ al operador adjunto de a.

1. Si J es una conjugación en H, entonces es fácil comprobar que la aplicación $*$ de $L(H)$ en sí mismo definida por $a^* = Ja^\bullet J$ es una involución lineal en $L(H)$. Si J es una anticonjugación de H, entonces la aplicación $a^* = -Ja^\bullet J$ es también una involución lineal en $L(H)$. Los elementos antisimétricos relativos a las precedentes involuciones son álgebras de Banach-Lie complejas clásicas de operadores acotados [33; Definición 1].
2. Denotemos por C_∞ el conjunto de todos los operadores lineales compactos en H y sea $\|\cdot\|_\infty$ la norma usual de operadores. Para

$1 \leq p < \infty$, sea C_p el conjunto de los operadores lineales compactos a de H para los que $\|a\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^p)^{1/p} < \infty$, donde $\{\mu_n\}$ es la sucesión de valores propios del operador $(a^\bullet a)^{1/2}$ ordenada de manera decreciente y considerando cada valor propio tantas veces como indique su multiplicidad. Es bien conocido [30; XI.9, XI. 10 y XI.14] que C_p es un ideal bilátero de $L(H)$ y que C_p es un álgebra de Banach compleja para la norma $\|\cdot\|_p$. Como C_p contiene todos los operadores lineales continuos de rango finito dimensional, podemos asegurar que C_p es un álgebra primitiva. Las involuciones introducidas en el ejemplo anterior dejan invariante a C_p y sus partes antisimétricas son álgebras de Banach-Lie complejas clásicas de operadores compactos [33; Definición 4].

En [33; Corolario pág. II.14. y Proposición 12] P. De la Harpe probó la continuidad de los $\bullet$-automorfismos de Lie de todas las álgebras de Banach-Lie de los ejemplos anteriores. Es importante notar que todas las álgebras consideradas en los ejemplos anteriores son complejas y primitivas y en consecuencia son centralmente cerradas. El objetivo de esta sección es extender este resultado al contexto de las álgebras de Banach complejas semisimples primas centralmente cerradas. Nuestra aportación será el siguiente teorema:

TEOREMA 2.12. *Sean A y B álgebras de Banach complejas primas centralmente cerradas con involución lineal y supongamos que A es además semisimple. Si Φ es un isomorfismo de Lie de K_B sobre K_A, entonces Φ es continuo.*

El anterior resultado puede ser ahora particularizado al ámbito de las C*-álgebras primas y las álgebras de Banach complejas primitivas (puesto que estas situaciones sabemos que las álgebras son centralmente cerradas) para obtener los dos siguientes corolarios.

COROLARIO 2.13. *Los automorfismos de Lie de la parte antisimétrica de un álgebra de Banach compleja primitiva con involución lineal son continuos.*

COROLARIO 2.14. *Los automorfismos de Lie de la parte antisimétrica de una C^*-álgebra prima con involución lineal son continuos.*

Obsérvese que ambos corolarios generalizan a las C^*-álgebras e incluso a las álgebras de Banach el estudio de la continuidad de los automorfismos llevado a cabo por P. de la Harpe.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.12. Evidentemente, si K_B tiene dimensión finita, resulta que Φ es continuo.

Supongamos ahora que K_B tiene dimensión infinita, lo cual repercute obviamente en el hecho de que también K_A tiene dimensión infinita. En consecuencia tanto A como B tienen dimensión infinita. Obsérvese además que la involución es la identidad en el centro del álgebra, propiedad conocida en la teoría de anillos como que la involución es de primera especie.

En estas circunstancias podemos aplicar [8; Teorema 3] que establece lo siguiente

> *si R y R' son anillos primos provistos de sendas involuciones de primera especie y de característica distinta de 2 y 3 y con $(RC(R) : C(R)) \neq 1, 4, 9, 16, 25, 64$, entonces cualquier isomorfismo de Lie de la parte antisimétrica K de R sobre la parte antisimétrica K' de R' puede extenderse de forma única a un isomorfismo de la subálgebra $< K >$ de R generada por K sobre la subálgebra $< K' >$ de R' generada por K'.*

Consecuentemente Φ puede extenderse a un isomorfismo ϕ de $< K_B >$ sobre $< K_A >$ donde $< K_A >$ denota la subálgebra de A generada por K_A, y $< K_B >$ denota la subálgebra de B generada por K_B.

Observémos ahora que por [8; Observación 3] o si se quiere por [77; Observación 1.3] (ambas basadas en la demostración del [37; Teorema 2.2], podemos asegurar que $< K_A >$, contiene un ideal no cero I_A de A y $< K_B >$, contiene un ideal no cero I_B de B.

Procederemos a probar ahora que B es semisimple. Para ello, como I_A es un ideal bilátero de A y por tanto de $< K_A >$, podemos asegurar que

$$0 = \mathrm{Rad}(A) \cap I_A = \mathrm{Rad}(I_A) = \mathrm{Rad}(< K_A >) \cap I_A.$$

Como A es un álgebra prima, tenemos garantizado que $\mathrm{Rad}(< K_A >) = 0$, y como $< K_B >$ es isomorfo a $< K_A >$ obtenemos que $\mathrm{Rad}(< K_B >) = 0$. Por otro lado

$$0 = \mathrm{Rad}(< K_B >) \cap I_B = \mathrm{Rad}(I_B) = \mathrm{Rad}(B) \cap I_B,$$

lo que demuestra con el mismo razonamiento de antes que $\mathrm{Rad}(B) = 0$, como afirmábamos. Obsérvese que por el Teorema de unicidad de la norma de Johnson [40], podemos deducir que la involución de B es continua y por tanto K_B es una subálgebra de Lie cerrada de B. El mismo razonamiento nos sirve para justificar que K_A es una subálgebra de Lie cerrada de A.

Consideremos la restricción de ϕ a I_B, $\phi : I_B \to A$, y veamos que si $b \in \mathcal{S}(\phi) \cap \phi(I_B)$, entonces $\mathrm{r}(b) = 0$. Sea entonces $\{a_n\}$ una sucesión en I_B tal que $\lim a_n = 0$ y $\lim \phi(a_n) = b$ y pongamos $b = \phi(a)$ para algún $a \in I_B$. Probaremos que $\mathrm{r}(\phi(a)) = 0$. Seguimos para ello la línea establecida en [67]. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$ consideremos

$$p_n(z) = z\phi(a_n) + (\phi(a) - \phi(a_n))$$

y observemos que

$$\mathrm{r}(p_n(z)) \leq \|p_n(z)\| \leq |z|\|\phi(a_n)\| + \|\phi(a) - \phi(a_n)\|$$

y que $p_n(1) = \phi(a)$.

Por otro lado, es inmediato que

$$\mathrm{Sp}(\phi(za_n + (a - a_n)), A) \subset \mathrm{Sp}(za_n + (a - a_n), I_B).$$

Como I_B es un ideal bilátero de B obtenemos que

$$\mathrm{Sp}(za_n + (a - a_n), I_B) = \mathrm{Sp}(za_n + (a - a_n), B).$$

y consecuentemente

$$\mathrm{r}(p_n(z)) = \mathrm{r}(\phi(za_n + (a - a_n)) \leq \mathrm{r}(za_n + (a - a_n)) \leq |z|\|a_n\| + \|a - a_n\|.$$

En virtud de [67; Lema 2], para cualquier $R > 0$ es

$$\mathrm{r}(p_n(1))^2 \leq \sup_{|z|=R} \mathrm{r}(p_n(z)) \sup_{|z|=1/R} \mathrm{r}(p_n(z))$$

y por tanto

$$\mathrm{r}(\phi(a))^2 \leq (R\|a_n\| + \|a - a_n\|)(R^{-1}\|\phi(a_n)\| + \|\phi(a) - \phi(a_n)\|).$$

Haciendo ahora tender n a ∞ obtenemos

$$\mathrm{r}(\phi(a))^2 \leq \|a\|R^{-1}\|\phi(a)\|$$

y haciendo ahora tender R a ∞, resulta que $\mathrm{r}(\phi(a))^2 = 0$, y por tanto $\mathrm{r}(\phi(a)) = 0$.

Veamos ahora para finalizar que Φ es continuo. Para comprobar esta propiedad consideremos una sucesión $\{a_n\}$ en K_B de forma que $\lim a_n = 0$, y $\lim \Phi(a_n) = b$ para algún $b \in K_A$. Por ser Φ biyectiva, existe $a \in K_B$ verificando que $\Phi(a) = b$. Si $a' \in I_B$ y $c \in I_A$, resulta que $\{a_n a' \phi^{-1}(c)\}$ es una sucesión en I_B convergiendo a cero y $\lim \phi(a_n a' \phi^{-1}(c)) = \phi(aa'\phi^{-1}(c))$. Podemos en consecuencia obtener que $\mathrm{r}(\phi(aa'\phi^{-1}(c)) = \mathrm{r}(\phi(aa')c) = 0$. En vista de que c era arbitrario en I_A resulta que $\phi(aa')I_A$ está en el radical de A y por tanto, $\phi(aa') = 0$. Como a' era también arbitrario en I_B podemos asegurar que que aI_B=0 y, por ser B un álgebra prima, obtenemos que $a = 0$, luego $b = \Phi(a) = 0$.

Por el Teorema de la Gráfica Cerrada finalmente se obtiene que Φ es continuo. ♣

Queda abierta la siguiente cuestión:

PROBLEMA ABIERTO: Sean A y B álgebras de Banach complejas con involución lineal y supongamos que A es además semisimple. ¿Cualquier isomorfismo de Lie Φ de K_B sobre K_A es continuo?

Capítulo 3

Continuidad de las derivaciones de Lie.

La continuidad de las derivaciones constituye un problema fundamental en el campo de las álgebras de Banach. Tres son los tipos de derivaciones consideradas tradicionalmente: derivaciones, derivaciones de Jordan y derivaciones de Lie. Las derivaciones de Jordan son las derivaciones asociadas a la estructura de Jordan del álgebra mientras que las derivaciones de Lie son las derivaciones asociadas a la estructura de Lie de ésta.

La continuidad de las derivaciones ordinarias es uno de los más clásicos problemas planteados en el marco de las álgebras de Banach. En 1968, B. E. Johnson [41] probó la continuidad de cualquier derivación en un álgebra de Banach conmutativa semisimple, resultado que fue extendido por el propio B. E. Johnson y por A. M. Sinclair en [43] demostrando el siguiente teorema:

TEOREMA 3.1. *Sea D una derivación en un álgebra de Banach semisimple A. Entonces D es continua.*

En 1970, A. M. Sinclair conjeturó que toda derivación de Jordan en un álgebra de Banach semisimple es continua. Resultado que fue encontrado cierto, como consecuencia del Teorema de Johnson y Sinclair, cuando en 1975, J. M. Cusak [26] probó el siguiente resultado:

TEOREMA 3.2. *Toda derivación de Jordan en un anillo semiprimo libre de 2 torsión es una derivación ordinaria.*

Para un álgebra de Banach cualquiera, la información que se tiene acerca del comportamiento de una derivación de Jordan puede ser deducida de los siguientes resultados de [81].

TEOREMA 3.3. *Sea D una derivación de un álgebra de Jordan-Banach J. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

i. D es continua si J es primitiva.

ii. El conjunto de ideales primitivos P de J para los que no se verifica la inclusión $D(P) \subset P$ es finito y todos estos ideales excepcionales proporcionan cocientes finito dimensionales o bien cuadráticos.

No es difícil convencerse de la importancia del estudio de las derivaciones de Lie. Basta con señalar que la derivada de Lie resulta ser una operación básica usada frecuentemente en Geometría Diferencial, Relatividad General, Mecánica Hamiltoniana y Mecánica Continua. Al estudio, pues, de la continuidad de las derivaciones de Lie dedicamos este capítulo.

3.1 Derivaciones de Lie en álgebras de Banach.

Recordamos al lector que el subespacio separador, $\mathcal{S}(D)$, de una derivación de Lie D en un álgebra de Banach A nos permite cuantificar la continuidad de D, siendo D continua sólo en el caso de ser

$\mathcal{S}(D) = 0$. Una propiedad fundamental de $\mathcal{S}(D)$ que frecuentemente será usada en este capítulo es que $\mathcal{S}(D)$ es un ideal de Lie de A. En efecto sean $b \in \mathcal{S}(D)$ y $a \in A$ y comprobemos que $[a,b] \in \mathcal{S}(D)$. Puesto que $b \in \mathcal{S}(D)$, existe una sucesión $\{a_n\}$ en A tal que $\lim a_n = 0$ y $\lim D(a_n) = b$. En consecuencia, como

$$\begin{aligned} [a,b] &= [a, \lim D(a_n)] = \lim[a, D(a_n)] \\ &= \lim D([a,a_n]) - \lim[Da, a_n] = \lim D([a,a_n]) \end{aligned}$$

resulta que $\{[a,a_n]\}$ es una sucesión en A, $\lim([a,a_n]) = 0$ y $[a,b] = \lim D([a,a_n])$. Por tanto $[a,b] \in \mathcal{S}(D)$.

Nuestros esfuerzos van ahora encaminados a demostrar el siguiente teorema que constituye nuestra principal aportación al estudio de la continuidad de las derivaciones de Lie.

TEOREMA 3.4. *Sea D una derivación de Lie en un álgebra de Banach semisimple A. Entonces el subespacio separador de D está contenido en el centro de A. En consecuencia, D es continua si el centro de A es cero.*

En lo que sigue procederemos a la prueba de lo anterior, para lo cual estableceremos previamente ciertos resultados que nos son necesarios. El primero de los resultados que presentamos proporciona el sustento algebraico para usar una muy clásica línea de demostración en continuidad automática conocida con el nombre de "*gliding hump procedure*".

LEMA 3.5 ([43; Teorema 2.2]). *Sea A un álgebra de Banach y X un A-módulo izquierdo de Banach irreducible de dimensión infinita. Existen entonces sucesiones $\{a_n\}$ en A y $\{x_n\}$ en X verificando las siguientes propiedades:*

i. $a_n \cdots a_1 x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii. $a_{n+1} a_n \cdots a_1 x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

El sustento analítico para la aplicación del argumento antes anunciado es proporcionado por el siguiente resultado que ilustra uno de los principios fundamentales en continuidad automática.

LEMA 3.6 ([79; Proposición 1.3]). *Sean X e Y espacios de Banach, $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores lineales y continuos de X en sí mismo y para cada natural n, sea R_n un operador lineal continuo de Y en otro espacio de Banach Y_n. Si F es un operador lineal de X en Y tal que*

$$R_n F T_1 \cdots T_m \text{ es continuo para } m > n,$$

existe entonces un natural N tal que

$$R_n F T_1 \cdots T_n \text{ es continuo para } n \geq N.$$

El camino está ya preparado para emprender la marcha.

LEMA 3.7. *Sea A un álgebra de Banach compleja semisimple con unidad. Si D es una derivación de Lie de A y P es un ideal primitivo de A, entonces se verifica una de las siguientes condiciones:*

i. La codimensión de P es finita.

ii. $[A, \mathcal{S}(D)] \subset P$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que P no es de codimensión finita y veamos entonces que $[A, \mathcal{S}(D)] \subset P$. El Teorema 1.21 nos permite asegurar que existen una derivación d de A en A/P y una aplicación lineal ξ de A en el centro de A/P verificando que

$$\pi_P D = d + \xi.$$

Nuestro primer objetivo será demostrar que $\mathcal{S}(d) = 0$. Consideremos para ello un A-módulo izquierdo de Banach complejo irreducible de dimensión infinita X tal que

$$P = \{a \in A : aX = 0\}$$

y sean $\{a_n\}$ en A y $\{x_n\}$ en X las sucesiones cuya existencia se garantiza en el Lema 3.5, esto es para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \cdots a_1 x_n \neq 0$$

$$a_{n+1} a_n \cdots a_1 x_n = 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea T_n el operador lineal y continuo de A en A definido por

$$T_n(a) = a a_n$$

y sea R_n el operador lineal y continuo de A/P en X definido por

$$R_n(a + P) = a x_n.$$

Comprobemos seguidamente que, para $m > n$, el operador lineal $R_n d T_1 \cdots T_m$ de A en X es continuo. En efecto, si $m > n$ y $a \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned}
R_n d T_1 \cdots T_m(a) &= R_n d(a a_m \cdots a_1) \\
&= d(a a_m \cdots a_1) x_n \\
&= d(a) a_m \cdots a_1 x_n + a d(a_m) \cdots a_1 x_n + \ldots \\
&\quad + a a_m a_{m-1} \cdots d(a_1) x_n \\
&= a a_m a_{m-1} \cdots d(a_{n+1}) a_n \cdots a_1 x_n + \ldots \\
&\quad + a a_m a_{m-1} \cdots d(a_1) x_n \\
&= R_{a_m a_{m-1} \cdots d(a_{n+1}) a_n \cdots a_1 x_n}(a) + \ldots \\
&\quad + R_{a_m a_{m-1} \cdots d(a_1) x_n}(a)
\end{aligned}$$

donde para $x \in X$, notamos R_x al operador lineal y continuo de A en X definido por $R_x(a) = ax$.

Por el Lema 3.6 podemos asegurar que existe un natural N tal que $R_n d T_1 \cdots T_n$ es continuo para $n \geq N$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea S_n el operador lineal y continuo de A/P en A/P definido por

$$S_n(a + P) = a a_n + P.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}(dT_1\cdots T_n - S_1\ldots S_n d)(a) &= d(aa_n\cdots a_1) - d(a)a_n\cdots a_1\\ &= ad(a_n)\cdots a_1 + aa_n d(a_{n-1})\cdots a_1\\ &\quad +\cdots + aa_n\cdots d(a_1)\end{aligned}$$

es inmediato que $dT_1\cdots T_n - S_1\cdots S_n d$ es un operador continuo, y por tanto $R_n dT_1\cdots T_n - R_n S_1\cdots S_n d$ es también un operador continuo. Puesto que $R_n dT_1T_2\cdots T_n$ es continuo para $n\geq N$, podemos afirmar que el operador $R_nS_1\cdots S_n d$ también es continuo si $n\geq N$, y consecuentemente por la Proposición 2.3 deducimos que

$$0 = R_nS_1\cdots S_n\mathcal{S}(d) = \mathcal{S}(d)a_n\ldots a_1x_n.$$

Por otro lado, ya que $a_n\cdots a_1x_n\neq 0$ es $Aa_n\cdots a_1x_n = X$. Puesto que d es una derivación de A en A/P, resulta que $\mathcal{S}(d)$ es un ideal bilátero de A/P, y en consecuencia

$$\mathcal{S}(d)X = \mathcal{S}(d)(A/P)a_n\cdots a_1x_n\subset \mathcal{S}(d)a_n\cdots a_1x_n = 0.$$

Esto nos permite deducir que $\mathcal{S}(d)=0$. Como $\pi_P D = d+\xi$ siendo ξ una aplicación lineal de A en el centro de A/P, resulta que $\mathrm{ad}(\dot a)\pi_P D = \mathrm{ad}(\dot a)d$ para todo $a\in A$. De nuevo por la Proposición 2.3 podemos afirmar que

$$\mathcal{S}(\mathrm{ad}(\dot a)\pi_P D) = \overline{\mathrm{ad}(\dot a)\pi_p(\mathcal{S}(D))}$$

y

$$\mathcal{S}(\mathrm{ad}(\dot a)d) = \overline{\mathrm{ad}(\dot a)(\mathcal{S}(d))} = \dot 0,$$

por lo que será

$$\overline{\mathrm{ad}(\dot a)\pi_P(\mathcal{S}(D))} = \overline{\mathrm{ad}(\dot a)(\mathcal{S}(d))} = \dot 0.$$

Por tanto

$$\mathrm{ad}(\dot a)\pi_P(\mathcal{S}(D)) = \dot 0$$

para todo $a \in A$ y obtenemos así la inclusión que nos proponíamos demostrar

$$[A, \mathcal{S}(D)] \subset P.$$

♣

Seguidamente estableceremos el teorema anunciado en el caso complejo con unidad. Aún habiendo demostrado el Lema 3.7, la tarea de demostrar que el subespacio separador está contenido en el centro del álgebra no resulta una tarea simple.

LEMA 3.8. *Si A es un álgebra de Banach compleja semisimple con unidad y D es una derivación de Lie de A, entonces $\mathcal{S}(D) \subset Z(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que

$$[A, \mathcal{S}(D)] \subset P$$

para todo ideal primitivo P de A, puesto que entonces se tendría que $[A, \mathcal{S}(D)] \subset \text{Rad}(A) = 0$ y en consecuencia $\mathcal{S}(D) \subset Z(A)$. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que existiera un ideal primitivo P de A tal que $[A, \mathcal{S}(D)] \not\subset P$, y designemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de aquellos ideales primitivos P de A para los cuales $[A, \mathcal{S}(D)] \not\subset P$, el cual se está suponiendo no vacío. Por el resultado anterior, cada ideal primitivo P del conjunto $\mathcal{P}$ tiene codimensión finita y por tanto A/P es un álgebra simple. Además, si fuese $\dim A/P = 1$ sería entonces A/P conmutativa por lo que necesariamente se verificaría que $[A, \mathcal{S}(D)] \subset P$. Por tanto para cada $P \in \mathcal{P}$, la dimensión de A/P es mayor que 1.

Como $\mathcal{S}(D)$ es un ideal de Lie de A, $\pi_P(\mathcal{S}(D))$ es un ideal de Lie del álgebra simple A/P y por tanto, por el Lema 2.6, sabemos que $\pi_P(\mathcal{S}(D)) \subset Z(A/P)$ o $[A/P, A/P] \subset \pi_P(\mathcal{S}(D))$. Obsérvese que si ocurriese la primera inclusión tendríamos que $[\pi_P(\mathcal{S}(D)), A/P] = \dot{0}$, y por tanto $[\mathcal{S}(D), A] \subset P$, cosa que no puede ocurrir pues P pertenece a $\mathcal{P}$. En consecuencia se verifica que $[A/P, A/P] \subset \pi_P(\mathcal{S}(D))$. Es sabido además por el Lema 2.7 que $[A/P, A/P] = A/P$, y por tanto $A/P \subset \pi_P(\mathcal{S}(D))$. Esto nos permite obtener que

$$A/P = \pi_P(\mathcal{S}(D)) \text{ para todo } P \in \mathcal{P}.$$

Sea I_0 la intersección de todos los ideales primitivos de A verificando que $[\mathcal{S}(D), A] \subset P$, es decir

$$I_0 = \bigcap_{\substack{P \text{ ideal primitivo,} \\ [\mathcal{S}(D),A]\subset P}} P.$$

Consideremos un elemento P_1 del conjunto $\mathcal{P}$. Puesto que por definición de I_0 se verifica que $[\mathcal{S}(D), A] \subset I_0$, podemos asegurar que $I_0 \not\subset P_1$ y por tanto $\pi_{P_1}(I_0) \neq 0$. De ello deducimos, al ser $\frac{A}{P_1}$ un álgebra simple, que $\pi_{P_1}(I_0) = \frac{A}{P_1}$. Teniendo en cuenta esta igualdad, como el álgebra $\frac{A}{P_1}$ no es conmutativa, podremos elegir $a_1 \in I_0$ de manera que $[A, a_1] \not\subset P_1$. Supongamos que han sido elegidos ideales primitivos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de A y elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A satisfaciendo las siguientes condiciones:

i. $P_k \in \mathcal{P}$,

ii. $a_k \in I_{k-1}$, donde $I_k = I_0 \cap P_1 \cap \cdots \cap P_k$,

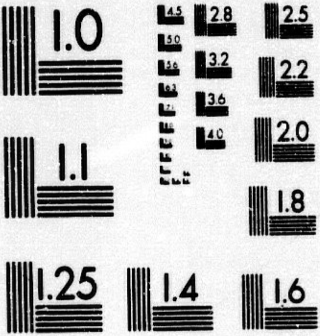
iii. $\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_k(A) \not\subset P_k$,

para $k = 1, ..., n$ y veamos que existe $P_{n+1} \in \mathcal{P}$ verificando que

- $I_n \not\subset P_{n+1}$, y
- $\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_n(A) \not\subset P_{n+1}$.

Si no existiese tal ideal primitivo se verificaría la siguiente inclusión

$$\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_n(A) \subset \bigcap_{P\in\mathcal{P}, I_n \not\subset P} P. \tag{3.1}$$


1.0
1.1
1.25
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.5
2.8
3.2
3.6
4.0
4.5
5.0
5.6
6.3
7.1

sabido además por el Lema 2.7 que $[A/P, A/P] = A/P$, y por tanto $A/P \subset \pi_P(\mathcal{S}(D))$. Esto nos permite obtener que

$$A/P = \pi_P(\mathcal{S}(D)) \text{ para todo } P \in \mathcal{P}.$$

Sea I_0 la intersección de todos los ideales primitivos de A verificando que $[\mathcal{S}(D), A] \subset P$, es decir

$$I_0 = \bigcap_{\substack{P \text{ ideal primitivo,} \\ [\mathcal{S}(D),A] \subset P}} P.$$

Consideremos un elemento P_1 del conjunto $\mathcal{P}$. Puesto que por definición de I_0 se verifica que $[\mathcal{S}(D), A] \subset I_0$, podemos asegurar que $I_0 \not\subset P_1$ y por tanto $\pi_{P_1}(I_0) \neq 0$. De ello deducimos, al ser $\frac{A}{P_1}$ un álgebra simple, que $\pi_{P_1}(I_0) = \frac{A}{P_1}$. Teniendo en cuenta esta igualdad, como el álgebra $\frac{A}{P_1}$ no es conmutativa, podremos elegir $a_1 \in I_0$ de manera que $[A, a_1] \not\subset P_1$. Supongamos que han sido elegidos ideales primitivos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de A y elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A satisfaciendo las siguientes condiciones:

i. $P_k \in \mathcal{P}$,

ii. $a_k \in I_{k-1}$, donde $I_k = I_0 \cap P_1 \cap \cdots \cap P_k$,

iii. $\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_k(A) \not\subset P_k$,

para $k = 1, ..., n$ y veamos que existe $P_{n+1} \in \mathcal{P}$ verificando que

- $I_n \not\subset P_{n+1}$, y
- $\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_n(A) \not\subset P_{n+1}$.

Si no existiese tal ideal primitivo se verificaría la siguiente inclusión

$$\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_n(A) \subset \bigcap_{P \in \mathcal{P}, I_n \not\subset P} P. \tag{3.1}$$

Como estamos suponiendo que se verifica *iii* podemos elegir $b_1 \in A$ satisfaciendo $b_2 = \mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_n(b_1) \notin P_n$. De (3.1) obtenemos

$$b_2 \in \bigcap_{P \in \mathcal{P}, I_n \not\subset P} P.$$

y teniendo que cuenta que $a_n \in I_{n-1}$, podemos deducir que $b_2 \in I_{n-1}$.

Sea X un A-módulo izquierdo de Banach irreducible de dimensión finita tal que $P_n = \{a \in A : aX = 0\}$. Por el Teorema de Densidad de Jacobson es fácil comprobar que existe $b_3 \in A$ tal que $\dim(b_3 b_2 X) = 1$ y $(b_3 b_2)^2 X = 0$. Si llamamos $c = b_3 b_2$, como $\dim cX = 1$, existe un elemento x_0 de X tal que $cX = < x_0 >$ (donde denotamos $< x_0 >$ al subespacio generado por x_0). Si a es un elemento de A, entonces cax_0 pertenece a cX, y por tanto existe $f(a) \in \mathbb{C}$ tal que $cax_0 = f(a)x_0$, de donde $(ca - f(a)1)x_0 = 0$. En consecuencia, $(ca - f(a)1) < x_0 > = 0$, y por ello $(ca - f(a)1)cX = 0$, o lo que es lo mismo $(cac - f(a)c)X = 0$. Obsérvese que la correspondencia $a \mapsto f(a)$, define evidentemente un funcional lineal en A verificando que $cac - f(a)c \in P_n$ para todo $a \in A$. Consecuentemente deducimos que

$$cac - f(a)c \in I_{n-1} \cap P_n \cap \left(\bigcap_{P \in \mathcal{P}, I_n \not\subset P} P \right) = \mathrm{Rad}(A) = 0$$

y podemos concluir que $\dim cAc < \infty$.

Por otro lado como $c^2 \in P_n$, obtenemos que

$$c^2 \in I_n \cap \left(\bigcap_{P \in \mathcal{P}, I_n \not\subset P} P \right) = \mathrm{Rad}(A) = 0$$

y de ello podemos deducir que

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad}c)^2(a) &= [c,[c,a]] \\ &= c(ca - ac) - (ca - ac)c \\ &= c^2 a - 2cac - ac^2 = -2cac \end{aligned}$$

para todo $a \in A$. En consecuencia podemos afirmar que la dimensión de $(\mathrm{ad}c)^2(A)$ es finita y obtenemos que $D(\mathrm{ad}c)^2$ es continuo. Por otro lado ya que

$$(D(\mathrm{ad}c)^2 - (\mathrm{ad}c)^2 D)(a) = [Dc, [c, a]] + [c, [Dc, a]] \quad \text{si } a \in A$$

es inmediato que $D(\mathrm{ad}c)^2 - (\mathrm{ad}c)^2 D$ es continuo y por tanto $(\mathrm{ad}c)^2 D$ es continuo. Utilizando de nuevo la Proposición 2.3 obtenemos que

$$0 = (\mathrm{ad}c)^2(\mathcal{S}(D)),$$

y como $c^2 = 0$, deducimos que $c\mathcal{S}(D)c = 0$ y en consecuencia

$$0 = \pi_{P_n}(c)\pi_{P_n}(\mathcal{S}(D))\pi_{P_n}(c) = \pi_{P_n}(c)\,(A/P_n)\,\pi_{P_n}(c).$$

De ello obtenemos inmediatamente que $\pi_{P_n}(c) = 0$, condición que significa que c pertenece al ideal P_n; y por tanto es incompatible claramente con la condición $\dim(cX) = 1$. Así pues, esta contradicción demuestra que la suposición original es falsa, de modo que podemos elegir P_{n+1} con las propiedades que anticipábamos.

Teniendo en cuenta ahora que $\pi_{P_{n+1}}(I_n) = \frac{A}{P_{n+1}}$ puesto que $I_n \not\subset P_{n+1}$, que $\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_n(A) \not\subset P_{n+1}$ y que por el Lema 2.7 se verifica que $[A/P_{n+1}, A/P_{n+1}] = A/P_{n+1}$, podemos deducir que existe $a_{n+1} \in I_n$ satisfaciendo que $\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_n \mathrm{ad}a_{n+1}(A) \not\subset P_{n+1}$.

Obsérvese que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\begin{aligned}\pi_{P_n} D\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_m &= \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_1) \cdots \mathrm{ad}\pi_{P_n}(D(a_k)) \cdots \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_m) \\ &\quad + \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_1) \cdots \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_m)\pi_{P_n} D.\end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{k=1}^{m} \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_1) \cdots \mathrm{ad}\pi_{P_n}(D(a_k)) \cdots \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_m)$ es evidentemente un operador continuo y como por la hipótesis *ii* estamos suponiendo que $\pi_{P_n}(a_m) = 0$ si $m > n$, obtenemos que $\pi_{P_n} D\mathrm{ad}a_1 \cdots \mathrm{ad}a_m$ es continuo si $m > n$. Usando el Lema 3.6, obtenemos que

$$\mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_1) \cdots \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_n)\pi_{P_n} D$$

es continuo para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y por tanto

$$0 = \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_1)\cdots\mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_n)\pi_{P_n}(\mathcal{S}(D)).$$

Puesto que $P_n \in \mathcal{P}$, es

$$\pi_{P_n}(\mathcal{S}(D)) = A/P_n$$

de donde deducimos que

$$0 = \mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_1)\cdots\mathrm{ad}\pi_{P_n}(a_n)(A/P_n)$$

lo que contradice como es evidente la elección de a_n y P_n. Esta contradicción demuestra que nuestra suposición inicial era errónea, de modo que $\mathcal{S}(D) \subset Z(A)$, que era lo que queríamos probar. ♣

La demostración del resultado prometido está ahora a nuestro alcance.

Demostración del Teorema 3.4. Si A es un álgebra de Banach compleja sin unidad, entonces su unitización A_1 es un álgebra de Banach compleja semisimple con unidad y D se extiende a una derivación de Lie en A_1 definiendo $D_1(1) = 0$. El resultado anterior muestra que $\mathcal{S}(D_1) \subset Z(A_1)$. Por otro lado, tenemos que $\mathcal{S}(D) \subset \mathcal{S}(D_1)$, y por tanto

$$\mathcal{S}(D) \subset A \cap Z(A_1) = Z(A).$$

Si A es un álgebra de Banach real, entonces consideramos su complexificación $A_{\mathbb{C}}$ y extendemos D de modo obvio a una derivación de Lie $D_{\mathbb{C}}$ en $A_{\mathbb{C}}$. De lo que hemos probado anteriormente, concluimos que

$$\mathcal{S}(D) \subset A \cap \mathcal{S}(D_{\mathbb{C}}) \subset A \cap Z(A_{\mathbb{C}}) = Z(A).$$

♣

Es importante tener presente que aunque la dimensión del centro de un álgebra de Banach semisimple sea uno, una derivación de Lie de ésta bien pudiera ser discontinua. Presentamos seguidamente un ejemplo de una derivación discontinua en un álgebra de Banach semisimple cuyo centro es $\mathbb{C}$.

EJEMPLO 3.9. Sea A la unitización del álgebra de Banach de los operadores Hilbert-Schmidt en un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita. A es semisimple, $Z(A) = \mathbb{C}$, y para cualesquiera $a, b \in A$, $[a, b]$ es un operador traza. Por tanto $[A, A]$ no es cerrado en A y existe un funcional lineal discontinuo f en A cuyo núcleo contiene a $[A, A]$. Se puede comprobar fácilmente que el operador lineal discontinuo D de A en sí mismo definido por $D(a) = f(a)\mathbf{1}$ es una derivación de Lie de A.

PROBLEMA ABIERTO: Si D es una derivación de Lie de un álgebra de Banach A. ¿En qué medida podemos asegurar que el $\mathcal{S}(D)$ está contenido en Rad(A) (módulo el centro)?

3.2 Derivaciones de Lie de la parte antisimétrica.

En el capítulo anterior ya hicimos referencia a las álgebras de Banach-Lie clásicas de operadores acotados y de operadores compactos. En la misma referencia de P. De la Harpe [33; Corolario pág. II.12. y Proposición 9] se muestra que las derivaciones de Lie de todas ellas, son continuas. Pretendemos ahora en esta sección, generalizar también este resultado al contexto de las álgebras de Banach complejas semisimples primas centralmente cerradas demostrando el siguiente teorema:

TEOREMA 3.10. *Sea D una derivación de Lie de la parte antisimétrica de un álgebra de Banach compleja semisimple prima centralmente cerrada con involución lineal A. Entonces D es continua.*

Como ya dijimos en el Capítulo 2, las C*-álgebras primas y las álgebras de Banach complejas primitivas son álgebras centralmente cerradas. Por ello y como consecuencia del resultado anterior son inmediatos los dos corolarios siguientes.

COROLARIO 3.11. *Cualquier derivación de Lie de la parte antisimétrica de un álgebra de Banach compleja primitiva con involución lineal es continua.*

COROLARIO 3.12. *Cualquier derivación de Lie de la parte antisimétrica de una C^*-álgebra prima con involución lineal es continua.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.10. Naturalmente, si A tiene dimensión finita, entonces D es continua. Supongamos entonces que A tiene dimensión infinita. Observemos que la involución es la identidad en el centro del álgebra y por tanto se trata de una involución de primera especie. En estas circunstancias podemos aplicar [77; Teorema 1.1] cuyo enunciado recordamos a continuación:

> *si R es un anillo primo con involución de primera especie y con característica distinta de 2 y 3 con $(RC(R) : C(R)) \neq 1, 4, 16$, entonces cualquier derivación de Lie de la parte antisimétrica K de R puede ser extendida a una derivación de la subálgebra $< K >$ de R generada por K.*

En consecuencia D puede ser extendida a una derivación ordinaria d de la subálgebra $< K_A >$ de A engendrada por K_A. Por la Observación 3, de [8] o por la Observación 1.3 de [77] (ambos basados en la demostración del Teorema 2.2 de [37]), podemos deducir ahora que $< K_A >$ contiene un ideal no cero I de A. Probaremos en primer lugar que la restricción de d al ideal I, que notaremos d_I, es cerrable como operador parcialmente definido sobre A.

Como el álgebra A es por hipótesis un álgebra prima, todo ideal de A es un ideal esencial, y por tanto, I es un ideal esencial de A. En consecuencia d_I es una derivación esencialmente definida de A en el sentido estudiado en [82]. Para tales derivaciones se establece en [82] la siguiente propiedad

> *si A un álgebra de Banach compleja semisimple, toda derivación esencialmente definida es cerrable, esto es, el subespacio separador de tal derivación se reduce al cero.*

Aplicando el resultado antes enunciado a nuestra derivación obtenemos que d_I es una derivación cerrable.

Consideremos $a \in \mathcal{S}(D)$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión en K_A satisfaciendo que $\lim a_n = 0$ y $\lim D(a_n) = a$. Si b es un elemento de I, resulta que $\{a_n b\}$ es una sucesión de I que converge a cero y verifica que

$$\begin{aligned} \lim d_I(a_n b) &= \lim d(a_n b) = \lim(d(a_n)b + a_n d(b)) \\ &= \lim(D(a_n)b + a_n d(b)) = ab. \end{aligned}$$

Por tanto ab pertenece a $\mathcal{S}(d_I)$ y como d_I es cerrable resulta que $ab = 0$. En consecuencia cualquiera que sea b en I, resulta que $ab = 0$ y por la primidad del álgebra A, concluimos que $a = 0$ y por ello $\mathcal{S}(D) = 0$.

Ya comentábamos que el subespacio separador no despliega toda su fuerza hasta que se alía con el Teorema de la Gráfica Cerrada, con lo que el lector adivinará el artificio que usaremos para poner punto y final a la demostración. Por el Teorema de unicidad de la norma de Johnson (puede consultarse en [40]), deducimos que la involución de A es continua y por tanto, K_A es un álgebra de Lie cerrada en A. El Teorema de la Gráfica Cerrada muestra ahora que D es continua. ♣

Queda abierta la siguiente cuestión:

PROBLEMA ABIERTO: Sea A un álgebra de Banach compleja semisimple con involución lineal y D una derivación de Lie de la parte antisimétrica. ¿Es D es continua?

3.3 La imagen de una derivación de Lie.

Los satisfactorios resultados que hemos obtenido en el estudio de las derivaciones de Lie nos animan a abordar uno de los problemas fundamentales en la teoría actual de álgebras de Banach, el conocido como conjetura de Singer-Wermer no conmutativa (véase [15, 19, 23, 55, 57, 58, 73, 84 y 85]). Una de sus posibles formulaciones es la siguiente: si d es una derivación de un álgebra de Banach A, verificando la propiedad $[a, d(a)] \in \mathrm{Rad}(A)$ para todo $a \in A$, ¿ha de satisfacerse que $d(A) \subset \mathrm{Rad}(A)$?

Para una derivación de Lie D en un álgebra de Banach A, en el mejor de los casos existirá una derivación d de A y una aplicación lineal τ de A en el centro de A de manera que $D = d + \tau$. En estas circunstancias la propiedad $[a, D(a)] \in \mathrm{Rad}(A)$ se traducirá en el hecho de que $[a, d(a)] \in \mathrm{Rad}(A)$ lo cual debiera conducir a que $d(A) \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{A})$ y en consecuencia $D(A) \subset \mathrm{Rad}(A) + Z(A)$.

A lo largo de esta sección para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a, b \in A$ denotaremos

$$[a, b]_k = [a, [a, b]_{k-1}]$$

siendo

$$[a, b]_1 = [a, b].$$

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar el siguiente teorema que constituye nuestra aportación en la línea de la versión no comutativa de la conjetura de Singer-Wermer.

TEOREMA 3.13. *Sea A un álgebra de Banach y sea D una derivación de Lie en A verificando para algún $k \in \mathbb{N}$ que $[a, D(a)]_k \in \mathrm{Rad}(A)$ para todo $a \in A$. Entonces $[D(A), A] \subset \mathrm{Rad}(A)$.*

Para llevar a cabo la tarea de demostrar el resultado anunciado, necesitamos establecer una serie de resultados previos. El primero de ellos es debido a C. Lanski.

TEOREMA 3.14 ([47; Teorema 1]). *Sean D una derivación no cero en un anillo primo R e I un ideal no cero de R tales que para cierto $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$[r, D(r)]_k = 0 \quad \forall r \in I.$$

Entonces R es conmutativo.

LEMA 3.15. *Sea A un álgebra de Banach compleja unital y sea D una derivación de Lie de A verificando para algún $k \in \mathbb{N}$ que*

$$[a, D(a)]_k \in \mathrm{Rad}(A) \text{ para todo } a \in A.$$

Si P es un ideal primitivo de A, entonces existen una derivación d de A en A/P y una aplicación lineal ξ de A en $Z(A/P)$ tales que

$$\pi_P D = d + \xi.$$

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta lo probado en el Teorema 1.21. sólo hemos de probar nuestra afirmación en el caso de que el álgebra A/P sea isomorfa a $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Supongamos por tanto que A/P es isomorfa a $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Probaremos en primer lugar que

$$\pi_P D(P) \subset Z(A/P).$$

Con el propósito de verificar dicha propiedad, fijemos dos elementos a y b en A y consideremos el polinomio de una variable compleja con coeficientes en A definido por

$$p(\lambda) = [a + \lambda b, D(a + \lambda b)]_k.$$

Por hipótesis $p(\lambda)$ pertenece al radical de A para cualquier número complejo λ. De ello deducimos que el coeficiente de λ en este polinomio también ha de pertenecer al radical. Sin dificultad puede comprobarse que tal coeficiente es el siguiente:

$$\begin{aligned}&[b,[a,\cdots[a,D(a)]\cdots]] \; + \; \ldots\\ +&[a,[a,\cdots,[b,D(a)]\cdots]] \; + \; [a,[a,\cdots,[a,D(b)]\cdots]].\end{aligned}$$

En particular se verifica la siguiente propiedad

$$[b,[a,\cdots,[a,D(a)]\cdots]]+\ldots$$

$$+[a,[a,\cdots,[b,D(a)]\cdots]]+[a,[a,\cdots,[a,D(b)]\cdots]]\in P$$

para cualesquiera $a,b\in A$. Si tomamos $b\in P$, la anterior propiedad adopta la siguiente forma:

$$[a,[a,\cdots,[a,D(b)]\cdots]]\in P \quad \text{para todo } a\in A.$$

Fijado $b\in P$, consideramos la derivación $\mathrm{ad}(D(b)+P)$ de A/P, la cual satisface que

$$[a+P,\mathrm{ad}(D(b)+P)(a+P)]_k=0$$

para todo $a+P\in A/P$. Puesto que A/P no es conmutativa, el Teorema 3.14 garantiza que

$$\mathrm{ad}(D(b)+P)=0$$

y por tanto

$$D(b)+P\in Z(A/P)$$

para cualquier $b\in P$. Ello conduce a la inclusión anunciada

$$\pi_P D(P)\subset Z(A/P).$$

Consideramos ahora el álgebra de Lie

$$\frac{A/P}{Z(A/P)}$$

y observamos que $\frac{A/P}{Z(A/P)}$ es un álgebra de Lie simple.

La inclusión $\pi_P D(P) \subset Z(A/P)$, nos permite asegurar que la aplicación δ definida como

$$\delta((a+P)+Z(A/P)) = (D(a)+P)+Z(A/P)$$

está bien definida y es una derivación de $\frac{A/P}{Z(A/P)}$. Tal derivación es necesariamente interna. Recuérdese por ejemplo que el Teorema de Zassenhauss, (véase [39; Teorema III.6 y comentario posterior]) permite establecer que

> *toda derivación de un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita sobre un cuerpo de característica 0 es una derivación interna.*

Así pues existe un elemento a de A tal que

$$\begin{aligned} (D(b)+P)+Z(A/P) &= \delta((b+P)+Z(A/P)) \\ &= [(a+P)+Z(A/P),(b+P)+Z(A/P)] \\ &= ([a,b]+P)+Z(A/P) \\ &= (\pi_P \mathrm{ad}(a))(b)+Z(A/P) \end{aligned} \tag{3.2}$$

siendo b un elemento arbitrario de A. Para acabar la demostración, basta que consideremos d, como la derivación de A en A/P definida por

$$d = \pi_P \mathrm{ad}(a)$$

y ξ como la aplicación lineal

$$\xi = \pi_P D - d$$

ya que entonces de la relación (3.2) se deduce que

$$\xi(b) = \pi_P D(b) - \pi_P \mathrm{ad}(a)(b) \in Z(A/P),$$

y $\pi_P D = \xi + d$. ♣

LEMA 3.16. *Sean A un álgebra de Banach compleja, P un ideal primitivo de A y d una derivación de A en A/P verificando para algún $k \in \mathbb{N}$ que*

$$[a, d(a)]_k = \dot{0}$$

para cualquier $a \in A$. Entonces se satisface una de las siguientes condiciones:

i. El álgebra A/P es isomorfa a $\mathbb{C}$.

ii. $d(P) = \dot{0}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A/P no es isomorfa a $\mathbb{C}$, y obsérvese que entonces A/P es no conmutativa. Para simplificar la notación denotemos por $\dot{a}$ a la clase $a + P$. Podemos argumentar ahora igual que en la demostración del Lema 3.15, para obtener que

$$[\dot{a}, d(b)]_k = 0 \text{ para cualesquiera } a \in A \text{ y } b \in P.$$

En efecto fijemos dos elementos a y b en A y consideremos el polinomio de una variable compleja y con coeficientes en A/P definido por

$$p(\lambda) = [\dot{a} + \lambda\dot{b}, d(a + \lambda b)]_k$$

Por hipótesis, $p(\lambda)$ es cero, para todo número complejo λ y por tanto el coeficiente de λ ha de ser igual a cero. Sin ninguna dificultad puede comprobarse que tal coeficiente es el siguiente:

$$\begin{array}{rcl} [\dot{b}, [\dot{a}, \cdots, [\dot{a}, d(a)] \cdots]] & + & \ldots \\ +[\dot{a}, [\dot{a}, \cdots, [\dot{b}, d(a)] \cdots]] & + & [\dot{a}, [\dot{a}, \cdots, [\dot{a}, d(b)] \cdots]] \end{array}$$

En particular si b pertenece al ideal P, esta igualdad se traduce en que

$$[\dot{a}, [\dot{a}, \cdots, [\dot{a}, d(b)] \cdots]] = \dot{0}$$

para todo $a \in A$.

Nuevamente el Teorema 3.14 permite obtener que

$$\mathrm{ad}(d(b)) = 0 \tag{3.3}$$

para todo $b \in P$.

Consideremos ahora x e y en A y b en P. Como bx y $bd(x)$ pertenecen a P, la propiedad (3.3) garantiza que

$$\begin{aligned}\dot{0} = [d(bx), \dot{y}] &= [d(b)\dot{x}, \dot{y}] + [\dot{b}d(x), \dot{y}] = [d(b)\dot{x}, \dot{y}] \\ &= [d(b), \dot{y}]\dot{x} + d(b)[\dot{x}, \dot{y}] = d(b)[\dot{x}, \dot{y}].\end{aligned}$$

Si ahora tomamos $z \in A$ obtenemos lo siguiente:

$$\dot{0} = d(b)[\dot{z}\dot{x}, \dot{y}] = d(b)[\dot{z}, \dot{y}]\dot{x} + d(b)\dot{z}[\dot{x}, \dot{y}] = d(b)\dot{z}[\dot{x}, \dot{y}].$$

En consecuencia $d(b)\dot{z}[\dot{x}, \dot{y}] = \dot{0}$ para cualesquiera $x, y, z \in A$ y $b \in P$, de donde resulta entonces que

$$d(b)A/P[\dot{x}, \dot{y}] = \dot{0}$$

para cualesquiera $x, y \in A$ y $b \in P$.

Como quiera que el álgebra A/P es prima, si existiese b en P verificando que $d(b) \neq \dot{0}$, resultaría que

$$[\dot{x}, \dot{y}] = \dot{0}$$

para cualesquiera x, y en A, lo que supone una contradicción con el hecho de que el álgebra A/P es no conmutativa. Como consecuencia deberá ser $d(b) = \dot{0}$ para todo $b \in P$, que era lo que queríamos comprobar. ♣

Demostración del Teorema 3.13. Llevaremos a cabo la prueba en varios pasos. Supongamos en primer lugar que el álgebra A es un álgebra de Banach compleja unital. Vamos a demostrar que si P es un ideal primitivo de A, entonces $[D(A), A] \subset P$. Según veíamos en el Lema 3.15,

$$\pi_P D = d + \xi$$

para cierta derivación d de A en A/P y cierta aplicación lineal ξ de A en $Z(A/P)$. Como consecuencia de la hipótesis, si a pertenece a A, resulta que

$$[\dot{a}, \dot{D(a)}]_k = 0,$$

de donde deducimos que

$$[\dot{a}, d(a)]_k = [\dot{a}, \dot{D(a)}]_k - [\dot{a}, \xi(a)]_k = 0.$$

Si A/P es isomorfo a $\mathbb{C}$ es evidente que $[D(A), A] \subset P$. Supongamos ahora que A/P no es isomorfo a $\mathbb{C}$ y obsérvese que entonces A/P es no conmutativo y que por el Lema 3.16 se verifica que $d(P) = \dot{0}$. Esta condición nos permite definir la siguiente aplicación d_P de A/P en A/P,

$$d_P(a + P) = d(a).$$

Es rutinario comprobar que d_P es una derivación de A/P satisfaciendo además que

$$[x, d_P(x)]_k = \dot{0},$$

para cualquier $x \in A/P$. De nuevo haciendo uso del Teorema 3.14, podemos asegurar que $d_P = 0$. Por tanto $d(A) = \dot{0}$ y de ello obtenemos entonces que $\pi_P D(A) = \xi(A)$, lo que garantiza que $\pi_P(D(A)) \subset Z(A/P)$. Deduciendo así que $[D(A), A] \subset P$, lo que finaliza la demostración para el caso complejo unital.

Supongamos en segundo lugar que A es un álgebra de Banach compleja sin unidad. Designemos por A_1 a su unitización, que será un álgebra de Banach compleja unital y extendamos la derivación D a una derivación de Lie de A_1, definiendo $D_1(1) = 0$. Esta derivación satisface que

$$[x, D_1(x)]_k \in \mathrm{Rad}(A) \subset \mathrm{Rad}(A_1)$$

para todo $x \in A_1$. Teniendo en cuenta lo probado en el caso anterior, resultará que

$$[D_1(A_1), A_1] \subset \mathrm{Rad}(A_1).$$

Por otro lado, obsérvese que

$$[D(A), A] = [D_1(A_1), A_1] \subset A \cap \mathrm{Rad}(A_1) = \mathrm{Rad}(A).$$

inclusión que prueba la tesis del teorema para el caso complejo sin unidad.

Supongamos en tercer lugar que A es un álgebra de Banach real y consideramos su complexificación $A_{\mathbb{C}}$. Como el lector adivinará, podemos extender la derivación D a una derivación $D_{\mathbb{C}}$ de $A_{\mathbb{C}}$, definiendo

$$D_{\mathbb{C}}(a + ib) = D(a) + iD(b)$$

para $a, b \in A$. Veamos que

$$[x, D_{\mathbb{C}}(x)]_k \in \mathrm{Rad}(A_{\mathbb{C}})$$

para cualquier $x \in A_{\mathbb{C}}$. Si x es un elemento de $A_{\mathbb{C}}$, entonces $x = a + ib$, con $a, b \in A$. Si consideramos el polinomio $p(\lambda)$ definido por

$$p(\lambda) = [a + \lambda b, D(a + \lambda b)]_k$$

la hipótesis nos permite afirmar que

$$p(\lambda) \in \mathrm{Rad}(A) \text{ para todo } \lambda \text{ en } \mathbb{R}.$$

Comprobemos que $p(i) \in \mathrm{Rad}(A_{\mathbb{C}})$. Por ser $p(\lambda)$ un polinomio de variable real λ de grado $k+1$, será de la forma

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{k+1}\lambda^{k+1}$$

con $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1} \in A$. Como $p(\lambda) \in \mathrm{Rad}(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rad}(A)$ es un ideal cerrado de A, entonces

$$c_0 = p(0) \in \mathrm{Rad}(A)$$

$$c_1 = p'(0) \in \mathrm{Rad}(A)$$

$$c_2 = \frac{p''(0)}{2!} \in \mathrm{Rad}(A)$$

$$\cdots$$

$$c_{k+1} = \frac{p^{k+1}(0)}{(k+1)!} \in \mathrm{Rad}(A).$$

Por otro lado observemos que

$$\begin{aligned} p(i) &= \sum_{j=0}^{k+1} c_j i^j = \sum_{0\leq 2j \leq k+1} c_{2j} i^{2j} + \sum_{0 \leq 2j+1 \leq k+1} c_{2j+1} i^{2j+1} \\ &= \sum_{0\leq 2j\leq k+1} (-1)^j c_{2j} + i \sum_{0\leq 2j+1\leq k+1} (-1)^j c_{2j+1} \\ &\in \mathrm{Rad(A)} + i\mathrm{Rad(A)} = \mathrm{Rad}(A_{\mathbb{C}}), \end{aligned}$$

que era justamente la propiedad que queríamos probar. Como consecuencia del segundo caso que hemos tratado, obtenemos que

$$[D_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}), A_{\mathbb{C}}] \subset \mathrm{Rad}(A_{\mathbb{C}}),$$

y de ello podemos deducir que

$$[D(A), A] \subset A \cap [D_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}), A_{\mathbb{C}}] \subset A \cap \mathrm{Rad}(A_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Rad}(A),$$

quedando así completa la demostración. ♣

Referencias.

[1] S. A. AMITSUR, On rings of quotiens. *Sympos. Math. 8 (1972), 149-164.*

[2] P. ARA, Extended centroid of C^*-algebras. *Archiv. der Math. 54 (1990), 358-364.*

[3] B. AUPETIT, The uniqueness of the complete norm topology in Banach algebras and Banach Jordan algebras. *J. Funct. Anal. 47 (1982), 1-6.*

[4] B. AUPETIT, Spectral characterization of the radical in Banach and Jordan-Banach algebras. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 114 (1993), 31-35.*

[5] R. BANNING Y M. MATHIEU, Commutativity preserving mappings on semiprime rings. *Commun. Algebra 25 (1997), 247-265.*

[6] W.E. BAXTER Y W. S. MARTINDALE III, Rings with involution and polynomial identities. *Can. J. Math. 20 (1968), 465-473.*

[7] W.E. BAXTER Y W. S. MARTINDALE III, Central clousure of semiprime nonassociative rings. *Commun. Algebra 7 (1979), 1103-1132.*

[8] K. I. BEIDAR, W S. MARTINDALE 3RD Y A.V. MIKHALEV, Lie isomorphisms in prime rings with involution. *J. Algebra 169 (1994), 304-327.*

[9] H. E. Bell y W S. Martindale 3rd, Centralizing mappings of semiprime rings. *Canad. Math. Bull. 30 (1987), 92-101.*

[10] H. E. Bell y W S. Martindale 3rd, Semiderivations and commutativity in prime rings. *Can. Math. Bull. 31 (1988), 500-508.*

[11] M. I. Berenguer y A. R. Villena, Continuity of Lie derivations on Banach Algebras. *Proc. Edinburgh. Math. Soc. 41 (1998), 625-630.*

[12] M. I. Berenguer y A. R. Villena, Continuity of Lie mappings of the skew elements of Banach algebras with involution. *Proc. Amer. Math. Soc, 126 (1998), 2717-2720.*

[13] M. I. Berenguer y A. R. Villena, Continuity of Lie isomorphisms of Banach algebras. *Bull. London Math. Soc. 31, No. 148 (1999), 6-10.*

[14] M. I. Berenguer y A. R. Villena, On the range of a Lie derivation on a Banach algebra. *Commun. Algebra (por aparecer).*

[15] M. Brešar, Centralizing mappings on von Neumann algebras. *Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1991), 501-510.*

[16] M. Brešar, On a generalization of the notion of centralizing mappings. *Proc. Amer. Math. Soc. 114 (1992), 641-649.*

[17] M. Brešar, Commuting traces of biadditive mappings commutativity preserving mappings and Lie mappings. *Trans. Amer. Soc. 335 (1993), 525-546.*

[18] M. Brešar, Centralizing mappings and derivations in prime rings, *J. Algebra 156 (1993), 385-394.*

[19] M. Brešar, Derivations of noncommutative Banach algebras II. *Arch. Math. (Basel) 64 (1994), 56-59.*

[20] M. BREŠAR Y C.R. MIERS, Commutativity preserving mappings of von Neumann algebras. *Canad. J. Math. 45 (1993), 695-701.*

[21] M. BREŠAR Y J. VUKMAN, On some additive mappings in rings with involution. *Aequationes Math. 38 (1989), 178-185.*

[22] M. BREŠAR Y J. VUKMAN, On left derivations and related mappings. *Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 7-16.*

[23] M. BREŠAR Y J. VUKMAN, Derivations of noncommutative Banach algebras II, *Arch. Math. (Basel) 54 (1992), 363-370.*

[24] F. F. BONSALL Y J. DUNCAN, *Complete normed algebras.* Trans. Amer. Springer-Verlag, Berlin (1973).

[25] M. CABRERA Y A. RODRÍGUEZ, Extended centroid and central clousure of semiprime normed algebras: a first approach. *Commun. Algebra 18 (7), (1990), 2293-2326.*

[26] J.M. CUSAK, Jordan derivations on rings. *Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 321-324.*

[27] H. G. DALES, Automatic continuity: a survey. *Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 129-183.*

[28] H. G. DALES, Questions on automatic continuity. En *Banach Algebras'97. Proceeding of the 13th International Conference on Banach Algebras*, Blaubeuren, 20 de Julio al 3 de Agosto de 1997, E. Albrecht y M. Mathieu (eds.), Walter de Gruyter, Berlin 1998, pág. 509-526.

[29] H. G. DALES, Banach algebras and automatic continuity. *London Mathematical Society Monographs, Claredon Press, Oxford, c. 800 pp, (Por aparecer).*

[30] N. DUNFORD Y J. T. SCHWARTZ, Linear operators II. *Interscience, New York-London, (1963).*

[31] T.S. Erickson, W. S. Martindale III y J. M. Osborn, Prime nonassociative algebras. *Pacific J. Math. 60 (1975), 49-63.*

[32] I. M. Gelfand y M.A. Naimark, On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Mat. Sbornik (1943), 197-213.*

[33] P. de la Harpe, *Classical Banach-Lie algebras and Banach Lie groups of operators in Hilbert spaces.* Lect. Notes in Math. 285, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[34] I. N. Herstein, Jordan homomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 331-341.*

[35] I. N. Herstein, Jordan derivations of prime rings. *Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1104-1110.*

[36] I.N. Herstein, Lie and Jordan structures in simple associative rings. *Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 517-531.*

[37] I. N. Herstein, *Topics in ring theory.* Univ. of Chicago Press, Chicago (1969).

[38] L. Hua, A theorem on matrices over an s-field and its applications. *J. Chinese Math. Soc. (N. S.) 1 (1951), 110-163.*

[39] N. Jacobson, Lie algebras. *Dover Publications Inc. New York, (1962).*

[40] B. E. Johnson, The uniquenses of the (complete) norm topology. *Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 537-539.*

[41] B. E. Johnson Continuity of derivations on commutative algebras. *Amer. J. Math. 91 (1969), 1-10.*

[42] B. E. Johnson, Symmetric amenability and nonexistence of Lie and Jordan derivations. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 120 (1996), 455-473.*

[43] B. E. JOHNSON Y A. M SINCLAIR, Continuity of derivations and a problem of Kaplansky. *Amer. J. Math. 90 (1968), 1067-1073.*

[44] I. KAPLANSKY, Rings with a polynomial identity. *Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 575-580.*

[45] D.C. KLEINECKE, On operator comomutators. *Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 535-536.*

[46] C. LANSKI, Differential identities, Lie ideals, and Posner's theorems. *Pacific J. Math. 134 (1988), 275-297.*

[47] C. LANSKI, An Engel condition with derivation. *Proc. Amer. Math. Soc. 118 (3) (1993), 731-734.*

[48] W. S. MARTINDALE III, Lie isomorphisms of primitive rings. *Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 909-916.*

[49] W. S. MARTINDALE III, Lie derivations of primitive rings. *Mich. Math. J. 11 (1964,) 183-187.*

[50] W. S. MARTINDALE III, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity. *J. Algebra 12 (1969), 576-584.*

[51] W. S. MARTINDALE III, Lie isomorphisms of prime rings. *Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), 437-455.*

[52] W. S. MARTINDALE III, Lie isomorphisms of simple rings. *J. London Math Soc. 44 (1969), 211-221.*

[53] W. S. MARTINDALE III, Lie isomorphisms of the skew elements of a prime rings with involution. *Comm. in Algebra, 4 (10), (1976), 929-977.*

[54] M. MATHIEU, Elementaty operators on prime C^*-algebras. I. *Math. Ann. 284 (1989), 223-244.*

[55] M. MATHIEU, Where to find the image of a derivations. *Banach Center Publications Vol. 30 PWN Warsaw (1994), 237-249.*

[56] M. MATHIEU, Lie mappings of C^*-álgebras. En *Nonassociative Algebra and its Applications*, R. Costa et al. (eds), Marcel Dekker, New York, 1999.

[57] M. MATHIEU Y G. J. MURPHY, Derivations mapping into the radical. *Arch. Math. 57 (1991), 469-474.*

[58] M. MATHIEU Y V. RUNDE, Derivations mapping into the radical, II. *Bull. London Math. Soc. 24 (1992), 485-487.*

[59] C. R. MIERS, Lie isomorphisms of factors. *Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 55-63.*

[60] C. R. MIERS, Lie derivations of von Neumann algebras. *Duke Math. J. 40 (1973), 403-409.*

[61] C. R. MIERS, Lie *-triple isomorphisms into von Neumann algebras. *Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976), 169-172.*

[62] C. R. MIERS, Lie triple derivations of von Neumann algebras. *Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1978), 57-61.*

[63] M. N. NEUMANN, Automatic continuity of linear operators. *In Functional Analysis: Surveys and Recent Results II. North- Holland Math. Studies 38 (1980), 269-296.*

[64] T. W. PALMER, *Banach algebras and the General Theory of *-algebras. Volume I: Algebras and Banach Algebras.* Cambridge University Press, 1994.

[65] E. C. POSNER, Derivations in prime rings. *Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1093-1100.*

[66] E. C. POSNER, Prime rings satisfying a polynomial identity. *Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 180-184.*

[67] T. J. RANSFORD, A short proof of Johnson's uniqueness-of-norm theorem. *Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 487-488.*

[68] C. E. RICKART, General theory of Banach algebras. *Krieger, New York, 1974.*

[69] A. RODRIGUEZ PALACIOS, The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras. *J. Funct. Anal. 60 (1985), 1-15.*

[70] M. P. ROSEN, Isomorphisms of a certain class of prime Lie rings. *J. of Algebra, 89 (1984,) 291-317.*

[71] L. H. ROWEN, Some results on the center of a ring with polynomial identity. *Bull. Amer. Math. Soc. 79, vol. I, (1973), 219-223.*

[72] L. H. ROWEN, Structure of rings with involution applied to generalized polynomial identities. *Can. J. Math. 27 (3), (1975), 573-584.*

[73] V. RUNDE, Range inclusion results for derivations on noncommutative Banach algebras. *Studia Math. 105 (1993), 159-172.*

[74] F.V. SHIROKOV, Proof of a conjeture of Kaplansky. *Uspekhi Mat. Nauk. 11 (1956), 167-168.*

[75] A. M. SINCLAIR, *Automatic continuity of Linear Operators.* London Math. Soc. Lecture Note Series, 21, Cambridge University Press (1976).

[76] I. M. SINGER Y J. WERMER, Derivations on commutative normed algebras. *Math. Ann. 129 (1955), 260-264.*

[77] G. A. SWAIN, Lie derivations of the skew elements of prime rings with involution. *J. Algebra 184 (1996), 679-704.*

[78] M. P. THOMAS, The image of a derivation is contained in the radical. *Ann. Math. 128 (1988), 435-460.*

[79] M. P. THOMAS, Primitive ideals and derivations on noncommutative Banach algebras. *Pacific J. Math. 159 (1993), 139-152.*

[80] A. R. VILLENA, Continuity of derivations on a complete normed alternative algebra. *Jour. Inst. Math. & Comp. Sci. (Math. Ser.) Vol. 3, No.2, (1990), 99-106.*

[81] A. R. VILLENA, Derivations on Jordan-Banach Algebras. *Studia Math. 118 (3), (1996), 205-229.*

[82] A. R. VILLENA, Essentially defined derivations on semisimple Banach algebras. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (1997) 40, 175-179.*

[83] J. VUKMAN, Commuting and centralizing mapppings in prime rings. *Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), 47-52.*

[84] J. VUKMAN, On derivations in prime rings and Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 877-884.*

[85] B. YOOD, Continuous homomorphism and derivations on Banach algebras. En *Banach algebras and several complex variables,* F. Greenleaf and D. Gulick (eds.), Contemp. Math. 32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1984), 279-284.