Departamento de Estadística e I.O.
Facultad de Ciencias

Funciones Aleatorias: regularidad en media y regularidad de las trayectorias

Tesis Doctoral

Fernando Martínez Alvarez

Universidad de Granada
1996

Tesis Doctoral dirigida por el Doctor D. Armando Reyes Villena Muñoz, Profesor Titular del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, defendida por Don Fernando Martínez Alvarez el día 19 de Junio de 1996, ante el Tribunal formado por los siguientes Profesores: Dr. D. Elías Moreno Bas (Presidente), Dr. Dña. Gabriella Salinetti, Dr. D. David Nualart Rodón, Dr. D. Antonio Cuevas González y la Dr. Dña. Josefa Linares Pérez (Secretaria). Obtuvo la calificación de Apto "*cum laude*" por unanimidad.

Memoria realizada en el Departamento de Estadística e I.O. de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Dr. D. Armando Reyes Villena Muñoz, profesor titular de la Universidad de Granada, para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, por la Universidad de Granada.

V°.B°. El Director:

Fdo. Armando R. Villena Muñoz.

Aspirante al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas:

Fdo. Fernando Martínez Alvarez.

A mi familia.

Contenido.

Introducción

El presente trabajo se enmarca dentro del Análisis Estocástico en el cual las funciones aleatorias constituyen un elemento totalmente básico. Como es bien sabido, una función aleatoria es una función de dos variables $\phi(t,\omega)$ para la cual fijado el primer argumento se tiene una variable aleatoria. Esto es, si $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ es un espacio probabilístico completo, T un conjunto cualquiera y X un espacio de Banach real o complejo. Una *función aleatoria* X-valuada sobre T es una función

$$\phi : T \times \Omega \to X$$

tal que, para cada $t \in T$, la función

$$\phi_t : \Omega \to X$$

definida por $\phi_t(\omega) = \phi(t,\omega)$ es una variable aleatoria X-valuada de primer orden.

La función determinística que se obtiene al fijar $\omega \in \Omega$ recibe el nombre de trayectoria de la función aleatoria X-valuada ϕ.

En esta memoria analizaremos cómo determinadas condiciones de regularidad en media (continuidad, integrabilidad, derivabilidad, holomorfía) de las funciones aleatorias se transfieren a las trayectorias y viceversa.

Respecto al comportamiento de las trayectorias para funciones aleatorias satisfaciendo condiciones de regularidad en media cuadrática la teoría es muy rica y ha sido extensamente desarrollada (véase [7], [8], [15], [19], [20]).

Cuando las propiedades de regularidad vienen dadas en media de orden p, siendo $p > 1$ no necesariamente igual a 2, la teoría deviene bastante más imperfecta e intratable como puede verse en [9].

Nuestro interés se ha enfocado justo en el caso de la media de orden uno. En esta situación la naturaleza del problema deviene radicalmente distinta. Ya no se dispone de la rica teoría de los espacios de Hilbert como para el caso de la media cuadrática, ni tampoco se cuenta con la reflexividad de los espacios de variables aleatorias que si acontece siempre que la media sea de orden estrictamente superior a uno.

La continuidad resulta ser una condición de regularidad en media que en general no se transfiere a las trayectorias. Este hecho puede ser constatado con la función aleatoria:

$$\phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

definida como

$$\phi(t,\omega) = \begin{cases} n^2(n+1)^2(\frac{1}{n} - t)(t - \frac{1}{n+1})\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

donde ξ_n es la variable aleatoria dada por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{j}{2^k} \leq \omega \leq \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $n = 2^k + j$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq j < 2^k$.

Esta función aleatoria es continua en media sobre el intervalo $[0,1]$ y para cualquier versión suya casi todas sus trayectorias no son continuas en el cero.

Tampoco podemos asegurar nada acerca de la continuidad en media de una función aleatoria con todas sus trayectorias continuas. Si consideramos la función aleatoria:

$$\phi : [0,1] \times (0,1) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\phi(t,\omega) = \begin{cases} n^2(n+1)^2(\frac{1}{n} - t)(t - \frac{1}{n+1})\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

donde ξ_n es la variable aleatoria dada por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} n^2 & \text{si} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dicha función aleatoria tiene todas sus trayectorias continuas sobre el intervalo $[0,1]$ y no es continua en media sobre éste intervalo.

Nos centraremos entonces en condiciones de regularidad más fuertes como son la derivabilidad en el sentido complejo y la derivabilidad real.

El primer capítulo lo hemos dedicado a presentar las nociones de medibilidad e integrabilidad de funciones vector-valuadas que serán requeridas a lo largo de este trabajo. También mostramos uno de los grandes teoremas en la teoría de la medida: el Teorema de representación de Riesz, de los funcionales lineales y continuos del espacio de las funciones continuas, que será también utilizado en nuestra memoria.

En el segundo capítulo hacemos un estudio bastante minucioso acerca de la holomorfía para funciones aleatorias vector-valuadas. Para ello hemos creído conveniente dedicar una sección a introducir la holomorfía para funciones valuadas sobre un espacio de Banach. Se hace inevitable el estudio de series de potencias con coeficientes en un espacio de Banach dada su trascendental importancia dentro del Análisis Complejo y que nos serán de vital utilidad en este capítulo. Recuérdese que las series de potencias son un claro ejemplo de funciones holomorfas sobre su disco de convergencia, que además tienen la virtud de que su función derivada sigue siendo otra serie de potencias cuyo disco de convergencia contiene al anterior. Ello permite asegurar que una serie de potencias es infinitamente derivable sobre su disco de convergencia.

Presentamos también algunos de los principios fundamentales de la teoría de funciones holomorfas de una variable compleja que serán utilizados a lo largo del capítulo.

Dado nuestro interés por la holomorfía en funciones aleatorias se hace necesario definir tal concepto.

Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre D. Diremos que ϕ es *holomorfa en media* sobre D si para cada $z_0 \in D$ la función

$$\frac{\phi_z - \phi_{z_0}}{z - z_0}$$

tiene límite en media cuando z tiende a z_0; ésto es, existe una variable aleatoria de primer orden sobre X, que será única salvo equivalencias y que razonablemente notaremos por ϕ'_{z_0}, de manera que

$$\lim_{z \to z_0} \mathbb{E}\left\| \frac{\phi_z - \phi_{z_0}}{z - z_0} - \phi'_{z_0} \right\| = 0.$$

El teorema de Dunford clásico admite una muy interesante lectura en este terreno aleatorio:

PROPOSICIÓN 2.10. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. ϕ es holomorfa en media sobre D si, y sólo si, para cada $\xi \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}, \mathbb{C})$ la función complejo valuada*

$$z \longmapsto \mathbb{E}(\phi_z \xi)$$

es holomorfa sobre D.

Este resultado es de gran utilidad dado que permite comprobar la holomorfía en media para funciones vector-valuadas a partir de la holomorfía de ciertas funciones complejo-valuadas de variable compleja, pudiendo utilizar para tal fin todas las herramientas existentes en el Análisis Complejo Clásico.

Para una función aleatoria la holomorfía en media puede no repercutir en condiciones de regularidad de sus trayectorias. Si consideramos el abierto de $\mathbb{C}$ dado por $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x, y < 1\}$ y como espacio de probabilidad Ω tomamos el conjunto D dotado con la medida de Lebesgue. La función aleatoria

$$\phi : D \times \Omega \to \mathbb{C}$$

definida por

$$\phi(z, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z = \omega \\ 0 & \text{si} \quad z \neq \omega \end{cases}$$

es holomorfa en media sobre D y no tiene, sin embargo, ninguna trayectoria siquiera continua sobre el abierto D.

Este ejemplo nos hizo desechar la idea de poder obtener condiciones de regularidad sobre las trayectorias de las funciones aleatorias holomorfas en media generales. Ello nos hizo modificar el planteamiento y pensar que si bien sobre sus trayectorias no puede concluirse nada tal vez hubiese alguna versión con un comportamiento en las trayectorias satisfactorio.

Un primer avance en esta línea lo obtuvimos para series de potencias con coeficientes aleatorios de primer orden convergentes en media sobre un disco al probar que una tal serie de potencias converge casi seguramente sobre dicho disco. Pudiéndose definir una función aleatoria a partir de la suma de tal serie que posee unas muy interesantes propiedades de integrabilidad.

LEMA 2.12. *Sea X un espacio de Banach complejo y $\sum \xi_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con coeficientes aleatorios X-valuados de primer orden y radio de convergencia en media no nulo, R. Existe entonces un conjunto de probabilidad nula Δ tal que, para cada $\omega \in \Omega \setminus \Delta$, el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum \xi_n(\omega)(z - z_0)^n$ es al menos R. Además, la función*

$$(z, \omega) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega)(z - z_0)^n$$

definida casi por doquier en $D(z_0, R) \times \Omega$ y con valores en X es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de $D(z_0, R)$ y cualquier medida de Borel finita μ sobre K.

El anterior hecho fue clave para probar que toda función aleatoria holomorfa en media sobre un abierto del plano complejo y valuada sobre un espacio de Banach cualquiera posee una versión con trayectorias holomorfas sobre el abierto. Además dicha versión va a satisfacer propiedades de integrabilidad que darán pie a sorprendentes resultados.

Teorema 2.14. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada holomorfa en media sobre D. Entonces existe una versión ψ de ϕ cuyas trayectorias son holomorfas sobre D que es además $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre cualquier conjunto de la forma $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D y cualquier medida de Borel finita μ sobre K.*

Las propiedades de integrabilidad encontradas para la versión con trayectorias holomorfas permite comprobar, para funciones aleatorias complejas, que la correspondencia

$$\omega \mapsto \psi_\omega$$

es una variable aleatoria.

Corolario 2.17. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja holomorfa en media sobre D. Existe entonces una versión ψ de ϕ cuyas trayectorias son holomorfas y para cada subconjunto compacto K de D con interior no vacío, la aplicación*

$$\omega \mapsto \psi_{\omega|K}$$

es una variable aleatoria sobre el espacio de Banach $A(K)$.

Para cada subconjunto compacto K de D con interior no vacío, por $A(K)$ notamos el espacio de Banach de las funciones complejas continuas en K y holomorfas en $int(K)$.

Una vez comprobado que la holomorfía en media se transmite satisfactoriamente a las trayectorias de alguna versión nos planteamos probar el recíproco. En primer lugar probamos que el recíproco del teorema 2.14 es cierto para funciones aleatorias complejo-valuadas.

Teorema 2.19. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja que posee una versión ψ cuyas trayectorias son holomorfas sobre D y que es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D y cualquier medida de Borel regular μ sobre K. Entonces ϕ es holomorfa en media sobre D.*

Consecuentemente, hemos conseguido caracterizar la holomorfía en media de una función aleatoria compleja basándonos en la holomorfía de las trayectorias.

Corolario 2.20. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Equivalen:*

1. *ϕ es holomorfa en media sobre D.*

2. *ϕ posee una versión ψ con trayectorias holomorfas sobre D y que es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto $K \subset D$ y cualquier medida de Borel regular μ sobre K.*

También logramos sustituir la condición de integrabilidad para ψ por algunas condiciones de continuidad, que en algunas situaciones podrían ser más fáciles de comprobar.

Corolario 2.21. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Son equivalentes:*

1. *ϕ es holomorfa en media sobre D.*

2. *La función $\mathbb{E}|\phi_z|$ es continua en D y ϕ posee una versión $\mathcal{B} \times \Sigma$-medible con trayectorias holomorfas.*

Si reemplazamos la condición de integrabilidad del teorema 2.19 o la condición de continuidad y medibilidad del corolario 2.21 por el requisito de que la versión ψ, y consecuentemente ϕ, sea continua en media la tesis anterior de que ϕ es una función aleatoria holomorfa en media sigue siendo válida.

TEOREMA 2.23. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Si ϕ posee una versión ψ continua en media cuyas trayectorias son holomorfas sobre D entonces ϕ es holomorfa en media sobre D.*

Si hacemos balance de lo obtenido hasta ahora para las funciones aleatorias complejas, notamos que hemos conseguido tres caracterizaciones de la holomorfía en media tomando como base la holomorfía de las trayectorias de alguna versión suya que satisfaga ciertos requisitos bien de continuidad, medibilidad o integrabilidad. Estos logros pueden recopilarse de la siguiente manera.

TEOREMA 2.25. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *ϕ es holomorfa en media.*
2. *ϕ posee una versión cuyas trayectorias son holomorfas sobre D y que es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D y cualquier medida de Borel regular μ sobre K.*
3. *La función $\mathbb{E}|\phi_z|$ es continua en D y ϕ posee una versión $\mathcal{B} \times \Sigma$-medible cuyas trayectorias son holomorfas sobre D.*

4. ϕ es continua en media y posee una versión cuyas trayectorias son holomorfas sobre D.

Queda como línea de trabajo abierta una posible extensión del teorema anterior a funciones aleatorias definidas sobre un abierto de $\mathbb{C}$ y valuadas en un espacio de Banach cualquiera.

El último objetivo que nos planteamos en este capítulo es la manera de cuantificar el número de trayectorias idénticas entre dos funciones aleatorias.

Supongamos que ϕ_1 y ϕ_2 son funciones aleatorias definidas sobre algún conjunto no vacío T. Si nos fuese requerido algún criterio, razonablemente expeditivo y basado exclusivamente en la observación de las variables ϕ_{1t} y ϕ_{2t}, para dilucidar la existencia de un conjunto de probabilidad positiva de trayectorias idénticas entre ϕ_1 y ϕ_2, tendríamos que responder que tal pretensión es descabellada si las trayectorias no son regulares. Si consideramos el abierto de $\mathbb{C}$ dado por $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x, y < 1\}$ y como espacio de probabilidad Ω tomamos el conjunto D dotado con la medida de Lebesgue. La función aleatoria

$$\phi : D \times \Omega \to \mathbb{C}$$

definida por

$$f(z,\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z = \omega \\ 0 & \text{si} \quad z \neq \omega \end{cases}$$

verifica

$$\mathbb{P}\{\phi_z = 0\} = 1, \quad \forall z \in D$$

y que sin embargo no posee ni una sóla trayectoria idénticamente nula. No obstante si la cuestión requerida fuese razonablemente modificada, siendo ahora nuestra meta la detección de la existencia de trayectorias comunes para convenientes versiones de ϕ_1 y ϕ_2, entonces es muy posible que sólo fuésemos capaces de dar dos respuestas.

Si $\mathbb{P}\{\phi_{1t} = \phi_{2t}\} = 1$, $\forall t \in T$, entonces ϕ_2 posee una versión cuyas trayectorias son todas idénticas a las de ϕ_1, a saber la propia función ϕ_1.

En el extremo opuesto, si existe un punto $t \in T$ de manera que

$$\mathbb{P}\{\phi_{1t} = \phi_{2t}\} = 0,$$

entonces tendremos la absoluta seguridad de que para cualesquiera versiones de ϕ_1 y ϕ_2, casi ninguna de sus trayectorias pueden llegar a coincidir.

Nuestro propósito es estudiar la gran laguna que ha quedado entre las dos anteriores respuestas; a saber qué sucede con las trayectorias de las funciones aleatorias ϕ_1 y ϕ_2 o de adecuadas versiones suyas cuando se satisface la propiedad

$$\mathbb{P}\{\phi_{1t} = \phi_{2t}\} > 0, \ \forall t \in T.$$

Merece la pena observar que el requerimiento exigido es formidablemente débil. Tan sólo exigimos que para cada punto t de T el suceso

$$\Delta_t = \{\omega \in \Omega : \phi_1(t,\omega) = \phi_2(t,\omega)\}$$

pueda ocurrir.

En el caso de que las funciones aleatorias sean continuas en media no es posible asegurar que las probabilidades $\mathbb{P}(\Delta_t)$ estén acotadas inferiormente por una cantidad positiva y menos aún la existencia de un subconjunto medible de probabilidad no nula sobre el que coincidan las funciones aleatorias. Si consideramos la función aleatoria

$$\phi : (0,1) \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

definida como

$$\phi(t,\omega) = (\frac{1}{n} - t)^2(t - \frac{1}{n+1})^2(1 - \xi_n(\omega))$$

donde n el natural que satisface $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$ y ξ_n la variable aleatoria definida por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{j}{2^k} \leq \omega < \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $n = 2^k + j$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq j < 2^k$. Las probabilidades $\mathbb{P}(\Delta_t) > 0$ $\forall t \in (0,1)$ y no están acotadas inferiormente por ningún número positivo.

Asombrosamente para las funciones aleatorias holomorfas en media sobre un abierto conexo de $\mathbb{C}$ valuadas en un espacio de Banach cualquiera acontece un formidable fenómeno.

TEOREMA 2.33. *Sea D un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y sean ϕ_1 y ϕ_2 funciones aleatorias X-valuadas holomorfas en media sobre D. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathbb{P}(\phi_{1_z} = \phi_{2_z}) > 0 \quad \forall z \in D$.

2. Existe $\Delta \in \Sigma$ con $\mathbb{P}(\Delta) > 0$ tal que, para cada $z \in D$,

$$\phi_{1_z} = \phi_{2_z}$$

casi seguramente sobre Δ.

3. *Existen versiones* ψ_1 *y* ψ_2 *de* ϕ_1 *y* ϕ_2 *respectivamente, cuyas trayectorias son holomorfas sobre* D *y satisfacen*
$$\psi_{1_\omega} = \psi_{2_\omega}$$
con probabilidad no nula.

Además,

$$\begin{aligned} \inf\{\mathbb{P}(\phi_{1_z} = \phi_{2_z}) : z \in D\} &= \max\{\mathbb{P}(\Delta) : \forall z \in D,\ \phi_{1_z} = \phi_{2_z} \ c.s. \ en\ \Delta\} \\ &= \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \psi_{1_\omega} = \psi_{2_\omega}). \end{aligned}$$

Un estudio análogo al llevado a cabo para holomorfía es realizado, en el tercer capítulo de esta memoria, para derivabilidad real.

Con el propósito de estudiar la repercusión sobre las trayectorias de una función aleatoria de la derivabilidad en media, requerimos en primera instancia analizar lo que acontece con la integrabilidad en media, puesto que será justamente ésta nuestra fundamental herramienta de trabajo.

TEOREMA 3.1. *Sean* (T_1, Γ_1, τ_1) *y* (T_2, Γ_2, τ_2) *dos espacios de medida* σ*-finita,* X *un espacio de Banach y* $\phi : T_1 \times T_2 \to X$ *una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para cada* t *de* T_1, $\phi_t \in \mathcal{L}_1(\tau_2, X)$ *y la función* $t \mapsto [\phi_t]$ *de* T_1 *en* $L_1(\tau_2, X)$ *es integrable.*

2. *Existe una función* $\psi \in \mathcal{L}_1(\tau_1 \times \tau_2, X)$ *tal que para cada* $t \in T_1$, $\phi_t = \psi_t$ *casi por doquier en* T_2.

Además, si se verifican las condiciones anteriores, entonces la función medible $\int_\Delta \psi_t d\tau_1$ pertenece a la clase de equivalencia $\int_\Delta [\phi_t] d\tau_1$ para cada $\Delta \in \Gamma_1$.

Como el lector posiblemente sospechará, para un espacio de Banach X y una función aleatoria ϕ X-valuada definida sobre un intervalo real I, diremos que ϕ es derivable en media en un punto t_0 de I si la función

$$\frac{\phi_t - \phi_{t_0}}{t - t_0}$$

tiene límite en media cuando t tiende a t_0; ésto es, existe una variable aleatoria de primer orden sobre X que será unica salvo equivalencias y que notaremos ϕ'_{t_0} de manera que

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E} \left\| \frac{\phi_t - \phi_{t_0}}{t - t_0} - \phi'_{t_0} \right\| = 0.$$

Diremos que la función aleatoria ϕ es derivable en media en I cuando sea derivable en media en todos los puntos del intervalo I.

Contrariamente a lo que sucedía con la derivabilidad compleja, la derivabilidad real en media puede no ser transferida a las trayectorias de ninguna versión. Si consideramos la función aleatoria

$$\phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

definida como

$$\phi(t,\omega) = \begin{cases} n^{\frac{15}{2}} (\frac{1}{n} - t)^2 (t - \frac{1}{n+1})^2 \xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

donde ξ_n es la variable aleatoria dada por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{i}{2^k} \leq \omega \leq \frac{i+1}{2^k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $n = 2^k + j$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq j < 2^k$.

Esta función aleatoria es derivable en media sobre $[0,1]$ y para cualquier versión suya casi todas sus trayectorias no son derivables en cero.

Asimismo la derivabilidad de las trayectorias, incluso cuando adicionalmente existe continuidad en media, no garantiza la derivabilidad en media. La función aleatoria

$$\phi : [0,1] \times (0,1) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\phi(t,\omega) = \begin{cases} n^4(n+1)^4(\frac{1}{n} - t)^2(t - \frac{1}{n+1})^2\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

donde ξ_n es la variable aleatoria dada por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} n^2 & \text{si} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene todas sus trayectorias derivables en $[0,1]$ y no es derivable en media sobre $[0,1]$.

A la vista de los anteriores ejemplos, poco parece que pueda ser dicho respecto a la transferencia de la derivabilidad real en media a las trayectorias y viceversa. Este pesimista pensamiento queda totalmente alejado de la realidad. A diferencia con lo que acontecía con la derivabilidad compleja, la relación existente entre la derivabilidad real en media de una función aleatoria y la derivabilidad de las trayectorias de alguna de sus versiones es un poco más imperfecta puesto que se pierde un grado de regularidad en la transferencia.

TEOREMA 3.5. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre I. Si ϕ es de clase C^n en media sobre el intervalo I, entonces ϕ tiene una versión ψ cuyas trayectorias son de clase C^{n-1} en I y $\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j}$ es $\lambda \times \mathbb{P}$-integrable en $[a,b] \times \Omega$ para cualesquiera $a, b \in I$ con $a < b$ y $j = 0, \ldots, n-1$.*

Las propiedades de integrabilidad para la versión, cuya existencia garantiza el anterior teorema, permiten probar que la función

$$\omega \longmapsto \psi_\omega$$

es una variable aleatoria de primer orden.

COROLARIO 3.7. *Sea $[a,b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada de clase C^n en media sobre $[a,b]$. ϕ posee entonces una versión ψ cuyas trayectorias son de clase C^{n-1} en $[a,b]$ y además la aplicación*

$$\omega \longmapsto \psi_\omega$$

de Ω en $C^{n-1}([a,b], X)$ es una variable aleatoria de primer orden.

No es posible obtener un resultado más fuerte, en el sentido de no poder asegurar que para una función aleatoria de clase C^n en media exista una versión cuyas trayectorias sean de clase superior a $n-1$.

Consideremos como Ω el intervalo $(0,1)$ dotado con la medida de Lebesgue.

Sea f_0 la función definida sobre el intervalo $[0,1]$ dada por

$$f_0(t) = \begin{cases} n^4(\frac{1}{n} - t)(t - \frac{1}{n+1}) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \le t \le \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Para cada natural k podemos definir inductivamente

$$f_k(t) = \int_0^t f_{k-1}(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

Sea $\{\xi_n\}$ la sucesión de variables aleatorias definidas por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{j}{2^k} \leq \omega \leq \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $n = 2^k + j$, siendo $k \geq 0, 0 \leq j < 2^k$.

Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos la función aleatoria $\phi_k : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\phi_k(t,\omega) = \begin{cases} f_k(t)\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

La funciones aleatorias ϕ_k son de clase C^k en media sobre $[0,1]$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo, cualquier versión ψ_k de ϕ_k no tiene casi ninguna trayectoria de clase C^k en $[0,1]$.

Finalmente analizamos la repercusión que sobre la regularidad en media de una función aleatoria tiene la regularidad de las trayectorias para alguna versión suya.

TEOREMA 3.10. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre I. Si ϕ tiene una versión ψ cuyas trayectorias son de clase C^n en el intervalo I y $\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n}$ es integrable sobre $[a,b] \times \Omega$ para cualesquiera $a, b \in I$ con $a < b$, entonces ϕ es de clase C^{n-1} en media sobre I.*

Realmente no se puede asegurar que una función aleatoria cuyas trayectorias sean de clase C^n en un intervalo sea de clase C^n en media sobre dicho intervalo. Si para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos la función aleatoria $\phi_k : [0,1] \times (0,1) \to \mathbb{R}$ como

$$\phi_k(t,\omega) = \begin{cases} \frac{(t-\omega)^k}{t^2} & \text{si} \quad \omega \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Todas las trayectorias de la función aleatoria ϕ_k son de clase C^{k-1} sobre el intervalo $[0,1]$ y en cambio ϕ_k no es de clase C^{k-1} en media sobre $[0,1]$.

Queda como línea de trabajo abierta una posible extensión de los anteriores resultados para funciones aleatorias definidas sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$ y valuadas sobre un espacio de Banach.

Aprovecho esta oportunidad para expresar mi enorme gratitud al que ha sido director de este trabajo, el prof. Dr. D. Armando R. Villena Muñoz, quien con su brillantez científica, su gran valía humana y su valentía me ha transmitido el apoyo y ánimo necesarios para superar todas las dificultades encontradas a lo largo de la realización de este proyecto. Su amor por las matemáticas ha despertado en mi la curiosidad y el interés científico tan necesarios para seguir adelante en el siempre duro pero fascinante campo de la investigación.

Quisiera también agradecer públicamente a los compañeros de los Departamentos de Análisis Matemático y de Estadística e I.O. que me han brindado su ayuda justo cuando la necesitaba.

Finalmente, y de una manera muy especial me dirijo a mi familia que a buen seguro ha sufrido con resignada paciencia las complicaciones de este proyecto científico y me ha prestado el apoyo y ánimo necesarios para seguir adelante.

Fernando Martínez.

Capítulo I

Funciones Aleatorias

El objetivo primordial de este primer capítulo de la memoria es la presentación de la noción de función aleatoria vector-valuada. Con este propósito comenzaremos haciendo una breve revisión de algunas cuestiones fundamentales acerca de la medibilidad e integrabilidad de funciones vector-valuadas. Cuestiones que consideramos indispensables para el buen entendimiento de la presente obra.

I.1 Medidas regulares: el Teorema de Representación de Riesz

Para un espacio topológico compacto y Hausdorff K notaremos por $C_{\mathbb{K}}(K)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) de las funciones continuas $x : K \to \mathbb{K}$. Este espacio se considera habitualmente provisto de la norma

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(t)| : t \in K\},$$

cuya convergencia asociada es la convergencia uniforme y que convierte a $C_{\mathbb{K}}(K)$ en un espacio de Banach.

A continuación mostramos el célebre teorema de representación de Riesz que identifica perfectamente en términos de adecuadas medidas el dual topológico de tan importante espacio de Banach. Presentaremos previamente estas adecuadas medidas.

Sea $(T, \mathcal{T})$ un espacio medible. Una *medida compleja* (resp. *real*) en T es una función

$$\tau : \mathcal{T} \to \mathbb{C} \text{ (resp. } \tau : \mathcal{T} \to \mathbb{R})$$

verificando que

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(\Delta_n)$$

para cualquier sucesión $\{\Delta_n\}$ de elementos de $\mathcal{T}$ disjuntos dos a dos.

Para una tal medida se define su *variación*, $|\tau|$, como

$$|\tau|(\Delta) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\tau(\Delta_n)| : \Delta_n \in \mathcal{T} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \Delta\right\},$$

donde por $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ prentendemos designar la unión de los subconjuntos $\{\Delta_n\}$ que son además mutuamente disjuntos. $|\tau|$ resulta ser una medida finita sobre T. Existe además una función medible de T en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ según corresponda y que suele notarse $\frac{d\tau}{d|\tau|}$ tal que $|\frac{d\tau}{d|\tau|}(t)| = 1 \ \forall t \in T$ y

$$\tau(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{d\tau}{d|\tau|} d|\tau| \quad \forall \Delta \in \mathcal{T}.$$

Para cualquier función $f \in \mathcal{L}_1(|\tau|, \mathbb{C})$ se tiene entonces que $f\frac{d\tau}{d|\tau|} \in \mathcal{L}_1(|\tau|, \mathbb{C})$ y definimos la integral de f respecto a la medida τ por

$$\int_T f d\tau = \int_T f \frac{d\tau}{d|\tau|} d|\tau|.$$

Recordemos que para cualquier espacio topológico Hausdorff E, la σ-álgebra $\mathcal{B}$ generada por los subconjuntos abiertos de E se denomina σ-álgebra Borel de E. Cualquier medida definida sobre ésta recibe el nombre de medida de Borel.

Si K es un espacio topológico compacto y Hausdorff, una *medida de Borel regular* en K es una medida de Borel finita μ en K que satisface las propiedades de regularidad siguientes:

1. $\mu(\Delta) = \sup\{\mu(H) : H \subset \Delta, H \text{ compacto }\}, \forall \Delta \in \mathcal{B}$

2. $\mu(\Delta) = \inf\{\mu(G) : \Delta \subset G, G \text{ abierto }\}, \forall \Delta \in \mathcal{B}$.

Llamamos medida de Borel real o compleja regular en K a aquellas medidas reales o complejas τ para las que su variación $|\tau|$ es una medida de Borel regular en K, en el sentido antes expuesto.

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ 1.1. *Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff y x' un funcional lineal y continuo sobre $C_{\mathbb{K}}(K)$. Existe entonces una única medida de Borel $\mathbb{K}$-valuada regular τ en K tal que*

$$x'(x) = \int_K x(t) d\tau(t) \quad \forall x \in C_{\mathbb{K}}(K).$$

I.2 MEDIBILIDAD DE FUNCIONES VECTOR-VALUADAS.

En lo que sigue (Ω, Σ, μ) será un espacio de medida. Creemos conveniente comenzar dejando manifiesta nuestra adhesión a la habitual terminología en este terreno. Utilizaremos las expresiones

se verifica $P(\omega)$ casi por doquier en Ω

o bien

se verifica $P(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$

donde $P(\omega)$ es una afirmación que involucra a un punto genérico $\omega \in \Omega$, para indicar que el conjunto de puntos ω para los que no se satisface $P(\omega)$ está contenido en un conjunto medible con medida nula. Obviamente, en el caso de que la medida μ sea completa la afirmación "se verifica $P(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$ " significa simplemente que $\mu\{\omega : P(\omega) \text{ no es cierta } \} = 0$.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, que podrá ser en lo sucesivo indistintamente (salvo mención expresa en otro sentido) $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Se considerará provisto de su σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. En este ambiente consideraremos funciones sobre Ω con valores en el espacio de Banach X, y para éstas se presentarán adecuadas nociones de medibilidad e integrabilidad.

Una primera noción de medibilidad puede obtenerse de forma constructiva a partir de funciones simples:

DEFINICIÓN 1.2. Una función $f : \Omega \to X$ se dice que es una *función simple* si puede expresarse en la forma:

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{\Omega_i}$$

donde $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \in \Sigma$ con $\mu(\Omega_1), \ldots, \mu(\Omega_n) < \infty$, y como es usual χ_Δ representa la función indicadora del conjunto Δ.

DEFINICIÓN 1.3. Una función $f : \Omega \to X$ se dice que es una *función medible Bochner* (también llamada en ocasiones fuertemente medible) si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples de Ω en X que converge a f casi por doquier; esto es

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0, \quad \text{para casi todo } \omega \in \Omega.$$

El conjunto de todas las funciones medibles Bochner de Ω en X será denotado en lo sucesivo por $\mathcal{L}_0(\mu, X)$. Sobre este conjunto hay definidas operaciones suma y producto por escalares que dotan a $\mathcal{L}_0(\mu, X)$ de una estructura de espacio vectorial.

El concepto de función medible Bochner se corresponde con la definición 'constructiva' de función medible en el sentido clásico, donde las funciones medibles toman valores en un espacio euclídeo de dimensión finita. En el ambiente clásico, la definición 'descriptiva' de función medible es más útil a la hora de probar de forma sencilla muchas de sus propiedades. Si trasladamos la definición 'descriptiva' de función medible a nuestro ambiente tendremos un nuevo concepto de medibilidad:

DEFINICIÓN 1.4. Una función $f : \Omega \to X$ se dice que es una *función medible Borel* si la imagen inversa de todo conjunto Borel B está en Σ; ésto es, para todo $B \in \mathcal{B}$

$$f^{-1}(B) \in \Sigma.$$

Las definiciones de función medible Bochner y Borel son equivalentes en el caso de que la función tome valores en un espacio euclídeo ([24, Theorem 5.3.A]). Consecuentemente, cuando tenemos un espacio euclídeo (por ejemplo, $\mathbb{K}^n$) sólo hay una noción de medibilidad que puede establecerse de forma 'descriptiva' ó 'constructiva'. Lamentablemente esta agradable situación no acontece para espacios de dimensión infinita. Existe además una tercera, y no menos importante, noción de medibilidad en este ámbito. Exponemos ésta a continuación:

DEFINICIÓN 1.5. Una función $f : \Omega \to X$ se dice que es una *función medible Pettis* (o bien débilmente medible) si para cada funcional lineal y continuo x' sobre X, la función $x' \circ f$ de Ω en $\mathbb{K}$ es medible, ya en el sentido anterior.

En el siguiente diagrama hemos pretendido visualizar la relación existente entre los tres tipos de medibilidad mostrados:

$$\text{Bochner} \Rightarrow \text{Borel} \Rightarrow \text{Pettis}$$

y es importante destacar que en general no es válido el recíproco de ninguna de las anteriores implicaciones. También es muy importante destacar que todas estas nociones de medibilidad resultan coincidir cuando el espacio de Banach X considerado es separable; ésto es, cuando X posee un subconjunto numerable y denso. Esta afirmación se hace al amparo del siguiente teorema:

TEOREMA 1.6 ([21, Theorem 3.5.3]). *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach y f una función de Ω en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es medible Bochner.*
2. *f es medible Pettis y existe un conjunto de medida nula Ω_0 tal que $f(\Omega \setminus \Omega_0)$ es separable.*

COROLARIO 1.7. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach separable y f una función de Ω en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es medible Bochner.*
2. *f es medible Borel.*
3. *f es medible Pettis.*

Si bien al estudiar una sola función medible Bochner no se pierde generalidad al suponer separabilidad, basta considerar como espacio de Banach $f(\Omega)$ en lugar de X; no puede decirse lo mismo cuando trabajamos con todo el espacio $\mathcal{L}_0(\mu, X)$, ya que puede no haber ningún espacio separable que contenga a todos los subespacios imagen de cada función medible Bochner. Aunque la mayoría de autores prefieren restringirse al caso separable por las muchas ventajas que en él se obtienen (todos los conceptos de función medible coinciden), olvidando el estudio del caso no separable, nosotros no impondremos tal requerimiento sino que trabajaremos en un ambiente totalmente general.

A continuación presentamos algunas propiedades relativas a las funciones medibles Bochner:

PROPOSICIÓN 1.8. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach y f una función medible Bochner de Ω en X. Entonces*

(i) $\|f\|$ es una función medible (real valuada).

(ii) Si T es un operador lineal y continuo de X en Y entonces Tf es una función medible Bochner.

Las funciones medibles Bochner mantienen la propiedad, que se tenía en el ambiente clásico, de que el límite casi por doquier de una sucesión de funciones medibles es una función medible.

PROPOSICIÓN 1.9 ([25, Proposition 2.2.7]). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles Bochner de Ω en X que converge casi por doquier a f. Entonces f es una función medible Bochner.*

Hasta ahora el único tipo de convergencia del que disponemos es la convergencia casi por doquier que hemos dado para funciones definidas sobre un espacio de medida con valores en un espacio de Banach. Para funciones medibles Bochner definimos otra convergencia: la convergencia en medida.

DEFINICIÓN 1.10. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles Bochner de Ω en X converge *en medida* a otra función medible Bochner f si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \mu[\omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| > \varepsilon] = 0.$$

Cuando la medida μ es finita, al espacio vectorial de las funciones medibles Bochner vamos a dotarle de una topología compatible con su estructura vectorial, la asociada a la paranorma

$$\|f\|_0 := \int_\Omega \frac{\|f(\omega)\|}{1 + \|f(\omega)\|} d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{L}_0(\mu, X)$$

Es fácil probar que la convergencia asociada a esta paranorma es la de la convergencia en medida (véase [10, Section II.1.3]).

Sin embargo, cuando la medida μ no es finita, la topología asociada a la convergencia en medida no es compatible con la estructura vectorial de $\mathcal{L}_0(\mu, X)$. (Véase [25, exercise 4.9.7]).

Cuando μ es una medida de probabilidad al espacio de medida es usual llamarlo espacio probabilístico. En un ambiente probabilístico las funciones medibles reciben el nombre de variables aleatorias. Teniéndose así, en espacios de Banach generales, tres clases distintas de variables aleatorias: Bochner, Borel y Pettis. En lugar de decir que una propiedad se satisface casi por doquier se dirá que se satisface casi seguramente. Igualmente no se hablará de convergencia en medida sino de convergencia en probabilidad.

En lo que sigue por funciones medibles entenderemos las funciones medibles Bochner. Análogamente por variables aleatorias entenderemos variables aleatorias Bochner.

Sobre el espacio vectorial de las variables aleatorias Bochner $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ tenemos la paranorma

$$\|x\|_0 := \int_\Omega \frac{\|x(\omega)\|}{1 + \|x(\omega)\|} d\mathbb{P} \quad \forall x \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X).$$

cuya topología asociada es la de la convergencia en probabilidad. Este hecho lo resaltamos en la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 1.11. *La topología para $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ asociada a la paranorma $\|\cdot\|_0$ es la topología de la convergencia en probabilidad.*

Con la paranorma $\|\cdot\|_0$ el espacio $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ no es separado puesto que

$$\|x\|_0 = 0 \Leftrightarrow x = 0\, c.s.$$

El espacio cociente de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ con la relación de equivalencia casi seguramente lo notamos por $L_0(\mathbb{P}, X)$, y es un espacio vectorial topológico metrizable. Dada x una variable aleatoria Bochner, notaremos por $[x]$ a la clase de equivalencia de la variable aleatoria x.

Dadas dos variables aleatorias x e y, la cantidad $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : x(\omega) = y(\omega)\}$ es independiente de los representantes de $[x]$ e $[y]$ elegidos para definirla y convenimos en escribirla como $\mathbb{P}[[x] = [y]]$.

A partir de la completitud de X se deduce que $L_0(\mathbb{P}, X)$ es completo. ([23, Section 2.1]). Teniéndose que $L_0(\mathbb{P}, X)$ es un F-espacio, al ser un espacio vectorial topológico metrizable y completo. Este hecho lo recogemos en el siguiente teorema:

TEOREMA 1.12. *$L_0(\mathbb{P}, X)$ tiene estructura de F-espacio.*

I.3 INTEGRABILIDAD

En esta sección vamos a definir la integral de Bochner de una función medible. El procedimiento para ello es muy similar al clásicamente utilizado para la construcción de la integral de Lebesgue.

Comenzaremos presentando la integral de una función simple.

DEFINICIÓN 1.13. Sea $f : \Omega \to X$ una función simple de la forma $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{\Omega_i}$, donde $x_1, \ldots x_n \in X$ y $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \in \Sigma$ con $\mu(\Omega_1), \ldots, \mu(\Omega_n) < \infty$. Se define la *integral* de f como

$$\int_\Omega f d\mu := \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(\Omega_i)$$

Puede comprobarse sin dificultad que la anterior definición no depende de la particular expresión $\sum x_i \chi_{\Omega_i}$ elegida.

Previamente a definir la integral de una función medible conviene recordar que es una sucesión convergente en media y de Cauchy en media.

DEFINICIÓN 1.14. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en X. Decimos que $\{f_n\}$ es una sucesión de *Cauchy en media* si

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_\Omega \|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| d\mu = 0$$

Se dice que $\{f_n\}$ es una sucesión que *converge en media* a una función f si

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n(\omega) - f(\omega)\| d\mu = 0$$

Una función $f : \Omega \to X$ se dice *integrable* si es el límite casi por doquier de una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples que es además de Cauchy en media.

En tal situación se prueba que la sucesión $\{\int f_n d\mu\}$ es convergente y su límite, que resulta no depender de la sucesión $\{f_n\}$ elegida, se conoce como integral de f y se notará

$$\int_\Omega f d\mu.$$

(Véase ([25, Proposition 2.3.4]).

Además, es inmediato probar que cualquier función que sea igual casi por doquier a una función integrable es también integrable y ambas funciones tienen la misma integral.

De ahora en adelante $\mathcal{L}_1(\mu, X)$ denotará al espacio de todas las funciones $f : \Omega \to X$ integrables.

A continuación recogemos una serie de propiedades de las funciones integrables Bochner (véase [25, Proposition 2.3.7]):

PROPOSICIÓN 1.15.

(i) *$\mathcal{L}_1(\mu, X)$ es un espacio vectorial y la aplicación $f \mapsto \int_\Omega f d\mu$ es lineal.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{L}_1(\mu, X)$, entonces $\|f\| \in \mathcal{L}_1(\mu, \mathbb{R})$ y $\|\int_\Omega f d\mu\| \leq \int_\Omega \|f\| d\mu$.*

(iii) *Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mu, X)$ y $\|f\|_1 = \int_\Omega \|f\| d\mu$. Entonces $\|\cdot\|_1$ es una seminorma sobre $\mathcal{L}_1(\mu, X)$.*

(iv) *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Si $f \in \mathcal{L}_1(\mu, X)$, entonces $T \circ f \in \mathcal{L}_1(\mu, Y)$ y $\int_\Omega T \circ f d\mu = T(\int_\Omega f d\mu)$.*

(v) *El subespacio de las funciones simples es denso en $\mathcal{L}_1(\mu, X)$ para la topología asociada a la seminorma $\|\cdot\|_1$.*

Es importante notar que la convergencia en media genera una topología para $\mathcal{L}_1(\mu, X)$ que puede ser descrita por la seminorma $\|\cdot\|_1$. No obstante, con la seminorma $\|\cdot\|_1$ el espacio $\mathcal{L}_1(\mu, X)$ no es separado puesto que

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{casi por doquier.}$$

El espacio cociente de $\mathcal{L}_1(\mu, X)$ con la relación de equivalencia:

$$f \equiv g \Longleftrightarrow f = g \text{ casi por doquier}$$

deviene un espacio normado con norma definida por

$$|||[f]|||_1 = \int_\Omega \|f\| d\mu.$$

La más relevante propiedad de éste es que se trata de un espacio de Banach, gracias ello al Teorema de Fischer-Riesz ([25, Théorème 2.3.8]).

TEOREMA 1.16. *$(L_1(\mu, X), \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach.*

La convergencia en media no implica la convergencia casi por doquier, lo que si podremos asegurar es la existencia de una sucesión parcial que converge casi por doquier al mismo límite al que se converge en media. Este hecho lo recogemos en la siguiente proposición ([25, Proposition 2.3.10]).

PROPOSICIÓN 1.17. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que converge en media a la función integrable f. Existe entonces una sucesión parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ que converge casi por doquier a f.*

El siguiente teorema, es uno de los grandes teoremas en la Teoría de Integración, nos permite para sucesiones de funciones integrables permutar integral y límite bajo condiciones muy generales.

TEOREMA 1.18 (Teorema de la Convergencia Dominada).
Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones X-valuadas integrables que converge a la función f casi por doquier. Si existe una función integrable g tal que $\|f_n\| \le g$. Entonces la función f es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

En particular se tiene que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Una consecuencia del Teorema de la Convergencia Dominada es la siguiente caracterización de integrabilidad que es tomada en algunos textos como definición de la integrabilidad (por ejemplo, [21]).

TEOREMA 1.19. *Una función $f : \Omega \to X$ es integrable si, y sólo si, es medible y $\|f\|$ es integrable.*

En ocasiones estamos interesados en la convergencia casi por doquier o en la convergencia en media de una serie de funciones integrables. La siguiente proposición ([25, Proposition 2.5.1]) nos garantiza la convergencia en ambos sentidos si la serie de las seminormas es convergente.

PROPOSICIÓN 1.20. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones X-valuadas integrables. Si $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$ entonces $\sum f_n$ converge casi por doquier y en media a una función integrable f.*

Si Ω_0 es un subconjunto medible de Ω, una función medible f con valores en X es integrable en Ω_0 si $\chi_{\Omega_0} f$ es integrable. En caso afirmativo, el valor de la integral de f sobre Ω_0 vendrá dado por

$$\int_{\Omega_0} f d\mu := \int_{\Omega} \chi_{\Omega_0} f d\mu$$

Teniendo en cuenta esta definición, podemos dar otras dos propiedades relativas a las funciones integrables.

Proposición 1.21 ([25, Proposition 2.3.6]). *Cualquier función integrable es integrable sobre cualquier subconjunto medible.*

Proposición 1.22 ([25, Corollaire 2.5.8]). *Sea f una función integrable. Si para todo subconjunto medible Ω_0 de Ω se verifica que $\int_{\Omega_0} f d\mu = 0$ entonces $f = 0$ casi por doquier.*

En el ámbito probabilístico, $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio probabilístico completo, a una función integrable ξ la denominamos variable aleatoria de primer orden y al valor de su integral se denomina *esperanza* de la variable aleatoria ξ y la denotamos por $\mathbb{E}(\xi)$, esto es

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_\Omega \xi d\mathbb{P}$$

Dado que la integrabilidad de una variable aleatoria y el valor de su integral no dependen de su definición sobre conjuntos de probabilidad nula, podemos definir $\mathbb{E}([\xi])$ como $\mathbb{E}(\xi)$.

Por último, consideramos el espacio de las variables aleatorias *esencialmente acotadas*, esto es: el espacio de las variables aleatorias x tales que

$$\inf\{M \in \overline{\mathbb{R}} : \|x\| \leq M \text{ } c.s.\} < \infty$$

Dicho espacio es notado por $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}, X)$ y su topología propia viene dada por la seminorma

$$\|x\|_\infty := \inf\{M \in \overline{\mathbb{R}} : \|x\| \leq M \text{ } c.s.\}, \quad x \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}, X)$$

En algunas ocasiones no es necesario recurrir a la poderosa integral anteriormente expuesta, pudiendo la más familiar integral de Riemann satisfacer nuestras necesidades. Exponemos a continuación la noción de integral de Riemann para funciones definidas en un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ y con valores en un espacio de Banach X y aprovechamos ésta para introducir el concepto de integral a lo largo de una curva, muy utilizada en el análisis complejo.

DEFINICIÓN 1.23. Una *curva* en el plano es una función continua $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$. El punto $\gamma(\alpha)$ es el *origen* y $\gamma(\beta)$ el *extremo* de la curva γ; cuando coinciden se dice que γ es *cerrada*. Notamos por γ^* a la imagen de γ, esto es $\gamma^* = \{\gamma(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$, y si G es un abierto del plano tal que $\gamma^* \subset G$, diremos que γ es una curva en G.

DEFINICIÓN 1.24. Una función continua γ de un intervalo compacto $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ para la que existe una partición finita de $[\alpha, \beta]$, $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, de forma que γ es de clase C^1 sobre cada $[t_{j-1}, t_j]$ se dice que es una *curva regular a trozos*.

TEOREMA 1.25 ([25, Proposition 2.7.13]). *Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$, con valores en un espacio de Banach X, acotada y con soporte compacto. f es Riemann integrable si, y sólo si, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}$ donde esta función no es continua, que siempre es medible, es de medida de Lebesgue nula.*

Sea X un espacio de Banach complejo, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ una curva regular a trozos y notemos $C(\gamma^*, X)$ al espacio de Banach de todas las funciones continuas del compacto γ^* en X con su norma usual dada por

$$\|f\|_\infty = \max\{\|f(z)\| : z \in \gamma^*\} \quad \forall f \in C(\gamma^*, X).$$

Dada $f \in C(\gamma^*, X)$, la función $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ de $[\alpha, \beta]$ en X es Riemann integrable, basta aplicar la anterior proposición a dicha función.

Por tanto, para cada función continua $f \in C(\gamma^*, X)$ definimos la *integral de f a lo largo de γ* por:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Adaptando [25, Proposition 2.7.12] a nuestro contexto tenemos que:

PROPOSICIÓN 1.26. *Sea X un espacio de Banach complejo, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ una curva regular a trozos y $f \in C(\gamma^*, X)$. Para cada $\epsilon > 0$, existe $\nu > 0$ verificando que para toda sucesión finita de puntos $t_0 = \alpha < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, tal que:*

$$\sup_{1 \leq i \leq n} (t_{i-1} - t_i) \leq \nu$$

y cualesquiera $y_i \in [t_i, t_{i-1}]$ tenemos que

$$\left\| \int_\gamma f(z)dz - \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i-1}) f(\gamma(y_i))\gamma'(y_i) \right\| \leq \varepsilon$$

El lector interesado es referido a los textos [10,14,23,25], donde encontrará una minuciosa exposición de la teoría de medibilidad e integración de funciones con valores en un espacio de Banach.

I.4 FUNCIONES ALEATORIAS

En lo que sigue notaremos por $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad completa y por $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio probabilístico completo que se mantendrá fijo en toda la memoria.

Sea T un conjunto cualquiera y X un espacio de Banach real o complejo.

DEFINICIÓN 1.27. Una *función aleatoria* X-valuada sobre T es una función

$$\phi : T \times \Omega \to X$$

tal que, para cada $t \in T$, la función

$$\phi_t : \Omega \to X$$

definida por $\phi_t(\omega) = \phi(t, \omega)$ es una variable aleatoria X-valuada de primer orden.

Una función aleatoria es una función de dos variables $\phi(t, \omega)$, para la cual fijado el primer argumento se tiene una variable aleatoria X-valuada. Si fijamos el segundo argumento, ésto es para cada $\omega \in \Omega$, la función determinística $t \mapsto \phi(t, \omega)$ definida sobre T y valuada en X, será denotada por ϕ_ω y recibirá el nombre de *trayectoria* de la función aleatoria X-valuada ϕ.

La relación de equivalencia para variables aleatorias mediante la identificación usual casi seguramente proporciona una relación de equivalencia natural para funciones aleatorias.

Sean ϕ y ψ funciones aleatorias X-valuadas sobre T. Se dice que ϕ y ψ son *equivalentes*, y lo notamos por $f \equiv g$, si

$$\mathbb{P}(\phi_t = \psi_t) = 1$$

para cada $t \in T$. Dada una función aleatoria X-valuada sobre T, ϕ, cualquier función aleatoria equivalente a ϕ se dice que es una versión de ϕ.

En esta memoria analizaremos cómo determinadas condiciones de regularidad (continuidad, derivabilidad, holomorfía) en media, de las funciones aleatorias se transfieren a sus trayectorias.

Sea E un espacio topológico, X un espacio de Banach real o complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre E. Diremos que ϕ es *continua en media* en un punto $z_0 \in E$ si

$$\lim_{z \to z_0} \mathbb{E}\|\phi_z - \phi_{z_0}\| = 0.$$

Condición que obviamente equivale a la continuidad en z_0 en el sentido tradicional de la función

$$z \mapsto [\phi_z]$$

definida sobre E y con valores en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{P}, X)$.

La función aleatoria ϕ se dirá continua en media sobre E si lo es en cada punto de E.

En el siguiente ejemplo mostramos una función aleatoria continua en media sobre un intervalo real cuyas versiones tienen todas ellas casi todas sus trayectorias discontinuas.

EJEMPLO 1.28. Consideremos como Ω el intervalo [0,1] dotado con la medida de Lebesgue.

Sea $\{\xi_n\}$ la sucesión de variables aleatorias dada por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{j}{2^k} \leq \omega \leq \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $n = 2^k + j$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq j < 2^k$.

Definimos la función aleatoria $\phi : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\phi(t,\omega) = \begin{cases} n^2(n+1)^2(\frac{1}{n} - t)(t - \frac{1}{n+1})\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Puesto que la función $(\dfrac{1}{n} - t)(t - \dfrac{1}{n+1})$ es continua en el intervalo abierto $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ y se anula en $t = \frac{1}{n}$ y $t = \frac{1}{n+1}$, la continuidad de ϕ en media en el intervalo $(0,1]$ es clara.

Para comprobar la continuidad en media sobre 0, consideremos una sucesión $\{t_n\}$ de elementos de $(0,1]$ que converge a cero.

Dado t_n, notamos por k_n el número natural verificando $\frac{1}{k_n+1} \leq t_n \leq \frac{1}{k_n}$. Por tanto

$$\mathbb{E}|\phi_{t_n}| = {k_n}^2(k_n+1)^2(\frac{1}{k_n} - t_n)(t_n - \frac{1}{k_n+1})\|\xi_{k_n}\|_1.$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_{k_n}\|_1 = 0$$

y

$${k_n}^2(k_n+1)^2(\frac{1}{k_n} - t_n)(t_n - \frac{1}{k_n+1}) \leq \frac{1}{4}$$

se sigue que ϕ es continua en media en 0.

Ahora vamos a probar que ϕ no posee ninguna versión que tenga un conjunto de trayectorias continuas de medida no nula.

Consideramos la sucesión $\{t_n\}$ de elementos del intervalo $[0,1]$ definida por $t_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ que converge a cero. Si evaluamos ϕ en la sucesión tenemos que

$$\phi_{t_n}(\omega) = \frac{1}{4}\xi_n(\omega), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Dado $\omega \in \Omega$, la sucesión $\{\xi_n(\omega)\}$ no converge. Si ψ es una versión de ϕ, para cada t_n existe un conjunto de probabilidad nula, Δ_n, tal que

$$\psi_{t_n}(\omega) = \phi_{t_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \setminus \Delta_n.$$

Si notamos por Δ al conjunto de probabilidad nula dado por $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, se satisface

$$\psi(t_n, \omega) = \phi(t_n, \omega) = \frac{1}{4}\xi_n(\omega), \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall \omega \in \Omega \setminus \Delta.$$

y por tanto si $\omega \in \Omega \setminus \Delta$ la sucesión $\{\psi_\omega(t_n)\}$ no converge. De ello se sigue que no puede haber un conjunto de trayectorias continuas en $[0,1]$ que no sea de medida nula.

En el siguiente ejemplo mostramos una función aleatoria con todas sus trayectorias continuas sobre un intervalo real y que no es continua en media sobre dicho intervalo.

Ejemplo 1.29. Consideremos como Ω el intervalo (0,1) dotado con la medida de Lebesgue.

Sea $\{\xi_n\}$ la sucesión de variables aleatorias dadas por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} n^2 & \text{si} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos la función aleatoria $\phi : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\phi(t, \omega) = \begin{cases} n^2(n+1)^2(\frac{1}{n} - t)(t - \frac{1}{n+1})\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Para probar que las trayectorias son continuas, probaremos en primer lugar que lo son en el intervalo $(0,1]$.

Sea $t_0 \in (0,1]$ y n_0 el natural satisfaciendo $\frac{1}{n_0+1} \leq t_0 \leq \frac{1}{n_0}$. Es claro que las trayectorias de la función aleatoria ϕ sobre el intervalo $[\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}]$ están definidas como

$$\phi_\omega(t) = \begin{cases} n_0^2(n_0+1)^2(\frac{1}{n_0} - t)(t - \frac{1}{n_0+1})n_0^2 & \text{si} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n_0} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con lo que es inmediato comprobar que en el punto t_0 todas las trayectorias son continuas.

Para probar la continuidad en 0 de las trayectorias, consideremos $\omega \in \Omega$ fijo y n_0 un natural satisfaciendo $\frac{1}{n_0} < \omega$. Si $\{t_n\}$ es una sucesión de elementos de $[0,1]$ que converge a cero, existirá un natural m tal que si $n \geq m$ entonces $t_n \leq \frac{1}{n_0}$. Sin más que comprobar que para $n \geq m, \phi_\omega(t_n) = 0$ queda probada la continuidad de la función ϕ_ω en cero.

Por último comprobamos que ϕ no es continua en media sobre el intervalo $[0,1]$, para lo cual basta probar que no lo es en 0.

Consideramos la sucesión $\{t_n\}$ de elementos del intervalo $[0,1]$ definida por $t_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$. Esta sucesión converge a cero y para cada elemento t_n,

$$\mathbb{E}|\phi_{t_n}| = \int_0^1 |\phi(t_n,\omega)| d\mathbb{P} = \frac{1}{4}\|\xi_n\|_1 = \frac{1}{4}\frac{n^2}{n}.$$

Consecuentemente, ϕ no es continua en media en cero.

El objetivo de la presente obra será probar que la consideración de condiciones de regularidad más perfectas como puede ser la holomorfía o la de poseer derivadas de conveniente orden continuas si que permite obtener una adecuada transferencia de la misma, tanto de la correspondiente regularidad en media hacia las trayectorias como de las trayectorias a la propiedad en media.

La noción de función aleatoria constituye un concepto totalmente básico en el Análisis Estocástico y es por tanto de obligada referencia en cualquier texto especializado en tal disciplina. Nos ha sido difícil en consecuencia elegir entre la ingente cantidad de referencias al respecto. Hemos seleccionado las que a continuación listamos por su carácter general y adecuarse de alguna manera a nuestros propósitos: [5,7,8,9,13,15,17,18,24,26,27 ,28,33,34,35,36].

Capítulo II

Holomorfía en media

II.1 Algunos principios básicos en la teoría de una variable compleja

Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y f una función X-valuada definida sobre D. Diremos que f es *derivable* (en el sentido complejo) en un punto $z_0 \in D$ si la función

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

tiene límite cuando z tiende a z_0, ésto es, existe un elemento de X que notaremos por $f'(z_0)$ de manera que

$$\lim_{z \to z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| = 0.$$

La función f se dice *holomorfa* sobre D si es derivable en cada punto de éste.

Esta definición de holomorfía para funciones vector-valuadas no es más que una extensión de la definición clásica de holomorfía para funciones complejo valuadas a este ambiente más general.

Dedicaremos esta breve sección a la exposición de algunos de los principios fundamentales de la teoría de funciones holomorfas de una variable compleja que serán utilizados a lo largo de este capítulo. Referimos al lector al clásico texto de Hille y Phillips [21] para la noción de holomorfía de funciones vector valuadas o a [6,12] para la teoría de funciones complejas de una variable compleja. Esencialmente los resultados que seguidamente mostramos están allí contenidos.

El siguiente teorema nos permite probar que una función vector-valuada es holomorfa comprobando que ciertas funciones complejo valuadas son holomorfas. Este resultado fue probado por N. Dunford y lo enunciamos como sigue:

TEOREMA 2.1. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y f una función X-valuada definida sobre D. Equivalen:*

1. *f es holomorfa sobre D.*
2. *Para cada funcional x' lineal y continuo sobre X la función $z \mapsto x'(f(z))$ definida sobre D y con valores en $\mathbb{C}$ es holomorfa sobre D.*

Uno de los más formidables acontecimientos que acaecen en la teoría de funciones holomorfas, es la posibilidad de representar éstas localmente mediante series de potencias. Son éstas series funcionales de la forma

$$\sum \alpha_n (z - z_0)^n,$$

cuyos coeficientes $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots$ pertenecen al espacio de Banach X considerado, z_0 es un punto prefijado en $\mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Tales series funcionales convergen de una forma especialmente perfecta, y toda la información acerca de ésta es proporcionada por su denominado radio de convergencia R definido como sigue:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \|\alpha_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(adoptando en la anterior identidad el convenio habitual $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$). Recopilaremos en el siguiente enunciado la información que consideramos más relevante acerca de la convergencia, y suma cuando procede, de una serie de potencias. Fijaremos previamente un poco de notación.

En lo sucesivo, dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 < R \leq \infty$, notaremos por $D(z_0, R)$ al disco abierto de centro z_0 y radio R, ésto es

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

Teorema 2.2. *Sea $\sum \alpha_n (z - z_0)^n$ una serie de potencias con coeficientes en X. Se verifican entonces las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $R = 0$, $\sum \alpha_n (z - z_0)^n$ converge únicamente en el punto z_0.*

2. *Si $R \neq 0$, para cada $z \in D(z_0, R)$ la serie numérica*

$$\sum \|\alpha_n\| |z - z_0|^n$$

es convergente y consecuentemente la serie

$$\sum \alpha_n (z - z_0)^n$$

converge en el espacio de Banach X. Además ésta convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de $D(z_0, R)$ y la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

$\forall z \in D(z_0, R)$ es holomorfa sobre este disco, con derivada

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1} (z - z_0)^n$$

$\forall z \in D(z_0, R)$. De hecho la función tiene derivada de cualquier orden en todo punto de $D(z_0, R)$ con

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} \alpha_{n+k} (z - z_0)^n$$

$\forall z \in D(z_0, R), \forall k \in \mathbb{N}$.

Como comentábamos previamente, toda función holomorfa en un abierto de $\mathbb{C}$ resulta tener el anterior aspecto en cada disco abierto contenido en el dominio.

TEOREMA 2.3. *Sea D un subconjunto abierto $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y f una función X-valuada holomorfa en D. Para cualquier z_0 de D, la serie de potencias*

$$\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

tiene radio de convergencia mayor o igual que $R_0 = dist(z_0, \mathbb{C} \setminus D)$ *y se verifica que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R_0).$$

La veracidad del enunciado antes expuesto puede ser obtenida al amparo del célebre Teorema de Cauchy. Constituye éste, sin duda alguna, uno de los más importantes teoremas de la teoría de funciones holomorfas, que en su versión más elemental puede ser enunciado en los siguientes términos:

TEOREMA 2.4. *Sea D un subconjunto abierto convexo de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y f una función X-valuada holomorfa en D. Si γ es cualquier curva cerrada y regular a trozos en D, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Curiosamente el recíproco del teorema de Cauchy es también de alguna forma válido. Esta es justamente la información que aporta el siguiente teorema.

TEOREMA 2.5 (de Morera). *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y f una funcion X-valuada continua sobre D. Supongamos que*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

para cada curva cerrada y regular a trozos en D. Entonces f es holomorfa sobre D.

A continuación exponemos algunos otros resultados fundamentales que nos serán de utilidad en algún momento de esta memoria.

TEOREMA 2.6 (de las singularidades evitables de Riemann). *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo, z_0 un punto de D y f una función X-valuada continua en D y holomorfa en $D \setminus \{z_0\}$. Entonces f es holomorfa en todo D.*

TEOREMA 2.7 (Principio de Identidad). *Sea D un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo, f y g funciones X-valuadas holomorfas en D. Supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}$ en D con límite en D de manera que*

$$f(z_n) = g(z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in D.$$

TEOREMA 2.8 (de Convergencia de Weierstrass). *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones X-valuadas holomorfas en D que converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de D a una función f. Entonces f es holomorfa en D y además para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión de funciones $\{f_n^{(k)}\}$ converge también a $f^{(k)}$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto de D.*

Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y X un espacio de Banach complejo. En lo sucesivo designaremos por $C(D, X)$ al conjunto de todas las funciones continuas de D en X. La convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de D genera una topología lineal localmente convexa metrizable y completa sobre el espacio vectorial $C(D, X)$. Para cada subconjunto compacto K de D puede definirse una seminorma p_K sobre $C(D, X)$ mediante

$$p_K(f) = \max\{\|f(z)\| : z \in K\}.$$

Es conocido que la familia de seminormas $\{p_K\}$ genera la topología antes descrita. Puede ésta también ser descrita por una familia menos amplia de seminormas. Basta con considerar la sucesión $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de D definida como:

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n, d(z, \mathbb{C} \setminus D) \geq \frac{1}{n}\},$$

que satisface

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = D$$

y

$$K_n \subset int(K_{n+1}).$$

Es fácil comprobar que la familia de seminormas $\{p_{K_n}\}$ genera la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de D.

Un subespacio especialmente relevante de $C(D, X)$ es el subespacio $\mathcal{H}(D, X)$ de todas las funciones X-valuadas holomorfas sobre D. El teorema de convergencia de Weierstrass garantiza justamente que este destacado subespacio es cerrado en $C(D, X)$ y consecuentemente la convergencia uniforme sobre los compactos de D genera también sobre $\mathcal{H}(D, X)$ una topología lineal localmente convexa metrizable y completa que puede ser engendrada por la familia de seminormas $\{p_{K_n}\}$. Notaremos simplemente por $\mathcal{H}(D)$ al espacio $\mathcal{H}(D, \mathbb{C})$. La compacidad en este espacio queda perfectamente descrita en el teorema de Montel. Adheriéndonos a la terminología clásica diremos que un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ es normal si su clausura en $\mathcal{H}(D)$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}(D)$.

TEOREMA 2.9 (de Montel). *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{H}(D)$. $\mathcal{F}$ es normal si, y sólo si, está uniformemente acotado en cada subconjunto compacto de D.*

II.2 TRANSFERENCIA DE LA HOLOMORFÍA EN MEDIA A LAS TRAYECTORIAS

Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre D. Diremos que ϕ es *holomorfa en media* sobre D si para cada $z_0 \in D$ la función

$$\frac{\phi_z - \phi_{z_0}}{z - z_0}$$

tiene límite en media cuando z tiende a z_0; ésto es, existe una variable aleatoria de primer orden sobre X, que será única salvo equivalencias y que razonablemente notaremos por ϕ'_{z_0}, de manera que

$$\lim_{z \to z_0} \mathbb{E} \left\| \frac{\phi_z - \phi_{z_0}}{z - z_0} - \phi'_{z_0} \right\| = 0.$$

Es obvio que la holomorfía en media de una función aleatoria ϕ equivale a la holomorfía, en el sentido tradicional antes expuesto, de la función

$$z \mapsto [\phi_z]$$

definida sobre D y con valores en el espacio de Banach complejo $L_1(\mathbb{P}, X)$.

El teorema de Dunford admite entonces una muy interesante lectura en este terreno aleatorio. Tengamos en cuenta para ello que cada variable aleatoria complejo valuada esencialmente acotada ξ define un funcional lineal y continuo f_ξ sobre $L_1(\mathbb{P}, \mathbb{C})$ por

$$f_\xi(\zeta) = \mathbb{E}(\xi\zeta),$$

y la correspondencia

$$\xi \longmapsto f_\xi$$

define un isomorfismo lineal e isométrico de $L_\infty(\mathbb{P}, \mathbb{C})$ sobre el dual topológico de $L_1(\mathbb{P}, \mathbb{C})$. Todo ello prueba el siguiente enunciado:

PROPOSICIÓN 2.10. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. ϕ es holomorfa en media sobre D si, y sólo si, para cada $\xi \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}, \mathbb{C})$ la función complejo valuada*

$$z \longmapsto \mathbb{E}(\phi_z \xi)$$

es holomorfa sobre D.

En particular la función compleja definida sobre D por

$$z \longmapsto \mathbb{E}(\phi_z)$$

es holomorfa sobre D. Notemos que esta función puede ser razonablemente llamada *esperanza* de ϕ y será denotada por $\mathbb{E}\phi$.

El anterior resultado manifiesta una gran utilidad por permitirnos comprobar la holomorfía en media de una función aleatoria a partir de la holomorfía de ciertas funciones complejas de variable compleja, pudiendo usar para este menester todas las herramientas disponibles en el Análisis Complejo Clásico.

El hecho de que una función aleatoria sea holomorfa en media no nos garantiza la holomorfía de sus trayectorias. Como puede verse en el siguiente ejemplo, una función aleatoria puede ser holomorfa en media y no tener ninguna trayectoria holomorfa.

EJEMPLO 2.11. Consideramos el abierto de $\mathbb{C}$ dado por $D = \{x+iy \in \mathbb{C} : 0 < x, y < 1\}$ y como espacio de probabilidad Ω tomamos el conjunto D dotado con la medida de Lebesgue.

La función aleatoria $\phi : D \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(z,\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z = \omega \\ 0 & \text{si} \quad z \neq \omega \end{cases}$$

es holomorfa en media sobre D y no tiene, sin embargo, ninguna trayectoria holomorfa.

Seguidamente probamos que cualquier serie de potencias con coeficientes aleatorios de primer orden que converge en media sobre un disco, también lo hace casi seguramente sobre éste, definiendo además una función que posee unas muy interesantes propiedades de integrabilidad.

LEMA 2.12. *Sea X un espacio de Banach complejo y $\sum \xi_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con coeficientes aleatorios X-valuados de primer orden y radio de convergencia en media no nulo, R. Existe entonces un conjunto de probabilidad nula Δ tal que, para cada $\omega \in$*

$\Omega\backslash\Delta$, *el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum \xi_n(\omega)(z-z_0)^n$ *es al menos R. Además, la función*

$$(z,\omega) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega)(z-z_0)^n$$

definida casi por doquier en $D(z_0,R)\times\Omega$ *y con valores en* X *es* $\mu\times\mathbb{P}$-*integrable sobre* $K\times\Omega$ *para cualquier subconjunto compacto* K *de* $D(z_0,R)$ *y cualquier medida de Borel finita* μ *sobre* K.

Demostración. Consideremos $0 < r < R$. Por Teorema 2.2 la serie $\sum \mathbb{E}\|\xi_n\|r^n$ converge y por tanto, Proposición 1.20, existe un conjunto de probabilidad nula Δ_r tal que, para cada $\omega \in \Omega\setminus\Delta_r$, la serie $\sum \xi_n(\omega)r^n$ converge a una variable aleatoria X-valuada de primer orden. Consecuentemente para cualesquiera $\omega\in\Omega\setminus\Delta_r$ y $z\in D(z_0,r)$ la serie $\sum\xi_n(\omega)(z-z_0)^n$ es convergente, de hecho absolutamente convergente. Sea ahora $\{r_n\}$ una sucesión creciente y convergente a R con $0<r_n<R$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y sea $\Delta=\cup_{n=1}^{\infty}\Delta_{r_n}$. Es obvio que $\mathbb{P}(\Delta)=0$ y además para cualesquiera $\omega\in\Omega\backslash\Delta$ y $z\in D(z_0,R)$ la serie $\sum\xi_n(\omega)(z-z_0)^n$ es convergente, lo que prueba que cada una de las series de potencias $\sum\xi_n(\omega)(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia no menor que R.

Como quiera que cada uno de los sumandos

$$(z,\omega)\longmapsto \xi_n(\omega)(z-z_0)^n$$

de $D(z_0,R)\times\Omega$ en X es de manera obvia $\mathcal{B}\times\Sigma$-medible podemos concluir que la función

$$(z,\omega) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega)(z-z_0)^n$$

definida casi por doquier sobre $D(z_0,R)\times\Omega$ es $\mathcal{B}\times\Sigma$-medible.

Consideremos ahora un subconjunto compacto K de $D(z_0, R)$ y μ una medida de Borel finita sobre K. Seleccionemos $r \in \mathbb{R}$ de manera que $0 < r < R$ y $K \subset D(z_0, r)$. Para cualesquiera $\omega \in \Omega \setminus \Delta_r$ y $z \in D(z_0, r)$ se satisface

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega)(z - z_0)^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n(\omega)\| r^n$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned}
\int_{K\times\Omega} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega)(z - z_0)^n \right\| d(\mu \times \mathbb{P}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{K\times\Omega} \|\xi_n(\omega)\| r^n d(\mu \times \mathbb{P}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_K r^n d\mu \Big) \Big(\int_\Omega \|\xi_n(\omega)\| d\mathbb{P} \Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\|\xi_n\| r^n \mu(K) < \infty
\end{aligned}$$

Lo anterior prueba que efectivamente la función

$$(z, \omega) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega)(z - z_0)^n$$

es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$. ∎

En el siguiente lema probamos que si ϕ y ψ son funciones aleatorias equivalentes vector valuadas definidas sobre un espacio topológico separable (ésto es, que contiene un subconjunto numerable y denso) y sus trayectorias son continuas entonces son casi idénticas las funciones aleatorias ϕ y ψ. En el sentido de que casi todas sus trayectorias son iguales.

LEMA 2.13. *Sea E un espacio topológico separable, X un espacio de Banach real o complejo y sean ϕ y ψ funciones aleatorias*

X-valuadas definidas sobre E cuyas trayectorias son continuas. Si ϕ y ψ son equivalentes, entonces $\mathbb{P}[\phi_\omega = \psi_\omega] = 1$.

Demostración. Sea S un subconjunto de E numerable y denso. Al ser las funciones aleatorias ϕ y ψ equivalentes, para cada $s \in S$ existe un conjunto Δ_s con probabilidad uno sobre el que las variables aleatorias ϕ_s y ψ_s coinciden, ésto es

$$\phi_s(\omega) = \psi_s(\omega) \quad \forall \omega \in \Delta_s.$$

Si notamos por Δ al conjunto de probabilidad uno dado por

$$\Delta = \bigcap_{s \in S} \Delta_s,$$

se verifica

$$\phi_s(\omega) = \psi_s(\omega)$$

para cualquier $s \in S$ y cualquier $\omega \in \Delta$. De la continuidad de las trayectorias de las funciones aleatorias ϕ y ψ, se concluye que para cada $\omega \in \Delta$ se satisface

$$\phi_\omega(t) = \psi_\omega(t) \quad \forall t \in E.$$

Deducimos de ello que $\Delta \subset \{\omega \in \Omega : \phi_\omega = \psi_\omega\}$ y consecuentemente $\mathbb{P}[\phi_\omega = \psi_\omega] = 1$. ∎

TEOREMA 2.14. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada holomorfa en media sobre D. Existe entonces una versión ψ de ϕ cuyas trayectorias son holomorfas sobre D que es además $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre cualquier conjunto de la forma $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D y cualquier medida de Borel finita μ sobre K.*

Demostración. En el caso de ser $D = \mathbb{C}$, la función $z \mapsto [\phi_z]$ puede desarrollarse en todo $\mathbb{C}$ como la suma en media de una serie de potencias $\sum[\xi_n]z^n$ con $\xi_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{P}, X)$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. La serie $\sum \xi_n z^n$ satisface los requisitos del Lema 2.12. Si Δ es el conjunto con probabilidad nula dado por aquel lema, entonces definimos

$$\psi(z,\omega) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega) z^n & \text{si} \quad (z,\omega) \in \mathbb{C} \times (\Omega \setminus \Delta) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función aleatoria ψ es obviamente una versión de ϕ cuyas trayectorias son holomorfas sobre D que satisface, en virtud del Lema 2.12, además la condición de integrabilidad enunciada.

Si $D \neq \mathbb{C}$, entonces consideramos el conjunto numerable

$$B = \{p + qi \in D : p, q \in \mathbb{Q}\}.$$

Para cada $b \in B$, tomamos $r_b = \inf\{|z - b| : z \notin D\}$ y definimos los conjuntos

$$D_b = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| < r_b\}$$

y

$$C_b = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| \leq \frac{r_b}{2}\}.$$

Para cada $b \in B$ podemos expresar $[\phi_z]$ sobre D_b como la suma en media de una serie de potencias $\sum[\xi_n^{(b)}](z - b)^n$ con $\xi_n^{(b)} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{P}, X)$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. La serie $\sum \xi_n^{(b)}(z - b)^n$ satisface los requisitos del Lema 2.12. Denotamos por Δ_b el subconjunto con probabilidad nula dado por aquel lema y sea

$$\psi_b(z,\omega) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{(b)}(\omega)(z - b)^n & \text{si} \quad (z,\omega) \in D_b \times (\Omega \setminus \Delta_b) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función ψ_b es holomorfa en media sobre D_b y todas sus trayectorias son holomorfas sobre D_b, además es equivalente a ϕ sobre D_b.

Dados $b, c \in B$ con $D_b \cap D_c \neq \emptyset$, ψ_b y ψ_c son claramente equivalentes sobre $D_b \cap D_c$ y el Lema 2.13 asegura la existencia de un conjunto con probabilidad nula $\Delta_{b,c}$ tal que

$$\psi_b(\cdot,\omega) = \psi_c(\cdot,\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus \Delta_{b,c}.$$

Si tomamos

$$\Delta = \bigcup_{b,c \in B} \Delta_{b,c}$$

y definimos la función ψ sobre $D \times \Omega$ por

$$\psi(z,\omega) = \begin{cases} \psi_b(z,\omega) & \text{si} \quad (z,\omega) \in D_b \times \Omega \setminus \Delta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces ψ es una función aleatoria bien definida sobre D, sus trayectorias son holomorfas sobre D y es equivalente a ϕ.

Puesto que, por Lema 2.12, cada función

$$\psi_b(z,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{(b)}(\omega)(z-b)^n$$

es medible sobre $D_b \times \Omega$ y $D = \cup_{b \in B} D_b$, podemos asegurar que ψ es medible sobre $D \times \Omega$. Dado que $D = \cup_{b \in B} C_b^\circ$, si $K \subset D$ es un subconjunto compacto existe un recubrimiento finito para K de forma que podemos elegir $b_1, \ldots, b_N \in B$ para los que $K \subset C_{b_1}^\circ \cup \cdots \cup C_{b_N}^\circ$. En virtud del Lema 2.12 podemos concluir que cada una de las funciones ψ_{b_j}, y por tanto ψ, es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $(K \cap C_{b_j}) \times \Omega$, para $j = 1, \ldots, N$. Puesto que $K \times \Omega = \cup_{j=1}^{N} (K \cap C_{b_j}) \times \Omega$ podemos concluir que ψ es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$. ∎

La peculiar propiedad de integrabilidad encontrada para la versión ψ en el anterior teorema permitirá obtener una formidable propiedad para la correspondencia

$$\omega \longmapsto \psi_\omega,$$

que resulta ser una variable aleatoria valuada en convenientes espacios de Banach.

TEOREMA 2.15. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y ψ una función aleatoria real o compleja definida en K $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier medida de Borel regular μ en K y cuyas trayectorias son continuas en K. Entonces la aplicación*

$$\omega \longmapsto \psi_\omega$$

es una variable aleatoria sobre $C_{\mathbb{K}}(K)$.

Demostración. Sea τ una medida de Borel $\mathbb{K}$-valuada regular en K. Significa ésto que su variación $\mu = |\tau|$ es una medida de Borel regular en K y en consecuencia la función

$$(z,\omega) \longmapsto \psi(z,\omega)$$

de $K \times \Omega$ en $\mathbb{C}$ es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable. También será $\mu \times \mathbb{P}$-integrable la función

$$(z,\omega) \longmapsto \psi(z,\omega)\frac{d\tau}{d\mu}.$$

El teorema de Fubini asegura entonces que la función

$$\omega \longmapsto \int_K \psi(z,\omega)\frac{d\tau}{d\mu}d\mu = \int_K \psi(z,\omega)d\tau$$

es $\mathbb{P}$-integrable en Ω. Este hecho, junto con el teorema de representación de Riesz, teorema 1.1, garantiza entonces que la aplicación $\omega \mapsto \psi_\omega$ de Ω en $C_{\mathbb{K}}(K)$ es débilmente medible. Notemos finalmente que el espacio de Banach $C_{\mathbb{K}}(K)$ es separable y consecuentemente la aplicación considerada es automáticamente medible en cualquiera de los sentidos: Borel o Bochner. ∎

Para un subconjunto compacto K de $\mathbb{C}$ con interior no vacío notaremos por $A(K)$ el espacio vectorial de las funciones complejas definidas sobre K que son continuas en K y holomorfas en $int(K)$.

El espacio $C_{\mathbb{C}}(K)$ provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach y a continuación probamos que el espacio $A(K)$ con la norma que hereda de $C_{\mathbb{C}}(K)$ es también completo.

TEOREMA 2.16. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ con interior no vacío. $(A(K), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach complejo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones pertenecientes a $A(K)$ que converge uniformemente a una función f, que por la complitud de $C_{\mathbb{C}}(K)$ sabemos que es continua en K. Es claro que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformente sobre cada subconjunto compacto de $int(K)$, a la función f. Dado que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas en $int(K)$ que converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $int(K)$ a la función f, el Teorema de Convergencia de Weierstrass, Teorema 2.8, asegura que f es holomorfa en $int(K)$. Por tanto $f \in A(K)$. ∎

La conjunción de los Teoremas 2.14, 2.15 y 2.16 proporcionan ahora la siguiente valiosa información.

COROLARIO 2.17. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja holomorfa en media sobre D. Existe entonces* *una versión ψ de ϕ cuyas trayectorias son holomorfas y para cada subconjunto compacto K de D con interior no vacío, la aplicación*

$$\omega \mapsto \psi_{\omega|K}$$

es una variable aleatoria sobre el espacio de Banach $A(K)$.

II.3 Transferencia de la holomorfía de las trayectorias a la holomorfía en media

Nuestro propósito en la presente sección es analizar la validez del recíproco del Teorema 2.14. Comprobaremos que éste es cierto para funciones aleatorias complejo-valuadas y para tal menester usaremos el siguiente resultado.

Lema 2.18. *Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff y A un subconjunto de funciones complejas y continuas sobre K. Son equivalentes:*

1. *A está uniformemente acotada, ésto es*

$$\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \quad \forall z \in K,\ \forall f \in A.$$

2. *Para cada medida de Borel compleja μ regular en K el conjunto*

$$\left\{\int_K f(z)d\mu : f \in A\right\}$$

está acotado.

Demostración. Si A está uniformemente acotada, entonces para cada $f \in A$ tenemos que

$$\left|\int_K f(z)d\mu\right| \leq \int_K |f(z)|d\mu \leq M|\mu|(K).$$

Supongamos que se verifica 2. Una de las más básicas aplicaciones del principio de acotación uniforme nos permite asegurar que el conjunto A está acotado en el espacio de Banach $C_{\mathbb{C}}(K)$ si para cualquier funcional lineal y continuo x' sobre $C_{\mathbb{C}}(K)$ el conjunto $\{x'(f) : f \in A\}$ está acotado (véase [11, Corollary III.14.3]). Si unimos ésto a la información proporcionada por el Teorema de representación de Riesz, la veracidad de 1 está garantizada. ∎

TEOREMA 2.19. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja que posee una versión ψ cuyas trayectorias son holomorfas sobre D y que es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D y cualquier medida de Borel regular μ sobre K. Entonces ϕ es holomorfa en media sobre D.*

Demostración. Sea $\xi \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}, \mathbb{C})$ y probaremos que la función

$$f(z) = \int_\Omega \psi(z,\omega)\xi(\omega)d\mathbb{P} \quad \forall z \in D$$

es holomorfa sobre D.

Sean $z_0 \in D$ y $R > 0$ de manera que $\overline{D}(z_0, R) \subset D$. $\overline{D}(z_0, R)$ es un subconjunto compacto de D y por tanto la aplicación

$$\omega \longmapsto \psi_{\omega|\overline{D}(z_0,R)}$$

es una variable aleatoria sobre $A(\overline{D}(z_0, R))$. Por este motivo, para cada natural n, el conjunto

$$\Omega_n = \left\{\omega \in \Omega : \max_{|z-z_0|\leq R} |\psi(z,\omega)| \leq n\right\}$$

es medible. Obsérvese además que

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega.$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que la función

$$f_n : z \longmapsto \int_{\Omega_n} \psi(z,\omega)\xi(\omega)d\mathbb{P}$$

es holomorfa sobre $D(z_0, R)$. Probaremos para ello en primer lugar que es continua. Sea $w \in D(z_0, R)$ y $\{w_k\}$ una sucesión en $D(z_0, R)$ convergente a w. Puesto que cada trayectoria de ψ es continua se verifica:

$$\{\psi_{w_k}\} \to \psi_w$$

y de ahí

$$\{\psi_{w_k}\xi\} \to \psi_w\xi$$

casi por doquier en Ω. Dado que

$$|\psi_{w_k}(\omega)| \leq n \quad \forall \omega \in \Omega_n \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

deducimos que

$$|\psi_{w_k}(\omega)\xi(\omega)| \leq n\|\xi\|_\infty$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ casi por doquier en Ω_n.

El Teorema de la Convergencia Dominada, Teorema 1.18, prueba en consecuencia que

$$\int_{\Omega_n} \psi_{w_k}\xi d\mathbb{P} \to \int_{\Omega_n} \psi_w\xi d\mathbb{P},$$

lo cual demuestra la continuidad en el punto w de la función

$$z \mapsto \int_{\Omega_n} \psi_z \xi d\mathbb{P}.$$

Para cualquier curva cerrada y regular a trozos γ en $D(z_0, R)$, el teorema de Cauchy, teorema 2.4, prueba que

$$\int_\gamma \psi(z,\omega)dz = 0.$$

El teorema de Fubini permite obtener ahora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f_n(z)dz &= \int_\gamma \Big(\int_{\Omega_n} \psi(z,\omega)\xi(\omega)d\mathbb{P} \Big) dz \\
&= \int_{\Omega_n} \Big(\int_\gamma \psi(z,\omega)\xi(\omega)dz \Big) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Omega_n} \Big(\int_\gamma \psi(z,\omega)dz \Big) \xi(\omega)d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Omega_n} 0\xi(\omega)d\mathbb{P} = 0
\end{aligned}$$

La anterior información junto con la continuidad de f_n y el teorema de Morera proporcionan ya la holomorfía deseada de la función f_n en $D(z_0, R)$.

Obsevemos ahora que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $D(z_0, R)$ y a partir de ello pretendemos deducir la holomorfía de f sobre $D(z_0, R)$. Si la convergencia fuese uniforme sobre los compactos de $D(z_0, R)$ el Teorema de Convergencia de Weierstrass, teorema 2.8, nos proporcionaría la información deseada. Lamentablemente desconocemos si esta convergencia se produce. Lo que si somos capaces de probar es que la sucesión $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en los compactos del compacto $K = \overline{D}(z_0, R)$. Sea μ cualquier medida de Borel compleja regular sobre K y observemos que

$$\left| \int_K f_n(z)d\mu \right| = \left| \int_K \left(f_n(z)\frac{d\mu}{d|\mu|} \right) d|\mu| \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\int_K \Big(\int_{\Omega_n} \psi(z,\omega)\xi(\omega)d\mathbb{P}\Big)\frac{d\mu}{d|\mu|}d|\mu|\right| \\
&= \left|\int_{K\times\Omega_n} (\psi(z,\omega)\xi(\omega)\frac{d\mu}{d|\mu|})d(|\mu|\times\mathbb{P})\right| \\
&\leq \int_{K\times\Omega_n} |\psi(z,\omega)|\ |\xi(\omega)|d(|\mu|\times\mathbb{P}) \\
&\leq \int_{K\times\Omega} |\psi(z,\omega)|\ |\xi(\omega)|d(|\mu|\times\mathbb{P}) \\
&\leq \|\xi\|_\infty \int_{K\times\Omega} |\psi(z,\omega)|d(|\mu|\times\mathbb{P}) \quad \forall n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

El resultado anterior nos permite concluir que la sucesión $\{f_n\}$ está uniformemente acotada sobre K, y el teorema de Montel, teorema 2.9, permite consecuentemente asegurar que la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal, ésto es el conjunto $\overline{\{f_n : n\in\mathbb{N}\}} \subset \mathcal{H}(D(z_0,R))$ es compacto. Deducimos de ello la existencia de una sucesión parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ convergente uniformemente en los subconjuntos compactos de $D(z_0,R)$ a una función holomorfa g en $D(z_0,R)$. Como quiera que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $D(z_0,R)$, la sucesión $\{f_{\sigma(n)}\}$ también lo hará y en consecuencia f coincide con g en $D(z_0,R)$. Ello prueba que f es holomorfa en $D(z_0,R)$. Dada la arbitrariedad del punto $z_0\in D$, podemos afirmar que f es holomorfa en D.

Hemos probado por tanto que para cada ξ de $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{P},\mathbb{C})$ la función

$$z \mapsto \int_\Omega \psi(z,\omega)\xi(\omega)d\mathbb{P}$$

es holomorfa sobre D. La reformulación que hacíamos en el Teorema 2.1 del teorema de Dunford garantiza entonces que la función aleatoria ψ es holomorfa en media sobre D. Consecuentemente ϕ también lo será. ∎

La conjunción de los teoremas 2.14 y 2.19 nos permite enunciar lo siguiente.

Corolario 2.20. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Equivalen:*

1. *ϕ es holomorfa en media sobre D.*
2. *ϕ posee una versión ψ con trayectorias holomorfas sobre D y que es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D y cualquier medida de Borel regular μ sobre K.*

A continuación conseguimos sustituir la condición de integrabilidad para ψ por algunas condiciones de continuidad, que en algunas situaciones podrían ser más fáciles de comprobar.

Corolario 2.21. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Son equivalentes:*

1. *ϕ es holomorfa en media sobre D.*
2. *La función $\mathbb{E}|\phi_z|$ es continua en D y ϕ posee una versión $\mathcal{B} \times \Sigma$-medible con trayectorias holomorfas.*

Demostración. Supongamos que ϕ es $\mathcal{B} \times \Sigma$-medible, con trayectorias holomorfas y la función $\mathbb{E}|\phi_z|$ es continua. Obsérvese además que $\mathbb{E}|\phi_z| = \mathbb{E}|\psi_z|\ \forall z \in D$. La continuidad de la función $\mathbb{E}|\psi_z|$ fuerza que ésta sea μ-integrable sobre K para cualquier medida de Borel regular μ sobre el compacto K y el Teorema de Tonelli nos permite asegurar que la función aleatoria ψ es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$. El teorema 2.19 garantiza entonces que ϕ es holomorfa en media sobre D.

Recíprocamente, la holomorfía en media de ϕ nos lleva a la existencia de una versión ψ cuyas trayectorias son holomorfas sobre D y que es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto $K \subset D$ y cualquier medida de Borel regular μ sobre K. Teniendo en cuenta que el abierto D puede expresarse en la forma $D = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ con los subconjuntos K_n compactos, la $\mathcal{B} \times \Sigma$-medibilidad de ψ es inmediata. Además, la función

$$z \mapsto |\psi_z|$$

es continua en media, por lo que concluimos que la función $\mathbb{E}|\psi_z|$ es continua. ∎

Lema 2.22. *Sea X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada continua en media sobre un abierto D de $\mathbb{C}$ con casi todas sus trayectorias continuas sobre D. Si γ es una curva regular a trozos en D, entonces la función $\omega \mapsto \int_\gamma \phi(z,\omega)dz$ pertenece a la clase de equivalencia $\int_\gamma [\phi_z]dz$.*

Demostración. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que γ está parametrizada en el intervalo $[0,1]$.

Por Proposición 1.26 la sucesión $\{[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \phi_{\gamma(\frac{j}{n})}\gamma'(\frac{j}{n})]\}$ converge en media a $\int_\gamma [\phi_z]dz$. Entonces, Proposición 1.17, existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}$ de números naturales tal que $\{\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} \phi_{\gamma(\frac{j}{n_k})}\gamma'(\frac{j}{n_k})\}$ converge casi seguramente a una variable aleatoria X-valuada de primer orden. Por otro lado, al tener ϕ casi todas sus trayectorias continuas la función $t \mapsto \phi(\gamma(t),\omega)\gamma'(t)$ definida de $[0,1]$ en $\mathbb{C}$ es integrable casi seguramente. Por lo que, para casi todo $\omega \in \Omega$, $\{\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} \phi(\gamma(\frac{j}{n_k}),\omega)\gamma'(\frac{j}{n_k})\}$ converge a $\int_\gamma \phi(z,\omega)dz$ y por lo tanto, de Teorema 1.16 y Proposición 1.17, podemos concluir que la función $\omega \mapsto \int_\gamma \phi(z,\omega)dz$ está en $\int_\gamma [\phi_z]dz$. ∎

TEOREMA 2.23. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Si ϕ posee una versión ψ continua en media cuyas trayectorias son holomorfas sobre D entonces ϕ es holomorfa en media sobre D.*

Demostración. Sea $z_0 \in D$, $R > 0$ de manera que $D(z_0, R) \subset D$. Para cada curva cerrada γ regular a trozos en $D(z_0, R)$ se verifica, en virtud del teorema de Cauchy, teorema 2.4, que

$$\int_\gamma \psi_\omega(z)dz = 0$$

para cada $\omega \in \Omega$.

El Lema 2.22 nos garantiza ahora que

$$0 = \int_\gamma \psi_\omega(z)dz \in \int_\gamma [\psi_z]dz = \int_\gamma [\phi_z]dz.$$

El teorema de Morera, teorema 2.5, asegura entonces que ϕ es holomorfa en media sobre $D(z_0, R)$. Dada la arbitrariedad de z_0 podemos concluir que ϕ es holomorfa en media sobre D. ∎

COROLARIO 2.24. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *ϕ es holomorfa en media sobre D.*
2. *ϕ es continua en media y posee una versión cuyas trayectorias son holomorfas sobre D.*

En el siguiente teorema hacemos una recopilación de los resultados que hemos obtenido a lo largo de esta sección.

TEOREMA 2.25. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y ϕ una función aleatoria compleja definida sobre D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *ϕ es holomorfa en media.*

2. *ϕ posee una versión cuyas trayectorias son holomorfas sobre D y que es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D y cualquier medida de Borel regular μ sobre K.*

3. *La función $\mathbb{E}|\phi_z|$ es continua en D y ϕ posee una versión $\mathcal{B} \times \Sigma$-medible cuyas trayectorias son holomorfas sobre D.*

4. *ϕ es continua en media y posee una versión cuyas trayectorias son holomorfas sobre D.*

No podemos terminar la sección sin poner de manifiesto que los teoremas 2.19 y 2.23 han sido obtenidos para funciones aleatorias $\mathbb{C}$-valuadas y de manera obvia estos resultados serán también válidos para funciones aleatorias $\mathbb{C}^n$-valuadas. Desafortunadamente desconocemos si los referidos teoremas mantienen también su validez para funciones aleatorias X-valuadas, para un espacio de Banach complejo cualquiera de dimensión infinita. Esta interesante cuestión puede ser enunciada en los siguientes términos:

PROBLEMA ABIERTO. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo de dimensión infinita y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre D.

¿ Es ϕ holomorfa en media sobre D en cualquiera de las situaciones siguientes:?

1. ϕ posee una versión cuyas trayectorias son holomorfas sobre D y que es $\mu \times \mathbb{P}$-integrable sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D y cualquier medida de Borel regular μ sobre K.

2. La función $\mathbb{E}\|\phi_z\|$ es continua en D y ϕ posee una versión $\mathcal{B} \times \Sigma$-medible cuyas trayectorias son holomorfas sobre D.

3. ϕ es co. :nua en media y posee una versión cuyas trayectorias son holomorfas sobre D.

Estamos convencidos de que la respuesta dependerá muy sustancialmente de la naturaleza del espacio de Banach X y muy posiblemente será en general negativa.

II.4 DETECCIÓN Y CUANTIFICACIÓN DE LA EXISTENCIA DE TRAYECTORIAS IDÉNTICAS ENTRE DOS FUNCIONES ALEATORIAS.

Supongamos que ϕ_1 y ϕ_2 son funciones aleatorias definidas sobre algún conjunto no vacío T. Si nos fuese requerido algún criterio, razonablemente expeditivo y basado exclusivamente en la observación de las variables ϕ_{1t} y ϕ_{2t}, para dilucidar la existencia de un conjunto de probabilidad positiva de trayectorias idénticas entre ϕ_1 y ϕ_2, tendríamos que responder que tal pretensión es descabellada si las trayectorias no son regulares. El ejemplo 2.11 muestra una función aleatoria ϕ sobre $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x, y < 1\}$ que verifica

$$\mathbb{P}\{\phi_z = 0\} = 1, \quad \forall z \in D$$

y que sin embargo no posee ni una sóla trayectoria idénticamente nula. No obstante si la cuestión requerida fuese razonablemente modificada, siendo ahora nuestra meta la detección de la existencia de trayectorias comunes para convenientes versiones de ϕ_1 y ϕ_2, entonces es muy posible que sólo fuésemos capaces de dar dos respuestas.

Si $\mathbb{P}\{\phi_{1t} = \phi_{2t}\} = 1$, $\forall t \in T$, entonces ϕ_2 posee una versión cuyas trayectorias son todas idénticas a las de ϕ_1, a saber la propia función ϕ_1.

En el extremo opuesto, si existe un punto $t \in T$ de manera que

$$\mathbb{P}\{\phi_{1t} = \phi_{2t}\} = 0,$$

entonces tendremos la absoluta seguridad de que para cualesquiera versiones de ϕ_1 y ϕ_2, casi ninguna de sus trayectorias pueden llegar a coincidir.

El propósito de esta sección es estudiar la gran laguna que ha quedado entre las dos anteriores respuestas; a saber qué sucede con las trayectorias de las funciones aleatorias ϕ_1 y ϕ_2 o de adecuadas versiones suyas cuando se satisface la propiedad

$$\mathbb{P}\{\phi_{1t} = \phi_{2t}\} > 0, \ \forall t \in T.$$

Merece la pena observar que el requerimiento exigido es formidablemente débil. Tan sólo exigimos que para cada punto t de T el suceso

$$\Delta_t = \{\omega \in \Omega : \phi_1(t,\omega) = \phi_2(t,\omega)\}$$

pueda ocurrir; ésto es, que tenga probabilidad positiva. Llamamos la atención sobre el hecho de que tanto los sucesos Δ_t como sus correspondientes probabilidades pueden variar libre y díscolamente con

t, y que la cantidad de éstos es no numerable incluso en las más básicas situaciones. No es por tanto en absoluto esperable que las probabilidades $\mathbb{P}(\Delta_t)$ estén minoradas por una cantidad positiva y mucho menos esperable es que llegue a existir un subconjunto medible Δ con probabilidad positiva en el que las funciones ϕ_1 y ϕ_2 sean equivalentes. Realmente este pensamiento no se aleja de la realidad como muestra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.26. Consideremos como Ω el intervalo $[0,1]$ dotado con la medida de Lebesgue.
Sea $\{\xi_n\}$ la sucesión de variables aleatorias definidas por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{j}{2^k} \leq \omega < \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $n = 2^k + j$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq j < 2^k$.

Definimos la función aleatoria $\phi : (0,1) \times \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\phi(t,\omega) = (\frac{1}{n} - t)^2 (t - \frac{1}{n+1})^2 (1 - \xi_n(\omega))$$

siendo n el natural que satisface $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$.

Tal como está definida la función aleatoria ϕ es continua en media e incluso tiene todas sus trayectorias derivables en $(0,1)$, démonos cuenta que dentro de cada intervalo $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es claramente continua y en los puntos $\frac{1}{n}$ se anula.

Veamos que en todos los $t \in (0,1)$ las variables aleatorias ϕ_t se anulan con probabilidad positiva.

Para cada n natural, $\mathbb{P}[\phi_{\frac{1}{n}} = 0] = 1$ y si $t \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ entonces

$$\mathbb{P}[\phi_t = 0] = \mathbb{P}[1 - \xi_n = 0] = \mathbb{P}[\xi_n = 1] = \frac{1}{2^k},$$

siendo $n = 2^k + j$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq j < 2^k$.

No existe sin embargo ninguna cota inferior no nula para las probabilidades $\mathbb{P}[\phi_t = 0]$ y por tanto no es posible encontrar un suceso no nulo sobre el que se anule la función aleatoria. Ademas ninguna versión de ϕ posee trayectorias identicamente nulas con probabilidad positiva.

En el siguiente capítulo mostraremos que la anterior situación puede encontrarse incluso para funciones aleatorias altamente regulares en un intervalo de $\mathbb{R}$ con trayectorias que también lo son.

Asombrosamente para las funciones aleatorias holomorfas en media sobre un abierto conexo del plano complejo valuadas en un espacio de Banach cualquiera acontece un formidable fenómeno. En tal situación probaremos que

$$\delta = \inf\{\mathbb{P}\{\phi_{1_z} = \phi_{2_z}\} : z \in D\} > 0$$

y existe un $\Delta \in \Sigma$ cuya probabilidad es justamente δ tal que para cada $z \in D$

$$\phi_{1_z} = \phi_{2_z} \ \text{ casi seguramente sobre } \Delta.$$

Existen además versiones ψ_1 y ψ_2 de ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente, cuyas trayectorias son holomorfas y casi todas las trayectorias ψ_{1_ω} y ψ_{2_ω} correspondientes a $\omega \in \Delta$ son idénticas.

Una función aleatoria holomorfa en media sobre un dominio no puede en consecuencia anularse a su antojo en cualquier punto de éste, cosa que si puede suceder con otros tipos de regularidad. Para la función aleatoria del ejemplo 2.26 las variables $\phi_{\frac{1}{3}-\epsilon}$ y $\phi_{\frac{1}{3}+\epsilon}$ resultan anularse, para cualquier ϵ suficientemente pequeño, sobre sucesos casi complementarios.

Para demostrar el teorema anunciado requerimos algunos ingredientes que seguidamente mostramos.

LEMA 2.27. *Sea X un espacio de Banach y $\{\xi_n\}$ una sucesión de variables aleatorias X-valuadas que converge en probabilidad a una variable aleatoria ξ. Entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[\xi_n = 0] \leq \mathbb{P}[\xi = 0].$$

Demostración. Puesto que $\{\xi_n\}$ converge en probabilidad a ξ, Proposición 1.11, la sucesión $\left\{\mathbb{E}(\frac{\|\xi_n\|}{1+\|\xi_n\|})\right\}$ converge a $\mathbb{E}(\frac{\|\xi\|}{1+\|\xi\|})$. Dado que

$$\mathbb{E}\Big(\frac{\|\xi_n\|}{1+\|\xi_n\|}\Big) = \int_{\{\xi_n\neq 0\}} \frac{\|\xi_n\|}{1+\|\xi_n\|} d\mathbb{P} \leq \mathbb{P}[\xi_n \neq 0] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n = 0]$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, el límite de la sucesión $\left\{\mathbb{E}(\frac{\|\xi_n\|}{1+\|\xi_n\|})\right\}$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\frac{\|\xi_n\|}{1+\|\xi_n\|}\Big) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\frac{\|\xi_n\|}{1+\|\xi_n\|}\Big) \leq \liminf_{n\to\infty} (1 - \mathbb{P}[\xi_n = 0]).$$

Para cada número natural k repetimos la argumentación anterior con la sucesión $\{k\xi_n\}$ que converge en probabilidad a $k\xi$, para obtener

$$\mathbb{E}\Big(\frac{k\|\xi\|}{1+k\|\xi\|}\Big) \leq 1 - \limsup \mathbb{P}[k\xi_n = 0] = 1 - \limsup \mathbb{P}[\xi_n = 0].$$

Haciendo tender k a infinito obtenemos finalmente

$$\mathbb{P}[\xi \neq 0] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\Big(\frac{k\|\xi\|}{1+k\|\xi\|}\Big) \leq 1 - \limsup \mathbb{P}[\xi_n = 0]$$

y por tanto $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}[\xi_n = 0] \leq 1 - \mathbb{P}[\xi \neq 0] = \mathbb{P}[\xi = 0]$. ∎

Dadas dos variables aleatorias X-valuadas ξ y ζ, la cantidad $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = \zeta(\omega)\}$ es independiente de los representantes de $[\xi]$ y $[\zeta]$ elegidos para definirla y convenimos en escribirla como $\mathbb{P}[[\xi] = [\zeta]]$.

LEMA 2.28. *Sea D un abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada holomorfa en media sobre D. Si existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ de manera que*

$$\mathbb{P}[\phi_z = 0] \geq \delta \quad \forall z \in D,$$

entonces

$$\mathbb{P}[\phi_z = \phi_z' = 0] \geq \delta \quad \forall z \in D.$$

Demostración. Fijemos $z \in D$ y consideremos la función aleatoria φ definida sobre D por

$$\varphi_w = \begin{cases} (w-z)^{-1}(\phi_w - \phi_z) & \text{si} \quad w \neq z \\ \phi_z' & \text{si} \quad w = z, \end{cases}$$

que por el Teorema de las singularidades evitables de Riemann Teorema 2.6 es holomorfa en media sobre D. Entonces $\phi_w = \phi_z + (w - z)\varphi_w$ $\forall w \in D$ y, para $0 < |w - z|$ suficientemente pequeño, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta &\leq \mathbb{P}[\phi_w = 0] = \mathbb{P}[\phi_z + (w-z)\varphi_w = 0] \\ &\leq \mathbb{P}[\|\phi_z\| = \|\varphi_w\| = 0] + \mathbb{P}[\|\phi_z\| = |w-z| \, \|\varphi_w\|, \|\phi_z\| \neq 0]. \end{aligned}$$

Si hacemos tender w a z obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \leq & \limsup_{w \to z} \mathbb{P}[\|\phi_z\| = \|\varphi_w\| = 0] \\ & + \limsup_{w \to z} \mathbb{P}[\|\phi_z\| = |w-z| \, \|\varphi_w\|, \|\phi_z\| \neq 0]. \end{aligned}$$

Observemos ahora que $| \, \|\phi_z\| - \|\varphi_w\| \, | + \|\varphi_w\|$ converge en media y en particular en probabilidad a $| \, \|\phi_z\| - \|\phi_z'\| \, | + \|\phi_z'\|$ cuando w tiende a z. El lema anterior muestra entonces que

$$\limsup_{w \to z} \mathbb{P}\Big[\Big| \|\phi_z\| - \|\varphi_w\| \Big| + \|\varphi_w\| = 0\Big] \leq$$

$$\mathbb{P}\left[\Big|\|\phi_z\| - \|\phi_z'\|\Big| + \|\phi_z'\| = 0\right]$$

Téngase ahora presente que

$$\Big|\|\phi_z\| - \|\varphi_w\|\Big| + \|\varphi_w\| = 0 \iff \|\phi_z\| = \|\varphi_w\| = 0$$

y

$$\Big|\|\phi_z\| - \|\phi_z'\|\Big| + \|\phi_z'\| = 0 \iff \|\phi_z\| = \|\phi_z'\| = 0$$

para concluir que:

$$\limsup_{w\to z} \mathbb{P}[\|\phi_z\| = \|\varphi_w\| = 0] \leq \mathbb{P}[\|\phi_z\| = \|\phi_z'\| = 0].$$

Idéntica argumentación permite también obtener

$$\limsup_{w\to z} \mathbb{P}[\|\phi_z\| = |w - z|\ \|\varphi_w\|, \|\phi_z\| \neq 0] = 0.$$

Por lo tanto

$$\delta \leq \mathbb{P}[\|\phi_z\| = \|\phi_z'\| = 0].$$

∎

TEOREMA 2.29. *Sea D un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada holomorfa en media sobre D. Si existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ de manera que*

$$\mathbb{P}[\phi_z = 0] \geq \delta \quad \forall z \in D,$$

existe entonces un subconjunto medible Δ con $\mathbb{P}[\Delta] \geq \delta$ tal que, para cada $z \in D$

$$\phi_z = 0$$

casi seguramente sobre Δ.

Demostración. En primer lugar probaremos por inducción que

$$\mathbb{P}[\phi_z = \phi'_z = \cdots = \phi_z^{(n)} = 0] \geq \delta$$

$\forall z \in D$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. Por el Lema anterior $\mathbb{P}[\phi_z = \phi'_z = 0] \geq \delta\ \forall z \in D$. Supongamos por hipótesis de inducción que para n se verifica $\mathbb{P}[\phi_z = \phi'_z = \cdots = \phi_z^{(n)} = 0] \geq \delta\ \forall z \in D$ y probémoslo para $n+1$. Definimos ahora una función aleatoria X^{n+1} valuada φ en D por $\varphi_z = (\phi_z, \ldots, \phi_z^{(n)})$ que es holomorfa en media sobre D y satisface la propiedad $\mathbb{P}[\varphi_z = 0] \geq \delta\ \forall z \in D$. Teniendo en cuenta el lema anterior, sabemos que

$$\begin{aligned} \delta &\leq \mathbb{P}[\varphi_z = \varphi'_z = 0] \\ &= \mathbb{P}[\phi_z = \phi'_z = \cdots = \phi_z^{(n)} = \phi_z^{(n+1)} = 0] \end{aligned}$$

para todo $z \in D$.

Ya hemos probado que $\delta \leq \mathbb{P}[\phi_z = \cdots = \phi_z^{(n)} = 0]$ para todo $z \in D$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Fijemos $z_0 \in D$ y sea

$$\Delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \phi_{z_0}^{(n)}(\omega) = 0\}.$$

Acabamos de probar que $\mathbb{P}(\Delta) \geq \delta$ y la función aleatoria $\phi\chi_\Delta$ satisface

$$(\phi\chi_\Delta)_{z_0}^{(n)} = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Deducimos de ello, en virtud del teorema 2.3, que la función $z \mapsto [\phi_z\chi_\Delta]$ es idénticamente nula sobre algún disco centrado en z_0 y el principio de identidad, Teorema 2.7, asegura entonces que $[\phi_z\chi_\Delta] = 0, \forall z \in D$ lo cual demuestra que para cada $z \in D$ $\phi_z = 0$ casi seguramente sobre Δ. ∎

Seguidamente presentaremos el resultado que hará posible convertir la información $\mathbb{P}(\phi_z = 0) > 0 \ \ \forall z \in D$, a la mucho más perfecta $\mathbb{P}(\phi_z = 0) \geq \delta > 0 \ \ \forall z \in D$, para conveniente positivo δ.

TEOREMA DE BAIRE 2.30 ([30, Theorem 2.2.(b)]). *Sea E un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff y $\{C_n\}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de E tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Entonces alguno de los subconjuntos C_n tiene interior no vacío.*

LEMA 2.31. *Sea D un subconjunto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada continua en media sobre D. Entonces, para cada $\delta > 0$, el conjunto*

$$C_\delta = \{z \in D : \ \mathbb{P}(\phi_z = 0) \geq \delta\}$$

es cerrado en D.

Demostración. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de C_δ convergiendo a un elemento z de D. Entonces, la sucesión $\{\phi_{z_n}\}$ converge en media y en particular en probabilidad a ϕ_z y aplicando Lema 2.27 se obtiene

$$\delta \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[\phi_{z_n} = 0] \leq \mathbb{P}[\phi_z = 0],$$

lo que prueba que $z \in C_\delta$ y deducimos de ello que C_δ es cerrado. ∎

TEOREMA 2.32. *Sea D un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y ϕ una función aleatoria X-valuada holomorfa en media sobre D. Supongamos que, para cada $z \in D$*

$$\mathbb{P}[\phi_z = 0] > 0.$$

Existe entonces un subconjunto medible Δ con $\mathbb{P}(\Delta) > 0$ tal que, para cada $z \in D$

$$\phi_z = 0$$

casi seguramente sobre Δ. Además el conjunto

$$\{\mathbb{P}(\Delta) : \forall z \in D\ \phi_z = 0 \textit{ casi seguramente en } \Delta\}$$

tiene máximo, que coincide además con el ínfimo del conjunto

$$\{\mathbb{P}(\phi_z = 0) : z \in D\}.$$

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea C_k el subconjunto de D dado por $C_k = \{z \in D : \mathbb{P}(\phi_z = 0) \geq \frac{1}{k}\}$ que por el Lema 2.31 sabemos que es cerrado. Puesto que D es un espacio localmente compacto y Hausdorff y $D = \cup_{k=1}^{\infty} C_k$, el Teorema de Baire 2.30, asegura la existencia de un $k \in \mathbb{N}$, para el que C_k tiene interior no vacío y por consiguiente contiene un disco abierto, D_0.

Nótese que $\frac{1}{k} \leq \mathbb{P}(\phi_z = 0)\ \forall z \in D_0$. Del Teorema 2.29 deducimos la existencia de un conjunto medible Δ con $\mathbb{P}[\Delta] \geq \frac{1}{k}$, de manera que, para cada $z \in D_0$, $\phi_z = 0$ casi seguramente en Δ. El principio de identidad, teorema 2.7, garantiza ahora que, para cada $z \in D$, es $\phi_z = 0$ casi seguramente en Δ.

Denotemos $\eta_1 = \inf\{\mathbb{P}(\phi_z = 0) : z \in D\}$, $\eta_2 = \sup\{\mathbb{P}(\Delta) : \forall z \in D\ \phi_z = 0$ casi seguramente en $\Delta\}$. Sea $\{\Delta_n\}$ una sucesión de subconjuntos medibles de Ω verificando $\forall z \in D\ \phi_z = 0$ casi seguramente en Δ_n, $\lim \mathbb{P}[\Delta_n] = \eta_2$ y $\Delta = \cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Entonces $\forall z \in D\ \phi_z = 0$ casi seguramente en Δ, así que $\mathbb{P}[\Delta_n] \leq \mathbb{P}[\Delta] \leq \eta_2$ y por tanto $\mathbb{P}[\Delta] = \eta_2$. Así el conjunto $\{\mathbb{P}(\Delta) : \forall z \in D\ \phi_z = 0$ casi seguramente en $\Delta\}$, tiene máximo y éste vale η_2. Claramente $\eta_1 \geq \eta_2$ y, por Teorema 2.29, realmente se satisface que $\eta_1 = \eta_2$. ∎

El teorema anterior nos permite probar finalmente nuestra aseveración inicial.

TEOREMA 2.33. *Sea D un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y sean ϕ_1 y ϕ_2 funciones aleatorias X-valuadas holomorfas en media sobre D. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathbb{P}(\phi_{1_z} = \phi_{2_z}) > 0 \ \ \forall z \in D$.

2. *Existe $\Delta \in \Sigma$ con $\mathbb{P}(\Delta) > 0$ tal que, para cada $z \in D$,*
$$\phi_{1_z} = \phi_{2_z}$$
casi seguramente sobre Δ.

3. *Existen versiones ψ_1 y ψ_2 de ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente, cuyas trayectorias son holomorfas sobre D y satisfacen*
$$\psi_{1_\omega} = \psi_{2_\omega}$$
con probabilidad no nula.

Además,

$$\begin{aligned}\inf\{\mathbb{P}(\phi_{1_z} = \phi_{2_z}) : z \in D\} &= \max\{\mathbb{P}(\Delta) : \forall z \in D,\ \phi_{1_z} = \phi_{2_z} \textit{ c.s. en } \Delta\} \\ &= \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \psi_{1_\omega} = \psi_{2_\omega}).\end{aligned}$$

Demostración. La equivalencia de 1 y 2 se tiene sin más que aplicar el anterior teorema a la función aleatoria $\phi_1 - \phi_2$. Además se deduce que

$$\inf\{\mathbb{P}(\phi_{1_z} = \phi_{2_z}) : z \in D\} = \max\{\mathbb{P}(\Delta) : \forall z \in D,\ \phi_{1_z} = \phi_{2_z} \text{ c.s. en } \Delta\}$$

Es además obvio que 3 implica 2

Supongamos ahora que se verifica 2. Existe entonces un conjunto $\Delta \in \Sigma$ con probabilidad no nula tal que, para cada $z \in D$, $\phi_{1_z} = \phi_{2_z}$ casi seguramente sobre Δ. Sean ψ_1 y ψ_2 las versiones de ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente, con trayectorias holomorfas en D, y cuya existencia nos asegura el Teorema 2.14. Para las funciones aleatorias ψ_1 y ψ_2 se satisface, para cada $z \in D$, $\psi_{1_z} = \psi_{2_z}$ casi seguramente sobre Δ.

Sea S un subconjunto numerable denso en D. Para cada $s \in S$ existe un conjunto $\Delta_s \in \Sigma$ con probabilidad nula tal que

$$\psi_{1_s}(\omega) = \psi_{2_s}(\omega) \ \forall \omega \in \Delta \setminus \Delta_s.$$

Si notamos por Δ_0 el conjunto de probabilidad nula dado por $\Delta_0 = \bigcup_{s \in S} \Delta_s$ y sin más que tener en consideración la continuidad de las trayectorias de ψ_1 y ψ_2, se sigue que

$$\psi_1(z,\omega) = \psi_2(z,\omega)$$

para cualquier $z \in D$ y cualquier $\omega \in \Delta \setminus \Delta_0$. Se satisface además que

$$\mathbb{P}(\Delta) \leq \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \psi_{1_\omega} = \psi_{2_\omega}\}.$$

La otra desigualdad es inmediata. ∎

Capítulo III

Derivabilidad en media

III.1 Integrabilidad en media

Con el propósito de estudiar la repercusión sobre las trayectorias de una función aleatoria de la derivabilidad en media, requerimos en primera instancia analizar lo que acontece con la integrabilidad en media.

Teorema 3.1. *Sean (T_1, Γ_1, τ_1) y (T_2, Γ_2, τ_2) dos espacios de medida σ-finita, X un espacio de Banach y $\phi : T_1 \times T_2 \to X$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para cada t de T_1, $\phi_t \in \mathcal{L}_1(\tau_2, X)$ y la función $t \mapsto [\phi_t]$ de T_1 en $L_1(\tau_2, X)$ es integrable.*
2. *Existe una función $\psi \in \mathcal{L}_1(\tau_1 \times \tau_2, X)$ tal que para cada $t \in T_1$, $\phi_t = \psi_t$ casi por doquier en T_2.*

Además, si se verifican las condiciones anteriores, entonces la función medible $\int_\Delta \psi_t d\tau_1$ pertenece a la clase de equivalencia $\int_\Delta [\phi_t] d\tau_1$ para cada $\Delta \in \Gamma_1$.

Demostración. Supongamos que 1 se verifica. Existe entonces una sucesión $\{\Phi_n\}$ de funciones simples de T_1 sobre $L_1(\tau_2, X)$ que converge casi por doquier en T_1 a la función $t \mapsto [\phi_t]$ y satisface adicionalmente la condición

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_{T_1} \|\Phi_m - \Phi_n\|_1 d\tau_1 = 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, Φ_n puede expresarse como

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{N_n} [\xi_i] \chi_{\Delta_i}$$

para convenientes funciones $\xi_i \in \mathcal{L}_1(\tau_2, X)$ y conjuntos medibles $\Delta_i \subset T_1$ de medida finita para $i = 1, \ldots, N_n$. Podemos definir ahora una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones de $\mathcal{L}_1(\tau_1 \times \tau_2, X)$ mediante

$$\phi_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i \chi_{\Delta_i}.$$

Obsérvese que estas funciones satisfacen la propiedad:

$$\int_{T_1 \times T_2} \|\phi_m - \phi_n\| d(\tau_1 \times \tau_2) = \int_{T_1} \|\Phi_m - \Phi_n\|_1 d\tau_1,$$

y por ello $\{\phi_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_1(\tau_1 \times \tau_2, X)$. Por Teorema 1.16 la anterior sucesión converge en media a una función $\varphi \in \mathcal{L}_1(\tau_1 \times \tau_2, X)$. Significa esto que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_1} \left(\int_{T_2} \|\phi_n(t,s) - \varphi(t,s)\| d\tau_2 \right) d\tau_1 = 0$$

y en consecuencia la sucesión $\{\int_{T_2} \|\phi_n(\cdot, s) - \varphi(\cdot, s)\| d\tau_2\}$ de funciones de $L_1(\tau_1, \mathbb{R})$ converge en media a cero. Por tanto existe una sucesión parcial $\{\phi_{\sigma(n)}\}$ de $\{\phi_n\}$ de forma que $\int_{T_2} \|\phi_{\sigma(n)}(t,s) - \varphi(t,s)\| d\tau_2$

converge casi por doquier en T_1 a cero, esto es, existe $S_0 \subset T_1$ con $\tau_1(S_0) = 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_2} \|\phi_{\sigma(n)}(t,s) - \varphi(t,s)\| d\tau_2 = 0$$

para todo $t \in T_1 \setminus S_0$. Por otro lado, dado que Φ_n converge casi por doquier en T_1 a la función $t \mapsto [\phi_t]$ existe un subconjunto S_1 de T_1 conteniendo a S_0 con $\tau_1(S_1) = 0$ y de manera que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_2} \|\phi_n(t,s) - \phi(t,s)\| d\tau_2 = 0$$

para todo $t \in T_1 \setminus S_1$. Es obvio que para cada $t \in T_1 \setminus S_1$,

$$\phi_t = \varphi_t$$

casi por doquier en T_2.

La función $\psi : T_1 \times T_2 \to X$ definida como

$$\psi(t,s) = \begin{cases} \varphi(t,s) & \text{si} \quad t \in T_1 \setminus S_1, \ s \in T_2 \\ \phi(t,s) & \text{si} \quad t \in S_1, \ s \in T_2 \end{cases}$$

es claramente idéntica a φ en $(T_1 \setminus S_1) \times T_2$. Como quiera que $S_1 \times T_2$ posee medida nula y $\varphi \in \mathcal{L}_1(\tau_1 \times \tau_2, X)$ podemos concluir que $\psi \in \mathcal{L}_1(\tau_1 \times \tau_2, X)$. Obsérvese que $\forall t \in T_1$, $\psi_t = \phi_t$ casi por doquier en T_2. Queda de esta manera probada la segunda aseveración del teorema.

Además, por definición $\int_\Delta [\phi_t] d\tau_1$ es el límite en media de la sucesión $\int_\Delta \Phi_n d\tau_1$. Nótese que

$$\int_\Delta \phi_n d\tau_1 = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i \tau_1(\Delta_i \cap \Delta) \in \int_\Delta \Phi_n d\tau_1.$$

Además se verifica

$$\int_{T_2} \left(\left\| \int_\Delta \phi_n(t,s) d\tau_1 - \int_\Delta \psi(t,s) d\tau_1 \right\| \right) d\tau_2$$

$$= \int_{T_2} \left(\left\| \int_\Delta \phi_n(t,s) d\tau_1 - \int_\Delta \varphi(t,s) d\tau_1 \right\| \right) d\tau_2$$
$$\leq \int_{T_2} \left(\int_\Delta \|\phi_n(t,s) - \varphi(t,s)\| d\tau_1 \right) d\tau_2$$
$$\leq \int_{T_1 \times T_2} \|\phi_n - \varphi\| d(\tau_1 \times \tau_2)$$

que converge a cero y por lo tanto la función medible $\int_\Delta \psi_t d\tau_1$ pertenece a la clase de equivalencia $\int_\Delta [\phi_t] d\tau_1$.

Supongamos ahora que se verifica 2. Para probar la primera afirmación en primer lugar vamos a comprobar que dada una función simple ϑ sobre $T_1 \times T_2$, la función $t \mapsto [\vartheta_t]$ de T_1 en $L_1(\tau_2, X)$ es medible. Para lo cual sólo necesitamos probar el caso $\vartheta = \chi_\Theta$, siendo $\Theta \subset T_1 \times T_2$ un conjunto medible de medida finita. Expresamos $\Theta = \cup_{n=1}^\infty \Delta_n \times \Gamma_n$ para una conveniente sucesión $\{\Delta_n \times \Gamma_n\}$ de rectángulos medibles disjuntos dos a dos. Entonces $\{\sum_{k=1}^n [\chi_{\Gamma_k}] \chi_{\Delta_k}\}$ es una sucesión de funciones simples $L_1(\tau_2, \mathbb{R})$-valuadas que converge en todo punto de T_1 a la función $[\vartheta_t]$, con lo cual queda probado que la función $t \mapsto [\vartheta_t]$ de T_1 en $L_1(\tau_2, \mathbb{R})$ es medible.

Sea $\{\psi_n\}$ una sucesión de funciones simples sobre $T_1 \times T_2$ verificando que

$$\lim \int_{T_1 \times T_2} \|\psi_n - \psi\| d(\tau_1 \times \tau_2) = 0.$$

Es claro que $\lim \int_{T_2} \|\psi_n(t,\cdot) - \psi(t,\cdot)\| d\tau_2 = 0$ casi seguramente sobre T_1 y, por consiguiente, la sucesión $\{\Psi_n\}$ de funciones medibles $L_1(\tau_2, X)$-valuadas definidas sobre T_1 como $\Psi_n(t) = [\psi_n(t,\cdot)]$ converge casi seguramente sobre T_1 a $[\phi_t]$. Esto prueba que $[\phi_t]$ es una función medible Bochner $L_1(\tau_2, X)$-valuada. Además, el Teorema de Fubini asegura que la función $t \mapsto \int_{T_2} \|\phi(t,s)\| d\tau_2$ es integrable, de lo que se sigue que $[\phi_t]$ es Bochner integrable. ∎

Si consideramos ahora una función aleatoria X-valuada definida sobre un espacio de medida σ-finita (T, Γ, τ), es razonable considerar la primera condición del teorema anterior, ésto es la función

$$t \longmapsto [\phi_t]$$

de T en $L_1(\mathbb{P}, X)$ es integrable, como una condición de integrabilidad en media.

COROLARIO 3.2. *Sea (T, Γ, τ) un espacio de medida σ-finita, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada integrable en media sobre T. Existe entonces una versión ψ de ϕ cuyas trayectorias son integrables sobre T.*

III.2 TRANSFERENCIA DE LA DERIVABILIDAD EN MEDIA A LAS TRAYECTORIAS

En lo que resta de capítulo supondremos que I es un intervalo real de longitud positiva que consideraremos provisto de la medida de Lebesgue λ.

Sea X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre I. Diremos que ϕ es derivable en media en un punto t_0 de I si la función

$$\frac{\phi_t - \phi_{t_0}}{t - t_0}$$

tiene límite en media cuando t tiende a t_0; ésto es, existe una variable aleatoria de primer orden sobre X que será unica salvo equivalencias y que notaremos ϕ'_{t_0} de manera que

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E} \left\| \frac{\phi_t - \phi_{t_0}}{t - t_0} - \phi'_{t_0} \right\| = 0.$$

Diremos que la función aleatoria ϕ es derivable en media en I cuando sea derivable en media en todos los puntos del intervalo I.

Es obvio que la derivabilidad en media de una función aleatoria ϕ equivale a la derivabilidad, en el sentido tradicional, de la función

$$t \longmapsto [\phi_t]$$

definida sobre I y con valores en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{P}, X)$.

Si ϕ'_{t_0} está definida y ϕ tiene una versión ψ con trayectorias derivables en t_0, entonces $\phi'_{t_0} = \frac{\partial\psi(t_0,\omega)}{\partial t}$ con probabilidad uno.

Contrariamente a lo que sucedía con la derivabilidad compleja, la derivabilidad real en media puede no ser transferida a las trayectorias de ninguna versión. Asimismo la derivabilidad de las trayectorias, incluso cuando adicionalmente existe continuidad en media, no garantiza la derivabilidad en media. Mostramos a continuación la veracidad de estas aseveraciones con ejemplos.

EJEMPLO 3.3. Consideremos como Ω el intervalo $[0,1]$ dotado con la medida de Lebesgue. Sea $\{\xi_n\}$ la sucesión de variables aleatorias dada por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{j}{2^k} \leq \omega \leq \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $n = 2^k + j$, donde $k \geq 0$ y $0 \leq j < 2^k$.

Definimos la función aleatoria $\phi : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\phi(t,\omega) = \begin{cases} n^{\frac{15}{2}}(\frac{1}{n} - t)^2(t - \frac{1}{n+1})^2\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Puesto que para cada natural n la función $(\frac{1}{n} - t)^2(t - \frac{1}{n+1})^2$ es derivable en el intervalo $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ y su derivada se anula en $t = \frac{1}{n}$ y $t = \frac{1}{n+1}$, la derivabilidad de ϕ en media en el intervalo $(0, 1]$ es clara. Para comprobar la derivabilidad en media de ϕ en el cero, consideremos una sucesión $\{t_n\}$ en $(0, 1]$ convergente a cero. Para cada natural n, notamos por k_n un número natural que satisface $\frac{1}{k_n+1} \leq t_n \leq \frac{1}{k_n}$. Por tanto

$$\mathbb{E}\left|\frac{\phi_{t_n}}{t_n}\right| = \frac{k_n^{\frac{15}{2}}(\frac{1}{k_n} - t_n)^2(t_n - \frac{1}{k_n+1})^2}{t_n}\|\xi_{k_n}\|_1,$$

y dado que

$$(\frac{1}{k_n} - t_n)(t_n - \frac{1}{k_n+1}) \leq \frac{1}{4{k_n}^2(k_n+1)^2}$$

y

$$\|\xi_{k_n}\|_1 \leq \frac{2}{k_n}$$

obtenemos

$$\mathbb{E}\left|\frac{\phi_{t_n}}{t_n}\right| \leq \frac{k_n^{\frac{15}{2}}}{16{k_n}^4(k_n+1)^4}\frac{2(k_n+1)}{k_n} \leq \frac{k_n^{\frac{5}{2}}}{8(k_n+1)^3}.$$

que converge a cero puesto que la sucesión $\{k_n\}$ diverge positivamente. De lo anterior puede concluirse que ϕ es derivable en media en 0.

Ahora vamos a probar que cualquier versión de ϕ no posee casi ninguna trayectoria derivable.

Consideramos la sucesión $\{t_n\}$ en $[0, 1]$ definida por $t_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ que converge a cero. Si evaluamos ϕ en la sucesión tenemos que

$$\phi_{t_n} = \frac{n^{\frac{7}{2}}}{16(n+1)^4}\xi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto

$$\frac{\phi_{t_n}(\omega)}{t_n} = \frac{n^{\frac{9}{2}}}{8(2n+1)(n+1)^3}\xi_n(\omega).$$

Para cada $\omega \in \Omega$, es claro que la sucesión $\{\frac{\phi_{t_n}(\omega)}{t_n}\}$ no es convergente. Si ψ es una versión de ϕ, para cada t_n existe un conjunto de probabilidad nula, Δ_n, tal que

$$\psi_{t_n}(\omega) = \phi_{t_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \setminus \Delta_n.$$

Si notamos por Δ al conjunto de probabilidad nula dado por $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, se satisface

$$\psi(t_n,\omega) = \phi(t_n,\omega) = \frac{n^{\frac{9}{2}}}{8(2n+1)(n+1)^3}\xi_n(\omega), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \in \Omega \setminus \Delta.$$

y por tanto si $\omega \in \Omega \setminus \Delta$ la sucesión $\{\frac{\psi_\omega(t_n)}{t_n}\}$ no converge. De ello se sigue que el conjunto de trayectorias derivables en el punto 0 es de medida nula.

En el siguiente ejemplo mostramos una función aleatoria con todas sus trayectorias derivables sobre un intervalo real y que no es derivable en media sobre dicho intervalo.

EJEMPLO 3.4. Consideremos como Ω el intervalo $(0,1)$ dotado con la medida de Lebesgue. Sea $\{\xi_n\}$ la sucesión de variables aleatorias dadas por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} n^2 & \text{si} \quad 0 \le \omega \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos el función aleatoria $\phi : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\phi(t,\omega) = \begin{cases} n^4(n+1)^4(\frac{1}{n} - t)^2(t - \frac{1}{n+1})^2\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \le t \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Para probar que las trayectorias son derivables, probaremos en primer lugar que lo son en $(0,1]$.

Sea $t_0 \in (0,1]$ y n_0 el natural satisfaciendo $\frac{1}{n_0+1} \leq t_0 \leq \frac{1}{n_0}$, para cada $t \in [\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}]$ se verifica

$$\phi(t,\omega) = \begin{cases} n_0^4(n_0+1)^4(\frac{1}{n_0} - t)^2(t - \frac{1}{n_0+1})^2 n_0^2 & \text{si} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n_0} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con lo que es inmediato comprobar la derivabilidad de las trayectorias en t_0.

Para probar la derivabilidad de las trayectorias en cero, consideremos $\omega \in \Omega$ fijo y n_0 un natural satisfaciendo $\frac{1}{n_0} < \omega$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión en $(0,1]$ que converge a cero, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $t_n \leq \frac{1}{n_0}$. Sin más que comprobar que para $n \geq m, \phi(t_n,\omega) = 0$ queda probada la derivabilidad de la función ϕ_ω en cero.

Por último comprobamos que ϕ no es derivable en media sobre $[0,1]$, para lo cual basta probar que no lo es en cero.

Consideramos la sucesión $\{t_n\}$ de elementos del intervalo $(0,1]$ definida por $t_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ que converge a cero. Para cada n,

$$\mathbb{E}\left|\frac{\phi_{t_n}}{t_n}\right| = \int_0^1 \left|\frac{\phi(t_n,\omega)}{t_n}\right| d\mathbb{P} = \frac{1}{16}\frac{2n(n+1)}{2n+1}\|\xi_n\|_1 = \frac{1}{8}\frac{n^2(n+1)}{2n+1}.$$

Consecuentemente, ϕ no es derivable en media en cero.

A la vista de los anteriores ejemplos, poco parece que pueda ser dicho respecto a la transferencia de la derivabilidad real en media a las trayectorias y viceversa. Este pesimista pensamiento queda totalmente alejado de la realidad. A diferencia con lo que acontecía con la derivabilidad compleja, la relación existente entre la derivabilidad real en media de una función aleatoria y la derivabilidad de las trayectorias de alguna de sus versiones es un poco más imperfecta puesto que se pierde un grado de regularidad en la transferencia. Para formalizar ésto introducimos a continuación las derivadas de orden superior al primero de una función aleatoria.

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ la función aleatoria $\phi^{(n)}$ está definida sobre un entorno de t_0 y $\phi^{(n)}$ es derivable en media en t_0, entonces su derivada es llamada la *derivada* $(n+1)$*-ésima en media* de ϕ en t_0, la notamos como $\phi_{t_0}^{(n+1)}$, y decimos que ϕ es $n+1$ *veces derivable en media* en t_0. Si la función aleatoria ϕ es n veces derivable en media sobre el intervalo I y su derivada n-ésima $\phi^{(n)}$ es continua en media, entonces ϕ se dice que es clase C^n en media sobre I. Decimos que la función aleatoria ϕ es de clase C^∞ en media sobre I si es de clase C^n en media sobre I para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el siguiente teorema probamos que una función aleatoria que es de clase C^n en media sobre I tiene una versión cuyas trayectorias son de clase C^{n-1} en I.

TEOREMA 3.5. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre I. Si ϕ es de clase C^n en media sobre el intervalo I, entonces ϕ tiene una versión ψ cuyas trayectorias son de clase C^{n-1} en I y $\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j}$ es $\lambda \times \mathbb{P}$-integrable en $[a,b] \times \Omega$ para cualesquiera $a, b \in I$ con $a < b$ y $j = 0, \ldots, n-1$.*

Demostración. Fijamos dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$. $[\phi_t]$ puede expresarse como

$$\begin{aligned}
[\phi_t] &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}[\phi_a^{(k)}](t-a)^k + \int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} [\phi_{t_n}^{(n)}] dt_n \cdots dt_1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}[\phi_a^{(k)}](t-a)^k + \int_\Delta [\phi_{t_n}^{(n)}] d(t_1, \cdots, t_n)
\end{aligned}$$

donde

$$\Delta = \{(t_1, \ldots, t_n) \in [a,b]^n : a \leq t_k \leq t_{k-1}, k = 1, \ldots, n\}.$$

Dado que $\phi_{t_n}^{(n)}$ es continuo en media, también lo es la función

$$(t_1, \ldots, t_n) \longmapsto [\phi_{t_n}^{(n)}]$$

sobre $[a,b]^n$, que será por tanto integrable en media sobre $[a,b]^n$. Por el Teorema 3.1 obtenemos una versión suya $\psi(t_1, \ldots, t_n, \omega)$ integrable en $[a,b]^n \times \Omega$. Es obvio que $\eta(t,\omega) = \psi(a, \ldots, a, t, \omega)$ es una versión de $\phi_{t_n}^{(n)}$ integrable en $[a,b] \times \Omega$ y el Teorema 3.1 también prueba que

$$\int_\Delta \eta(t_n, \omega) d(t_1, \cdots, t_n) \in \int_\Delta [\phi_{t_n}^{(n)}] d(t_1, \cdots, t_n).$$

Con lo cual la función aleatoria

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \phi_a^{(k)} (t-a)^k + \int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} \eta(t_n, \omega) dt_n \cdots dt_1$$

es una versión de ϕ sobre $[a,b]$ y todas sus trayectorias son de clase C^{n-1} en $[a,b]$.

Sea ahora $\{[a_k, b_k]\}$ una sucesión de intervalos satisfaciendo

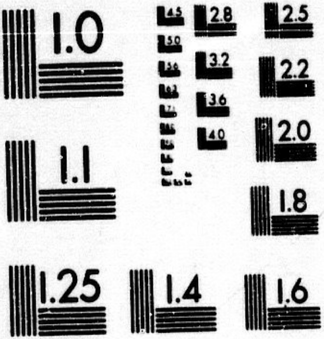
$$[a_k, b_k] \subset [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset I$$

y

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = I.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una versión ψ_k de ϕ sobre $[a_k, b_k]$ cuyas trayectorias son de clase C^{n-1} en $[a_k, b_k]$. Sea S un subconjunto de I numerable denso. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\mathbb{P}\{\omega : \psi_k(t,\omega) = \psi_{k+1}(t,\omega)\ \forall t \in [a_k, b_k]\} =$$



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

donde

$$\Delta = \{(t_1, \ldots, t_n) \in [a, b]^n : a \leq t_k \leq t_{k-1}, k = 1, \ldots, n\}.$$

Dado que $\phi_{t_n}^{(n)}$ es continuo en media, también lo es la función

$$(t_1, \ldots, t_n) \longmapsto [\phi_{t_n}^{(n)}]$$

sobre $[a, b]^n$, que será por tanto integrable en media sobre $[a, b]^n$. Por el Teorema 3.1 obtenemos una versión suya $\psi(t_1, \ldots, t_n, \omega)$ integrable en $[a, b]^n \times \Omega$. Es obvio que $\eta(t, \omega) = \psi(a, \ldots, a, t, \omega)$ es una versión de $\phi_{t_n}^{(n)}$ integrable en $[a, b] \times \Omega$ y el Teorema 3.1 también prueba que

$$\int_\Delta \eta(t_n, \omega) d(t_1, \cdots, t_n) \in \int_\Delta [\phi_{t_n}^{(n)}] d(t_1, \cdots, t_n).$$

Con lo cual la función aleatoria

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \phi_a^{(k)} (t - a)^k + \int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} \eta(t_n, \omega) dt_n \cdots dt_1$$

es una versión de ϕ sobre $[a, b]$ y todas sus trayectorias son de clase C^{n-1} en $[a, b]$.

Sea ahora $\{[a_k, b_k]\}$ una sucesión de intervalos satisfaciendo

$$[a_k, b_k] \subset [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset I$$

y

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = I.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una versión ψ_k de ϕ sobre $[a_k, b_k]$ cuyas trayectorias son de clase C^{n-1} en $[a_k, b_k]$. Sea S un subconjunto de I numerable denso. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\mathbb{P}\{\omega : \psi_k(t, \omega) = \psi_{k+1}(t, \omega) \; \forall t \in [a_k, b_k]\} =$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \psi_k(s,\omega) = \psi_{k+1}(s,\omega)\ \forall s \in S \cap [a_k, b_k]\} = 1.$$

Por tanto, existe un subconjunto Ω_1 de Ω con $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ tal que

$$\psi_j(t,\omega) = \psi_k(t,\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_1$$

para cada $t \in [a_j, b_j]$ siendo $j \leq k$.

La función aleatoria ψ dada por

$$\psi(t,\omega) = \begin{cases} \psi_k(t,\omega) & \text{si} \quad \omega \in \Omega_1 \text{ y } t \in [a_k, b_k] \\ 0 & \text{si} \quad \omega \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

está bien definida y es una versión de ϕ cuyas trayectorias son de clase C^{n-1} en I. En lo que respecta a la condición de integrabilidad enunciada, supongamos que $a, b \in I$ con $a < b$. Existe entonces $k \in \mathbb{N}$ de manera que

$$a_k \leq a < b \leq b_k$$

y

$$\begin{aligned} \psi_k^{(j)}(t,\omega) &= \sum_{l=j}^{n-1} \frac{1}{(l-j)!}\phi^{(l)}(a_k,\omega)(t-a_k)^{l-j} \\ &+ \int_{a_k}^{t}\int_{a_k}^{t_{j+1}} \cdots \int_{a_k}^{t_{n-1}} \eta(t_n,\omega)dt_n \cdots dt_{j+1}. \end{aligned}$$

para $j = 0, \ldots, n-1$ y $t \in [a_k, b_k]$. Por tanto

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbb{E}\left\| \frac{\partial^j \psi(t,\cdot)}{\partial t^j} \right\| dt &= \int_a^b \mathbb{E}\left\| \frac{\partial^j \psi_k(t,\cdot)}{\partial t^j} \right\| dt \\ &\leq \sum_{l=j}^{n-1} \frac{1}{(l-j)!}\mathbb{E}\left\|\phi_{a_k}^{(l)}\right\| (b_k - a_k)^{l-j+1} \\ &+ (b_k - a_k)^{n-j} \int_{[a_k,b_k]\times\Omega} \|\eta(t,\omega)\|\, d(\lambda \times \mathbb{P}) < \infty, \end{aligned}$$

para $j = 0, \ldots, n-1$. La propiedad de integrabilidad es por tanto satisfecha. ∎

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por $C^n([a,b],X)$ notamos al espacio vectorial de las funciones $f:[a,b] \to X$ con derivada n-ésima continua en el intervalo $[a,b]$. Los espacios $C^n([a,b],X)$ se considerarán siempre provistos con la norma

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty \quad f \in C^n([a,b],X),$$

donde

$$\|f\|_\infty = \max\{\|f(t)\| : t \in [a,b]\},$$

que los convierte en espacios de Banach.

Definimos ahora el operador

$$V_0 : L_1(\lambda, X) \to C([a,b],X)$$

dado por

$$(V_0 f)(t) = \int_a^t f(s)ds \quad \forall t \in [a,b].$$

V_0 es un operador lineal que satisface

$$\begin{aligned} \|(V_0 f)(t)\| &= \left\| \int_a^t f(s)ds \right\| \le \int_a^t \|f(s)\|ds \\ &\le \int_a^b \|f(s)\|ds = \|f\|_1 \quad \forall t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Consecuentemente $\|V_0 f\|_\infty \le \|f\|_1$ y ello prueba que V_0 es continuo.

Consideremos además para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador

$$V_n : C^{n-1}([a,b],X) \to C^n([a,b],X)$$

definido también como

$$(V_n f)(t) = \int_a^t f(s)ds \quad \forall t \in [a,b].$$

Está obviamente bien definido, es lineal y se satisface

$$(V_n f)'(t) = f(t) \quad \forall t \in [a, b],$$

de donde obtenemos

$$\|V_n f\| = \sum_{k=0}^{n} \|(V_n f)^{(k)}\|_\infty \leq (b - a + 1)\|f\|.$$

Consecuentemente el operador V_n es también continuo.

TEOREMA 3.6. *Sea X un espacio de Banach y ψ una función aleatoria X-valuada definida sobre un intervalo real $[a, b]$. Supongamos que las trayectorias de ψ son de clase C^n en $[a, b]$ y que la función $(t, \omega) \mapsto \psi_\omega^{(n)}(t)$ es $\lambda \times \mathbb{P}$-integrable en $[a, b] \times \Omega$. Entonces la aplicación*

$$\omega \longmapsto \psi_\omega$$

de Ω en $C^n([a, b], X)$ es una variable aleatoria de primer orden.

Demostración. El teorema 3.1 garantiza que la aplicación

$$\Psi_n : \omega \longmapsto \psi_\omega^{(n)}$$

de Ω en $L_1(\lambda, X)$ es una variable aleatoria de primer orden.

Notamos por Ψ a la aplicación $\omega \mapsto \psi_\omega$ de Ω en $C^n([a, b], X)$, y notamos que ésta puede ser reconstruida a partir de Ψ_n en la siguiente forma:

$$\Psi = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \psi_\omega^{(k)}(a)(t - a)^k + V_{n-1} \cdots V_0 \Psi_n.$$

La Proposición 1.15 garantiza entonces que Ψ es una variable aleatoria $C^n([a, b], X)$-valuada de primer orden. ∎

COROLARIO 3.7. *Sea $[a, b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada de clase C^n en media* *sobre $[a,b]$. ϕ posee entonces una versión ψ cuyas trayectorias son de clase C^{n-1} en $[a,b]$ y además la aplicación*

$$\omega \longmapsto \psi_\omega$$

de Ω en $C^{n-1}([a,b],X)$ es una variable aleatoria de primer orden.

Hemos probado que una función aleatoria de clase C^n en media sobre un intervalo posee una versión cuyas trayectorias son de clase C^{n-1}.

No es posible obtener un resultado más fuerte, en el sentido de no poder asegurar que para una función aleatoria de clase C^n en media exista una versión cuyas trayectorias sean de clase superior a $n-1$. A continuación probamos que para cada natural n existe una función aleatoria de clase C^n en media cuyas versiones no tienen casi ninguna trayectoria de clase C^n.

EJEMPLO 3.8. Consideremos como Ω el intervalo $(0,1)$ dotado con la medida de Lebesgue.

Sea f_0 la función definida sobre el intervalo $[0,1]$ dada por

$$f_0(t) = \begin{cases} n^4(\frac{1}{n} - t)(t - \frac{1}{n+1}) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Para cada natural k podemos definir inductivamente

$$f_k(t) = \int_0^t f_{k-1}(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

Sea $\{\xi_n\}$ la sucesión de variables aleatorias definidas por

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{j}{2^k} \leq \omega \leq \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $n = 2^k + j$, siendo $k \geq 0, 0 \leq j < 2^k$.

Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos la función aleatoria $\phi_k : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\phi_k(t,\omega) = \begin{cases} f_k(t)\xi_n(\omega) & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \le t \le \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

La función aleatoria ϕ_k así definida es k veces derivable en media sobre $[0,1]$, además su derivada k-ésima $\phi_k^{(k)}$ resulta ser la función aleatoria inicial ϕ_0. La continuidad sobre el intervalo $(0,1]$ de la función f_0 evidencia la continuidad en media de ϕ_0 en el intervalo $(0,1]$. Para comprobar la continuidad en media de ϕ_0 en cero consideramos una sucesión $\{t_n\}$ de elementos de $(0,1]$ convergente a cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por k_n el natural tal que $\frac{1}{k_n+1} \le t_n \le \frac{1}{k_n}$, se puede comprobar que

$$|f_0(t)| \le \frac{1}{4}\left(\frac{k_n}{k_n+1}\right)^2 \quad \forall t \in \left(\frac{1}{k_n+1}, \frac{1}{k_n}\right)$$

y por tanto

$$\mathbb{E}|\phi_0(t,\cdot)| \le \frac{1}{4}\left(\frac{k_n}{k_n+1}\right)^2 \mathbb{E}|\xi_{k_n}|.$$

Dado que la sucesión $\{\mathbb{E}|\xi_{k_n}|\}$ es convergente a cero, queda probado que la función aleatoria ϕ_0 es continua en media en cero.

Todo lo anterior prueba que, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función aleatoria ϕ_k es de clase C^k en media sobre $[0,1]$.

Sin embargo, a continuación probaremos que cualquier versión ψ_k de estas funciones aleatorias no tiene casi ninguna trayectoria de clase C^k en $[0,1]$.

Consideramos para ello la sucesión $\{\frac{2n+1}{2n(n+1)}\}$ que es convergente a cero y verifica que

$$\phi_0\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \omega\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xi_n(\omega)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \Omega$. Dado que la sucesión $\{\xi_n(\omega)\}$ no converge para ningún $\omega \in \Omega$ se tiene que $\{\phi_0(\frac{2n+1}{2n(n+1)},\omega)\}$ no converge para ningún $\omega \in \Omega$. Si ψ_0 es una versión de ϕ_0 entonces existe un conjunto Ω_0 con probabilidad nula tal que

$$\phi_0\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)},\omega\right) = \psi_0\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)},\omega\right), \quad \forall\omega \in \Omega \setminus \Omega_0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea ahora $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$, la sucesión $\{\psi_0(\frac{2n+1}{2n(n+1)},\omega)\}$ no converge. Con lo cual el conjunto de trayectorias de ψ_0 continuas en cero es de probabilidad nula. Si ψ_k fuese una versión de ϕ_k con un conjunto Δ de probabilidad no nula de trayectorias de clase C^n en I, entonces $\frac{\partial^k \psi(t,\omega)}{\partial t^k}$ es una versión de ϕ_0 en Δ. Proporcionaría lo anterior un conjunto de probabilidad no nula de trayectorias continuas para alguna versión de ϕ_0, lo cual sabemos que no puede acaecer.

COROLARIO 3.9. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre I. Si ϕ es de clase C^∞ en media sobre I entonces posee una versión ψ cuyas trayectorias son de clase C^∞ en I y para cualesquiera $a, b \in I$ con $a < b$ $\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n}$ es $\lambda \times \mathbb{P}$-integrable en $[a,b] \times \Omega$.*

Demostración. Al ser ϕ de clase C^∞ en media sobre el intervalo I, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en virtud del Teorema 3.5, la función aleatoria ϕ posee una versión ψ_n cuyas trayectorias son de clase C^n en I y que es integrable sobre $[a,b] \times \Omega$ para cualesquiera $a, b \in I$ satisfaciendo $a < b$. Sea S un subconjunto denso numerable de I. Dado que

$$\mathbb{P}\{\omega : \psi_0(\cdot,\omega) = \psi_n(\cdot,\omega) \forall n \in \mathbb{N}\} =$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \psi_0(s,\omega) = \psi_n(s,\omega) \forall n \in \mathbb{N} \ \forall s \in S\} = 1,$$

existe un conjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ con $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ tal que para cada ω de Ω_1 la trayectoria ψ_{0_ω} es de clase C^∞ en I. La función aleatoria ψ definida como

$$\psi(t,\omega) = \begin{cases} \psi_0(t,\omega) & \text{si} \quad \omega \in \Omega_1,\ t \in I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una versión de ϕ cuyas trayectorias son de clase C^∞ en I y además $\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n} = \frac{\partial^n \psi_n}{\partial t^n}$ casi seguramente sobre $I \times \Omega$, lo cual prueba que $\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n}$ es integrable sobre $[a,b] \times \Omega$ para cualesquiera puntos a y b de I siendo $a < b$. ∎

PROBLEMA ABIERTO: Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre D. Si ϕ es de clase C^k en media sobre el abierto D, ¿existirá una versión de ϕ cuyas trayectorias son de clase C^{k-1} en D, o de algún otro orden? Si ϕ fuese infinitamente derivable en media sobre D, ¿tendrá ϕ una versión cuyas trayectorias también sean infinitamente derivables en D?

III.3 Transferencia de la derivabilidad de las trayectorias a la derivabilidad en media

En lo que sigue analizaremos la repercusión sobre la regularidad en media de una función aleatoria de la regularidad de las trayectorias para alguna versión suya.

TEOREMA 3.10. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre I. Si ϕ tiene una versión ψ cuyas trayectorias son de clase C^n en el intervalo I y $\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n}$*

es integrable sobre $[a,b] \times \Omega$ *para cualesquiera* $a,b \in I$ *con* $a < b$, *entonces* ϕ *es de clase* C^{n-1} *en media sobre* I.

Demostración. Fijamos $a,b \in I$ de modo que $a < b$. Para cada $t \in [a,b]$ y $\omega \in \Omega$ tenemos que $\psi_\omega(t)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} \psi(t,\omega) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(t-a)^k \frac{\partial^k \psi(a,\omega)}{\partial t^k} \\ &+ \int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} \frac{\partial^n \psi(t_n,\omega)}{\partial {t_n}^n} dt_n \cdots dt_1. \end{aligned}$$

Dado que $\frac{\partial^n \psi(t_n,\omega)}{\partial {t_n}^n}$ es integrable sobre $[a,b]^n \times \Omega$, se sigue del Teorema 3.1, $[\frac{\partial^n \psi_t}{\partial t^n}]$ es integrable en media sobre $[a,b]^n$ y

$$\begin{aligned} [\phi_t] = [\psi_t] &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(t-a)^k \Big[\frac{\partial^k \psi_a}{\partial t^k}\Big] \\ &+ \int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} \Big[\frac{\partial^n \psi_t}{\partial {t_n}^n}\Big] dt_n \cdots dt_1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, ϕ es de clase C^{n-1} en media sobre $[a,b]$ con

$$\begin{aligned} [\phi_t^{(j)}] = [\psi_t^{(j)}] &= \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{(k-j)!}(t-a)^{k-j} \Big[\frac{\partial^k \psi_a}{\partial t^k}\Big] \\ &+ \int_a^t \int_a^{t_{j+1}} \cdots \int_a^{t_{n-1}} \Big[\frac{\partial^n \psi_t}{\partial {t_n}^n}\Big] dt_n \cdots dt_{j+1}. \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, n-1$ y $t \in [a,b]$. De esto se puede concluir que ϕ es de clase C^{n-1} en media sobre el intervalo I. ∎

En el siguiente ejemplo mostramos una función aleatoria cuyas trayectorias son de clase C^n en un intervalo real y sus derivadas de orden n satisfacen la condición de integrabilidad del Teorema 3.10 y en cambio no es de clase C^n en media en dicho intervalo.

EJEMPLO 3.11. Consideremos como Ω el intervalo $(0,1)$ provisto de la medida de Lebesgue.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos la función aleatoria $\phi_k : [0,1] \times (0,1) \to \mathbb{R}$ como

$$\phi_k(t,\omega) = \begin{cases} \frac{(t-\omega)^k}{t^2} & \text{si} \quad \omega \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Todas las trayectorias de la función aleatoria ϕ_k son de clase C^{k-1} sobre el intervalo $[0,1]$, $\phi_k^{(j)}(0,\omega) = 0$ y $\int_0^1 \mathbb{E}|\frac{\partial^j \phi_k}{\partial t^j}| < \infty$ para $j = 0,1,\ldots,k-1$. Sin embargo, la función aleatoria ϕ_k no es de clase C^{k-1} en media sobre $[0,1]$. Puesto que si lo fuese, la función aleatoria $\frac{\phi(t,\omega)}{t^{k-1}}$ convergería en media a cero cuando t tendiese a cero. Lo cual no es posible ya que $\mathbb{E}|\frac{\phi(t,\omega)}{t^{k-1}}| = \frac{1}{k+1}$

Del Teorema 3.10 se deduce de forma inmediata el siguiente corolario.

COROLARIO 3.12. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre I. Si ϕ tiene una versión ψ cuyas trayectorias son de clase C^∞ sobre el intervalo I y $\frac{\partial^k \psi}{\partial t^k}$ es integrable sobre $[a,b] \times \Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a,b \in I$ con $a < b$, entonces ϕ es de clase C^∞ en media sobre I.*

Si suprimimos la hipótesis de integrabilidad en el corolario anterior la tesis no es cierta, como puede verse en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.13. Sea la función aleatoria $\phi : [0,1] \times (0,1) \to \mathbb{R}$ definida como

$$\phi(t,\omega) = (w+t)^{-1/2}$$

para cada $t \in [0,1]$ y $\omega \in (0,1)$. Cada trayectoria de ϕ es de clase C^∞ en $[0,1]$ y sin embargo no es derivable en media en cero. De serlo, su derivada en media en cero sería $\phi_0'(\omega) = w^{-3/2}$ con probabilidad uno y es claro que la variable aleatoria $\xi(\omega) = w^{-3/2}$ no es de primer orden.

PROBLEMA ABIERTO: Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, X un espacio de Banach y ϕ una función aleatoria X-valuada definida sobre D. Si las trayectorias de la función aleatoria ϕ son de clase C^k en el abierto D y todas sus derivadas parciales de orden k son integrables sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D. ¿Será la función aleatoria ϕ de clase C^{k-1} sobre D, o de algún otro orden?

Si las trayectorias de la función aleatoria ϕ son infinitamente derivables en el abierto D y todas sus derivadas parciales de cualquier orden son integrables sobre $K \times \Omega$ para cualquier subconjunto compacto K de D. ¿Será la función aleatoria ϕ de clase C^∞ sobre D?

No podemos finalizar el capítulo sin poner de manifiesto que el hecho de ser

$$\mathbb{P}(\phi_t = 0) > 0 \quad \forall t \in I,$$

para una función aleatoria ϕ de clase C^n en media sobre un intervalo I, no garantiza que

$$\mathbb{P}(\phi_t = 0) \leq \delta \quad \forall t \in I$$

para adecuado número positivo δ. Las funciones aleatorias exhibidas en el ejemplo 3.8 dan buena cuenta de ello.

Bibliografía

[1] L. Arnold *Stochastic Differential Equations.* Wiley & Sons. New York 1974.

[2] S.K. Berberian, *Lecture in Functional Analysis and Operator Theory.* Springer-Verlag, New York, 1974.

[3] A.T. Bharucha-Reid, *Random Integral Equations*, Academic Press. New York and London, 1972.

[4] P. Billingsley, *Probability.* Wiley & Sons. New York 1979.

[5] A. Blanc-Lapierre and B. Picinbono, *Fonctions aleatoires.* Masson. Paris 1981.

[6] Burckel, *An introduction to classical complex Analysis.* Birkhauser-Verlag 1979.

[7] S. Cambanis, *The measurability of a stochastic process of second order and its linear space.* Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), 467–474.

[8] S. CAMBANIS, *On the path absolute continuity of second order processes.* Ann. Probability 3 (1975), 1050 - 1054.

[9] S. CAMBANIS AND G. MILLER, *Some path properties of p-th order and symmetric stable processes.* Ann. Probability 8 (1980), 1148 - 1156.

[10] S.A. CHOBANYAN, V.I. TARRIELADZE AND N.N. VAKHANIA. *Probability Distributions on Banach Spaces.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[11] J.B. CONWAY, *A course in functional analysis.* Springer-Verlag, New York 1985.

[12] J.B. CONWAY, *Functions of one complex variable.* Springer-Verlag, New York .

[13] H. CRAMÉR AND M.R. LEADBETTER, *Stationary and Related Stochastic Processes.* Wiley & Sons. New York 1967.

[14] J. DIESTEL AND J.J. UHL, *Vector measures.* Amer. Math. Soc. Surveys 15. Providence, R.I. 1977.

[15] J.L. DOOB, *Stochastic Processes.* Wiley Classics Library. New York 1953.

[16] C.W. GARDINER, *Handbook of stochastic methods.* Springer-Verlag. Berlin 1990.

[17] I.I. GIHMAN AND A.V. SKOROHOD, *The theory of stochastic processes.* Springer-Verlag. New York 1974.

[18] G.R. GRIMNETT AND D.R. STIRZAKER, *Probability and random processes.* Clarendon Press. Oxford 1992.

[19] M.G. HAHN, *Conditions for sample-continuity and the central limit theorem.* Ann. Probability 5 (1977), 351-360.

[20] M.G. HAHN AND M.J. KLASS, *Sample-continuity of square-integrable processes.* Ann. Probability 5 (1977), 361-370.

[21] E. HILLE AND R.S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. 31, Providence 1957.

[22] J. KUELBS, *Probability on Banach spaces.* Marcel Dekker. New York 1978.

[23] M. LEDOUX AND M. TALAGRAND, *Probability in Banach Spaces.* Springer Verlag, Berlin, 1991.

[24] M. LOÉVE, *Probability Theory.* Van Nostrand-Reinold, Princeton, 1963.

[25] C.M. MARLE, *Measures et probabilités.* Hermann, Paris 1974.

[26] F. MARTÍNEZ AND A.R. VILLENA, *A note on the path holomorphy of random functions holomorphic in mean.* Proc. Amer. Math. Soc. (por aparecer).

[27] F. MARTÍNEZ AND A.R. VILLENA, *Like vanishing holomorphic random functions.* Rocky Mountain J. Math. (por aparecer).

[28] K.S. MILLER, *Complex Stochastic Processes.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. London 1974.

[29] B. OKSENDAL, *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag. New York 1989.

[30] R.W. RUDIN, *Functional Analysis,* McGraw-Hill, New York 1973.

[31] R.W. RUDIN, *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, New York 1966.

[32] A.V. SKOROHOD, *Random Linear Operators.* D. Reidel Publishing Company. Holland, 1984.

[33] J.M. STOYANOV, *Counterexamples in Probability.* Wiley and Sons. New York 1987.

[34] P. TODOROVIC, *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications.* Springer-Verlag 1992.

[35] A. M. YAGLOM, *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions II.* Springer-Verlag New York. 1987.

[36] E. WONG, *Introduction to Random Processes.* Springer-Verlag. New York 1983.