UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática Aplicada

ORTOGONALIDAD NO ESTÁNDAR PARA FAMILIAS DE POLINOMIOS CLÁSICOS

TESIS DOCTORAL

María Álvarez de Morales Mercado

Granada, Mayo de 1998

ORTOGONALIDAD NO ESTÁNDAR PARA FAMILIAS DE POLINOMIOS CLÁSICOS.

María Álvarez de Morales Mercado

Granada, Mayo de 1998

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada

ORTOGONALIDAD NO ESTÁNDAR PARA FAMILIAS DE POLINOMIOS CLÁSICOS

TESIS DOCTORAL
por
María Álvarez de Morales Mercado

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Directores:

Dr. Miguel A. Piñar González
Dpto. de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Dra. Teresa E. Pérez Fernández
Dpto. de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Granada, Mayo de 1998

Esta Tesis Doctoral fue juzgada el día 10 de Julio de 1998, en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, obteniendo la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE POR UNANIMIDAD, ante el Tribunal compuesto por:

Presidente:

Dr. D. Francisco Marcellán Español, Catedrático de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid.

Vocales:

Dr. D. Jesús Sánchez-Dehesa Moreno-Cid, Catedrático de Universidad adscrito al Departamento de Física Moderna de la Universidad de Granada.

Dr. Dña. María Luisa Rezola Solaun, Profesora Titular de Universidad adscrita al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Dr. D. Andrei Martínez Finkelshtein, Profesor Asociado de Universidad adscrito al Departamento de Estadística y Matemática Aplicada de la Universidad de Almería.

Secretario:

Dr. D. Victoriano Ramírez González, Catedrático de Universidad adscrito al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada.

Quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que directa o indirectamente han colaborado en la realización de este trabajo de investigación.

En primer lugar, a los directores la profesora Dra. Dña. Teresa E. Pérez Fernández y el profesor Dr. D. Miguel A. Piñar González por su dedicación constante, su esfuerzo y sus siempre oportunas sugerencias, gracias a los cuales he fomentado el interés que tenía hacia la investigación que espero sea fruto de más trabajos.

Al profesor Dr. D. Francisco Marcellán Español por el tiempo dedicado a una lectura exhaustiva y por sus amables sugerencias que han permitido mejorar de forma notable esta Memoria.

Asímismo, deseo agradecerle al profesor Dr. D. André Ronveaux del Departamento de Física Matemática de la Universidad de Namur (Bélgica), la colaboración en la realización de algunos capítulos de este trabajo.

También al director del Departamento de Matemática Aplicada, profesor Dr. D. Victoriano Ramírez González, por haberme facilitado los medios materiales necesarios para realizar esta Memoria, así como, el interés por la misma.

A todos mis compañeros del Departamento y a mis compañeros de despacho quiénes siempre me han mostrado su ayuda.

Por último, quiero agradecerle a mi familia la paciencia que ha tenido conmigo y el apoyo y, sobre todo, los ánimos que me han dado en todo momento para seguir adelante.

A mi familia

Índice

Introducción

El trabajo pionero en el estudio de los polinomios ortogonales en espacios de Sobolev corresponde a un artículo de D. C. Lewis [102] de 1947, en el que se considera la aproximación simultánea por mínimos cuadrados de una función y sus derivadas. Posteriormente, en la década de los 60, diversos autores alemanes (P. Althammer, J. Brenner, W. Gröbner, ...) vuelven a considerar el problema estudiando casos puntuales de productos escalares en espacios de Sobolev. Ha sido en los últimos años cuando el tema ha atraido la atención de una cierta cantidad de investigadores.

En estos últimos años, una de las líneas de trabajo en el campo de los productos escalares llamados "Sobolev" ha consistido en encontrar propiedades de ortogonalidad para algunas familias de polinomios bien conocidas en la literatura.

En efecto, se considera una familia de polinomios clásicos asociados a un funcional lineal definido positivo con parámetros (Laguerre–Sonine o Jacobi), a partir de la expresión explícita de estos polinomios se extiende el rango de los parámetros, (ver G. Szegő [158]), y se buscan propiedades de ortogonalidad para estos polinomios.

Consideremos un producto escalar definido a partir de una función peso clásica, $\rho(x)$, definida sobre un intervalo I:

$$(f,g) = \int_I f(x)g(x)\rho(x)dx. \tag{1}$$

Denotaremos por $\{P_n\}_{n\geq 0}$ a la sucesión (clásica) de polinomios ortogonales asociada al producto (1), en la que cada elemento es un polinomio $P_n(x)$ de grado n.

Las sucesiones clásicas de polinomios ortogonales asociadas a una función peso definida sobre $\mathbb{R}$, vienen dadas en la siguiente tabla:

Nombre	$P_n(x)$	I	$\rho(x)$	Restricciones
Hermite	$H_n(x)$	$(-\infty,+\infty)$	e^{-x^2}	
Laguerre-Sonine	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$[0,+\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$	$\alpha > -1$
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$[-1,1]$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$\alpha,\beta > -1$

Consideremos, solamente las sucesiones de polinomios de Laguerre–Sonine y de Jacobi, pues poseen restricciones en los parámetros. Estas restricciones vienen dadas para asegurar la existencia de los momentos.

A partir de la expresión explícita de estos polinomios:

$$
\begin{aligned}
L_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n+\alpha}{n-j} x^j, \qquad n \geq 0, \\
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+\alpha}{j} \binom{n+\beta}{n-j} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-j} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{j}, \qquad n \geq 0,
\end{aligned}
$$

es posible plantearse si el rango de valores de los parámetros puede extenderse a más valores reales. Para poder dotar de propiedades de ortogonalidad a estas familias de polinomios sólo necesitamos que el grado de cada polinomio sea exactamente n.

Definimos así las familias de los polinomios generalizados de Laguerre y las familias de los polinomios generalizados de Jacobi como las familias que representaremos, respectivamente, por $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $gr\left(L_n^{(\alpha)}\right) = n, \quad n \geq 0$, y $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $gr\left(P_n^{(\alpha,\beta)}\right) = n, \quad n \geq 0$.

Además, unas simples manipulaciones en la expresión explícita de estos polinomios nos permiten demostrar que satisfacen una relación de recurrencia a tres términos:

$$
\begin{aligned}
P_{-1}(x) &= 0, \qquad P_0(x) = 1, \\
xP_n(x) &= P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \qquad n \geq 0.
\end{aligned}
$$

En el caso de los polinomios de Laguerre el coeficiente γ_n depende del parámetro α y para los polinomios de Jacobi este coeficiente depende de α y β.

Cuando $\gamma_n(\alpha) \neq 0$ en el caso Laguerre o bien $\gamma_n(\alpha,\beta) \neq 0$ en el caso Jacobi, para todo valor de $n \geq 0$, entonces el teorema de Favard asegura que los polinomios de Laguerre–Sonine o los polinomios de Jacobi son ortogonales con respecto a un funcional lineal regular, que es definido positivo cuando aplicamos las restricciones de los parámetros.

Sin embargo, hay valores de estos parámetros para los cuales el coeficiente $\gamma_n(\alpha)$ o bien $\gamma_n(\alpha,\beta)$ se anula, y el teorema de Favard no nos permite deducir propiedades de ortogonalidad (estándar) para estas familias de polinomios.

Recientemente, este problema ha sido estudiado por varios autores.

El caso Laguerre–Sonine, que proporciona el punto de partida de este tipo de trabajos, fue iniciado por K. H. Kwon y L. L. Littlejohn en 1995 ([96]) donde abordan el caso en que $\alpha = -N$, con $N \geq 1$ un número entero dado. En este caso el coeficiente $\gamma_N(-N) = 0$, y estos autores demuestran que los polinomios $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, son ortogonales con respecto al siguiente producto escalar de Sobolev:

$$
\langle f,g\rangle = (\, f(0), f'(0), \ldots, f^{(N-1)}(0)\,)\, \mathbf{A} \begin{pmatrix} g(0) \\ g'(0) \\ \vdots \\ g^{(N-1)}(0) \end{pmatrix} + \int_0^{+\infty} f^{(N)}(x) g^{(N)}(x) e^{-x} dx,
$$

con $\mathbf{A}$ una matriz real simétrica de orden $N \times N$.

Posteriormente, en 1996 ([146]) T. E. Pérez y M. A. Piñar dan una versión unificada de la ortogonalidad de los polinomios generalizados de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, para cualquier valor real del parámetro α, probando su ortogonalidad con respecto al producto escalar de Sobolev no diagonal:

$$(f,g)_S^{(K,\alpha+K)} = \int_0^{+\infty} F(x)M(K)G(x)^T x^{\alpha+K} e^{-x} dx, \tag{2}$$

donde $K \geq 0$ es un número entero dado tal que $\alpha + K > -1$, $M(K)$ es una matriz simétrica y definida positiva de orden $K+1$ y

$$F(x) = (\, f(x), f'(x), \ldots, f^{(K)}(x)\,),$$
$$G(x) = (\, g(x), g'(x), \ldots, g^{(K)}(x)\,).$$

En 1997 ([147]) los mismos autores deducen como se puede usar esta ortogonalidad para obtener diferentes propiedades de los polinomios generalizados de Laguerre. En particular, prueban la existencia de un operador diferencial lineal, que notaremos por $\mathcal{F}^{(K)}$ que es simétrico con respecto al producto (2). Además, esta propiedad del operador permitirá expresar el producto escalar $(.,.)_S^{(K,\alpha+K)}$ en términos del producto escalar asociado al funcional clásico definido a partir de la función peso clásica $\rho(x) = x^{\alpha+K}e^{-x}$.

El caso de los polinomios de Jacobi es más complicado aunque tambien hay resultados de ortogonalidad para algunas familias de polinomios. En concreto, K. H. Kwon, y L. L Littlejohn, [97], demuestran que los polinomios de Jacobi $\{P_n^{(-1,-1)}\}_{n\geq 0}$ son ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f,g) = c_1 f(1)g(1) + c_2 f(-1)g(-1) + c_3 \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx,$$

donde c_1, c_2 y c_3 son números reales.

M. Alfaro, M. L. Rezola, T. E. Pérez y M. A. Piñar estudian en 1997 ([7]) sucesiones de polinomios que son ortogonales con respecto a la forma bilineal definida por

$$\mathcal{B}_S^{(N)}(f,g) = (\, f(c), f'(c), \ldots, f^{(N-1)}(c)\,)\,\mathbf{A} \begin{pmatrix} g(c) \\ g'(c) \\ \vdots \\ g^{(N-1)}(c) \end{pmatrix} + \langle u, f^{(N)} g^{(N)} \rangle,$$

donde u es un funcional cuasi–definido en el espacio $\mathbb{P}$, $c \in \mathbb{R}$, N es un número entero positivo y $\mathbf{A}$ es una matriz real simétrica $N \times N$ tal que cada uno de sus menores principales es regular. En particular, deducen que los polinomios de Jacobi $\{P_n^{(-N,\beta)}\}_{n\geq 0}$, cuando $\beta + N$ no es un entero negativo, son ortogonales con respecto al producto anterior, para u el funcional de Jacobi definido a partir de la función peso $\rho^{(0,\beta+N)}(x) = (1+x)^{\beta+N}$, $I = [-1,1]$, $c = 1$ y $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{-1})^T$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal regular y $\mathbf{Q}$ es la matriz de las derivadas de los polinomios de Jacobi evaluadas en el punto 1. Análogamente, se obtiene que la sucesión de los polinomios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,-M)}\}_{n\geq 0}$, para $\alpha + M \neq -N$, es ortogonal con respecto al producto anterior, para u el funcional de Jacobi definido a partir de $\rho^{(\alpha+M,0)}(x) = (1-x)^{\alpha+M}$, $I = [-1,1]$, $c = -1$ y $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{-1})^T$, donde $\mathbf{Q}$ es la matriz de las derivadas de los polinomios de Jacobi evaluadas en el punto -1.

El resultado principal para las familias de polinomios generalizados de Laguerre o para las familias de polinomios generalizados de Jacobi es que, en ambos casos, dichas familias de polinomios son ortogonales con respecto a un producto escalar de Sobolev, es decir, un producto escalar en el que intervienen derivadas.

La Memoria que presentamos consta de siete capítulos, pero puede dividirse en dos partes claramente diferenciadas. La primera parte, que comprende los capítulos 1, 2, 3 y 4, se ocupa del estudio de las sucesiones de polinomios ortogonales asociados a productos escalares de Sobolev. (Para referencias históricas ver, por ejemplo, [107], [137] y [140]).

Es conocido que este tipo de productos escalares se expresan de forma general como sigue:

$$(f,g)_S^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle u_{m,k}, D^m f D^k g\rangle, \quad \forall f,g \in \mathbb{P}, \tag{3}$$

donde D representa el operador derivada, $K \geq 0$ es un número entero dado, y $u_{m,k}$ son funcionales lineales, para $m,k = 0,\ldots,K$, considerados como modificaciones polinómicas de un funcional lineal de momentos u semiclásico y definido positivo, esto es

$$u_{m,k} = \lambda_{m,k}(x)u,$$

donde $\lambda_{m,k}(x)$ son polinomios reales en la variable x, para $m,k = 0,\ldots,K$, satisfaciendo una serie de restricciones que hacen que la matriz polinómica

$$\Lambda^{(K)}(x) = (\lambda_{m,k}(x))_{m,k=0}^{K},$$

sea una matriz simétrica y definida positiva.

Diversos autores han estudiado productos escalares de la forma (3). Así, en el caso $K = 1$, se tiene como antecedente el trabajo de F. W. Schäfke y G. Wolf [156]. En este trabajo los autores consideran un funcional lineal clásico u con restricciones sobre los polinomios de la matriz $\Lambda^{(K)}(x)$, en el sentido de que el producto escalar de Sobolev se reduce a un producto escalar estándar cuando se integra por partes, y la constante de integración se anula. P. Lesky ([101]) estudia el producto (3) cuando la matriz $\Lambda^{(K)}(x)$ es una matriz diagonal y de coeficientes constantes y el funcional lineal u es el funcional asociado a la medida de Lebesgue.

En 1994, en la Tesis Doctoral de T. E. Pérez ([144]) y en 1995 ([118]) F. Marcellán, T. E. Pérez y M. A. Piñar estudian el producto escalar diagonal de la forma (3), cuando $K = 1$ para los funcionales semiclásicos u_0 y u_1 relacionados mediante una expresión de tipo racional. Para este producto escalar, estos autores estudian detalladamente los polinomios ortogonales de Sobolev cuando $u_0 = u_1$ es el funcional lineal asociado a la medida de Gegenbauer ([117]) o a la medida Laguerre–Sonine ([119]).

H.G. Meijer proporciona en [135] un ejemplo del producto (3), cuando $\{u_0, u_1\}$ forman un par coherente para $u_1 = u_0 = u$, donde $u = \dfrac{1}{x-\xi} x^{\alpha} e^{-x} dx + M\delta(\xi)$, con $\xi = 0$, $\alpha > 0$ y $M \geq 0$. En [138] establece la clasificación de todos los pares coherentes. En particular, estudia los pares coherentes en el caso Jacobi, considerando $u_1 = u_0 = u$, donde $u = \dfrac{1}{|x-\xi|}(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx + M\delta(\xi)$, para α, $\beta > 0$, $M \geq 0$ y $|\xi| \geq 1$. En ambos casos, la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ es una matriz diagonal de la forma:

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} |x-\xi| & 0 \\ 0 & \phi(x) \end{pmatrix},$$

donde en el primer caso $\phi(x) = x$, y para el caso Jacobi $\phi(x) = 1 - x^2$. De este modo, los pares coherentes son un caso particular de los productos escalares de la forma (3).

Otro ejemplo de estos productos aparece en el caso en que $\{u_0, u_1\}$ forman un par coherente simétrico. T. E. Pérez demuestra en [144] que las componentes impares de los polinomios ortogonales asociados a $\{u_0, u_1\}$ verifican una relación de ortogonalidad Sobolev no diagonal.

Recientemente, en un artículo de F. Marcellán, T. E. Pérez, M. A. Piñar y A. Ronveaux ([120]) se estudia un producto escalar de Sobolev donde la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$ es una matriz diagonal y de coeficientes constantes.

Describiremos la estructura de la Memoria. El **capítulo uno** está dedicado a establecer las notaciones y resultados previos, necesarios para la comprensión del resto de los capítulos de la Memoria. Primero definiremos el concepto de sucesión de polinomios ortogonales, junto con una serie de propiedades que verifican estos polinomios. Se enunciarán los principales resultados de las cuatro familias de polinomios ortogonales clásicos: Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel. Y, finalmente, estudiaremos los funcionales semiclásicos.

En el **capítulo dos** se estudian productos escalares del tipo (3) y se deducen propiedades para los polinomios ortogonales con respecto a (3), que se llaman, como es habitual, polinomios ortogonales de Sobolev. Para este producto escalar, se define un operador diferencial lineal definido sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales, que es simétrico con respecto al producto escalar (3). Como una consecuencia del carácter simétrico del operador, se obtienen relaciones explícitas entre los polinomios ortogonales de Sobolev y la sucesión de los polinomios ortogonales semiclásicos asociados al funcional lineal u y, además, se deduce que los polinomios ortogonales de Sobolev verifican una relación difero–diferencial y una ecuación diferencial de orden $2K + 2$.

Los resultados obtenidos en este capítulo pueden verse como una generalización del caso diagonal (ver [120]). En este sentido, este capítulo proporciona un marco común para el estudio de los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar de Sobolev definido en (3).

Los dos últimos capítulos de esta primera parte están dedicados a dotar de propiedades de ortogonalidad Sobolev a dos familias de polinomios clásicos bien conocidos en la literatura:

los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, y los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$, cuando $N = 1, 2, 3, \ldots$

En el **capítulo tres** damos propiedades de ortogonalidad a la sucesión de los polinomios de Laguerre generalizados $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, para cualquier valor real del parámetro α. Tratamos en este capítulo dar una visión global de los trabajos anteriormente señalados ([96], [146], [147]), aportando nuevas técnicas de demostración, basadas en el capítulo anterior.

En concreto, fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, demostraremos que existen infinitos productos escalares de la forma (3), donde $K \geq \max\{0, [-\alpha]\}$, u es el funcional de Laguerre definido a partir de la función peso $\rho(x) = x^{\alpha+K}e^{-x}$ y $\lambda_{m,k}(x)$ son unas constantes que definiremos en el desarrollo del capítulo.

Todos los resultados obtenidos de forma general en el capítulo 2 se podrán aplicar a este caso y, las especiales características de los polinomios de Laguerre harán que podamos deducir algunas nuevas. Finalmente, estudiamos los ceros de los polinomios generalizados de Laguerre.

El propósito del **capítulo cuatro** es dotar de propiedades de ortogonalidad no estándar a otra familia conocida de polinomios clásicos: los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, para $N = 1, 2, \ldots$. En este caso la simetría de los polinomios hace que las técnicas de demostración y los resultados que se deducen sean diferentes.

Demostraremos que la familia de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, son ortogonales con respecto a un producto escalar de Sobolev:

$$(f,g)_S = (\, F(1)|F(-1)\,)\,\mathbf{A}\,(\, G(1)|G(-1)\,)^T + \int_{-1}^{1} f^{(2N)}(x)g^{(2N)}(x)(1-x^2)^N dx, \quad x \in [-1,1],$$

con $N \geq 1$ un entero dado, $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada simétrica y definida positiva de orden $2N$ y

$$(\, F(1)|F(-1)\,) = (\, f(1), f'(1), \ldots, f^{(N-1)}(1), f(-1), f'(-1), \ldots, f^{(N-1)}(-1)\,).$$

Probaremos la existencia de un operador diferencial lineal, que notaremos por $\mathcal{F}^{(N)}$ que es simétrico con respecto al producto anterior. Este operador nos permitirá relacionar la sucesión de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, con la sucesión de los polinomios clásicos de Gegenbauer $\{C_n^{(N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, asociada a la función peso $\rho(x) = (1-x^2)^N$. El capítulo se acaba con el estudio de los ceros de estos polinomios de Gegenbauer.

La segunda parte de esta Memoria, que se compone de los capítulos 5, 6 y 7, está dedicada al llamado "caso discreto". En este caso estudiamos las sucesiones de polinomios ortogonales asociados al producto escalar:

$$(f,g)_\Delta^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle u_{m,k}, \Delta^m f \Delta^k g\rangle, \quad \forall f,g \in \mathbb{P}, \tag{4}$$

donde Δ representa el operador lineal en diferencias finitas hacia delante definido como

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y los funcionales $u_{m,k}$ son, de nuevo, una modificación polinómica de un funcional de momentos discreto Δ–semiclásico definido positivo:

$$u_{m,k} = \lambda_{m,k}(x)u.$$

Observemos que el esquema del producto escalar (4) es el mismo que el del producto definido en (3), cuando se sustituye la derivada por el operador Δ. Por similitud con el "caso continuo", llamaremos a este tipo de productos *productos escalares Δ-Sobolev.*

El único antecedente del estudio de productos escalares en la forma (4), es un trabajo de I. Area, E. Godoy y F. Marcellán [15] en el que estudian un caso particular del producto (4)

$$(f,g)^{(1)}_{\Delta} = \langle u, f(x)g(x)\rangle + \lambda\langle u, \Delta f(x)\Delta g(x)\rangle, \tag{5}$$

donde λ es un número real positivo y u es el funcional Δ–clásico de Meixner. Estos autores hacen un estudio de los polinomios ortogonales asociados a $(.,.)^{(1)}_{\Delta}$, y los relacionan con los polinomios ortogonales con respecto a u, los polinomios clásicos de Meixner.

En el **capítulo cinco** recordaremos algunas propiedades de los operadores lineales en diferencias finitas hacia delante y hacia atrás, que notaremos, respectivamente, por Δ y ∇. Definiremos los conceptos de funcional lineal Δ–semiclásico y funcional lineal ∇–semiclásico, así como, la Δ–clase y la ∇–clase asociada a cada uno de los funcionales anteriores, respectivamente, y deduciremos que ambos conceptos son equivalentes. Además, demostraremos una serie de propiedades que relacionan los operadores en diferencias finitas hacia delante y hacia atrás, con un funcional lineal Δ–semiclásico dado. En la última parte del capítulo se estudian los polinomios ortogonales clásicos de variable discreta.

Abordaremos, en el **capítulo seis**, el estudio de los polinomios ortogonales discretos asociados a un producto escalar Δ–Sobolev. En este capítulo, haremos un estudio análogo al del capítulo 2, pero con las particularidades del operador lineal Δ. De este modo, se define un operador en diferencias definido sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales, que es simétrico con respecto al producto escalar (4). A partir del carácter simétrico del operador, se obtienen relaciones algebraicas entre los polinomios ortogonales de Sobolev y la sucesión de los polinomios ortogonales Δ–semiclásicos asociados al funcional lineal u y, además, se deduce que los polinomios ortogonales de Sobolev satisfacen una ecuación en diferencias de orden $2K+2$.

Obsérvese que es posible definir productos escalares análogos a (4) para el operador ∇:

$$(f,g)^{(K)}_{\nabla} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle u_{m,k}, \nabla^m f \nabla^k g\rangle.$$

De esta forma, todos los resultados que deduciremos tienen una versión dual para el operador ∇.

Este capítulo de la Memoria es una amplia generalización del producto (5), que se obtendrá como caso particular.

El **capítulo siete** está dedicado a dotar de propiedades de ortogonalidad a la sucesión de los polinomios mónicos de Meixner, $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$, con $0<\mu<1$ y $\gamma\in\mathbb{R}$. Los resultados obtenidos de forma general en el capítulo 6 se podrán aplicar a este caso y, además, las especiales características de los polinomios de Meixner harán que podamos deducir algunas nuevas.

Demostraremos que la familia de polinomios $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto a un producto escalar Δ–Sobolev como el definido en (4). En concreto, fijado $\gamma\in\mathbb{R}$, deduciremos que existen infinitos productos escalares de la forma (4), donde $K\geq\max\{0,[-\gamma+1]\}$, u es el funcional de Meixner definido a partir de la función peso $\rho(x)=\dfrac{\mu^x\Gamma(\gamma+K+x)}{\Gamma(\gamma+K)\Gamma(x+1)}$ y $\lambda_{m,k}(x)$ son unas constantes que definiremos en este capítulo.

Finalmente, estudiaremos los polinomios de Meixner $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_n$, para $N\geq 1$ un número entero dado.

Las **principales aportaciones** de esta Memoria pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. Se hace un estudio completo de productos escalares de Sobolev de la forma (3) donde $u_{m,k}=\lambda_{m,k}(x)u$, para u un funcional dado, semiclásico y definido positivo. Se obtiene un operador diferencial lineal, $\mathcal{F}^{(K)}$, simétrico con respecto al producto (3), que permite expresar el producto escalar de Sobolev (3) en términos del producto escalar asociado al funcional u. A partir de este resultado se obtienen relaciones algebraicas entre los polinomios ortogonales asociados a $(.,.)_S^{(K)}$ y los polinomios ortogonales asociados a u, así como se deduce una relación difero–diferencial que verifican los polinomios ortogonales con respecto a (3).

   Estudiamos el caso particular $K=1$. Estamos interesados en productos escalares de Sobolev en la forma (3) tales que el correspondiente operador diferencial $\mathcal{F}^{(1)}$ no aumente el grado de los polinomios. Esta situación es muy interesante, ya que si $\mathcal{F}^{(1)}$ conserva el grado de estos polinomios, como consecuencia de la relación difero–diferencial, se obtiene que los correspondientes polinomios ortogonales de Sobolev son las funciones propias del operador diferencial, esto es, estos polinomios verifican una ecuación diferencial de segundo orden.

   Se obtienen condiciones necesarias para que el operador lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios y, en particular, se deduce que el polinomio $\lambda_{1,1}$, de la matriz polinómica $\Lambda^{(1)}(x)$, tiene que ser una constante y el funcional u ha de ser clásico.

2. Para el "caso discreto" se aborda, por primera vez, el estudio completo de productos escalares Δ–Sobolev definidos en (4) con los funcionales $u_{m,k}=\lambda_{m,k}(x)u$, para u un

funcional Δ-semiclásico y definido positivo. De manera análoga al punto 1., se obtiene un operador en diferencias, $\mathcal{F}^{(K)}$ que es simétrico con respecto al producto (4), y que permite expresar el producto escalar Δ-Sobolev en términos del producto escalar asociado al funcional Δ-semiclásico u. Se deducen relaciones algebraicas entre los polinomios ortogonales asociados a $(.,.)_{\Delta}^{(K)}$ y los polinomios ortogonales asociados a u, y una ecuación en diferencias que verifican los polinomios ortogonales con respecto a (4).

Consideraremos el caso particular $K = 1$. En este caso, se estudian productos escalares del tipo (4) de manera que el correspondiente operador en diferencias asociado, $\mathcal{F}^{(1)}$, no aumente el grado de los polinomios. Estamos interesados en estos tipos de operadores porque, a partir de esta propiedad, tendremos que los polinomios ortogonales con respecto a (4) son funciones propias del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ y, por lo tanto, verifican una ecuación en diferencias de segundo orden. Además, cuando $\mathcal{F}^{(1)}$ conserva el grado, es posible dotar de propiedades de ortogonalidad Δ-Sobolev a familias clásicas de polinomios.

Deduciremos condiciones necesarias para que el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios. En particular, obtendremos que $\lambda_{1,0} - \lambda_{1,1}$ tiene que ser una constante y el funcional u ha de ser Δ-clásico.

3. Se dota de propiedades de ortogonalidad no estándar a familias de polinomios clásicos ya conocidas en la literatura. En concreto, para la familia de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, con parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, y la familia de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, para $N = 1,2,3,\ldots$ En ambos casos se demuestra que estas familias de polinomios son sucesiones de polinomios que son ortogonales con respecto a un producto escalar que involucra derivadas. A partir de esta propiedad de ortogonalidad se recuperan propiedades ya conocidas de estas familias de polinomios. Además, se hace un estudio de los ceros de estos polinomios.

   Finalmente, se dota de ortogonalidad no estándar a una familia clásica de polinomios discretos, los polinomios de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$, con $0 < \mu < 1$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. En particular se demuestra que los polinomios de Meixner son ortogonales con respecto a un producto escalar Δ-Sobolev, esto es, un producto escalar en el que intervienen operadores en diferencias Δ. Esta nueva ortogonalidad permite deducir propiedades ya conocidas para estos polinomios, y deducir algunas nuevas como las relaciones entre los polinomios de Meixner con distinto parámetro, y propiedades acerca de los ceros para los polinomios $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$, con $0 < \mu < 1$ y $\gamma \in \mathbb{R}$.

Cada uno de los capítulos de la Memoria está dividido en secciones, comenzando siempre por una introducción que describe el contenido del capítulo a tratar, y en algunas ocasiones estas secciones, a su vez, están divididas en subsecciones.

La numeración de los resultados obtenidos está vinculada al capítulo y a la sección a la que corresponde tal resultado. Así, por ejemplo, la notación *Proposición 4.3.1* corresponde a la primera proposición de la sección tercera del capítulo 4.

Las referencias bibliográficas aparecen ordenadas por orden alfabético de autores y dentro del texto las referencias se indican incluyendo entre corchetes ([ ]) el número de orden que le corresponde en la bibliografía.

Capítulo 1

Polinomios ortogonales: Preliminares

1.1 Introducción

El próposito de este capítulo es dar, sin demostrar, una serie de resultados conocidos sobre la teoría de polinomios ortogonales. Indicaremos solamente aquellos resultados que utilizaremos en los siguientes capítulos de la memoria.

Estudiaremos, en particular, los polinomios ortogonales clásicos y semiclásicos. Primero definiremos estos tipos de polinomios y, luego, daremos solo las propiedades que posteriormente usaremos, que verifican estos polinomios.

La estructura del capítulo es la siguiente: Recordaremos, en la primera sección, el concepto de *funcional de momentos* asociado a una sucesión de números reales, que notaremos por u, junto con la definición de *sucesión de polinomios ortogonales* asociada al funcional u, que denotaremos SPO. Definiremos los *funcionales de momentos regulares*, dando una caracterización sobre la existencia de SPO asociada al funcional regular de manera que deduciremos que esta SPO está unívocamente determinada salvo un factor multiplicativo no nulo. Por último, daremos el concepto de *funcional definido positivo*, junto con un resultado que proporciona una caracterización para este tipo de funcional.

En la sección segunda estudiaremos las propiedades que verifica una sucesión de polinomios ortogonales. Así, tendremos la relación de recurrencia a tres términos, que por el teorema de Favard será una caracterización de la SPO. Introduciremos algunas propiedades sobre la distribución de los ceros de los polinomios que constituyen la SPO y, por último, recordaremos la teoría de Sturm, ya que dicha técnica puede utilizarse, bajo ciertas condiciones, para estudiar las propiedades de localización y separación de los ceros de los polinomios ortogonales.

El apartado tercero lo dedicaremos al estudio de un caso particular de polinomios ortogonales: los polinomios ortogonales clásicos. En una primera parte, se definen los conceptos de *producto a la izquierda* de un polinomio por un funcional y de *derivada (distribucional) del funcional*. Definiremos la SPO clásica y clasificaremos estos polinomios, dando lugar a las cuatro familias clásicas siguientes: Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel. Después, daremos

una serie de caracterizaciones conocidas para una SPO clásica, con lo que tendremos que una SPO es clásica si y sólo si verifica alguna de estas propiedades:
a) Para cada n, existe una relación entre el producto de un polinomio ϕ por la derivada de un polinomio de la SPO, y otros tres polinomios de la SPO de grados consecutivos.
b) Son las únicas SPO tales que la familia de sus derivadas es de nuevo una SPO.
c) Se verifica, para cada n, una relación entre un polinomio de la SPO y, a lo más, tres polinomios consecutivos.
d) Es la única sucesión de polinomios que verifica una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinómicos independientes de n.
e) Los polinomios clásicos son los únicos que verifican una fórmula de Rodrigues.

En la sección cuarta estudiaremos los funcionales lineales semiclásicos. En primer lugar, daremos la definición de *par admisible* y, a partir de ella, definiremos el concepto de *funcional semiclásico.* De este modo, diremos que un funcional u es semiclásico si existen dos polinomios tales que u verifica una ecuación diferencial distribucional. Estableceremos la noción de *clase* de un funcional semiclásico, junto con una serie de caracterizaciones para estos funcionales semiclásicos.

La última parte del capítulo la dedicaremos a estudiar las derivadas de orden superior para los funcionales semiclásicos. A partir de la definición de funcional semiclásico, veremos que la ecuación diferencial que verifica se puede generalizar para derivadas de orden superior. En este sentido, definiremos de forma recursiva los polinomios que intervienen en dicha ecuación diferencial, y obtendrenos una cota de su grado.
Esta sección la terminamos deduciendo las expresiones explícitas de estos polinomios para cada caso clásico definido positivo. Además, a partir de sus expresiones explícitas, determinaremos el grado de estos polinomios, en cada caso clásico, y obtendremos que, bajo ciertas condiciones, este grado es exactamente el orden de derivación de la ecuación diferencial.

1.2 Sucesión de polinomios ortogonales asociada a un funcional lineal

Se considera el espacio vectorial de los polinomios en una variable con coeficientes reales, que notamos por $\mathbb{P}$.

Definición 1.2.1 *Sea $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales y*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \langle u, f\rangle \end{array}$$

un funcional lineal definido sobre $\mathbb{P}$ tal que

$$\langle u, x^n\rangle = \mu_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Entonces, decimos que u es el "funcional de momentos" asociado a la sucesión $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$. Para cada valor de n, llamamos "momento de orden n" al número real μ_n.

Definición 1.2.2 *Sea u un funcional de momentos, decimos que una familia de polinomios, $\{P_n\}_{n\geq 0}$, es una "sucesión de polinomios ortogonales" asociados al funcional u, que se nota por SPO, si para cada valor de n se verifican:*

i) P_n es un polinomio de grado n.

ii) $\langle u, P_n P_m\rangle = k_n \delta_{nm}$, para $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, donde $k_n \neq 0$.

A continuación, damos, sin demostrar, una serie de resultados bien conocidos en la teoría de los polinomios ortogonales, (ver T. S. Chihara [38], Capítulo 1).

Se considera u un funcional de momentos y $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ su correspondiente sucesión de momentos. Notamos por Δ_n la matriz de orden $n+1$ de los $2n+1$ primeros momentos, y a su determinante por H_n, que es el determinante de Hankel:

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

En estas condiciones, se tiene

Definición 1.2.3 *Un funcional de momentos u se dice "regular" o "cuasi-definido" si se verifica que $H_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Proposición 1.2.4 *Sea u un funcional de momentos cuya sucesión de momentos es $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$. Una condición necesaria y suficiente para que exista una SPO asociada a u, es que el funcional u sea regular. En este caso, los polinomios ortogonales son únicos salvo constante multiplicativa.*

En lo que sigue, supondremos que todos los funcionales de momentos son regulares para garantizar la existencia de SPO.

Proposición 1.2.5 *Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales asociada a u. Entonces, para cada polinomio p de grado n, se verifica*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

donde

$$c_k = \frac{\langle u, P_k p\rangle}{\langle u, P_k^2\rangle}, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Por simplicidad para los cálculos, en lo que sigue tomaremos los polinomios ortogonales de la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ mónicos, es decir, con coeficiente principal igual a uno, y diremos que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una *sucesión de polinomios ortogonales mónicos*, que denotaremos SPOM.

Podemos dar una expresión de cada polinomio P_n en términos de los determinantes de Hankel, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.2.6 *Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la SPOM asociada al funcional de momentos regular u, entonces, para cada n, el polinomio ortogonal P_n viene determinado por la expresión:*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_n(x) &= \frac{1}{H_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Definición 1.2.7 *Un funcional lineal regular u, se dice que es "definido positivo" si dado cualquier polinomio p, no nulo, se verifica que*

$$p(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \langle u, p \rangle > 0.$$

Consecuentemente, si u es definido positivo, entonces

$$\langle u, P_n^2 \rangle > 0, \quad n \geq 0.$$

Además, se puede probar que un funcional regular u es definido positivo si y sólo si $H_n > 0, \quad n \geq 0$.

Por el teorema de Hamburguer, (ver T. S. Chihara [38], pág. 56), se verifica que si u es un funcional lineal definido positivo, entonces admite una representación integral en la forma que muestra la proposición siguiente.

Proposición 1.2.8 *Sea u un funcional lineal regular. Son equivalentes:*

i) u es definido positivo.

ii) Existe una función μ acotada y no decreciente para la cual todas las integrales (en el sentido de Riemann-Stieltjes)

$$\mu_n = \langle u, x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\mu(x),$$

son finitas y tal que

$$\langle u, p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) d\mu(x), \quad p \in \mathbb{P}.$$

1.3 Propiedades de los polinomios ortogonales

Denominamos *sucesión de polinomios ortogonales mónicos* a la SPOM asociada a un funcional lineal regular u. En esta sección recordamos las propiedades más importantes que verifican este tipo de polinomios ortogonales.

1.3.1 Relación de recurrencia a tres términos

Es conocido que, dada una base de $\mathbb{P}$, se puede construir a partir de ella una SPOM usando el algoritmo de Gram–Schmidt. Sin embargo, este proceso es lento y costoso. En virtud a la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios de una SPOM, podemos ir calculando los elementos de la SPOM de una forma más eficaz.

Teorema 1.3.1 *Sea u un funcional de momentos regular y $\{P_n\}_{n\geq 0}$, la SPOM correspondiente. Entonces $\{P_n\}_{n\geq 0}$ verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:*

$$\begin{aligned} P_{-1}(x) &= 0, \quad P_0(x) = 1, \\ xP_n(x) &= P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

donde γ_0 es arbitrario y

$$\beta_n = \frac{\langle u, xP_n^2\rangle}{\langle u, P_n^2\rangle}, \quad n \geq 0, \quad \gamma_n = \frac{\langle u, P_n^2\rangle}{\langle u, P_{n-1}^2\rangle} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

La existencia de esta relación de recurrencia es una caracterización para las SPOM, tal y como muestra el teorema de Favard.

Teorema 1.3.2 *([38], p. 21)*(**Teorema de Favard**) *Sean $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ dos sucesiones arbitrarias de números complejos, y sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la familia de polinomios mónicos definidos por la relación:*

$$\begin{aligned} P_{-1}(x) &= 0, \quad P_0(x) = 1, \\ xP_n(x) &= P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

Entonces existe un único funcional de momentos u tal que

$$\langle u, 1\rangle = \gamma_0, \quad \langle u, P_n P_m\rangle = 0, \quad n \neq m, \quad n, m = 0, 1, \ldots$$

Además, u es un funcional regular y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es la SPOM asociada a u si y solamente si $\gamma_n \neq 0$. Y, el funcional u es definido positivo si y sólo si γ_n es un número real y positivo.

1.3.2 Propiedades de los ceros

Si el funcional u es definido positivo, podemos deducir el comportamiento de los ceros del polinomio P_n ortogonal de grado n. Para ello, recordamos el concepto de soporte del funcional lineal u.

Definición 1.3.3 *Sea V un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un funcional de momentos u se dice definido positivo en V si y sólo si $\langle u, p\rangle > 0$, para todo polinomio real p no negativo en V y no idénticamente nulo en V. Al conjunto V se le llama un "soporte" de u.*

Teorema 1.3.4 *([38]) Para cada valor de n, se verifica*

i) Las raíces del polinomio P_n son reales, simples y contenidas en la envolvente convexa del soporte del funcional.

ii) Los ceros del polinomio P_n se intercalan con los ceros del polinomio P_{n+1}. Es decir, si notamos por $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n}$ a los ceros del polinomio P_n, se tiene que

$$x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por tanto, dos polinomios consecutivos de una SPOM no tienen ceros comunes.

Estas propiedades de los ceros pueden deducirse a partir de la llamada teoría de Sturm. La técnica de Sturm, (ver E. Isaacson y H. B. Keller [74]), permite determinar, bajo condiciones adecuadas, los ceros de una función contenidos en un intervalo real. En primer lugar, definimos lo que se conoce con el nombre de *sucesión de Sturm*.

Definición 1.3.5 ([74]) *Dado $m \geq 0$ un número entero, se consideran f_0, f_1, $\ldots$, f_m, $m+1$ funciones reales y continuas sobre el intervalo real $[a,b]$, con $f_m \in C^1([a,b])$. Se dice que $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ forman una "sucesión de Sturm" en el intervalo $[a,b]$, si se verifican las siguientes condiciones:*

a) f_m no tiene ceros múltiples en $[a,b]$.

b) $f_0(x)$ no se anula en $[a,b]$.

c) Si para algún $r \in [a,b]$ y algún j tal que $0 < j < m$ se tiene $f_j(r) = 0$, entonces $f_{j-1}(r).f_{j+1}(r) < 0$.

d) Si para algún $r \in [a,b]$, se tiene que $f_m(r) = 0$, entonces $f'_m(r)f_{m-1}(r) < 0$.

Nota. La tesis de la condición d) puede sustituirse por $f'_m(r)f_{m-1}(r) > 0$.

En esta situación, se puede determinar el número de raíces reales de la función f_m contenidas en un intervalo real, tal y como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 1.3.6 (Teorema de Sturm)([74]) *Si $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ es una sucesión de Sturm en $[a,b]$ y si a y b no son ceros de f_m, entonces el número de raíces reales en (a,b) de la función f_m es igual a la diferencia en valor absoluto entre el número de cambios de signo que hay en $\{f_0(a), f_1(a), \ldots, f_m(a)\}$ y $\{f_0(b), f_1(b), \ldots, f_m(b)\}$.*

Dicha técnica de Sturm puede utilizarse para estudiar las propiedades de localización y separación de los ceros de los polinomios ortogonales. La clave para la aplicación de este método reside en la relación de recurrencia a tres términos que verifican estos polinomios. De hecho, el carácter positivo del coeficiente del polinomio de grado inferior, que aparece en dicha relación de recurrencia, garantiza que una sucesión de polinomios ortogonales mónicos constituye una sucesión de Sturm.

1.4 Polinomios ortogonales clásicos

En esta sección, estudiamos un caso particular de polinomios ortogonales: los llamados *polinomios ortogonales clásicos*. Designamos por SPOM clásica a una sucesión de polinomios ortogonales mónicos clásicos.

En primer lugar recordaremos unas operaciones conocidas para los funcionales de momentos, (ver, por ejemplo, [108]).

Definición 1.4.1 *Sea u un funcional de momentos y $\phi \in I\!\!P$. Definimos la "multiplicación a la izquierda" del polinomio ϕ por el funcional u como el funcional, que denotaremos por ϕu, tal que*

$$\langle \phi u, f \rangle = \langle u, \phi f \rangle, \quad f \in I\!\!P.$$

Definición 1.4.2 *En las condiciones anteriores, decimos que Du es la "derivada" (distribucional) del funcional u, si es un funcional que verifica*

$$\langle Du, f \rangle = -\langle u, f' \rangle, \quad f \in I\!\!P.$$

1.4.1 Definición de una SPOM clásica

Definición 1.4.3 *Una familia de polinomios ortogonales se dice "clásica" si el funcional de momentos al cual está asociada, u, verifica una ecuación distribucional del tipo*

$$D(\phi u) = \psi u,$$

donde ϕ y ψ son polinomios de grados $gr(\phi) \leq 2$ y $gr(\psi) = 1$.

Se puede probar que, salvo un cambio de variable lineal, los polinomios ortogonales clásicos coinciden con alguna de las cuatro familias siguientes: Hermite, Laguerre, Jacobi o Bessel.

La clasificación de los polinomios ortogonales clásicos se debe a las distintas formas canónicas que adopta el polinomio ϕ. En este sentido, tenemos :

Caso Hermite: $\phi(x) = 1$.
Caso Laguerre: $\phi(x) = x$.
Caso Jacobi: $\phi(x) = 1 - x^2$.
Caso Bessel: $\phi(x) = x^2$.

Si el funcional de momentos u es definido positivo, a partir de la proposición 1.2.8, sabemos que u admite una representación integral. Si, además, el funcional u es clásico, se verifica que

$$\langle u, p\rangle = \int_I p\rho(x)dx, \quad p \in \mathbb{P},$$

donde ρ es una función peso, no negativa e integrable, con soporte en un intervalo real, I, que verifica una ecuación diferencial distribucional de tipo Pearson:

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\psi(x) - \phi'(x)}{\phi(x)},$$

con ψ y ϕ polinomios de grados respectivos $gr(\psi) = 1$ y $gr(\phi) = p \leq 2$. En este caso, decimos que ρ es una ***función peso clásica***.

Observemos que, la ecuación diferencial de tipo Pearson puede escribirse:

$$D(\phi\rho) = \psi\rho.$$

En la siguiente tabla damos las expresiones explícitas de los polinomios ϕ y ψ asociados a cada funcional clásico, junto con las restricciones necesarias para garantizar la regularidad del funcional.

Nombre	$\phi(x)$	$\psi(x)$	Restricciones
Hermite	1	$-2x$	
Laguerre	x	$(\alpha+1)-x$	$\alpha \neq -1,-2,-3,\ldots$
Jacobi	$1-x^2$	$(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta+2)x$	$\alpha,\beta,\alpha+\beta+1 \neq -1,-2,-3,\ldots$
Bessel	x^2	$(\alpha+2)x+2$	$\alpha \neq -2,-3,-4,\ldots$

A continuación, mostramos en otra tabla los intervalos de definición y las funciones peso de estas familias de polinomios, junto con las restricciones en los parámetros, necesarias en los casos Laguerre y Jacobi, para garantizar el carácter definido positivo del funcional de momentos asociado u. Recordemos que el funcional de Bessel es no definido positivo.

Nombre	$P_n(x)$	I	$\rho(x)$	Restricciones
Hermite	$H_n(x)$	$(-\infty,+\infty)$	e^{-x^2}	
Laguerre	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$[0,+\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$	$\alpha > -1$
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$[-1,1]$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$\alpha,\beta > -1$

1.4.2 Caracterizaciones de una SPOM clásica

En el apartado anterior, hemos visto que una SPOM clásica es aquella cuyo funcional de momentos asociado verifica la ecuación diferencial distribucional

$$D(\phi u) = \psi u, \quad gr(\phi) \leq 2, \quad gr(\psi) = 1.$$

Usando esta definición es posible demostrar las siguientes caracterizaciones:

Proposición 1.4.4 (Relación de estructura) *Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una SPOM asociada al funcional de momentos u. Se verifica que la SPOM es clásica si y solamente si se cumple la relación*

$$\phi(x)P'_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x),$$

donde ϕ es un polinomio de grado 2, a lo más, y a_n, b_n y c_n son constantes reales con $c_n \neq 0$. (Ver T. S. Chihara [38], p. 152.)

La siguiente proposición nos dice que las derivadas de polinomios ortogonales clásicos vuelven a formar una SPOM.

Proposición 1.4.5 *(W. Hahn [71]) Se considera u un funcional de momentos y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ su correspondiente SPOM asociada. Se define*

$$Q_n(x) := \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}. \tag{1.4.1}$$

Entonces, $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es clásica si y sólo si $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una SPOM asociada al funcional de momentos v

$$v = \phi u.$$

Como consecuencia de este resultado, tenemos que $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es también una SPOM clásica, del mismo tipo que $\{P_n\}_{n\geq 0}$, ya que v verifica la ecuación distribucional:

$$D(\phi v) = (\psi + \phi')v.$$

Aplicando este mismo razonamiento, deducimos que la sucesión de derivadas k–ésimas de $\{P_n\}_{n\geq 0}$ normalizada, es decir,

$$\left\{\frac{P^{(k)}_{n+k}}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\right\}_{n\geq 0},$$

es también clásica del mismo tipo y su funcional de momentos correspondiente, w, cumple

$$D(\phi w) = (\psi + k\phi')w.$$

El siguiente resultado, establecido por F. Marcellán, A. Branquinho y J. Petronilho en [108], nos dá una caracterización mediante una relación entre un polinomio de la SPOM $\{P_n\}_{n\geq 0}$ y tres polinomios consecutivos de la SPOM $\{Q_n\}_{n\geq 0}$, definida en la anterior proposición. Nótese el paralelismo con la relación obtenida en la proposición 1.4.4.

Proposición 1.4.6 *Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una SPOM asociada al funcional de momentos u. Se tiene que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es clásica si y solamente si se verifica que*

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) + s_n Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

donde el polinomio Q_n viene definido por (1.4.1).

La caracterización siguiente nos dice que una SPOM clásica es la única sucesión de polinomios ortogonales que verifica una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinómicos independientes de n.

Proposición 1.4.7 *(S. Bochner [24]) Si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una SPOM asociada al funcional de momentos u, entonces $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es clásica si y sólo si, para cada $n \geq 0$, existe una constante $\lambda_n \in C$ tal que el polinomio P_n verifica la ecuación diferencial*

$$\phi y'' + \psi y' = \lambda_n y,$$

donde $\lambda_n = n\left[\psi' + \frac{n-1}{2}\phi''\right], \quad n \geq 0.$

La última caracterización que presentamos, establecida por F. Tricomi en [159], nos muestra que las únicas sucesiones de polinomios que verifican una fórmula de Rodrigues son las clásicas.

Proposición 1.4.8 *Dado u un funcional de momentos y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una SPOM asociada a u, se cumple que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es clásica si y solamente si el polinomio P_n, para cada $n \geq 0$, verifica la fórmula de Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\phi^n(x)\rho(x)], \quad n \geq 0,$$

donde C_n es una constante que depende de n.

1.5 Funcionales lineales semiclásicos

La definición de SPO clásica a partir de la ecuación diferencial distribucional que verifica el funcional de momentos asociado, sugiere una generalización inmediata. De este modo, se buscan funcionales lineales que cumplan una ecuación diferencial distribucional en la forma:

$$D(\phi u) = \psi u,$$

pero sin imponer restricciones en los grados de los polinomios, es decir,

$$gr(\phi) = p \geq 0, \qquad gr(\psi) = q \geq 1.$$

Debemos introducir previamente el concepto de *par admisible* para un par de polinomios ϕ y ψ.

Definición 1.5.1 *Sean ϕ y ψ dos polinomios tales que $gr(\phi) = p \geq 0$ y $gr(\psi) = q \geq 1$. Supongamos que:*

$$\phi(x) = a_p x^p + \ldots, \qquad \psi(x) = b_q x^q + \ldots.$$

Decimos que (ϕ, ψ) es un "par admisible" si se verifica una de las siguientes condiciones:

i) $p - 1 \neq q$,

ii) $p - 1 = q$, *entonces* $na_p + b_q \neq 0, \quad n \geq 0$.

Al ser $q \geq 1$, existe un número natural $s \geq 0$ tal que:

$$1 + s = \max\{p - 1, q\}. \tag{1.5.1}$$

Entonces, decimos que (ϕ, ψ) es un *par s-admisible.*

Definición 1.5.2 *(P. Maroni [128]) Un funcional regular u se dice que es un "funcional semiclásico" si existen dos polinomios ϕ, y ψ, tales que (ϕ, ψ) sea un par admisible, y u verifica la ecuación diferencial distribucional:*

$$D(\phi u) = \psi u. \tag{1.5.2}$$

A la correspondiente SPOM asociada a u se le llama SPOM semiclásica.

Nota 1. La definición anterior implica que $gr(\psi) \geq 1$.

Nota 2. El polinomio ϕ no puede ser nulo, ya que u perdería la condición de regularidad.

Nota 3. Es necesario exigir que (ϕ, ψ) sea un par admisible para asegurar el carácter regular del funcional u.

Es claro que la relación (1.5.2) no tiene por qué ser minimal, en el sentido de que los polinomios ϕ y ψ no son únicos. En efecto, si φ es un polinomio de grado t, se tiene:

$$D(\varphi\phi u) = (\varphi'\phi + \varphi\psi)u,$$

con lo que se obtiene una nueva relación del tipo (1.5.2). Además,

$$\begin{aligned} &gr(\varphi\phi) = p + t, \\ &gr(\varphi'\phi + \varphi\psi) = \max\{p + t - 1, q + t\}. \end{aligned}$$

De esta forma, se deduce a partir de (1.5.1) que:

$$1+s+t=\max\{gr(\varphi\phi)-1, gr(\varphi'\phi+\varphi\psi)\}.$$

Así, si u es un funcional semiclásico verificando (1.5.1) y (1.5.2), entonces, para cada $t\in\mathbb{N}$, existe un número natural $\tilde{s}=s+t\geq s$, y un par $\tilde{s}$-admisible $(\tilde{\phi},\tilde{\psi})$, tal que

$$D(\tilde{\phi}u)=\tilde{\psi}u.$$

En este sentido, se debe introducir la noción de *clase* para un funcional lineal semiclásico.

Definición 1.5.3 *Sea u un funcional lineal semiclásico. Se llama "clase de u" al mínimo del conjunto de los enteros s tales que:*

$$1+s=\max\{gr(\phi)-1, gr(\psi)\},$$

donde (ϕ,ψ) recorre el conjunto de pares admisibles para los cuales se verifica $D(\phi u)=\psi u$.

Si u es un funcional lineal semiclásico de clase s, a la correspondiente SPOM se le llama SPOM semiclásica de clase s. Obsérvese que todo funcional clásico es semiclásico de clase 0.

Se puede probar que el par admisible (ϕ,ψ) que realiza la clase de u es único salvo constante multiplicativa.

El concepto de funcional lineal semiclásico puede introducirse de otra forma: bien atendiendo a la *fórmula de estructura* que verifica la SPOM $\{P_n\}_{n\geq 0}$ asociada a u, ya que son las únicas SPOM que verifican una relación del tipo:

$$\phi(x)P'_{n+1}(x)=\sum_{k=n-s}^{n+gr(\phi)}\lambda_k^{(n)}P_k(x),\quad n\geq s,\quad \lambda_{n-s}^{(n)}\neq 0, \tag{1.5.3}$$

o bien atendiendo al hecho de que la familia de polinomios mónicos definidos por:

$$\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}=\left\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\right\}_{n\geq 0},$$

son cuasi-ortogonales con respecto al funcional lineal ϕu.

La siguiente proposición nos muestra que los tres conceptos son equivalentes:

Proposición 1.5.4 *Sea u un funcional lineal regular, y notemos por $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la correspondiente SPOM. Son equivalentes:*
i) Existe un par s-admisible (ϕ,ψ), tal que u es solución de la ecuación diferencial distribucional:

$$D(\phi u)=\psi u,\quad gr(\phi)=p,\quad gr(\psi)=q\geq 1,$$

donde $s=\max\{gr(\phi)-2, gr(\psi)-1\}$.

ii) Existen dos números enteros $s \geq 0$ y $0 \leq p \leq s+2$, y existe un polinomio ϕ de grado p tales que:

$$\phi(x)P'_{n+1}(x) = \sum_{k=n-s}^{n+p} \lambda_k^{(n)} P_k(x), \quad n \geq s, \quad \lambda_{n-s}^{(n)} \neq 0.$$

iii) Existe un funcional lineal $\tilde{u}$ tal que la familia de polinomios $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$ es cuasi-ortogonal de orden s respecto a $\tilde{u}$, es decir, se verifica:

$$\langle \tilde{u}, \tilde{P}_{n-s}\tilde{P}_n \rangle \neq 0, \quad n \geq s+1,$$

donde $\tilde{u} = \phi u$.

1.6 Derivadas de orden superior de funcionales semiclásicos

Dado u un funcional lineal semiclásico, existen dos polinomios ϕ y ψ tales que

$$D(\phi u) = \psi u. \tag{1.6.1}$$

Si se deriva esta ecuación, se deduce

$$\phi D u = (\psi - \phi')u. \tag{1.6.2}$$

Esta última ecuación se puede generalizar para derivadas de órdenes superiores del funcional u, como mostramos a continuación, (ver F. Marcellán, T. E. Pérez, M. A Piñar, A. Ronveaux [120]).

Proposición 1.6.1 *Sea u un funcional lineal semiclásico, entonces para cada valor de $n \geq 0$, se tiene que*

$$\phi^n(x)D^n u = \psi(x,n)u, \tag{1.6.3}$$

donde los polinomios $\psi(x,n)$ se definen recursivamente en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= 1, \\ \psi(x,n) &= \phi(x)\psi'(x,n-1) + \psi(x,n-1)[\psi(x) - n\phi'(x)], \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Demostración:

Demostramos el resultado por inducción sobre n. En los casos $n=0$ y $n=1$ se verifica el resultado trivialmente. Supongamos que la ecuación (1.6.3) es cierta para $n-1$, esto es, el funcional lineal u verifica que

$$\phi^{n-1}(x)D^{n-1}u = \psi(x,n-1)u, \tag{1.6.5}$$

donde

$$\psi(x,n-1)=\phi(x)\psi'(x,n-2)+\psi(x,n-2)\left[\psi(x)-(n-1)\phi'(x)\right].$$

Si derivamos en (1.6.5), obtenemos

$$(n-1)\phi^{n-2}(x)\phi'(x)D^{n-1}u+\phi^{n-1}(x)D^{n}u=\psi'(x,n-1)u+\psi(x,n-1)Du,$$

y despejando $\phi^{n-1}(x)D^n u$, queda

$$\phi^{n-1}(x)D^{n}u=\psi'(x,n-1)u+\psi(x,n-1)Du-(n-1)\phi^{n-2}(x)\phi'(x)D^{n-1}u.$$

Si, ahora, multiplicamos ambos miembros de la identidad anterior por el polinomio $\phi(x)$, usando la hipótesis de inducción, llegamos a

$$\begin{aligned}\phi^{n}(x)D^{n}u &= \phi(x)\psi'(x,n-1)u+\psi(x,n-1)\phi(x)Du-(n-1)\phi^{n-1}(x)\phi'(x)D^{n-1}u=\\ &= \left[\phi(x)\psi'(x,n-1)+\psi(x,n-1)[\psi(x,1)-(n-1)\phi'(x)]\right]u=\\ &= \left[\phi(x)\psi'(x,n-1)+\psi(x,n-1)[\psi(x)-n\phi'(x)]\right]u. \quad \square\end{aligned}$$

Lema 1.6.2 *([120]) En las condiciones anteriores, se verifica que*

$$gr\,(\psi(x,n))\le n(s+1),\qquad n\ge 0,$$

donde s denota la clase del funcional u definida en (1.5.3).

Demostración:

Denotamos por $p=gr\,(\phi)\ge 0$, y $q=gr\,(\psi)\ge 1$. A partir de la definición de funcionales lineales semiclásicos, deducimos, para cada valor de n

$$gr\,(\psi-n\phi')\le \max\{q,p-1\}=s+1.$$

Demostramos el resultado usando un razonamiento inductivo. En los dos primeros casos, tenemos que

$$\begin{aligned}gr\,(\psi(x,0)) &= gr(1)=0,\\ gr\,(\psi(x,1)) &= gr\,(\psi-\phi')\le s+1.\end{aligned}$$

Suponemos que es cierta la tesis para el caso $n-1$, y lo demostramos para n. Teniendo en cuenta la expresión del polinomio $\psi(x,n)$

$$\psi(x,n)=\phi(x)\psi'(x,n-1)+\psi(x,n-1)[\psi(x)-n\phi'(x)],$$

y, usando la definición de clase de un funcional lineal, se verifica que

$$gr\,(\psi(x,n))\le \max\{p+(n-1)(s+1)-1,(n-1)(s+1)+s+1\}\le n(s+1). \quad \square$$

Observamos que la relación (1.6.2) adopta la forma $\phi(x)Du = \psi(x,1)u$. Derivando $(n-1)$ veces en esta fórmula, obtenemos

$$\phi(x)D^n u = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i}D^{n-1-i}\psi(x,1) - \binom{n-1}{i-1}D^{n-i}\phi(x)\right]D^i u, \tag{1.6.6}$$

para $n \geq 1$, donde $\binom{n}{m} = 0$ cuando $m < 0$. Multiplicando por ϕ^{n-1} y usando (1.6.3), deducimos otra expresión recursiva para los polinomios $\psi(x,n)$:

$$\begin{aligned}\psi(x,n) &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i}D^{n-1-i}\psi(x,1) - \binom{n-1}{i-1}D^{n-i}\phi(x)\right]\phi^{n-1-i}(x)\psi(x,i),\end{aligned} \tag{1.6.7}$$

válida para $n \geq 1$.

Lema 1.6.3 *Sean h, $j \geq 0$ dos números enteros y u un funcional semiclásico dado. Se verifica*

$$\phi^{h-j}(x)\psi(x,j)D^h u = \psi(x,h)D^j u, \quad h \geq j. \tag{1.6.8}$$

Demostración:

Si consideramos $h = j$, la relación (1.6.8) se verifica trivialmente. Supongamos que $h > j$. Para demostrar (1.6.8) lo hacemos por inducción sobre h. En el caso $h = 1$ y $j = 0$, queda

$$\phi(x)Du = \psi(x,1)u,$$

resultado que es cierto por (1.6.3). Suponemos que se verifica para $h-1$, es decir, u verifica

$$\phi^{h-1-j}(x)\psi(x,j)D^{h-1}u = \psi(x,h-1)D^j u, \quad h-1 \geq j \geq 0, \tag{1.6.9}$$

y lo probamos para h.

i) Para $0 \leq j < h-1$, derivando en (1.6.9) y multiplicando por el polinomio ϕ, obtenemos que

$$\begin{aligned}\phi^{h-j}(x)\psi(x,j)D^h u &= \phi(x)\psi'(x,h-1)D^j u + \phi(x)\psi(x,h-1)D^{j+1}u - \\ &\quad -(h-1-j)\phi'(x)\phi^{h-1-j}(x)\psi(x,j)D^{h-1}u - \phi^{h-j}(x)\psi'(x,j)D^{h-1}u = \\ &= \phi(x)\psi'(x,h-1)D^j u + \phi(x)\psi(x,h-1)D^{j+1}u - \\ &\quad - \left[(h-1-j)\phi'(x)\psi(x,j) + \phi(x)\psi'(x,j)\right]\phi^{h-1-j}(x)D^{h-1}u,\end{aligned}$$

y, si tenemos en cuenta la relación recurrente (1.6.4) y la hipótesis de inducción, concluimos que

$$
\begin{aligned}
\phi^{h-j}(x)\psi(x,j)D^h u &= \phi(x)\psi'(x,h-1)D^j u+\phi(x)\psi(x,h-1)D^{j+1}u- \\
&- \left[(h-1-j)\phi'(x)\psi(x,j)+\psi(x,j+1)-\right. \\
&- \left.\psi(x,j)\left[\psi(x)-(j+1)\phi'(x)\right]\right]\phi^{h-1-j}(x)D^{h-1}u= \\
&= \phi(x)\psi'(x,h-1)D^j u+\phi(x)\psi(x,h-1)D^{j+1}u- \\
&- \left[\psi(x,j+1)-\psi(x,j)\left[\psi(x)-h\phi'(x)\right]\right]\phi^{h-1-j}(x)D^{h-1}u= \\
&= \phi(x)\psi'(x,h-1)D^j u+\phi(x)\psi(x,h-1)D^{j+1}u- \\
&-\psi(x,j+1)\phi^{h-1-j}(x)D^{h-1}u+\left[\psi(x)-h\phi'(x)\right]\psi(x,h-1)D^j u= \\
&= \left\{\phi(x)\psi'(x,h-1)+\psi(x,h-1)\left[\psi(x)-h\phi'(x)\right]\right\}D^j u+ \\
&+\phi(x)\psi(x,h-1)D^{j+1}u-\psi(x,j+1)\phi^{h-1-j}(x)D^{h-1}u= \\
&= \psi(x,h)D^j u+\phi(x)\psi(x,h-1)D^{j+1}u-\phi(x)\psi(x,h-1)D^{j+1}u= \\
&= \psi(x,h)D^j u.
\end{aligned}
$$

ii) Si $j=h-1$, multiplicando (1.6.6) por $\psi(x,h-1)$, usando la hipótesis de inducción y teniendo en cuenta la relación (1.6.7), deducimos el resultado. □

Corolario 1.6.4 *Dados los números enteros $0\le h,j\le K$, y u un funcional semiclásico, se tiene que*

$$\phi^{K-j}(x)\psi(x,j)D^h u=\phi^{K-h}(x)\psi(x,h)D^j u. \tag{1.6.10}$$

Demostración:

Multiplicando la relación (1.6.8) por el polinomio ϕ^{K-h}, llegamos al resultado. □

En los siguientes resultados deducimos la expresión del polinomio $\psi(x,n)$ de la ecuación (1.6.3), para cada caso clásico definido positivo.

Proposición 1.6.5 *Sea u el funcional clásico de Hermite. Entonces u verifica la ecuación*

$$D^n u=\psi(x,n)u,\quad x\in\mathbb{R},\quad n\ge 0,$$

donde los polinomios $\psi(x,n)$ son

$$\psi(x,n)=(-1)^n n!\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{(2x)^{n-2m}}{(n-2m)!}.$$

Demostración:

Cuando u es el funcional de Hermite, tenemos que $\phi(x)=1$ y $\psi(x)=-2x$, con lo que sustituyendo en la ecuación (1.6.3) junto con (1.6.4), obtenemos que

$$D^n u=\psi(x,n)u,\quad n\ge 0,$$

donde $\psi(x,n) = \psi'(x,n-1) - 2x\psi(x,n-1)$. En este sentido, basta probar que el polinomio $\psi(x,n)$ es

$$\psi(x,n) = (-1)^n n! \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(2x)^{n-2m}}{(n-2m)!}.$$

Demostramos el resultado por el método de inducción. Si $n = 0$, se verifica el resultado trivialmente. Para $n = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(x,1) &= \psi'(x,0) - 2x\psi(x,0) = -2x = \\ &= -\sum_{m=0}^{[\frac{1}{2}]} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(2x)^{1-2m}}{(1-2m)!}, \end{aligned}$$

luego también se verifica. Suponemos que para $n-1$ el resultado es cierto y lo probamos para n. A partir de la hipótesis de inducción, deducimos que

$$\begin{aligned} \psi(x,n) &= \psi'(x,n-1) - 2x\psi(x,n-1) = \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)! \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{2(n-1-2m)}{(n-1-2m)!} (2x)^{n-2-2m} - \\ &+ (-1)^n (n-1)! \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(2x)^{n-2m}}{(n-1-2m)!} = \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)! \left[\sum_{m=0}^{[\frac{n-2}{2}]} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{2}{(n-2-2m)!} (2x)^{n-2-2m} - \right. \\ &- \left. \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(2x)^{n-2m}}{(n-1-2m)!} \right] = \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)! \left[\sum_{m=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{2}{(n-2m)!} (2x)^{n-2m} - \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(2x)^{n-2m}}{(n-1-2m)!} \right] = \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)! \left[-\frac{(2x)^n}{(n-1)!} + \sum_{m=1}^{[\frac{n}{2}]-1} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(2x)^{n-2m}}{(n-2m-1)!} \left[\frac{1}{m} + \frac{2}{n-2m} \right] + \right. \\ &+ \left. n \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}}{[\frac{n}{2}]!} \frac{(2x)^{n-2[\frac{n}{2}]}}{(n-2[\frac{n}{2}])!} \right] = \end{aligned}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\left[-\frac{(2x)^n}{(n-1)!}+n\sum_{m=1}^{[\frac{n}{2}]-1}\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\frac{(2x)^{n-2m}}{(n-2m)!}+n\frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}}{[\frac{n}{2}]!}\frac{(2x)^{n-2[\frac{n}{2}]}}{(n-2\left[\frac{n}{2}\right])!}\right]$$

$$= (-1)^n n!\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{(2x)^{n-2m}}{(n-2m)!}. \quad \square$$

Proposición 1.6.6 *Dado u el funcional clásico de Laguerre, se tiene que*

$$x^n D^n u = \psi(x,n)u, \quad x\in[0,+\infty), \quad n\geq 0,$$

con $\psi(x,n)$ los polinomios siguientes

$$\psi(x,n)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(\alpha+1-(n-m))_{n-m}(-x)^m, \quad \alpha>-1.$$

donde $(c)_n$ denota el símbolo de Pochhammer definido como

$$(c)_0=1, \quad (c)_n=c(c+1)\ldots(c+n-1), \quad c\in\mathbb{R}, \quad \forall n\geq 1, \tag{1.6.11}$$

y $\binom{a}{n}$ es el coeficiente binomial generalizado:

$$\binom{a}{n}=\frac{(a-n+1)_n}{n!}. \tag{1.6.12}$$

Demostración:

Si tenemos en cuenta que, cuando u es el funcional de Laguerre, los polinomios ϕ y ψ son, respectivamente, x y $\alpha+1-x$, entonces la ecuación (1.6.3) junto con la expresión recurrente (1.6.4) queda

$$x^n D^n u=\psi(x,n)u, \quad n\geq 0,$$

con $\psi(x,n)=x\psi'(x,n-1)+(\alpha+1-n-x)\psi(x,n-1)$. De esta forma, lo único que hay que probar es que el polinomio $\psi(x,n)$ se expresa como

$$\psi(x,n)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(\alpha+1-(n-m))_{n-m}(-x)^m, \quad \alpha>-1.$$

Para ello, demostramos el resultado por inducción. En el caso $n=0$, se verifica el resultado trivialmente. Suponemos que para $n-1$ el resultado es cierto y lo probaremos para n. Usando la hipótesis de inducción, deducimos que

$$\psi(x,n)=x\psi'(x,n-1)+(\alpha+1-n-x)\psi(x,n-1)=$$

$$= x\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(\alpha+1-(n-1-m))_{n-1-m}(-m)(-x)^{m-1}+$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (\alpha+1-n-x)\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(\alpha+1-(n-1-m))_{n-1-m}(-x)^m = \\
&= \quad \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(\alpha+1-(n-1-m))_{n-1-m}(\alpha+1-n+m)(-1)^m x^m + \\
&+ \quad \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(\alpha+1-(n-1-m))_{n-1-m}(-1)^{m+1}x^{m+1} = \\
&= \quad \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(\alpha+1-(n-m))_{n-m}(-1)^m x^m + \\
&+ \quad \sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}(\alpha+1-(n-m))_{n-m}(-1)^m x^m = \\
&= \quad \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(\alpha+1-(n-m))_{n-m}(-x)^m. \quad \square
\end{aligned}
$$

Proposición 1.6.7 *Se considera la ecuación (1.6.3) con u el funcional clásico de Jacobi. Se verifica que*

$$(1-x^2)^n D^n u = \psi(x,n)u, \quad x\in[-1,1], \quad n\geq 0,$$

donde $\psi(x,n)$ son los polinomios definidos como

$$\psi(x,n) = n!\sum_{m=0}^{n}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-m}, \quad \alpha,\beta>-1.$$

Demostración:

En este caso, los polinomios son $\phi(x)=1-x^2$ y $\psi(x)=\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$ y, por lo tanto, la ecuación (1.6.3) y la expresión (1.6.4) las escribimos como

$$(1-x^2)^n D^n u = \psi(x,n)u, \quad n\geq 0,$$

donde

$$\psi(x,n) = (1-x^2)\psi'(x,n-1)+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2-2n)x]\psi(x,n-1).$$

Para demostrar que el polinomio $\psi(x,n)$ es

$$\psi(x,n) = n!\sum_{m=0}^{n}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-m},$$

lo hacemos por inducción. Cuando $n=0$, el resultado se verifica trivialmente. Suponemos cierto el resultado para $n-1$ y, lo vemos para n. Teniendo en cuenta la hipótesis de inducción, concluimos que

$$
\begin{aligned}
\psi(x,n) &= (1-x^2)(n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m D\left[(1+x)^m(1-x)^{n-1-m}\right]+\\
&+\ [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2-2n)x](n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m\times\\
&\quad (1+x)^m(1-x)^{n-1-m}=\\
&=\ (1-x^2)(n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m\left[m(1+x)^{m-1}(1-x)^{n-1-m}-\right.\\
&-\ \left.(n-m-1)(1+x)^m(1-x)^{n-2-m}\right]+\\
&+\ [2(\beta+1-n)-(\alpha+\beta+2-2n)(1+x)](n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m\times\\
&\quad (1+x)^m(1-x)^{n-1-m}=\\
&=\ (n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}m\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-m}+\\
&+\ (n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}(\alpha-m+\beta+1-n)\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^{m+1}\times\\
&\quad (1+x)^{m+1}(1-x)^{n-1-m}+\\
&+\ 2(\beta+1-n)(n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-1-m}=\\
&=\ (n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}m\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-m}+\\
&+\ (n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}(\alpha-m)\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^{m+1}(1+x)^{m+1}(1-x)^{n-1-m}+\\
&+\ (\beta+1-n)(1-x)(n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-1-m}=\\
&=\ (n-1)!\sum_{m=0}^{n-1}(\beta+1-n+m)\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-1-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-m}+\\
&+\ (n-1)!\sum_{m=1}^{n}(\alpha+1-m)\binom{\alpha}{m-1}\binom{\beta}{n-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-m}=\\
&=\ n!\sum_{m=0}^{n}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n-m}(-1)^m(1+x)^m(1-x)^{n-m}.\ \square
\end{aligned}
$$

Resumimos, en la siguiente tabla, las expresiones de estos polinomios

Nombre	$\phi(x)$	$\psi(x,n)$
Hermite	1	$(-1)^n n! \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(2x)^{n-2m}}{(n-2m)!}$
Laguerre	x	$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (\alpha+1-(n-m))_{n-m}(-x)^m$
Jacobi	$1-x^2$	$n! \sum_{m=0}^{n} \binom{\alpha}{m} \binom{\beta}{n-m} (-1)^m (1+x)^m (1-x)^{n-m}$

Haciendo unos simples cálculos podemos demostrar que, en estos casos clásicos, el grado del polinomio $\psi(x,n)$ es siempre n, con la restricccción $\alpha+\beta \neq 0, 1, \ldots, n-1$, en el caso Jacobi.

Capítulo 2

Polinomios ortogonales asociados a un producto de Sobolev no diagonal con coeficientes polinomiales

2.1 Introducción

En este capítulo de la Memoria, se hace un estudio de los polinomios ortogonales asociados a un producto escalar de Sobolev no diagonal que, de forma general, se expresa como sigue

$$(f,g)_S^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle u_{m,k}, f^{(m)} g^{(k)} \rangle, \tag{2.1.1}$$

para cualesquiera dos polinomios f y g pertenecientes al espacio de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$, donde $K \geq 0$ es un número entero dado, y $u_{m,k}$ son funcionales lineales, para $m, k = 0, \ldots, K$.

El producto escalar de Sobolev no diagonal que se considera es el que se obtiene al escoger en (2.1.1) una familia particular de funcionales lineales $u_{m,k}$, para $m, k = 0, \ldots, K$. En concreto, dado u un funcional lineal semiclásico definido positivo, se toman los funcionales lineales $u_{m,k}$ como el producto de unos ciertos polinomios con coeficientes reales, $\lambda_{m,k}$, por el funcional u, para $m, k = 0, \ldots, K$, es decir,

$$u_{m,k} = \lambda_{m,k}(x) u, \tag{2.1.2}$$

donde $\lambda_{m,k}$ son polinomios reales, para $m, k = 0, \ldots, K$, verificando una serie de restricciones que hacen que la matriz polinómica

$$\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x) = (\lambda_{m,k}(x))_{m,k=0}^{K},$$

sea una matriz simétrica y definida positiva.

Los polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar de Sobolev aparecen por primera vez en 1947, en un trabajo pionero de Lewis [102]. En la década de los sesenta, varios autores como P. Althammer, E. A. Cohen, W. Gröbner, F. W. Schäfke, J. Brenner, ..., estudian casos particulares del producto escalar (2.1.1). (Ver [8], [40], [69], [155], [28].)

El primer trabajo sobre el estudio de productos escalares de Sobolev no diagonales de la forma (2.1.1), se debe a F.W. Schäfke y G. Wolf, quienes en [156] consideran $K = 1$ y un funcional lineal clásico u con restricciones sobre los polinomios de la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$, en el sentido de que el producto escalar de Sobolev se reduce a un producto escalar estándar cuando se integra por partes, y la constante de integración se anula.

En un trabajo de F. Marcellán, T. E. Pérez y M. A. Piñar ([118]), se considera el producto escalar de la forma:

$$(f,g)_S^{(1)} = \sum_{i=0}^{1} \langle u_i, f^{(i)} g^{(i)} \rangle, \tag{2.1.3}$$

donde u_0 y u_1 son funcionales lineales semiclasicos definidos positivos relacionados mediante una expresión de tipo racional. Para este producto escalar, estos autores estudian detalladamente los polinomios ortogonales de Sobolev cuando $u_0 = u_1$ es el funcional lineal asociado a la medida de Gegenbauer ([117]) o a la medida Laguerre–Sonine ([119]).

H.G. Meijer proporciona en [135] un ejemplo del producto (3), cuando $\{u_0, u_1\}$ forman un par coherente para $u_1 = u_0 = u$, donde $u = \frac{1}{x-\xi} x^\alpha e^{-x} dx + M\delta(\xi)$, con $\xi = 0$, $\alpha > 0$ y $M \geq 0$. En [138] establece la clasificación de todos los pares coherentes. En particular, estudia los pares coherentes en el caso Jacobi, considerando $u_1 = u_0 = u$, donde $u = \frac{1}{|x-\xi|}(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1} dx + M\delta(\xi)$, para $\alpha, \beta > 0$, $M \geq 0$ y $|\xi| \geq 1$. En ambos casos, la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$ es una matriz diagonal de la forma:

$$\Lambda^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} |x-\xi| & 0 \\ 0 & \phi(x) \end{pmatrix},$$

donde en el primer caso $\phi(x) = x$, y para el caso Jacobi $\phi(x) = 1 - x^2$. De este modo, los pares coherentes son un caso particular de los productos escalares de la forma (3).

Otro ejemplo de estos productos aparece en el caso en que $\{u_0, u_1\}$ forman un par coherente simétrico. T. E. Pérez demuestra en [144] que las componentes impares de los polinomios ortogonales asociados a $\{u_0, u_1\}$ verifican una relación de ortogonalidad Sobolev no diagonal.

El caso $K > 1$ es el menos tratado en la literatura, aunque se conocen algunos resultados. En un trabajo de P. Lesky ([101]) se estudia este producto escalar cuando la matriz $\Lambda^{(K)}(x)$ es una matriz diagonal y de coeficientes constantes y el funcional lineal u es el funcional asociado a la medida de Lebesgue.

En [96], K. H. Kwon y L. L. Littlejohn demuestran la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-k)}\}_{n\geq 0}$, para k un número entero positivo, con respecto a un producto escalar en el que aparecen deltas de Dirac y derivadas. Estos mismos autores, en [97], estudian los polinomios de Jacobi generalizados $\{P_n^{(-1,-1)}\}_{n\geq 0}$, y demuestran que son ortogonales con respecto a un producto escalar diagonal en el que intervienen deltas de Dirac y primera derivada.

Posteriormente, T. E. Pérez y M. A. Piñar obtienen, en [146], un producto escalar de Sobolev respecto del cual los polinomios de Laguerre, para cualquier valor real de α, son ortogonales. Además, en [147], deducen cómo se puede usar la ortogonalidad Sobolev para recuperar propiedades de los polinomios de Laguerre generalizados.

F. Marcellán, T. E. Pérez, M. A. Piñar y A. Ronveaux estudian en [120] un producto escalar de la forma (2.1.1) donde la matriz $\Lambda^{(K)}(x)$ es una matriz constante y diagonal. Los resultados que obtienen en este trabajo nos motiva una generalización al caso no diagonal.

En este sentido, este capítulo proporciona un marco común para el estudio de los polinomios que son ortogonales con respecto al producto escalar de Sobolev (2.1.1).

La estructura del capítulo es la siguiente. En la primera sección, se define el producto escalar de Sobolev (2.1.1), cuando los funcionales lineales $u_{m,k}$ que se consideran verifican (2.1.2), para u un funcional lineal semiclásico y $\lambda_{m,k}$ polinomios definidos sobre el espacio $\mathbb{P}$, verificando ciertas restricciones entre sí, con $m, k = 0, \ldots, K$.

En el siguiente apartado se introduce un operador lineal diferencial, que se denotará $\mathcal{F}^{(K)}$, definido sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales. Este operador permite representar el producto escalar de Sobolev en términos del producto escalar estándar, bajo ciertas restricciones. Además, se obtiene que dicho operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ es simétrico con respecto a este producto de Sobolev.

A partir de este operador lineal se deducen, en la siguiente sección, una serie de relaciones entre los polinomios ortogonales asociados al funcional lineal u y los polinomios ortogonales asociados a (2.1.1). A partir del carácter simétrico del operador $\mathcal{F}^{(K)}$, se establece una relación difero–diferencial que verifican los polinomios ortogonales de Sobolev, así como una ecuación diferencial de orden $2K+2$.

El capítulo se termina con una serie de ejemplos para el caso en que $K = 1$. En este apartado, estamos interesados en productos escalares de Sobolev no diagonales tales que el correspondiente operador lineal diferencial $\mathcal{F}^{(1)}$ no aumente el grado de los polinomios. Esta situación es muy interesante, ya que si $\mathcal{F}^{(1)}$ conserva el grado de estos polinomios, como una consecuencia de la relación difero–diferencial, se obtiene que los correspondientes polinomios ortogonales de Sobolev son las funciones propias del operador diferencial, esto es, estos polinomios verifican una ecuación diferencial de segundo orden.

Se obtienen condiciones necesarias para que el operador lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios y, en particular, se deduce que el polinomio $\lambda_{1,1}$, de la matriz polinómica $\Lambda^{(1)}(x)$, tiene que ser una constante y el funcional u ha de ser clásico.

2.2 Producto escalar de Sobolev continuo no diagonal

Sea $K \geq 0$ un número entero dado y u un funcional lineal semiclásico definido positivo. Dados dos polinomios, $f,\ g \in \mathbb{P}$, se define el producto escalar de Sobolev no diagonal en la forma siguiente

$$(f,g)_S^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle \lambda_{m,k}(x)u, f^{(m)}g^{(k)} \rangle, \tag{2.2.1}$$

donde $\lambda_{m,k}$ son polinomios reales, para $m, k = 0, \ldots K$, con $x \in I$, el conjunto soporte del funcional u. Estos polinomios deben verificar ciertas restricciones para obtener una forma bilineal simétrica y definida positiva.

De hecho, si se escribe el producto de Sobolev (2.2.1) en forma matricial, se obtiene

$$(f,g)_S^{(K)} = \langle u, (f,\ f',\ \ldots,\ f^{(K)}) \begin{pmatrix} \lambda_{0,0}(x) & \lambda_{0,1}(x) & \ldots & \lambda_{0,K}(x) \\ \lambda_{1,0}(x) & \lambda_{1,1}(x) & \ldots & \lambda_{1,K}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{K,0}(x) & \lambda_{K,1}(x) & \ldots & \lambda_{K,K}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g' \\ \vdots \\ g^{(K)} \end{pmatrix} \rangle,$$

y, si se denota por

$$\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0}(x) & \lambda_{0,1}(x) & \ldots & \lambda_{0,K}(x) \\ \lambda_{1,0}(x) & \lambda_{1,1}(x) & \ldots & \lambda_{1,K}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{K,0}(x) & \lambda_{K,1}(x) & \ldots & \lambda_{K,K}(x) \end{pmatrix},$$

se deduce que una condición suficiente para que (2.2.1) sea un producto escalar es que la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$ tiene que ser una matriz simétrica y definida positiva para $x \in I$.

En el caso en que $K = 0$ y $\lambda_{0,0}(x) = 1$, el producto escalar (2.2.1) es el producto escalar estándar definido para el funcional lineal semiclásico $\lambda_{0,0}(x)u$, es decir

$$(f,g) = (f,g)_S^{(0)} = \langle u, fg \rangle.$$

Notaremos por $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada al producto escalar de Sobolev (2.2.1), y diremos que $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una SPOM de Sobolev. La norma al cuadrado de un polinomio Q_n se representa por $\tilde{k}_n$, esto es,

$$\tilde{k}_n = (Q_n, Q_n)_S^{(K)}, \quad n \geq 0,$$

y, por definición de producto escalar, siempre $\tilde{k}_n > 0$.

2.3 El operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$

En este apartado, se define un operador lineal diferencial sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$, que notaremos $\mathcal{F}^{(K)}$. En primer lugar, se hace un estudio de este operador lineal, demostrándose a partir de su expresión explícita que, bajo ciertas restricciones, se puede obtener una representación del producto escalar de Sobolev, definido en (2.2.1), en términos del producto escalar estándar definido a partir del funcional lineal semiclásico u. Además, se demuestra que este operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ es simétrico con respecto al producto escalar de Sobolev (2.2.1).

La última parte del apartado, se dedica al estudio del grado del polinomio que se obtiene al aplicar el operador $\mathcal{F}^{(K)}$ a un polinomio cualquiera de grado n.

Dado u un funcional semiclásico definido positivo, notemos por $\phi(x) = a_p x^p + \ldots$, y $\psi(x) = b_q x^q + \ldots$, con $a_p \neq 0$ y $b_q \neq 0$, para $p \geq 0$ y $q \geq 1$, a los polinomios de la ecuación diferencial distribucional asociada a u:

$$D(\phi u) = \psi u, \tag{2.3.1}$$

y sea

$$s = \min\{\max\{p-2, q-1\}, \quad \forall(\phi,\psi) \quad \text{verificando} \quad (2.3.1)\},$$

la clase del funcional u. Denotemos por $\psi(x,n)$ a los polinomios definidos recursivamente por

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= 1, \\ \psi(x,n) &= \phi(x)\psi'(x,n-1) + \psi(x,n-1)[\psi(x) - n\phi'(x)], \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

con

$$gr\,(\psi(x,n)) \leq n(s+1), \quad n \geq 0. \tag{2.3.2}$$

Obviamente, estos polinomios verifican

$$\phi^n(x) D^n u = \psi(x,n) u, \tag{2.3.3}$$

(ver la proposición 1.6.1 y el lema 1.6.2).

Se define el operador diferencial lineal $\mathcal{F}^{(K)}$, para $K \geq 0$ un número entero dado, en la siguiente forma

$$\mathcal{F}^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} \lambda_{m,k}^{(m-i-j)}(x)\phi^{K-j}(x)\psi(x,j)D^{k+i}, \tag{2.3.4}$$

donde D denota el operador derivada y los polinomios ϕ y $\psi(x,n)$ son los definidos anteriormente en (2.3.3).

Nota 1. Si se considera, en el producto escalar de Sobolev (2.2.1), el caso en que $K = 1$, el funcional lineal u es un funcional clásico, y la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$ es una matriz diagonal de constantes entonces, el producto escalar (2.2.1) queda

$$(f,g)_S^{(1)} = \langle u, (\, f, \quad f'\,) \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & 0 \\ 0 & \lambda_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \rangle.$$

Para este producto escalar de Sobolev, el operador diferencial lineal asociado, $\mathcal{F}^{(1)}$, se escribe en la forma

$$\mathcal{F}^{(1)} = \lambda_{0,0}\phi(x)I - \lambda_{1,1}\left[\psi(x,1)D + \phi(x)D^2\right],$$

que es la expresión obtenida en [144], pág. 100.

Nota 2. Cuando se toma, en el producto escalar (2.2.1), la matriz polinómica $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$ como una matriz diagonal y constante, con $\lambda_{0,0}(x) = 1$, de (2.2.1) se tiene el siguiente producto escalar de Sobolev

$$(f,g)_S^{(K)} = \langle u, fg \rangle + \sum_{m=1}^{K} \langle \lambda_{m,m} u, f^{(m)} g^{(m)} \rangle, \forall f,g \in \mathbb{P},$$

cuyo operador diferencial asociado, $\mathcal{F}^{(K)}$, se expresa como

$$\mathcal{F}^{(K)} = \phi^K(x)I + \sum_{m=1}^{K} (-1)^m \lambda_{m,m} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \phi^{K-m+i}(x)\psi(x, m-i)D^{m+i}.$$

Es decir, se obtienen el producto escalar de Sobolev y el operador lineal asociado que estudian F. Marcellán, T. E. Pérez, M. A. Piñar y A. Ronveaux en [120].

Como ya se expuso en la proposición 1.2.8, si el funcional lineal u es definido positivo entonces existe una medida μ tal que

$$\langle u, f \rangle = \int_I f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in \mathbb{P}.$$

Supongamos que la medida μ asociada al funcional semiclásico u puede expresarse por medio de una función peso ρ, esto es, $d\mu(x) = \rho(x)dx$. En estas condiciones, el operador diferencial lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ admite una representación más compacta tal y como se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1 *En las condiciones anteriores, se tiene*

$$\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m D^m(\rho(x)\lambda_{m,k}(x)D^k). \tag{2.3.5}$$

Demostración:

Sea ρ la función peso asociada al funcional u, entonces ρ cumple la ecuación diferencial

$$\phi^j(x)D^j(\rho(x)) = \psi(x,j)\rho(x), \quad j \geq 0.$$

Despejando el polinomio $\psi(x,j)$, en la ecuación anterior, queda

$$\psi(x,j) = \frac{\phi^j(x)}{\rho(x)} D^j(\rho(x)),$$

y, sustituyéndolo en la expresión (2.3.4), se deduce que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(K)} &= \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} \lambda_{m,k}^{(m-i-j)}(x)\phi^{K-j}(x)\frac{\phi^j(x)}{\rho(x)} D^j(\rho(x))D^{k+i} = \\
&= \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} \lambda_{m,k}^{(m-i-j)}(x)D^j(\rho(x))D^{k+i}.
\end{aligned}$$

Si, ahora, se aplica dos veces la fórmula de Leibnitz, se llega a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(K)} &= \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} D^{m-i}\left(\lambda_{m,k}(x)\rho(x)\right) D^{k+i} = \\
&= \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m D^m \left(\rho(x)\lambda_{m,k}(x)D^k\right). \quad \square
\end{aligned}$$

A partir de la expresión (2.3.5), deducimos que, en este caso, el operador $\mathcal{F}^{(K)}$ se puede escribir en la forma matricial siguiente:

$$\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} \left(I, -D, \ldots, (-1)^K D^K \right) \mathbf{\Lambda}^{(K)}(x) \begin{pmatrix} \rho(x)I \\ \rho(x)D \\ \vdots \\ \rho(x)D^K \end{pmatrix}. \tag{2.3.6}$$

Nota. El operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ es un operador diferencial de orden $2K$, puesto que el polinomio $\lambda_{K,K}$ no es idénticamente cero, lo cual se deduce del carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$.

El siguiente resultado que se demuestra fácilmente por inducción, proporciona una relación entre las derivadas de dos funciones.

Lema 2.3.2 *Sean f y g dos funciones tales que f sea m veces diferenciable y g sea $(m+k)$ veces diferenciable, para m y k dos números enteros positivos. Entonces*

$$f^{(m)}g^{(k)} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} \left(fg^{(k+i)}\right)^{(m-i)}.$$

En la siguiente proposición, se muestra cómo el operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ permite obtener una representación para el producto escalar de Sobolev (2.2.1), en términos de las derivadas sucesivas del funcional lineal semiclásico u.

Proposición 2.3.3 *Sean f y g dos polinomios cualesquiera de $\mathbb{P}$. Para $0 \leq h \leq K$, se tiene*

$$(\phi^{K-h}(x)\psi(x,h)f,g)_S^{(K)} = \langle D^h u, f\mathcal{F}^{(K)}g\rangle.$$

Demostración:
A partir de la ecuación (2.3.3), el lema 2.3.2, la fórmula de Leibnitz y la relación (1.6.10), se obtiene

$$\begin{aligned}
(\phi^{K-h}(x)\psi(x,h)f,g)_S^{(K)} &= \sum_{m,k=0}^{K} \langle \lambda_{m,k}(x)u, \left(\phi^{K-h}(x)\psi(x,h)f\right)^{(m)} g^{(k)}\rangle = \\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} \langle \lambda_{m,k}(x)u, \left(\phi^{K-h}(x)\psi(x,h)fg^{(k+i)}\right)^{(m-i)}\rangle = \\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\sum_{i=0}^{m}(-1)^m \binom{m}{i} \langle D^{m-i}\left(\lambda_{m,k}(x)u\right), \phi^{K-h}(x)\psi(x,h)fg^{(k+i)}\rangle = \\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\sum_{i=0}^{m}(-1)^m \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j} \langle \lambda_{m,k}^{(m-i-j)}(x)D^j u, \phi^{K-h}(x)\psi(x,h)fg^{(k+i)}\rangle = \\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\sum_{i=0}^{m}(-1)^m \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j} \langle \phi^{K-h}(x)\psi(x,h)D^j u, f\lambda_{m,k}^{(m-i-j)}(x)g^{(k+i)}\rangle = \\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\sum_{i=0}^{m}(-1)^m \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j} \langle D^h u, f\lambda_{m,k}^{(m-i-j)}(x)\phi^{K-j}(x)\psi(x,j)g^{(k+i)}\rangle = \\
&= \langle D^h u, f\mathcal{F}^{(K)}g\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.4 *El operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ es simétrico con respecto al producto escalar de Sobolev definido en (2.2.1), es decir*

$$(\mathcal{F}^{(K)}f,g)_S^{(K)} = (f,\mathcal{F}^{(K)}g)_S^{(K)}.$$

Demostración:
De la proposición 2.3.3 y del lema 2.3.2, se deduce

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{(K)}f,g)_S^{(K)} &= \sum_{m,k=0}^{K}\sum_{i=0}^{m}(-1)^m\binom{m}{i}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j}\left(\lambda_{m,k}^{(m-i-j)}(x)\phi^{K-j}(x)\psi(x,j)f^{(k+i)},g\right)_S^{(K)}\\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\sum_{i=0}^{m}(-1)^m\binom{m}{i}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j}\langle D^j u,\lambda_{m,k}^{(m-i-j)}(x)f^{(k+i)}\mathcal{F}^{(K)}g\rangle =\\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\sum_{i=0}^{m}(-1)^m\binom{m}{i}\langle D^{m-i}(\lambda_{m,k}(x)u),f^{(k+i)}\mathcal{F}^{(K)}g\rangle =\\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\langle\lambda_{m,k}(x)u,\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\left(f^{(k+i)}\mathcal{F}^{(K)}g\right)^{(m-i)}\rangle =\\
&= \sum_{m,k=0}^{K}\langle\lambda_{m,k}(x)u,f^{(k)}\left(\mathcal{F}^{(K)}g\right)^{(m)}\rangle =\\
&= (f,\mathcal{F}^{(K)}g)_S^{(K)}.\quad\square
\end{aligned}
$$

A continuación, estudiaremos el grado del polinomio que se obtiene al aplicar el operador diferencial lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ a cualquier polinomio de grado n, con $n \geq 0$.

Proposición 2.3.5 *Para cada valor de $n \geq 0$, se tiene*

$$gr\left(\mathcal{F}^{(K)}x^n\right) \leq n + \max_{0\leq m,k\leq K}\{gr(\lambda_{m,k}) + p(K-m) + m - k + ms\},$$

donde $p = gr(\phi) \geq 0$, $q = gr(\psi) \geq 1$ y $s = \max\{q-1, p-2\}$.

Demostración:

Usando la desigualdad (2.3.2), de la expresión del operador lineal aplicado al polinomio x^n, se deduce que

$$
\begin{aligned}
gr\left(\mathcal{F}^{(K)}x^n\right) &\leq \max_{\substack{0\leq j\leq m-i,\\ 0\leq i\leq m\\ 0\leq m,k\leq K}}\{gr(\lambda_{m,k}) - m + i + j + (K-j)p + j(1+s) + n - k - i\}\\
&\leq n + \max_{\substack{0\leq j\leq m-i,\\ 0\leq i\leq m\\ 0\leq m,k\leq K}}\{gr(\lambda_{m,k}) - m - k + Kp + j(2-p+s)\}\\
&\leq n + \max_{\substack{0\leq i\leq m\\ 0\leq m,k\leq K}}\{gr(\lambda_{m,k}) - m - k + Kp + (m-i)(2-p+s)\}\\
&\leq n + \max_{0\leq m,k\leq K}\{gr(\lambda_{m,k}) - k + Kp + m(1+s-p)\},
\end{aligned}
$$

con lo que se tiene el resultado. $\square$

A pesar de la desigualdad que aparece en la proposición anterior, el operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ nunca reduce el grado de todos los polinomios.

Proposición 2.3.6 *Existe $n_0 \geq 0$ tal que*

$$gr\left(\mathcal{F}^{(K)}x^{n_0}\right) \geq n_0.$$

Demostración:

Supongamos que el operador reduce el grado de los polinomios, esto es, $gr\left(\mathcal{F}^{(K)}x^n\right) < n$, $\forall n$. Entonces, se puede escribir el polinomio $\mathcal{F}^{(K)}Q_n$ en términos de los polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_i\}_{i=0,1,\ldots,n-1}$, en la siguiente forma

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i}Q_i(x),$$

donde los coeficientes se calculan como sigue

$$a_{n,i} = \frac{\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n, Q_i\right)_S^{(K)}}{(Q_i, Q_i)_S^{(K)}}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

A partir de la simetría del operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ y de la ortogonalidad de los polinomios Q_n se obtiene

$$a_{n,i} = \frac{\left(Q_n, \mathcal{F}^{(K)}Q_i\right)_S^{(K)}}{(Q_i, Q_i)_S^{(K)}} = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

y, entonces, $\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = 0, \quad \forall n \geq 0$, lo cual es absurdo. □

Como se puede apreciar a partir de las proposiciones 2.3.5 y 2.3.6 y la expresión explícita de $\mathcal{F}^{(K)}$, este operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$, generalmente, aumenta el grado de los polinomios en una cantidad fija de unidades. De este modo, existe un número entero no negativo, que notaremos por t, tal que

$$\mathcal{F}^{(K)}x^n = F(n)x^{n+t} + \ldots,$$

donde $F(n)$ representa el coeficiente líder del polinomio $\mathcal{F}^{(K)}x^n$. Nótese que este coeficiente puede ser cero para ciertos valores de n.

2.4 Propiedades algebraicas de los polinomios ortogonales de Sobolev

Como consecuencia directa de la proposición 2.3.3, que relaciona el producto escalar de Sobolev no diagonal, $(.,.)_S^{(K)}$, con el producto escalar estándar definido a partir del funcional lineal semiclásico u, se puede establecer una relación entre los polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_n\}_n$, asociados al producto escalar $(.,.)_S^{(K)}$, y los polinomios ortogonales semiclásicos $\{P_n\}_n$, asociados al funcional lineal u.

Proposición 2.4.1 *Se verifican las siguientes propiedades*

$$i)\quad \phi^K(x)P_n(x) = \sum_{i=n-t}^{n+Kp} \alpha_{n,i}Q_i(x), \quad n \geq t, \tag{2.4.1}$$

donde

$$\alpha_{n,n+Kp} = a_p^K, \quad \alpha_{n,n-t} = F(n-t)\frac{k_n}{\tilde{k}_{n-t}}.$$

$$ii)\quad \mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=n-Kp}^{n+t} \beta_{n,i}P_i(x), \quad n \geq Kp, \tag{2.4.2}$$

donde

$$\beta_{n,n+t} = F(n), \quad \beta_{n,n-Kp} = a_p^K \frac{\tilde{k}_n}{k_{n-Kp}}.$$

Demostración:
i) Escribiendo el polinomio $\phi^K P_n$ en términos de los polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_i\}_{i\geq 0}$, se obtiene

$$\phi^K(x)P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+Kp} \alpha_{n,i}Q_i(x).$$

Usando la proposición 2.3.3 en el cálculo de los coeficientes, se llega a

$$\alpha_{n,i} = \frac{\left(\phi^K P_n, Q_i\right)_S^{(K)}}{(Q_i, Q_i)_S^{(K)}} = \frac{\langle u, P_n\mathcal{F}^{(K)}Q_i\rangle}{\tilde{k}_i},$$

y, de la ortogonalidad de los polinomios semiclásicos $\{P_n\}_n$, se deduce que $\alpha_{n,i} = 0$, para $0 \leq i \leq n-t-1$.

ii) Si se expresa el polinomio $\mathcal{F}^{(K)}Q_n$ en términos de los polinomios $\{P_i\}_{i\geq 0}$, se tiene

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n+t} \beta_{n,i}P_i(x).$$

De nuevo, los coeficientes pueden calcularse a partir de la proposición 2.3.3 y, por tanto,

$$\beta_{n,i} = \frac{\langle u, P_i\mathcal{F}^{(K)}Q_n\rangle}{\langle u, P_iP_i\rangle} = \frac{\left(\phi^K P_i, Q_n\right)_S^{(K)}}{k_i}.$$

Finalmente, usando la ortogonalidad de los polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_n\}_n$, se obtiene que $\beta_{n,i} = 0$, para $0 \leq i \leq n - Kp - 1$, con lo que se llega al resultado. □

A partir del carácter simétrico del operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ se deduce una relación difero–diferencial para los polinomios ortogonales de Sobolev. De esta forma, se pueden relacionar entre sí los polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_n\}_n$, a pesar de que en esta relación interviene un operador que involucra derivadas.

Proposición 2.4.2 (Relación Difero–Diferencial) *Para cada valor de $n \geq t$, se verifica la siguiente relación entre los polinomios ortogonales de Sobolev*

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=n-t}^{n+t} \gamma_{n,i}Q_i(x), \tag{2.4.3}$$

donde

$$\gamma_{n,n+t} = F(n), \quad \gamma_{n,n-t} = F(n-t)\frac{\tilde{k}_n}{\tilde{k}_{n-t}}.$$

Demostración:

Escribimos el polinomio $\mathcal{F}^{(K)}Q_n$ en términos de los polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_i\}_{i\geq 0}$:

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n+t} \gamma_{n,i}Q_i(x),$$

y, del teorema 2.3.4, se obtiene

$$\gamma_{n,i} = \frac{\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n, Q_i\right)_S^{(K)}}{(Q_i, Q_i)_S^{(K)}} = \frac{\left(Q_n, \mathcal{F}^{(K)}Q_i\right)_S^{(K)}}{\tilde{k}_i}.$$

De la ortogonalidad de los polinomios Q_n con respecto al producto escalar de Sobolev, se deduce que $\gamma_{n,i} = 0$ para $0 \leq i \leq n - t - 1$, con lo que se tiene el resultado. □

En la siguiente proposición, para cada polinomio ortogonal de Sobolev Q_n, se deduce una ecuación diferencial de orden $2K + 2$ cuyos coeficientes son polinomios dependientes de n, pero con grados fijos.

Proposición 2.4.3 *El polinomio ortogonal de Sobolev de grado n, Q_n, verifica la siguiente ecuación diferencial de orden $2K + 2$*

$$A(x,n)D^2\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) + B(x,n)D\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) + C(x,n)\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = 0,$$

donde $A(x,n)$, $B(x,n)$ y $C(x,n)$ son polinomios reales dependientes de n y con grados fijos.

Demostración:
Usando la relación de recurrencia a tres términos (1.3.1) para la sucesión de los polinomios ortogonales semiclásicos $\{P_n\}_{n\geq 0}$, la ecuación (2.4.2) puede escribirse en la forma siguiente

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = M_0(x,n)P_n(x) + N_0(x,n)P_{n-1}(x), \tag{2.4.4}$$

donde $M_0(x,n)$ y $N_0(x,n)$ son polinomios que dependen de n.

Tomando derivadas en (2.4.4) y multiplicando por el polinomio ϕ, se obtiene

$$\begin{aligned}\phi(x)D\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) &= \phi(x)\left[M_0'(x,n)P_n(x) + M_0(x,n)P_n'(x) + \right.\\ &+ \left. N_0'(x,n)P_{n-1}(x) + N_0(x,n)P_{n-1}'(x)\right].\end{aligned}$$

Si se usa, en esta expresión, la relación de estructura (1.5.3) para los polinomios ortogonales semiclásicos $\{P_n\}_n$:

$$\phi(x)P_n'(x) = \sum_{k=n-s-1}^{n+p-1} \delta_{n,k}P_k(x), \tag{2.4.5}$$

y, de nuevo, la relación de recurrencia a tres términos (1.3.1), se tiene

$$\phi(x)D\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) = M_1(x,n)P_n(x) + N_1(x,n)P_{n-1}(x), \tag{2.4.6}$$

donde $M_1(x,n)$ y $N_1(x,n)$ son polinomios dependientes de n. Volviendo a tomar derivadas en (2.4.6), multiplicando por el polinomio ϕ, y aplicando la relación de estructura (2.4.5), queda

$$\phi(x)D\left(\phi(x)D\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right)\right) = M_2(x,n)P_n(x) + N_2(x,n)P_{n-1}(x), \tag{2.4.7}$$

donde $M_2(x,n)$ y $N_2(x,n)$ son polinomios reales que dependen de n.

Si se impone la compatibilidad entre las ecuaciones (2.4.4), (2.4.6) y (2.4.7), se deduce que el siguiente determinante tiene que anularse

$$\begin{vmatrix} \mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) & M_0(x,n) & N_0(x,n) \\ \phi(x)D\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) & M_1(x,n) & N_1(x,n) \\ \phi(x)D\left(\phi(x)D\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right)\right) & M_2(x,n) & N_2(x,n) \end{vmatrix} = 0,$$

y, desarrollando el determinante se llega a la ecuación diferencial de orden $2K+2$ que verifican los polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_n\}_n$. □

Nota. Este resultado nos muestra que existe un operador, $\mathcal{S}$ de orden $2K+2$ que puede expresarse como composición del operador diferencial lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ y un operador diferencial de segundo orden, $\mathcal{M}$. Es decir, existe un operador $\mathcal{S}$ con $\mathcal{S} = \mathcal{M}\mathcal{F}^{(K)}$, tal que $\mathcal{S}Q_n(x) = 0$.

2.5 Algunos ejemplos con $K = 1$

En esta sección del capítulo, se consideran algunos ejemplos para el producto escalar de Sobolev no diagonal definido en (2.2.1) cuando $K = 1$. Este es el caso más frecuente que aparece en la literatura. En primer lugar, se obtiene la expresión del producto escalar de Sobolev en este caso particular, así como la expresión del operador $\mathcal{F}^{(1)}$ asociado a este producto escalar.

Posteriormente, se obtiene una condición necesaria en términos de los elementos de la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$ para que este operador diferencial no aumente el grado de los polinomios. Dicha situación es interesante porque si $\mathcal{F}^{(1)}$ conserva el grado de estos polinomios, entonces los correspondientes polinomios ortogonales de Sobolev verifican una ecuación diferencial de segundo orden. Además, nos permite dotar de propiedades de ortogonalidad Sobolev a ciertas familias de polinomios ya conocidas.

En el caso en que $K = 1$, el producto escalar de Sobolev (2.2.1) se expresa como

$$(f,g)_S^{(1)} = \langle u, (f,\ f') \begin{pmatrix} \lambda_{0,0}(x) & \lambda_{0,1}(x) \\ \lambda_{1,0}(x) & \lambda_{1,1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \rangle, \tag{2.5.1}$$

para cualesquiera polinomios f y g pertenecientes al espacio $\mathbb{P}$, con u un funcional lineal semiclásico.

De esta forma, la correspondiente matriz polinómica asociada al producto escalar (2.5.1), es

$$\Lambda^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0}(x) & \lambda_{0,1}(x) \\ \lambda_{1,0}(x) & \lambda_{1,1}(x) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz ha de ser una matriz simétrica y definida positiva, esto es, los elementos de $\Lambda^{(1)}(x)$ han de verificar las siguientes condiciones

$$\lambda_{0,1}(x) = \lambda_{1,0}(x), \quad \lambda_{0,0}(x) > 0, \quad \lambda_{0,0}(x)\lambda_{1,1}(x) - \lambda_{0,1}^2(x) > 0, \quad x \in I. \tag{2.5.2}$$

El operador diferencial lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ asociado al producto escalar de Sobolev no diagonal (2.5.1) viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)} &= \left\{\phi(x)\left[\lambda_{0,0}(x) - \lambda_{0,1}'(x)\right] - \psi(x,1)\lambda_{0,1}(x)\right\} I - \\ &- \left\{\phi(x)\lambda_{1,1}'(x) + \psi(x,1)\lambda_{1,1}(x)\right\} D - \phi(x)\lambda_{1,1}(x)D^2, \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

donde, como es habitual, I representa el operador identidad, D el operador derivada primera y D^2 representa el operador derivada segunda.

Proposición 2.5.1 *Si el operador diferencial lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ conserva el grado de los polinomios, entonces el funcional lineal u es clásico. Además, en este caso, el polinomio $\lambda_{1,1}$ es una constante.*

Demostración:

Si se quiere un operador lineal, $\mathcal{F}^{(1)}$, que conserve el grado de los polinomios a los que se aplica, de la expresión de este operador dada en (2.5.3), se deducen las siguientes tres desigualdades

$$\begin{aligned} gr\left\{\phi\left[\lambda_{0,0}-\lambda'_{0,1}\right]-\psi(x,1)\lambda_{0,1}\right\} &= 0, & (2.5.4)\\ gr\left\{\phi\lambda'_{1,1}+\psi(x,1)\lambda_{1,1}\right\} &\leq 1, & (2.5.5)\\ gr\left\{\phi\lambda_{1,1}\right\} &\leq 2. & (2.5.6)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (2.5.6), aparecen tres casos posibles a estudiar:

(1) Supongamos que $gr\{\lambda_{1,1}\} = 0$ luego, a partir de (2.5.6), se tiene que $gr\{\phi\} \leq 2$. Si sustituimos en (2.5.5), obtenemos que

$$gr\left\{\phi(x)\lambda'_{1,1}(x)+\psi(x,1)\lambda_{1,1}(x)\right\} = gr\{\psi(x,1)\} \leq 1,$$

y, por lo tanto, el funcional u es clásico.

(2) Si $gr\{\lambda_{1,1}\} = 1$ entonces, de (2.5.6), tenemos que $gr\{\phi\} \leq 1$. De esta forma, la desigualdad (2.5.5) queda $gr\{\psi(x,1)\} = 0$, es decir, $\psi(x) = \phi'(x) + C =$ constante. Pero esto contradice la regularidad del funcional u, ya que si u es regular entonces $gr\{\psi\} \geq 1$.

(3) Cuando $gr\{\lambda_{1,1}\} = 2$, teniendo en cuenta (2.5.6), deducimos que $gr\{\phi\} = 0$. Si imponemos que $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado, de (2.5.5) tenemos que $\psi(x,1) = 0$, lo cual vuelve a contradecir el carácter regular de u. $\square$

Se puede comprobar que el recíproco de la proposición 2.5.1 no es cierto, es decir, si se toma, en el producto escalar definido en (2.5.1), el funcional lineal u como un funcional clásico y el polinomio $\lambda_{1,1}(x) = \lambda_{1,1}$ constante, entonces el operador lineal asociado $\mathcal{F}^{(1)}$ puede aumentar el grado de los polinomios.

Como contraejemplo, consideremos el funcional clásico de Hermite y la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ siguiente

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} x^2+2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que, para el funcional de Hermite los polinomios $\phi(x)$ y $\psi(x,1)$ de la ecuación (2.3.3) son, respectivamente, 1 y $-2x$, la expresión (2.5.3) del operador lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ se expresa, en este caso, como

$$\mathcal{F}^{(1)} = \left\{x^2+2x+2\right\}I + 2xD - D^2,$$

y, si se aplica al polinomio x^n, se obtiene

$$\mathcal{F}^{(1)}x^n = x^{n+2} + 2x^{n+1} + 2(n+1)x^n - n(n-1)x^{n-2},$$

de donde, se concluye que el grado del polinomio $\mathcal{F}^{(1)}x^n$ es $n+2$.

Sin embargo, a pesar de este hecho, en cada uno de los casos clásicos es posible dar condiciones sobre los polinomios de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ que hagan que el operador diferencial lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios. Tomaremos el polinomio $\lambda_{1,1}(x) = \lambda_{1,1}$ como una constante.

De esta forma, si queremos que $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios, entonces la expresión (2.5.3) la podemos escribir como

$$\mathcal{F}^{(1)} = C_1 I - \psi(x,1)\lambda_{1,1}D - \phi(x)\lambda_{1,1}D^2, \tag{2.5.7}$$

donde $C_1 = \left\{\phi(x)\left[\lambda_{0,0}(x) - \lambda'_{0,1}(x)\right] - \psi(x,1)\lambda_{0,1}(x)\right\}$.

Proposición 2.5.2 *Si $\mathcal{F}^{(1)}$ conserva el grado, los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar (2.5.1), que notaremos por $\{Q_n\}_n$, verifican la ecuación diferencial de segundo orden siguiente:*

$$\phi(x)Q''_n(x) + \psi(x,1)Q'_n(x) - n(b_1 + a_2(n-1))Q_n(x) = 0, \tag{2.5.8}$$

donde $\psi(x,1) = b_1x + b_0$ y $\phi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Demostración:

Aplicando el operador $\mathcal{F}^{(1)}$ al polinomio Q_n, de (2.5.7), obtenemos que

$$\mathcal{F}^{(1)}Q_n(x) = C_1Q_n(x) - \psi(x,1)\lambda_{1,1}Q'_n(x) - \phi(x)\lambda_{1,1}Q''_n(x). \tag{2.5.9}$$

Por otra parte, de la relación difero–diferencial (2.4.3) para $K = 1$ y $t = 0$, se deduce que

$$\mathcal{F}^{(1)}Q_n(x) = \left[C_1 - \lambda_{1,1}n(b_1 + a_2(n-1))\right]Q_n(x). \tag{2.5.10}$$

Igualando las ecuaciones (2.5.9) y (2.5.10) y eliminando la constante $\lambda_{1,1}$, resulta que

$$\phi(x)Q''_n(x) + \psi(x,1)Q'_n(x) - n(b_1 + a_2(n-1))Q_n(x) = 0. \quad \square$$

Corolario 2.5.3 *Se tiene*

i) Si u es el funcional de Hermite en el producto escalar (2.5.1), entonces los polinomios ortogonales con respecto a (2.5.1) son los polinomios clásicos de Hermite.

ii) Cuando u es el funcional de Laguerre en (2.5.1) con parámetro $\alpha > -1$, los polinomios ortogonales asociados son los polinomios generalizados de Laguerre $\{L_n^{(\alpha-1)}\}_n$.

iii) Sea u el funcional clásico de Jacobi con parámetros $\alpha, \beta > -1$. Los polinomios ortogonales con respecto a (2.5.1) son los polinomios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}\}_n$.

Demostración:
i) Se considera u el funcional clásico de Hermite. En este caso, los polinomios de la ecuación diferencial distribucional (2.3.3) son $\phi(x) = 1$ y $\psi(x,1) = -2x$, con $x \in (-\infty,+\infty)$. Si sustituimos estos polinomios en la ecuación diferencial (2.5.8), tenemos

$$Q_n''(x) - 2xQ_n'(x) + 2nQ_n(x) = 0,$$

es decir, los polinomios Q_n verifican la misma ecuación diferencial de segundo orden que los polinomios clásicos de Hermite y, por lo tanto, $Q_n(x) = H_n(x)$.

ii) Para u el funcional de Laguerre, sabemos que $\phi(x) = x$ y $\psi(x,1) = \alpha - x$, con $x \in [0,+\infty)$, con lo que la ecuación (2.5.8) queda

$$xQ_n''(x) + (\alpha - x)Q_n'(x) + nQ_n(x) = 0.$$

Por ser esta ecuación la ecuación diferencial de segundo orden que verifican los polinomios generalizados de Laguerre $\{L_n^{(\alpha-1)}\}_n$, concluimos que $Q_n(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x)$.

iii) Si u es el funcional de Jacobi, entonces $\phi(x) = 1 - x^2$ y $\psi(x,1) = (\beta - \alpha) - (\alpha + \beta)x$, para $x \in [-1,1]$, y, por tanto, la ecuación (2.5.8) se escribe como:

$$(1 - x^2)Q_n'' + [(\beta - \alpha) - (\alpha + \beta)x]Q_n' + n(\alpha + \beta + n - 1)Q_n = 0.$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden es la ecuación que verifican los polinomios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}\}_n$, luego $Q_n(x) = P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$. $\square$

A continuación estudiaremos cada caso clásico por separado. Daremos condiciones sobre los polinomios de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ para que $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado, y daremos la expresión explícita de este operador.

2.5.1 El caso Hermite

Como es bien conocido, en este caso los polinomios de la ecuación diferencial distribucional (2.3.3) son $\phi(x) = 1$ y $\psi(x) = -2x$, con $x \in (-\infty,+\infty)$.

La expresión del operador lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ asociado al producto escalar (2.5.1) es

$$\mathcal{F}^{(1)} = \left\{\lambda_{0,0}(x) - \lambda_{0,1}'(x) + 2x\lambda_{0,1}(x)\right\} I + 2x\lambda_{1,1}D - \lambda_{1,1}D^2. \tag{2.5.11}$$

Si se quiere que el operador $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios, de (2.5.11), se deduce que una condición necesaria es que se verifique la siguiente relación entre los polinomios $\lambda_{0,0}$ y $\lambda_{0,1}$:

$$gr\left(\lambda_{0,0}(x) - \lambda_{0,1}'(x) + 2x\lambda_{0,1}(x)\right) = 0. \tag{2.5.12}$$

(a) Una posible elección de los polinomios de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$, para obtener un operador lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ que verifique la igualdad (2.5.12), es

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & 0 \\ 0 & \lambda_{1,1} \end{pmatrix},$$

con $\lambda_{0,0}$ y $\lambda_{1,1}$ constantes positivas para garantizar el carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$.

(b) Otra elección, puede ser

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 2x^2+1 & -x \\ -x & \lambda_{1,1} \end{pmatrix},$$

con $\lambda_{1,1} > \frac{1}{2}$ para que la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ sea definida positiva.

A partir del apartado i) del corolario 2.5.3 deducimos que, en cualquier caso, la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev vuelve a ser la sucesión clásica de Hermite.

2.5.2 El caso Laguerre

Cuando u es el funcional lineal de Laguerre, los polinomios de la ecuación diferencial distribucional son, respectivamente, $\phi(x) = x$ y $\psi(x,1) = \alpha - x$, con $\alpha > -1$ y $x \in [0, +\infty)$.

En este caso, el operador lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ se expresa como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)} &= \left\{x\left[\lambda_{0,0}(x) - \lambda'_{0,1}(x)\right] - (\alpha - x)\lambda_{0,1}(x)\right\} I - \\ &- (\alpha - x)\lambda_{1,1} D - x\lambda_{1,1} D^2. \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Si se quiere que $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios, es necesario que los elementos de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ verifiquen

$$gr\left(x\left[\lambda_{0,0}(x) - \lambda'_{0,1}(x)\right] - (\alpha - x)\lambda_{0,1}(x)\right) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$x\lambda_{0,0}(x) + (x - \alpha)\lambda_{0,1}(x) - x\lambda'_{0,1}(x) = \text{constante}. \tag{2.5.14}$$

Como

$$\begin{aligned} gr\left(x\left[\lambda_{0,0}(x) + \lambda_{0,1}(x)\right]\right) &= 1 + gr\left(\lambda_{0,0} + \lambda_{0,1}\right), \\ gr\left(-x\lambda'_{0,1}(x) - \alpha\lambda_{0,1}(x)\right) &= gr\left(\lambda_{0,1}\right), \end{aligned}$$

se tiene que $1 + gr\left(\lambda_{0,0} + \lambda_{0,1}\right) > gr\left(\lambda_{0,1}\right)$, y de (2.5.14), queda

$$gr\left(\lambda_{0,0}\right) = gr\left(\lambda_{0,1}\right), \tag{2.5.15}$$

y, además, el coeficiente líder del polinomio $\lambda_{0,0}$ tiene que ser igual a menos el coeficiente líder de $\lambda_{0,1}$.

Por otra parte, para que la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$ sea definida positiva, se ha de cumplir que

$$\lambda_{0,0}(x) > 0, \quad \lambda_{0,0}(x)\lambda_{1,1} - \lambda_{0,1}^2(x) > 0, \quad x \in [0, +\infty),$$

de donde la única posibilidad es que $gr(\lambda_{0,0}) = 0$, es decir, la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$ ha de ser una matriz constante de la forma

$$\Lambda^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & -\lambda_{0,0} \\ -\lambda_{0,0} & \lambda_{1,1} \end{pmatrix},$$

con $\lambda_{1,1} > \lambda_{0,0} > 0$, para que $\Lambda^{(1)}(x)$ sea definida positiva.

Teniendo en cuenta ii) del corolario 2.5.3, se verifica que los polinomios de Sobolev Q_n ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f, g)_S^{(1)} = \langle u, (\, f, \;\; f' \,) \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & -\lambda_{0,0} \\ -\lambda_{0,0} & \lambda_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \rangle,$$

son los polinomios generalizados de Laguerre $L_n^{(\alpha-1)}$, (ver [146] y [147]).

2.5.3 El caso Jacobi

Se considera, a continuación, como funcional lineal u el funcional clásico de Jacobi.

Los polinomios de la ecuación diferencial distribucional (2.3.3) son $\phi(x) = 1 - x^2$, y $\psi(x, 1) = (\beta - \alpha) - (\alpha + \beta)x$, con α, $\beta > -1$, y $x \in [-1, 1]$.

Si se reemplazan las relaciones anteriores en la expresión (2.5.3) del operador lineal $\mathcal{F}^{(1)}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)} &= \left\{(1 - x^2)\left[\lambda_{0,0}(x) - \lambda_{0,1}'(x)\right] - [(\beta - \alpha) - (\alpha + \beta)x]\lambda_{0,1}(x)\right\} I - \\ &- [(\beta - \alpha) - (\alpha + \beta)x]\lambda_{1,1} D - (1 - x^2)\lambda_{1,1} D^2. \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

Para obtener un operador $\mathcal{F}^{(1)}$ que conserve el grado de los polinomios, es necesario distinguir dos casos: que bien $\alpha + \beta$ se anule o bien que sea distinto de cero.

(A) Si $\underline{\alpha + \beta = 0}$, entonces el polinomio $\psi(x, 1)$ es 2β, con lo que sustituyendo en (2.5.16) queda

$$\mathcal{F}^{(1)} = \left\{(1 - x^2)\left[\lambda_{0,0}(x) - \lambda_{0,1}'(x)\right] - 2\beta\lambda_{0,1}(x)\right\} I - 2\beta\lambda_{1,1} D - (1 - x^2)\lambda_{1,1} D^2.$$

Para que $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado necesitamos que

$$gr\left\{(1 - x^2)\left[\lambda_{0,0}(x) - \lambda_{0,1}'(x)\right] - 2\beta\lambda_{0,1}(x)\right\} = 0. \tag{2.5.17}$$

De esta forma, aparecen dos casos a estudiar:

(A.1) Cuando $\underline{\beta \neq 0}$, teniendo en cuenta (2.5.17), se ha de cumplir que

$$2 + gr\left\{\lambda_{0,0}(x) - \lambda'_{0,1}(x)\right\} = gr\left\{\lambda_{0,1}\right\},$$

es decir, como mínimo el grado del polinomio $\lambda_{0,1}$ tiene que ser dos. Si suponemos que $gr\{\lambda_{0,1}\} = 2$, de (2.5.17), deducimos que los polinomios $\lambda_{0,0}$ y $\lambda_{0,1}$ tienen que ser de la forma

$$\lambda_{0,0}(x) = a_1 x - a_1\beta, \quad \lambda_{0,1}(x) = \frac{a_1}{2}x^2 + b_0, \quad a_1, b_0 \in \mathbb{R}.$$

Si, ahora, imponemos el carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$, llegamos a que o bien $\beta < -1$ o bien $\alpha < -1$. En ambos casos se tiene una contradicción y, por lo tanto, en este caso, no es posible encontrar polinomios de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ tales que el operador conserve el grado.

(A.2) Para $\underline{\beta = 0}$, obtenemos que $\psi(x,1) = 0$, de donde usando (2.5.17), tenemos que la única posibilidad es que $\lambda_{0,0}(x) - \lambda'_{0,1}(x) = 0$. El caso más sencillo es considerar el polinomio $\lambda_{0,0}(x) = \lambda_{0,0}$ como una constante positiva y $\lambda_{0,1}$ como el polinomio de grado uno

$$\lambda_{0,1}(x) = \lambda_{0,0}x + b_0,$$

donde b_0 es un número real. Así la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$, se escribe como

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & \lambda_{0,0}x + b_0 \\ \lambda_{0,0}x + b_0 & \lambda_{1,1} \end{pmatrix} = \lambda_{0,0}\begin{pmatrix} 1 & x + \tilde{b}_0 \\ x + \tilde{b}_0 & \tilde{\lambda}_{1,1} \end{pmatrix},$$

con $\tilde{b}_0 = \dfrac{b_0}{\lambda_{0,0}}$ y $\tilde{\lambda}_{1,1} = \dfrac{\lambda_{1,1}}{\lambda_{0,0}}$.

Si se impone el carácter definido positivo de la matriz, entonces es necesario que $\lambda_{0,0} > 0$ y

$$\tilde{\lambda}_{1,1} > \left(x + \tilde{b}_0\right)^2, \quad x \in [-1,1].$$

Luego, hay que buscar $\tilde{\lambda}_{1,1}$ tal que sea una cota superior en todo el intervalo $[-1,1]$ de una parábola que tenga una raíz doble en $-\tilde{b}_0$. De este modo, fijado $\tilde{b}_0 \in \mathbb{R}$, si se llama $p(x) = \left(x + \tilde{b}_0\right)^2$, entonces el máximo de la parábola p en $[-1,1]$ será $p(-1)$ ó bien $p(1)$ y, por lo tanto, es posible encontrar $\tilde{\lambda}_{1,1}$ verificando que

$$\tilde{\lambda}_{1,1} > \max\left\{\left(\tilde{b}_0 - 1\right)^2, \left(\tilde{b}_0 + 1\right)^2\right\},$$

esto es, para que la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ sea definida positiva ha de cumplirse que $\lambda_{0,0} > 0$ y

$$\lambda_{1,1} > \lambda_{0,0}\max\left\{\left(\tilde{b}_0 - 1\right)^2, \left(\tilde{b}_0 + 1\right)^2\right\}.$$

Finalmente, de iii) del corolario 2.5.3 se deduce que los polinomios ortogonales de Sobolev asociados al producto escalar

$$(f,g)_S^{(1)} = \lambda_{0,0}\int_{-1}^{1}(\, f,\ \ f'\,)\begin{pmatrix} 1 & x+\tilde{b}_0 \\ x+\tilde{b}_0 & \tilde{\lambda}_{1,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ g'\end{pmatrix}dx, \qquad (2.5.18)$$

son los ***polinomios generalizados de Jacobi*** (ver [158], p. 63),$\{P_n^{(-1,-1)}\}_{n\geq 0}$, definidos mediante las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} P_0^{(-1,-1)}(x) &= 1, \quad P_1^{(-1,-1)}(x) = x-\tilde{b}_0, \\ P_n^{(-1,-1)}(x) &= \binom{2n-2}{n}^{-1}\sum_{m=0}^{n}\binom{n-1}{m}\binom{n-1}{n-m}(x+1)^m(x-1)^{n-m}, \quad n\geq 2. \end{aligned}$$

Nota. El producto escalar definido en (2.5.18) es el mismo producto escalar obtenido por K. H. Kwon y L. L. Littlejohn en [97]. En efecto, desarrollando la expresión (2.5.18), queda

$$\begin{aligned} (f,g)_S^{(1)} &= \lambda_{0,0}\int_{-1}^{1}(\, f,\ \ f'\,)\begin{pmatrix} 1 & x+\tilde{b}_0 \\ x+\tilde{b}_0 & \tilde{\lambda}_{1,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ g'\end{pmatrix}dx = \\ &= \lambda_{0,0}\int_{-1}^{1}\left[fg+\left(x+\tilde{b}_0\right)(fg'+f'g)+\tilde{\lambda}_{1,1}f'g'\right]dx = \\ &= \lambda_{0,0}\int_{-1}^{1}\left[\left(x+\tilde{b}_0\right)fg\right]'dx+\lambda_{1,1}\int_{-1}^{1}f'g'dx = \\ &= \lambda_{0,0}\left[\left(1+\tilde{b}_0\right)f(1)g(1)+\left(1-\tilde{b}_0\right)f(-1)g(-1)\right]+\lambda_{1,1}\int_{-1}^{1}f'g'dx, \end{aligned}$$

que coincide con la expresión (4.12) en [97], tomando

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda_{0,0}\left(1+\tilde{b}_0\right), \\ c_2 &= \lambda_{0,0}\left(1-\tilde{b}_0\right), \\ c_3 &= \lambda_{1,1}. \end{aligned}$$

(B) En el caso en que $\underline{\alpha+\beta\neq 0}$, se verifica que $gr\,\{\psi(x,1)\}=1$. Entonces, si queremos que $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado, usando (2.5.16), es necesario que los polinomios $\lambda_{0,0}$ y $\lambda_{0,1}$ verifiquen la siguiente relación

$$gr\,\{\lambda_{0,1}\} = gr\,\{\lambda_{0,0}\}+1. \qquad (2.5.19)$$

El caso más sencillo aparece cuando el polinomio $\lambda_{0,0}$ es una constante positiva. Así teniendo en cuenta (2.5.19), el polinomio $\lambda_{0,1}$ ha de ser de grado uno, esto es

$$\lambda_{0,1}(x) = b_1 x + b_0,$$

con b_1 y b_0 dos números reales.

Para tener totalmente determinado el polinomio $\lambda_{0,1}$, se calculan los coeficientes b_1 y b_0 en términos de la constante $\lambda_{0,0}$. En este sentido, a partir de la expresión (2.5.16) se deduce el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+1)b_1 &= \lambda_{0,0} && (2.5.20)\\ (\alpha+\beta)b_0 &= (\beta-\alpha)b_1 && (2.5.21)\\ \lambda_{0,0} - (\beta-\alpha)b_0 - b_1 &= \text{constante.} && (2.5.22) \end{aligned}$$

Si suponemos que $\alpha+\beta+1=0$ se tiene, usando la ecuación (2.5.20), que $\lambda_{0,0}=0$. Sin embargo, este caso no se puede dar porque entonces la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ no es definida positiva. Por lo tanto, $\alpha+\beta+1$ tiene que ser distinto de cero.

Despejando b_0 de la ecuación (2.5.21) y b_1 de (2.5.20), el polinomio $\lambda_{0,1}$ ha de ser de la forma

$$\lambda_{0,1}(x) = \frac{\lambda_{0,0}}{\alpha+\beta+1}\left(x + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right),$$

luego

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \lambda_{0,0}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\alpha+\beta+1}\left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right) \\ \dfrac{1}{\alpha+\beta+1}\left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right) & \tilde{\lambda}_{1,1} \end{pmatrix},$$

donde $\tilde{\lambda}_{1,1} = \dfrac{\lambda_{1,1}}{\lambda_{0,0}}$. Imponiendo el carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$, obtenemos que

$$\lambda_{0,0}\left[\tilde{\lambda}_{1,1} - \frac{1}{(\alpha+\beta+1)^2}\left(x+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\right] > 0, \quad x \in [-1,1],$$

es decir, $\lambda_{0,0} > 0$ y

$$\tilde{\lambda}_{1,1}(\alpha+\beta+1)^2 > \left(x + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2.$$

Siempre se puede elegir $\tilde{\lambda}_{1,1}$ como una cota superior de la parábola q en todo el intervalo $[-1,1]$, con $q(x) = \left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$ y, por alcanzar este máximo en $q(-1)$ o bien en $q(1)$, tenemos que

$$\tilde{\lambda}_{1,1}(\alpha+\beta+1)^2 > \max\left\{\frac{4\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}, \frac{4\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}\right\}.$$

De esta forma, por ser la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ definida positiva ha de verificarse que $\lambda_{0,0} > 0$ y

$$\lambda_{1,1} > \frac{4\lambda_{0,0}}{(\alpha+\beta+1)^2(\alpha+\beta)^2}\max\{\beta^2,\alpha^2\}.$$

En este caso, el producto escalar de Sobolev queda

$$(f,g)_S^{(1)} = \frac{\lambda_{0,0}}{\alpha+\beta+1}\int_{-1}^{1}(f,\ f')\begin{pmatrix} \alpha+\beta+1 & \left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right) \\ \left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right) & \tilde{\lambda}_{1,1}(\alpha+\beta+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} dx, \quad (2.5.23)$$

y, la expresión del funcional lineal $\mathcal{F}^{(1)}$ asociado al producto (2.5.23), es

$$\mathcal{F}^{(1)} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\lambda_{0,0}I - [(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta)x]\lambda_{1,1}D - (1-x^2)\lambda_{1,1}D^2,$$

que, obviamente, conserva el grado de los polinomios.

Usando el apartado iii) del corolario 2.5.3, sabemos que los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar (2.5.23) son los polinomios de Jacobi, $\{P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}\}_{n\geq 0}$, definidos mediante las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} P_0^{(\alpha-1,\beta-1)}(x) &= 1, \quad P_1^{(\alpha-1,\beta-1)}(x) = x - \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}, \\ P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x) &= \frac{n!\Gamma(n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)}\sum_{m=0}^{n}\binom{n-1+\alpha}{m}\binom{n-1+\beta}{n-m}(x+1)^m(x-1)^{n-m} \\ &= \left(\frac{x-1}{2}\right)(\beta)_n\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)}\ {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix} -n,-n-\alpha+1 \\ \beta \end{matrix}\,\middle|\,\frac{x+1}{x-1}\right), \end{aligned}$$

con $n \geq 2$.

Capítulo 3

Polinomios de Laguerre Generalizados

3.1 Introducción

Los polinomios de Laguerre han sido muy estudiados en la teoría de los polinomios clásicos ortogonales. Si denotamos por $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ a la sucesión de los polinomios mónicos de Laguerre, su propiedad crucial es la ortogonalidad con respecto a la función peso $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, con $x \in [0, +\infty)$, si el parámetro α satisface la condición $-1 < \alpha$ para poder asegurar la convergencia de las integrales. Esto es, si u es el funcional clásico de Laguerre definido a partir de la función peso ρ, se verifica que

$$\langle u, L_n^{(\alpha)} L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^{+\infty} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = k_n \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0,$$

con $\alpha > -1$ y $k_n > 0$.

Para los polinomios mónicos clásicos de Laguerre, es bien conocida su expresión explícita (ver G. Szegő [158], p. 102):

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n+\alpha}{n-j} x^j, \qquad n \geq 0. \tag{3.1.1}$$

A partir de la expresión (3.1.1) se puede definir una familia de polinomios mónicos, para un valor arbitrario del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. Estos polinomios los notaremos por $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, y los llamaremos ***polinomios de Laguerre generalizados.*** Obviamente, constituyen una base del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$, ya que $\mathrm{gr}(L_n^{(\alpha)}) = n, \quad \forall n \geq 0$.

Mediante un cálculo directo en la expresión explícita (3.1.1), podemos deducir que estos polinomios verifican la relación de recurrencia a tres términos:

$$\begin{aligned} L_{-1}^{(\alpha)}(x) &= 0, \qquad L_0^{(\alpha)} = 1, \\ xL_n^{(\alpha)}(x) &= L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \beta_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + \gamma_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

donde

$$\beta_n^{(\alpha)} = 2n + \alpha + 1, \qquad \gamma_n^{(\alpha)} = n(n + \alpha).$$

A partir del teorema de Favard, concluimos que la familia de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ para $\alpha \notin \{-1, -2, \ldots\}$ constituye una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un funcional lineal regular. Para $-1 < \alpha$, este funcional lineal es definido positivo. Sin embargo, cuando $\alpha \in \{-1, -2, \ldots\}$, no podemos deducir resultados de ortogonalidad a partir del teorema de Favard, ya que $\gamma_n^{(\alpha)}$ se anula para algún valor de n.

En [96], K. H. Kwon y L. L. Littlejohn demuestran la ortogonalidad para los polinomios de Laguerre generalizados $\{L_n^{(-k)}\}_{n\geq 0}$, para k un número entero positivo, con respecto a un producto escalar en el que aparecen masas de Dirac y derivadas. Sin embargo, los polinomios de Laguerre generalizados, para cualquier valor real del parámetro α, son ortogonales con respecto a un producto escalar en el que intervienen derivadas, esto es, un producto escalar de Sobolev, tal y como demuestran T. E. Pérez y M. A. Piñar en [146]. Posteriormente, en [147], los mismos autores deducen cómo se puede usar la ortogonalidad Sobolev para recuperar propiedades de los polinomios de Laguerre generalizados.

En el apartado ii) del corolario 2.5.3 del capítulo 2 de esta Memoria, hemos demostrado que los polinomios generalizados de Laguerre $\{L_n^{(\alpha-1)}\}_n$ son ortogonales con respecto a un producto escalar de Sobolev. De este modo, este caso particular nos permite dar propiedades de ortogonalidad a los polinomios de Laguerre cuando el parámetro α es cualquier número real.

Nuestro objetivo en este capítulo es englobar las propiedades obtenidas para los polinomios de Laguerre generalizados con un mismo enfoque. Además, se hace un estudio en profundidad de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$, para $N = 1, 2, 3, \ldots$, obteniéndose los resultados que deducen K. H. Kwon y L. L. Littlejohn en [96] como caso particular.

La estructura del capítulo es la siguiente: en la sección 2, definiremos los polinomios mónicos de Laguerre generalizados para $\alpha \in \mathbb{R}$, a partir de su expresión explícita. Asímismo, mostraremos que muchas de las propiedades habituales que cumplen los polinomios clásicos de Laguerre se siguen verificando cuando el parámetro α es un número real cualquiera.

En la sección 3, daremos propiedades de ortogonalidad globales para los polinomios mónicos de Laguerre generalizados $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$. Para ello, definiremos un producto escalar de Sobolev no diagonal obteniéndose una expresión recurrente para este producto escalar. A partir de esta expresión, deduciremos que esta familia de polinomios es ortogonal con respecto al producto escalar de Sobolev cuando se considera $K \geq \max\{0, [-\alpha]\}$.

Estudiaremos, en el siguiente apartado, el mismo operador diferencial $\mathcal{F}^{(K)}$ definido en el capítulo 2 de esta Memoria, en el caso particular de los polinomios de Laguerre. Obtendremos una expresión recurrente para este operador, a partir de la cual, demostraremos que en este caso, $\mathcal{F}^{(K)}$ conserva el grado de los polinomios. Como consecuencia de este hecho, deduciremos que los polinomios mónicos de Laguerre generalizados son funciones propias del operador $\mathcal{F}^{(K)}$. Por último, daremos una serie de relaciones entre la sucesión de los polinomios de

Laguerre generalizados $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, ortogonales con respecto al producto escalar definido en la sección 3, y la sucesión de los polinomios clásicos de Laguerre $\{L_n^{(\alpha+K)}\}_{n\geq 0}$, ortogonales con respecto a la función peso $\rho(x) = x^{\alpha+K}e^{-x}$, cuando $x \in [0, +\infty)$.

La sección 5 la dedicaremos a hacer un estudio de la familia de los polinomios de Laguerre generalizados en el caso particular en que el parámetro α es un número entero negativo, es decir, $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$, con $N = 1, 2, 3, \ldots$. Estamos interesados en este tipo de polinomios de Laguerre porque, en este caso, el coeficiente $\gamma_n^{(-N)}$ de la relación de recurrencia a tres términos (3.1.2) se anula cuando $n = N$ y, por lo tanto, no podemos deducir propiedades de ortogonalidad para esta sucesión, a partir del teorema de Favard. Sin embargo, el producto de Sobolev definido en la sección 2 nos permitirá, en este caso, obtener resultados de ortogonalidad para estos polinomios.
Estudiaremos un caso particular del operador diferencial definido en la sección 4. En concreto, consideraremos $K = N$ y $\alpha = -N$, con lo que tendremos el operador diferencial $\mathcal{F}^{(N)}$, que será simétrico con respecto al producto escalar de Sobolev obtenido en la sección 5. A partir de este resultado, deduciremos relaciones algebraicas entre la sucesión de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$, y la sucesión de los polinomios clásicos de Laguerre $\{L_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$, que son ortogonales con respecto a la función peso $\rho(x) = e^{-x}$, cuando $x \in [0, +\infty)$.

En la última sección haremos un estudio de los ceros de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$, localizados en el interior y en el exterior del intervalo $[0, +\infty)$. Este estudio ya lo hace G. Szegő en [158], p. 150-151, obteniendo que los polinomios de Laguerre $L_n^{(-N)}$ de grado par no tienen raíces reales y los polinomios de grado impar tienen una única raíz real. Nosotros deduciremos este mismo resultado usando la técnica de Sturm, (ver capítulo 1 de esta Memoria).

3.2 Polinomios de Laguerre Generalizados

Sea α un número real arbitrario. El *n-ésimo polinomio mónico de Laguerre generalizado* se define en el texto de G. Szegő ([158], p. 102), mediante la expresión

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n+\alpha}{n-j} x^j, \qquad n \geq 0. \tag{3.2.1}$$

De (3.2.1), podemos observar que $\mathrm{gr}(L_n^{(\alpha)}) = n$, con $n \geq 0$, para cada valor real del parámetro α y, por lo tanto, podemos definir la familia de los polinomios de Laguerre generalizados $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ que constituyen una base del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$.

A partir de la expresión explícita (3.2.1), es posible demostrar que la mayor parte de las propiedades algebraicas que verifican los polinomios clásicos de Laguerre se siguen verificando para los polinomios de Laguerre generalizados. Mostraremos en las dos proposiciones siguientes los resultados algebraicos que usaremos en este capítulo.

Proposición 3.2.1 *Se considera α un número real dado. Entonces, los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, verifican las siguientes propiedades*

i) Relación de recurrencia a tres términos

$$\begin{aligned} L_{-1}^{(\alpha)}(x) &= 0, \quad L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \\ xL_n^{(\alpha)}(x) &= L_{n+1}^{(\alpha)} + \beta_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + \gamma_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

donde $\beta_n^{(\alpha)} = 2n + \alpha + 1, \quad \gamma_n^{(\alpha)} = n(n+\alpha)$.

ii) Relación diferencial

$$\frac{d^k}{dx^k} L_n^{(\alpha)}(x) = (n-k+1)_k L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x), \quad 0 \leq k \leq n. \tag{3.2.3}$$

iii) Relación de estructura

$$x\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x) + n(n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{3.2.4}$$

iv) Ecuación diferencial de segundo orden

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0, \tag{3.2.5}$$

donde $y = L_n^{(\alpha)}(x)$ es la única solución polinómica de (3.2.5).

v) $L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$, (3.2.6)

Proposición 3.2.2 *En las condiciones anteriores, se verifica*

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} D^i L_n^{(\alpha-k)}(x) = (I - D)^k L_n^{(\alpha-k)}(x), \quad \forall k \geq 0, \tag{3.2.7}$$

donde $D = \dfrac{d}{dx}$.

Demostración:

Aplicamos el proceso de inducción sobre k. El caso $k = 0$ es trivial. Para $k = 1$, usando la relación diferencial (3.2.3) junto con (3.2.6), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{i} (L_n^{(\alpha-1)})^{(i)}(x) &= L_n^{(\alpha-1)}(x) - (L_n^{(\alpha-1)})'(x) = \\ &= L_n^{(\alpha-1)}(x) - nL_{n-1}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

Supongamos que el resultado es cierto para $k-1$, y lo probaremos para k. A partir de la hipótesis de inducción, de (3.2.6) y de la relación (3.2.3), deducimos que

$$\begin{aligned}
L_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}D^iL_n^{(\alpha-k+1)}(x) = \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}D^i\left[L_n^{(\alpha-k)}(x)-nL_{n-1}^{(\alpha-k+1)}(x)\right] = \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}D^iL_n^{(\alpha-k)}(x)-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}D^iL_n^{(\alpha-k)}(x) = \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}D^iL_n^{(\alpha-k)}(x) = (I-D)^kL_n^{(\alpha-k)}(x). \quad \square
\end{aligned}$$

3.3 Ortogonalidad Sobolev para los polinomios $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$

Sea $K\geq 0$ un número entero dado. Definimos la matriz triangular inferior $\mathbf{L}(K)$, de dimensión $K+1$ como sigue

$$\mathbf{L}(K) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-\binom{K}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\binom{K}{2} & -\binom{K-1}{1} & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^K\binom{K}{K} & (-1)^{K-1}\binom{K-1}{K-1} & (-1)^{K-2}\binom{K-2}{K-2} & \dots & 1
\end{pmatrix}.$$

A partir de esta matriz, se define la matriz simétrica

$$\mathbf{\Lambda}^{(K)} = \mathbf{L}(K)\mathbf{L}(K)^T, \tag{3.3.1}$$

cuyos elementos vienen dados por

$$\lambda_{i,j} = \sum_{p=0}^{\min\{i,j\}}(-1)^{i+j}\binom{K-p}{i-p}\binom{K-p}{j-p}, \qquad 0\leq i,j\leq K.$$

Obviamente, $\mathbf{\Lambda}^{(K)}$ es una matriz definida positiva ya que la expresión (3.3.1) constituye la factorización de Cholesky para $\mathbf{\Lambda}^{(K)}$ ([157], p. 174).

Se considera la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}$ definida en (3.3.1), con $K\geq 0$ un número entero, y $\alpha > -K-1$ un número real. En estas condiciones, definimos la forma bilineal simétrica $(\cdot,\cdot)_S^{(K,\alpha+K)}$ en la forma siguiente

$$(f,g)_S^{(K,\alpha+K)} = \int_0^{+\infty} F(x)\Lambda^{(K)}G(x)^T x^{\alpha+K}e^{-x}dx, \quad x \in [0,+\infty), \tag{3.3.2}$$

donde $F(x)$ y $G(x)$ son los vectores definidos por

$$\begin{aligned} F(x) &= (f(x), f'(x), \dots, f^{(K)}(x)), \\ G(x) &= (g(x), g'(x), \dots, g^{(K)}(x)). \end{aligned}$$

Como $\alpha + K > -1$, todas las integrales de esta expresión son finitas y, como consecuencia del carácter definido positivo de la matriz $\Lambda^{(K)}$, se concluye que (3.3.2) es un producto escalar, de hecho, es un producto escalar de Sobolev no diagonal, del tipo estudiado en el capítulo 2 y, por tanto, es posible aplicar todos los resultados allí obtenidos.

A partir de los elementos de la matriz triangular $\mathbf{L}(K)$, se puede obtener otra expresión más compacta del producto escalar de Sobolev (3.3.2).

Proposición 3.3.1 *Sea α un número real cualquiera y $K \geq 0$ un número entero tales que $\alpha + K > -1$. Para cualesquiera polinomios f y g del espacio $\mathbb{P}$, el producto escalar de Sobolev (3.3.2) se puede escribir en la forma:*

$$(f,g)_S^{(K,\alpha+K)} = \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{K} (I-D)^{K-j} D^j f(x) (I-D)^{K-j} D^j g(x) x^{\alpha+K}e^{-x}dx. \tag{3.3.3}$$

Demostración:

Teniendo en cuenta la definición de la matriz $\mathbf{L}(K)$, si se hace el producto $F(x)\mathbf{L}(K)$, se tiene

$$\begin{aligned} &(f(x), Df(x), \dots, D^K f(x)) \, \mathbf{L}(K) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{K} (-1)^i \binom{K}{i} D^i f(x), \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^i \binom{K-1}{i} D^{i+1} f(x), \dots, D^K f(x) \right) = \\ &= ((I-D)^K f(x), (I-D)^{K-1} Df(x), \dots, D^K f(x)), \end{aligned}$$

y, de esta forma, llegamos a (3.3.3). □

A partir de la relación (3.3.3) se demuestra que el producto escalar de Sobolev no diagonal definido en (3.3.2) se puede obtener de forma recurrente.

Proposición 3.3.2 *Se consideran f y g dos polinomios cualesquiera del espacio $\mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y $K \geq 0$ un número entero tales que $\alpha + K > -1$. Entonces, el producto escalar de Sobolev (3.3.2) se expresa en la forma recurrente siguiente*

$$(f,g)_S^{(K,\alpha+K)} = ((I-D)f, (I-D)g)_S^{(K-1,\alpha+K)} + \int_0^{+\infty} D^K f(x) D^K g(x) x^{\alpha+K}e^{-x}dx. \tag{3.3.4}$$

Demostración:
Teniendo en cuenta la relación (3.3.3), se tiene

$$
\begin{aligned}
(f,g)_S^{(K,\alpha+K)} &= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{K-1} (I-D)^{K-j} D^j f(x) (I-D)^{K-j} D^j g(x) x^{\alpha+K} e^{-x} dx + \\
&+ \int_0^{+\infty} D^K f(x) D^K g(x) x^{\alpha+K} e^{-x} dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{K-1} (I-D)^{K-1-j} D^j [(I-D)f] (I-D)^{K-1-j} D^j [(I-D)g] x^{\alpha+K} e^{-x} dx + \\
&+ \int_0^{+\infty} D^K f(x) D^K g(x) x^{\alpha+K} e^{-x} dx = \\
&= ((I-D)f, (I-D)g)_S^{(K-1,\alpha+K)} + \int_0^{+\infty} D^K f(x) D^K g(x) x^{\alpha+K} e^{-x} dx. \quad \square
\end{aligned}
$$

La ortogonalidad Sobolev para los polinomios de Laguerre generalizados se demuestra en [146], usando un razonamiento inductivo en el caso particular $K = \max\{0, [-\alpha]\}$. Sin embargo, se puede demostrar que el resultado sigue verificándose para cada valor de K satisfaciendo $\alpha + K > -1$.

En el siguiente resultado, se demuestra la ortogonalidad Sobolev para estos polinomios de Laguerre usando la definición del producto escalar (3.3.3).

Teorema 3.3.3 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces la sucesión de los polinomios mónicos de Laguerre generalizados $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ es la SPOM con respecto al producto escalar de Sobolev no diagonal*

$$(\cdot,\cdot)_S^{(K,\alpha+K)},$$

donde $K \geq \max\{0, [-\alpha]\}$.

Demostración:
Multiplicamos dos polinomios de Laguerre generalizados $L_n^{(\alpha)}$ y $L_m^{(\alpha)}$. Usando las relaciones (3.2.3) y (3.2.7), el producto de Sobolev (3.3.3) queda

$$
\begin{aligned}
(L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)})_S^{(K,\alpha+K)} &= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{K} (I-D)^{K-j} D^j L_n^{(\alpha)} (I-D)^{K-j} D^j L_m^{(\alpha)} x^{\alpha+K} e^{-x} dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{K} (n-j+1)_j (m-j+1)_j (I-D)^{K-j} L_{n-j}^{(\alpha+j)} (I-D)^{K-j} L_{m-j}^{(\alpha+j)} x^{\alpha+K} e^{-x} dx = \\
&= \sum_{j=0}^{K} (n-j+1)_j (m-j+1)_j \int_0^{+\infty} L_{n-j}^{(\alpha+K)} L_{m-j}^{(\alpha+K)} x^{\alpha+K} e^{-x} dx,
\end{aligned}
$$

donde suponemos que $L_i^{(\alpha+K)}(x) = 0$, cuando $i < 0$. Finalmente, el resultado se obtiene usando la ortogonalidad de los polinomios $\{L_i^{(\alpha+K)}\}_{i\geq 0}$ con respecto a la función peso $x^{\alpha+K}e^{-x}$. □

Nota 1. Los resultados anteriores siguen siendo ciertos si consideramos una matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}$ definida por $\mathbf{\Lambda}^{(K)} = \mathbf{L}(K)\mathbf{D}\mathbf{L}(K)^T$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con valores positivos en la diagonal.

Nota 2. En el caso particular en que $K = 1 = -\alpha$ en el producto escalar (3.3.2), del teorema 3.3.3 tenemos que los polinomios de Laguerre $L_n^{(-1)}$ son ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f,g)_S^{(1,0)} = \int_0^{+\infty} (\, f(x), f'(x)\,) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} e^{-x}dx.$$

Este resultado coincide con el que se obtiene en ii) del corolario 2.5.3, cuando se toma la matriz

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

para $\alpha = 0$.

3.4 El operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$

Siguiendo los resultados obtenidos en el capítulo anterior, sabemos que existe un operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$, que es simétrico con respecto al producto escalar de Sobolev (3.3.2). Las especiales características del funcional en este caso hacen que lo estudiemos con particular atención. En este sentido, se considera la expresión en forma matricial del operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ escrita en términos de la función peso ρ para la matriz polinómica $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$. Esto es, de (2.3.6), se tiene que

$$\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)}(\, I, -D, \ldots, (-1)^K D^K\,)\,\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x) \begin{pmatrix} \rho(x)I \\ \rho(x)D \\ \vdots \\ \rho(x)D^K \end{pmatrix}. \tag{3.4.1}$$

En el caso de los polinomios de Laguerre la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$ es de coeficientes constantes y, además, se verifica la relación $\mathbf{\Lambda}^{(K)} = \mathbf{L}(K)\mathbf{L}(K)^T$. Teniendo en cuenta este hecho, junto con la definición de los elementos de la matriz $\mathbf{L}(K)$, se obtiene una expresión más simple del operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$, a partir de (3.4.1), en la forma siguiente

$$\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} \sum_{j=0}^{K} (-D)^j\,(I+D)^{K-j}\,\rho(x)\,(I-D)^{K-j}\,D^j, \tag{3.4.2}$$

donde $\phi(x) = x$, $\rho(x) = x^{\alpha+K}e^{-x}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + K > -1$, con $x \in [0, +\infty)$, es la función peso Laguerre, I denota el operador identidad y D representa el operador derivada.

Nota. Si se considera $K = 1$ en (3.4.2) con $\rho(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(1)} &= \frac{x}{\rho(x)} \sum_{j=0}^{1} (-D)^j (I + D)^{1-j} \rho(x) (I - D)^{1-j} D^j = \\
&= \frac{x}{\rho(x)} \left[(I + D) \rho(x) (I - D) - D (\rho(x) D) \right] = \\
&= \frac{x}{\rho(x)} \left[\rho(x) (I - D) + D (\rho(x)) (I - D) + \rho(x) \left(D - D^2 \right) - D (\rho(x)) D - \rho(x) D^2 \right] \\
&= [x + \psi(x, 1)] I - 2\psi(x, 1) D - 2xD^2 = \\
&= (\alpha + 1) I - 2(\alpha + 1 - x) D - 2xD^2,
\end{aligned}$$

pues en este caso $\psi(x, 1) = \alpha + 1 - x$. Esta expresión coincide con la que se obtiene en (2.5.13) para el operador $\mathcal{F}^{(1)}$ cuando se toma $\lambda_{0,0} = 1 = -\lambda_{0,1}$, $\lambda_{1,1} = 2$ y $\rho(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$.

En el siguiente resultado se establece una ley recurrente para el operador $\mathcal{F}^{(K)}$ definido en (3.4.2).

Proposición 3.4.1 *Sea $K \geq 0$ un número entero dado. Se verifica que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(0)} &= I, \\
\mathcal{F}^{(K)} &= (x - \alpha - 1) \mathcal{F}^{(K-1)} D - x D \mathcal{F}^{(K-1)} D + \\
&+ \frac{x^K}{\rho(x)} (I + D)^K \rho(x) (I - D)^K, \quad K \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Demostración:

De (3.4.2) con $K = 0$ se tiene que $\mathcal{F}^{(0)} = I$ y, para $K \geq 1$, se verifica que

$$\mathcal{F}^{(K-1)} = \frac{\phi^{K-1}(x)}{\rho(x)} \sum_{j=0}^{K-1} (-D)^j (I + D)^{K-1-j} \rho(x) (I - D)^{K-1-j} D^j. \tag{3.4.4}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (3.4.4) junto con $\psi(x, 1) = \dfrac{\phi(x) D \rho(x)}{\rho(x)} = \psi(x) - \phi'(x)$ y las expresiones $\phi(x) = x$ y $\psi(x) = \alpha + K + 1 - x$, la relación (3.4.2) queda

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} \sum_{j=1}^{K} (-D)^j (I + D)^{K-j} \rho(x) (I - D)^{K-j} D^j + \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} (I + D)^K \rho(x) (I - D)^K \\
= -\frac{\phi^K(x)}{\rho(x)} D \left[\sum_{j=0}^{K-1} (-D)^j (I + D)^{K-j-1} \rho(x) (I - D)^{K-j-1} D^{j+1} \right] +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)}(I+D)^K \rho(x)(I-D)^K = \\
&= -D\left[\frac{\phi^K(x)}{\rho(x)}\sum_{j=0}^{K-1}(-D)^j(I+D)^{K-j-1}\rho(x)(I-D)^{K-j-1}D^{j+1}\right] + \\
&+ D\left[\frac{\phi^K(x)}{\rho(x)}\right]\sum_{j=0}^{K-1}(-D)^j(I+D)^{K-j-1}\rho(x)(I-D)^{K-j-1}D^{j+1} + \\
&+ \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)}(I+D)^K \rho(x)(I-D)^K = \\
&= -D\left[\phi(x)\mathcal{F}^{(K-1)}D\right] + K\phi'(x)\mathcal{F}^{(K-1)}D - \psi(x,1)\mathcal{F}^{(K-1)}D + \\
&+ \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)}(I+D)^K \rho(x)(I-D)^K = \\
&= \left[K\phi'(x)-\psi(x)\right]\mathcal{F}^{(K-1)}D - \phi(x)D\left[\mathcal{F}^{(K-1)}D\right] + \frac{\phi^K(x)}{\rho(x)}(I+D)^K\rho(x)(I-D)^K \\
&= (x-\alpha-1)\mathcal{F}^{(K-1)}D - xD\mathcal{F}^{(K-1)}D + \frac{x^K}{\rho(x)}(I+D)^K\rho(x)(I-D)^K. \quad \square
\end{aligned}
$$

A continuación, demostraremos que el operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ mantiene el grado de los polinomios.

Proposición 3.4.2 *Sea x^n un polinomio de grado n. Entonces, se verifica que*

$$\mathcal{F}^{(K)}x^n = F(n,K)x^n + \ldots, \quad n \geq K, \tag{3.4.5}$$

donde $F(n,K) = \sum_{i=0}^{K}\frac{n!}{(n-i)!}(\alpha+n+1)_{K-i} > 0$, *representa el coeficiente líder del polinomio* $\mathcal{F}^{(K)}x^n$.

Demostración:

Teniendo en cuenta la expresión (3.4.3), demostramos el resultado por inducción. Para $K=0$ por ser $\mathcal{F}^{(0)} = I$ el resultado se verifica. Cuando $K=1$, hemos visto que

$$\mathcal{F}^{(1)} = (\alpha+1)I - 2(\alpha+1-x)D - 2xD^2,$$

que obviamente conserva el grado. Suponemos que el resultado es cierto para $K-1$ y lo probaremos para K. Para ello, si llamamos

$$\mathcal{F}^{(K)} = \mathcal{F}_1^{(K)} + \mathcal{F}_2^{(K)},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{(K)} &= (x-\alpha-1)\mathcal{F}^{(K-1)}D - xD\left[\mathcal{F}^{(K-1)}D\right], \\ \mathcal{F}_2^{(K)} &= \frac{x^K}{\rho(x)}(I+D)^K\rho(x)(I-D)^K. \end{aligned}$$

de la hipótesis de inducción tenemos que $\mathcal{F}_1^{(K)}$ conserva el grado. Así, basta probar que $\mathcal{F}_2^{(K)}$ lo conserva, y lo haremos de nuevo por inducción en K. En el caso $K=0$ se verifica el resultado ya que $\mathcal{F}_2^{(0)}$ es el operador identidad. Si $K=1$, deducimos que

$$\mathcal{F}_2^{(1)} = \frac{x}{\rho(x)}(I+D)\rho(x)(I-D) = (\alpha+1)I - (\alpha+1-x)D - xD^2,$$

luego tambien lo conserva. Para $K-1$ supongamos que es cierto el resultado y lo vemos para K. Sustituyendo $\psi(x,1) = \alpha + K - x$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{(K)} &= \frac{x^K}{\rho(x)}(I+D)(I+D)^{K-1}\rho(x)(I-D)^{K-1}(I-D) = \\ &= x\mathcal{F}_2^{(K-1)}(I-D) + \\ &+ \frac{x^K}{\rho(x)}D\left[(I+D)^{K-1}\rho(x)(I-D)^{K-1}(I-D)\right] = \\ &= (x-K+\psi(x,1))\mathcal{F}_2^{(K-1)}(I-D) + D\left[x\mathcal{F}_2^{(K-1)}(I-D)\right] = \\ &= \alpha\mathcal{F}_2^{(K-1)}(I-D) + D\left[x\mathcal{F}_2^{(K-1)}(I-D)\right], \end{aligned}$$

de donde, usando la hipótesis de inducción, concluimos que $\mathcal{F}_2^{(K)}$ conserva el grado.

Identificando coeficientes líderes y aplicando recurrencia se deduce que

$$F(n,K) = \sum_{i=0}^{K} \frac{n!}{(n-i)!}(\alpha+n+1)_{K-i} > 0. \quad \square$$

Usando la proposición 2.3.3 y el teorema 2.3.4, en el caso particular de los polinomios de Laguerre generalizados $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifican los siguientes resultados.

Proposición 3.4.3 *Sean f y g dos polinomios cualesquiera de $\mathbb{P}$. Entonces, se verifica que*

$$\left(x^K f, g\right)_S^{(K,K+\alpha)} = \int_0^{+\infty} f(x)\mathcal{F}^{(K)}g(x)x^{\alpha+K}e^{-x}dx.$$

Teorema 3.4.4 *El operador lineal $\mathcal{F}^{(K)}$ es simétrico con respecto al producto escalar de Sobolev definido en (3.3.3), es decir*

$$\left(\mathcal{F}^{(K)}f, g\right)_S^{(K,K+\alpha)} = \left(f, \mathcal{F}^{(K)}g\right)_S^{(K,K+\alpha)}.$$

A partir de la igualdad (3.4.5) y del carácter simétrico de $\mathcal{F}^{(K)}$, demostramos que los polinomios de Laguerre generalizados $\{L_n^{(\alpha)}\}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, son las funciones propias del operador $\mathcal{F}^{(K)}$, resultado que se deduce de la relación (2.4.3).

Proposición 3.4.5 *Para cada valor de $n \geq K$, se verifica que*

$$\mathcal{F}^{(K)} L_n^{(\alpha)}(x) = F(n,K) L_n^{(\alpha)}(x).$$

En el siguiente resultado establecemos unas relaciones diferenciales lineales entre los polinomios de Laguerre generalizados $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$ y los polinomios clásicos de Laguerre $\{L_n^{(\alpha+K)}\}_n$, a partir de las relaciones (2.4.1) y (2.4.2).

Proposición 3.4.6 *Se cumplen las siguientes relaciones:*

i) $$x^K L_n^{(\alpha+K)}(x) = \sum_{i=n}^{n+K} \alpha_{n,i} L_i^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.4.6}$$

donde $\alpha_{n,n+K} = 1, \quad \alpha_{n,n} = F(n,K)\dfrac{k_n}{\tilde{k}_n}.$

ii) $$\mathcal{F}^{(K)} L_n^{(\alpha)}(x) = F(n,K) L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=n-K}^{n} \beta_{n,i} L_i^{(\alpha+K)}(x), \quad n \geq K, \tag{3.4.7}$$

donde $\beta_{n,n} = F(n,K), \quad \beta_{n,n-K} = \dfrac{\tilde{k}_n}{k_{n-K}}.$

Como consecuencia de la ortogonalidad Sobolev de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$, obtenemos el siguiente resultado sobre los ceros reales de estos polinomios.

Proposición 3.4.7 *Para cada valor de $n > K = \max\{0, [-\alpha]\}$, el polinomio $L_n^{(\alpha)}$ tiene, al menos, $(n-K)$ ceros reales de multiplicidad impar dentro del intervalo $[0, +\infty)$.*

Demostración:

En primer lugar vemos que el polinomio $L_n^{(\alpha)}$ tiene, al menos, una raíz. Para ello, usando las proposiciones 3.4.3 y 3.4.5, deducimos que

$$\begin{aligned} \left(x^K, L_n^{(\alpha)}\right)_S^{(K,K+\alpha)} &= \int_0^{+\infty} \mathcal{F}^{(K)} L_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+K} e^{-x} dx = \\ &= F(n,K) \int_0^{+\infty} L_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+K} e^{-x} dx = 0, \end{aligned}$$

luego el polinomio $L_n^{(\alpha)}$ cambia de signo.

Llamamos $x_1, x_2, \ldots, x_r$ a las raíces reales positivas de multiplicidad impar del polinomio $L_n^{(\alpha)}$, y

$$q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - x_i).$$

Volviendo a usar las proposiciones 3.4.3 y 3.4.5, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(x^K q(x), L_n^{(\alpha)}\right)_S^{(K,K+\alpha)} &= \int_0^{+\infty} q(x)\mathcal{F}^{(K)}L_n^{(\alpha)}(x)x^{\alpha+K}e^{-x}dx = \\ &= F(n,K)\int_0^{+\infty} q(x)L_n^{(\alpha)}(x)x^{\alpha+K}e^{-x}dx \neq 0,\end{aligned}$$

ya que $q(x)L_n^{(\alpha)} \geq 0, \quad \forall x \in [0, +\infty)$, con lo que concluimos que $r \geq n - K$. $\square$

Nota. G. Szegő demuestra en [158], p.151, que el polinomio $L_n^{(\alpha)}$, para $\alpha < -1$, tiene $(n-K)$ ceros reales y simples dentro del intervalo $[0, +\infty)$, y, para $\alpha < -n$ no tiene raíces reales positivas.

3.5 Polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$

Esta sección está dedicada al estudio de los polinomios de Laguerre generalizados cuando el parámetro α es un número entero negativo, es decir, $\alpha = -N$, $N = 1, 2, 3, \ldots$. En este caso las especiales características de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$, y del producto escalar de Sobolev (3.3.2) permiten recuperar las propiedades descritas por G. Szegő en [158], p. 102, así como las que obtienen K. H. Kwon y L. L. Littlejohn en [96].

Los polinomios de Laguerre verifican, en este caso, las mismas propiedades descritas en las proposiciones 3.2.1 y 3.2.2 y, a partir de su expresión explícita, es posible demostrar algunas propiedades más, que describimos a continuación.

Proposición 3.5.1 *Sea $N \geq 1$ un número entero dado. Los polinomios mónicos de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$ verifican las siguientes propiedades:*

i) $L_n^{(-N)}(0) = (N-n)_n, \quad n \geq 0.$

ii) $L_n^{(-N)}(0) = 0, \quad n \geq N.$

iii) $D^h L_n^{(-N)}(0) = (n-h+1)_h (N-n)_{n-h}, \quad n \geq h.$

iv) $D^h L_n^{(-N)}(0) = 0, \quad 0 \leq h \leq N-1, \quad n \geq N.$

v) $L_N^{(-N)}(x) = x^N.$

Demostración:
i) Teniendo en cuenta la expresión (3.2.1) para $\alpha = -N$ y $x = 0$, queda

$$L_n^{(-N)}(0) = (-1)^n n! \binom{n-N}{n} = (-1)^n(-N+1)_n = (N-n)_n.$$

ii) Cuando $n \geq N$ se tiene que $(N-n)_n = 0$, de donde, usando el apartado i) llegamos al resultado.
iii) Si derivamos h veces en la relación diferencial (3.2.3), para $\alpha = -N$, y se usa i), deducimos

$$D^h L_n^{(-N)}(0) = (n-h+1)_h L_{n-h}^{(-N+h)}(0) = (n-h+1)_h (N-n)_{n-h}.$$

iv) En el caso en que $0 \leq h \leq N-1$ y $n \geq N$, se verifica que $(N-n)_{n-h} = 0$, con lo que, a partir de iii), concluimos el resultado.
v) Si tomamos $n = N$ en (3.2.1) con $\alpha = -N$, tenemos

$$\begin{aligned} L_N^{(-N)}(x) &= (-1)^N N! \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{N-N}{N-j} x^j = \\ &= (-1)^N N! \frac{(-1)^N}{N!} x^N = x^N. \quad \square \end{aligned}$$

En la siguiente proposición, demostramos que el polinomio de Laguerre generalizado $L_n^{(-N)}$ es un múltiplo del polinomio clásico de Laguerre $L_{n-N}^{(N)}$, (ver fórmula (5.2.1) en [158], p. 102).

Proposición 3.5.2 *Dado $N \geq 1$ un número entero, entonces el polinomio de Laguerre $L_n^{(-N)}$ cumple la siguiente relación*

$$L_n^{(-N)}(x) = x^N L_{n-N}^{(N)}(x), \quad n \geq N. \tag{3.5.1}$$

Demostración:

El resultado lo demostramos por inducción sobre $n - N$. Para $n = N$, por v) de la Proposición 3.5.1, obtenemos que

$$L_n^{(-N)}(x) = x^N L_0^{(N)}(x).$$

Si $n = N + 1$, consideramos la relación de recurrencia a tres términos para el polinomio $L_N^{(-N)}$. Entonces de (3.2.2), teniendo en cuenta que $\gamma_N^{(-N)} = 0$, $\beta_N^{(-N)} = \beta_0^{(N)}$ y usando v) de la proposición 3.5.1, tenemos

$$L_{N+1}^{(-N)}(x) = \left(x - \beta_N^{(-N)}\right) L_N^{(-N)}(x) - \gamma_N^{(-N)} L_{N-1}^{(-N)}(x) = \left(x - \beta_0^{(N)}\right) x^N = x^N L_1^{(N)}(x).$$

Consideremos $n \geq N + 1$. Si escribimos la relación de recurrencia a tres términos (3.2.2) para los polinomios $\{L_{n-N}^{(N)}\}$, deducimos que

$$L_{n-N+1}^{(N)}(x) = \left(x - \beta_{n-N}^{(N)}\right) L_{n-N}^{(N)}(x) - \gamma_{n-N}^{(N)} L_{n-N-1}^{(N)}(x), \tag{3.5.2}$$

donde

$$\beta_{n-N}^{(N)} = 2(n-N)+N+1 = 2n-N+1 = \beta_n^{(-N)}, \quad \gamma_{n-N}^{(N)} = n(n-N) = \gamma_n^{(-N)}.$$

A partir de (3.5.2), usando un razonamiento inductivo, concluimos que la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios $x^N L_{n-N}^{(N)}$ es la misma relación de recurrencia que verifican los polinomios $L_n^{(-N)}$, con lo que llegamos al resultado. □

La siguiente proposición nos muestra que es posible establecer una relación diferencial entre el polinomio de Laguerre $L_n^{(-N)}$, $n \geq N$, y el polinomio clásico de Laguerre $L_{n-N}^{(N)}$.

Proposición 3.5.3 *Para cada valor de $n \geq N$, el polinomio de Laguerre $L_n^{(-N)}(x)$ verifica*

$$(I-D)^N D^N L_n^{(-N)}(x) = \frac{n!}{(n-N)!} L_{n-N}^{(N)}(x). \tag{3.5.3}$$

Demostración:

Si derivamos N veces la relación diferencial (3.2.3), para $\alpha = -N$, y usamos la propiedad (3.2.7), con $k = N$, queda

$$(I-D)^N D^N L_n^{(-N)}(x) = \frac{n!}{(n-N)!}(I-D)^N L_{n-N}^{(0)}(x) = \frac{n!}{(n-N)!} L_{n-N}^{(N)}(x). \quad \square$$

3.5.1 Producto escalar de Sobolev

Dado $N \geq 1$ un número entero, consideramos los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$. De la sección 3, sabemos que esta sucesión de polinomios mónicos es ortogonal con respecto al producto escalar de Sobolev definido en (3.3.3) para $K \geq \max\{0,[N]\} = N$. En el caso $K = N$, el producto de Sobolev (3.3.3) lo podemos escribir como

$$(f,g)_S^{(N,0)} = \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{N} (I-D)^{N-j} D^j f(x) (I-D)^{N-j} D^j g(x) e^{-x} dx. \tag{3.5.4}$$

En este apartado, vamos a demostrar que el producto escalar (3.5.4) se puede escribir, en este caso particular, de un forma más sencilla, en el sentido de que sólo aparece el valor de las derivadas hasta el orden $N-1$ de los polinomios f y g evaluadas en el punto cero y una sóla integral en la que intervienen las derivadas de orden N de estos polinomios. Para llegar a este resultado, son necesarios unos lemas previos.

Lema 3.5.4 *Para cualquier polinomio f del espacio vectorial $\mathbb{P}$, se verifica*

$$(-1)^n e^{-x} (I-D)^n f(x) = D^n \left(e^{-x} f(x)\right), \quad n \geq 0.$$

Demostración:

Cuando $n = 0$ el resultado es trivial. Si $n = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} -e^{-x}(I-D)f(x) &= -e^{-x}f(x)+e^{-x}Df(x) = -e^{-x}f(x)+D\left(e^{-x}f(x)\right)-f(x)De^{-x} \\ &= -e^{-x}f(x)+D\left(e^{-x}f(x)\right)+f(x)e^{-x} = D\left(e^{-x}f(x)\right). \end{aligned}$$

Suponemos que se verifica para $n-1$ y lo probaremos para n. En efecto, usando la hipótesis de inducción y lo visto para $n = 1$, deducimos

$$\begin{aligned} (-1)^n e^{-x}(I-D)^n f(x) &= -\Big[(-1)^{n-1}e^{-x}(I-D)^{n-1}f(x)- \\ &- (-1)^{n-1}e^{-x}(I-D)^{n-1}Df(x)\Big] = \\ &= -D^{n-1}\left(e^{-x}f(x)\right)+D^{n-1}\left(e^{-x}Df(x)\right) = \\ &= D^n\left(e^{-x}f(x)\right). \quad \square \end{aligned}$$

Lema 3.5.5 *Se consideran f y g dos polinomios del espacio $\mathbb{P}$. Entonces, se verifica*

$$e^{-x}(I-D)f(x)(I-D)g(x) = e^{-x}Df(x)Dg(x) - D\left[e^{-x}f(x)g(x)\right].$$

Demostración:

Tenemos que

$$\begin{aligned} e^{-x}\left[(I-D)f(x)(I-D)g(x)\right] &= e^{-x}\left[f(x)g(x)-\right. \\ &- \left[f(x)Dg(x)+g(x)Df(x)\right]+\left.Df(x)Dg(x)\right] = \\ &= e^{-x}\left[(I-D)f(x)g(x)+Df(x)Dg(x)\right] = \\ &= -D\left(f(x)g(x)e^{-x}\right)+e^{-x}Df(x)Dg(x). \quad \square \end{aligned}$$

Lema 3.5.6 *Sea $N \geq 1$ un número entero y f y g dos polinomios arbitrarios del espacio vectorial $\mathbb{P}$. Entonces, el producto escalar de Sobolev (3.5.4) se puede escribir en la forma*

$$(f,g)_S^{(N,0)} = (f,g)_D^{(N-1)} + (Df,Dg)_S^{(N-1,0)} + \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x}dx,$$

donde

$$(f,g)_D^{(N-1)} = \left(f(0), Df(0), \ldots, D^{N-1}f(0)\right)\Lambda^{(N-1)} \begin{pmatrix} g(0) \\ Dg(0) \\ \vdots \\ D^{N-1}g(0) \end{pmatrix}.$$

Demostración:

Teniendo en cuenta el lema 3.5.5, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
(f,g)_S^{(N,0)} &= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{N} (I-D)^{N-j} D^j f(x) (I-D)^{N-j} D^j g(x) e^{-x} dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{N-1} (I-D)^{N-j} D^j f(x) (I-D)^{N-j} D^j g(x) e^{-x} dx + \\
&+ \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx = \\
&= -\int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{N-1} D\left[(I-D)^{N-1-j} D^j f(x) (I-D)^{N-1-j} D^j g(x) e^{-x}\right] dx + \\
&+ \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{N-1} (I-D)^{N-1-j} D^{j+1} f(x) (I-D)^{N-1-j} D^{j+1} g(x) e^{-x} dx + \\
&+ \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx = \\
&= -\sum_{j=0}^{N-1} \left|(I-D)^{N-1-j} D^j f(x) (I-D)^{N-1-j} D^j g(x) e^{-x}\right|_{x=0}^{x=+\infty} + \\
&+ (Df, Dg)_S^{(N-1,0)} + \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx = \\
&= (f,g)_D^{(N-1)} + (Df, Dg)_S^{(N-1,0)} + \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx. \quad \square
\end{aligned}
$$

Proposición 3.5.7 *En las condiciones anteriores, el producto escalar de Sobolev (3.5.4) se puede escribir como:*

$$
(f,g)_S^{(N,0)} = \sum_{i=0}^{N-1} (D^i f, D^i g)_D^{(N-1-i)} + (N+1) \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx. \tag{3.5.5}
$$

Demostración:

Basta iterar el lema 3.5.6, con lo que deducimos que

$$
\begin{aligned}
(f,g)_S^{(N,0)} &= (f,g)_D^{(N-1)} + (Df, Dg)_S^{(N-1,0)} + \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx = \\
&= (f,g)_D^{(N-1)} + (Df, Dg)_D^{(N-2)} + (D^2 f, D^2 g)_S^{(N-2,0)} + 2\int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx = \\
&= \ldots = \sum_{i=0}^{N-1} (D^i f, D^i g)_D^{(N-1-i)} + (N+1) \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx. \quad \square
\end{aligned}
$$

Nota. Obsérvese que este producto escalar es similar al obtenido por K. H. Kwon y L. L. Littlejohn en [96]. De hecho el producto obtenido por estos autores es el producto discreto continuo dado por:

$$(f,g) = (f,g)_D^{(N-1)} + \int_0^{+\infty} D^N f(x) D^N g(x) e^{-x} dx.$$

3.5.2 El operador $\mathcal{F}^{(N)}$

Se considera el número entero $N \geq 1$ y la expresión (3.4.2) del operador $\mathcal{F}^{(K)}$, para $K = N$ y $\alpha = -N$. Si efectuamos la suma en (3.4.2), usando el lema 3.5.4, deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(N)} &= \frac{x^N}{e^{-x}} \sum_{j=0}^{N} (I+D)^{N-j} (-D)^j \left[e^{-x} (I-D)^{N-j} D^j \right] = \\
&= \frac{x^N}{e^{-x}} \sum_{j=0}^{N} (I+D)^{N-j} \left[e^{-x} (I-D)^j (I-D)^{N-j} D^j \right] = \\
&= \frac{x^N}{e^{-x}} \sum_{j=0}^{N} (I+D)^{N-j} \left[e^{-x} (I-D)^N D^j \right] = \\
&= \frac{x^N}{e^{-x}} \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{N-j} \binom{N-j}{i} (-1)^i e^{-x} (I-D)^i (I-D)^N D^j = \\
&= x^N (I-D)^N \sum_{j=0}^{N} D^j \sum_{i=0}^{N-j} \binom{N-j}{i} (D-I)^i = \\
&= x^N (I-D)^N \sum_{j=0}^{N} D^j (I+D-I)^{N-j} = \\
&= (N+1) x^N (I-D)^N D^N.
\end{aligned}$$

Entonces el operador diferencial $\mathcal{F}^{(N)}$ se expresa como

$$\mathcal{F}^{(N)} = (N+1) x^N (I-D)^N D^N. \tag{3.5.6}$$

De esta forma, el operador $\mathcal{F}^{(N)}$ es un operador diferencial de orden $2N$ que se anula para cada polinomio de grado menor o igual que $N-1$.

Nota. La constante $N+1$ de la expresión (3.5.6) podemos omitirla ya que no afecta a las propiedades que estudiamos, a continuación, de este operador $\mathcal{F}^{(N)}$.

De forma análoga a la sección 4, haciendo un cálculo directo en (3.5.6), deducimos que el operador $\mathcal{F}^{(N)}$ conserva el grado de los polinomios, esto es

$$\mathcal{F}^{(N)} x^n = F(n,N) x^n + \ldots, \quad n \geq N, \tag{3.5.7}$$

donde $F(n, N)$ denota el coeficiente líder del polinomio $\mathcal{F}^{(N)}x^n$, cuya expresión es

$$F(n, N) = (N+1)\frac{n!}{(n-N)!}, \quad n \geq N.$$

Usando la proposición 3.4.3, podemos obtener una representación del producto escalar de Sobolev (3.5.5), en términos del producto escalar asociado a la función peso $\rho(x) = e^{-x}$. Además, aplicando el teorema 3.4.4 en este caso particular, se verifica que el operador $\mathcal{F}^{(N)}$ es un operador simétrico con respecto al producto escalar definido en (3.5.5).

De la igualdad (3.5.7) y del carácter simétrico de $\mathcal{F}^{(N)}$, deducimos que los polinomios de Laguerre generalizados $\{L_n^{(-N)}\}$, con $n \geq N$, son funciones propias del operador $\mathcal{F}^{(N)}$.

Proposición 3.5.8 *Para $n \geq N$, se verifica*

$$\mathcal{F}^{(N)}L_n^{(-N)}(x) = (N+1)\frac{n!}{(n-N)!}L_n^{(-N)}(x).$$

El siguiente resultado nos proporciona una serie de relaciones diferenciales lineales entre los polinomios de Laguerre generalizados y los polinomios clásicos de Laguerre, (ver (3.4.6) y (3.4.7)).

Proposición 3.5.9 *Se cumplen las siguientes relaciones:*

i) $$x^N L_n^{(0)}(x) = \sum_{i=n}^{n+N} \alpha_{n,i} L_i^{(-N)}(x) = L_{n+N}^{(-N)}(x) + \sum_{i=n}^{n+N-1} \alpha_{n,i} L_i^{(-N)}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.5.8}$$

ii) *Para $n \geq N$, se verifica*

$$\mathcal{F}^{(N)}L_n^{(-N)}(x) = \sum_{i=n-N}^{n} \beta_{n,i} L_i^{(0)}(x) = (N+1)\frac{n!}{(n-N)!}L_n^{(0)}(x) + \sum_{i=n-N}^{n-1} \beta_{n,i} L_i^{(0)}(x). \tag{3.5.9}$$

A partir de la expresión del operador diferencial $\mathcal{F}^{(N)}$, podemos recuperar las propiedades (3.5.1) y (3.5.3).

Proposición 3.5.10 *Se verifica*

i) $L_n^{(-N)}(x) = x^N L_{n-N}^{(N)}(x), \quad n \geq 0,$

ii) $(I - D)^N D^N L_n^{(-N)}(x) = \dfrac{n!}{(n-N)!} L_{n-N}^{(N)}(x), \quad n \geq N.$

Demostración:
i) Escribimos el polinomio $x^N L_{n-N}^{(N)}(x)$ como combinación lineal de los polinomios de Laguerre $\{L_i^{(-N)}\}_{i\geq 0}$, esto es

$$x^N L_{n-N}^{(N)}(x) = L_n^{(-N)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} L_i^{(-N)}(x).$$

Usando la proposición 3.4.3 y la expresión del operador $\mathcal{F}^{(N)}$, los coeficientes $a_{n,i}$ son

$$\begin{aligned} a_{n,i} &= \frac{\left(x^N L_{n-N}^{(N)}, L_i^{(-N)}\right)_S^{(N,0)}}{\left(L_i^{(-N)}, L_i^{(-N)}\right)_S^{(N,0)}} = \frac{\int_0^{+\infty} L_{n-N}^{(N)} \mathcal{F}^{(N)} L_i^{(-N)} e^{-x} dx}{\left(L_i^{(-N)}, L_i^{(-N)}\right)_S^{(N,0)}} = \\ &= \frac{(N+1)\int_0^{+\infty} L_{n-N}^{(N)} x^N (I-D)^N D^N L_i^{(-N)} e^{-x} dx}{\left(L_i^{(-N)}, L_i^{(-N)}\right)_S^{(N,0)}} = \\ &= \frac{(N+1)\int_0^{+\infty} L_{n-N}^{(N)} (I-D)^N D^N L_i^{(-N)} \rho(x) dx}{\tilde{k}_i}, \end{aligned}$$

y, por ser $(I-D)^N D^N L_i^{(-N)}$ un polinomio de grado $i-N$, concluimos que si $i < n$ entonces, $a_{n,i} = 0$.
ii) Multiplicando la relación del apartado i) por $(N+1)\dfrac{n!}{(n-N)!}$, usando la proposición 3.5.8 y la expresión (3.5.6), deducimos que

$$\begin{aligned} (N+1)\frac{n!}{(n-N)!} x^N L_{n-N}^{(N)}(x) &= (N+1)\frac{n!}{(n-N)!} L_n^{(-N)}(x) = \\ &= \mathcal{F}^{(N)} L_n^{(-N)}(x) = (N+1)x^N (I-D)^N D^N L_n^{(-N)}, \end{aligned}$$

y, simplificando $(N+1)x^N$, llegamos al resultado. □

3.6 Ceros de los polinomios $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$

Esta sección del capítulo la dedicamos a hacer un estudio de los ceros de los polinomios de Laguerre generalizados $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq 0}$, para $N \geq 1$ un número entero dado, y de su distribución.

Para ello, tomamos la expresión explícita (3.2.1) con $\alpha = -N$ del n-ésimo polinomio mónico de Laguerre:

$$L_n^{(-N)}(x) = (-1)^n n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n-N}{n-j} x^j, \quad n \geq 0,$$

donde $x \in [0, +\infty)$.

El estudio de las raíces de estos polinomios de Laguerre lo dividimos en dos partes: en la primera, consideramos la sucesión de los polinomios mónicos de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n\geq N}$ y, en la segunda parte, estudiamos los ceros para los N primeros polinomios de Laguerre, esto es, $\{L_n^{(-N)}\}_{n=0,1,\dots,N-1}$.

3.6.1 Estudio de los ceros para $n \geq N$

En esta parte de la sección hacemos el estudio de los ceros de los polinomios de Laguerre cuyo grado es superior o igual a N.

Proposición 3.6.1 *(Szegő [158]) Para cada valor de $n \geq N$, el polinomio de Laguerre $L_n^{(-N)}$ tiene $(n - N)$ ceros reales y simples dentro del intervalo $[0, +\infty)$ que se intercalan con los $(n + 1 - N)$ ceros reales del polinomio $L_{n+1}^{(-N)}$ y, además, tiene a 0 como raíz de multiplicidad N.*

Demostración:

Basta recordar la relación (3.5.1):

$$L_n^{(-N)}(x) = x^N L_{n-N}^{(N)}(x),$$

y, por lo tanto, deducimos que el polinomio de Laguerre generalizado $L_n^{(-N)}$ tiene a 0 como raíz de multiplicidad N y que el resto de los ceros son los ceros del polinomio clásico de Laguerre $L_{n-N}^{(N)}$, que tiene $(n - N)$ ceros reales y simples localizados en el interior del intervalo $[0, +\infty)$ que se intercalan con las raíces del polinomio $L_{n+1-N}^{(N)}$. □

3.6.2 Estudio de los ceros para $0 \leq n \leq N - 1$

Estudiamos los ceros de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_{n=0}^{N-1}$. En la siguiente proposición demostramos que los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}$, para $0 \leq n \leq N - 1$, no tienen raíces reales dentro del intervalo $[0, +\infty)$.

Proposición 3.6.2 *El polinomio $L_n^{(-N)}$ no tiene raíces reales positivas. Además, el cero tampoco es raíz.*

Demostración:

A partir de la expresión explícita (3.2.1) para $\alpha = -N$, podemos escribir

$$L_n^{(-N)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (N - n)_{n-j} x^j, \tag{3.6.1}$$

y, teniendo en cuenta que para $0 \leq n \leq N - 1$, todos los coeficientes de (3.6.1) son positivos, deducimos que el polinomio $L_n^{(-N)}$ no tiene raíces reales positivas.

Además, de (3.6.1) para $x = 0$, obtenemos que, $L_n^{(-N)}(0) = (N-n)_n > 0$, esto es, el cero no es raíz del polinomio de Laguerre. □

De este modo, estudiamos las raíces reales de los N primeros polinomios de Laguerre localizadas fuera del intervalo $[0, +\infty)$, aplicando la técnica de Sturm (ver definición 1.3.5 y teorema 1.3.6). La clave para la aplicación de este método reside en la relación de recurrencia a tres términos que verifican estos polinomios.

Sin embargo, aunque los polinomios de Laguerre $L_n^{(-N)}$ verifican una relación de recurrencia a tres términos

$$L_{n+1}^{(-N)} = \left(x - \beta_n^{(-N)}\right) L_n^{(-N)}(x) - \gamma_n^{(-N)} L_{n-1}^{(-N)}(x),$$

con $\gamma_n^{(-N)} = n(n-N)$, no puede constituir una sucesión de Sturm puesto que

$$\gamma_n^{(-N)} < 0, \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{3.6.2}$$

De esta forma, es necesario definir una nueva familia de polinomios cuyas raíces coincidan con las de los polinomios $L_n^{(-N)}$, $0 \leq n \leq N-1$, y que sí formen una sucesión de Sturm.

Definición 3.6.3 *Se define el n-ésimo polinomio F_n en la siguiente forma*

$$F_n(x) = (-1)^{[\frac{n}{2}]} L_n^{(-N)}(x), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

A partir de esta definición, es posible probar que la familia de polinomios $\{F_n\}_{n=0}^{N-1}$ forman una sucesión de Sturm.

Proposición 3.6.4 *La sucesión $\{F_n, F_{n-1}, \ldots, F_0\}$, con $0 \leq n \leq N-1$, constituye una sucesión de Sturm en cualquier intervalo cerrado contenido en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Demostración:

Vamos a comprobar que los polinomios F_n verifican las condiciones necesarias para ser una sucesión de Sturm, (ver definición 1.3.5).

a) En primer lugar, necesitamos probar que el polinomio F_n no tiene ceros múltiples en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pero de la definición 3.6.3, basta probarlo para el polinomio de Laguerre $L_n^{(-N)}$. Escribiendo la ecuación diferencial de segundo orden (3.2.5) para $\alpha = -N$, tenemos

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n^{(-N)}(x) + (1 - N - x) \frac{d}{dx} L_n^{(-N)}(x) + n L_n^{(-N)}(x) = 0. \tag{3.6.3}$$

Sea $r \neq 0$ una raíz doble del polinomio de Laguerre $L_n^{(-N)}$, y tomemos $x = r$ en (3.6.3), con lo que queda

$$r \frac{d^2}{dx^2} L_n^{(-N)}(r) = 0, \tag{3.6.4}$$

luego r es también raíz de $\frac{d^2}{dx^2}L_n^{(-N)}(x)$, es decir, r es raíz triple. Si, ahora, derivamos en (3.6.3) reiteradas veces y, aplicamos este mismo razonamiento, llegaríamos a que r sería raíz de la derivada de cualquier orden del polinomio $L_n^{(-N)}(x)$ y, por lo tanto,

$$L_n^{(-N)}(x) = (x-r)^n,$$

lo que contradice a (3.6.1).

b) En el caso en que $n = 0$, de la definición 3.6.3, se tiene que $F_0(x) = L_0^{(-N)}(x) = 1$, con lo que deducimos que el polinomio F_0 no se anula en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Sea $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y supongamos que existe algún j con $0 < j < n$, tales que $F_j(r) = 0$. Hay que demostrar que $F_{j-1}(r)$ y $F_{j+1}(r)$ tienen signos opuestos. A partir de la relación de recurrencia a tres términos (3.2.2), para los polinomios $\{L_n^{(-N)}\}_{n=0}^{N-1}$, es posible demostrar que los polinomios $\{F_n\}_{n=0}^{N-1}$ verifican la relación de recurrencia a tres términos:

$$\begin{aligned} F_{-1}(x) &= 0, \quad F_0(x) = 1, \\ F_{n+1}(x) &= (-1)^n \left(x - \beta_n^{(-N)}\right) F_n(x) + \gamma_n^{(-N)} F_{n-1}(x), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

De este modo, $F_{j+1}(r) = \gamma_j^{(-N)} F_{j-1}(r)$, y, usando la relación (3.6.2), concluimos que $F_{j+1}(r)$ y $F_{j-1}(r)$ tienen signos opuestos.

d) Sea $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $F_n(r) = 0$. Para demostrar que $F_n'(r)$ y $F_{n-1}(r)$ tienen el mismo signo (o signo opuesto), utilizamos la relación de estructura para los polinomios $\{L_n^{(-N)}\}_{n=0}^{N-1}$ (3.2.4), escrita en términos de los polinomios $\{F_n\}_{n=0}^{N-1}$

$$xF_n'(x) = nF_n(x) + (-1)^{n-1} n(n-N) F_{n-1}(x), \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{3.6.6}$$

Sustituyendo $x = r$, obtenemos

$$rF_n'(r) = (-1)^{n-1} n(n-N) F_{n-1}(r), \tag{3.6.7}$$

luego

$$\operatorname{signo}(rF_n'(r)) = \operatorname{signo}((-1)^n F_{n-1}(r)). \tag{3.6.8}$$

Así, si n es par y $r > 0$, de (3.6.8), tenemos que $F_n'(r)F_{n-1}(r) > 0$, y si $r < 0$, entonces $F_n'(r)$ y $F_{n-1}(r)$ tienen signos opuestos.

Cuando n es impar y $r > 0$, de la igualdad (3.6.8), deducimos que $F_n'(r)F_{n-1}(r) < 0$; y para $r < 0$, se verifica que $F_n'(r)$ y $F_{n-1}(r)$ tienen el mismo signo. De este modo, siempre se cumple la condición d). □

Estamos en condiciones de aplicar el teorema de Sturm, (ver teorema 1.3.6), a los polinomios $\{F_n\}_n$, y deducir los ceros reales de los polinomios de Laguerre $\{L_n^{(-N)}\}_n$.

Proposición 3.6.5 *Sea* $0 \leq n \leq N-1$. *Se verifica*
i) Cuando n *es un número par, el polinomio de Laguerre* $L_n^{(-N)}$ *no tiene raíces reales negativas.*

ii) Para n *un número impar, el polinomio de Laguerre* $L_n^{(-N)}$ *tiene una única raíz real negativa.*

Demostración:
Calculamos el signo del polinomio F_n en cero.
a) Si tomamos $x = 0$ en la definición 3.6.3, tenemos que $F_n(0) = (-1)^{[\frac{n}{2}]} L_n^{(-N)}(0)$, de donde usando que $L_n^{(-N)}(0) = (N-n)_n > 0$, queda

$$\operatorname{signo}(F_n(0)) = (-1)^{[\frac{n}{2}]},$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{signo}(\{F_n(0), F_{n-1}(0), \dots, F_0(0)\}) = \{(-1)^{[\frac{n}{2}]}, (-1)^{[\frac{n-1}{2}]}, \dots, (-1)^{[\frac{0}{2}]}\},$$

con lo que hay $[n/2]$ cambios de signo al evaluar la sucesión de Sturm en cero.

b) Estudiamos, ahora, los cambios de signo de la sucesión de Sturm $\{F_n\}_{n \geq 0}$ en $-\infty$. En lo que sigue, notaremos por $f(-\infty)$ al límite de la función f en $-\infty$.

Usando la definición 3.6.3 y el hecho de que los polinomios de Laguerre son mónicos, obtenemos que

$$\operatorname{signo}(F_n(-\infty)) = \begin{cases} (-1)^{[\frac{n}{2}]}, & \text{si } n = \text{par}, \\ (-1)^{[\frac{n}{2}]+1}, & \text{si } n = \text{impar}. \end{cases}$$

De esta forma, deducimos que

$$\operatorname{signo}(\{F_n(-\infty), F_{n-1}(-\infty), \dots, F_1(-\infty), F_0(-\infty)\}) =$$
$$= \begin{cases} \{(-1)^{[\frac{n}{2}]}, (-1)^{[\frac{n-1}{2}]+1}, \dots, (-1)^{[\frac{1}{2}]+1}, (-1)^{[\frac{0}{2}]}\}, & \text{si } n = \text{par}, \\ \{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}, (-1)^{[\frac{n-1}{2}]}, \dots, (-1)^{[\frac{1}{2}]+1}, (-1)^{[\frac{0}{2}]}\}, & \text{si } n = \text{impar}, \end{cases}$$

y, por lo tanto, cuando n es un número par hay $[n/2]$ cambios de signo y para n un número impar hay $[n/2]+1$ cambios de signo. Aplicando el teorema de Sturm y distinguiendo los dos casos posibles para n, llegamos al resultado. □

Podemos resumir los resultados de las proposiciones 3.6.2 y 3.6.5:

Proposición 3.6.6 *Sea* $0 \leq n \leq N-1$. *Se verifica:*
i) Si n *es un número par, los polinomios de Laguerre* $L_n^{(-N)}$ *no tienen raíces reales.*

ii) Los polinomios de Laguerre generalizados de grado impar tienen una única raíz real.

Nota. Los resultados obtenidos en esta última proposición coinciden con los que obtiene G. Szegö para los polinomios de Laguerre generalizados, en [158], p. 151.

Capítulo 4

Polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$

4.1 Introducción

Los polinomios clásicos de Gegenbauer, $\{P_n^{(\lambda)}\}$, los define G. Szegö, en [158] p. 80, como aquellos polinomios que son ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx, \quad \lambda > -\frac{1}{2},$$

definido para cualesquiera polinomios f y g del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$.

Asímismo, es conocido, (ver (4.7.31) en [158], p. 84), que estos polinomios de Gegenbauer admiten, para cada valor real del parámetro $\lambda > -\frac{1}{2}$, la expresión explícita siguiente

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m\Gamma(n-m+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(m+1)\Gamma(n-2m+1)}(2x)^{n-2m}, \quad n \geq 0. \tag{4.1.1}$$

Llamando $C_n^{(\lambda)}$ al polinomio que se obtiene de multiplicar el polinomio $P_n^{(\lambda)}$ por el inverso de su coeficiente líder, de (4.1.1), se deduce que la expresión explícita del n-ésimo polinomio mónico de Gegenbauer viene dada por

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{n!}{2^n\Gamma(n+\lambda)} \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m\Gamma(n-m+\lambda)}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}, \quad n \geq 0, \quad \lambda > -\frac{1}{2}, \tag{4.1.2}$$

y simplificando las funciones Gamma que aparecen, se deduce que

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{n!}{2^n} \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m}{(\lambda+n-m)_m m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}, \quad n \geq 0, \quad \lambda > -\frac{1}{2}, \tag{4.1.3}$$

donde $(\lambda + n - m)_m$ representa el símbolo de Pochhammer.

Podemos notar que esta expresión tiene sentido para cualquier valor real del parámetro $\lambda \neq -l$, con $l = 1, 2, 3, \ldots$, lo cual, permite extender la definición de los polinomios de Gegenbauer.

Dado el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq -1, -2, -3, \ldots$, se considera la expresión explícita (4.1.3) que define a cada polinomio mónico de Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}$. A partir de esta expresión, podemos deducir que estos polinomios verifican la relación de recurrencia a tres términos

$$\begin{aligned} C_{-1}^{(\lambda)}(x) &= 0, \quad C_0^{(\lambda)}(x) = 1, \\ xC_n^{(\lambda)}(x) &= C_{n+1}^{(\lambda)}(x) + \gamma_n^{(\lambda)} C_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

donde

$$\gamma_n^{(\lambda)} = \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)}.$$

Si, además, el número real λ verifica que $\lambda \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$, se tiene que $\gamma_n^{(\lambda)} \neq 0$ para todo $n \geq 1$, y el teorema de Favard (ver el teorema 1.3.2), nos asegura que la sucesión $\{C_n^{(\lambda)}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto a un funcional lineal cuasi–definido. Para $\lambda > -\frac{1}{2}$, el funcional lineal es definido positivo y los polinomios son ortogonales con respecto a la función peso $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ en el intervalo $[-1, 1]$. En el caso en que $\lambda = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \ldots$, como $\gamma_n^{(\lambda)}$ se anula para algún valor de n, no es posible deducir propiedades de ortogonalidad a partir del teorema de Favard.

El propósito de este capítulo es hacer un estudio de la familia de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, donde $N \geq 1$ es un número entero dado.

Describiremos, la estructura del trabajo. En la sección 2 haremos un estudio de la sucesión de los polinomios mónicos de Gegenbauer $\{C_n^{(\lambda)}\}_{n\geq 0}$, para $\lambda \neq -1, -2, -3, \ldots$. En una primera parte, se da la expresión explícita del n–ésimo polinomio de Gegenbauer, $C_n^{(\lambda)}$, observándose que para valores reales del parámetro λ que no sean enteros negativos, se obtiene una familia de polinomios de grado exacto n. Asímismo, a partir de esta expresión explícita, para $\lambda \neq -1, -2, -3, \ldots$, demostraremos que, las propiedades usuales que verifican los polinomios clásicos de Gegenbauer como son: relación de recurrencia a tres términos, relación diferencial, ecuación diferencial de segundo orden ..., se siguen verificando. En la segunda parte de la sección, deduciremos propiedades específicas cuando el parámetro $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, para $N = 1, 2, 3, \ldots$

A continuación, en la sección 3, demostraremos que la sucesión de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, es ortogonal con respecto a un producto escalar discreto–continuo no diagonal que involucra derivadas. De hecho, obtendremos que estos polinomios son ortogonales con respecto a un producto escalar de Sobolev no diagonal.
De esta forma, dotaremos de propiedades de ortogonalidad a la familia de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, resultado éste que por el teorema de Favard no era posible, al

anularse el coeficiente $\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ que aparece en la relación de recurrencia a tres términos que verifican estos polinomios.

El apartado 4 del capítulo lo dedicaremos al estudio de un operador diferencial, que notaremos por $\mathcal{F}^{(N)}$, definido sobre el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales $\mathbb{P}$, que es simétrico con respecto al producto escalar de Sobolev. A partir de este operador, estableceremos una serie de relaciones diferenciales lineales entre los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$ y los polinomios clásicos de Gegenbauer $\{C_n^{(N+\frac{1}{2})}\}_n$.

En la última parte, haremos un estudio de los ceros de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$ localizados en el interior y el exterior del intervalo $[-1,1]$. Este estudio se divide en dos casos: primero se hace el estudio de los ceros para los polinomios de Gegenbauer con grado superior o igual que $2N$ y, después, para los $2N$ primeros polinomios de Gegenbauer. Los resultados que obtendremos coinciden con los que obtiene G. Szegő para los polinomios de Jacobi generalizados, en [158], p. 144-146.

De este modo, deduciremos que: El polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, para $n \geq 2N$, tiene a 1 y a -1 como ceros de multiplicidad N, cada uno, y, además, tiene $(n-2N)$ ceros reales y simples dentro del intervalo $[-1,1]$ que se intercalan con los ceros del polinomio $C_{n+1}^{(-N+\frac{1}{2})}$. Si $N+1 \leq n \leq 2N-1$, tendremos que el polinomio de Gegenbauer tiene $2N - \left[\frac{n}{2}\right]$ raíces imaginarias puras y si n es impar, una de las raíces es el cero. Además, cuando $n-N$ es par no tiene raíces reales y si $n-N$ es impar posee dos raíces reales en $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Para $0 \leq n \leq N$, el polinomio $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ tiene todas las raíces imaginarias puras y si n es un número impar, una de las raíces es el cero.

4.2 Los polinomios de Gegenbauer

Dado $\lambda > -\frac{1}{2}$ un número real, la expresión explícita del n-ésimo polinomio mónico de Gegenbauer viene dada por (4.1.3):

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{n!}{2^n} \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m}{(\lambda+n-m)_m m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}, \quad n \geq 0. \qquad (4.2.1)$$

Es bien conocido que, para $\lambda > -\frac{1}{2}$ la sucesión $\{C_n^{(\lambda)}\}_{n\geq 0}$ constituye una sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a la función peso $\rho(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ sobre el intervalo $[-1,1]$.

Podemos observar que para cada valor real del parámetro $\lambda \neq -l$, con $l = 1,2,3,\ldots$, la expresión (4.2.1) permite definir un polinomio mónico de grado exacto n. De este modo, para $\lambda \neq -l$, con $l = 1,2,3,\ldots$, tiene sentido definir la familia de los polinomios mónicos de Gegenbauer $\{C_n^{(\lambda)}\}_{n\geq 0}$ que es una base del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$. En lo que sigue, los llamaremos *polinomios de Gegenbauer generalizados.*

Además, de la expresión explícita (4.2.1), se deduce que los polinomios de Gegenbauer de grado par sólo contienen potencias de x que son pares y los polinomios de grado impar, sólo potencias impares de x.

Haciendo unos simples cálculos en la expresión explícita es posible demostrar que las principales propiedades de los polinomios clásicos de Gegenbauer se siguen verificando, para cada valor real del parámetro $\lambda \neq -l$, con $l = 1, 2, 3, \ldots$, como mostramos en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1 *Sea λ un número real arbitrario con $\lambda \neq -l$, para $l = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces, los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(\lambda)}\}_n$, verifican las siguientes propiedades:*
i) Propiedad de simetría

$$C_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\lambda)}(x). \tag{4.2.2}$$

ii) Relación de recurrencia a tres términos

$$\begin{aligned} C_{-1}^{(\lambda)}(x) &= 0, \quad C_0^{(\lambda)}(x) = 1, \\ xC_n^{(\lambda)}(x) &= C_{n+1}^{(\lambda)}(x) + \gamma_n^{(\lambda)} C_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

donde

$$\gamma_n^{(\lambda)} = \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)}.$$

iii) Relación diferencial

$$DC_n^{(\lambda)}(x) = nC_{n-1}^{(\lambda+1)}(x), \tag{4.2.4}$$

donde $D = \dfrac{d}{dx}$.
iv) Si $0 \leq k \leq n$ es un número entero, se cumple que

$$D^k C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} C_{n-k}^{(\lambda+k)}(x). \tag{4.2.5}$$

v) Ecuación diferencial de segundo orden

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0, \tag{4.2.6}$$

donde $y = C_n^{(\lambda)}(x)$, es la única solución polinómica de (4.2.6).
vi) Relación de estructura

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}C_n^{(\lambda)}(x) = -nxC_n^{(\lambda)}(x) + \frac{n(n+2\lambda-1)}{2(n+\lambda-1)}C_{n-1}^{(\lambda)}(x). \tag{4.2.7}$$

Hemos visto que, el parámetro $\gamma_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}$, de la relación de recurrencia a tres términos (4.2.3), para $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, se anula. Por lo tanto, a partir del teorema de Favard, no se pueden deducir propiedades de ortogonalidad para la sucesión $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, con $N = 1, 2, 3, \ldots$.

Con el fin de obtener propiedades de ortogonalidad para los polinomios mónicos de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$, con $N = 1, 2, 3, \ldots$, demostramos, a continuación, algunas propiedades más para estos polinomios de Gegenbauer.

Proposición 4.2.2 *Sea $N \geq 1$, un número entero positivo dado, entonces los polinomios mónicos de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$ cumplen las siguientes propiedades:*

i) $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-1) = (-1)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1)$.

ii) $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = \dfrac{(-2N+1)_n}{2^n(-N+\frac{1}{2})_n}, \quad n \geq 0.$

iii) $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = \left(\dfrac{-2N+n}{-2N+2n-1}\right) C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(1), \quad n \geq 1.$

iv) $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-1) = 0$, *para* $n \geq 2N$.

v) $D^k C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = \dfrac{n!}{(n-k)!} \dfrac{(-2N+2k+1)_{n-k}}{2^{n-k}(-N+k+\frac{1}{2})_{n-k}}$, *para* $n \geq k$.

vi) $D^k C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = D^k C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-1) = 0$, *para* $0 \leq k \leq N, \quad n \geq 2N$.

Demostración:

i) Se deduce de la propiedad de simetría (4.2.2) para los polinomios $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$.

ii) Evaluando la expresión explícita (4.2.1) en el punto 1, tenemos que

$$C_n^{(\lambda)}(1) = \frac{\binom{n+2\lambda-1}{n}}{2^n \binom{n+\lambda-1}{n}} = \frac{(2\lambda)_n}{2^n(\lambda)_n},$$

y, si sustituimos λ por $-N + \frac{1}{2}$, llegamos al resultado.

iii) Usando el apartado ii), primero para el polinomio $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ y, después, para el polinomio $C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}$, con $n \geq 1$, deducimos que

$$\begin{aligned} C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) &= \frac{(-2N+1)_n}{2^n(-N+\frac{1}{2})_n} = \frac{(-2N+n)}{2(-N+n-\frac{1}{2})} \frac{(-2N+1)_{n-1}}{2^{n-1}(-N+\frac{1}{2})_{n-1}} = \\ &= \frac{(-2N+n)}{(-2N+2n-1)} C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(1). \end{aligned}$$

iv) En el caso en que $n \geq 2N$, si usamos el apartado iii) tenemos que $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = 0$ y, por la simetría, también $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-1)$ vale cero.

v) Basta tomar la relación diferencial (4.2.5), para $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, evaluarla en 1 y, aplicar ii) al polinomio $C_{n-k}^{(-N+\frac{1}{2}+k)}$.

vi) Para $0 \leq k \leq N$ y $n \geq 2N$, obtenemos que $(-2N + 2k + 1)_{n-k}$ se anula, con lo que sustituyendo en el apartado v) y, usando la simetría de los polinomios de Gegenbauer, concluimos el resultado. □

Proposición 4.2.3 *Para cada valor de $N \geq 1$, el polinomio de Gegenbauer $C_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}$ se expresa como:*

$$C_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = (x^2 - 1)^N. \tag{4.2.8}$$

Demostración:

Del apartado vi) de la proposición 4.2.2, para $n = 2N$, deducimos que

$$D^k C_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = D^k C_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}(-1) = 0,$$

para $0 \leq k \leq N$, es decir, los puntos -1 y 1 son ceros de multiplicidad N del polinomio $C_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}$. □

El siguiente resultado nos muestra que, para cada valor de $n \geq 2N$, el polinomio mónico de Gegenbauer generalizado $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ se expresa en términos del polinomio clásico de Gegenbauer $C_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}$, (ver (4.7.35) en [158], p. 84).

Proposición 4.2.4 *Dado $n \geq 2N$, el polinomio mónico de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ verifica la siguiente igualdad*

$$C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = (x^2 - 1)^N C_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}(x). \tag{4.2.9}$$

Demostración:

Si tomamos en la ecuación (4.2.9), $n = 2N$, claramente se verifica

$$C_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = (x^2 - 1)^N C_0^{(N+\frac{1}{2})}(x),$$

usando (4.2.8). Consideramos $n = 2N + 1$, en la relación de recurrencia (4.2.3) para $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, si tenemos en cuenta que $\gamma_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})} = 0$ y usamos (4.2.8), obtenemos que

$$C_{2N+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = xC_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) - \gamma_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})} C_{2N-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = xC_{2N}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = x(x^2 - 1)^N. \tag{4.2.10}$$

Por otra parte, de (4.2.3) para $n = 0$ y $\lambda = N + \frac{1}{2}$, deducimos que $C_1^{(N+\frac{1}{2})}(x) = x$, de donde multiplicando por el polinomio $(x^2-1)^N$, queda

$$(x^2-1)^N C_1^{(N+\frac{1}{2})}(x) = x(x^2-1)^N,$$

y, comparando con (4.2.10), concluimos que

$$C_{2N+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = (x^2-1)^N C_1^{(N+\frac{1}{2})}(x).$$

Tomemos, entonces, $n \geq 2N+1$. Escribiendo la relación de recurrencia a tres términos (4.2.3) para los polinomios $\{C_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 2N}$, tenemos que

$$xC_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}(x) = C_{n-2N+1}^{(N+\frac{1}{2})}(x) + \gamma_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})} C_{n-2N-1}^{(N+\frac{1}{2})}(x), \tag{4.2.11}$$

donde

$$\gamma_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})} = \frac{(n-2N)(n-2N+2(N+\frac{1}{2})-1)}{4(n-2N+N+\frac{1}{2})(n-2N+N+\frac{1}{2}-1)} = \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}.$$

Usando un razonamiento inductivo, deducimos, a partir de (4.2.11), que la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios $(x^2-1)^N C_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}$ es la misma relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, con lo que llegamos al resultado. $\square$

4.3 Ortogonalidad Sobolev para los polinomios $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$

Sea $N \geq 1$ un entero dado. Se considera $\mathbf{A}$ una matriz simétrica y definida positiva de orden $2N$. La expresión

$$(f,g)_S = (\,F(1)|F(-1)\,)\,\mathbf{A}\,(\,G(1)|G(-1)\,)^T + \int_{-1}^{1} f^{(2N)}(x)g^{(2N)}(x)(1-x^2)^N dx, \tag{4.3.1}$$

donde

$$(\,F(1)|F(-1)\,) = (\,f(1), f'(1), \ldots, f^{(N-1)}(1), f(-1), f'(-1), \ldots, f^{(N-1)}(-1)\,),$$

define un producto escalar sobre el espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{P}$. Nuestro propósito, en esta sección, es demostrar que es posible encontrar matrices $\mathbf{A}$, tales que la sucesión de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$ sea ortogonal con respecto al producto escalar (4.3.1).

Proposición 4.3.1 *Sea $N \geq 1$, un número entero positivo dado. Entonces, existe una matriz de orden $2N$ simétrica y definida positiva, $\mathbf{A}$, tal que la sucesión $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto al producto escalar de Sobolev definido en (4.3.1).*

Demostración:

Usando el apartado iv) de la proposición 4.2.2, tenemos que

$$C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-1) = 0,$$

para $n \geq 2N$. Por otra parte, de la propiedad de diferenciación (4.2.5), para $k = 2N$ y $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, deducimos que

$$D^{2N} C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \frac{n!}{(n-2N)!} C_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}(x),$$

para $n \geq 2N$. Por lo tanto, el polinomio $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, para $n \geq 2N$, es ortogonal al espacio vectorial $\mathbb{P}_{n-1}$ con respecto a un producto escalar de Sobolev como (4.3.1), para cada matriz de orden $2N$ simétrica y definida positiva $\mathbf{A}$.

En este sentido, lo único que hay que hacer es construir la matriz simétrica y definida positiva $\mathbf{A}$, para obtener la ortogonalidad para los $2N$ primeros polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n=0,\ldots,2N-1}$. Para ello, construimos otra matriz de orden $2N$ e inversible, que llamaremos $\mathbf{Q}$, cuyos elementos se obtienen a partir de los valores de las derivadas de los polinomios de Gegenbauer en los puntos -1 y 1. Llamamos

$$\mathbf{Q} = (\,\mathbf{Q}(1)|\mathbf{Q}(-1)\,)_{2N\times 2N},$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(1) &= \left(D^k C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1)\right)_{\substack{n=0,\ldots,2N-1,\\ k=0,\ldots,N-1}}\\
\mathbf{Q}(-1) &= \left(D^k C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-1)\right)_{\substack{n=0,\ldots,2N-1,\\ k=0,\ldots,N-1}}
\end{aligned}$$

Se verifica que la matrix $\mathbf{Q}$ es inversible ya que se puede expresar como el producto de otras dos matrices regulares. Con este fin, expresamos los polinomios $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$ en potencias del polinomio x

$$C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,j} x^j, \quad p_{n,n} \neq 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{4.3.2}$$

Sea $\mathbf{P}$ la matriz regular formada por los coeficientes $p_{n,j}$, para $0 \leq j \leq n$ y $0 \leq n \leq 2N-1$:

Proposición 4.3.1 *Sea $N \geq 1$, un número entero positivo dado. Entonces, existe una matriz de orden $2N$ simétrica y definida positiva, $\mathbf{A}$, tal que la sucesión $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto al producto escalar de Sobolev definido en (4.3.1).*

Demostración:

Usando el apartado iv) de la proposición 4.2.2, tenemos que

$$C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1) = C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-1) = 0,$$

para $n \geq 2N$. Por otra parte, de la propiedad de diferenciación (4.2.5), para $k = 2N$ y $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, deducimos que

$$D^{2N} C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \frac{n!}{(n-2N)!} C_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}(x),$$

para $n \geq 2N$. Por lo tanto, el polinomio $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, para $n \geq 2N$, es ortogonal al espacio vectorial $\mathbb{P}_{n-1}$ con respecto a un producto escalar de Sobolev como (4.3.1), para cada matriz de orden $2N$ simétrica y definida positiva $\mathbf{A}$.

En este sentido, lo único que hay que hacer es construir la matriz simétrica y definida positiva $\mathbf{A}$, para obtener la ortogonalidad para los $2N$ primeros polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n=0,\ldots,2N-1}$. Para ello, construimos otra matriz de orden $2N$ e inversible, que llamaremos $\mathbf{Q}$, cuyos elementos se obtienen a partir de los valores de las derivadas de los polinomios de Gegenbauer en los puntos -1 y 1. Llamamos

$$\mathbf{Q} = (\,\mathbf{Q}(1)|\mathbf{Q}(-1)\,)_{2N\times 2N}\,,$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(1) &= \left(D^k C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1)\right)_{\substack{n=0,\ldots,2N-1,\\ k=0,\ldots,N-1}} \\
\mathbf{Q}(-1) &= \left(D^k C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-1)\right)_{\substack{n=0,\ldots,2N-1,\\ k=0,\ldots,N-1}}
\end{aligned}$$

Se verifica que la matrix $\mathbf{Q}$ es inversible ya que se puede expresar como el producto de otras dos matrices regulares. Con este fin, expresamos los polinomios $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$ en potencias del polinomio x

$$C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,j} x^j, \quad p_{n,n} \neq 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{4.3.2}$$

Sea $\mathbf{P}$ la matriz regular formada por los coeficientes $p_{n,j}$, para $0 \leq j \leq n$ y $0 \leq n \leq 2N-1$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2N-1,0} & p_{2N-1,1} & \cdots & p_{2N-1,2N-1} \end{pmatrix}.$$

Consideramos la matriz, $\mathbf{H}(x)$ de dimensión $2N \times N$, formada por las N primeras derivadas de los elementos de la base de Hamel del espacio vectorial $\mathbb{P}_{2N-1}$, es decir

$$\mathbf{H}(x) = \left(D^k(x^j) \right)_{\substack{j=0,\ldots,2N-1, \\ k=0,\ldots,N-1}},$$

y denotamos por $\mathbf{V}$, la matriz cuadrada de orden $2N$, definida a partir de $\mathbf{H}(x)$ como sigue

$$\mathbf{V} = \left(\mathbf{H}(1) | \mathbf{H}(-1) \right).$$

La matriz $\mathbf{V}$ es una matriz de Vandermonde generalizada y, por lo tanto, regular. Por otra parte, usando la ecuación (4.3.2), tenemos que $\mathbf{Q} = \mathbf{P}.\mathbf{V}$, de donde deducimos que $\mathbf{Q}$ es inversible.

Dada una matriz diagonal, $\mathbf{D}$, de orden $2N$ con elementos positivos en la diagonal, definimos la matriz $\mathbf{A}$ del producto escalar (4.3.1) como

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T.$$

Podemos comprobar fácilmente, que la matriz $\mathbf{A}$ es simétrica y definida positiva, y que la sucesión de los polinomios mónicos $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto al producto escalar (4.3.1). □

4.4 El operador lineal $\mathcal{F}^{(N)}$

Dado $N \geq 0$ un número entero, definimos el operador diferencial $\mathcal{F}^{(N)}$ sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$, en la forma siguiente

$$\mathcal{F}^{(N)} = (1-x^2)^N D^{2N}[(1-x^2)^N D^{2N}], \tag{4.4.1}$$

donde D denota el operador derivada. En este sentido, $\mathcal{F}^{(N)}$ es un operador diferencial de orden $4N$ que se anula para cada polinomio de grado menor o igual que $2N-1$.

Un cálculo directo nos muestra que, el operador lineal $\mathcal{F}^{(N)}$ mantiene el grado de los polinomios, de hecho tenemos que

$$\mathcal{F}^{(N)}x^n = F(n,N)x^n + \ldots, \quad n \geq 2N, \tag{4.4.2}$$

donde $F(n,N)$ denota el coeficiente líder del polinomio $\mathcal{F}^{(N)}x^n$.

A continuación, se deduce la expresión de este coeficiente $F(n,N)$.

Proposición 4.4.1 *Si $N \geq 1$ es un número entero dado, entonces el coeficiente $F(n,N)$ vale*

$$F(n,N) = \left(\frac{n!}{(n-2N)!}\right)^2, \quad n \geq 2N.$$

Demostración:

Aplicando el operador lineal $\mathcal{F}^{(N)}$ al polinomio x^n, para $n \geq 2N$, de la expresión (4.4.1), obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(N)}x^n &= (1-x^2)^N D^{2N}[(1-x^2)^N D^{2N}x^n] = \\ &= \frac{n!}{(n-2N)!}(1-x^2)^N D^{2N}[(1-x^2)^N x^{n-2N}]. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Por otra parte, es conocido que

$$(1-x^2)^N = (-1)^N(x^2-1)^N = (-1)^N \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^j (x^2)^{N-j}. \tag{4.4.4}$$

Sustituyendo la expresión (4.4.4) en (4.4.3), deducimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(N)}x^n &= \frac{n!}{(n-2N)!}(1-x^2)^N(-1)^N \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^j D^{2N}[x^{n-2j}] \\ &= \frac{n!}{(n-2N)!}(1-x^2)^N(-1)^N \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^j \frac{(n-2j)!}{(n-2j-2N)!} x^{n-2j-2N}, \end{aligned}$$

donde se considera, por convenio, que si $n-2j-2N < 0$, entonces $D^{2N}[x^{n-2j}] = x^{n-2j-2N} = 0$. Identificando coeficientes líderes, llegamos a

$$F(n,N) = \frac{n!}{(n-2N)!}(-1)^N(-1)^N \frac{n!}{(n-2N)!} = \left(\frac{n!}{(n-2N)!}\right)^2. \quad \square$$

El siguiente resultado nos muestra que este operador $\mathcal{F}^{(N)}$ nos permite obtener una representación del producto escalar de Sobolev no diagonal (4.3.1), en términos del producto escalar asociado a la función peso $\rho^{(N)}(x) = (1-x^2)^N$.

Proposición 4.4.2 *Sean f y g dos polinomios arbitrarios de $\mathbb{P}$. Se verifica*

$$\left((1-x^2)^{2N}f, g\right)_S = \int_{-1}^{1} f(x)\mathcal{F}^{(N)}g(x)(1-x^2)^N dx.$$

Demostración:

Como 1 y -1 son ceros de multiplicidad N del polinomio $(1-x^2)^N$ entonces, de (4.3.1), tenemos que

$$\left((1-x^2)^{2N}f,g\right)_S = \int_{-1}^{1} D^{2N}[(1-x^2)^{2N}f(x)]D^{2N}g(x)(1-x^2)^N dx.$$

Si integramos por partes $2N$ veces, deducimos que

$$\left((1-x^2)^{2N}f,g\right)_S = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{2N}f(x)D^{2N}[D^{2N}g(x)(1-x^2)^N]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\mathcal{F}^{(N)}g(x)(1-x^2)^N dx. \quad \square$$

Teorema 4.4.3 *El operador lineal $\mathcal{F}^{(N)}$ es simétrico con respecto al producto escalar de Sobolev (4.3.1), es decir*

$$(\mathcal{F}^{(N)}f,g)_S = (f,\mathcal{F}^{(N)}g)_S.$$

Demostración:

Del producto escalar (4.3.1) y de la expresión (4.4.1) del operador lineal $\mathcal{F}^{(N)}$, tenemos que

$$(\mathcal{F}^{(N)}f,g)_S = \int_{-1}^{1} D^{2N}\left[\mathcal{F}^{(N)}f(x)\right]D^{2N}g(x)(1-x^2)^N dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} D^{2N}\left[(1-x^2)^N D^{2N}[(1-x^2)^N D^{2N}f(x)]\right]D^{2N}g(x)(1-x^2)^N dx.$$

Integrando por partes $2N$ veces, queda

$$(\mathcal{F}^{(N)}f,g)_S = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^N D^{2N}[(1-x^2)^N D^{2N}f(x)]D^{2N}\left[(1-x^2)^N D^{2N}g(x)\right]dx.$$

Como podemos ver, esta última expresión es simétrica en f y g, y el resultado se deduce de intercambiar los papeles de estos polinomios. $\square$

A partir de la ecuación (4.4.2), en el siguiente resultado, demostramos que los polinomios mónicos de Gegenbauer generalizados, $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$, son las funciones propias del operador lineal $\mathcal{F}^{(N)}$.

Proposición 4.4.4 *Para $n \geq 2N$, se verifica*

$$\mathcal{F}^{(N)}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \left(\frac{n!}{(n-2N)!}\right)^2 C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x).$$

Demostración:

Como el polinomio $\mathcal{F}^{(N)}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ es de grado n, lo podemos expresar como combinación lineal de los polinomios $\{C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{i=0,\ldots,n}$, es decir

$$\mathcal{F}^{(N)}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{n,i} C_i^{(-N+\frac{1}{2})}(x), \tag{4.4.5}$$

donde los coeficientes $\gamma_{n,i}$ se calculan, usando el teorema 4.4.3, como

$$\gamma_{n,i} = \frac{\left(\mathcal{F}^{(N)}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}, C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\right)_S}{\left(C_i^{(-N+\frac{1}{2})}, C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\right)_S} = \frac{\left(C_n^{(-N+\frac{1}{2})}, \mathcal{F}^{(N)}C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\right)_S}{\left(C_i^{(-N+\frac{1}{2})}, C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\right)_S}.$$

De la ortogonalidad del polinomio $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, deducimos que $\gamma_{n,i} = 0$, para $i < n$, y el resultado se obtiene tras una simple inspección en los coeficientes líderes de (4.4.5). □

A continuación, deducimos algunas relaciones diferenciales lineales interesantes entre los polinomios de Gegenbauer generalizados.

Proposición 4.4.5 *Se verifican las siguientes relaciones:*

$$i)\quad (1-x^2)^{2N} C_n^{(N+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{i=n}^{n+4N} \alpha_{n,i} C_i^{(-N+\frac{1}{2})}(x), \quad n \geq 0. \tag{4.4.6}$$

$$ii)\quad \mathcal{F}^{(N)}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{i=n-4N}^{n} \beta_{n,i} C_i^{(N+\frac{1}{2})}(x), \quad n \geq 4N. \tag{4.4.7}$$

Demostración:

i) Si expresamos el polinomio $(1-x^2)^{2N}C_n^{(N+\frac{1}{2})}(x)$ en términos de los polinomios ortogonales de Sobolev $\{C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{i\geq 0}$, tenemos que

$$(1-x^2)^{2N} C_n^{(N+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{i=0}^{n+4N} \alpha_{n,i} C_i^{(-N+\frac{1}{2})}(x).$$

Si usamos la proposición 4.4.2, los coeficientes $\alpha_{n,i}$ son

$$\alpha_{n,i} = \frac{\left((1-x^2)^{2N} C_n^{(N+\frac{1}{2})}, C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\right)_S}{\left(C_i^{(-N+\frac{1}{2})}, C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\right)_S} = \frac{\int_{-1}^{1} C_n^{(N+\frac{1}{2})}(x)\mathcal{F}^{(N)}C_i^{(-N+\frac{1}{2})}(x)(1-x^2)^N dx}{\left(C_i^{(-N+\frac{1}{2})}, C_i^{(-N+\frac{1}{2})}\right)_S},$$

y, de la ortogonalidad del polinomio clásico $C_n^{(N+\frac{1}{2})}$, deducimos que $\alpha_{n,i} = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$.
ii) Escribiendo el polinomio $\mathcal{F}^{(N)}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ como combinación lineal de los polinomios clásicos de Gegenbauer $\{C_i^{(N+\frac{1}{2})}\}_{i\geq 0}$, se verifica

$$\mathcal{F}^{(N)}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_{n,i} C_i^{(N+\frac{1}{2})}(x).$$

De nuevo, los elementos $\beta_{n,i}$ los calculamos a partir de la proposición 4.4.2, como sigue

$$\beta_{n,i} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} C_i^{(N+\frac{1}{2})}(x)\mathcal{F}^{(N)}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)(1-x^2)^N dx}{\displaystyle\int_{-1}^{1} C_i^{(N+\frac{1}{2})}(x)C_i^{(N+\frac{1}{2})}(x)(1-x^2)^N dx} = \frac{\left((1-x^2)^{2N}C_i^{(N+\frac{1}{2})}, C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\right)_S}{\displaystyle\int_{-1}^{1} C_i^{(N+\frac{1}{2})}(x)C_i^{(N+\frac{1}{2})}(x)(1-x^2)^N dx}$$

usando la ortogonalidad del polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, con respecto al producto escalar de Sobolev, concluimos que $\beta_{n,i} = 0$, para $0 \leq i \leq n-4N-1$. □

4.5 Ceros de los polinomios $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$

En esta sección del capítulo, vamos a hacer un estudio de los ceros de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$ y de su distribución.

Se considera el n-ésimo polinomio mónico de Gegenbauer, $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, cuya expresión explícita es

$$C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = n! \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(-N+\frac{1}{2}+n-m)_m m!(n-2m)!} x^{n-2m}, \quad n \geq 0. \tag{4.5.1}$$

Hemos visto que, por simetría, todos los polinomios de Gegenbauer de grado impar sólo contienen potencias impares de x, luego, trivialmente, el cero es raíz de los polinomios de Gegenbauer de grado impar.

4.5.1 Estudio de los ceros para $n \geq 2N$

En esta parte de la sección estudiamos los ceros de los polinomios de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ cuyo grado es superior o igual a $2N$, para $N = 1, 2, 3 \ldots$ En este caso, se verifica el siguiente resultado.

Proposición 4.5.1 *Para cada valor de* $n \geq 2N$, *el polinomio de Gegenbauer* $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ *tiene a* 1 *y a* -1 *como ceros de multiplicidad* N, *cada uno, y, además, tiene* $(n-2N)$ *ceros reales y simples dentro del intervalo* $[-1,1]$ *que se intercalan con los ceros del polinomio* $C_{n+1}^{(-N+\frac{1}{2})}$.

Demostración:

Cuando $n \geq 2N$, usando la ecuación (4.2.9), tenemos que

$$C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = (x^2-1)^N C_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}(x),$$

de donde deducimos que el polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ tiene a 1 como cero de multiplicidad N y a -1 como cero también de multiplicidad N.

Por otra parte, es conocido, (ver el teorema 1.3.4), que el polinomio clásico de Gegenbauer $C_n^{(N+\frac{1}{2})}$, tiene n ceros reales y simples en el intervalo $[-1,1]$ que se intercalan con las raíces del polinomio $C_{n+1}^{(N+\frac{1}{2})}$. De donde, aplicando este resultado al polinomio $C_{n-2N}^{(N+\frac{1}{2})}$, concluimos el resultado. □

Nota. El resultado de la proposición 4.5.1 es el obtenido por G. Szegő en [158], p. 144-145, cuando en este trabajo se consideran los polinomios de Gegenbauer generalizados.

4.5.2 Estudio de los ceros para $0 \leq n \leq 2N-1$

En este apartado hacemos el estudio de los ceros de los $2N$ primeros polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n=0,1,\ldots,2N-1}$. En la primera parte, estudiamos las raíces reales para estos polinomios y, en la segunda, determinamos las raíces que son imaginarias.

<u>**CEROS REALES**</u>: Para estudiar los ceros reales de los polinomios de Gegenbauer vamos a utilizar la técnica de Sturm, (ver definición 1.3.5 y teorema 1.3.6). Para garantizar que una sucesión de polinomios ortogonales mónicos constituye una sucesión de Sturm, es necesario que el coeficiente del polinomio de grado inferior que aparece en la relación de recurrencia a tres términos sea positivo.

En nuestro caso, aunque los polinomios de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ verifican la relación de recurrencia a tres términos

$$\begin{aligned} C_{-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) &= 0, \quad C_0^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = 1, \\ xC_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) &= C_{n+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) + \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})} C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

con $\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})} = \dfrac{n(n-2N)}{(2n-2N+1)(2n-2N-1)}$, debido a que

$$\text{signo}\left(\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}\right) = \begin{cases} -1, & \text{si } n \neq N, \\ 1, & \text{si } n = N, \end{cases} \tag{4.5.2}$$

podemos observar que $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n=0,1,\ldots,2N-1}$, no forma una sucesión de Sturm.

De esta forma, a partir de estos polinomios de Gegenbauer, definimos otra familia de polinomios, que llamaremos $\{D_n\}_{n=0,1,\ldots,2N-1}$.

Definición 4.5.2 *Dado el número entero $N \geq 1$, se define el n-ésimo polinomio D_n como*

$$D_n(x) = \begin{cases} (-1)^{[\frac{n}{2}]} C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x), & si\ 0 \leq n \leq N, \\ (-1)^{[\frac{2N-n}{2}]} C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x), & si\ N+1 \leq n \leq 2N-1. \end{cases}$$

Evidentemente, los ceros de los polinomios de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ coinciden con los ceros de D_n.

Posteriormente, veremos que los polinomios $\{D_n\}_{n=0,1,\ldots,2N-1}$, forman una sucesión de Sturm. Para ello, en la siguiente proposición, demostramos que los polinomios D_n verifican una relación de recurrencia a tres términos y una relación de estructura similares a las que verifican los polinomios de Gegenbauer.

Proposición 4.5.3 *Los polinomios D_n verifican las siguientes propiedades*
i) Relación de recurrencia a tres términos

i.1) Para $0 \leq n \leq N-1$

$$\begin{aligned} D_{-1}(x) &= 0, \quad D_0(x) = 1, \\ D_{n+1}(x) &= (-1)^n x D_n(x) + \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})} D_{n-1}(x), \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

donde

$$\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})} = \frac{n(n-2N)}{4(n-N+\frac{1}{2})(n-N-\frac{1}{2})}. \tag{4.5.4}$$

i.2) Cuando $n = N$

$$D_{N+1}(x) = (-1)^{N-1} x D_N(x) - \gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})} D_{N-1}(x), \tag{4.5.5}$$

con $\gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})} = N^2$.

i.3) Si $N+1 \leq n \leq 2N-1$

$$D_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} x D_n(x) + \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})} D_{n-1}(x), \tag{4.5.6}$$

donde el coeficiente $\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ es el mismo de la expresión (4.5.4).
ii) Relación de estructura

ii.1) Para $0 \leq n \leq N$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx} D_n(x) = -nx D_n(x) + (-1)^{n-1} \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})} D_{n-1}(x). \tag{4.5.7}$$

ii.2) Si $N+1 \leq n \leq 2N-1$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}D_n(x) = -nxD_n(x) + (-1)^n\frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}D_{n-1}(x). \tag{4.5.8}$$

Demostración:
i) Usando la relación de recurrencia a tres términos (4.2.3) para los polinomios $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, tenemos que

$$C_{n+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = xC_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) - \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x). \tag{4.5.9}$$

i.1) Para el caso $0 \leq n \leq N-1$, se verifica que $D_n(x) = (-1)^{[\frac{n}{2}]}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)$, de la definición 4.5.2. Despejando el polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ y sustituyendo en (4.5.9), deducimos que

$$(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}D_{n+1}(x) = (-1)^{[\frac{n}{2}]}xD_n(x) - (-1)^{[\frac{n-1}{2}]}\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}D_{n-1}(x). \tag{4.5.10}$$

Por último, multiplicando (4.5.10) por $(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}$, obtenemos que

$$D_{n+1}(x) = (-1)^n xD_n(x) + \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}D_{n-1}(x).$$

i.2) Si consideramos $n = N$ en la relación (4.5.9), tenemos

$$C_{N+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = xC_N^{(-N+\frac{1}{2})}(x) - \gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}C_{N-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x). \tag{4.5.11}$$

Por otra parte, usando la definición 4.5.2, y sustituyendo en (4.5.11), queda

$$(-1)^{[\frac{N-1}{2}]}D_{N+1}(x) = (-1)^{[\frac{N}{2}]}xD_N(x) - \gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}(-1)^{[\frac{N-1}{2}]}D_{N-1}(x),$$

luego

$$\begin{aligned} D_{N+1}(x) &= (-1)^{[\frac{N}{2}]+[\frac{N-1}{2}]}xD_N(x) - \gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}D_{N-1}(x) = \\ &= (-1)^{N-1}xD_N(x) - \gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}D_{N-1}(x). \end{aligned}$$

i.3) En el caso $N+1 \leq n \leq 2N-1$, se verifica que $D_n(x) = (-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)$ y, si sustituimos en (4.5.9) los polinomios de Gegenbauer en términos de los polinomios D_n, deducimos que

$$(-1)^{[\frac{2N-n-1}{2}]}D_{n+1}(x) = (-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}xD_n(x) - (-1)^{[\frac{2N-n+1}{2}]}\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}D_{n-1}(x). \tag{4.5.12}$$

Multiplicando por $(-1)^{[\frac{2N-n-1}{2}]}$ en (4.5.12), obtenemos

$$D_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} x D_n(x) + \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})} D_{n-1}(x).$$

ii.1) Consideramos la relación (4.2.7), con $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, multiplicada por $(-1)^{[\frac{n}{2}]}$:

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}(-1)^{[\frac{n}{2}]}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = -nx(-1)^{[\frac{n}{2}]}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) + \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}(-1)^{[\frac{n}{2}]}C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x),$$

de donde, teniendo en cuenta la definición 4.5.2, tenemos que, para $0 \leq n \leq N$, el polinomio D_n se expresa como $D_n(x) = (-1)^{[\frac{n}{2}]}C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)$, con lo que llegamos a

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{d}{dx}D_n(x) &= -nxD_n(x) + \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}(-1)^{[\frac{n}{2}]}C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \\ &= -nxD_n(x) + \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}(-1)^{n-1}D_{n-1}(x). \end{aligned}$$

ii.2) Cuando $n = N+1$ y $\lambda = -N + \frac{1}{2}$ en la expresión (4.2.7), obtenemos que

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}C_{N+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = -(N+1)xC_{N+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) + (N+1)(1-N)C_N^{(-N+\frac{1}{2})}(x),$$

y, teniendo en cuenta la definición 4.5.2, se verifica que $D_{N+1}(x) = (-1)^{[\frac{N-1}{2}]}C_{N+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x)$ y $D_N(x) = (-1)^{[\frac{N}{2}]}C_N^{(-N+\frac{1}{2})}(x)$, de donde deducimos que

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{d}{dx}D_{N+1}(x) &= -(N+1)xD_{N+1}(x) + (N+1)(1-N)(-1)^{[\frac{N-1}{2}]}C_N^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \\ &= -(N+1)xD_{N+1}(x) + (N+1)(1-N)(-1)^{N+1}D_N(x). \end{aligned}$$

Se considera, ahora, $N+2 \leq n \leq 2N-1$. Multiplicando (4.2.7), con $\lambda = -N+\frac{1}{2}$, por $(-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}$ y, teniendo en cuenta la definición 4.5.2, concluimos que

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{d}{dx}D_n(x) &= -nxD_n(x) + \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}(-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x) = \\ &= -nxD_n(x) + \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}(-1)^n D_{n-1}(x). \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 4.5.4 *La sucesión* $\{D_n, D_{n-1}, \ldots, D_0\}$, *con* $0 \leq n \leq 2N-1$, *para* $N \geq 1$ *un número entero dado, constituye una sucesión de Sturm en cualquier intervalo cerrado contenido en* $\mathbb{R}$ *que no contenga a* 1 *ni a* -1.

Demostración:

Comprobemos que los polinomios D_n cumplen las propiedades necesarias para ser una sucesión de Sturm, (ver definición 1.3.5).

a) Para probar que el polinomio D_n no tiene ceros múltiples en $\mathbb{R}$, usando la definición 4.5.2, basta probarlo para el polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$. Si escribimos la ecuación diferencial de segundo orden (4.2.6) para el polinomio $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, obtenemos que

$$(1-x^2)D^2C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)+2(N-1)xDC_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)+n(n-2N+1)C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)=0. \quad (4.5.13)$$

Supongamos que $r\neq -1,1$ es una raíz doble del polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, entonces, si tomamos $x=r$ en (4.5.13), queda

$$(1-r^2)D^2C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(r)=0, \quad (4.5.14)$$

de donde tenemos que r es también raíz de $D^2C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)$, es decir, r es raíz triple. Derivando la ecuación (4.5.13) reiteradas veces y, aplicando, este mismo razonamiento tendríamos que r sería raíz de la derivada de cualquier orden de $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$, de donde, deducimos que no existen ceros múltiples del polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$.

b) Cuando $n=0$, de la definición 4.5.2, se tiene $D_0(x)=C_0^{(-N+\frac{1}{2})}(x)=1$ y, por lo tanto, el polinomio D_0 no se anula en $\mathbb{R}$.

c) Sea $r\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ y algún j tal que $0<j<n$ verificando que $D_j(r)=0$. Hay que demostrar que $D_{j-1}(r)$ y $D_{j+1}(r)$ tienen signos opuestos. Para ello, tomamos la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios D_n. Hay que distinguir los tres casos siguientes:

c.1) Para $0\leq j\leq N-1$, de (4.5.3) con $x=r$, queda $D_{j+1}(r)=\gamma_j^{(-N+\frac{1}{2})}D_{j-1}(r)$, de donde teniendo en cuenta (4.5.2), deducimos que $D_{j-1}(r)D_{j+1}(r)<0$.

c.2) En el caso $j=N$ y $x=r$, de (4.5.5), obtenemos que $D_{N+1}(r)=-\gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}D_{N-1}(r)$ y, por ser el coeficiente $\gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}$ un número positivo, concluimos que $D_{j-1}(r)$ y $D_{j+1}(r)$ tienen signos opuestos.

c.3) Cuando $N+1\leq n\leq 2N-1$, tomando la ecuación (4.5.6) para $x=r$, tenemos que $D_{j+1}(r)=\gamma_j^{(-N+\frac{1}{2})}D_{j-1}(r)$ y usando (4.5.2), llegamos al resultado.

d) Sea $r\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ tal que $D_n(r)=0$. Para demostrar que $D_n'(r)$ y $D_{n-1}(r)$ tienen el mismo signo (o signo opuesto), consideramos la relación de estructura (4.5.7) y (4.5.8) que verifican los polinomios D_n, con lo que aparecen dos casos a estudiar.

d.1) Sea $0\leq n\leq N$ y $x=r$ entonces, de (4.5.7), queda

$$(1-r^2)\frac{d}{dx}D_n(r) = (-1)^{n+1}\frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}D_{n-1}(r). \tag{4.5.15}$$

Teniendo en cuenta que, en este caso, el factor $\dfrac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}$ es un número positivo, de la relación (4.5.15), deducimos que

$$\text{signo}\left((1-r^2)\frac{d}{dx}D_n(r)\right) = \text{signo}\left((-1)^{n+1}D_{n-1}(r)\right). \tag{4.5.16}$$

De esta forma, si n es par y $r \in (-1,1)$, sustituyendo en (4.5.16), tenemos que $\dfrac{d}{dx}D_n(r)$ y $D_{n-1}(r)$ tienen signos opuestos y si $r \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$, entonces son del mismo signo.

En el caso en que n es un número impar y $r \in (-1,1)$, de (4.5.16), se verifica que $\left(\dfrac{d}{dx}D_n(r)\right)(D_{n-1}(r)) > 0$, y para $r \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$, tenemos que $\dfrac{d}{dx}D_n(r)$ y $D_{n-1}(r)$ tienen signos opuestos.

d.2) Tomando $N+1 \leq n \leq 2N-1$ y $x=r$ de (4.5.8), deducimos que

$$(1-r^2)\frac{d}{dx}D_n(r) = (-1)^{n}\frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}D_{n-1}(r). \tag{4.5.17}$$

En este caso, el coeficiente $\dfrac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}$ es un número negativo, entonces de (4.5.17), tenemos que

$$\text{signo}\left((1-r^2)\frac{d}{dx}D_n(r)\right) = \text{signo}\left((-1)^{n+1}D_{n-1}(r)\right).$$

Esta última igualdad es la misma que (4.5.16) y, por lo tanto, lo que sigue es análogo al apartado d.1). □

Una vez que sabemos que $\{D_n, D_{n-1}, \ldots, D_0\}$ es una sucesión de Sturm, podemos aplicar el teorema de Sturm, (ver teorema 1.3.6). En la proposición siguiente, demostramos el número de raíces reales que tienen los polinomios de Gegenbauer en el interior del intervalo $[-1,1]$

Proposición 4.5.5 *Se tiene*

i) Cuando n es un número par, los polinomios de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ *no tienen raíces reales dentro del intervalo* $[-1,1]$.

ii) Para n un número impar, se verifica que los polinomios de Gegenbauer tienen al cero como única raíz real en $[-1,1]$.

Demostración:

Es necesario estimar los valores del polinomio D_n en -1 y en 1.

a) Usando la definición 4.5.2 junto con

$$\operatorname{signo}\left(C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(1)\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq n \leq N, \\ (-1)^{n-N}, & \text{si } N+1 \leq n \leq 2N-1, \end{cases} \tag{4.5.18}$$

queda

$$\operatorname{signo}(D_n(1)) = \begin{cases} (-1)^{[\frac{n}{2}]}, & \text{si } 0 \leq n \leq N, \\ (-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}(-1)^{n-N}, & \text{si } N+1 \leq n \leq 2N-1, \end{cases}$$

esto es, $\operatorname{signo}(D_n(1)) = (-1)^{[\frac{n}{2}]}$, con $0 \leq n \leq 2N-1$, de donde tenemos que

$$\operatorname{signo}(\{D_n(1), D_{n-1}(1), \ldots, D_0(1)\}) = \{(-1)^{[\frac{n}{2}]}, (-1)^{[\frac{n-1}{2}]}, \ldots, (-1)^{[\frac{0}{2}]}\},$$

y, por lo tanto, hay $[n/2]$ cambios de signo al evaluar la sucesión de Sturm en uno.

b) Teniendo en cuenta la simetría de los polinomios de Gegenbauer, la relación (4.5.18) y la definición 4.5.2, concluimos que

$$\operatorname{signo}(D_n(-1)) = \begin{cases} (-1)^{[\frac{n}{2}]}(-1)^n, & \text{si } 0 \leq n \leq N, \\ (-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}(-1)^N, & \text{si } N+1 \leq n \leq 2N-1, \end{cases}$$

es decir, $\operatorname{signo}(D_n(-1)) = (-1)^{[\frac{n+1}{2}]}$, donde $0 \leq n \leq 2N-1$. De esta forma, los signos de la sucesión de Sturm evaluada en -1 son

$$\operatorname{signo}(\{D_n, D_{n-1}, \ldots, D_0\})(-1) = \{(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}, (-1)^{[\frac{n}{2}]}, \ldots, (-1)^{[\frac{1}{2}]}\},$$

luego hay $[(n+1)/2]$ cambios de signo en -1.

Si, ahora, se hace la diferencia entre el número de cambios de signo que aparece en la sucesión de Sturm evaluada en -1, es decir, en $\{D_n(-1), D_{n-1}(-1), \ldots, D_0(-1)\}$ y entre $\{D_n(1), D_{n-1}(1), \ldots, D_0(1)\}$, esta diferencia vale

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} 0, & \text{si } n = \text{par}, \\ 1, & \text{si } n = \text{impar}. \end{cases} \quad \square \tag{4.5.19}$$

En la siguiente proposición estudiamos el número de raíces que tiene el polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ fuera del intervalo $[-1,1]$.

Proposición 4.5.6 *Se verifica:*

i) Para $0 \leq n \leq N$ *el polinomio de Gegenbauer* $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ *no tiene raíces reales fuera del intervalo* $[-1,1]$.

ii) Cuando $N+1 \leq n \leq 2N-1$, *aparecen dos casos*

ii.1) Si $n-N$ *es un número par, entonces el polinomio de Gegenbauer no tiene raíces reales en* $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

ii.2) Si $n-N$ *es un número impar, hay dos raíces reales del polinomio* $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ *fuera del intervalo* $[-1,1]$.

Demostración:

En primer lugar, tomamos el intervalo $[1,+\infty)$. De la demostración de la proposición 4.5.5, sabemos que el número de cambios de signo en $\{D_n(1), D_{n-1}(1), \ldots, D_0(1)\}$ es $[n/2]$.

En lo que sigue, notaremos por $f(+\infty)$ al límite de la función f en $+\infty$.

Estudiamos, ahora, los cambios de signo de la sucesión de Sturm en $+\infty$. Para ello, teniendo en cuenta que signo $\left(C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(+\infty)\right) = 1$, por ser mónicos, junto con la definición 4.5.2, deducimos que

$$\text{signo}\,(D_n(+\infty)) = \begin{cases} (-1)^{[\frac{n}{2}]}, & \text{si } 0 \leq n \leq N, \\ (-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}, & \text{si } N+1 \leq n \leq 2N-1. \end{cases}$$

De esta forma, tenemos

i) Si $0 \leq n \leq N$, entonces signo$(D_n(+\infty)) = (-1)^{[\frac{n}{2}]}$ y, por lo tanto,

$$\text{signo}\,(\{D_n(+\infty), D_{n-1}(+\infty), \ldots, D_0(+\infty)\}) = \{(-1)^{[\frac{n}{2}]}, (-1)^{[\frac{n-1}{2}]}, \ldots, (-1)^{[\frac{0}{2}]}\},$$

con lo que hay $[n/2]$ cambios de signo en $+\infty$, de donde deducimos que, en este caso, no hay raíces reales en $[1,+\infty)$.

ii) Para $N+1 \leq n \leq 2N-1$, obtenemos que signo$(D_n(+\infty)) = (-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}$, que junto con el resultado del apartado i), queda

$$\begin{aligned} &\text{signo}\,(\{D_n(+\infty), D_{n-1}(+\infty), \ldots, D_N(+\infty), \ldots, D_0(+\infty)\}) = \\ &= \{(-1)^{[\frac{2N-n}{2}]}, (-1)^{[\frac{2N-n+1}{2}]}, \ldots, (-1)^{[\frac{N}{2}]}, \ldots, (-1)^{[\frac{0}{2}]}\}, \end{aligned}$$

y, de esta forma, hay $\left(\left[\frac{N}{2}\right] - \left[\frac{2N-n}{2}\right]\right) + \left[\frac{N}{2}\right] = 2\left[\frac{N}{2}\right] - \left[\frac{2N-n}{2}\right]$ cambios de signo en $+\infty$. Entonces, por el teorema de Sturm, el número de raíces reales del polinomio D_n en $[1,+\infty)$ es $\left|2\left[\frac{N}{2}\right] - \left[\frac{2N-n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]\right|$.

ii.1) Cuando $n-N$ es un número par, aparecen dos casos:

ii.1.1) Si n y N son pares, entonces el número de raíces en $[1,+\infty)$ es

$$\left|2\frac{N}{2} - \left(\frac{2N-n}{2}\right) - \frac{n}{2}\right| = 0.$$

ii.1.2) Si n y N son impares, queda

$$\left|2\left(\frac{N-1}{2}\right) - \left(\frac{2N-n-1}{2}\right) - \frac{n-1}{2}\right| = 0.$$

Luego, en cualquier caso, para $n-N$ un número par no hay raíces reales del polinomio D_n en $[1,+\infty[$.

ii.2) Para $n-N$ un número impar, se tienen ii.2.1) Si n es par y N es impar, entonces el número de ceros de $D_n(x)$ en $[1,+\infty)$ es

$$\left|2\left(\frac{N-1}{2}\right)-\left(\frac{2N-n}{2}\right)-\frac{n}{2}\right|=1.$$

ii.2.2) Si n es impar y N es par, concluimos que hay

$$\left|2\left(\frac{N}{2}\right)-\left(\frac{2N-n-1}{2}\right)-\frac{n-1}{2}\right|=1,$$

raíz en $[1,+\infty)$.

Usando la simetría de los polinomios D_n, llegamos al resultado. □

Proposición 4.5.7 *Se tiene*

(1) Cuando n es un número par, se verifica

(1.1) Si $0\leq n\leq N$ el polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ no tiene raíces reales.

(1.2) Para N un número par tal que $N+1\leq n\leq 2N-1$, el polinomio $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ no tiene raíces reales.

(1.3) Cuando N es impar y $N+1\leq n\leq 2N-1$, el polinomio de Gegenbauer tiene dos raíces reales fuera del intervalo $[-1,1]$.

(2) Para el caso n un número impar, queda

(2.1) Si $0\leq n\leq N$ el polinomio de Gegenbauer $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ tiene una raíz real, para $x=0$.

(2.2) Cuando N es par y $N+1\leq n\leq 2N-1$, el polinomio de Gegenbauer tiene tres raíces reales, dos fuera del intervalo $[-1,1]$ y $x=0$.

(2.3) En el caso en que N es un número impar tal que $N+1\leq n\leq 2N-1$, el polinomio $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ tiene una única raíz real, para $x=0$.

<u>**CEROS IMAGINARIOS PUROS**</u>: Finalmente, queremos estudiar los ceros que son imaginarios puros del polinomio de Gegenbauer. Para ello, a partir de este polinomio, se define otro cuyas raíces reales serán raíces imaginarias puras del polinomio de Gegenbauer.

Definición 4.5.8 *Sea $N\geq 1$ un número entero dado, se define el n-ésimo polinomio $\tilde{D}_n$ como*

$$\tilde{D}_n(z)=\begin{cases}(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz), & \text{si } 0\leq n\leq N,\\ (-1)^{n-N}(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz), & \text{si } N+1\leq n\leq 2N-1,\end{cases}$$

donde $z\in\mathbb{R}$.

Observemos que, debido a la simetría de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_n$, estos nuevos polinomios son reales y sus ceros reales serán los ceros imaginarios puros de los polinomios de Gegenbauer. Posteriormente, veremos que los polinomios $\{\tilde{D}_n\}_{n=0,1,\ldots,2N-1}$ forman una sucesión de Sturm.

En la siguiente proposición deducimos la relación de recurrencia a tres términos y la relación de estructura que verifican los polinomios $\tilde{D}_n$.

Proposición 4.5.9 *Los polinomios $\tilde{D}_n$ verifican las siguientes propiedades*
i) Relación de recurrencia a tres términos

i.1) Para $0 \leq n \leq N-1$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{-1}(z) &= 0, \quad \tilde{D}_0(z) = 1, \\ \tilde{D}_{n+1}(z) &= z\tilde{D}_n(z) + \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}\tilde{D}_{n-1}(z),\end{aligned} \tag{4.5.20}$$

donde $\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})} = \dfrac{n(n-2N)}{(2n-2N+1)(2n-2N-1)}$.

i.2) Cuando $n = N$

$$\tilde{D}_{N+1}(z) = -z\tilde{D}_N(z) - \gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}\tilde{D}_{N-1}(z), \tag{4.5.21}$$

con $\gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})} = N^2$.

i.3) Si $N+1 \leq n \leq 2N-1$

$$\tilde{D}_{n+1}(z) = -z\tilde{D}_n(z) + \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}\tilde{D}_{n-1}(z), \tag{4.5.22}$$

donde $\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})} = \dfrac{n(n-2N)}{(2n-2N+1)(2n-2N-1)}$.

ii) Relación de estructura

ii.1) Para $0 \leq n \leq N$

$$(1+z^2)\frac{d}{dz}\tilde{D}_n(z) = nz\tilde{D}_n(z) + \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}\tilde{D}_{n-1}(z). \tag{4.5.23}$$

ii.2) Si $N+1 \leq n \leq 2N-1$

$$(1+z^2)\frac{d}{dz}\tilde{D}_n(z) = nz\tilde{D}_n(z) - \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}\tilde{D}_{n-1}(z). \tag{4.5.24}$$

Demostración:

i) En primer lugar, obtenemos la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$. De la relación (4.2.3) con $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}(-i)^{n+1}C_{n+1}^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) &= (-i)^{n+1}\left[(iz)C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) - \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)\right] = \\ &= -i^2 z(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) - (-i)^2\gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-i)^{n-1}C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) = \\ &= z(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) + \gamma_n^{(-N+\frac{1}{2})}(-i)^{n-1}C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(iz),\end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta la definición 4.5.8, llegamos al resultado.
ii) Aplicando la regla de la cadena, deducimos que

$$\begin{aligned}(1+z^2)\frac{d}{dz}(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) &= (1+z^2)(-i)^n C'^{(-N+\frac{1}{2})}_n(iz)i = \\ &= (1-(iz))^2 i(-i)^n C'^{(-N+\frac{1}{2})}_n(iz),\end{aligned}$$

y, si hacemos el cambio $x = iz$ y se aplica la relación de estructura (4.2.7), para $\lambda = -N + \frac{1}{2}$, queda

$$\begin{aligned}(1-x)^2 i(-i)^n \frac{d}{dx} C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) &= i(-i)^n \left[-nxC_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) + \right. \\ &+ \left. \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})} C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(x)\right] = \\ &= i(-i)^n \left[-nizC_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) + \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})} C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)\right] = \\ &= nz(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) + \frac{n(n-2N)}{2(n-N-\frac{1}{2})}(-i)^{n-1} C_{n-1}^{(-N+\frac{1}{2})}(iz),\end{aligned}$$

de donde usando la definición 4.5.8, concluimos el resultado. □

El siguiente resultado establece que los polinomios $\{\tilde{D}_n\}_{n=0,1,\ldots,2N-1}$ constituyen una sucesión de Sturm en cualquier intervalo cerrado real.

Proposición 4.5.10 *Sea* $0 \leq n \leq 2N-1$. *Entonces,* $\{\tilde{D}_n, \tilde{D}_{n-1}, \ldots, \tilde{D}_0\}$ *es una sucesión de Sturm en cualquier intervalo cerrado contenido en* $\mathbb{R}$.

Demostración:

Para que $\{\tilde{D}_n, \tilde{D}_{n-1}, \ldots, \tilde{D}_0\}$ sea una sucesión de Sturm, hay que probar que los polinomios $\tilde{D}_n$ verifican las condiciones de la definición 1.3.5.

a) Necesitamos que el polinomio $\tilde{D}_n$ no tenga ceros múltiples en el intervalo cerrado real pero, de la definición 4.5.8, basta probarlo para el polinomio $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$. Para ello, se obtienen la ecuación diferencial de segundo orden cuya única solución es el polinomio $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$.

Si se usa la regla de la cadena, se hace el cambio $x = iz$ y se aplica (4.5.13), queda

$$\begin{aligned}-(1+z^2)\frac{d^2}{dz^2}\left((-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)\right) &+ 2(N-1)z\frac{d}{dz}\left((-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)\right) + \\ + \; n(n-2N+1)(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) &= \\ = (1+z^2)(-i)^n C''^{(-N+\frac{1}{2})}_n(iz) &+ 2(N-1)(iz)(-i)^n C'^{(-N+\frac{1}{2})}_n(iz) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ &\quad n(n-2N+1)(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) = \\
= &\quad (1-(iz)^2)(-i)^n C''^{(-N+\frac{1}{2})}_n(iz) + 2(N-1)(iz)(-i)^n C'^{(-N+\frac{1}{2})}_n(iz) + \\
+ &\quad n(n-2N+1)(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) = \\
= &\quad (-i)^n \Big[(1-x^2)D^2 C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) + 2(N-1)xDC_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x) + \\
+ &\quad n(n-2N+1)C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(x)\Big] = 0,
\end{aligned}$$

esto es, la única solución de la ecuación

$$-(1+z^2)D^2y + 2(N-1)zDy + n(n-2N+1)y = 0, \tag{4.5.25}$$

es el polinomio $y = (-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$.

Sea r una raíz doble real del polinomio $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$, entonces sustituyendo z por r en la ecuación diferencial de segundo orden (4.5.25), obtenemos que

$$-(1+r^2)D^2\left((-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(ir)\right) = 0,$$

de donde, usando que $(1+r^2) \neq 0$, concluimos que $D^2\left((-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(ir)\right) = 0$, esto es, r es una raíz triple del polinomio $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$. Si, ahora, derivamos (4.5.25) y aplicamos este mismo razonamiento, llegamos a que r es raíz de la derivada de cualquier orden del polinomio $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ y, por lo tanto, no existen ceros múltiples del polinomio $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$.

b) Cuando $n = 0$, a partir de la definición 4.5.8, tenemos que $\tilde{D}_0(z) = (-i)^0 C_0^{(-N+\frac{1}{2})}(iz) = 1$, luego, el polinomio $\tilde{D}_0$ no se anula en $\mathbb{R}$.

c) Consideramos algún $r \in \mathbb{R}$ y j tal que $0 < j < n$, verificando que $\tilde{D}_j(r) = 0$, entonces hay que probar que los polinomios $\tilde{D}_{j-1}(r)$ y $\tilde{D}_{j+1}(r)$ tienen signos opuestos. Usando la relación de recurrencia a tres términos para el polinomio $\tilde{D}_j$, aparecen tres casos a estudiar.

c.1) Para $0 \leq j \leq N-1$, de la relación (4.5.20), con $n = j$, queda

$$\tilde{D}_{j+1}(z) = z\tilde{D}_j(z) + \gamma_j^{(-N+\frac{1}{2})}\tilde{D}_{j-1}(z),$$

de donde, tomando $z = r$, tenemos que

$$\tilde{D}_{j+1}(r) = \gamma_j^{(-N+\frac{1}{2})}\tilde{D}_{j-1}(r).$$

De (4.5.2) se verifica que $\gamma_j^{(-N+\frac{1}{2})} < 0$ y, por lo tanto, $\tilde{D}_{j+1}(r)\tilde{D}_{j-1}(r) < 0$.

c.2) Si $j = N$ y $z = r$ en la relación (4.5.21), obtenemos que

$$\tilde{D}_{N+1}(r) = -\gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}\tilde{D}_{N-1}(r),$$

y, por ser $\gamma_N^{(-N+\frac{1}{2})}$ un número positivo, concluimos que $\tilde{D}_{j+1}(r)$ y $\tilde{D}_{j-1}(r)$ tienen signos opuestos.

c.3) Por último, cuando tomamos $N+1 \leq n \leq 2N-1$, $n=j$ y $z=r$ en la relación de recurrencia a tres términos (4.5.22), queda

$$\tilde{D}_{j+1}(r) = \gamma_j^{(-N+\frac{1}{2})}\tilde{D}_{j-1}(r),$$

y, si, ahora, usamos (4.5.2), llegamos al resultado.

d) Dado $r \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{D}_j(r) = 0$, hay que probar que $\tilde{D}'_j(r)\tilde{D}_{j-1}(r) > 0$. Para ello usamos la relación de estructura que verifica el polinomio $\tilde{D}_j$, con lo que se tienen dos casos.

d.1) En el caso en que $0 \leq n \leq N$, de la relación (4.5.23) para $j=n$ y $z=r$, deducimos que

$$(1+r^2)\tilde{D}'_j(r) = \frac{j(j-2N)}{2(j-N-\frac{1}{2})}\tilde{D}_{j-1}(r),$$

y, teniendo en cuenta que, en este caso, el número $\dfrac{j(j-2N)}{2(j-N-\frac{1}{2})}$ es positivo, se verifica que $\tilde{D}'_j(r)\tilde{D}_{j-1}(r) > 0$.

d.2) Para $N+1 \leq n \leq 2N-1$, consideramos la relación (4.5.24) con $j=n$ y $z=r$, esto es,

$$(1+r^2)\tilde{D}'_j(r) = -\frac{j(j-2N)}{2(j-N-\frac{1}{2})}\tilde{D}_{j-1}(r).$$

Ahora, $\dfrac{j(j-2N)}{2(j-N-\frac{1}{2})}$ es negativo y, por lo tanto, $\tilde{D}'_j(r)$ y $\tilde{D}_{j-1}(r)$ tienen el mismo signo. □

Una vez que hemos demostrado que $\{\tilde{D}_n, \tilde{D}_{n-1}, \ldots, \tilde{D}_0\}$ es una sucesión de Sturm, queremos encontrar el número de raíces reales del polinomio $\tilde{D}_n$ dentro del intervalo $[0, +\infty[$, aplicando el teorema de Sturm. Para ello es necesario un lema previo.

Lema 4.5.11 *Se verifican:*

i) El valor del polinomio $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ en cero es

$$(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = \text{impar}, \\ \dfrac{n!}{2^n\,(\frac{n}{2})!\left(\frac{n+1}{2}-N\right)_{\frac{n}{2}}}, & \text{si } n = \text{par}. \end{cases}$$

ii) El signo de $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(0)$ es

$$\text{signo}\left((-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(0)\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = \text{impar}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{si } n = \text{par y } 0 \leq n \leq N, \\ (-1)^{N-\frac{n}{2}}, & \text{si } n = \text{par y } N+1 \leq n \leq 2N-1. \end{cases}$$

iii) Se tiene que

$$\text{signo}\left(\tilde{D}_n(0)\right) = \begin{cases} 0, & si\ n = \text{impar}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & si\ n = \text{par}. \end{cases}$$

iv) El signo del polinomio $\tilde{D}_n$ *evaluado en infinito, es*

$$\text{signo}\left(\tilde{D}_n(+\infty)\right) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \leq n \leq N, \\ (-1)^{n-N}, & si\ N < n \leq 2N-1. \end{cases}$$

Demostración:
i) Basta con sustituir $x = iz$ en la expresión explícita (4.2.1), multiplicarla por $(-1)^n$ y luego tomar $z = 0$.
ii) A partir de i), el resultado si n es impar es evidente. Si n es un número par, entonces el signo sólo depende del signo que tenga $\left(\frac{n+1}{2} - N\right)_{\frac{n}{2}}$.

Para $0 \leq n < N$, obtenemos que

$$\left(\frac{n+1}{2} - N\right)_{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} \left(N - n + \frac{1}{2}\right)_{\frac{n}{2}},$$

y, como $N - n + \frac{1}{2} > 0$, entonces $\text{signo}\left(\left(\frac{n+1}{2} - N\right)_{\frac{n}{2}}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}}$.

En el caso $n = N$, queda

$$\text{signo}\left(\left(\frac{-N+1}{2}\right)_{\frac{N}{2}}\right) = \text{signo}\left((-1)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)_{\frac{N}{2}}\right) = (-1)^{\frac{N}{2}}.$$

Finalmente, para $N < n \leq 2N - 1$, tenemos que

$$\left(\frac{n+1}{2} - N\right)_{\frac{n}{2}} = \left(\frac{n+1}{2} - N\right)_{N-\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)_{n-N} = (-1)^{N-\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)_{N-\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)_{n-N}, \quad (4.5.26)$$

y, por ser $\left(\frac{1}{2}\right)_{N-\frac{n}{2}} > 0$, llegamos a que

$$\text{signo}\left(\left(\frac{n+1}{2} - N\right)_{\frac{n}{2}}\right) = \text{signo}\left(\left(\frac{n+1}{2} - N\right)_{N-\frac{n}{2}}\right) = (-1)^{N-\frac{n}{2}}.$$

iii) Basta usar ii) junto con la definición 4.5.8.
iv) De la definición 4.5.8 y de $(-1)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(+\infty) > 0$, concluimos el resultado. □

Proposición 4.5.12 (Raíces reales de $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ en $[0, +\infty[$) *Se verifica:*
i) Para $0 \leq n \leq N$, *el polinomio* $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ *tiene* $[n/2]$ *raíces reales en el interior de* $[0, +\infty[$.

Además, para n un número impar $z = 0$ *es una raíz del polinomio* $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$.

ii) Si $N+1 \leq n \leq 2N-1$, *el polinomio* $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ *tiene* $N - n + \left[\frac{n}{2}\right]$ *raíces reales dentro del intervalo* $[0, +\infty[$.

Además, $z = 0$ *es una raíz del polinomio* $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$, *cuando n es un número impar.*

Demostración:

Para encontar las raíces reales del polinomio $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ en el interior de $[0, +\infty[$, aplicamos el teorema de Sturm (ver teorema 1.3.6). Por lo tanto, es necesario estimar los cambios de signo de la sucesión $\{\tilde{D}_n, \tilde{D}_{n-1}, \ldots, \tilde{D}_0\}$ en cero y en infinito, con lo que, teniendo en cuenta iv) del lema 4.5.11, aparecen dos casos a estudiar:

i) Para $0 \leq n \leq N$, de iii) del lema 4.5.11, tenemos que

$$\text{signo}\left(\{\tilde{D}_n(0), \tilde{D}_{n-1}(0), \ldots, \tilde{D}_0(0)\}\right) = \begin{cases} \{0, (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \ldots, 1\}, & \text{si } n = \text{impar}, \\ \{(-1)^{\frac{n}{2}}, 0, \ldots, 1\} & \text{si } n = \text{par} \end{cases},$$

luego hay $[n/2]$ cambios de signo.

Por otra parte, de iv) del lema 4.5.11, se verifica que

$$\text{signo}\left(\{\tilde{D}_n(+\infty), \tilde{D}_{n-1}(+\infty), \ldots, \tilde{D}_0(+\infty)\}\right) = \{1, 1, \ldots, 1\},$$

es decir, no hay cambios de signo.

Aplicando el teorema de Sturm, concluimos que el número de raíces reales del polinomio $\tilde{D}_n$ dentro del intervalo $[0, +\infty[$ es $[n/2]$.

ii) Cuando $N+1 \leq n \leq 2N-1$, de iv) del lema 4.5.11, deducimos que

$$\text{signo}\left(\{\tilde{D}_n(+\infty), \tilde{D}_{n-1}(+\infty), \ldots, \tilde{D}_{N+1}(+\infty), \tilde{D}_N(+\infty), \ldots, \tilde{D}_0(+\infty)\}\right) =$$
$$= \{(-1)^{n-N}, (-1)^{n-N-1}, \ldots, (-1)^{N+1-N}, 1, \ldots, 1\},$$

con lo que hay $n - N$ cambios de signo.

Del teorema de Sturm, se llega a que hay $\left|\left[\frac{n}{2}\right] - n + N\right|$ raíces reales del polinomio $\tilde{D}_n$ en el interior de $[0, +\infty[$. □

Usando la simetría de los polinomios $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$, podemos deducir que

Proposición 4.5.13 (Raíces reales de $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ en $\mathbb{R}$) *Se verifica:*

i) Para $0 \leq n \leq N$, *el polinomio* $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ *tiene n raíces reales en* $\mathbb{R}$.

ii) Si $N+1 \leq n \leq 2N-1$, *el polinomio* $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$ *tiene* $2N - \left[\frac{n}{2}\right]$ *raíces reales en* $\mathbb{R}$.

Además, $z = 0$ *es una raíz del polinomio* $(-i)^n C_n^{(-N+\frac{1}{2})}(iz)$, *si n es un número impar.*

A partir de los resultados de las proposiciones 4.5.7 y 4.5.13, concluimos que:

Proposición 4.5.14 *Se verifica*
i) Para $0 \leq n \leq N$, *el polinomio* $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ *tiene todas las raíces imaginarias puras. Si* n *es un número impar, una de las raíces es el cero.*
ii) Si $N+1 \leq n \leq 2N-1$, *se tiene*

ii.1) Para $n-N$ *par,* $C_n^{(-N+\frac{1}{2})}$ *no tiene raíces reales en* $\mathbb{R}$.

ii.2) Si $n-N$ *es impar, posee dos raíces reales en* $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

ii.3) En todos los casos, tiene $2N-\left[\frac{n}{2}\right]$ *raíces imaginarias puras.*

Además, si n *es impar, una de las raíces es el cero.*

Nota. Los resultados obtenidos en la proposición (4.5.14) coinciden con los que obtiene G. Szegő para los polinomios de Jacobi generalizados, en [158], p. 145-146.

Capítulo 5

Polinomios ortogonales de variable discreta

5.1 Introducción

En este capítulo haremos una recopilación de la teoría de los polinomios ortogonales clásicos y semiclásicos de variable discreta definidos sobre la recta real.

La primera parte la dedicaremos a recordar la definición de los *operadores lineales en diferencias finitas hacia delante y hacia atrás*, que notaremos por Δ y ∇, respectivamente, junto con una serie de propiedades que verifican estos operadores.

Definiremos, en la sección segunda, las diferencias (distribucional) finitas hacia delante y hacia atrás de un funcional. A partir de estas definiciones, deduciremos una serie de propiedades que verifican los operadores en diferencias cuando actúan sobre un funcional lineal.

En la siguiente sección daremos los conceptos de funcional lineal Δ–semiclásico y funcional lineal ∇–semiclásico, así como, la definición de Δ–clase y ∇–clase asociada a cada uno de los funcionales anteriores, respectivamente, y deduciremos que ambos conceptos son equivalentes. Notaremos por SPOM Δ–semiclásica a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a un funcional Δ–semiclásico. Además, demostraremos una serie de propiedades que relacionan los operadores en diferencias finitas hacia delante y hacia atrás, con un funcional lineal Δ–semiclásico dado.

Los polinomios ortogonales clásicos de variable discreta se estudian en la última parte del capítulo. En primer lugar, daremos la definición de funcional lineal Δ–clásico y de su correspondiente *sucesión de polinomios ortogonales mónicos clásicos*, que notaremos por SPOM Δ–clásica.
Estableceremos la clasificación de estos polinomios, atendiendo al grado del polinomio que aparece en la ecuación en diferencias distribucional que verifica el funcional Δ–clásico. De esta forma, se tienen las familias clásicas en variable discreta de los polinomios de Charlier, Kravchuk y Meixner, si el grado del polinomio es uno y, la familia de los polinomios de Hahn si este grado es dos. Recordaremos el concepto de función hipergeométrica generalizada, que

denotaremos ${}_pF_q$, y, a partir de ella, obtendremos las expresiones explícitas de las familias de polinomios mónicos clásicos en variable discreta. Finalmente, daremos la ecuación en diferencias de segundo orden que verifican estos polinomios.

5.2 Operadores en diferencias finitas Δ y ∇

En primer lugar, introducimos el concepto de *operador lineal en diferencias finitas hacia delante y hacia atrás*, que denotaremos, respectivamente, por Δ y ∇, junto con algunas de sus propiedades.

Definición 5.2.1 *Sea f cualquier polinomio del espacio $\mathbb{P}$. Definimos el "operador en diferencias finitas hacia delante" como el operador lineal Δ tal que*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definición 5.2.2 *Dado el operador lineal ∇, se dice que ∇ es el "operador en diferencias finitas hacia atrás" cuando verifica*

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1), \quad \forall f \in \mathbb{P}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estos operadores lineales cumplen las propiedades que mostramos a continuación.

Lema 5.2.3 *Dado f cualquier polinomio, se verifican:*

i) $\Delta f(x) = \nabla f(x+1)$.

ii) *Sea $n \geq 0$ un número entero dado, se tiene*

$$\Delta^0 f(x) = f(x), \quad \Delta^n f(x) = \nabla^n f(x+n).$$

iii) $\Delta\nabla f(x) = \nabla\Delta f(x)$.

iv) $\Delta\nabla f(x) = \Delta f(x) - \nabla f(x)$.

Lema 5.2.4 *Se consideran $n \geq 1$ un número entero dado y f cualquier polinomio de $\mathbb{P}$. Se tiene*

$$\text{i)} \quad \Delta^n f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i-1} \nabla f(x+i). \tag{5.2.1}$$

$$\text{ii)} \quad \nabla^n f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n-1}{i-1} \Delta f(x-i). \tag{5.2.2}$$

Demostración:
i) Vamos a demostrar el resultado por inducción. Para $n = 1$, se obtiene el apartado i) del lema 5.2.3. En el caso $n-1$, suponemos que es cierta la ecuación (5.2.1), y lo probamos para n. A partir de la hipótesis de inducción, la linealidad del operador Δ, y las propiedades i) y iv) del lema 5.2.3, queda

$$\begin{aligned}
\Delta^n f(x) &= \Delta\left(\Delta^{n-1} f(x)\right) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\binom{n-2}{i-1}\Delta\nabla f(x+i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\binom{n-2}{i-1}\Delta f(x+i) - \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\binom{n-2}{i-1}\nabla f(x+i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\binom{n-2}{i-1}\nabla f(x+1+i) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\binom{n-2}{i-1}\nabla f(x+i) = \\
&= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n-2}{i-2}\nabla f(x+i) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}\binom{n-2}{i-1}\nabla f(x+i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n-1}{i-1}\nabla f(x+i).
\end{aligned}$$

ii) La demostración es análoga a la del apartado i) pero usando la definición 5.2.2. □

En el siguiente resultado, se recuerdan las fórmulas de las diferencias hacia delante y hacia atrás de un producto de dos polinomios, junto con dos fórmulas que son las análogas a la fórmula de Leibnitz.

Lema 5.2.5 ([10]) *Sean f y g dos polinomios cualesquiera del espacio $\mathbb{P}$, se tienen*

i) $\Delta(f(x)g(x)) = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x)$.

ii) $\nabla(f(x)g(x)) = f(x)\nabla g(x) + g(x-1)\nabla f(x)$.

iii) *Dado $n \geq 0$ un número entero, se verifica*

$$\Delta^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k(f(x))\Delta^{n-k}(g(x+k)). \tag{5.2.3}$$

iv) *Sea $n \geq 0$ un número entero, entonces*

$$\nabla^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\nabla^k(f(x))\nabla^{n-k}(g(x-k)). \tag{5.2.4}$$

Demostración:
i) Usando la definición 5.2.1, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x) &= f(x)[g(x+1) - g(x)] + g(x+1)[f(x+1) - f(x)] = \\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) = \Delta(f(x)g(x)). \end{aligned}$$

ii) Análoga a la demostración del apartado i) pero usando la definición 5.2.2.
iii) Utilizando el proceso de inducción sobre n, tenemos que, cuando $n = 0$ el resultado es trivial y si $n = 1$ se obtiene la propiedad i). Supongamos que (5.2.3) es cierta para $n - 1$, es decir, se cumple que

$$\Delta^{n-1}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k(f(x))\Delta^{n-1-k}(g(x+k)).$$

Utilizando el apartado i), la linealidad del operador Δ y la hipótesis de inducción, concluimos

$$\begin{aligned} \Delta^n(f(x)g(x)) &= \Delta^{n-1}\left(\Delta(f(x)g(x))\right) = \Delta^{n-1}\left(f(x)\Delta g(x)\right) + \Delta^{n-1}\left(g(x+1)\Delta f(x)\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k(f(x))\Delta^{n-1-k}(\Delta g(x+k)) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k(\Delta f(x))\Delta^{n-1-k}(g(x+1+k)) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k f(x)\Delta^{n-k} g(x+k) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{k+1} f(x)\Delta^{n-1-k} g(x+1+k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k f(x)\Delta^{n-k} g(x+k) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \Delta^k f(x)\Delta^{n-k} g(x+k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(f(x))\Delta^{n-k}(g(x+k)). \end{aligned}$$

iv) Se demuestra de forma similar al apartado iii). □

El resultado siguiente nos muestra cómo se relaciona una función real con su diferencia finita hacia atrás.

Lema 5.2.6 *Dado f cualquier polinomio real y $m \geq 0$ un número entero positivo, se cumple*

$$f(x-m) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} \nabla^i f(x) = (I - \nabla)^m f(x). \tag{5.2.5}$$

Demostración:
Basta observar que:

$$(x-1) = f(x) - \nabla f(x) = (I - \nabla) f(x),$$

y así la relación (5.2.5) se obtiene por iteración del operador $I - \nabla$. $\square$

A continuación, demostramos una fórmula que relaciona las diferencias finitas hacia delante de dos funciones diferentes.

Lema 5.2.7 *Sean f y g dos funciones reales que admitan diferencias hacia delante de orden m y $k+m$, respectivamente, con m y k dos números enteros positivos. Se verifica*

$$\Delta^m f(x)\Delta^k g(x) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} \Delta^{m-i}\left(f(x)\Delta^{k+i} g(x-m)\right). \tag{5.2.6}$$

Demostración:

Cómo lo que tenemos que demostrar es:

$$\Delta^m f(x)\Delta^k g(x) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} \Delta^{m-i}\left(f(x)\Delta^{i}\left(\Delta^k g(x-m)\right)\right),$$

basta probar por inducción sobre m que

$$\Delta^m f(x)h(x) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} \Delta^{m-i}\left(f(x)\Delta^{i} h(x-m)\right), \tag{5.2.7}$$

y después tomar $h(x) = \Delta^k g(x)$.

Cuando $m = 0$ el resultado se verifica trivialmente. Si $m = 1$, usando i) del lema 5.2.5, de (5.2.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}(-1)^i \binom{1}{i} \Delta^{1-i}\left(f(x)\Delta^{i} h(x-1)\right) &= \Delta(f(x)h(x-1)) - f(x)\Delta h(x-1) = \\
&= \Delta(f(x))h(x).
\end{aligned}$$

Suponemos cierto para $m-1$, y lo probamos para m. Usando la hipótesis de inducción, junto con lo ya demostrado en el caso $m = 1$, deducimos que

$$\begin{aligned}
&\Delta^m f(x)h(x) = \Delta^{m-1}(\Delta f(x))\,h(x) = \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i \binom{m-1}{i} \Delta^{m-1-i}\left(\Delta f(x)\Delta^{i} h(x-m+1)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i \binom{m-1}{i} \Delta^{m-1-i}\left(\Delta\left(f(x)\Delta^{i} h(x-m)\right) - f(x)\Delta^{i+1} h(x-m)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i \binom{m-1}{i} \Delta^{m-i}\left(f(x)\Delta^{i} h(x-m)\right) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}(-1)^i \binom{m-1}{i-1} \Delta^{m-i}\Big(f(x)\Delta^i h(x-m)\Big) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} \Delta^{m-i}\Big(f(x)\Delta^i h(x-m)\Big). \quad \square$$

5.3 Propiedades de los funcionales Δu y ∇u

En primer lugar, damos los conceptos de las diferencias finitas hacia delante y hacia atrás de un funcional.

Definición 5.3.1 [1] *Dado u un funcional lineal, decimos que Δu es la "diferencia finita (distribucional) hacia delante del funcional u", si es un funcional lineal tal que*

$$\langle \Delta u, f(x)\rangle = -\langle u, \nabla f(x)\rangle, \quad \forall f(x) \in \mathbb{P}. \tag{5.3.1}$$

Análogamente, notamos por ∇u, a la "diferencia finita (distribucional) hacia atrás del funcional u", definida como

$$\langle \nabla u, f(x)\rangle = -\langle u, \Delta f(x)\rangle, \quad \forall f(x) \in \mathbb{P}. \tag{5.3.2}$$

Lema 5.3.2 *Sea u un funcional lineal y $n \geq 0$ un número entero. Se verifican las siguientes propiedades*

i) $\langle \Delta^n u, f(x)\rangle = (-1)^n\langle u, \nabla^n f(x)\rangle, \quad \forall f(x) \in \mathbb{P}.$ (5.3.3)

ii) $\langle \nabla^n u, f(x)\rangle = (-1)^n\langle u, \Delta^n f(x)\rangle, \quad \forall f(x) \in \mathbb{P}.$ (5.3.4)

En el siguiente resultado, a partir las relaciones (5.3.1) y (5.3.2), se da la expresión de la diferencia hacia delante y hacia atrás del funcional $f(x)u$ en términos de los funcionales u y Δu y ∇u.

Proposición 5.3.3 *Dados u un funcional lineal y f cualquier polinomio de $\mathbb{P}$, se verifica*

i) $\Delta(f(x)u) = f(x+1)\Delta u + \Delta f(x) u.$ (5.3.5)

ii) $\nabla(f(x)u) = f(x-1)\nabla u + \nabla f(x) u.$ (5.3.6)

[1] Esta definición no coincide con la dada en [64], [154]. La definición dada aquí se basa en el hecho de que el adjunto del operador ∇ es el operador $-\Delta$, y el adjunto de Δ es $-\nabla$.

Demostración:
i) Dado un polinomio g definido sobre el espacio $\mathbb{P}$, usando la identidad (5.3.1), tenemos que

$$\langle \Delta(f(x)u), g(x)\rangle = -\langle f(x)u, \nabla g(x)\rangle = -\langle u, f(x)\nabla g(x)\rangle,$$

de donde, aplicando ii) del lema 5.2.5 y el apartado i) del lema 5.2.3, concluimos

$$\begin{aligned}\langle \Delta(f(x)u), g(x)\rangle &= -\langle u, \nabla(f(x+1)g(x))\rangle + \langle u, \nabla(f(x+1))g(x)\rangle = \\ &= \langle \Delta u, f(x+1)g(x)\rangle + \langle \nabla(f(x+1))u, g(x)\rangle = \\ &= \langle f(x+1)\Delta u, g(x)\rangle + \langle \Delta(f(x))u, g(x)\rangle = \\ &= \langle f(x+1)\Delta u + \Delta(f(x))u, g(x)\rangle.\end{aligned}$$

ii) Se demuestra de forma análoga a i), usando (5.3.2), junto con la propiedad i) del lema 5.2.5 y la relación i) del lema 5.2.3. □

La proposición anterior puede generalizarse para diferencias finitas hacia delante y hacia atrás de órdenes superiores del funcional u, tal y como mostramos a continuación.

Proposición 5.3.4 *Se consideran $n \geq 0$ un número entero dado, u un funcional lineal y f cualquier polinomio de $\mathbb{P}$. Se tienen*

i) $$\Delta^n(f(x)u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(f(x+n-k))\Delta^{n-k}u. \tag{5.3.7}$$

ii) $$\nabla^n(f(x)u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \nabla^k(f(x-n+k))\nabla^{n-k}u. \tag{5.3.8}$$

Demostración:
i) Probamos el resultado por el proceso de inducción. El caso $n = 1$ es la expresión (5.3.5). Para $n-1$ suponemos que se verifica (5.3.7), es decir, el funcional u cumple

$$\Delta^{n-1}(f(x)u) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k(f(x+n-1-k))\Delta^{n-1-k}u.$$

Vemos el caso n. Para ello, a partir de la relación (5.3.5), la linealidad del operador Δ y de la hipótesis de inducción, deducimos que

$$\begin{aligned}\Delta^n(f(x)u) &= \Delta^{n-1}(\Delta(f(x)u)) = \Delta^{n-1}(f(x+1)\Delta u) + \Delta^{n-1}(\Delta f(x)u) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k f(x+1+n-1-k)\Delta^{n-1-k}(\Delta u) +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k \Delta f(x+n-1-k) \Delta^{n-1-k} u = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k f(x+n-k) \Delta^{n-k} u + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{k+1} f(x+n-1-k) \Delta^{n-1-k} u \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k f(x+n-k) \Delta^{n-k} u + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \Delta^k f(x+n-k) \Delta^{n-k} u = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k \left(f(x+n-k)\right) \Delta^{n-k} u.
\end{aligned}
$$

ii) Análoga al apartado i). □

5.4 Funcionales lineales Δ–semiclásicos

En este apartado estudiamos los funcionales lineales Δ–semiclásicos. Para ello damos, en primer lugar, el concepto de funcional lineal Δ–semiclásico junto con la definición de Δ–clase asociada a ese funcional.

Definición 5.4.1 ([154]) *Un funcional regular u se dice "Δ-semiclásico" si existen dos polinomios σ y ψ tales que u verifica la ecuación en diferencias*

$$\Delta(\sigma(x)u) = \psi(x)u, \tag{5.4.1}$$

donde $\sigma(x) = a_p x^p + \dots, \quad a_p \neq 0, p \geq 0$ y $\psi(x) = b_q x^q + \dots, \quad b_q \neq 0$, con $q \geq 1$.

A la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada al funcional u, la llamamos SPOM Δ–semiclásica.

Definición 5.4.2 *Dado u un funcional Δ-semiclásico y $s \geq 0$ un número entero, se llama "Δ-clase" del funcional u al mínimo del conjunto de los números enteros s tales que*

$$s = \max\{gr(\psi) - 1, gr(\sigma) - 2\},$$

donde los polinomios ψ y σ verifican la relación (5.4.1).

El caso $s = 0$ corresponde al caso discreto clásico.

A continuación, damos las definiciones de funcional ∇–semiclásico y de ∇–clase asociada a este funcional.

Definición 5.4.3 ([154]) *Un funcional regular u se dice "∇-semiclásico", si existen dos polinomios ϕ y κ tales que u verifica la ecuación en diferencias*

$$\nabla(\phi(x)u) = \kappa(x)u, \tag{5.4.2}$$

donde $\phi(x) = c_r x^r + \dots, \quad c_r \neq 0, r \geq 0$ y $\kappa(x) = d_t x^t + \dots, d_t \neq 0, t \geq 1$.

Definición 5.4.4 *Se considera u un funcional ∇-semiclásico y $\tilde{s} \geq 0$ un número entero. Decimos que $\tilde{s}$ es la "∇-clase" del funcional u, si es el mínimo del conjunto de los números enteros tales que*

$$\tilde{s} = \max\{gr(\kappa) - 1, gr(\phi) - 2\},$$

para κ y ϕ los polinomios de la ecuación (5.4.2).

En el siguiente resultado mostramos que los conceptos de funcional lineal Δ-semiclásico y funcional ∇-semiclásico son equivalentes.

Proposición 5.4.5 *Si u es un funcional regular dado, entonces u es Δ-semiclásico si y solamente si u es un funcional ∇-semiclásico. De hecho, se tiene que u verifica la ecuación en diferencias*

$$\Delta(\sigma(x)u) = \psi(x)u,$$

si y solo si verifica la ecuación

$$\nabla(\phi(x)u) = \psi(x)u,$$

donde $\phi = \sigma + \psi$. En este caso, la Δ-clase de u coincide con la ∇-clase.

Demostración:

Suponemos, en primer lugar, que u es un funcional Δ-semiclásico, esto es, u verifica la ecuación (5.4.1). Si aplicamos el operador ∇ en ambos miembros de la igualdad (5.4.1), usando las propiedades iii) y iv) del lema 5.2.3 y la linealidad de estos operadores, obtenemos que

$$\nabla(\psi(x)u) = \nabla\Delta(\sigma(x)u) = \Delta(\sigma(x)u) - \nabla(\sigma(x)u),$$

luego $\nabla((\sigma(x) + \psi(x))u) = \Delta(\sigma(x)u)$. Si, usamos, de nuevo, la ecuación (5.4.1) y la relación $\phi = \sigma + \psi$, llegamos a $\nabla(\phi(x)u) = \psi(x)u$.

Recíprocamente, sea u un funcional ∇-semiclásico. Aplicando Δ a la ecuación (5.4.2) y volviendo a usar iv) del lema 5.2.3, la linealidad de los operadores en diferencias y la relación $\phi = \sigma + \psi$, deducimos que

$$\Delta(\psi(x)u) = \Delta\nabla(\phi(x)u) = \Delta(\phi(x)u) - \nabla(\phi(x)u) = \Delta(\sigma(x)u) + \Delta(\psi(x)u) - \psi(x)u$$

es decir, $\Delta(\sigma(x)u) = \psi(x)u$.

Ahora demostramos que la Δ-clase del funcional u coincide con la ∇-clase. Primero vemos que $s \leq \tilde{s}$. Para ello distinguimos las dos situaciones siguientes:

a.1) Si $r \geq q$. Usando la relación $\phi = \sigma + \psi$, obtenemos que $p \leq \max\{r, q\}$, con lo que deducimos que

$$s = \max\{q-1, p-2\} \leq \max\{q-1, \max\{r,q\}-2\} = \max\{q-1, r-2\} = \tilde{s}.$$

a.2) Cuando $r < q$, tenemos que $\tilde{s} = \max\{q-1, r-2\} = q-1$, luego

$$s = \max\{q-1, p-2\} \leq \max\{q-1, \max\{r,q\}-2\} = \max\{q-1, q-2\} = q-1 = \tilde{s}.$$

Demostramos ahora la otra desigualdad volviendo a distinguir dos casos:

b.1) Para $p \geq q$, de la relación $\phi = \sigma + \psi$, sabemos que $r \leq \max\{p,q\}$, y, por lo tanto, concluimos que

$$\tilde{s} = \max\{q-1, r-2\} \leq \max\{q-1, \max\{p,q\}-2\} = \max\{q-1, p-2\} = s.$$

b.2) En el caso $p < q$, se verifica que $s = \max\{q-1, p-2\} = q-1$, de donde llegamos a que

$$\tilde{s} = \max\{q-1, r-2\} \leq \max\{q-1, \max\{p,q\}-2\} = \max\{q-1, q-2\} = q-1 = s. \quad \square$$

A partir del resultado de la proposición 5.4.5, si aplicamos en la expresión (5.4.2) la propiedad ii) de la proposición 5.3.3, concluimos que u es un funcional Δ-semiclásico (∇-semiclásico) si y solamente si verifica

$$\phi(x-1)\nabla u = [\psi(x) - \nabla\phi(x)]\, u. \tag{5.4.3}$$

En la siguiente proposición deducimos la generalización de la ecuación (5.4.3) para diferencias de órdenes superiores del funcional ∇u.

Proposición 5.4.6 *Sea u un funcional lineal Δ-semiclásico, entonces para cada valor de n, se tiene*

$$\prod_{j=1}^{n} \phi(x-j)\nabla^n u = \theta(x;n)u, \quad n \geq 0, \tag{5.4.4}$$

donde, por convenio, $\prod_{j=1}^{0}\phi(x-j) = 1$ y los polinomios $\theta(x;n)$ se definen de forma recursiva como

$$\begin{aligned} \theta(x;0) &= 1, \\ \theta(x;n) &= \sigma(x)\nabla\theta(x;n-1) + \theta(x;n-1)\left[\phi(x-n) - \sigma(x)\right], \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

con $\phi = \sigma + \psi$, para $\sigma(x) = a_p x^p + \ldots,\quad a_p \neq 0,\ p \geq 0$ y $\psi(x) = b_q x^q + \ldots,\quad b_q \neq 0,\ q \geq 1$.

Demostración:

Aplicando el proceso de inducción a n, tenemos que, si $n = 0$ el resultado es trivial y para $n = 1$, la relación (5.4.4) es la ecuación (5.4.3). Suponemos que el resultado es cierto para $n - 1$, es decir, el funcional u verifica

$$\prod_{j=1}^{n-1} \phi(x-j)\nabla^{n-1}u = \theta(x;n-1)u, \tag{5.4.5}$$

donde

$$\theta(x;n-1) = \sigma(x)\nabla\theta(x;n-2) + \theta(x;n-2)\left[\phi(x-n+1) - \sigma(x)\right].$$

Si aplicamos ∇ a la ecuación (5.4.5) y usamos la propiedad ii) de la proposición 5.3.3, queda

$$\nabla\left(\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j)\right)\nabla^{n-1}u + \prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j-1)\nabla^{n}u = \nabla\theta(x;n-1)u + \theta(x-1;n-1)\nabla u, \tag{5.4.6}$$

y si, ahora, despejamos $\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j-1)\nabla^n u$ en (5.4.6), multiplicamos por el polinomio $\phi(x-1)$, usamos la relación (5.4.3), la hipótesis de inducción y la expresión $\phi = \sigma + \psi$, concluimos que

$$\begin{aligned}
\phi(x-1)\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j-1)\nabla^n u &= \prod_{j=1}^{n}\phi(x-j)\nabla^n u = \\
&= \phi(x-1)\left[\nabla\theta(x;n-1)u + \theta(x-1;n-1)\nabla u\right] - \phi(x-1)\nabla\left(\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j)\right)\nabla^{n-1}u \\
&= \left[\phi(x-1)\nabla\theta(x;n-1) + \theta(x-1;n-1)\theta(x;1)\right]u - \\
&- \phi(x-1)\left[\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j) - \prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j-1)\right]\nabla^{n-1}u = \\
&= \left[\phi(x-1)\nabla\theta(x;n-1) + \theta(x-1;n-1)\theta(x;1)\right]u - \\
&- \phi(x-1)\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j)\nabla^{n-1}u + \prod_{j=1}^{n}\phi(x-j)\nabla^{n-1}u = \\
&= \left[\phi(x-1)\nabla\theta(x;n-1) + \theta(x-1;n-1)\theta(x;1)\right]u + \\
&+ \left[\phi(x-n) - \phi(x-1)\right]\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j)\nabla^{n-1}u = \\
&= \left[\phi(x-1)\nabla\theta(x;n-1) + \theta(x-1;n-1)\theta(x;1) + \theta(x;n-1)\left[\phi(x-n) - \phi(x-1)\right]\right]u = \\
&= \left[(\phi(x-1) - \theta(x;1))\nabla\theta(x;n-1) + \theta(x;n-1)\left[\theta(x;1) + \phi(x-n) - \phi(x-1)\right]\right]u =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(\phi(x)-\psi(x))\nabla\theta(x;n-1)+\theta(x;n-1)[\psi(x)+\phi(x-n)-\phi(x)]]\,u = \\
&= [\sigma(x)\nabla\theta(x;n-1)+\theta(x;n-1)[\phi(x-n)-\sigma(x)]]\,u = \\
&= \theta(x;n)u. \quad \square
\end{aligned}
$$

Podemos deducir un resultado análogo al de la proposición 5.4.6, para diferencias de órdenes superiores del funcional Δu.

Proposición 5.4.7 *Dado u un funcional lineal Δ-semiclásico, para cada valor de n, se verifica*

$$\prod_{j=1}^{n}\sigma(x+j)\Delta^n u = \epsilon(x;n)u, \quad n \geq 0, \tag{5.4.7}$$

donde, por convenio, $\prod_{j=1}^{0}\sigma(x+j) = 1$ y los polinomios $\epsilon(x;n)$ se definen recursivamente en la forma siguiente

$$
\begin{aligned}
\epsilon(x;0) &= 1, \\
\epsilon(x;n) &= \phi(x)\Delta\epsilon(x;n-1)+\epsilon(x;n-1)[\phi(x)-\sigma(x+n)], \quad n \geq 1,
\end{aligned}
$$

con $\phi = \sigma + \psi$, para $\sigma(x) = a_p x^p + \ldots,\ \ a_p \neq 0,\ p \geq 0$ y $\psi(x) = b_q x^q + \ldots,\ \ b_q \neq 0,\ q \geq 1$.

Lema 5.4.8 *En las condiciones de la proposición 5.4.6, se verifica que*

$$gr\,(\theta(x;n)) \leq n(s+1), \tag{5.4.8}$$

donde $s = \max\{q-1, p-2\}$ denota la Δ-clase del funcional u.

Demostración:

Usamos el proceso de inducción sobre n. Si tenemos en cuenta que $\phi = \sigma + \psi$, para los dos primeros polinomios se verifica que

$$
\begin{aligned}
gr\,(\theta(x;0)) &= gr\,(1) = 0, \\
gr\,(\theta(x;1)) &= gr\,(\psi(x)-\nabla\phi(x)) = \\
&= gr\,(\psi(x)-\nabla\sigma(x)-\nabla\psi(x)) \leq \max\{q, p-1\} = s+1.
\end{aligned}
$$

Suponemos que el resultado es cierto para $n-1$, es decir, el polinomio $\theta(x;n-1)$ cumple que

$$gr\,(\theta(x;n-1)) \leq (n-1)(s+1).$$

Usando esta hipótesis de inducción y la relación

$$\theta(x;n) = \sigma(x)\nabla\theta(x;n-1)+\theta(x;n-1)[\phi(x-n)-\sigma(x)],$$

llegamos a

$$\begin{aligned} gr\,(\theta(x;n)) &\leq \max\{p+(n-1)(s+1)-1,(n-1)(s+1)+gr\,(\phi(x-n)-\sigma(x))\} \leq \\ &\leq \max\{(n-1)(s+1)+(s+1),(n-1)(s+1)+\max\{q,r-1\}\} \leq \\ &\leq n(s+1). \quad \square \end{aligned}$$

Podemos observar que (5.4.3) adopta la forma $\phi(x-1)\nabla u = \theta(x;1)u$. Aplicando el operador ∇ $(n-1)$ veces en esta relación, obtenemos

$$\phi(x-n)\nabla^n u = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i}\nabla^{n-1-i}\theta(x-i;1)-\binom{n-1}{i-1}\nabla^{n-i}\phi(x-i)\right]\nabla^i u, \qquad (5.4.9)$$

para $n \geq 1$, suponiendo que $\binom{n}{m} = 0$ si $m < 0$. Multiplicando por $\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x-j)$ y usando (5.4.4), deducimos otra expresión recurrente para el polinomio $\theta(x;n)$:

$$\begin{aligned} \theta(x;n) = \sum_{i=0}^{n-1}\Bigg[\binom{n-1}{i}\nabla^{n-1-i}\theta(x-i;1) - \\ -\binom{n-1}{i-1}\nabla^{n-i}\phi(x-i)\Bigg]\prod_{j=i+1}^{n-1}\phi(x-j)\theta(x;i), \end{aligned} \qquad (5.4.10)$$

para $n \geq 1$.

Lema 5.4.9 *Sean h, $j \geq 0$ dos números enteros dados y u un funcional Δ-semiclásico. Se verifica*

$$\prod_{s=j+1}^{h}\phi(x-s)\theta(x;j)\nabla^h u = \theta(x;h)\nabla^j u, \quad h \geq j \geq 0, \qquad (5.4.11)$$

donde $\prod_{s=j+1}^{j}\phi(x-s) = 1$, *por convenio.*

Demostración:

Cuando $h = j$, la relación se cumple trivialmente. Si $h > j$ demostramos el resultado por inducción. Para $h = 1$ en (5.4.11), tenemos que

$$\phi(x-1)\nabla u = \theta(x;1)u,$$

resultado que es cierto por (5.4.4). Suponemos que se verifica para $h-1$, es decir, u verifica

$$\prod_{s=j+1}^{h-1} \phi(x-s)\theta(x;j)\nabla^{h-1}u = \theta(x;h-1)\nabla^j u, \quad h-1 \geq j, \tag{5.4.12}$$

y lo probamos para h.
i) Para $0 \leq j < h-1$, pasando de x a $x+1$ y aplicando el operador ∇ en (5.4.12), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{s=j+1}^{h-1} \phi(x-s)\theta(x;j)\nabla^h u &= \nabla\theta(x+1;h-1)\nabla^j u + \theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u - \\
&\quad -\nabla\left(\prod_{s=j+1}^{h-1} \phi(x+1-s)\theta(x+1;j)\right)\nabla^{h-1}u = \\
&= \nabla\theta(x+1;h-1)\nabla^j u + \theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u - \\
&\quad -\left(\prod_{s=j+1}^{h-1} \phi(x+1-s)\theta(x+1;j) - \prod_{s=j+1}^{h-1} \phi(x-s)\theta(x;j)\right)\nabla^{h-1}u,
\end{aligned}$$

y multiplicando por $\phi(x-h)$ y usando la hipótesis de inducción, queda

$$\begin{aligned}
\prod_{s=j+1}^{h} \phi(x-s)\theta(x;j)\nabla^h u &= \phi(x-h)\nabla\theta(x+1;h-1)\nabla^j u + \phi(x-h)\theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u - \\
&\quad -\left(\phi(x-h)\prod_{s=j+1}^{h-1} \phi(x+1-s)\theta(x+1;j) - \prod_{s=j+1}^{h} \phi(x-s)\theta(x;j)\right)\nabla^{h-1}u = \\
&= \phi(x-h)\nabla\theta(x+1;h-1)\nabla^j u + \phi(x-h)\theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u - \\
&\quad -\phi(x-h)\theta(x+1;h-1)\nabla^j u + \phi(x-h)\theta(x;h-1)\nabla^j u = \\
&= \phi(x-h)\theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u.
\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

A continuación demostramos que

$$\phi(x-h)\theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u = \theta(x;h)\nabla^j u, \quad h-1 > j. \tag{5.4.14}$$

Lo hacemos, de nuevo, por inducción. Si $h=1$ el resultado se verifica trivialmente. Supongamos cierto para $h-1$, es decir,

$$\phi(x-h+1)\theta(x;h-2)\nabla^{j+1}u = \theta(x;h-1)\nabla^j u, \quad h-2 > j,$$

y lo probamos para h. Pasando de x a $x+1$ y aplicando el operador ∇ en la hipótesis de inducción tenemos:

$$\begin{aligned}\theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u &= \nabla\left(\phi(x-h+2)\theta(x+1;h-2)\right)\nabla^{j+1}u+\\ &+\phi(x-h+1)\theta(x;h-2)\nabla^{j+2}u-\nabla\theta(x+1;h)\nabla^{j}u=\\ &= \phi(x-h+2)\theta(x+1;h-2)\nabla^{j+1}u-\phi(x-h+1)\theta(x;h-2)\nabla^{j+1}u\\ &+\phi(x-h+1)\theta(x;h-2)\nabla^{j+2}u-\nabla\theta(x+1;h)\nabla^{j}u,\end{aligned}$$

y si multiplicamos por $\phi(x-h)$ y usamos la hipótesis de inducción, obtenemos:

$$\begin{aligned}\phi(x-h)\theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u &= \phi(x-h)\partial(x+1;h-1)\nabla^{j}u-\phi(x-h)\theta(x;h-1)\nabla^{j}u\\ &+\phi(x-h)\phi(x-h+1)\theta(x;h-2)\nabla^{j+2}u-\\ &-\phi(x-h)\nabla\theta(x+1;h)\nabla^{j}u=\\ &= \phi(x-h)\phi(x-h+1)\theta(x;h-2)\nabla^{j+2}u,\end{aligned}$$

y usando, de nuevo, la hipótesis de inducción tenemos que

$$\theta(x;h-1)\nabla^{j+1}u=\phi(x-h+1)\theta(x;h-2)\nabla^{j+2}u,\quad h-1>j+1.$$

Luego queda probada la relación (5.4.14). Sustituyendo (5.4.14) en (5.4.13), concluimos el resultado.
ii) Si $j=h-1$, multiplicando la relación (5.4.9) por el polinomio $\theta(x;h-1)$, usando la hipótesis de inducción junto con la expresión (5.4.10), llegamos al resultado. □

Corolario 5.4.10 *Dados $0\leq h,j,\leq K$ dos números enteros y u un funcional Δ-semiclásico, se tiene que*

$$\prod_{s=h+1}^{K}\phi(x-s)\theta(x;h)\nabla^{j}u=\prod_{s=j+1}^{K}\phi(x-s)\theta(x;j)\nabla^{h}u. \tag{5.4.15}$$

Demostración:

Si multiplicamos la relación (5.4.11) por el polinomio $\prod_{s=h+1}^{K}\phi(x-s)$, llegamos al resultado.
□

En el siguiente resultado establecemos unas relaciones de estructura que verifican los polinomios que constituyen la SPOM Δ-semiclásica. Estas relaciones de estructura son conocidas, (ver [154]), cuando u es un funcional Δ-clásico.

Proposición 5.4.11 *Se considera u un funcional Δ-semiclásico y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la SPOM Δ-semiclásica correspondiente. Entonces, para cada valor de n, el polinomio P_n verifica las siguientes relaciones de estructura:*

i) $$\phi(x)\Delta\left(P_n(x)\right) = \sum_{k=n-s-1}^{n+r-1} a_{n,k}P_k(x). \tag{5.4.16}$$

ii) $$\sigma(x)\nabla\left(P_n(x)\right) = \sum_{k=n-s-1}^{n+p-1} b_{n,k}P_k(x), \tag{5.4.17}$$

donde $r = gr(\phi)$, $p = gr(\sigma)$ y s denota la Δ-clase del funcional u dada en la definición 5.4.2.

Demostración:

i) Escribimos el polinomio $\phi\Delta\left(P_n(x)\right)$ en términos de los polinomios $\{P_k\}_{k\geq 0}$:

$$\phi(x)\Delta\left(P_n(x)\right) = \sum_{k=0}^{n-r-1} a_{n,k}P_k(x),$$

donde los elementos $a_{n,k}$ son

$$a_{n,k} = \frac{\langle u, \phi P_k \Delta\left(P_n(x)\right)\rangle}{\langle u, P_k P_k\rangle}.$$

Teniendo en cuenta la propiedad i) del lema 5.2.5, la relación (5.3.1) y la proposición 5.4.5, deducimos que

$$\begin{aligned}
\langle u, \phi(x)P_k(x)\Delta\left(P_n(x)\right)\rangle &= \langle \phi(x)u, \Delta\left(P_k(x-1)P_n(x)\right) - \Delta\left(P_k(x-1)\right)P_n(x)\rangle \\
&= -\langle \nabla\left(\phi(x)u\right), P_k(x-1)P_n(x)\rangle - \langle \phi(x)u, \Delta\left(P_k(x-1)\right)P_n(x)\rangle = \\
&= -\langle u, \left[\psi(x)P_k(x-1) + \phi(x)\Delta\left(P_k(x-1)\right)\right]P_n(x)\rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, de la ortogonalidad del polinomio P_n con respecto al funcional u, concluimos que para $0 \leq k < n-s-1$ entonces $a_{n,k} = 0$.

ii) Análoga a la demostración de i), usando ii) del lema 5.2.5 y la relación (5.3.2). □

5.5 Polinomios ortogonales clásicos de variable discreta

Esta sección la dedicamos a hacer un estudio de los *polinomios ortogonales clásicos de variable discreta.* Empezamos dando la definición de funcional de momentos Δ–clásico.

Definición 5.5.1 *Dado u un funcional lineal, decimos que u es un funcional de momentos "Δ-clásico", si existen dos polinomios σ y ψ tales que u verifica una ecuación en diferencias del tipo*

$$\Delta(\sigma(x)u) = \psi(x)u, \tag{5.5.1}$$

con $gr(\sigma) \leq 2$ y $gr(\psi) = 1$.

Notamos por SPOM Δ-clásica a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos clásicos correspondiente asociada al funcional u.

Los polinomios ortogonales clásicos de variable discreta, salvo un cambio de variable lineal, coinciden con alguna de las cuatro familias siguientes: Charlier, Kravchuk, Meixner o Hahn.

La clasificación de estos polinomios clásicos se debe a las distintas formas canónicas que adopta el polinomio σ. De este modo, obtenemos: el caso Hahn si el polinomio es de grado dos de la forma $\sigma(x) = x(N + \alpha - x)$, y los casos Charlier, Kravchuk y Meixner cuando σ es el polinomio de grado uno x.

Sea u un funcional Δ-clásico definido positivo que puede ser expresado mediante una función peso ρ, esto es

$$\langle u, f\rangle = \sum_{i\in I} f(x_i)\rho(x_i), \quad \forall f \in \mathbb{P}. \tag{5.5.2}$$

En estas condiciones, la ecuación (5.5.1) escrita en términos de la función ρ, la escribimos como

$$\Delta(\sigma(x)\rho(x)) = \psi(x)\rho(x), \tag{5.5.3}$$

o equivalentemente

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \psi(x)}{\sigma(x+1)}. \tag{5.5.4}$$

En este caso, decimos que ρ es una *función peso Δ-clásica.*

Mostramos en la siguiente tabla las expresiones explícitas de estos polinomios en cada caso clásico, (ver [10], sección 4):

Nombre	$\sigma(x)$	$\psi(x)$	$\phi(x)$
Charlier	x	$\mu - x$	μ
Kravchuk	x	$\dfrac{Np - x}{1-p}$	$-\dfrac{p}{1-p}(x - N)$
Meixner	x	$(\mu - 1)x + \mu\gamma$	$\mu x + \mu\gamma$
Hahn	$x(N + \alpha - x)$	$(\beta+1)(N-1) - (\alpha+\beta+2)x$	$(x+\beta+1)(N-1-x)$

A continuación, damos en otra tabla los intervalos de definición y las funciones peso Δ-clásicas de estas familias de polinomios, junto con las restricciones en los parámetros, necesarias para garantizar el carácter definido positivo del funcional de momentos asociado u.

Nombre	$P_n(x)$	I	$\rho(x)$	Restricciones
Charlier	$C_n^{\mu}(x)$	$[0,+\infty)$	$\dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{\Gamma(x+1)}$	$\mu > 0$
Kravchuk	$K_n^p(x,N)$	$[0,N]$	$\dfrac{N!p^x(1-p)^{N-x}}{\Gamma(N+1-x)\Gamma(x+1)}$	$0 < p < 1$, $n \leq N-1$
Meixner	$M_n^{(\gamma,\mu)}(x)$	$[0,+\infty)$	$\dfrac{\mu^x\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+1)}$	$\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$
Hahn	$h_n^{(\alpha,\beta)}(x;N)$	$[0,N-1]$	$\dfrac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+x+1)}{\Gamma(N-x)\Gamma(x+1)}$	$\alpha,\beta \geq -1$, $n \leq N-1$

Es conocido, (ver Nikiforov [142], sección 2.7, p. 49), que podemos obtener una representación de las familias de polinomios mónicos clásicos en variable discreta, en términos de la función hipergeométrica generalizada ${}_p\mathrm{F}_q$, definida como

$$ {}_p\mathrm{F}_q\left(\begin{array}{c} a_1,a_2,\ldots,a_p \\ b_1,b_2,\ldots,b_q \end{array}\middle| x\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k(b_2)_k\ldots(b_q)_k}\frac{x^k}{k!}, $$

donde p y q son números enteros positivos dados, y a_i, b_j son números reales, para $0 \leq i \leq p$ y $0 \leq j \leq q$.

Las representaciones para cada uno de los casos clásicos son las siguientes:

$$ C_n^{\mu}(x) = (-\mu)^n \; {}_2\mathrm{F}_0\left(\begin{array}{c} -n,-x \\ - \end{array}\middle| -\frac{1}{\mu}\right), \quad n \geq 0. \tag{5.5.5} $$

$$ K_n^p(x,N) = \frac{(-p)^n N!}{(N-n)!}\; {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} -n,-x \\ -N \end{array}\middle| \frac{1}{p}\right), \quad n \geq 0. \tag{5.5.6} $$

$$ M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = (\gamma)_n\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n \; {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} -n,-x \\ \gamma \end{array}\middle| 1-\frac{1}{\mu}\right), \quad n \geq 0. \tag{5.5.7} $$

$$ h_n^{(\alpha,\beta)}(x;N) = \frac{(1-N)_n(\beta+1)_n}{(\alpha+\beta+n+1)_n}\; {}_3\mathrm{F}_2\left(\begin{array}{c} -x,\alpha+\beta+n+1,-n \\ 1-N,\beta+1 \end{array}\middle| 1\right), \quad n \geq 0. \tag{5.5.8} $$

De este modo, a partir de la definición de función hipergeométrica generalizada, simplificando convenientemente, obtenemos las expresiones explícitas de estas familias clásicas:

1) *Polinomios de Charlier*: $\{C_n^{\mu}\}_{n\geq 0}$

$$ \begin{aligned} C_0^{\mu}(x) &= 1, \quad C_1^{\mu}(x) = x - \frac{1}{\mu}, \\ C_n^{\mu}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-k+1)_k\left(\frac{-1}{\mu}\right)^{n-k}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{5.5.9} $$

2) *Polinomios de Kravchuk*: $\{K_n^p(x,N)\}_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned} K_0^p(x,N) &= 1, \quad K_1^p(x,N)(x) = x - pN, \\ K_n^p(x,N) &= p^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-N+k)_{n-k}(x-k+1)_k \frac{1}{p^k}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

3) *Polinomios de Meixner*: $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned} M_0^{(\gamma,\mu)}(x) &= 1, \quad M_1^{(\gamma,\mu)}(x) = x + \frac{\mu(\gamma)}{\mu-1}, \\ M_n^{(\gamma,\mu)}(x) &= \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\gamma+k)_{n-k}(x-k+1)_k \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^k, n \geq 2. \end{aligned} \tag{5.5.11}$$

4) *Polinomios de Hahn*: $\{h_n^{(\alpha,\beta)}(x;N)\}_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned} h_0^{(\alpha,\beta)}(x;N) &= 1, \quad h_1^{(\alpha,\beta)}(x;N) = x - \frac{(N-1)(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}, \\ h_n^{(\alpha,\beta)}(x;N) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-k+1)_k \frac{(1-N+k)_{n-k}(\beta+1+k)_{n-k}}{(\alpha+\beta+n+1+k)_{n-k}}, n \geq 2. \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Asímismo, es conocido que cada una de estas familias de polinomios verifican la ecuación en diferencias de segundo orden siguiente:

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \psi(x)\Delta y(x) + \lambda_n y(x) = 0, \tag{5.5.13}$$

donde y denota la única solución polinómica de la ecuación (5.5.13) y

$$\lambda_n = -n\Delta\psi(x) - \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2\sigma(x),$$

con σ y ψ los polinomios anteriormente dados para cada una de las SPOM clásicas.

Teniendo en cuenta la relación $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$, la ecuación en diferencias (5.5.13) puede escribirse en la forma:

$$\phi(x)\Delta\nabla y(x) + \psi(x)\nabla y(x) + \lambda_n y(x) = 0. \tag{5.5.14}$$

Capítulo 6

Polinomios ortogonales asociados a productos escalares Δ–Sobolev

6.1 Introducción

Estudiaremos, en este capítulo, los polinomios ortogonales discretos asociados a un producto escalar no diagonal que involucra operadores en diferencias, esto es, un producto escalar en el que aparece el valor de la función y el de sus consecutivas diferencias hacia delante.

Si se cambia en (2.1.1) el operador derivada D por el operador lineal Δ, obtenemos que la forma general de este tipo de productos escalares se expresa como sigue

$$(f,g)_{\Delta}^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle u_{m,k}, \Delta^m f \Delta^k g \rangle, \tag{6.1.1}$$

para cualesquiera dos polinomios f y g pertenecientes al espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$, donde $K \geq 0$ es un número entero dado, $u_{m,k}$ son funcionales lineales discretos, para $m,k = 0,\ldots,K$, y Δ representa el operador lineal en diferencias finitas hacia delante. A este tipo de productos los llamaremos *productos escalares Δ–Sobolev.*

Observemos que es posible definir productos escalares análogos a (6.1.1), sustituyendo Δ por el operador ∇:

$$(f,g)_{\nabla}^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle u_{m,k}, \nabla^m f \nabla^k g \rangle.$$

De este modo, todos los resultados que deduciremos en este capítulo, tienen una versión dual para el operador ∇.

En este capítulo, haremos un estudio análogo al de capítulo 2, pero con las particularidades del operador lineal Δ. De este modo, estudiaremos productos escalares discretos no diagonales de la forma (6.1.1) cuando se considera una familia particular de estos funcionales lineales $u_{m,k}$. En concreto, tomaremos los funcionales $u_{m,k}$ como el producto de unos ciertos polinomios con coeficientes reales, $\lambda_{m,k}$, por un funcional lineal Δ-semiclásico definido positivo. Esto es, si u es un funcional Δ-semiclásico definido positivo dado, entonces

$$u_{m,k} = \lambda_{m,k}(x)u, \quad m,k = 0,1,\ldots,K, \tag{6.1.2}$$

donde $\lambda_{m,k}$ son polinomios reales, para $m,k = 0,1,\ldots,K$, sujetos a una serie de restricciones que hacen que la matriz polinómica

$$\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x) = (\lambda_{m,k}(x))_{m,k=0}^{K},$$

sea una matriz simétrica y definida positiva.

Los primeros autores que abordan el estudio de productos escalares de la forma (6.1.1) son I. Area, E. Godoy y F. Marcellán. En [15], estos autores estudian el producto escalar diagonal de la forma:

$$(f,g)_S = \langle u, (\, f, \Delta f\,) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ \Delta g \end{pmatrix} \rangle, \tag{6.1.3}$$

donde λ es un número real positivo y u es el funcional Δ-clásico de Meixner. Este capítulo de la Memoria es una amplia generalización del producto (6.1.3), que se obtendrá como caso particular.

A continuación describiremos la estructura del capítulo, que es análoga a la del capítulo 2. La sección 2 la dedicaremos a realizar un estudio del producto escalar (6.1.1) cuando los funcionales lineales $u_{m,k}$ verifican las relaciones (6.1.2). A partir de la expresión matricial de este producto escalar, obtendremos las condiciones que han de cumplir los polinomios $\lambda_{m,k}$ para poder garantizar que (6.1.1) sea un producto escalar.

En la sección 3, daremos la expresión de un operador en diferencias definido sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales $\mathbb{P}$, que llamaremos $\mathcal{F}^{(K)}$. Demostraremos que, bajo ciertas condiciones, este operador permite representar el producto escalar definido en la sección 2, en términos del producto escalar estándar asociado al funcional u. Asímismo, deduciremos que el operador $\mathcal{F}^{(K)}$ es simétrico con respecto al producto escalar Δ-Sobolev.

En la siguiente sección, a partir del operador $\mathcal{F}^{(K)}$, obtendremos varias relaciones entre la sucesión de polinomios ortogonales asociados al funcional u, y la sucesión de polinomios ortogonales asociada al producto escalar Δ-Sobolev, que denotaremos $\{Q_n\}_{n\geq 0}$. Por último, demostraremos que cada polinomio ortogonal Q_n verifica una ecuación en diferencias de orden $2K+2$.

Consideraremos, en la última sección del capítulo, una serie de casos particulares cuando $K = 1$. Estudiaremos productos escalares no diagonales discretos de manera que el correspondiente operador en diferencias asociado, $\mathcal{F}^{(1)}$, conserve el grado de los polinomios. Estamos interesados en estos tipos de operadores porque, a partir de esta propiedad, tendremos que los polinomios ortogonales $\{Q_n\}_n$ son funciones propias del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ y, por lo tanto, verifican una ecuación en diferencias de segundo orden. Como consecuencia probaremos que es posible dotar de propiedades de ortogonalidad Δ-Sobolev a familias clásicas de polinomios.

Deduciremos condiciones necesarias para que el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios. En particular, obtendremos que el polinomio $\lambda_{1,0}-\lambda_{1,1}$ de la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$ tiene que ser una constante y el funcional u ha de ser Δ–clásico.

6.2 Producto escalar Δ–Sobolev

Se considera $K \geq 0$ un número entero dado, u un funcional lineal Δ–semiclásico definido positivo y f y g dos polinomios arbitrarios de $\mathbb{P}$. En estas condiciones, definimos el producto escalar:

$$(f,g)_{\Delta}^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle \lambda_{m,k}(x)u, \Delta^m f(x)\Delta^k g(x)\rangle, \tag{6.2.1}$$

donde $\lambda_{m,k}$ son polinomios reales, para $m,k = 0,\ldots,K$, y $x \in I$, la envolvente convexa del soporte del funcional u. Estos elementos deben verificar ciertas restricciones a fin de garantizar que (6.2.1) sea un producto escalar.

Escribiendo el producto escalar (6.2.1) en forma matricial, obtenemos

$$(f,g)_{\Delta}^{(K)} = \langle u, F(x) \begin{pmatrix} \lambda_{0,0}(x) & \lambda_{0,1}(x) & \ldots & \lambda_{0,K}(x) \\ \lambda_{1,0}(x) & \lambda_{1,1}(x) & \ldots & \lambda_{1,K}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{K,0}(x) & \lambda_{K,1}(x) & \ldots & \lambda_{K,K}(x) \end{pmatrix} G(x)^T \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned} F(x) &= (\, f(x),\ \Delta f(x),\ \ldots,\ \Delta^K f(x)\,), \\ G(x) &= (\, g(x),\ \Delta g(x),\ \ldots,\ \Delta^K g(x)\,), \end{aligned}$$

y denotando por

$$\Lambda^{(K)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0}(x) & \lambda_{0,1}(x) & \ldots & \lambda_{0,K}(x) \\ \lambda_{1,0}(x) & \lambda_{1,1}(x) & \ldots & \lambda_{1,K}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{K,0}(x) & \lambda_{K,1}(x) & \ldots & \lambda_{K,K}(x) \end{pmatrix},$$

deducimos que una condición suficiente para que (6.2.1) sea un producto escalar es que la matriz $\Lambda^{(K)}(x)$ tiene que ser una matriz simétrica y definida positiva. De esta forma, $\lambda_{m,k}(x) = \lambda_{k,m}(x)$, para $m,k = 0,\ldots,K$.

A los productos escalares discretos de la forma (6.2.1) los llamaremos *productos escalares Δ-Sobolev*, por analogía con los productos escalares estudiados en el capítulo 2 de esta Memoria.

En el caso en que $K = 0$ y $\lambda_{0,0}(x) = 1$, el producto escalar (6.2.1) es el producto escalar estándar definido para el funcional lineal Δ–semiclásico u, es decir

$$(f,g) = (f,g)_{\Delta}^{(0)} = \langle u, f(x)g(x)\rangle.$$

En lo que sigue, notaremos por $\{P_n\}_{n\geq 0}$ a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional u, (SPOM Δ-semiclásica), y por k_n a la norma al cuadrado de un polinomio cualquiera P_n:

$$k_n = \langle u, P_n P_n\rangle, \quad k_n > 0, \quad n \geq 0.$$

A la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto escalar Δ-Sobolev (6.2.1) la denotaremos $\{Q_n\}_{n\geq 0}$, y diremos que $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una *sucesión de polinomios ortogonales mónicos* Δ*-Sobolev*, que notaremos por SPOM Δ-Sobolev. Representaremos por $\tilde{k}_n$ a la norma al cuadrado de cualquier polinomio Q_n, esto es,

$$\tilde{k}_n = (Q_n, Q_n)_{\Delta}^{(K)}, \quad n \geq 0,$$

donde siempre $\tilde{k}_n > 0$, por definición de producto escalar.

6.3 El operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$

Recordemos que si u es un funcional lineal Δ-semiclásico definido positivo, entonces existen dos polinomios σ y ψ, tales que u verifica la siguiente ecuación en diferencias de tipo Pearson, (ver (5.4.1)),

$$\Delta(\sigma(x)u) = \psi(x)u, \tag{6.3.1}$$

donde $\sigma(x) = a_p x^p + \ldots$, $a_p \neq 0$ y $\psi(x) = b_q x^q + \ldots$, $b_q \neq 0$, con $p \geq 0$ y $q \geq 1$. Denotamos por $s = \max\{q-1, p-2\}$ a la Δ-clase del funcional u, (ver definición 5.4.2).

Asímismo, de la relación (5.4.2), llamando $\phi = \sigma + \psi$, se tiene que la ecuación (6.3.1) es equivalente a

$$\phi(x-1)\nabla u = [\psi(x) - \nabla\phi(x)]\, u. \tag{6.3.2}$$

Si notamos por $\theta(x;n)$ a los polinomios definidos en forma recursiva mediante

$$\begin{aligned} \theta(x;0) &= 1, \\ \theta(x;n) &= \sigma(x)\nabla\theta(x;n-1) + \theta(x;n-1)\left[\phi(x-n) - \sigma(x)\right], \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

entonces, la diferencias del funcional u verifican la ecuación

$$\prod_{j=1}^{n} \phi(x-j)\nabla^n u = \theta(x;n)u, \quad n \geq 0, \tag{6.3.3}$$

(ver la proposición 5.4.6), y, además,

$$gr\left(\theta(x;n)\right) \leq n(s+1). \tag{6.3.4}$$

Nuestro propósito, ahora, es obtener un operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$, para $K \geq 0$ un número entero dado, que será simétrico con respecto al producto escalar Δ-Sobolev (6.2.1). Para ello, deducimos la siguiente representación para el producto escalar (6.2.1) en términos de las diferencias sucesivas hacia atrás del funcional lineal u.

Proposición 6.3.1 *Sean f y g dos polinomios arbitrarios del espacio vectorial $\mathbb{P}$. Entonces, para $0 \leq h \leq K$, se verifica que*

$$\left(\prod_{s=h+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;h)f, g\right)_{\Delta}^{(K)} = \langle \nabla^h u, f\mathcal{F}^{(K)} g\rangle,$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(K)} &= \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} \nabla^{m-i-j}\left(\lambda_{m,k}(x-j)\right) \\ &\quad \prod_{s=j+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;j)\Delta^{k+i}(I-\nabla)^m, \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

con ϕ y $\theta(x;n)$ los polinomios definidos anteriormente en (6.3.3).

Demostración:

A partir de la definición del producto escalar (6.2.1), junto con (5.2.6), la relación (5.3.4), para $n = m - i$, (5.2.5) y (5.4.15), deducimos que

$$\left(\prod_{s=h+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;h)f, g\right)_{\Delta}^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} \langle \lambda_{m,k}(x)u, \Delta^m \left(\prod_{s=h+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;h)f(x)\right) \Delta^k g(x)\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m,k=0}^{K} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \langle \lambda_{m,k}(x)u, \Delta^{m-i}\left(\prod_{s=h+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;h)f(x)\Delta^{k+i}g(x-m)\right)\rangle = \\ &= \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \langle \nabla^{m-i}\left(\lambda_{m,k}(x)u\right), f(x) \prod_{s=h+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;h)\Delta^{k+i}g(x-m)\rangle = \\ &= \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j}. \end{aligned}$$

$$\langle \prod_{s=h+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;h)\nabla^j u, f(x)\nabla^{m-i-j}\left(\lambda_{m,k}(x-j)\right)\Delta^{k+i} g(x-m)\rangle =$$

$$= \sum_{m,k=0}^{K}(-1)^m \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j}\cdot$$

$$\langle \prod_{s=j+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;j)\nabla^h u, f(x)\nabla^{m-i-j}\left(\lambda_{m,k}(x-j)\right)\Delta^{k+i} g(x-m)\rangle =$$

$$= \langle \nabla^h u, f(x)\sum_{m,k=0}^{K}(-1)^m \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j}\nabla^{m-i-j}\left(\lambda_{m,k}(x-j)\right)$$

$$\prod_{s=j+1}^{K} \phi(x-s)\theta(x;j)\Delta^{k+i}(I-\nabla)^m g(x)\rangle. \quad \square$$

Nota. Si tomamos, en el producto escalar (6.2.1), el caso en que $K=1$, el funcional u es el funcional Δ–clásico de Meixner, y la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$ es una matriz diagonal de coeficientes constantes, con $\lambda_{0,0}(x)=1$ y $\lambda_{1,1}(x)=\lambda>0$, entonces el producto escalar (6.2.1) se escribe como:

$$(f,g)_{\Delta}^{(1)} = \langle u, (f, \;\; \Delta f)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ \Delta g \end{pmatrix}\rangle.$$

Para este producto escalar de Sobolev, la expresión del operador en diferencias asociado, $\mathcal{F}^{(1)}$, es

$$\mathcal{F}^{(1)} = \mu(x+\gamma-1)I + \lambda\left[(1-\mu)x - \mu(\gamma-1)\right]\Delta - \lambda x\Delta\nabla,$$

que coincide con el operador obtenido por I. Area, E. Godoy y F. Marcellán, en [15].

Supongamos que el funcional lineal u es definido positivo y que existe una función peso ρ asociada a u tal que

$$\langle u, f(x)\rangle = \sum_{x\in I} f(x)\rho(x), \quad \forall f\in\mathbb{P},$$

con I el soporte del funcional u.
En estas condiciones, es posible expresar el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ en forma compacta, como muestra el resultado siguiente.

Proposición 6.3.2 *En las condiciones anteriores, se verifica que*

$$\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\prod_{s=1}^{K}\phi(x-s)}{\rho(x)}\sum_{m,k=0}^{K}(-1)^m\nabla^m\left(\lambda_{m,k}(x)\rho(x)\Delta^k\right). \tag{6.3.6}$$

Demostración:

Si ρ es la función peso asociada al funcional lineal u, entonces ρ cumple la ecuación

$$\prod_{s=1}^{n} \phi(x-s)\nabla^n \rho(x) = \theta(x;n)\rho(x),$$

o equivalentemente

$$\theta(x;n) = \frac{\prod_{s=1}^{n} \phi(x-s)}{\rho(x)} \nabla^n \rho(x). \tag{6.3.7}$$

Si, ahora, usamos (5.2.5), la relación (6.3.7) para $n = j$, junto con la fórmula análoga a la fórmula de Leibnitz (5.2.4), en la expresión del operador $\mathcal{F}^{(K)}$ aplicado a un polinomio cualquiera g, de (6.3.5), deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(K)}g(x) = & \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} \nabla^{m-i-j} (\lambda_{m,k}(x-j)) \prod_{s=j+1}^{K} \phi(x-s) \\
& \theta(x;j)\Delta^{k+i} (I-\nabla)^m g(x) = \\
= & \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} \nabla^{m-i-j} (\lambda_{m,k}(x-j)) \prod_{s=j+1}^{K} \phi(x-s) \\
& \frac{\prod_{s=1}^{j} \phi(x-s)}{\rho(x)} \nabla^j \rho(x) \Delta^{k+i} g(x-m) = \\
= & \frac{\prod_{s=1}^{K} \phi(x-s)}{\rho(x)} \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} \nabla^{m-i-j} (\lambda_{m,k}(x-j)) \\
& \nabla^j \rho(x) \nabla^i \left(\Delta^k g(x-m+i)\right) = \\
= & \frac{\prod_{s=1}^{K} \phi(x-s)}{\rho(x)} \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \nabla^{m-i} (\lambda_{m,k}(x)\rho(x)) \nabla^i \left(\Delta^k g(x-m+i)\right) = \\
= & \frac{\prod_{s=1}^{K} \phi(x-s)}{\rho(x)} \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \nabla^m \left(\lambda_{m,k}(x)\rho(x)\Delta^k g(x)\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Nota. La expresión (6.3.6) del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$, se puede escribir en forma matricial:

$$\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\prod_{s=1}^{K} \phi(x-s)}{\rho(x)} \left(I, -\nabla, \ldots, (-\nabla)^K \right) \Lambda^{(K)}(x) \begin{pmatrix} \rho(x) I \\ \rho(x)\Delta \\ \vdots \\ \rho(x)\Delta^K \end{pmatrix}. \tag{6.3.8}$$

Teorema 6.3.3 *El operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ es simétrico con respecto al producto escalar Δ-Sobolev (6.2.1), es decir*

$$\left(\mathcal{F}^{(K)} f, g \right)_{\Delta}^{(K)} = \left(f, \mathcal{F}^{(K)} g \right)_{\Delta}^{(K)}.$$

Demostración:

A partir de la proposición 6.3.1, para $h = l$, y de las relaciones (5.2.4), (5.3.4), con $n = m - i$, (5.2.5) y (5.2.6), obtenemos

$$\left(\mathcal{F}^{(K)} f, g \right)_{\Delta}^{(K)} = \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} . \left(\nabla^{m-i-j} \left(\lambda_{m,k}(x-j) \right) \right.$$

$$\left. \prod_{s=j+1}^{K} \phi(x-s) \theta(x;j) \Delta^{k+i} (I - \nabla)^m f(x), g(x) \right)_{\Delta}^{(K)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} . \langle \nabla^j u, \nabla^{m-i-j} \left(\lambda_{m,k}(x-j) \right) \\
&\quad \Delta^{k+i} f(x-m) \mathcal{F}^{(K)} g(x) \rangle \\
&= \sum_{m,k=0}^{K} (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \langle \nabla^{m-i} \left(\lambda_{m,k}(x) u \right), \Delta^{k+i} f(x-m) \mathcal{F}^{(K)} g(x) \rangle = \\
&= \sum_{m,k=0}^{K} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \langle \lambda_{m,k}(x) u, \Delta^{m-i} \left(\mathcal{F}^{(K)} g(x) \Delta^{k+i} f(x-m) \right) \rangle = \\
&= \sum_{m,k=0}^{K} \langle \lambda_{m,k}(x) u, \Delta^{m} \left(\mathcal{F}^{(K)} g(x) \right) \Delta^{k} f(x) \rangle = \\
&= \left(f, \mathcal{F}^{(K)} g \right)_{\Delta}^{(K)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Estudiamos, a continuación, el grado del polinomio que se obtiene al aplicar el operador $\mathcal{F}^{(K)}$ a un polinomio cualquiera de grado n.

Proposición 6.3.4 *Para cada valor de $n \geq 0$, se verifica que*

$$gr\left(\mathcal{F}^{(K)}x^n\right) \leq n + \max_{0\leq m,k\leq K}\{gr\,(\lambda_{m,k})\} + K\max\{p,q\},$$

donde $p = gr\,(\sigma)$ y $q = gr\,(\psi)$.

Demostración:

Usando (6.3.4), junto con la relación $\phi = \sigma + \psi$, deducimos que

$$\begin{aligned} gr\left(\mathcal{F}^{(K)}x^n\right) &\leq \max_{\substack{0\leq j\leq m-i,\\ 0\leq i\leq m,\\ 0\leq m,k\leq K}} \{gr\,(\lambda_{m,k}) - m + i + j + (K-j)gr\,(\phi) + j(s+1) + n - k - i\} \\ &\leq n + \max_{\substack{0\leq j\leq m-i,\\ 0\leq i\leq m,\\ 0\leq m,k\leq K}} \{gr\,(\lambda_{m,k}) - m + K\max\{p,q\} + j(s+2-\max\{p,q\})\} \leq \\ &\leq n + \max_{0\leq m,k\leq K}\{gr\,(\lambda_{m,k}) + K\max\{p,q\} + m(s+1-\max\{p,q\})\} \leq \\ &\leq n + \max_{0\leq m,k\leq K}\{gr\,(\lambda_{m,k})\} + K\max\{p,q\}. \quad \square \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra que, a pesar de la desigualdad que aparece en la proposición anterior, el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ nunca reduce el grado de todos los polinomios.

Proposición 6.3.5 *Existe $n_0 \geq 0$ tal que*

$$gr\left(\mathcal{F}^{(K)}x^{n_0}\right) \geq n_0.$$

Demostración:

Supongamos que $\mathcal{F}^{(K)}$ reduce el grado de los polinomios, es decir, $gr\left(\mathcal{F}^{(K)}x^n\right) < n, \quad \forall n$. Entonces, si escribimos el polinomio $\mathcal{F}^{(K)}Q_n$ en términos de los polinomios $\{Q_i\}_{i=0,1,\ldots,n-1}$, tenemos que

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i}Q_i(x),$$

donde los coeficientes $a_{n,i}$, usando la simetría del operador $\mathcal{F}^{(K)}$, son

$$a_{n,i} = \frac{\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n, Q_i\right)_{\Delta}^{(K)}}{(Q_i,Q_i)_{\Delta}^{(K)}} = \frac{\left(Q_n, \mathcal{F}^{(K)}Q_i\right)_{\Delta}^{(K)}}{\tilde{k}_i} = 0, \quad i = 0,\ldots,n-1.$$

De la ortogonalidad del polinomio Q_n, llegamos a que $a_{n,i} = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$, y, por lo tanto, $\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = 0, \quad \forall n \geq 0$, lo cual es absurdo. $\square$

A partir de los resultados obtenidos en las proposiciones 6.3.4 y 6.3.5, podemos observar que el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$, generalmente, aumenta el grado de los polinomios en una cantidad fija de unidades. De esta forma, existe un número entero no negativo, t, que verifica

$$\mathcal{F}^{(K)}x^n = F(n,K)x^{n+t} + \dots,$$

donde $F(n,K)$ denota el coeficiente líder del polinomio $\mathcal{F}^{(K)}x^n$. Nótese que este coeficiente puede ser cero para ciertos valores de n.

6.4 Propiedades algebraicas de los polinomios ortogonales

Teniendo en cuenta la proposición 6.3.1, en la que se relaciona el producto escalar Δ–Sobolev $(.,.)_\Delta^{(K)}$, con el producto escalar estándar definido a partir del funcional Δ–semiclásico u, podemos establecer una relación entre los polinomios ortogonales $\{Q_n\}_n$, asociados al producto $(.,.)_\Delta^{(K)}$, y los polinomios ortogonales Δ-semiclásicos $\{P_n\}_n$, asociados al funcional lineal u.

Proposición 6.4.1 *Si llamamos $r = gr(\phi)$ y c_r al coeficiente líder del polinomio ϕ, se tiene que*

i) $$\prod_{s=1}^{K}\phi(x-s)P_n(x) = \sum_{i=n-t}^{n+Kr}\alpha_{n,i}Q_i(x), \quad n \geq t, \tag{6.4.1}$$

donde

$$\alpha_{n,n+Kr} = c_r^K, \quad \alpha_{n,n-t} = F(n-t,K)\frac{k_n}{\tilde{k}_{n-t}}.$$

ii) $$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=n-Kr}^{n+t}\beta_{n,i}P_i(x), \quad n \geq Kr, \tag{6.4.2}$$

donde

$$\beta_{n,n+t} = F(n,K), \quad \beta_{n,n-Kr} = c_r^K\frac{\tilde{k}_n}{k_{n-Kr}}.$$

Demostración:

i) Si expresamos el polinomio $\prod_{s=1}^{K}\phi(x-s)P_n(x)$ en términos de los polinomios $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, obtenemos que

$$\prod_{s=1}^{K}\phi(x-s)P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+Kr}\alpha_{n,i}Q_i(x).$$

donde los coeficientes $\alpha_{n,i}$ se calculan a partir de la proposición 6.3.1

$$\alpha_{n,i} = \frac{\left(\prod_{s=1}^{K}\phi(x-s)P_n, Q_i\right)_{\Delta}^{(K)}}{(Q_i,Q_i)_{\Delta}^{(K)}} = \frac{\langle u, P_n\mathcal{F}^{(K)}Q_i\rangle}{\tilde{k}_i}.$$

Si, ahora, usamos la ortogonalidad del polinomio Δ-semiclásico P_n, deducimos que $\alpha_{n,i} = 0$, para $0 \le i \le n-t-1$.

ii) Escribimos el polinomio $\mathcal{F}^{(K)}Q_n$ como combinación lineal de los polinomios $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n+t}\beta_{n,i}P_i(x).$$

Los coeficientes podemos calcularlos, de nuevo, a partir de la proposición 6.3.1 y, de esta forma, nos queda

$$\beta_{n,i} = \frac{\langle u, P_i\mathcal{F}^{(K)}Q_n\rangle}{\langle u, P_iP_i\rangle} = \frac{\left(\prod_{s=1}^{K}\phi(x-s)P_i, Q_n\right)_{\Delta}^{(K)}}{k_i}.$$

Finalmente, de la ortogonalidad del polinomio Q_n con respecto al producto escalar Δ-Sobolev $(.,.)_{\Delta}^{(K)}$, obtenemos que $\beta_{n,i} = 0$, cuando $0 \le i \le n - Kr - 1$. $\square$

En la siguiente proposición, demostramos que, a partir del carácter simétrico del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$, podemos relacionar entre sí los polinomios ortogonales $\{Q_n\}_n$, a pesar de que en esta relación interviene un operador que involucra operadores en diferencias.

Proposición 6.4.2 *Para cada valor de $n \ge t$, se verifica la siguiente relación*

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=n-t}^{n+t}\gamma_{n,i}Q_i(x), \tag{6.4.3}$$

donde

$$\gamma_{n,n+t} = F(n,K), \quad \gamma_{n,n-t} = F(n-t,K)\frac{\tilde{k}_n}{\tilde{k}_{n-t}}.$$

Demostración:

Si escribimos el polinomio $\mathcal{F}^{(K)}Q_n$ en términos de los polinomios $\{Q_i\}_{i\ge 0}$, tenemos que

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n+t}\gamma_{n,i}Q_i(x),$$

de donde, usando el teorema 6.3.3, los coeficientes $\gamma_{n,i}$ son

$$\gamma_{n,i} = \frac{\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n, Q_i\right)_\Delta^{(K)}}{(Q_i, Q_i)_\Delta^{(K)}} = \frac{\left(Q_n, \mathcal{F}^{(K)}Q_i\right)_\Delta^{(K)}}{\tilde{k}_i}.$$

A partir de la ortogonalidad del polinomio Q_n con respecto al producto escalar Δ-Sobolev, deducimos que $\gamma_{n,i} = 0$ para $0 \leq i \leq n - t - 1$, con lo que llegamos al resultado. □

A continuación demostramos que, para cada valor de n, el polinomio ortogonal Q_n verifica una ecuación en diferencias de orden $2K + 2$ cuyos coeficientes son polinomios dependientes de n, pero con grados fijos.

Proposición 6.4.3 *El polinomio ortogonal Q_n verifica la siguiente ecuación en diferencias de orden $2K + 2$:*

$$A(x,n)\Delta\nabla\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) + B(x,n)\Delta\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) + C(x,n)\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = 0,$$

donde $A(x,n)$, $B(x,n)$ y $C(x,n)$, son polinomios reales dependientes de n y con grados fijos.

Demostración:

A partir de la relación de recurrencia a tres términos (1.3.1) que verifica la sucesión de los polinomios ortogonales Δ-semiclásicos $\{P_n\}_{n\geq 0}$, podemos escribir la relación (6.4.2) como sigue

$$\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = M_0(x,n)P_n(x) + N_0(x,n)P_{n-1}(x), \tag{6.4.4}$$

donde $M_0(x,n)$ y $N_0(x,n)$ son polinomios de grados fijos que dependen de n.

Aplicando el operador lineal ∇ en (6.4.4), multiplicando por el polinomio σ y usando el apartado ii) del lema 5.2.5, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(x)\nabla\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) &= \nabla\left(M_0(x,n)\right)\sigma(x)P_n(x) + M_0(x-1,n)\sigma(x)\nabla\left(P_n(x)\right) + \\ &+ \nabla\left(N_0(x,n)\right)\sigma(x)P_{n-1}(x) + N_0(x-1,n)\sigma(x)\nabla\left(P_{n-1}(x)\right). \end{aligned}$$

Si, ahora, en esta expresión, usamos la relación de estructura (5.4.17) para los polinomios ortogonales Δ-semiclásicos $\{P_n\}_n$ y, de nuevo, la relación de recurrencia a tres términos (1.3.1), llegamos a

$$\sigma(x)\nabla\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) = M_1(x,n)P_n(x) + N_1(x,n)P_{n-1}(x), \tag{6.4.5}$$

donde $M_1(x,n)$ y $N_1(x,n)$ son polinomios de grados fijos dependientes de n. Aplicando el operador Δ en (6.4.5), multiplicando por el polinomio ϕ, teniendo en cuenta ii) del lema 5.2.5 y la relación de estructura (5.4.16), nos queda

$$\phi(x)\Delta\left(\sigma(x)\nabla\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right)\right) = M_2(x,n)P_n(x) + N_2(x,n)P_{n-1}(x), \tag{6.4.6}$$

donde $M_2(x, n)$ y $N_2(x, n)$ son polinomios que dependen de n.

Finalmente, imponiendo la compatibilidad entre las ecuaciones (6.4.4), (6.4.5) y (6.4.6), deducimos que el siguiente determinante tiene que anularse, esto es,

$$\begin{vmatrix} \mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) & M_0(x,n) & N_0(x,n) \\ \sigma(x)\nabla\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) & M_1(x,n) & N_1(x,n) \\ \phi(x)\Delta\left(\sigma(x)\nabla\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right)\right) & M_2(x,n) & N_2(x,n) \end{vmatrix} = 0,$$

y, desarrollando el determinante obtenemos la ecuación en diferencias de orden $2K + 2$ que verifican los polinomios ortogonales $\{Q_n\}_n$. □

Nota 1. Es posible demostrar de forma análoga, que los polinomios $\{Q_n\}_n$ verifican las ecuaciones en diferencias:

i) $\widehat{A}(x,n)x\nabla^2\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) + \widehat{B}(x,n)\nabla\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) + \widehat{C}(x,n)\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = 0,$

ii) $\widetilde{A}(x,n)\Delta^2\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) + \widetilde{B}(x,n)\Delta\left(\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x)\right) + \widetilde{C}(x,n)\mathcal{F}^{(K)}Q_n(x) = 0,$

donde $\widehat{A}(x,n)$, $\widehat{B}(x,n)$, $\widehat{C}(x,n)$, $\widetilde{A}(x,n)$, $\widetilde{B}(x,n)$ y $\widetilde{C}(x,n)$, son polinomios reales dependientes de n y con grados fijos.

Nota 2. El resultado anterior nos muestra que existe un operador $\mathcal{S}$, de orden $2K + 2$, tal que $\mathcal{S}Q_n(x) = 0$. Este operador podemos expresarlo como composición del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ y un operador en diferencias de segundo orden, $\mathcal{M}$, esto es, $\mathcal{S} = \mathcal{M}\mathcal{F}^{(K)}$.

6.5 Algunos ejemplos con $K = 1$

Si se considera $K = 1$ en la expresión del producto escalar Δ–Sobolev (6.2.1), podemos escribir (6.2.1) en la forma siguiente

$$(f,g)_\Delta^{(1)} = \langle u, (\, f(x), \Delta f(x)\,) \begin{pmatrix} \lambda_{0,0}(x) & \lambda_{0,1}(x) \\ \lambda_{1,0}(x) & \lambda_{1,1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ \Delta g(x) \end{pmatrix} \rangle, \qquad (6.5.1)$$

para f y g dos polinomios arbitrarios, donde u es un funcional lineal Δ–semiclásico y $x \in I$, el soporte de u.

En este caso, la matriz asociada al producto escalar (6.5.1), es

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0}(x) & \lambda_{0,1}(x) \\ \lambda_{1,0}(x) & \lambda_{1,1}(x) \end{pmatrix},$$

con $\lambda_{m,k}$, para $m, k = 0, 1$, polinomios reales verificando que

$$\lambda_{0,1}(x) = \lambda_{1,0}(x), \quad \lambda_{0,0}(x) > 0, \quad \lambda_{0,0}(x)\lambda_{1,1}(x) - \lambda_{1,0}^2(x) > 0, \quad x \in I, \qquad (6.5.2)$$

a fin de garantizar que (6.5.1) sea un producto escalar.

La expresión del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$, asociado al producto escalar Δ–Sobolev (6.5.1), viene dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(1)} &= \{[\lambda_{0,0}(x)-\nabla(\lambda_{1,0}(x))]\,\phi(x-1)-[\lambda_{1,0}(x)-\nabla(\lambda_{1,0}(x))]\,\theta(x;1)\}\,I+\\ &+ \{\nabla\,(\lambda_{1,0}(x)-\lambda_{1,1}(x))\,[\phi(x-1)-\theta(x;1)]+[\lambda_{1,0}(x)-\lambda_{1,1}(x)]\,\theta(x;1)\}\,\nabla+\\ &+ [\lambda_{1,0}(x)-\lambda_{1,1}(x)]\,\phi(x-1)\Delta\nabla, \qquad (6.5.3)\end{aligned}$$

donde I representa el operador identidad, y Δ y ∇ denotan los operadores lineales en diferencias finitas hacia delante y hacia atrás, respectivamente.

Queremos estudiar productos escalares de la forma (6.5.1) tales que el correspondiente operador en diferencias asociado, $\mathcal{F}^{(1)}$, conserve el grado de los polinomios. Dicha situación es interesante porque si el operador conserva el grado, entonces los correspondientes polinomios ortogonales Δ–Sobolev verifican una ecuación en diferencias de segundo orden. Este resultado nos permite dotar de propiedades de ortogonalidad Δ–Sobolev a ciertas familias de polinomios clásicos discretos. De este modo, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 6.5.1 *Si el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ conserva el grado de los polinomios, entonces el funcional lineal u es Δ-clásico y, además, $\lambda_{1,0}-\lambda_{1,1}$ es una constante.*

Demostración:

Para que el operador $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios, de la expresión (6.5.3), tenemos que han de verificarse las siguientes tres desigualdades

$$\begin{aligned} gr\,\{[\lambda_{0,0}(x)-\nabla(\lambda_{1,0}(x))]\,\phi(x-1)-[\lambda_{1,0}(x)-\nabla(\lambda_{1,0}(x))]\,\theta(x;1)\} &= 0, &(6.5.4)\\ gr\,\{\nabla\,(\lambda_{1,0}(x)-\lambda_{1,1}(x))\,[\phi(x-1)-\theta(x;1)]+[\lambda_{1,0}(x)-\lambda_{1,1}(x)]\,\theta(x;1)\} &\le 1, &(6.5.5)\\ gr\,\{[\lambda_{1,0}(x)-\lambda_{1,1}(x)]\,\phi(x-1)\} &\le 2. &(6.5.6)\end{aligned}$$

A partir de la desigualdad (6.5.6), aparecen tres casos:

(1) En el caso en que $gr\,\{\lambda_{1,0}-\lambda_{1,1}\}=0$, usando (6.5.6), se tiene que $gr\,\{\phi(x-1)\}\le 2$. De esta forma, si sustituimos estas relaciones en (6.5.5), obtenemos que

$$gr\,\{\nabla\,(\lambda_{1,0}(x)-\lambda_{1,1}(x))\,[\phi(x-1)-\theta(x;1)]+[\lambda_{1,0}(x)-\lambda_{1,1}(x)]\,\theta(x;1)\}=gr\,\{\theta(x;1)\},$$

de donde deducimos que $gr\,\{\theta(x;1)\}\le 1$, y, por lo tanto, el funcional u es Δ–clásico.

(2) Cuando $gr\,\{\lambda_{1,0}-\lambda_{1,1}\}=1$, a partir de (6.5.6), tenemos que $gr\,\{\phi(x-1)\}\le 1$, con lo que la desigualdad (6.5.5) queda $gr\,\{\theta(x;1)\}=0$, y, por lo tanto, $\psi=\nabla(\phi(x))+C=$ constante. Sin embargo, ésto no es posible porque contradice la regularidad del funcional u, ya que si u es un funcional regular entonces $gr\,\{\psi\}\ge 1$.

(3) Supongamos que $gr\,\{\lambda_{1,0} - \lambda_{1,1}\} = 2$. Teniendo en cuenta la desigualdad (6.5.6) deducimos que $gr\,\{\phi(x-1)\} = 0$, y, si imponemos que $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado, de (6.5.5) tenemos que $\theta(x;1) = 0$, lo cual vuelve a contradecir el carácter regular de u. □

El recíproco de la proposición 6.5.1 no es cierto. Esto es, si consideramos un funcional Δ-clásico y los polinomios $\lambda_{1,0}$ y $\lambda_{1,1}$ tales que $gr\,(\lambda_{1,0} - \lambda_{1,1}) = 0$, en el producto escalar (6.5.1), entonces el operador en diferencias asociado $\mathcal{F}^{(1)}$ puede aumentar el grado de los polinomios.

En concreto, tomamos como funcional Δ-clásico u el funcional de Charlier y como matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ la matriz de coeficientes constantes siguiente

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es conocido, (ver capítulo 5), que para el funcional de Charlier los polinomios σ y ψ de la ecuación (6.3.1) son, respectivamente, x y $\mu - x$, con $\mu > 0$ un número real y $x \in [0, +\infty)$ y, por lo tanto, $\phi(x) = \mu$ y $\theta(x;1) = \mu - x$. De esta forma, la expresión (6.5.3) del operador $\mathcal{F}^{(1)}$ aplicada al polinomio x^n, para $\lambda_{0,0}(x) = \lambda_{1,0}(x) = 1$ y $\lambda_{1,1}(x) = 2$, queda

$$\mathcal{F}^{(1)}x^n = (2x - \mu)x^{n+1} + (x - \mu)\nabla x^n - \mu\Delta\nabla x^n,$$

que obviamente aumenta el grado del polinomio x^n.

A pesar de este hecho, es posible dar condiciones sobre los elementos de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ de manera que el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios, para cada caso clásico. En lo que sigue, tomaremos los polinomios $\lambda_{1,0}$ y $\lambda_{1,1}$ de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ tales que verifican la condición

$$\lambda_{1,0}(x) - \lambda_{1,1}(x) = C, \tag{6.5.7}$$

con C una constante distinta de cero para garantizar que el producto escalar Δ-Sobolev (6.5.1) no se reduce al producto escalar estándar. De esta forma, el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ queda

$$\mathcal{F}^{(1)} = C_1 I + C\theta(x;1)\nabla + C\phi(x-1)\Delta\nabla, \tag{6.5.8}$$

donde $C_1 = [\lambda_{0,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))]\,\phi(x-1) - [\lambda_{1,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))]\,\theta(x;1)$.

Proposición 6.5.2 *Si $\mathcal{F}^{(1)}$ conserva el grado, los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar (6.5.1), que notaremos por $\{Q_n\}_n$, verifican la ecuación en diferencias de segundo orden*

$$\phi(x-1)\Delta\nabla Q_n(x) + \theta(x;1)\nabla Q_n(x) - n(b_1 + a_2(n-1))Q_n(x) = 0, \tag{6.5.9}$$

donde $\theta(x;1) = b_1 x + b_0$ y $\phi(x-1) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Demostración:

Si aplicamos el operador $\mathcal{F}^{(1)}$ al polinomio Q_n, usando (6.5.8), tenemos que

$$\mathcal{F}^{(1)}Q_n(x) = C_1Q_n(x) + C\theta(x;1)\nabla Q_n(x) + C\phi(x-1)\Delta\nabla Q_n(x). \tag{6.5.10}$$

Por otra parte, de la relación (6.4.3) con $K = 1$ y $t = 0$, obtenemos:

$$\mathcal{F}^{(1)}Q_n(x) = [C_1 + nC(b_1 + a_2(n-1))]\,Q_n(x). \tag{6.5.11}$$

Si igualamos las ecuaciones (6.5.10) y (6.5.11) y eliminamos la constante C, nos queda:

$$\phi(x-1)\Delta\nabla Q_n(x) + \theta(x;1)\nabla Q_n(x) - n(b_1 + a_2(n-1))Q_n(x) = 0. \quad \square$$

Corolario 6.5.3 *Se tiene:*
i) Si en el producto escalar (6.5.1) se considera u el funcional de Charlier, entonces los polinomios ortogonales con respecto a (6.5.1) son los polinomios clásicos de Charlier.

ii) Para u el funcional de Kravchuk en (6.5.1), con $0 < p < 1$, los polinomios ortogonales asociados son los polinomios de Kravchuk $\{K_n^p(x, N+1)\}_n$.

iii) Los polinomios ortogonales con respecto a (6.5.1) para u el funcional clásico de Meixner, con parámetros $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$, son los polinomios de Meixner generalizados $\{M_n^{(\gamma-1,\mu)}\}_n$.

iv) Sea u el funcional clásico de Hahn con parámetros α, $\beta \geq -1$. Los polinomios ortogonales con respecto a (6.5.1) son los polinomios de Hahn $\{h_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x; N+1)\}_n$.

Demostración:

i) Cuando se toma como funcional Δ-clásico u el funcional de Charlier en el producto escalar (6.5.1), hemos visto, que los polinomios de la ecuación (6.3.3) son $\phi(x-1) = \mu$ y $\theta(x;1) = \mu - x$, para $\mu > 0$ un número real y $x \in [0, +\infty)$. Si sustituimos estos polinomios en la ecuación diferencial (6.5.9), tenemos

$$\mu\Delta\nabla Q_n(x) + (\mu - x)\nabla Q_n(x) + nQ_n(x) = 0.$$

Es decir, los polinomios ortogonales Q_n verifican la misma ecuación en diferencias de segundo orden que verifican los polinomios clásicos de Charlier y, por lo tanto, $Q_n(x) = C_n^{\mu}(x)$.

ii) Sea u el funcional de Kravchuk. En este caso, los polinomios de la ecuación en diferencias son

$$\phi(x-1) = \frac{(N+1-x)p}{1-p}, \quad \theta(x;1) = \frac{(N+1)p - x}{1-p},$$

para $p \in \mathbb{R}$ tal que $0 < p < 1$, con $x \in [0, N]$ donde $N \geq 1$ es un número entero. Entonces, la ecuación (6.5.9) queda

$$\frac{(N+1-x)p}{1-p}\Delta\nabla Q_n(x) + \left(\frac{p(N+1)-x}{1-p}\right)\nabla Q_n(x) + \frac{n}{1-p}Q_n(x) = 0,$$

y, por ser, esta ecuación la ecuación en diferencias de segundo orden que verifican los polinomios de Kravchuk $K_n^p(x, N+1)$, (ver (5.5.14)), concluimos que $Q_n(x) = K_n^p(x, N+1)$.

iii) Si se considera u el funcional de Meixner, entonces sabemos que $\phi(x-1) = \mu(x+\gamma-1)$ y $\theta(x;1) = (\mu-1)x + \mu(\gamma-1)$, con γ, $\mu \in \mathbb{R}$ tales que $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$, con lo que de (6.5.9) obtenemos

$$\mu(x+\gamma-1)\Delta\nabla Q_n(x) + [(\mu-1)x + \mu(\gamma-1)]\,\nabla Q_n(x) + (1-\mu)nQ_n(x) = 0.$$

Esta ecuación es la ecuación en diferencias de segundo orden para los polinomios de Meixner $M_n^{(\gamma-1,\mu)}$, de donde llegamos a que $Q_n(x) = M_n^{(\gamma-1,\mu)}(x)$.

iv) Para u el funcional Δ-clásico de Hahn, tenemos que

$$\phi(x-1) = (x+\beta)(N-x), \qquad \theta(x;1) = \beta N - (\alpha+\beta)x,$$

para α, $\beta \geq -1$ y $x \in [0, N-1]$, con $N \geq 1$ un número entero. De esta forma, la ecuación (6.5.9) se escribe como

$$(x+\beta)(N-x)\Delta\nabla Q_n(x) + (\beta N - (\alpha+\beta)x)\,\nabla Q_n(x) + n(\alpha+\beta+n-1)Q_n(x) = 0,$$

y, como esta ecuación es la ecuación en diferencias de segundo orden para los polinomios de Hahn $h_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x; N+1)$, (ver (5.5.14)), deducimos que $Q_n(x) = h_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x; N+1)$. □

A continuación estudiaremos cada caso clásico, y deduciremos expresiones para la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$, y la expresión del operador $\mathcal{F}^{(1)}$.

6.5.1 El caso Charlier

Tomando como funcional Δ-clásico u el funcional de Charlier en el producto escalar (6.5.1), el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ viene dado por la expresión:

$$\mathcal{F}^{(1)} = \{[\lambda_{0,0}(x) - \lambda_{1,0}(x)]\,\mu + [\lambda_{1,0}(x) - \nabla\,(\lambda_{1,0}(x))]\,x\}\,I + C(\mu-x)\nabla + C\mu\Delta\nabla. \quad (6.5.12)$$

Si queremos un operador $\mathcal{F}^{(1)}$ que conserve el grado de los polinomios entonces, de (6.5.12), es necesario que se cumpla que

$$gr\,(\lambda_{0,0}(x) - \lambda_{1,0}(x)) = gr\,(\lambda_{1,0}(x) - \nabla\,(\lambda_{1,0}(x))) + 1. \quad (6.5.13)$$

Consideremos el caso más sencillo, esto es, tomemos el polinomio $\lambda_{1,0}$ como una constante. Dependiendo de que este número se anule o no aparecen los dos casos siguientes:

(1) En el caso en que $\lambda_{1,0} = 0$, sustituyendo en (6.5.12), deducimos que $\lambda_{0,0}(x) = \lambda_{0,0}$ es también una constante, con lo que la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$ es una matriz de coeficientes constantes diagonal de la forma:

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & 0 \\ 0 & \lambda_{1,1} \end{pmatrix},$$

con $\lambda_{0,0}$ y $\lambda_{1,1}$ dos números reales positivos para garantizar el carácter definido positivo de $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$.

(2) Cuando $\lambda_{1,0} \neq 0$, usando (6.5.13), tenemos que $\lambda_{0,0}$ es un polinomio de grado uno, es decir,

$$\lambda_{0,0}(x) = a_1 x + a_0, \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo que el operador $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado de los polinomios, de (6.5.12), deducimos que

$$\lambda_{1,0} = -a_1\mu,$$

con lo que la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ es

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} a_1 x + a_0 & -a_1\mu \\ -a_1\mu & \lambda_{1,1} \end{pmatrix},$$

donde a_1, $a_0 > 0$, y $\lambda_{1,1} > \dfrac{(a_1\mu)^2}{a_0}$ de manera que $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ es una matriz definida positiva en el soporte de u.

A partir del apartado i) del corolario 6.5.3 tenemos que, en cualquier caso, la sucesión de los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar Δ–Sobolev (6.5.1) vuelve a ser la sucesión clásica de Charlier, $\{C_n^\mu\}_{n\geq 0}$.

6.5.2 El caso Kravchuk

En este caso, los polinomios de la ecuación en diferencias distribucional son $\sigma(x) = x$ y $\psi(x) = \dfrac{Np - x}{1-p}$, para $p \in \mathbb{R}$ tal que $0 < p < 1$, con $x \in [0, N]$ donde $N \geq 1$ es un número entero, con lo que

$$\phi(x-1) = \frac{(N+1-x)p}{1-p}, \quad \theta(x;1) = \frac{(N+1)p - x}{1-p}.$$

Consideramos el producto escalar Δ–Sobolev (6.5.1) con u el funcional de Kravchuk, y $\lambda_{0,0}$, $\lambda_{1,0}$ y $\lambda_{1,1}$ polinomios reales verificando (6.5.7) y (6.5.2).

De este modo, el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ asociado al producto (6.5.1) lo expresamos como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(1)} &= \left\{[\lambda_{0,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))]\frac{(N+1-x)p}{1-p} - [\lambda_{1,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))]\left(\frac{(N+1)p-x}{1-p}\right)\right\} I \\ &+ C\left(\frac{(N+1)p-x}{1-p}\right)\nabla + C\frac{(N+1-x)p}{1-p}\Delta\nabla. \end{aligned} \tag{6.5.14}$$

Para obtener un operador $\mathcal{F}^{(1)}$ que conserve el grado de los polinomios, de (6.5.14), deducimos que

$$gr\left(\lambda_{0,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))\right) = gr\left(\lambda_{1,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))\right) = gr\left(\lambda_{1,0}\right),$$

luego

$$gr\left(\lambda_{1,0}\right) \leq gr\left(\lambda_{0,0}\right), \tag{6.5.15}$$

y, además, el coeficiente líder del polinomio $\lambda_{1,0}$ tiene que ser el coeficiente líder del polinomio $\lambda_{0,0}$ multiplicado por p, con lo que de (6.5.15) y de (6.5.7), concluimos que

$$gr\left(\lambda_{0,0}\right) = gr\left(\lambda_{1,0}\right) = gr\left(\lambda_{1,1}\right). \tag{6.5.16}$$

(1) Supongamos que $\lambda_{0,0}(x) = \lambda_{0,0}$ es una constante positiva. Entonces, para que el operador conserve el grado, usando (6.5.16), tenemos que los polinomios $\lambda_{1,0}$ y $\lambda_{1,1}$ son también números reales de la forma

$$\lambda_{1,0}(x) = \lambda_{0,0}p, \quad \lambda_{1,1}(x) = \lambda_{1,1},$$

y, por lo tanto, la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$, es la matriz de coeficientes constantes:

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & \lambda_{0,0}p \\ \lambda_{0,0}p & \lambda_{1,1} \end{pmatrix},$$

con $0 < p < 1$ un número entero, $\lambda_{0,0} > 0$ y $\lambda_{1,1} > \lambda_{0,0}p^2$, de manera que $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ es una matriz definida positiva.

(2) Otra eiección puede ser considerar $\lambda_{0,0}$ el polinomio de grado uno:

$$\lambda_{0,0}(x) = x + N(1-p),$$

con lo que a partir de (6.5.16), deducimos que los polinomios $\lambda_{1,0}$ y $\lambda_{1,1}$ son

$$\lambda_{1,0}(x) = px + b_0, \quad \lambda_{1,1}(x) = px + c_0, \quad b_0, c_0 \in \mathbb{R}.$$

Para determinar el coeficiente b_0, sustituimos estos polinomios en (6.5.14), y obtenemos que $b_0 = 0$. Así

$$\Lambda^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} x+N(1-p) & px \\ px & px+c_0 \end{pmatrix}.$$

Si ahora imponemos el carácter definido positivo de la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$, se ha de cumplir que

$$(x+N(1-p))(px+c_0) > p^2x^2, \quad x \in [0,N],$$

es decir, llamando $p_1(x) = (x+N(1-p))(px+c_0)$ y $p_2(x) = p^2x^2$, buscamos c_0 tal que estas parábolas verifiquen la desigualdad

$$p_1(x) > p_2(x), \quad x \in [0,N],$$

luego una condición suficiente es que el mínimo en $[0,N]$ de la parábola p_1 tiene que ser mayor que el máximo de p_2 en $[0,N]$ y, de este modo $c_0N(1-p) > p^2N^2$. Entonces para que la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$ sea definida positiva es suficiente que

$$c_0 > \frac{Np^2}{1-p}.$$

Usando ii) del corolario 6.5.3 se verifica que, en cualquier caso, los polinomios Q_n ortogonales con respecto al producto escalar (6.5.1) son los polinomios de Kravchuk $K_n^p(x,N+1)$, (ver 5.5.10)):

$$\begin{aligned} K_0^p(x,N+1) &= 1, \quad K_1^p(x,N+1)(x) = x - p(N+1), \\ K_n^p(x,N+1) &= p^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-N-1+k)_{n-k}(x-k+1)_k \frac{1}{p^k}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

6.5.3 El caso Meixner

Consideramos, a continuación, en (6.5.1) el funcional Δ–clásico de Meixner u definido para $x \in [0,+\infty)$.

Los polinomios de la ecuación (6.3.3) son

$$\phi(x-1) = \mu(x+\gamma-1), \quad \theta(x;1) = (\mu-1)x + \mu(\gamma-1),$$

con γ, $\mu \in \mathbb{R}$ tales que $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$.

Si sustituimos los polinomios anteriores en la expresión (6.5.3), obtenemos que el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ asociado al producto (6.5.1) es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)} &= \{[\lambda_{0,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))]\,\mu(x-1+\gamma) - \\ &- [\lambda_{1,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))]\,((\mu-1)x + \mu(\gamma-1))\}\, I + \\ &+ C\,((\mu-1)x+\mu(\gamma-1))\,\nabla + C\mu(x-1+\gamma)\Delta\nabla. \end{aligned} \tag{6.5.17}$$

Buscamos un operador $\mathcal{F}^{(1)}$ que conserve el grado de los polinomios. Para ello, de (6.5.17), necesitamos que se verifique la siguiente igualdad entre los polinomios de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$

$$gr\,(\lambda_{0,0}(x) - \nabla\,(\lambda_{1,0}(x))) = gr\,(\lambda_{1,0}(x) - \nabla\,(\lambda_{1,0}(x))) = gr\,(\lambda_{1,0})\,,$$

es decir,

$$gr\,(\lambda_{1,0}) \leq gr\,(\lambda_{0,0})\,, \tag{6.5.18}$$

y el coeficiente líder del polinomio $\lambda_{1,0}$ ha de ser igual al coeficiente líder de $\lambda_{0,0}$ multiplicado por $\dfrac{\mu}{\mu-1}$, de donde usando (6.5.18) y (6.5.7), tenemos que

$$gr\,(\lambda_{0,0}) = gr\,(\lambda_{1,0}) = gr\,(\lambda_{1,1})\,. \tag{6.5.19}$$

(1) Sea $\lambda_{0,0}(x)$ una constante positiva. Entonces si sustituimos en (6.5.17) y tenemos en cuenta (6.5.19), la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ es de coeficientes constantes de la forma

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & \dfrac{\lambda_{0,0}\mu}{\mu-1} \\ \dfrac{\lambda_{0,0}\mu}{\mu-1} & \lambda_{1,1} \end{pmatrix},$$

donde $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$, $\lambda_{0,0} > 0$ y $\lambda_{1,1} > \lambda_{0,0}\left(\dfrac{\mu}{\mu-1}\right)^2$, para garantizar el carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$.

(2) Supongamos que $\lambda_{0,0}$ es un polinomio de grado r, con $r > 0$, esto es,

$$\lambda_{0,0}(x) = a_r x^r + \ldots,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, para $0 \leq i \leq r$. De esta forma, usando (6.5.19), deducimos que $gr\,(\lambda_{1,0}) = gr\,(\lambda_{1,1}) = r$ y, a partir de (6.5.17) y de (6.5.7), concluimos que

$$\lambda_{1,0}(x) = a_r\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)x^r + \ldots, \qquad \lambda_{1,1}(x) = \lambda_{1,0}(x) + c_0,$$

con c_0 un número real. Si imponemos el carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$, tenemos que $a_r > 0$ y

$$(a_r x^r + \ldots)\left(a_r\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)x^r + \ldots + c_0\right) - \left(a_r\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)x^r + \ldots\right)^2 > 0, \quad x \in [0,+\infty),$$

por lo tanto, el coeficiente líder de este polinomio ha de ser positivo en $[0,+\infty)$, con lo que obtenemos que

$$a_r^2\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right) > a_r^2\left(\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)\right)^2,$$

es decir,

$$\frac{\mu}{\mu-1} > \frac{\mu^2}{(\mu-1)^2},$$

pero esto no es posible ya que $0 < \mu < 1$.

De esta forma, la única posibilidad para obtener un operador en diferencias que conserve el grado de los polinomios, es considerar el caso (1). De este modo, la expresión del producto escalar (6.5.1) es

$$(f,g)_{\Delta}^{(1)} = \langle u, (\,f(x), \Delta f(x)\,) \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & \dfrac{\lambda_{0,0}\mu}{\mu-1} \\ \dfrac{\lambda_{0,0}\mu}{\mu-1} & \lambda_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ \Delta g(x) \end{pmatrix} \rangle, \quad \forall f,g \in \mathbb{P}, \tag{6.5.20}$$

con u el funcional de Meixner, γ, $\mu \in \mathbb{R}$ tales que $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$ y, $\lambda_{0,0}$ y $\lambda_{1,1}$ números reales tales que $\lambda_{0,0} > 0$ y $\lambda_{1,1} > \lambda_{0,0}\left(\dfrac{\mu}{\mu-1}\right)^2$.

De iii) del corolario 6.5.3, deducimos que la sucesión de los polinomios ortogonales asociados al producto escalar Δ-Sobolev (6.5.20) es la sucesión $\{M_n^{(\gamma-1,\mu)}\}_{n\geq 0}$ de los *polinomios de Meixner generalizados*, (ver el capítulo 7 de esta Memoria), definidos mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} M_0^{(\gamma-1,\mu)}(x) &= 1, \quad M_1^{(\gamma-1,\mu)}(x) = x + \frac{\mu(\gamma-1)}{\mu-1}, \\ M_n^{(\gamma-1,\mu)}(x) &= \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\gamma-1+k)_{n-k}(x-k+1)_k \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^k, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

6.5.4 El caso Hahn

Sea u el funcional Δ-clásico de Hahn. En este caso,

$$\sigma(x) = x(N+\alpha-x), \quad \psi(x) = (\beta+1)(N-1) - (\alpha+\beta+2)x,$$

para α, $\beta \geq -1$ y $x \in [0, N-1]$, con $N \geq 1$ un número entero. De esta forma

$$\phi(x-1) = (x+\beta)(N-x), \quad \theta(x;1) = \beta N - (\alpha+\beta)x.$$

Estudiamos el producto escalar Δ-Sobolev (6.5.1).

El operador en diferencias $\mathcal{F}^{(1)}$ asociado al producto (6.5.1) es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)} &= \{[\lambda_{0,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))](x+\beta)(N-x) - \\ &- [\lambda_{1,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))](\beta N - (\alpha+\beta)x)\} I + \\ &+ C(\beta N - (\alpha+\beta)x)\nabla + C(x+\beta)(N-x)\Delta\nabla. \end{aligned} \tag{6.5.21}$$

Si queremos un operador $\mathcal{F}^{(1)}$ que conserve el grado de los polinomios, de (6.5.21), deducimos que hay que distinguir dos casos: el caso en que $\alpha+\beta$ sea cero y el caso contrario.

(A) En el caso en que $\underline{\alpha+\beta=0}$, entonces $\theta(x;1)$ es el polinomio de grado cero $\theta(x;1) = \beta N$, con lo que sustituyendo en (6.5.21), obtenemos que la expresión del operador $\mathcal{F}^{(1)}$ se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(1)} &= \{[\lambda_{0,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))](x+\beta)(N-x) - \lambda_{1,0}(x)\beta N\}\, I + \\ &+ \; C\beta N\nabla + C(x+\beta)(N-x)\Delta\nabla, \end{aligned} \tag{6.5.22}$$

y, por lo tanto, para que $\mathcal{F}^{(1)}$ conserve el grado es necesario que

$$gr\left([\lambda_{0,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))](x+\beta)(N-x) - \lambda_{1,0}(x)\beta N\right) = 0. \tag{6.5.23}$$

Dependiendo de que el valor del parámetro β sea cero o distinto de cero, vuelven a aparecer dos casos.

(A.1) Si $\underline{\beta \neq 0}$, usando (6.5.23), tenemos que

$$2 + gr\left(\lambda_{0,0}(x) - \nabla(\lambda_{1,0}(x))\right) = gr\left(\lambda_{1,0}\right),$$

esto es, el grado del polinomio $\lambda_{1,0}$ como mínimo es dos. Supongamos que $gr(\lambda_{1,0}) = 2$, de donde usando (6.5.23), tenemos que $\lambda_{0,0}$ es un polinomio de grado uno y, además, las expresiones de estos polinomios son

$$\lambda_{0,0}(x) = a_1(-2x - \beta + 1 + N(\beta+1)), \quad \lambda_{1,0}(x) = a_1(x+\beta)(N-x) + b_0,$$

con a_1 y b_0 números reales. Teniendo en cuenta (6.5.7), el polinomio $\lambda_{1,1}$ es

$$\lambda_{1,1}(x) = a_1(x+\beta)(N-x) + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

y, por lo tanto, la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ se escribe como

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} a_1(-2x-\beta+1+N(\beta+1)) & a_1(x+\beta)(N-x)+b_0 \\ a_1(x+\beta)(N-x)+b_0 & a_1(x+\beta)(N-x)+c_0 \end{pmatrix}.$$

Imponiendo que la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ sea definida positiva, es necesario, en primer lugar, que $\lambda_{0,0}(x) > 0$, en $[0, N-1]$, con lo que obtenemos que

i) Para a_1 un número negativo, entonces $\beta < \dfrac{N+1}{1-N}$, y teniendo en cuenta que $N+1 > N-1$, tenemos $\beta < -1$, lo cual es una contradicción.

ii) Si $a_1 > 0$, deducimos que $\beta > \dfrac{N-3}{N-1}$.

(A.2) Sea $\underline{\beta = 0}$, con lo que el polinomio $\theta(x;1)$ es idénticamente cero. Sustituyendo este polinomio en la igualdad (6.5.23), deducimos que necesariamente $\lambda_{0,0}(x) = \nabla(\lambda_{1,0}(x))$.

Estudiamos el caso más sencillo, es decir, tomamos $\lambda_{0,0}(x) = \lambda_{0,0}$, donde $\lambda_{0,0}$ es una constante positiva para asegurar que $\lambda_{0,0}(x) > 0$, y consideramos $\lambda_{1,0}$ el polinomio de grado uno

$$\lambda_{1,0}(x) = \lambda_{0,0}x + b_0, \quad b_0 \in \mathbb{R}.$$

Usando (6.5.7), tenemos que

$$\lambda_{1,1}(x) = \lambda_{0,0}x + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

luego

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & \lambda_{0,0}x + b_0 \\ \lambda_{0,0}x + b_0 & \lambda_{0,0}x + c_0 \end{pmatrix} = \lambda_{0,0} \begin{pmatrix} 1 & x + \tilde{b}_0 \\ x + \tilde{b}_0 & x + \tilde{c}_0 \end{pmatrix},$$

donde $\tilde{b}_0 = \dfrac{b_0}{\lambda_{0,0}}$ y $\tilde{c}_0 = \dfrac{c_0}{\lambda_{0,0}}$.

Si ahora imponemos el carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ es necesario que $\lambda_{0,0} > 0$ y que

$$x + \tilde{c}_0 > \left(x + \tilde{b}_0\right)^2, \quad x \in [0, N-1].$$

Esto es, hay que buscar $\tilde{c}_0$, de manera que la recta $r_1(x) = x + \tilde{c}_0$ se sitúe por encima de la parábola, $p_1(x) = \left(x + \tilde{b}_0\right)^2$, para $\tilde{b}_0$ un número real fijado, en $[0, N-1]$. De esta manera siempre podemos encontrar $\tilde{c}_0$ tal que

$$\tilde{c}_0 > \max\left\{\tilde{b}_0^2, \left(N - 1 + \tilde{b}_0\right)^2 - (N-1)\right\}.$$

Entonces para que la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ sea definida positiva $\lambda_{0,0}$ tiene que ser una constante positiva y, además, c_0 tiene que verificar que

$$c_0 > \lambda_{0,0} \max\left\{\tilde{b}_0^2, \left(N - 1 + \tilde{b}_0\right)^2 - (N-1)\right\}.$$

En este caso, el producto escalar Δ-Sobolev (6.5.1), queda

$$(f,g)_\Delta^{(1)} = \lambda_{0,0}\langle u, (f(x), \Delta f(x)) \begin{pmatrix} 1 & x + \tilde{b}_0 \\ x + \tilde{b}_0 & x + \tilde{c}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ \Delta g(x) \end{pmatrix}\rangle, \quad \forall f, g \in \mathbb{P}. \tag{6.5.24}$$

Finalmente, teniendo en cuenta iv) del corolario 6.5.3, concluimos que los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar (6.5.20), son los *polinomios de Hahn* $h_n^{(-1,-1)}(x; N+1)$, (ver (5.5.12)), definidos mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} h_0^{(-1,-1)}(x; N+1) &= 1, \quad h_1^{(-1,-1)}(x; N+1) = x - N, \\ h_n^{(-1,-1)}(x; N+1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-k+1)_k \frac{(-N+k)_{n-k}(k)_{n-k}}{(n+k-1)_{n-k}}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

(B) Cuando $\alpha + \beta \neq 0$, tenemos que $gr\,(\theta(x;1)) = 1$. Para obtener un operador que conserve el grado, de (6.5.21), deducimos que se tiene que verificar que

$$gr\,(\lambda_{1,0}) = gr\,(\lambda_{0,0}) + 1. \tag{6.5.25}$$

El caso más sencillo que podemos considerar es cuando $\lambda_{0,0}(x)$ es una constante positiva, esto es, $\lambda_{0,0}(x) = \lambda_{0,0} > 0$. Entonces, de (6.5.25), el polinomio $\lambda_{1,0}$ tiene que ser de la forma

$$\lambda_{1,0}(x) = b_1 x + b_0,$$

donde b_1 y b_0 son dos números reales.

A continuación, queremos determinar este polinomio $\lambda_{1,0}$ calculando los valores de b_1 y b_0 en términos de la constante $\lambda_{0,0}$. Para ello, a partir de (6.5.21), deducimos el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} b_1(\alpha+\beta+1) &= \lambda_{0,0}, && (6.5.26) \\ (N-\beta)\lambda_{0,0} + (\alpha+\beta)b_0 &= (N+\alpha+\beta N)b_1, && (6.5.27) \\ (\lambda_{0,0} - b_0)\beta N &= \text{constante}. && (6.5.28) \end{aligned}$$

Supongamos que $\alpha + \beta + 1 = 0$ entonces, usando (6.5.26), se tiene que $\lambda_{0,0} = 0$, pero ésto contradice el carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$. Así, $\alpha + \beta + 1$ tiene que ser distinto de cero.

Si despejamos los coeficientes b_1 y b_0 de (6.5.26) y de (6.5.27), respectivamente, obtenemos que

$$b_1 = \frac{\lambda_{0,0}}{\alpha+\beta+1}, \quad b_0 = \frac{\lambda_{0,0}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}[(\alpha+\beta)(\beta+1) - N\alpha],$$

entonces la expresión del polinomio $\lambda_{1,0}$ es

$$\lambda_{1,0}(x) = \frac{\lambda_{0,0}}{\alpha+\beta+1}\left[x + \frac{(\alpha+\beta)(\beta+1) - N\alpha}{\alpha+\beta}\right],$$

y, a partir de la relación (6.5.7),

$$\lambda_{1,1}(x) = \frac{\lambda_{0,0}}{\alpha+\beta+1}x + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

De este modo, en este caso, la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$ se expresa como

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x) = \frac{\lambda_{0,0}}{\alpha+\beta+1}\begin{pmatrix} \alpha+\beta+1 & \left[x+\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+1)-N\alpha}{\alpha+\beta}\right] \\ \left[x+\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+1)-N\alpha}{\alpha+\beta}\right] & x+\tilde{c_0} \end{pmatrix},$$

donde $\tilde{c_0} = \dfrac{c_0(\alpha+\beta+1)}{\lambda_{0,0}}$. Ahora, queremos determinar la constante $\tilde{c_0}$. Para ello, imponemos el carácter definido positivo de la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(1)}(x)$, con lo que $\lambda_{0,0}$ tiene que ser un número positivo y

$$x+\tilde{c_0} > \frac{1}{(\alpha+\beta+1)^2}\left(x+\frac{(\alpha+\beta)(\beta+1)-N\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2, \quad x\in[0,N-1].$$

Esto es, necesitamos que se verifique que

$$\begin{aligned}\tilde{c_0} \quad > \quad & \frac{1}{(\alpha+\beta+1)^2}\max\left\{\frac{[(\alpha+\beta)(\beta+1)-N\alpha]^2}{(\alpha+\beta)^2},\right.\\ & \left.\left(N-1+\frac{(\alpha+\beta)(\beta+1)-N\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2-(N-1)\right\}.\end{aligned}$$

Usando el apartado iv) del corolario 6.5.3, tenemos que los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar Δ-Sobolev

$$(f,g)_\Delta^{(1)} = \lambda_{0,0}\langle u, (\,f(x), \Delta f(x)\,)\begin{pmatrix}\lambda_{0,0} & \lambda_{1,0}(x)\\ \lambda_{1,0}(x) & \dfrac{\lambda_{0,0}}{\alpha+\beta+1}x+c_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g(x)\\ \Delta g(x)\end{pmatrix}\rangle, \qquad (6.5.29)$$

para u el funcional de Hahn, y $\lambda_{1,0}(x) = \dfrac{\lambda_{0,0}}{\alpha+\beta+1}\left[x+\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+1)-N\alpha}{\alpha+\beta}\right]$, son los *polinomios de Hahn generalizados* $h_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x;N+1)$, definidos como

$$\begin{aligned} h_0^{(\alpha-1,\beta-1)}(x;N+1) &= 1, \quad h_1^{(\alpha-1,\beta-1)}(x;N+1) = x-\frac{N\beta}{\alpha+\beta},\\ h_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x;N+1) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-k+1)_k\frac{(-N+k)_{n-k}(\beta+k)_{n-k}}{(\alpha+\beta+n+k-1)_{n-k}}, \quad n\geq 2.\end{aligned}$$

Capítulo 7

Polinomios de Meixner Generalizados

7.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos propiedades de ortogonalidad para los polinomios de Meixner, $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$, con los parámetros reales $0 < \mu < 1$ y $\gamma \in \mathbb{R}$.

Recordemos que los polinomios clásicos de Meixner, que denotaremos por $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$, para $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$, son la familia de polinomios ortogonales con respecto al producto escalar:

$$(f,g) = \sum_{x=0}^{+\infty} f(x)g(x)\frac{\mu^x\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+1)}, \quad x \in [0,+\infty),$$

con $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$ para asegurar la convergencia de la serie.

Es conocido, (ver la expresión (5.5.7)), que dados γ y μ dos números reales tales que $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$, la expresión explícita del n–ésimo polinomio mónico de Meixner en términos de la función hipergeométrica generalizada ${}_2F_1$, se escribe como

$$M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = (\gamma)_n \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,-x\\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\, 1-\frac{1}{\mu}\right), \quad n \geq 0, \tag{7.1.1}$$

donde $x \in [0,+\infty)$.

Sin embargo, a partir de la expresión explícita (7.1.1), simplificando adecuadamente, es posible considerar cualquier valor real del parámetro γ, ya que el polinomio $M_n^{(\gamma,\mu)}$ es de grado n, con $n \geq 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. De esta forma, tiene sentido definir familias de polinomios mónicos de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$, para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \mu < 1$.

De esta expresión explícita, podemos deducir que los polinomios mónicos de Meixner verifican, para cada valor real de γ, la relación de recurrencia a tres términos

$$M_{-1}^{(\gamma,\mu)}(x) \;=\; 0, \quad M_0^{(\gamma,\mu)}(x) = 1,$$

$$xM_n^{(\gamma,\mu)}(x) = M_{n+1}^{(\gamma,\mu)}(x) + \beta_n^{(\gamma,\mu)}M_n^{(\gamma,\mu)}(x) + \gamma_n^{(\gamma,\mu)}M_{n-1}^{(\gamma,\mu)}(x), \quad n \geq 0, \tag{7.1.2}$$

donde

$$\beta_n^{(\gamma,\mu)} = \frac{n(1+\mu)+\mu\gamma}{1-\mu}, \quad \gamma_n^{(\gamma,\mu)} = \frac{n\mu(n-1+\gamma)}{(\mu-1)^2}. \tag{7.1.3}$$

Cuando $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, de (7.1.3) tenemos que $\gamma_n^{(\gamma,\mu)} \neq 0$, para $n \geq 1$, y del teorema de Favard, (ver el teorema 1.3.2), podemos asegurar que la sucesión $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto a un funcional regular.

Si $\gamma > 0$, este funcional es definido positivo, y los polinomios de Meixner son ortogonales con respecto a la función peso clásica

$$\rho^{(\gamma,\mu)}(x) = \frac{\mu^x\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+1)}.$$

Para $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$, de la expresión (7.1.3), deducimos que para $n = 1-\gamma$ el coeficiente $\gamma_n^{(\gamma,\mu)}$ se anula. De este modo, a partir del teorema de Favard no podemos deducir propiedades de ortogonalidad estándar para los polinomios de Meixner con parámetros $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$.

El propósito de este capítulo es dotar de propiedades de ortogonalidad a la sucesión de polinomios mónicos de Meixner, $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$, con $0 < \mu < 1$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. De hecho, vamos a demostrar que estos polinomios son ortogonales con respecto a un producto escalar discreto no diagonal que involucra operadores en diferencias, es decir, un producto escalar Δ–Sobolev, como los estudiados en el capítulo anterior.

Resultados similares han sido materia de estudio en diversos trabajos, para diferentes familias de polinomios clásicos en el caso continuo (ver p. e. [96], [97], [145], [146], [7], [12] y los capítulos anteriores de esta Memoria.)

A continuación, describiremos la estructura del capítulo. En la sección 2 definiremos los polinomios mónicos de Meixner, $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$, a partir de su expresión explícita, para $\gamma \in \mathbb{R}$ y $0 < \mu < 1$. Simplificando en esta expresión explícita, veremos que es posible demostrar que las propiedades algebraicas que verifican los polinomios clásicos de Meixner, se siguen verificando para cualquier valor real del parámetro γ.

Definiremos, en la sección 3, un producto escalar discreto no diagonal Δ–Sobolev del tipo (6.2.1) y, demostraremos que la sucesión de los polinomios de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$, para $\gamma \in \mathbb{R}$ y $0 < \mu < 1$, es ortogonal con respecto a este producto escalar.

La siguiente sección la dedicaremos al estudio, en el caso particular de los polinomios de Meixner, del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ definido en el capítulo 6 de esta Memoria, para $K \geq \max\{0, [-\gamma+1]\}$. Para este operador, obtendremos una expresión recurrente que nos permitirá demostrar que $\mathcal{F}^{(K)}$ conserva el grado de los polinomios y, por lo tanto, deduciremos que los polinomios de Meixner generalizados son funciones propias de este operador en diferencias. Daremos, por último, unas relaciones entre la sucesión de los polinomios de Meixner generalizados $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$, ortogonales con respecto al producto escalar Δ–Sobolev definido en la sección 3, y la sucesión de los polinomios clásicos de Meixner $\{M_n^{(\gamma+K,\mu)}\}_{n\geq 0}$, ortogonal con respecto a la función peso clásica $\rho^{(\gamma+K,\mu)}$.

En la sección 5 realizaremos un estudio de la sucesión de los polinomios de Meixner generalizados $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_{n\geq 0}$, para $N = 0,1,2,\ldots$. Demostraremos una serie de propiedades que verifican estos polinomios y obtendremos, en este caso particular, una nueva expresión del producto escalar Δ–Sobolev, que nos permitirá dotar de propiedades de ortogonalidad no estándar a la sucesión $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_{n\geq 0}$, resultado que por el teorema de Favard no era posible. A partir del operador en diferencias definido en la sección 4, estudiaremos el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(N+1)}$ que será simétrico con respecto al producto escalar Δ–Sobolev cuando consideramos $K = N+1$ y $\gamma = -N$. Deduciremos una serie de relaciones entre la sucesión de los polinomios de Meixner $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_{n\geq 0}$ y la sucesión de los polinomios clásicos de Meixner $\{M_n^{(1,\mu)}\}_{n\geq 0}$, ortogonales con respecto a la función peso $\rho^{(1,\mu)}(x) = \mu^x$.

7.2 Definición y Propiedades de los polinomios de Meixner generalizados

Sean γ y μ dos números reales tales que $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$. Teniendo en cuenta la definición de la función hipergeométrica, la expresión explícita (7.1.1) del n-ésimo polinomio mónico de Meixner es equivalente a

$$M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = (\gamma)_n \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-n)_k(-x)_k}{(\gamma)_k k!}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^k, \quad n \geq 0. \tag{7.2.1}$$

La suma que aparece en (7.2.1) es, en realidad, una suma finita y, simplificando convenientemente, podemos escribir:

$$M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\gamma+k)_{n-k}(x-k+1)_k \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^k, \quad n \geq 0. \tag{7.2.2}$$

Se puede observar que la expresión (7.2.2) es válida para cada valor real del parámetro γ, y, por lo tanto, esta expresión define un polinomio mónico de grado n. De este modo, para $\gamma \in \mathbb{R}$, podemos definir familias de polinomios mónicos de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$, que constituyen una base del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{P}$. Estos polinomios los llamaremos *polinomios de Meixner generalizados.*

Haciendo unos simples cálculos en la expresión explícita (7.2.2), podemos demostrar que la mayoría de las propiedades algebraicas que verifican los polinomios clásicos de Meixner se siguen verificando para cada valor real del parámetro γ, tal y como mostramos en los dos resultados siguientes.

Proposición 7.2.1 *Se considera $0 < \mu < 1$ y γ cualquier número real. Entonces, los polinomios de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$ verifican las siguientes propiedades:*

i) Relación de recurrencia a tres términos

$$
\begin{aligned}
M_{-1}^{(\gamma,\mu)}(x) &= 0, \quad M_0^{(\gamma,\mu)}(x) = 1, \\
xM_n^{(\gamma,\mu)}(x) &= M_{n+1}^{(\gamma,\mu)}(x) + \beta_n^{(\gamma,\mu)} M_n^{(\gamma,\mu)}(x) + \gamma_n^{(\gamma,\mu)} M_{n-1}^{(\gamma,\mu)}(x), \quad n \geq 0, \qquad (7.2.3)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\beta_n^{(\gamma,\mu)} = \frac{n(1+\mu)+\mu\gamma}{1-\mu}, \quad \gamma_n^{(\gamma,\mu)} = \frac{n\mu(n-1+\gamma)}{(\mu-1)^2}. \qquad (7.2.4)
$$

ii) Dado $0 \leq k \leq n$, un número entero, se tiene que

$$
\begin{aligned}
ii.1) \quad \Delta^k M_n^{(\gamma,\mu)}(x) &= (n-k+1)_k M_{n-k}^{(\gamma+k,\mu)}(x), \qquad (7.2.5) \\
ii.2) \quad \nabla^k M_n^{(\gamma,\mu)}(x) &= (n-k+1)_k M_{n-k}^{(\gamma+k,\mu)}(x-k). \qquad (7.2.6)
\end{aligned}
$$

iii) Relaciones de estructura

$$
iii.1) \quad \left(\frac{x+\gamma}{n}\right) \Delta M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = M_n^{(\gamma,\mu)}(x) + \left(\frac{\gamma+n-1}{1-\mu}\right) M_{n-1}^{(\gamma,\mu)}(x), \qquad (7.2.7)
$$

$$
iii.2) \quad \frac{x}{n} \nabla M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = M_n^{(\gamma,\mu)}(x) + \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)(1-\gamma-n) M_{n-1}^{(\gamma,\mu)}(x). \qquad (7.2.8)
$$

iv) Ecuación en diferencias de segundo orden

$$
x\Delta\nabla y + [(\mu-1)x + \mu\gamma]\Delta y + (1-\mu)ny = 0, \qquad (7.2.9)
$$

donde $y = M_n^{(\gamma,\mu)}(x)$ es la única solución polinómica de (7.2.9).
v) Δ-representación

$$
M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = \frac{1}{n+1} \Delta M_{n+1}^{(\gamma,\mu)}(x) + \frac{\mu}{1-\mu} \Delta M_n^{(\gamma,\mu)}(x). \qquad (7.2.10)
$$

vi) ∇-representación

$$
M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = \frac{1}{n+1} \nabla M_{n+1}^{(\gamma,\mu)}(x) + \frac{1}{1-\mu} \nabla M_n^{(\gamma,\mu)}(x). \qquad (7.2.11)
$$

Proposición 7.2.2 *En las condiciones anteriores, para $k \geq 0$, se verifica*

$$
\text{i)} \quad M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^i \Delta^i M_n^{(\gamma-k,\mu)}(x) = \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^k M_n^{(\gamma-k,\mu)}(x). \qquad (7.2.12)
$$

ii) $M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{\mu-1}\right)^i \nabla^i M_n^{(\gamma-k,\mu)}(x+k) =$

$$= \left(I + \frac{1}{\mu-1}\nabla\right)^k M_n^{(\gamma-k,\mu)}(x+k). \tag{7.2.13}$$

Demostración:
i) Aplicamos inducción. El caso $k=0$ es trivial. Si tomamos $k=1$ en (7.2.12), usando la expresión (7.2.10) junto con la propiedad de diferenciación (7.2.5), la sumatoria queda

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^i \Delta^i M_n^{(\gamma-1,\mu)}(x) &= M_n^{(\gamma-1,\mu)}(x) + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta M_n^{(\gamma-1,\mu)}(x) = \\ &= \frac{1}{n+1}\Delta M_{n+1}^{(\gamma-1,\mu)}(x) = M_n^{(\gamma,\mu)}(x). \end{aligned}$$

Suponemos que la relación (7.2.12) es cierta para $k-1$, y probamos el resultado para k. Para ello, aplicando la hipótesis de inducción, la propiedad de diferenciación (7.2.5) y la relación (7.2.10), concluimos que

$$\begin{aligned} M_n^{(\gamma,\mu)}(x) &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^i \Delta^i M_n^{(\gamma-k+1,\mu)}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^i \Delta^i \left(\frac{1}{n+1}\Delta M_{n+1}^{(\gamma-k,\mu)}(x)\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^i \Delta^i \left(M_n^{(\gamma-k,\mu)}(x) + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta M_n^{(\gamma-k,\mu)}(x)\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^i \Delta^i M_n^{(\gamma-k,\mu)}(x). \end{aligned}$$

Finalmente, usando que para cualquier polinomio $f \in \mathbb{P}$, se verifica que

$$\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^n f(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^j \Delta^j f(x), \tag{7.2.14}$$

deducimos el resultado.
ii) Se obtiene usando un razonamiento por inducción análogo al anterior, junto con la relación

$$\left(I + \frac{1}{\mu-1}\nabla\right)^n f(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{\mu-1}\right)^j \nabla^j f(x), \tag{7.2.15}$$

donde f es un polinomio arbitrario del espacio $\mathbb{P}$. □

7.3 Ortogonalidad para los polinomios de Meixner

Sea $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \mu < 1$ y $K \geq 0$ un número entero. Definimos la matriz triangular inferior de dimensión $K+1$, $\mathbf{L}(K)$, como:

$$\mathbf{L}(K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{K}{1}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{K}{2}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^2 & \binom{K-1}{1}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{K}{K}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^K & \binom{K-1}{K-1}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{K-1} & \binom{K-2}{K-2}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{K-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotamos por $\mathbf{\Lambda}^{(K)}$ a la matriz simétrica definida, a partir de $\mathbf{L}(K)$, mediante la expresión

$$\mathbf{\Lambda}^{(K)} = \mathbf{L}(K)\mathbf{L}(K)^T, \tag{7.3.1}$$

luego, si $\mathbf{\Lambda}^{(K)} = (\lambda_{i,j})_{i,j=0}^{K}$, entonces

$$\lambda_{i,j} = \sum_{p=0}^{\min\{i,j\}} (-1)^{i+j}\binom{K-p}{i-p}\binom{K-p}{j-p}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{i+j-2p}, \quad 0 \leq i,j \leq K.$$

Evidentemente, la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}$ es una matriz definida positiva ya que la relación (7.3.1) es la factorización de Cholesky para $\mathbf{\Lambda}^{(K)}$, (ver [157], p. 174), y, además, se verifica que $\det\left(\mathbf{\Lambda}^{(K)}\right) = 1$.

Si consideramos $\mathbf{\Lambda}^{(K)}$ la matriz definida en (7.3.1), $K \geq 0$ un número entero y $\gamma > -K$, un número real, podemos definir el producto escalar Δ-Sobolev de dos polinomios f, $g \in \mathbb{P}$, en la forma:

$$(f,g)_{\Delta}^{(K,\gamma)} = \sum_{x=0}^{+\infty} F(x)\mathbf{\Lambda}^{(K)}G(x)^T\rho^{(\gamma+K,\mu)}(x), \quad x \in [0,+\infty), \tag{7.3.2}$$

donde $F(x)$ y $G(x)$ son los vectores definidos por

$$\begin{aligned} F(x) &= (f(x),\ \Delta f(x),\ \dots,\ \Delta^K f(x)), \\ G(x) &= (g(x),\ \Delta g(x),\ \dots,\ \Delta^K g(x)), \end{aligned}$$

y

$$\rho^{(\gamma+K,\mu)}(x) = \frac{\mu^x\Gamma(\gamma+K+x)}{\Gamma(\gamma+K)\Gamma(x+1)},$$

es la función peso clásica de Meixner.

Por ser $\gamma + K > 0$, todas las series que aparecen en (7.3.2) son convergentes y, como consecuencia del carácter definido de la matriz simétrica $\Lambda^{(K)}$, se concluye que $(.,.)_\Delta^{(K,\gamma)}$ es un producto escalar, de hecho, (7.3.2) es un producto escalar discreto no diagonal Δ-Sobolev como los estudiados en el capítulo 6.

Nota. En el caso en que $K = 0$ y, por lo tanto $\gamma > 0$, el producto escalar (7.3.2) es el producto escalar estándar asociado a la función peso clásica $\rho^{(\gamma,\mu)}$, es decir,

$$(f,g) = (f,g)_\Delta^{(0,\gamma)} = \sum_{x=0}^{+\infty} f(x)g(x)\rho^{(\gamma,\mu)}(x), \quad x \in [0,+\infty).$$

Para simplificar la notación, en lo que sigue notaremos por ρ a la función peso clásica de Meixner $\rho^{(\gamma+K,\mu)}$.

Teniendo en cuenta los elementos de la matriz $\mathbf{L}(K)$, es posible dar una representación del producto escalar (7.3.2) en términos del operador identidad I y del operador en diferencias finitas hacia delante Δ.

Proposición 7.3.1 *Se consideran los parámetros γ, $\mu \in \mathbb{R}$ con $0 < \mu < 1$, y $K \geq 0$ un número entero tal que $\gamma + K > 0$. Entonces, dados f y g dos polinomios arbitrarios de $\mathbb{P}$, el producto escalar (7.3.2) se puede escribir en la forma:*

$$(f,g)_\Delta^{(K,\gamma)} = \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{K} \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j} \Delta^j f(x) \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j} \Delta^j g(x)\rho(x). \tag{7.3.3}$$

Demostración:

Usando la expresión (7.2.14), el producto $F(x)\mathbf{L}(K)$, queda

$$(\, f(x),\ \Delta f(x),\ \ldots,\ \Delta^K f(x)\,)\,\mathbf{L}(K) =$$

$$\left(\sum_{j=0}^{K}\binom{K}{j}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^j \Delta^j f(x),\ \sum_{j=0}^{K-1}\binom{K-1}{j}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^j \Delta^j(\Delta f(x)),\ \ldots,\ \Delta^K f(x)\right) =$$

$$= \left(\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^K f(x),\ \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-1}\Delta f(x),\ \ldots,\ \Delta^K f(x)\right),$$

con lo que llegamos al resultado. □

En la siguiente proposición establecemos una expresión recurrente del producto escalar definido en (7.3.2), a partir de la relación (7.3.3).

Proposición 7.3.2 *En las condiciones anteriores, se verifica que el producto escalar (7.3.2), se puede escribir en la forma recurrente siguiente*

$$(f,g)_\Delta^{(K,\gamma)} = \left(\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)f, \left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)g\right)_\Delta^{(K-1,\gamma)} + \sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^K f(x)\Delta^K g(x)\rho(x). \quad (7.3.4)$$

Demostración:

Usando (7.3.3), tenemos que

$$\begin{aligned}
(f,g)_\Delta^{(K,\gamma)} &= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{K}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j}\Delta^j f(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j}\Delta^j g(x)\rho(x)\\
&= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{K-1}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j}\Delta^j f(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j}\Delta^j g(x)\rho(x)+\\
&+ \sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^K f(x)\Delta^K g(x)\rho(x) =\\
&= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{K-1}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j-1}\Delta^j\left(\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)f(x)\right)\\
&\quad\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j-1}\Delta^j\left(\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)g(x)\right)\rho(x)+\\
&+ \sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^K f(x)\Delta^K g(x)\rho(x) =\\
&= \left(\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)f, \left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)g\right)_\Delta^{(K-1,\gamma)} + \sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^K f(x)\Delta^K g(x)\rho(x). \quad \square
\end{aligned}$$

Los polinomios de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$, para $\gamma\in\mathbb{R}$ y $0<\mu<1$, son ortogonales con respecto al producto escalar (7.3.3). El siguiente teorema nos muestra este hecho.

Teorema 7.3.3 *Sean γ, $\mu\in\mathbb{R}$ con $0<\mu<1$. Entonces la familia de los polinomios mónicos de Meixner, $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_{n\geq 0}$ es una SPOM con respecto al producto escalar Δ-Sobolev $(.,.)_\Delta^{(K,\gamma)}$, donde $K\geq\max\{0,[-\gamma+1]\}$.*

Demostración:

Calculamos el producto escalar de dos polinomios mónicos de Meixner $M_n^{(\gamma,\mu)}$ y $M_m^{(\gamma,\mu)}$. A partir de (7.2.5) y (7.2.12), el producto escalar (7.3.3) queda

$$\left(M_n^{(\gamma,\mu)}, M_m^{(\gamma,\mu)}\right)_\Delta^{(K,\gamma)} = \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{K}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j}\Delta^j M_n^{(\gamma,\mu)}(x)$$

$$\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j}\Delta^j M_m^{(\gamma,\mu)}(x)\rho(x) =$$

$$= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{K}(n-j+1)_j(m-j+1)_j\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j} M_{n-j}^{(\gamma+j,\mu)}(x)$$

$$\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j} M_{m-j}^{(\gamma+j,\mu)}(x)\rho(x) =$$

$$= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{K}(n-j+1)_j(m-j+1)_j M_{n-j}^{(\gamma+K,\mu)}(x)M_{m-j}^{(\gamma+K,\mu)}(x)\rho(x),$$

donde suponemos que para $i<0$, entonces $M_i^{(\gamma+K,\mu)}=0$. Usando la ortogonalidad de los polinomios de Meixner $\{M_i^{(\gamma+K,\mu)}\}_{i\geq 0}$ con respecto a la función peso ρ, llegamos al resultado. □

Nota 1. Una forma alternativa para este mismo enunciado, usando la **misma** matriz que en el caso del operador Δ, se obtendría definiendo el producto escalar en la forma siguiente

$$(f,g)_{\nabla}^{(K,\gamma)} = \sum_{x=0}^{+\infty} \tilde{F}(x)\mathbf{\Lambda}^{(K)}\tilde{G}(x)^T\rho^{(\gamma+K,\mu)}(x), \tag{7.3.5}$$

donde $\tilde{F}(x)$ y $\tilde{G}(x)$ son dos vectores definidos por

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x) &= (\,f(x),\ \ \nabla f(x+1),\ \ \ldots,\ \ \nabla^K f(x+K)\,),\\ \tilde{G}(x) &= (\,g(x),\ \ \nabla g(x+1),\ \ \ldots,\ \ \nabla^K g(x+K)\,).\end{aligned}$$

Nota 2. Otra forma en el caso del operador ∇ usando una matriz **diferente**, podría ser considerar el producto escalar

$$(f,g)_{\nabla}^{(K,\gamma)} = \sum_{x=0}^{+\infty} \hat{F}(x)\hat{\mathbf{\Lambda}}^{(K)}\hat{G}(x)^T\rho^{(\gamma+K,\mu)}(x-K), \tag{7.3.6}$$

donde ahora $\hat{F}(x)$ y $\hat{G}(x)$ son los vectores

$$\begin{aligned}\hat{F}(x) &= (\,f(x),\ \ \nabla f(x),\ \ \ldots,\ \ \nabla^K f(x)\,),\\ \hat{G}(x) &= (\,g(x),\ \ \nabla g(x),\ \ \ldots,\ \ \nabla^K g(x)\,),\end{aligned}$$

y $\hat{\mathbf{\Lambda}}^{(K)}$ es una matriz simétrica definida positiva cuyos elementos se definen como

$$\hat{\lambda}_{i,j} = \sum_{p=0}^{\min\{i,j\}}(-1)^{i+j}\binom{K-p}{i-p}\binom{K-p}{j-p}\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{i+j-2p}, \quad 0\leq i,j\leq K.$$

Nota 3. Si tomamos $K = 1$ y $\gamma = 0$ en el producto escalar (7.3.2), a partir del teorema 7.3.3, deducimos que los polinomios de Meixner $\{M_n^{(0,\mu)}\}_n$ son ortogonales con respecto al producto escalar Δ–Sobolev

$$(f,g)_{\Delta}^{(1,0)} = \sum_{x=0}^{+\infty} (\, f(x), \Delta f(x)\,) \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\mu}{\mu-1} \\ \dfrac{\mu}{\mu-1} & \left(\dfrac{\mu}{\mu-1}\right)^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ \Delta g(x) \end{pmatrix} \mu^x.$$

Es decir, obtenemos el mismo resultado que en iii) del corolario 6.5.3 cuando escogemos $\gamma = 1$, $\lambda_{0,0} = 1$, $\lambda_{0,1} = \dfrac{\mu}{\mu-1}$ y $\lambda_{1,1} = \left(\dfrac{\mu}{\mu-1}\right)^2 + 1$.

7.4 El operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el capítulo 6, sabemos que existe un operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ que es simétrico con respecto al producto escalar Δ–Sobolev (7.3.2). Estudiamos este operador en el caso en que se consideran los polinomios de Meixner, ya que, en este caso, $\mathcal{F}^{(K)}$ tiene unas características especiales.

Dado $K \geq 0$ un número entero, tomamos la expresión general (6.3.8) del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ escrita en términos de la función peso ρ, para la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$. Esto es:

$$\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\prod_{i=1}^{K} \phi(x-i)}{\rho(x)} (\, I, -\nabla, \ldots, (-1)^K \nabla^K\,)\, \mathbf{\Lambda}^{(K)}(x) \begin{pmatrix} \rho(x) I \\ \rho(x)\Delta \\ \vdots \\ \rho(x)\Delta^K \end{pmatrix}, \tag{7.4.1}$$

donde ϕ es el polinomio que aparece en la ecuación (6.3.3) escrita en términos de la función peso ρ, es decir

$$\phi(x-1)\nabla\rho(x) = \theta(x;1)\rho(x). \tag{7.4.2}$$

Hemos visto que para los polinomios de Meixner la matriz $\mathbf{\Lambda}^{(K)}(x)$ es una matriz de coeficientes constantes que verifica $\mathbf{\Lambda}^{(K)} = \mathbf{L}(K)\mathbf{L}(K)^T$. En este sentido, si sustituimos los elementos de la matriz $\mathbf{L}(K)$ y las relaciones (7.2.14) y (7.2.15) en (7.4.1), llamando

$$\Phi(x;K) = \prod_{i=1}^{K} \phi(x-i),$$

obtenemos una expresión más simple del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$:

$$\mathcal{F}^{(K)} = \frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)} \sum_{j=0}^{K} (-\nabla)^j \left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-j} \rho(x) \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j} \Delta^j, \tag{7.4.3}$$

donde, teniendo en cuenta la sección 5 del capítulo 5, $\sigma(x) = x$, $\psi(x) = x(\mu-1)+\mu(\gamma+K)$, $\phi(x) = \mu(x+\gamma+K)$ y $\theta(x;1) = (\mu-1)x+\mu(\gamma+K-1)$, para $\gamma > 0$ y $0 < \mu < 1$.

Nota. Un sencillo cálculo muestra que en el caso $K = 1$, la expresión (7.4.3) coincide con la obtenida en (6.5.17), para el operador $\mathcal{F}^{(1)}$ tomando $\gamma+1$ y los polinomios de la matriz $\Lambda^{(1)}(x)$ los números reales siguientes: $\lambda_{0,0} = 1$, $\lambda_{0,1} = \dfrac{\mu}{\mu-1}$ y $\lambda_{1,1} = \left(\dfrac{\mu}{\mu-1}\right)^2 + 1$.

La expresión (7.4.3) del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ puede escribirse en forma recurrente, como mostramos a continuación.

Proposición 7.4.1 *Sea $K \geq 0$ un número entero dado. Se verifica que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(0)} &= I, \\
\mathcal{F}^{(K)} &= [(1-\mu)x - \mu\gamma]\,\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta - x\nabla\left(\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta\right) + \\
&+ \frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^K \rho(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^K, \quad K \geq 1. \qquad (7.4.4)
\end{aligned}$$

Demostración:

Para $K = 0$ se tiene, a partir de (7.4.3) que $\mathcal{F}^{(0)} = I$. Deduzcamos la expresión recurrente. Para ello, de (7.4.3) tenemos que

$$\mathcal{F}^{(K)} = \mathcal{F}_1^{(K)} + \mathcal{F}_2^{(K)},$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^{(K)} &= \frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\sum_{j=1}^{K}(-\nabla)^j\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-j}\rho(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j}\Delta^j, \\
\mathcal{F}_2^{(K)} &= \frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^K\rho(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^K.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, falta por probar que el operador $\mathcal{F}_1^{(K)}$ se puede expresar en términos de $\mathcal{F}^{(K-1)}$. Usando la ecuación (7.4.2), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^{(K)} &= -\frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\nabla\left(\sum_{j=0}^{K-1}(-\nabla)^j\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-j-1}\rho(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j-1}\Delta^{j+1}\right) = \\
&= -\nabla\left(\frac{\Phi(x+1;K)}{\rho(x+1)}\sum_{j=0}^{K-1}(-\nabla)^j\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-j-1}\rho(x)\right. \\
&\qquad \left.\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j-1}\Delta^{j+1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \nabla\left(\frac{\Phi(x+1;K)}{\rho(x+1)}\right)\sum_{j=0}^{K-1}(-\nabla)^j\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-j-1}\rho(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j-1}\Delta^{j+1} = \\
&= \quad -\nabla\left((x+1)\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta\right)+ \\
&+ \quad \Delta\left(\frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\right)\sum_{j=0}^{K-1}(-\nabla)^j\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-j-1}\rho(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j-1}\Delta^{j+1} = \\
&= \quad -\nabla\left((x+1)\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta\right)+ \\
&+ \quad \left[\frac{\Phi(x+1;K)}{\rho(x+1)}-\frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\right]\sum_{j=0}^{K-1}(-\nabla)^j\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-j-1}\rho(x)(I+ \\
&+ \quad \left.\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-j-1}\Delta^{j+1} = \\
&= \quad -\nabla\left((x+1)\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta\right)+\left[\sigma(x+1)-\phi(x-K)\right]\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta = \\
&= \quad \left[(1-\mu)x-\mu\gamma\right]\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta - x\nabla\left(\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta\right). \quad \square
\end{aligned}
$$

En el siguiente resultado demostramos que el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ es un operador que mantiene el grado de los polinomios.

Proposición 7.4.2 *Sea x^n un polinomio de grado n. Entonces, se verifica que*

$$
\mathcal{F}^{(K)}x^n = F(n,K)x^n+\ldots, \quad n \geq K, \tag{7.4.5}
$$

donde

$$
F(n,K)=\sum_{i=0}^{K}(1-\mu)^i\frac{n!}{(n-i)!}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{K-i}(\gamma+n)_{K-i}>0,
$$

representa el coeficiente líder del polinomio $\mathcal{F}^{(K)}x^n$.

Demostración:

Demostramos el resultado por inducción. A partir de la proposición 7.4.1, tenemos que

$$
\mathcal{F}^{(K)}=\mathcal{F}_1^{(K)}+\mathcal{F}_2^{(K)},
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^{(K)} &= \left[(1-\mu)x-\mu\gamma\right]\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta - x\nabla\left(\mathcal{F}^{(K-1)}\Delta\right), \\
\mathcal{F}_2^{(K)} &= \frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^K\rho(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^K.
\end{aligned} \tag{7.4.6}
$$

Si $K = 0$ por ser $\mathcal{F}^{(0)} = I$ el resultado se verifica. Cuando $K = 1$, si en la expresión (6.5.17) del operador $\mathcal{F}^{(1)}$ tomamos $\lambda_{0,0} = 1$, $\lambda_{1,0} = \frac{\mu}{\mu-1}$ y $\lambda_{1,1} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^2 + 1$, obtenemos que también este operador conserva el grado.

Suponemos que el resultado es cierto para $K-1$. Entonces se verifica que el operador $\mathcal{F}_1^{(K)}$ conserva el grado. Por lo tanto, basta probar que el operador $\mathcal{F}_2^{(K)}$ lo conserva, y lo haremos de nuevo por inducción en K.

En el caso $K = 0$, se verifica el resultado ya que $\mathcal{F}_2^{(0)}$ es el operador identidad. Si consideramos $K = 1$, deducimos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2^{(1)} = {} & \frac{\Phi(x;1)}{\rho(x)}\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)\rho(x)\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right) = \\
= {} & \frac{\phi(x-1)}{\rho(x)}\left[\rho(x)I + \frac{\mu}{\mu-1}\rho(x)\Delta + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla(\rho(x)I) - \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2\nabla(\rho(x)\Delta)\right] = \\
= {} & \left[\phi(x-1) + \frac{\mu}{1-\mu}\theta(x;1)\right]I + \left[\frac{\mu}{\mu-1}\phi(x-1) - \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2\theta(x;1)\right]\Delta + \\
+ {} & \frac{\mu}{1-\mu}\sigma(x)\nabla - \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2\sigma(x)\Delta\nabla = \\
= {} & \left(\frac{\mu\gamma}{1-\mu}\right)I - \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^2\gamma\Delta + \frac{\mu}{1-\mu}x\nabla - \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 x\Delta\nabla,
\end{aligned}
$$

luego $\mathcal{F}_2^{(1)}$ conserva el grado. Supongamos que el resultado se verifica para $K-1$ y lo vemos para K. Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2^{(K)} = {} & \frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^K\rho(x)\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^K = \\
= {} & \frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-1}\rho(x)\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-1}\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right) = \\
= {} & \frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-1}\rho(x)\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-1}\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right) + \\
+ {} & \frac{\mu}{1-\mu}\frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\nabla\left(\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-1}\rho(x)\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-1}\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)\right) = \\
= {} & \phi(x-K)\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right) + \\
+ {} & \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\left(\frac{\Phi(x+1;K)}{\rho(x+1)}\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-1}\rho(x)\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-1}\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)\right) + \\
+ {} & \frac{\mu}{\mu-1}\nabla\left(\frac{\Phi(x+1;K)}{\rho(x+1)}\right)\left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-1}\rho(x)\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-1}\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi(x-K)\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\left((x+1)\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)\right)+\\
&+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\left(\frac{\Phi(x;K)}{\rho(x)}\right)\left(I+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{K-1}\rho(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{K-1}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)=\\
&= \phi(x-K)\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)+\frac{\mu}{1-\mu}\nabla\left((x+1)\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)\right)+\\
&+\frac{\mu}{\mu-1}[x+1-\phi(x-K)]\,\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)=\\
&= \left[\frac{\mu}{\mu-1}x+\frac{1}{1-\mu}\phi(x-K)\right]\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)+\\
&+\frac{\mu}{1-\mu}x\nabla\left(\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)\right)=\\
&= \frac{\mu\gamma}{(1-\mu)^2}\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)+\frac{\mu}{1-\mu}x\nabla\left(\mathcal{F}_2^{(K-1)}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)\right).
\end{aligned}
\tag{7.4.7}
$$

Si, ahora, usamos la hipótesis de inducción, concluimos el resultado. Además, identificando coeficientes líderes y usando recurrencia, deducimos que

$$
F(n,K)=\sum_{i=0}^{K}(1-\mu)^i\frac{n!}{(n-i)!}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{K-i}(\gamma+n)_{K-i}>0. \quad \square
$$

Aplicando la proposición 6.3.1 y el teorema 6.3.3, en el caso particular de los polinomios de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$, con $\gamma\in\mathbb{R}$ y $0<\mu<1$, deducimos los siguientes resultados.

Proposición 7.4.3 *Dados f y g dos polinomios arbitrarios de $\mathbb{P}$, se verifica que*

$$
\left(\mu^K(x+\gamma)_K f,g\right)_\Delta^{(K,\gamma)}=\sum_{x=0}^{+\infty}f(x)\mathcal{F}^{(K)}g(x)\rho(x),
$$

donde $\rho(x)=\dfrac{\mu^x\Gamma(\gamma+K+x)}{\Gamma(\gamma+K)\Gamma(x+1)}$, *con* $x\in[0,+\infty)$.

Teorema 7.4.4 *El operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$ es simétrico con respecto al producto escalar definido en (7.3.2), esto es*

$$
\left(\mathcal{F}^{(K)}f,g\right)_\Delta^{(K,\gamma)}=\left(f,\mathcal{F}^{(K)}g\right)_\Delta^{(K,\gamma)}.
$$

A partir de las relaciones (7.4.5) y (6.4.3), se verifica que los polinomios de Meixner generalizados son funciones propias del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(K)}$, tal y como mostramos a continuación.

Proposición 7.4.5 *Para cada valor de $n\geq K$, se tiene*

$$
\mathcal{F}^{(K)}M_n^{(\gamma,\mu)}(x)=F(n,K)M_n^{(\gamma,\mu)}(x). \tag{7.4.8}
$$

Teniendo en cuenta (6.4.1) y (6.4.2), es posible relacionar los polinomios de Meixner generalizados $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$ y los polinomios clásicos de Meixner $\{M_n^{(\gamma+K,\mu)}\}_n$, en la forma siguiente:

Proposición 7.4.6 *Se verifican:*

$$\text{i)}\quad \mu^K(x+\gamma)_K M_n^{(\gamma+K,\mu)}(x) = \sum_{i=n}^{n+K} \alpha_{n,i} M_i^{(\gamma,\mu)}(x), \quad n \geq 0, \tag{7.4.9}$$

donde $\alpha_{n,n+K} = \mu^K, \quad \alpha_{n,n} = F(n,K)\dfrac{k_n}{\tilde{k}_n}.$

$$\text{ii)}\quad \mathcal{F}^{(K)} M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = \sum_{i=n-K}^{n} \beta_{n,i} M_i^{(\gamma+K,\mu)}(x), \quad n \geq K, \tag{7.4.10}$$

donde $\beta_{n,n} = F(n,K), \quad \beta_{n,n-K} = \mu^K \dfrac{\tilde{k}_n}{k_{n-K}}.$

Como consecuencia de la ortogonalidad Δ-Sobolev podemos obtener propiedades acerca de los ceros reales y positivos de los polinomios de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$.

Proposición 7.4.7 *Para cada valor de* $n > K = \max\{0, [-\gamma+1]\}$, *el polinomio* $M_n^{(\gamma,\mu)}$ *tiene, al menos,* $(n-K)$ *ceros reales de multiplicidad impar contenidos en el intervalo* $[0,+\infty)$.

Demostración:

Usando la proposición 7.4.3 y la relación (7.4.8), tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\mu^K(x+\gamma)_K, M_n^{(\gamma,\mu)}\right)_S^{(K,K+\alpha)} &= \sum_{x=0}^{+\infty} \mathcal{F}^{(K)} M_n^{(\gamma,\mu)} \rho(x) = \\ &= F(n,K)\sum_{x=0}^{+\infty} M_n^{(\gamma,\mu)}\rho(x) = 0,\end{aligned}$$

lo cual implica que el polinomio $M_n^{(\gamma,\mu)}$ cambia de signo en el intervalo $[0,+\infty)$.

Sea $q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-x_i)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son las raíces reales positivas de multiplicidad impar del polinomio $M_n^{(\gamma,\mu)}$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\mu^K(x+\gamma)_K q(x), M_n^{(\gamma,\mu)}\right)_S^{(K,K+\alpha)} &= \sum_{x=0}^{+\infty} q(x)\mathcal{F}^{(K)} M_n^{(\gamma,\mu)} \rho(x) = \\ &= F(n,K)\sum_{x=0}^{+\infty} q(x) M_n^{(\gamma,\mu)}\rho(x) \neq 0,\end{aligned}$$

puesto que $q(x)M_n^{(\gamma,\mu)} \geq 0, \quad \forall x \in [0,+\infty)$, y, por tanto, $r \geq n-K$. $\square$

Teniendo en cuenta (6.4.1) y (6.4.2), es posible relacionar los polinomios de Meixner generalizados $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$ y los polinomios clásicos de Meixner $\{M_n^{(\gamma+K,\mu)}\}_n$, en la forma siguiente:

Proposición 7.4.6 *Se verifican:*

i) $$\mu^K(x+\gamma)_K M_n^{(\gamma+K,\mu)}(x) = \sum_{i=n}^{n+K} \alpha_{n,i} M_i^{(\gamma,\mu)}(x), \quad n \geq 0, \tag{7.4.9}$$

donde $\alpha_{n,n+K} = \mu^K$, $\quad \alpha_{n,n} = F(n,K)\dfrac{k_n}{\bar{k}_n}$.

ii) $$\mathcal{F}^{(K)} M_n^{(\gamma,\mu)}(x) = \sum_{i=n-K}^{n} \beta_{n,i} M_i^{(\gamma+K,\mu)}(x), \quad n \geq K, \tag{7.4.10}$$

donde $\beta_{n,n} = F(n,K)$, $\quad \beta_{n,n-K} = \mu^K \dfrac{\bar{k}_n}{k_{n-K}}$.

Como consecuencia de la ortogonalidad Δ-Sobolev podemos obtener propiedades acerca de los ceros reales y positivos de los polinomios de Meixner $\{M_n^{(\gamma,\mu)}\}_n$.

Proposición 7.4.7 *Para cada valor de* $n > K = \max\{0, [-\gamma+1]\}$, *el polinomio* $M_n^{(\gamma,\mu)}$ *tiene, al menos,* $(n-K)$ *ceros reales de multiplicidad impar contenidos en el intervalo* $[0,+\infty)$.

Demostración:
Usando la proposición 7.4.3 y la relación (7.4.8), tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\mu^K(x+\gamma)_K, M_n^{(\gamma,\mu)}\right)_S^{(K,K+\alpha)} &= \sum_{x=0}^{+\infty} \mathcal{F}^{(K)} M_n^{(\gamma,\mu)} \rho(x) = \\ &= F(n,K) \sum_{x=0}^{+\infty} M_n^{(\gamma,\mu)} \rho(x) = 0,\end{aligned}$$

lo cual implica que el polinomio $M_n^{(\gamma,\mu)}$ cambia de signo en el intervalo $[0,+\infty)$.

Sea $q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - x_i)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son las raíces reales positivas de multiplicidad impar del polinomio $M_n^{(\gamma,\mu)}$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\mu^K(x+\gamma)_K q(x), M_n^{(\gamma,\mu)}\right)_S^{(K,K+\alpha)} &= \sum_{x=0}^{+\infty} q(x) \mathcal{F}^{(K)} M_n^{(\gamma,\mu)} \rho(x) = \\ &= F(n,K) \sum_{x=0}^{+\infty} q(x) M_n^{(\gamma,\mu)} \rho(x) \neq 0,\end{aligned}$$

puesto que $q(x) M_n^{(\gamma,\mu)} \geq 0$, $\quad \forall x \in [0,+\infty)$, y, por tanto, $r \geq n-K$. $\square$

7.5 Polinomios de Meixner $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_{n\geq 0}$

Esta sección la dedicaremos al estudio de los polinomios de Meixner generalizados cuando $\gamma = -N$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$. Las especiales características de los polinomios mónicos de Meixner $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_n$, y del producto escalar Δ–Sobolev definido en (7.3.2), nos permitirán deducir propiedades para estos polinomios.

Además de las propiedades dadas en las proposiciones 7.2.1 y 7.2.2, los polinomios de Meixner verifican, a partir de su expresión explícita, algunas propiedades más que mostramos a continuación.

Proposición 7.5.1 *Dado $N \geq 0$ un número entero, entonces los polinomios mónicos de Meixner $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_{n\geq 0}$ verifican las siguientes propiedades:*

i) $M_n^{(-N,\mu)}(0) = (-N)_n \left(\dfrac{\mu}{\mu-1}\right)^n, \quad n \geq 0.$

ii) $M_n^{(-N,\mu)}(0) = 0, \quad n \geq N+1.$

iii) $\Delta^k M_n^{(-N,\mu)}(0) = (n-k+1)_k(-N+k)_{n-k}\left(\dfrac{\mu}{\mu-1}\right)^{n-k}, \quad n \geq k.$

iv) $\Delta^k M_n^{(-N,\mu)}(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \quad n \geq N+1.$

v) $M_{N+1}^{(-N,\mu)}(x) = (x-N)_{N+1}.$

Demostración:
i) Basta tomar en la expresión explícita de los polinomios mónicos de Meixner (7.2.2), $\gamma = -N$ y $x = 0$.

ii) Cuando $n \geq N+1$ entonces $(-N)_n = 0$, y sustituyendo en i), tenemos el resultado.

iii) A partir de las relaciones i) y (7.2.5), para $n \geq 0$, se verifica que

$$\Delta^k M_n^{(-N,\mu)}(0) = (n-k+1)_k M_{n-k}^{(-N+k,\mu)}(0) = (n-k+1)_k(-N+k)_{n-k}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n-k}.$$

iv) Si consideramos $0 \leq k \leq N$ y $n \geq N+1$, el símbolo de Pochhammer $(-N+k)_{n-k}$ se anula, de donde usando iii) tenemos que $\Delta^k M_n^{(-N,\mu)}(0) = 0$.

v) Tomando $n = N+1$ en la expresión explícita (7.2.2), con $\gamma = -N$, queda

$$\begin{aligned} M_{N+1}^{(-N,\mu)}(x) &= \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{N+1}\sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}(-N+k)_{N+1-k}(x-k+1)_k\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^k = \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{N+1}(x-(N+1)+1)_{N+1}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{N+1} = (x-N)_{N+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 7.5.2 *Para cada valor de* $n \geq N+1$, *el polinomio de Meixner* $M_n^{(-N,\mu)}$ *verifica la siguiente relación*

$$M_n^{(-N,\mu)}(x) = (x-N)_{N+1} M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1). \tag{7.5.1}$$

Demostración:

Demostramos el resultado por inducción. Cuando $n = N+1$, de (7.5.1), obtenemos que

$$M_{N+1}^{(-N,\mu)}(x) = (x-N)_{N+1} M_0^{(N+2,\mu)}(x-N-1).$$

Para $n = N+2$, tomando la relación de recurrencia (7.2.3) para los polinomios $M_{N+1}^{(-N,\mu)}$, teniendo en cuenta que $\beta_{N+1}^{(-N,\mu)} = \dfrac{N+1+\mu}{1-\mu} = N+1+\beta_0^{(N+2,\mu)}$ y $\gamma_{N+1}^{(-N,\mu)} = 0$ y usando v) de la proposición 7.5.1, tenemos que

$$\begin{aligned} M_{N+2}^{(-N,\mu)}(x) &= \left(x-N-1-\beta_0^{(N+2,\mu)}\right) M_{N+1}^{(-N,\mu)}(x) = \\ &= (x-N)_{N+1}\left(x-N-1-\beta_0^{(N+2,\mu)}\right) = (x-N)_{N+1} M_1^{(N+2,\mu)}(x-N-1). \end{aligned}$$

Consideremos $n \geq N+2$. Escribiendo la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios $M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1)$ y usando que

$$\beta_n^{(-N,\mu)} = N+1+\beta_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}, \quad \gamma_n^{(-N,\mu)} = \gamma_{n-N-1}^{(N+2,\mu)},$$

la relación (7.2.3) queda

$$\begin{aligned} M_{n-N}^{(N+2,\mu)}(x-N-1) &= \left(x-N-1-\beta_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}\right) M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1) - \\ &- \gamma_{n-N-1}^{(N+2,\mu)} M_{n-N-2}^{(N+2,\mu)}(x-N-1) = \\ &= \left(x-\beta_n^{(-N,\mu)}\right) M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1) - \gamma_n^{(-N,\mu)} M_{n-N-2}^{(N+2,\mu)}(x-N-1). \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

Si, ahora, usamos un razonamiento inductivo, de (7.5.2) deducimos que la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios $(x-N)_{N+1} M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1)$ es la misma que la que verifican los polinomios $M_n^{(-N,\mu)}$, con lo que llegamos al resultado. □

Nota. A partir de la relación (7.5.1) y del teorema 1.3.4, deducimos que, para cada valor de $n \geq N+1$, el polinomio de Meixner $M_n^{(-N,\mu)}$ tiene $N+1$ ceros reales de la forma $x = 0, 1, 2, \ldots, N$, y, además, tiene $n-N-1$ raíces reales y simples localizadas en el interior del intervalo $[0, +\infty)$.

En la siguiente proposición demostramos una relación en diferencias entre el polinomio mónico de Meixner $M_n^{(-N,\mu)}$, con $n \geq N+1$, y el polinomio clásico de Meixner $M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}$.

Proposición 7.5.3 *Para cada valor de $n \geq N+1$, se verifica*

$$\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1}\nabla^{N+1}M_n^{(-N,\mu)}(x)=(n-N)_{N+1}M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1). \quad (7.5.3)$$

Demostración:

Usando la propiedad de diferenciación (7.2.6), para $k=N+1$ y $\gamma=-N$, y la relación (7.2.12), tenemos que

$$\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1}\nabla^{N+1}M_n^{(-N,\mu)}(x)=\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1}\cdot$$
$$(n-N)_{N+1}M_{n-N-1}^{(1,\mu)}(x-N-1)=(n-N)_{N+1}M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1). \quad \square$$

7.5.1 Producto escalar Δ–Sobolev

Para $N \geq 0$ un número entero dado, consideramos la sucesión de los polinomios de Meixner $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_{n\geq 0}$. Sabemos de la sección 3, que esta sucesión de polinomios es ortogonal con respecto al producto escalar definido en (7.3.3), para $K \geq \max\{0,[-\gamma+1]\}=N+1$. Cuando $K=N+1$, el producto escalar Δ-Sobolev (7.3.3) queda

$$(f,g)_\Delta^{(N+1,-N)}=$$
$$=\sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{N+1}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j}\Delta^j f(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j}\Delta^j g(x)\mu^x. \quad (7.5.4)$$

Nuestro propósito, en este caso particular, es obtener una expresión más sencilla del producto escalar (7.5.4). Para ello, son necesarios unos resultados previos.

Lema 7.5.4 *Dado f un polinomio del espacio $\mathbb{P}$, se verifica:*

$$\mu^x\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^n f(x)=\frac{1}{(\mu-1)^n}\Delta^n\left(\mu^x f(x)\right), \quad n\geq 0.$$

Demostración:

Demostramos el resultado por inducción. Si $n=0$ se verifica trivialmente. Para $n=1$, teniendo en cuenta que $\Delta(fg)=\Delta(f)g+f\Delta(g)+\Delta(f)\Delta(g)$ y que $\Delta(\mu^x)=(\mu-1)\mu^x$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu-1}\Delta\left(\mu^x f(x)\right) &= \frac{1}{\mu-1}\left[\mu^x\Delta(f(x))+(\mu-1)\mu^x f(x)+(\mu-1)\mu^x\Delta(f(x))\right]=\\ &= \frac{\mu^x}{\mu-1}\left[(\mu-1)f(x)+\mu\Delta(f(x))\right]=\\ &= \mu^x\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)f(x).\end{aligned}$$

Suponemos cierto el resultado para $n-1$ y, lo probamos para n. A partir de la hipótesis de inducción y de lo demostrado para el caso $n=1$, deducimos que

$$\mu^x\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^n f(x)=\mu^x\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{n-1}\left[\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)f(x)\right]=$$
$$=\frac{1}{(\mu-1)^{n-1}}\Delta^{n-1}\left(\mu^x\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)f(x)\right)=\frac{1}{(\mu-1)^n}\Delta^n(\mu^x f(x)).\quad\square$$

Lema 7.5.5 *En las condiciones anteriores, se tiene*

$$\mu^x\left(I+\frac{1}{\mu-1}\nabla\right)^n f(x)=\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n\nabla^n(\mu^x f(x)),\qquad n\geq 0.$$

Demostración:

La demostración es análoga a la del lema 7.5.4. □

Lema 7.5.6 *Se considera $n\geq 0$ un número entero y f y g dos polinomios del espacio $\mathbb{P}$. Se tiene que*

$$\mu^x\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)f\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)g=\frac{1}{\mu-1}\left[\Delta(\mu^x fg)+\frac{\mu}{\mu-1}\mu^x\Delta f\Delta g\right].$$

Demostración:

Tenemos que

$$\mu^x\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)f\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)g=\mu^x\left[fg+\frac{\mu}{\mu-1}[\Delta(fg)-\Delta f\Delta g]+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^2\Delta f\Delta g\right]=$$
$$=\mu^x\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)fg+\frac{\mu}{(\mu-1)^2}\mu^x\Delta f\Delta g=$$
$$=\frac{1}{\mu-1}\Delta(\mu^x fg)+\frac{\mu}{(\mu-1)^2}\mu^x\Delta f\Delta g=$$
$$=\frac{1}{\mu-1}\left[\Delta(\mu^x fg)+\frac{\mu}{\mu-1}\mu^x\Delta f\Delta g\right].\quad\square$$

Lema 7.5.7 *Dado $N\geq 0$ un número entero y f y g dos polinomios del espacio $\mathbb{P}$, entonces el producto escalar (7.5.4) se puede escribir en la forma:*

$$(f,g)_\Delta^{(N+1,-N)}=\frac{1}{1-\mu}\left[(f,g)_D^{(N)}+\frac{\mu}{\mu-1}(\Delta f,\Delta g)_\Delta^{(N,-N+1)}\right]+$$
$$+\sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^{N+1}f(x)\Delta^{N+1}g(x)\mu^x,$$

donde

$$(f,g)_D^{(N)} = (\, f(0), \Delta f(0), \dots, \Delta^N f(0)\,)\, \Lambda^{(N)} \begin{pmatrix} g(0) \\ \Delta g(0) \\ \dots \\ \Delta^N g(0) \end{pmatrix}.$$

Demostración:

Aplicando el lema 7.5.6 al producto escalar (7.5.4), queda

$$\begin{aligned}
(f,g)_\Delta^{(N-1,-N)} &= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{N+1}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j}\Delta^j f(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j}\Delta^j g(x)\mu^x \\
&= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{N}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j}\Delta^j f(x)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j}\Delta^j g(x)\mu^x + \\
&+ \sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^{N+1}f(x)\Delta^{N+1}g(x)\mu^x = \\
&= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{N}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N-j}\Delta^j f \\
&\quad \left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N-j}\Delta^j g\mu^x + \\
&+ \sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^{N+1}f(x)\Delta^{N+1}g(x)\mu^x = \\
&= \frac{1}{1-\mu}\sum_{x=0}^{+\infty}\Delta\left(\sum_{j=0}^{N}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N-j}\Delta^j f\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N-j}\Delta^j g\mu^x\right) + \\
&+ \frac{\mu}{(\mu-1)^2}\sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{N}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N-j}\Delta^{j+1} f\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N-j}\Delta^{j+1} g\mu^x + \\
&+ \sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^{N+1}f(x)\Delta^{N+1}g(x)\mu^x = \\
&= \frac{1}{1-\mu}\sum_{j=0}^{N}\left|\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N-j}\Delta^j f\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N-j}\Delta^j g\mu^x\right|_{x=0}^{x=+\infty} + \\
&+ \frac{\mu}{(\mu-1)^2}(\Delta f,\Delta g)_\Delta^{(N,-N+1)} + \sum_{x=0}^{+\infty}\Delta^{N+1}f(x)\Delta^{N+1}g(x)\mu^x = \\
&= \frac{1}{1-\mu}\left[(f,g)_D^{(N)} + \frac{\mu}{\mu-1}(\Delta f,\Delta g)_\Delta^{(N,-N+1)}\right] +
\end{aligned}$$

$$+\ \sum_{x=0}^{+\infty} \Delta^{N+1} f(x) \Delta^{N+1} g(x) \mu^x. \ \square$$

Proposición 7.5.8 *En las condiciones anteriores, el producto escalar (7.5.4) se puede escribir como:*

$$(f,g)_\Delta^{(N+1,-N)} = \frac{1}{1-\mu}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\mu}{(\mu-1)^2}\right)^i (\Delta^i f, \Delta^i g)_D^{(N-i)} +$$
$$+\left(\sum_{i=0}^{N+1}\left(\frac{\mu}{(\mu-1)^2}\right)^i\right)\sum_{x=0}^{+\infty} \Delta^{N+1} f(x) \Delta^{N+1} g(x) \mu^x. \tag{7.5.5}$$

Demostración:

Basta con iterar en el lema 7.5.7, con lo que el producto escalar (7.5.4) queda

$$\begin{aligned}
(f,g)_\Delta^{(N+1,-N)} &= \frac{1}{1-\mu}\left[(f,g)_D^{(N)} + \frac{\mu}{\mu-1}(\Delta f, \Delta g)_\Delta^{(N,-N+1)}\right] + \\
&+ \sum_{x=0}^{+\infty} \Delta^{N+1} f(x) \Delta^{N+1} g(x) \mu^x = \\
&= \frac{1}{1-\mu}(f,g)_D^{(N)} + \frac{\mu}{(\mu-1)^2}\left[\frac{1}{1-\mu}\left[(\Delta f, \Delta g)_D^{(N-1)} + \frac{\mu}{\mu-1}(\Delta^2 f, \Delta^2 g)_\Delta^{(N-1,-N+2)}\right] + \right. \\
&+ \left.\sum_{x=0}^{+\infty} \Delta^{N+1} f(x) \Delta^{N+1} g(x) \mu^x\right] + \\
&+ \sum_{x=0}^{+\infty} \Delta^{N+1} f(x) \Delta^{N+1} g(x) \mu^x = \\
&= \frac{1}{1-\mu}\left[(f,g)_D^{(N)} + \frac{\mu}{(\mu-1)^2}(\Delta f, \Delta g)_D^{(N-1)}\right] + \\
&+ \left(\frac{\mu}{(\mu-1)^2}\right)^2 (\Delta^2 f, \Delta^2 g)_\Delta^{(N-1,-N+2)} + \\
&+ \left(1 + \frac{\mu}{(\mu-1)^2}\right)\sum_{x=0}^{+\infty} \Delta^{N+1} f(x) \Delta^{N+1} g(x) \mu^x = \\
&= \ldots = \frac{1}{1-\mu}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\mu}{(\mu-1)^2}\right)^i (\Delta^i f, \Delta^i g)_D^{(N-i)} + \\
&+ \left(\sum_{i=0}^{N+1}\left(\frac{\mu}{(\mu-1)^2}\right)^i\right)\sum_{x=0}^{+\infty} \Delta^{N+1} f(x) \Delta^{N+1} g(x) \mu^x. \ \square
\end{aligned}$$

Nota. Obsérvese que los polinomios de Meixner $\{M_n^{(-N,\mu)}\}$, para $n = 0, 1, \ldots, N$, son los polinomios de Kravchuk $\{K_n^p(x, N+1)\}$, con parámetro p dado por la relación

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

De este modo, el resultado anterior permite dotar de ortogonalidad Δ–Sobolev a los polinomios de Kravchuk, puesto que en el producto Δ–Sobolev (7.5.5), el término correspondiente a la suma infinita se anula para todo polinomio de grado menor o igual que N.

7.5.2 El operador $\mathcal{F}^{(N+1)}$

En este caso particular, es posible encontrar una expresión compacta para el operador $\mathcal{F}^{(N+1)}$ definido en (7.4.3).

Recordemos que cuando $K = N + 1$ y $\gamma = -N$, se tiene

$$\rho(x) = \mu^x, \quad \Phi(x; N+1) = \mu^{N+1}(x-N)_{N+1}.$$

De esta forma, si usamos los lemas 7.5.4 y 7.5.5, la expresión (7.4.3) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(N+1)} &= \frac{\mu^{N+1}(x-N)_{N+1}}{\mu^x} \sum_{j=0}^{N+1} (-\nabla)^j \left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{N+1-j} \mu^x \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j} \Delta^j = \\
&= \frac{\mu^{N+1}(x-N)_{N+1}}{\mu^x} \sum_{j=0}^{N+1} (-1)^j \left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{N+1-j} \nabla^j \left(\mu^x \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j} \Delta^j\right) = \\
&= \frac{\mu^{N+1}(x-N)_{N+1}}{\mu^x} \sum_{j=0}^{N+1} (-1)^j \left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{N+1-j} \Delta^j \left(\mu^{x-j} \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1-j} \nabla^j\right) \\
&= \frac{\mu^{N+1}(x-N)_{N+1}}{\mu^x} \sum_{j=0}^{N+1} \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^j \left(I + \frac{\mu}{1-\mu}\nabla\right)^{N+1-j} \mu^x \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1} \nabla^j = \\
&= \frac{\mu^{N+1}(x-N)_{N+1}}{\mu^x} \sum_{j=0}^{N+1} \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^j \sum_{i=0}^{N+1-j} \binom{N+1-j}{i} \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^i \\
&\quad \nabla^i \left(\mu^x \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1} \nabla^j\right) = \\
&= \frac{\mu^{N+1}(x-N)_{N+1}}{\mu^x} \sum_{j=0}^{N+1} \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^j \sum_{i=0}^{N+1-j} \binom{N+1-j}{i} (-1)^i \mu^x \left(I + \frac{1}{\mu-1}\nabla\right)^i \\
&\quad \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1} \nabla^j = \\
&= \mu^{N+1}(x-N)_{N+1} \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^j \left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{N+1-j} \nabla^{N+1-j}\nabla^j =
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{N+1}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{N+1-j}(1-\mu)^j\right)(x-N)_{N+1}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1}\nabla^{N+1}.$$

Por lo tanto, el operador en diferencias $\mathcal{F}^{(N+1)}$ se expresa como

$$\mathcal{F}^{(N+1)} = m(\mu,N)(x-N)_{N+1}\left(I+\frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1}\nabla^{N+1}, \tag{7.5.6}$$

donde

$$m(\mu,N) = (1-\mu)^{N+1}\sum_{i=0}^{N+1}\left(\frac{\mu}{(\mu-1)^2}\right)^i.$$

Nota. El operador $\mathcal{F}^{(N+1)}$ es un operador que se anula para cada polinomio de grado menor o igual que N.

Teniendo en cuenta la relación (7.4.5), se verifica que el operador $\mathcal{F}^{(N+1)}$ conserva el grado de los polinomios, esto es,

$$\mathcal{F}^{(N+1)}x^n = F(n,N+1)x^n + \ldots, \quad n \geq N+1, \tag{7.5.7}$$

donde $F(n,N+1)$ denota el coeficiente líder del polinomio $\mathcal{F}^{(N+1)}x^n$, cuya expresión es

$$F(n,N+1) = m(\mu,N)\frac{n!}{(n-N-1)!}.$$

A partir del teorema 7.4.4, el operador $\mathcal{F}^{(N+1)}$ es un operador simétrico con respecto al producto escalar definido en (7.5.5), además, de la proposición 7.4.3, podemos obtener una representación del producto escalar Δ-Sobolev en términos del producto escalar asociado a la función peso μ^x.

Como consecuencia de la relación (7.5.7) y del carácter simétrico del operador $\mathcal{F}^{(N+1)}$, los polinomios generalizados de Meixner $\{M_n^{(-N,\mu)}\}_{n\geq N+1}$, son funciones propias del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(N+1)}$, tal y como mostramos en el siguiente resultado.

Proposición 7.5.9 *Dado el número entero $N \geq 0$, entonces, para cada valor de $n \geq N+1$, se verifica*

$$\mathcal{F}^{(N+1)}M_n^{(-N,\mu)}(x) = m(\mu,N)\frac{n!}{(n-N-1)!}M_n^{(-N,\mu)}(x). \tag{7.5.8}$$

Demostración:

Basta tener en cuenta la relación (7.4.8) en el caso $K = N+1$ junto con el teorema 7.4.4 e identificar los coeficientes líderes. □

El siguiente resultado nos proporciona una serie de relaciones entre los polinomios de Meixner generalizados y los polinomios clásicos de Meixner, a partir de la proposición 7.4.3.

Proposición 7.5.10 *Se verifica*

$$\text{i)}\quad (x-N)_{N+1}M_n^{(1,\mu)}(x) = M_{n+N+1}^{(-N,\mu)}(x) + \sum_{i=n}^{n+N} \alpha_{n,i} M_i^{(-N,\mu)}(x), \quad n \geq 0, \tag{7.5.9}$$

ii) *Para* $n \geq N+1$, *se tiene*

$$\mathcal{F}^{(N+1)} M_n^{(-N,\mu)}(x) = m(\mu, N)\frac{n!}{(n-N-1)!} M_n^{(1,\mu)}(x) + \sum_{i=n-N-1}^{n-1} \beta_{n,i} M_i^{(1,\mu)}(x). \tag{7.5.10}$$

La ortogonalidad Δ–Sobolev de los polinomios de Meixner permite obtener determinadas propiedades de dichos polinomios. En concreto, usando la expresión (7.5.6) del operador en diferencias $\mathcal{F}^{(N+1)}$, podemos recuperar las propiedades (7.5.1) y (7.5.3), como mostramos a continuación.

Proposición 7.5.11 *Dado* $n \geq N+1$, *entonces se verifican*

$$\text{i)}\quad M_n^{(-N,\mu)}(x) = (x-N)_{N+1} M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1).$$

$$\text{ii)}\quad \left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1} \nabla^{N+1} M_n^{(-N,\mu)}(x) = \frac{n!}{(n-N-1)!} M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1).$$

Demostración:
i) Escribimos el polinomio $(x-N)_{N+1}M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1)$ como combinación lineal de los polinomios de Meixner $\{M_i^{(-N,\mu)}\}_{i\geq 0}$:

$$(x-N)_{N+1} M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} M_i^{(-N,\mu)}(x-N-1).$$

Si usamos la proposición 7.4.3 y la expresión del operador $\mathcal{F}^{(N+1)}$, los coeficientes $a_{n,i}$ son

$$a_{n,i} = \frac{\left((x-N)_{N+1}M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1), M_i^{(-N,\mu)}(x-N-1)\right)_{\Delta}^{(N+1,-N)}}{\left(M_i^{(-N,\mu)}(x-N-1), M_i^{(-N,\mu)}(x-N-1)\right)_{\Delta}^{(N+1,-N)}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\mu^{N+1}} \sum_{x=N+1}^{+\infty} M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1)\mathcal{F}^{(N+1)} M_i^{(-N,\mu)}(x-N-1)\mu^x}{\tilde{k}_i} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\mu^{N+1}} m(\mu, N) \sum_{x=N+1}^{+\infty} M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1)(x-N)_{N+1}}{\tilde{k}_i}$$

$$\frac{\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1} \nabla^{N+1} M_i^{(-N,\mu)}(x-N-1)\mu^{x-N-1}}{\tilde{k}_i},$$

de donde teniendo en cuenta la ortogonalidad del polinomio de Meixner $M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1)$ con respecto a $\frac{(x-N)_{N+1}\mu^{x-N-1}}{(N+1)!}$, llegamos a que, para $0 \leq i < n$, entonces $a_{n,i} = 0$.

ii) Multiplicando i) por $m(\mu, N)\frac{n!}{(n-N-1)!}$ y, usando la relación (7.5.8) junto con la expresión (7.5.6), deducimos que

$$\begin{aligned}
m(\mu, N)\frac{n!}{(n-N-1)!}(x-N)_{N+1} M_{n-N-1}^{(N+2,\mu)}(x-N-1) &= \\
= \; m(\mu, N)\frac{n!}{(n-N-1)!} M_n^{(-N,\mu)}(x) &= \mathcal{F}^{(N+1)} M_n^{(-N,\mu)}(x) = \\
= \; m(\mu, N)(x-N)_{N+1}\left(I + \frac{\mu}{\mu-1}\Delta\right)^{N+1} & \nabla^{N+1} M_n^{(-N,\mu)}(x).
\end{aligned}$$

Por último, simplificando el factor $m(\mu, N)(x-N)_{N+1}$, concluimos el resultado. □

Bibliografía

[1] Abramowitz, M., Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ. New York, 1972.

[2] Alfaro, M., López, G., Rezola, M.L., *Some properties of zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials.* J. Comp. Appl. Math. 69 (1996), 171-179.

[3] Alfaro, M., Marcellán, F., Meijer, H.G., Rezola, M.L., *Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products.* J. Math. Anal. Appl. 184(2) (1994), 360-381.

[4] Alfaro, M., Marcellán, F., Rezola, M.L., *Estimates for Jacobi-Sobolev type Orthogonal Polynomials.* Applicable Analysis 67(1997), 157-174.

[5] Alfaro, M., Marcellán, F., Rezola, M.L., Ronveaux, A., *On orthogonal polynomials of Sobolev type: Algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. 23(3) (1992), 737-757.

[6] Alfaro, M., Marcellán, F., Rezola, M.L., Ronveaux, A., *Asymptotic properties of orthogonal polynomials on Sobolev Spaces: The non-diagonal case*, J. Approx. Theory 83(1995), 266-287..

[7] Alfaro, M., Rezola, M. L., Pérez, T. E., Piñar, M. A., *Sobolev orthogonal polynomials: the discrete-continuous case*, (enviado).

[8] Althammer, P., *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation.* Doctoral Dissertation. Berlin, 1961.

[9] Althammer, P., *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math. 211 (1962), 192-204.

[10] Álvarez-Nodarse, R., *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*, (enviado).

[11] Álvarez de Morales, M., *Una generalización de los polinomios ortogonales clásicos a espacios de Sobolev con peso*, Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1994.

[12] Álvarez de Morales, M., Pérez, T. E., Piñar, M. A., Ronveaux, A., *Orthogonal Polynomials associated to a non diagonal Sobolev inner product with polynomial coefficients*, en

Bibliografía

[1] Abramowitz, M., Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ. New York, 1972.

[2] Alfaro, M., López, G., Rezola, M.L., *Some properties of zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials.* J. Comp. Appl. Math. 69 (1996), 171-179.

[3] Alfaro, M., Marcellán, F., Meijer, H.G., Rezola, M.L., *Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products.* J. Math. Anal. Appl. 184(2) (1994), 360-381.

[4] Alfaro, M., Marcellán, F., Rezola, M.L., *Estimates for Jacobi-Sobolev type Orthogonal Polynomials.* Applicable Analysis 67(1997), 157-174.

[5] Alfaro, M., Marcellán, F., Rezola, M.L., Ronveaux, A., *On orthogonal polynomials of Sobolev type: Algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. 23(3) (1992), 737-757.

[6] Alfaro, M., Marcellán, F., Rezola, M.L., Ronveaux, A., *Asymptotic properties of orthogonal polynomials on Sobolev Spaces: The non-diagonal case*, J. Approx. Theory 83(1995), 266-287..

[7] Alfaro, M., Rezola, M. L., Pérez, T. E., Piñar, M. A., *Sobolev orthogonal polynomials: the discrete–continuous case*, (enviado).

[8] Althammer, P., *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation.* Doctoral Dissertation. Berlin, 1961.

[9] Althammer, P., *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math. 211 (1962), 192-204.

[10] Álvarez-Nodarse, R., *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*, (enviado).

[11] Álvarez de Morales, M., *Una generalización de los polinomios ortogonales clásicos a espacios de Sobolev con peso*, Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1994.

[12] Álvarez de Morales, M., Pérez, T. E., Piñar, M. A., Ronveaux, A., *Orthogonal Polynomials associated to a non diagonal Sobolev inner product with polynomial coefficients*, en

Orthogonal Functions, Moment Theory and Continued Fractions: Theory and Applications, William B. Jones and A. Sri Ranga Eds., Marcel Dekker, New York, 16 (1997), 343-358.

[13] Álvarez de Morales, M., Pérez, T. E., Piñar, M. A., *Sobolev Orthogonality for the Gegenbauer Polynomials* $\{C_n^{(-N+\frac{1}{2})}\}_{n\geq 0}$, J. Comp. Appl. Math., (en prensa).

[14] Aptekarev, A.I., López, G., Marcellán, F., *Orthogonal polynomials with respect to a differential operator. Existence and uniqueness.* J. Diff. Integral Eq., (en prensa).

[15] Area, I., Godoy E., Marcellán F., *Inner Product involving differences: The Meixner–Sobolev polynomials.* J. Difference Eq. and Applications, (en prensa).

[16] Askey, R., Andrews, G. E., *Classical Orthogonal Polynomials*, en Polynômes Orthogonaux et Applications, Bar-le-Duc 1984, C. Brezinski et al. Eds. Lecture Notes in Math. n. 1171, Springer-Verlag, Berlin (1985), 36-62.

[17] Bavinck, H., *A difference operator of infinite order with Sobolev-type Charlier polynomials as eigenfunctions.* TWI Report 94-01. TU Delft. 1994.

[18] Bavinck, H., *On Polynomials orthogonal with respect to an inner product involving differences.* J. Comp. Appl. Math. 57 (1995), 17-27.

[19] Bavinck, H., *On Polynomials orthogonal with respect to an inner product involving differences (The general case).* Applicable Analysis, 59(1-4) (1995), 233-240.

[20] Bavinck, H., Koekoek, J., Koekoek, R., *On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., (en prensa).

[21] Bavinck, H., Meijer, H.G., *Orthogonal Polynomials with Respect to a Symmetric Inner Product Involving Derivatives*, Applicable Analysis 33 (1989), 103-117.

[22] Bavinck, H., Meijer, H.G., *On Orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: Zeros and recurrence relations*, Indag. Math. N.S. 1 (1990), 7-14.

[23] Blankenagel, J., *Anwendungenadjungierter Polynomoperatoren.* Doctoral Dissertation. Koln. 1971.

[24] Bochner, S., *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, Math. Zeit. 29 (1929), 730-736.

[25] Boucher, E., *Polynômes Orthogonaux par Rapport à un Produit Scalaire de Type Sobolev*, Mémoire de Licence, Facultés Universitaires N.D. de la Paix, Namur, 1993.

[26] Branquinho, A., Foulquié Moreno, A., Marcellán, F., *Asymptotic Behavior of Sobolev Type Orthogonal Polynomials on a Rectificable Jordan curve or arc*, (enviado).

[27] Brenner, J., *Über eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen in einer und zwei Variablen.* Doctoral Dissertation. Stuttgart. 1969.

[28] Brenner, J., *Über eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen*, en Proc. Conference on the Constructive Theory of Functions, Budapest 1969, G. Alexits and S. B. Stechkin Eds., Akadémiai Kiadó, Budapest (1972), 77-83.

[29] Bruin, M.G. de, *A tool for locating zeros of orthogonal polynomials in Sobolev inner product spaces.* J. Comp. Appl. Math. 49(1-2-3) (1993), 27-35.

[30] Bruin, M.G. de, Meijer, H.G., *Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete Sobolev space.* Annals of Numerical Mathematics 2 (1995), 233-246.

[31] Bruinsma, K.J., Bruin, M.G. de, Meijer, H.G., *Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following from coherent pairs.* TWI Report 95-65. TU Delft. 1995.

[32] Buhmann, M.D., Iserles, A.,*On orthogonal polynomials transformed by the QR algorithm.* J. Comp. Appl. Math. 43 (1992) 117-134.

[33] Cachafeiro, A., Marcellán, F., *Quadratures in Sobolev spaces*, en Proceedings 3rd. Symposium in Orthogonal Polynomials and Applications. Universidad Politécnica de Madrid (1989), 61-70.

[34] Cachafeiro, A., Marcellán, F., *The characterization of the quasi-typical extension of an inner product.* J. Approx. Theory 62(2) (1990), 235-242.

[35] Cachafeiro, A., Marcellán, F., *Orthogonal polynomials of Sobolev type on the unit circle.* J. Approx. Theory 78 (1994), 127-146.

[36] Canuto, C., Quarteroni, A., *Propriétés d'approximation dans les espaces de Sobolev de systèmes de polynomes orthogonaux.* Comptes Rendues Academie Sciences Paris Ser. A-B 290 (1980), 925-928.

[37] Canuto, C., Quarteroni, A., *Approximation Results for Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces.* Math. Comp. 38 (1982), 67-86.

[38] Chihara, T.S., An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.

[39] Cohen, E.A., *Trigonometric approximation in the Sobolev spaces* $W^{r,2}[-1,1]$, SIAM J. Math. Anal. 2(4) (1971), 529-535.

[40] Cohen, E.A., *Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in the Sobolev space* $W^{1,2}[-1,1]$, SIAM J. Math. Anal. 6 (1975), 105-116.

[41] Danese, A.E., *Present status and current trends in the theory of orthogonal polynomials and special functions.* Rendiconti Seminario Matematico Universita Politecnica Torino 35 (1976-77), 5-20.

[42] Dini, J., *Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn*, Thèse Doctorat. Univ. Pierre et Marie Curie, Paris. 1988.

[43] Dini, J., Maroni, P., *The product of a linear form by a rational function: Application to Laguerre-Hahn forms*, en Orthogonal Polynomials and their Applications, Laredo 1987, J. Vinuesa Ed., Lecture Notes in Pure and Applied Math., 117. Marcel Dekker. New York (1989), 131-138.

[44] Draux, A., El Hami, C., *Hermite-sobolev and closely connected orthogonal polynomials.* J. Comp. Appl. Math. 81 (1997), 165-179.

[45] Durán, A.J., *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation.* J. Approx. Th. 74 (1993), 83-109.

[46] Durán, A.J., Van Assche, W., *Orthogonal Matrix Polynomials and Higher Order Recurrence Relations.* Lin. Alg. Appl. 219 (1995), 261-280.

[47] Evans, W.D., Littlejohn, L.L., Marcellán, F., Markett, C., Ronveaux, A., *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials.* SIAM J. Math. Anal. 26(2) (1995), 446-467.

[48] Everitt, W.N., Iserles, A., Littlejohn, L.L.,*Characterization of orthogonal polynomials simultaneously with L^2 and Sobolev inner products* J. Comp. Appl. Math. 48(1-2) (1993), 228-229.

[49] Everitt, W.N., Kwon, K.H., Littlejohn, L.L.,*Spectral theory of the Laguerre Polynomials when $-\alpha \in N$*, (enviado).

[50] Everitt, W.N., Littlejohn, L.L., *Differential operators and the Legendre type polynomials.* J. Diff. Integral Eq. 1 (1988), 97-116.

[51] Everitt, W.N., Littlejohn, L.L., *The density of polynomials in a weighted Sobolev spaces*, Rendiconti di Matematica (Roma) Serie VII 10 (1990), 835-852.

[52] Everitt, W.N., Littlejohn, L.L., *Orthogonal Polynomials and Spectral Theory, a survey*, en Orthogonal Polynomials and their applications, C. Brezinski et al. Eds. IMACS Annals on Computational and Applied Mathematics Vol 9 J.C. Baltzer, Basel, (1991), 21-55.

[53] Everitt, W.N., Littlejohn, L.L., Wellman, R., *On the completeness of orthogonal polynomials in left-definite Sobolev spaces*, J. Comp. Appl. Math., 49(1-2-3) (1990), 69-90.

[54] Everitt, W.N., Littlejohn, L.L., Williams, S.C., *Orthogonal Polynomials in weighted Sobolev spaces*, en Orthogonal Polynomials and their Applications, Laredo 1987, J. Vinuesa Ed., Lecture Notes in Pure and Applied Math., 117. Marcel Dekker. New York (1989), 53-72.

[55] Everitt, W.N., Littlejohn, L.L., Williams, S.C., *The Left-Definite Legendre Type Boundary Value problem.* Const. Approx. 7 (1991), 485-500.

[56] Everitt, W.N., Littlejohn, L.L., Williams, S.C., *Orthogonal Polynomials and Approximation in Sobolev Spaces.* J. Comp. Appl. Math. 48(1-2) (1993), 69-90.

[57] Foulquié Moreno, A., *Comportamiento asintótico de polinomios ortogonales tipo Sobolev.* Tesis Doctoral. Universidad Carlos III de Madrid. 1997.

[58] Foulquié Moreno, A., *A note on the Fourier Coefficients of Classic Orthogonal Polynomial expansion in Sobolev Spaces*, en Complex Methods in Approximation Theory, A. Martínez et al. Eds (1997), 63–68.

[59] Foulquié Moreno, A., Marcellán, F., *Strong Asymptotics on the support of the measure of orthogonality for Polynomials Orthogonal with respect to a Discrete Sobolev Inner Product*, Methods and Applications of Analysis 4(1) (1997), 53-66.

[60] Foulquié Moreno, A., Marcellán, F., Osilenker, B. P., *Estimates for Polynomials orthogonal with respect to some Gegenbauer–Sobolev inner product*, (enviado).

[61] Foulquié Moreno, A., Marcellán, F., Pan, K., *Asymptotic behavior of Sobolev type orthogonal polynomials on the unit circle*, (enviado).

[62] Foulquié Moreno, A., Marcellán, F., Peherstorfer, F., Steinbauer, R., *Strong Asymptotics on the support of the measure of orthogonality for Polynomials Orthogonal with respect to a Discrete Sobolev Inner Product on the unit circle*, Rendiconti Circolo Matematico Palermo, (en prensa).

[63] Freud, G., Orthogonal Polynomials, Pergamon Press, New York, 1971.

[64] García, A. G., Marcellán, F., Salto, L., *A distributional study of discrete classical orthogonal polynomials.* J. Comp. Appl. Math. 57 (1995), 147-162.

[65] Gautschi, W., *Orthogonal Polynomials, Applications and Computation.* Acta Numerica 1996.

[66] Gautschi, W., *On the Computation of Special Sobolev-Type Orthogonal Polynomials*, Ann. Numer. Math 4 (1997), 329-342.

[67] Gautschi, W., Kuijlaars, A.B.J., *Zeros and critical points of sobolev orthogonal polynomials.* J. Approx. Theory 91(1) (1997), 117-137.

[68] Gautschi, W., Zhang, M., *Computing Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces.* Numerische Mathematik 71(2) (1995), 159-184.

[69] Gröbner, W., *Orthogonale Polynomsysteme, die gleichzeitig mit $f(x)$ auch deren Ableitung $f'(x)$ aproximieren*, en Funktionalanalysis, Approximations-theorie, Numerische Mathematik, ISNM 7, Birkhäuser, Basel. (1967), 24-32.

[70] Grosswald, E., Bessel Polynomials. Lecture Notes in Math. 698. Springer–Verlag, 1978.

[71] Hahn, W., *Uber die Jacobischen Polynome und Zwei Verwandte Poiynomklassen*, Math. Zeit. 39 (1935), 634-638.

[72] Han, S.S., Kwon, K.H., Littlejohn, L.L., *Zeros of orthogonal polynomials in certain discrete Sobolev spaces.* J. Comp. Appl. Math. 63 (1995).

[73] Hendriksen, E., Van Rossum, H., *Semiclassical Orthogonal Polynomials*, en Polynômes Orthogonaux et Applications, Bar-le-Duc 1984, C. Brezinski et al. Eds. Lecture Notes in Math. n. 1171, Springer-Verlag, Berlin (1985), 354-361.

[74] Isaacson, E., Keller, H. B., *Analysis of Numerical Methods*, Ed. John Wiley, 1966.

[75] Iserles, A., Koch, P. E., Nørsett, S. P., Sanz-Serna, J.M., *Orthogonality and Approximation in a Sobolev Space*, en Algorithms for Approximations, J. C. Mason and M. G. Cox Editors. Chapman and Hall. London, (1990),117-124.

[76] Iserles, A., Koch, P. E., Nørsett, S. P., Sanz-Serna, J.M., *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev Inner Products*, J. Approx. Th. 65 (1991), 151-175.

[77] Iserles, A., Littlejohn, L.L., *Polinomials orthogonal in a Sobolev Space*, en Linear and Complex Analysis Problem Book, Part II, V.P. Havin and N.K. Nikolski Editors. Lecture Notes in Mathematics 1574. Springer Verlag, Berlin, (1994), 190-193.

[78] Jung, I. H., Kwon, K. H., *Differential Equations for Sobolev Orthogonal Polynomials* CAM Research Report 95-5. KAIST.1995.

[79] Jung, I. H., Kwon, K. H., Lee, D.W., Littlejohn, L.L., *Sobolev Orthogonal Polynomials and Spectral Differential Equations.* Transactions American Mathematical Society 347(9) (1995), 3629-3643.

[80] Jung, I.H., Kwon, K.H., Lee, D.W., Littlejohn, L.L., *Differentiai Equations and Sobolev Orthogonality.* J. Com. Appl. Math. 65 (1995), 173-180.

[81] Kim, D.H., Kwon, K.H., Marcellán, F., Park, S.B., *On Sobolev-type orthogonal Polynomials.* Rendiconti di Mathematica e delle sue Applicazioni, (en prensa).

[82] Koekoek, R., *A generalization of Moak's q-Laguerre polynomials.* Canadian Journal of Mathematics 42(2) (1990), 280-303.

[83] Koekoek, R., *Generalizations of Laguerre polynomials*, J. Math. Anal. Appl. 153 (1990), 576-590.

[84] Koekoek, R., *Generalizations of the classical Laguerre polynomials and some q-analogues.* Doctoral Dissertation. Delft, 1990.

[85] Koekoek, R., *On q-analogues of generalizations of the Laguerre polynomials*, en Orthogonal Polynomials and their applications, C. Brezinski et al. Editors. IMACS Annals on Computational and Applied Mathematics Vol 9 J.C. Baltzer, Basel, (1991), 315-320.

[86] Koekoek, R., *The search for differential equations for orthogonal polynomials by using computers.* TWI Report 91-55.TU Delft.1991

[87] Koekoek, R., *Generalizations of a q-Analogue of Laguerre polynomials.* J. Approx. Theory 69 (1992), 55-83.

[88] Koekoek, R., *The search for differential equations for certain sets of orthogonal polynomials.* J. Comp. Appl. Math. 49(1-2-3) (1993), 111-119.

[89] Koekoek, R., Meijer, H.G., *A generalization of Laguerre polynomials*, SIAM J. Math. Anal. 24(3) (1993), 768-783.

[90] Koornwinder, T.H., *Orthogonal Polynomials with weight function* $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, Canad. Math. Bull. Vol. 27(2) (1984), 205-214.

[91] Krall, A.M., *Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations*, Proc. of Roy. Soc. of Edinburgh, 87 A (1981), 271-288.

[92] Krall, A.M., *Spectral Analysis for the Generalized Hermite Polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc. 344(1) (1994), 155-172.

[93] Krall, A.M., *Left Definite Theory for Second Order Differential Operators with Mixed Boundary Conditions.* J. Diff. Eq. 118 (1995), 153-165.

[94] Krall, H.L., *On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation*, The Pennsylvania State College Studies 6, State College (1940).

[95] Krall, A.M., Everitt, W.N., Littlejohn, L.L., Onynago-Otieno, V.P., *The Laguerre- type Operator in a Left Definite Hilbert Space.* J. Math. Anal. Appl. 192 (1995), 460-468.

[96] Kwon, K. H., Littlejohn, L. L., *The Orthogonality of the Laguerre Polynomials* $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ *for positive integer* k, Annals of Numerical Mathematics 2 (1995), 289-304.

[97] Kwon, K. H., Littlejohn, L. L., *Sobolev Orthogonal polynomials and second-order differential equations.* Rocky Mt. J. Math, (por aparecer).

[98] Kwon, K.H., Littlejohn, L.L., *Classification of Sobolev orthogonal polynomials satisfying second-order differential equations II*, Bull. Korean Math. Soc. 33(1) (1996), 135-170.

[99] Kwon, K. H., Littlejohn, L. L., Lee, J. K., Yoo, B. H., *Characterization of classical type orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 120(2) (1994), 485-493.

[100] Kwon, K.H., Littlejohn, L.L., Yoo, B.H., *Characterizations of Orthogonal Polynomials satisfying differential equations.* SIAM J. Math. Anal. 25(3) (1994), 976-990.

[101] Lesky, P., *Zur Konstruktion von Orthogonalpolynomen*, en Proc. Conference on the Constructive Theory of Functions, Budapest 1969, G. Alexits and S. B. Stechkin Eds. Akadémiai Kiadó, Budapest 1972, 289-298.

[102] Lewis, D.C., *Polynomial least square approximations*, Amer. J. Math. 69 (1947), 273-278.

[103] Li, X., Marcellán, F., *On polynomials Orthogonal with respect to a Sobolev inner product on the Unit Circle.* Pacific Journal of Mathematics 175(1) (1996), 127-146.

[104] López, G., Marcellán, F., Van Assche, W., *Sobolev-type Orthogonal Polynomials, How to recover the Sobolev part of the inner product*, (enviado).

[105] Magnus, A., *On Freud's equations for exponential weights*, J. Approx. Th. 46 (1986), 65-99.

[106] Magnus, A., *Complexity of Sobolev Orthogonal Polynomials.* J. Comp. Appl. Math. 48(1-2) (1993), 225-227.

[107] Marcellán, F., Alfaro, M., Rezola, M.L., *Orthogonal Polynomials on Sobolev Spaces: Old and New Directions*, J. Comp. Appl. Math. 48(1-2) (1993), 113-131.

[108] Marcellán, F., Branquinho, A., Petronilho, J., *Classical Orthogonal Polynomials. A Functional Approach* , 1991. Acta Applicandae Mathematicae 33(1-2) (1993).

[109] Marcellán, F., López, G., Van Assche, W., *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product.* Const. Approx. 11 (1995), 107-137.

[110] Marcellán, F., Martínez–Finkelshtein, A., Moreno–Balcázar, J.J., *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for symmetrically coherent pairs of measures with compact support*, J. Comp. Appl. Math. 81 (1997), 217-227.

[111] Marcellán, F., Martínez-Finkelshtein, A., Moreno-Balcázar, J.J., *Asymptotics of sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of measures II.* J. Comp. Appl. Math. 81 (1997), 217-227.

[112] Marcellán, F., Meijer, H.G., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *An asymptotic result for Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials* J. Comp. Appl. Math. 87 (1997), 87-94.

[113] Marcellán, F., Moral, L., *Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, Asymptotic properties*, (enviado).

[114] Marcellán, F., Osilenker, B., *Estimates for polynomials orthogonal with respect to some Legendre-Sobolev type inner product.* Mat. Zametkii 62(6) (1997), 871-880.

[115] Marcellán, F., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *On zeros of Sobolev-Type orthogonal polynomials*, Rendiconti di Matematica (Roma) Serie VII 12 (1992), 455-473.

[116] Marcellán, F., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *Regular Sobolev-Type orthogonal polynomials. The Bessel case*, Rocky Mountain J. Math. 25(4) (1995), 1431-1457.

[117] Marcellán, F., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *Gegenbauer-Sobolev Orthogonal Polynomials*, en Non linear Numerical Methods and Rational Approximation II, A. Cuyt Ed., Kluwer Ac. Pub. Proc., Antwerpen, (1994), 71-82.

[118] Marcellán, F., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *Orthogonal Polynomials on weighted Sobolev spaces: The semiclassical case*, Annals of Numerical Mathematics 2 (1995), 93-122.

[119] Marcellán, F., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comp. Appl. Math. 71 (1996), 245-265.

[120] Marcellán, F., Pérez, T.E., Piñar, M.A., Ronveaux A., *General Sobolev Orthogonal Polynomials*, J. Math. Ann. Appl. 200 (1996), 614-634.

[121] Marcellán, F., Petronilho, J.C., *Orthogonal Polynomials and Coherent pairs, the classical case*. Indag. Math. N.S. 6(3) (1995), 287-307

[122] Marcellán, F., Petronilho, J.C., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *What is beyond Coherent Pairs of Orthogonal Polynomials?*. J. Comp. Appl. Math. 65 (1995), 267-277

[123] Marcellán, F., Ronveaux, A., *On a class of polynomials orthogonal with respect to a Sobolev inner product*, Indag. Math. N. S. 1 (1990), 451-464.

[124] Marcellán, F., Van Assche, W., *Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product*, J. Approx. Th. 72 (1993), 193-209.

[125] Maroni, P., *Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, 301, I, (6) (1985), 209-272.

[126] Maroni, P., *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques*, en Orthogonal Polynomials and Applications, Segovia 1986, M. Alfaro et al. Eds., Lecture Notes in Math. 1329, Springer-Verlag, (1988), 179-290.

[127] Maroni, P., *Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi- classiques*, Ann. Mat. Pur. Appl. 149(4) (1987), 165-184.

[128] Maroni, P., *Une Théorie Algebrique des Polynômês Orthogonaux. Applications aux Polynômes Orthogonaux Semiclassiques*, en Orthogonal Polynomials and their applications. C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux Eds. IMACS Annals on Comp. and Appl. Math. Vol. 9. J. C. Baltzer AG Publ. Basel. (1991) 98-130.

[129] Martínez-Finkelshtein, A., Moreno-Balcázar, J.J., Pijeira-Cabrera, H., *Strong asymptotics for Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comp. Appl. Math. 81 (1997), 211-216.

[130] Martínez-Finkelshtein, A., Moreno-Balcázar, J.J., *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for a Jacobi weight*, Methods and Applications of Analysis 4(4) (1997), 430-437.

[131] Martínez Finkelshtein, A., Moreno-Balcázar, J.J., Pérez, T.E., Piñar, M.A. *Asymptotics of Sobolev Orthogonal Polynomials for Coherent Pairs of Measures with Compact Support* J. Approx. Theory 92(2), (1998), 280-293.

[132] Meijer, H.G., *Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space.* Journal of Math. Annal. and Appl. 172(2) (1993), 520-532.

[133] Meijer, H.G., *Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space.* J. Approx. Theory 73 (1993), 193-209.

[134] Meijer, H.G., *On real and complex zeros of orthogonal polynomials in a discrete Sobolev space.* J. Comp. Appl. Math. 49(1-2-3) (1993).

[135] Meijer, H.G., *Coherent pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials.* Indag. Mathem., N.S., 4(2) (1993), 163-176.

[136] Meijer, H.G., *Sobolev orthogonal Polynomials with a small number of real zeros.* J. Approx. Theory 77 (1994), 305-313.

[137] Meijer, H.G., *A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space, I. The non-discrete case.* Niew Archief voor Wiskunde 14 (1996), 93-113.

[138] Meijer, H.G., *Determination of all coherent pairs of functionals*, J. Approx. Theory, 89(3) (1997), 321-343.

[139] Meijer, H.G., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of Laguerre type*, TWI Report 97. TU Delft. 1997.

[140] Moreno-Balcázar, J.J., *Propiedades analíticas de los Polinomios Ortogonales de Sobolev continuos.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 1997.

[141] Nevai, P.G., *Orthogonal Polynomials.* Memoirs Amer. Math. Soc. 213, Providence, RI, 1979.

[142] Nikiforov, A.F., Uvarov, V.B., *Special Functions of Mathematical Physics.* Birkhäuser Verlag, Basel. 1988.

[143] Nikiforov, A.F., Suslov, S.K., Uvarov, V.B., *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable. Springer Series in Computacional Physics.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[144] Pérez, T.E., *Polinomios Ortogonales respecto a productos de Sobolev, El caso continuo.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 1994.

[145] Pérez, T.E., Piñar, M.A., *Global Properties of zeros for Sobolev-Type Orthogonal Polynomials*, J. Comp. Appl. Math. 4 (1993), 225-232.

[146] Pérez, T.E., Piñar, M.A., *On Sobolev Orthogonality for the Generalized Laguerre Polynomials*, J. Approx. Theory 86 (1996), 278-285.

[147] Pérez, T. E., Piñar, M. A., *Sobolev Orthogonality and properties of the generalized Laguerre Polynomials*, en Orthogonal Functions, Moment Theory and Continued Fractions: Theory and Applications, William B. Jones and A. Sri Ranga Eds., Marcel Dekker, New York, (1997), 375-385.

[148] Petronilho, J., *Polinómios Ortogonais e Funcionais Semiclássicas*, Tesis de Mestrado, Universidade de Coimbra, 1993.

[149] Piñar, M.A., *Polinomios Ortogonales de tipo Sobolev. Aplicaciones* Tesis Doctoral. Granada. 1992.

[150] Piñar, M.A., Pérez, T.E., *On higher order Padé-type approximants with some prescribed coefficients in the numerator*, Numerical Algorithms 3 (1992), 345-352.

[151] Quarteroni, A., *Some results of Bernstein and Jackson type for polynomial approximation in L^p spaces.* Japan J. Appl. Math. 1 (1984), 173-181.

[152] Ronveaux, A., *Recent trends in the theory of orthogonal polynomials, Physical insights.* Physicalia 12(1) (1990), 23-37.

[153] Ronveaux, A., *Sobolev Inner Product and Orthogonal Polynomials of Sobolev type.* Numerical Algorithms 3 (1992), 393-400.

[154] Ronveaux, A., Salto, L., *Discrete orthogonal polynomials polynomial modification of a classical functional*, (enviado).

[155] Schäfke, F.W., *Zu den Orthogonalpolynomen von Althammer*, J. Reine Angew. Math. 252 (1972), 195-199.

[156] Schäfke, F.W., Wolf, G., *Einefache verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynomen*, J. Reine Angew. Math. 262/263 (1973), 339-355.

[157] Stoer, J., Burlirsch, R., *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[158] Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975 (4th edition).

[159] Tricomi, F., *Vorlesungen uber Orthogonalreihen*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 76, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1955.

[160] Zhang, M., *Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces, Computational Methods.* Doctoral Dissertation. Purdue University. 1993.

[161] Zhang, M., *Sensitivity Analysis for Computing Orthogonal Polynomials of Sobolev Type*, en Approximation And Computation, R.V.M. Zahar Editor. ISNM Vol.119. Birkhauser Verlag, Basel, (1994), 563-576.