Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

Tesis Doctoral

DESARROLLO DE PENSAMIENTO RELACIONAL Y COMPRENSIÓN DEL SIGNO IGUAL POR ALUMNOS DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Marta Molina González

GRANADA, 2006

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Marta Molina González
D.L.: Gr. 2766 - 2006
ISBN: 84-338-4214-5

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

DESARROLLO DE PENSAMIENTO RELACIONAL Y COMPRENSIÓN DEL SIGNO IGUAL POR ALUMNOS DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis Doctoral que presenta

MARTA MOLINA GONZÁLEZ

dirigida por los doctores

ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ   ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ

GRANADA, 2006

El trabajo que se presenta en esta memoria surge por dos motivos principales. Uno de ellos es el desarrollo de la formación investigadora de su autora, en el campo de la Educación Matemática y, el otro, cumplir con el requisito de la elaboración de una Tesis Doctoral, para la obtención del grado de doctor dentro del programa de doctorado "Didáctica de la Matemática" impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Adicionalmente se opta a la mención de «Doctor europeus», por lo cual parte de este informe (las conclusiones y un resumen de la tesis) aparece escrita en inglés en uno de los anexos.

Este estudio ha sido realizado en el seno del Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM0193) y dentro de dos proyectos del plan nacional de I+D+I, financiados por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y cofinanciados con fondos FEDER, con referencias BSO2002-03035 y SEJ2006-09056, respectivamente.

Su autora ha sido becaria del Programa Nacional de Formación del Profesorado Universitario (referencia AP2002-2483) desde el 1 de Enero de 2003 al 31 de Diciembre de 2006 y, durante el curso académico 2003-2004, también becaria del Programa de intercambio de la Universidad de California y la Universidad de Granada "UC Education Abroad Program Scholarship", cursando el segundo año de los estudios de doctorado en la Universidad de California-Davis.

La autora ha realizado una estancia de tres meses, desde el 1 de Agosto al 31 de Octubre de 2006, en The Open University (Milton Keynes, Inglaterra), con el profesor Dr. John Mason, para complementar su formación investigadora y cumplir uno de los requisitos para la obtención de la mención «Doctor europeus».

A mis padres,

a Irene,

y a Jose

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, de una manera u otra, han contribuido a que este trabajo de investigación sea una realidad.

A mi directora, Encarnación Castro Martínez, por permitirme trabajar a su lado y aprender de su conocimiento y experiencia, no sólo sobre la labor investigadora sino también sobre otros muchos ámbitos de la actividad profesional de la universidad. Por cederme generosamente un espacio de trabajo en su despacho, darme todas las facilidades para realizar esta tesis y animarme siempre a desarrollar mi formación investigadora.

A mi codirector, Enrique Castro Martínez, por su colaboración y disposición, desde el primer momento, para solicitar bajo su tutela una beca de Formación de Profesorado Universitario. Por completar mi formación investigadora facilitándome la participación en proyectos de investigación y por sus valiosas aportaciones y comentarios a mi trabajo.

A cada uno de los miembros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que me han acogido durante estos cuatro años y me han permitido aprender de su experiencia. Les agradezco enormemente su apoyo, su disponibilidad para ayudarme, sus comentarios a este trabajo y su cariño.

A los miembros del Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" por las puntuales criticas, siempre constructivas, realizadas a este trabajo de investigación a lo largo de su desarrollo, y por su apoyo.

A Jose Luís Molina Castillo, por darme todas las facilidades para acceder a su colegio y trabajar con sus alumnos. Por su completa disponibilidad e interés en ayudarme en la realización de este trabajo. Y a cada uno de sus 26 alumnos que me acogieron en su aula y me permitieron trabajar con ellos, por compartir conmigo sus valiosos pensamientos sobre las actividades matemáticas que les planteamos.

A John Mason, por permitirte realizar una estancia junto a él en la Open University. Por hacerme pensar y aprender cada segundo que estuve a su lado y, especialmente, por darme herramientas para profundizar en variados aspectos del análisis de los datos. Y a los demás miembros del centro de Educación Matemática de la Open University, en especial a Alan Graham, Sue Johnston-Wilder, Helen Drury y Shafia Abdul-Rahman, por su acogida como un miembro más del equipo, su ayuda y las interesantes discusiones que compartimos.

A Rebecca Ambrose, por iniciarme en la labor investigadora durante mi estancia en la Universidad de Davis-California, con una maestría y forma de trabajo admirable. Por su constante interés, apoyo y valoración, y su continua disposición para comentar aspectos de esta investigación.

A José Gutiérrez Pérez, por aportarme variadas perspectivas a considerar, sobre el análisis de los datos, desde su amplia visión de los métodos de investigación y su interés en la enseñanza de las matemáticas. A Dave Hewitt, Janet Aintley, Ian Jones y Kirsty Wilson por su interés en conocer esta investigación y compartir su visión sobre mi trabajo. A Luis Radford y Teresa Rojano por dedicar parte de su tiempo en España a conocer y comentar mi trabajo de investigación.

Por facilitarme puntualmente su ayuda, cuando fue necesario, gracias a Jose Luís González Marí, Evelyn Cauzinille-Marmeche, Jere Confrey, Seth Chaiklin, Tomás Carpenter, Andrew Disessa y Julie Koehler.

A mis padres y a Irene, por su continuo apoyo a lo largo de estos cuatro intensos años, y siempre. Por su cariño y su ayuda que han sido imprescindibles para el desarrollo y culminación de este trabajo.

A Jose por todo su apoyo y ánimo, por su paciencia a lo largo de la realización de este trabajo y de todo lo que ha supuesto, y por hacerme feliz.

Indice

BLOQUE II. MARCO METODOLÓGICO

BLOQUE III. ANÁLISIS DE LOS DATOS, RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Presentación

La investigación que aquí se recoge pretende indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje y tratar de analizar qué ocurre y cómo ocurre. En dicho proceso, la enseñanza consiste en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas[1] basadas en relaciones aritméticas básicas, mediante una metodología de trabajo en el aula centrada en la discusión de las respuestas y estrategias de los alumnos[2] y la potenciación del uso de multiplicidad de estrategias para resolver las igualdades y sentencias consideradas, especialmente estrategias que hacen uso de relaciones y propiedades aritméticas.

Al utilizar la expresión "trabajo con igualdades y sentencias numéricas" nos estamos refiriendo, de forma abreviada, al tipo de actividades consideradas en este estudio, consistentes en la resolución de igualdades numéricas abiertas y sentencias numéricas verdaderas y falsas, ambas basadas en propiedades aritméticas, a la discusión de dichas respuestas y del modo en que son obtenidas por los alumnos, y a la construcción de sentencias verdaderas y falsas por parte de los alumnos.

Se persigue conocer el modo en que los alumnos se enfrentan a este tipo de tareas para analizar la comprensión que evidencian, el tipo de estrategias y modos de pensamiento que utilizan, el conocimiento que ponen en juego, las dificultades que manifiestan y el aprendizaje que se produce. Se trata de una investigación de diseño y, por lo tanto, su finalidad última es producir conocimiento que ayude a guiar la

[1] En las actividades trabajadas con los alumnos en el aula sólo se incluyen números naturales y las operaciones suma y resta.

[2] A lo largo de esta memoria vamos a utilizar el término alumnos (o niños), en masculino, para referir de forma general al colectivo de estudiantes y, de este modo, contribuir a la fluidez de la lectura del documento. No obstante, en el Capítulo 8 se precisa el número de alumnos de cada sexo que participa en este estudio y, ocasionalmente, al referir a alumnos concretos, se especifica su sexo utilizándose el término alumna o alumno.

práctica educativa en el aula y a identificar prácticas de enseñanza-aprendizaje eficaces, en este caso, en línea con la propuesta Early-Algebra (ver Capítulo 2).

En particular, la investigación persigue ilustrar parte del potencial de la propuesta Early-Algebra, al llevarse a cabo una intervención de enseñanza que promueve la algebrización de la aritmética.

Más concretamente, el problema de investigación que se aborda en este trabajo es *el estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que los alumnos ponen de manifiesto, en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas.*

Con este objetivo, este trabajo de tesis extiende el trabajo de investigación realizado durante el periodo de investigación tutelada (Molina, 2005). En dicho estudio se analizó la comprensión del signo igual de un grupo de alumnos de entre 8 y 9 años, que no habían recibido formación específica previa al respecto, y el desarrollo de dicha comprensión a lo largo de cinco intervenciones en el aula. Dichas intervenciones estaban centradas en la resolución y discusión de igualdades numéricas abiertas y sentencias numéricas verdaderas y falsas, basadas en propiedades aritméticas básicas. También se prestó atención, aunque en menor medida, al estudio de la emergencia y el uso de pensamiento relacional en dicho contexto.

Dicho trabajo muestra, en particular, la capacidad de alumnos de entre 8 y 9 años de desarrollar comprensión[3] del signo igual como expresión de una equivalencia numérica, partiendo de una comprensión operacional de este signo, y describe las dificultades manifestadas por los alumnos y las etapas que sigue su comprensión, a lo largo de dicho proceso de evolución, así como su capacidad de utilizar pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas (ver resumen en el Capítulo 5).

En el estudio que aquí se presenta se sigue profundizando en esta línea de investigación, prestando mayor atención, en este caso, al estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional, y trabajando de nuevo con alumnos de entre 8 y 9 años

[3] En el anexo A se detallan las acepciones de los términos comprensión y significado que se utilizan en este trabajo.

(tercero de Educación Primaria) en la resolución de igualdades y sentencias numéricas. Este objetivo se ve favorecido por la comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica que manifiestan inicialmente la mayor parte de los alumnos con los que trabajamos en el aula. Estos alumnos habían recibido formación previa sobre la comprensión del signo igual, siendo la comprensión de los símbolos matemáticos un aspecto destacado en la enseñanza del maestro del aula.

Pensamiento relacional

En nuestro estudio observamos que los alumnos de tercero de Educación Primaria tienen capacidad para utilizar pensamiento relacional en dicho contexto. En este segundo trabajo decidimos profundizar en el estudio de esta capacidad y en el modo en que los alumnos hacen uso de este tipo de pensamiento en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas básicas. Previamente profundizamos, de forma teórica, en la definición y caracterización de este tipo de pensamiento y en su relación con otros constructos como el sentido numérico, el sentido operacional, el pensamiento cuantitativo flexible, el pensamiento cuasivariable y las meta-estrategias procedimentales.

Tratamos de caracterizar diferentes usos del pensamiento relacional, por los alumnos, en la resolución de igualdades y sentencias numéricas, aportando información detallada para facilitar la descripción operativa, identificación y caracterización de este tipo de pensamiento y completar su definición teórica.

Existen pocos estudios que hayan analizado las características de este tipo de pensamiento y su uso, por parte de los alumnos, en el contexto de la aritmética. El pensamiento relacional, como tal, ha recibido poca atención por parte de la investigación en Educación Matemática, lo cual lo identifica como un aspecto novedoso y de interés para la investigación. También es destacable como un constructo que puede ayudar a articular ideas existentes dentro de la propuesta Early-Algebra.

En la enseñanza de la aritmética suele enfatizarse el aprendizaje de las propiedades matemáticas, particularmente la propiedad conmutativa y asociativa y, sin embargo, el desarrollo de estrategias de pensamiento no recibe tanta atención (Thornton, 1978).

Desde nuestro punto de vista, así como el de otros investigadores (Carpenter, Franke y Levi, 2003, 2005; Koehler, 2004), el pensamiento relacional puede ayudar a desarrollar un aprendizaje semántico y estructural de la aritmética, lo que, como señala Booth (1989), es uno de los requisitos para el desarrollo de habilidad para comprender y manipular las convenciones notacionales del álgebra. El pensamiento relacional tiene el potencial de favorecer y facilitar la algebrización de la aritmética, al centrar la atención en la estructura que subyace a ésta y favorecer el desarrollo y uso de sentido numérico y de sentido operacional (ver Capítulo 3).

Centrar la atención en el desarrollo y uso de este tipo de pensamiento ayuda, además, a disminuir el enfoque computacional frecuente en la enseñanza de la aritmética, el cual es considerado una de las principales causas de algunas de las dificultades que experimentan los alumnos en el aprendizaje del álgebra y, en especial, de su falta de conciencia de la estructura de las operaciones aritméticas y de sus propiedades (Liebenberg, Sasman y Olivier, 1999).

Comprensión del signo igual

Al haber elegido como contexto la resolución de igualdades y sentencias numéricas por su potencial para promover el uso de pensamiento relacional, destacado por Carpenter y colaboradores (Carpenter et al., 2003, 2005), la comprensión del signo igual se manifiesta como un elemento destacado a considerar. Además, esta comprensión es señalada por variedad de autores, tales como Davis, (1964), Herscovics y Kieran (1980), MacGregor (1996), Radford (2000), Carpenter et al. (2003) y Freiman y Lee (2004), como un elemento importante en la transición de la aritmética al álgebra, el cual presenta importantes dificultades a los alumnos (ver Capítulo 5).

Nuestro interés, a este respecto, se centra en identificar los significados del signo igual que manifiestan los alumnos, analizar el modo en que los utilizan y examinar la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos a lo largo del trabajo con igualdades y sentencias numéricas. Se analizan determinados aspectos locales de la comprensión del signo igual que manifiestan los sujetos, los cuales son puestos en evidencia por las actividades consideradas en las intervenciones realizadas en el aula. En este contexto también se presta atención a las dificultades que manifiestan los alumnos.

Simbolismo aritmético

A diferencia de otros estudios, en esta investigación no vinculamos el trabajo con el simbolismo aritmético a contextos concretos que sirvan para dar significado a los símbolos, sino que trabajamos en un contexto puramente simbólico. Esta elección la hemos hecho de acuerdo con Resnick (1992), quien observa que la enseñanza de las matemáticas no puede estar siempre centrada en las relaciones entre cantidades físicas, ya que las matemáticas también se refieren a cantidades abstractas como números, operadores, funciones,… El pensamiento matemático está enteramente ligado a un lenguaje formal especializado que impone restricciones en el razonamiento matemático y le confiere de gran poder.

El razonamiento matemático depende de formalismos, siendo muy limitado el pensamiento matemático que se puede hacer sin ellos, no sólo en el álgebra, donde se hace más evidente, también en la aritmética (Resnick, 1992). Dada la importancia de la comprensión del simbolismo en el aprendizaje de las matemáticas, y en especial de la aritmética y el álgebra y de su estructura común, destacamos la necesidad de favorecer el desarrollo de dicha comprensión.

Metodología

La metodología de investigación utilizada coincide con la empleada en nuestro estudio previo. Ambos estudios son experimentos de enseñanza trasformativos y dirigidos por una conjetura; un tipo de estudios que se enmarca dentro del paradigma de la investigación de diseño. En esta memoria profundizamos en las características de este paradigma metodológico, el cual está actualmente en desarrollo, detallando su origen y evolución, sus principales características, puntos fuertes, limitaciones, y algunos de los criterios que permiten evaluar su calidad.

Estructura del trabajo de investigación

Con la intención de facilitar la comprensión del proceso de investigación realizado, dedicamos este apartado a describir la estructura del trabajo, el papel en la globalidad del mismo de cada uno de los elementos considerados y las interrelaciones entre estos. La Figura 0-1 presenta, de forma general, los elementos o partes de la investigación realizada, distinguiendo entre una parte teórica y otra empírica.

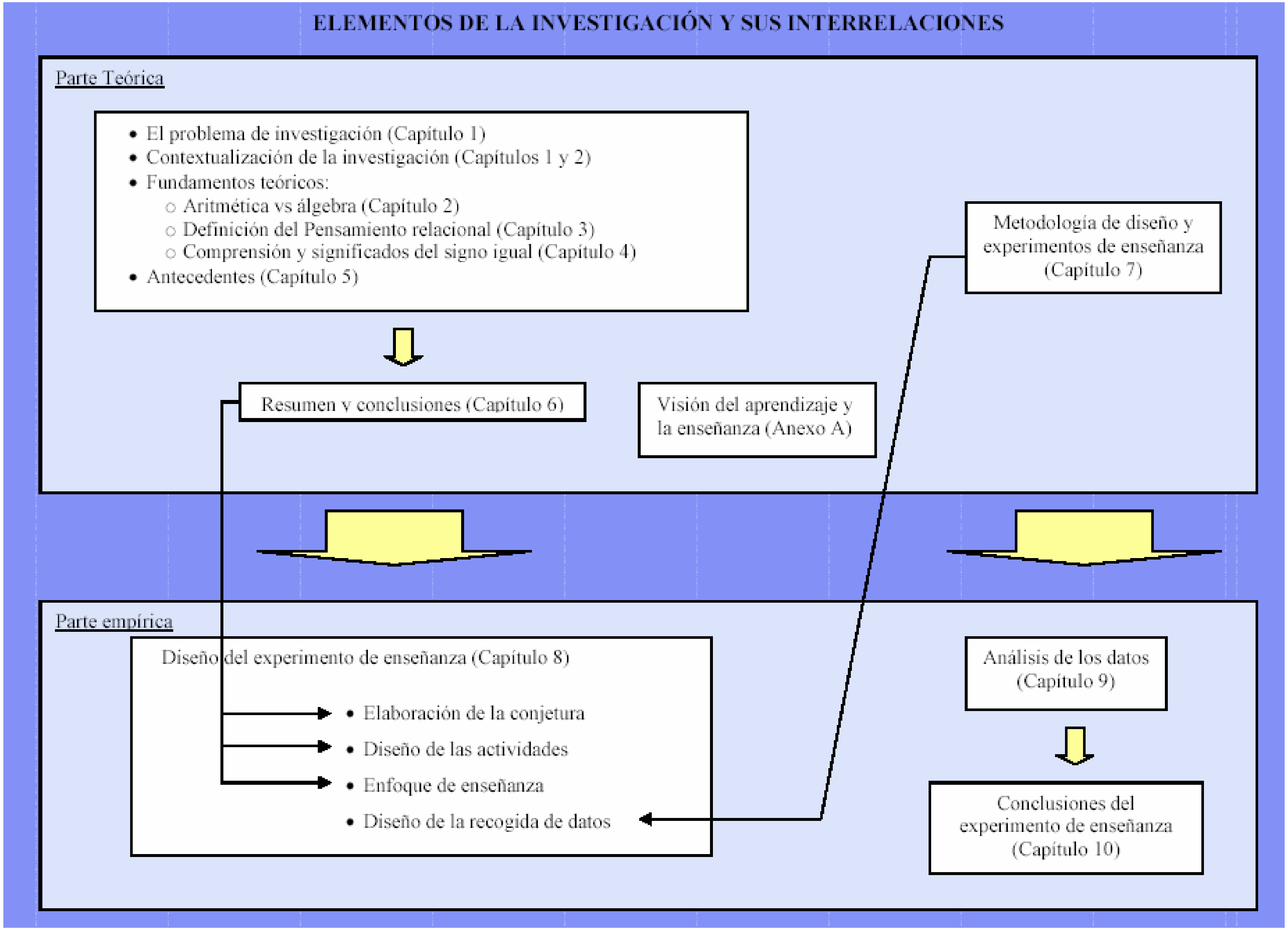


Figura 0-1: Estructura general del trabajo y principales relaciones entre los elementos considerados

Dentro de la parte teórica destaca el planteamiento del problema de investigación considerado (Capítulo 1) el cual se contextualiza, de forma general, en la propuesta Early-Algebra (Capítulo 2) y, más concretamente, en relación con un estudio realizado por Carpenter y colaboradores sobre la integración de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra (Capítulo 1).

Los fundamentos teóricos de este trabajo se articulan en torno a la aritmética y el álgebra (Capítulo 2), la definición del pensamiento relacional (Capítulo 3) y la comprensión y los significados del signo igual (Capítulo 4); considerándose, adicionalmente, estudios empíricos previos que han sido realizados en relación a estos tópicos (Capítulo 5). Todos estos elementos, junto con nuestra visión de la enseñanza y el aprendizaje (Anexo A), constituyen el marco teórico del trabajo de investigación realizado (resumido en el Capítulo 6).

Dentro de la parte teórica de este trabajo, se ha realizado un estudio detallado de las características, origen y fundamentación de la metodología de diseño (Capítulo 7). Al ubicarse el diseño de investigación elegido dentro de este paradigma, se han consultado diversidad de documentos teóricos que ayudan a delimitar los aspectos a tener en cuenta tanto en la parte teórica como empírica, y especialmente en la articulación de ambas partes.

La parte empírica incluye el diseño del experimento de enseñanza (Capítulo 8), que se elabora tomando en consideración las reflexiones y conclusiones extraídas del estudio teórico— las cuales determinan, en particular, la conjetura que guía esta investigación así como el enfoque de enseñanza elegido y las actividades realizadas en el aula—, y la información disponible sobre la metodología y del diseño metodológico utilizado. Esta información condiciona, especialmente, el diseño de la recogida de datos.

Esta parte también engloba el análisis de los datos recogidos, la discusión de los resultados dentro del marco teórico delimitado en la parte teórica y su contraste con los estudios empíricos previos consultados (Capítulo 9). El modo de abordar este análisis viene determinado por nuestro conocimiento de la metodología utilizada así como por el tipo de datos recogidos y los objetivos de esta investigación.

El cierre de este trabajo lo constituyen las conclusiones generales extraídas a partir de todo el proceso de investigación (Capítulo 10), las cuales dan respuesta a los objetivos de investigación planteados y permiten, adicionalmente, delimitar algunas cuestiones abiertas y perspectivas futuras de esta investigación.

Estructura de esta memoria

El informe de esta investigación se presenta, a continuación, estructurado en diez capítulos, seguido del listado de las referencias bibliográficas utilizadas y de los anexos. Estos capítulos se estructuran en tres bloques diferenciados. En líneas generales, el primer bloque (Capítulos 1 a 6) recoge el problema de investigación y el marco teórico; el segundo (Capítulos 7 y 8), el marco metodológico; y el tercero, (Capítulos 9 y 10) el análisis de los datos y las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1. Se detalla el origen y motivación de este trabajo, se plantea el problema de investigación, indicándose los objetivos de investigación concretos abordados, y se justifica la pertinencia de este estudio.
Capítulo 2. Se describen las principales características de la propuesta Early–Algebra, en la que se contextualiza esta investigación, y se abordan diversos aspectos de interés, relativos a la vinculación de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra, destacándose algunas de sus conexiones y diferencias.
Capítulo 3. Se define y contextualiza uno de los términos clave del trabajo, el *pensamiento relacional*, a partir de la consulta de documentos de Lengua, Filosofía, Psicología y Didáctica de la Matemática que abordan las nociones de pensamiento y relaciones. Restringiendo este tipo de pensamiento al contexto de la aritmética y el álgebra escolar, se consideran otros constructos en conexión los cuales comparten diversos aspectos con el pensamiento relacional: pensamiento cuantitativo flexible, cálculo mental, estrategias de cálculo flexible, sentido numérico, sentido operacional, sentido estructural, pensamiento cuasivariable y meta-estrategias conceptuales.

Capítulo 4. Se profundiza en los significados de los términos igualdad, identidad y equivalencia, en la evolución histórica del signo igual y en los distintos significados que se le atribuyen o se le han reconocido a este signo en el contexto de la aritmética y el álgebra escolar. Este análisis nos permite profundizar en la comprensión del signo igual y de las expresiones que lo contienen. También se establece la distinción entre igualdades y sentencias y se describen los diferentes tipos, de ambas, considerados en este estudio.

Capítulo 5. Se resumen estudios previos relacionados con la resolución de igualdades numéricas abiertas, la comprensión del signo igual, el pensamiento relacional, las estrategias de pensamiento y cálculo flexible y los conocimientos de los alumnos, principalmente de Educación Primaria, sobre la estructura de la aritmética. Todos estos trabajos permiten ilustrar el estado de la cuestión en relación con el problema de investigación considerado.

Capítulo 6. Se recoge una reflexión sobre la información presentada en los capítulos previos y se presentan algunas conclusiones. Este capítulo sirve para resumir y establecer los principales componentes del marco teórico desde el que se aborda la investigación.

Capítulo 7. Se describe el paradigma metodológico en el que se localiza la investigación realizada, detallando su origen y evolución, sus principales características, puntos fuertes y limitaciones, y algunos de los criterios que permiten evaluar su calidad. Posteriormente se detallan las características del diseño de investigación concreto utilizado.

Capítulo 8. Se detallan los aspectos metodológicos particulares del estudio: sus características generales, la conjetura que guía la investigación, los sujetos participantes, las condiciones del estudio, la recogida de datos realizada, y el diseño de las intervenciones en el aula, entre otros.

Capítulo 9. Se presenta el análisis de los datos recogidos a lo largo del proceso de investigación y los resultados que de él se desprenden, los cuales se discuten y contrastan con los resultados de los estudios previos consultados.

Capítulo 10. Se resume el modo en que se ha dado respuesta a los objetivos planteados. Se señalan algunas de las limitaciones de este trabajo y sus principales aportaciones, y se destacan las principales cuestiones abiertas o perspectivas que se identifican.

BLOQUE I:

Problema de investigación y Marco teórico

CAPÍTULO 1

El problema de investigación: Contextualización y objetivos de investigación

En los últimos años se ha investigado con intensidad la enseñanza y aprendizaje del álgebra, planteándose diferentes propuestas para la mejora de su enseñanza, entre las que destacamos la propuesta Early–Algebra. Esta propuesta, la cual describimos con mayor detalle en el Capítulo 2, consiste en un cambio curricular basado en la introducción del álgebra desde los primeros cursos escolares, de forma integrada con la actividad matemática relativa a las diferentes sub-áreas de las matemáticas, propia de esta etapa. Se basa en la argumentación, de numerosos investigadores (Bastable y Schifter, en prensa; Blanton y Kaput, 2005; Butto y Rojano, 2004; Carpenter et al., 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput, 1995, 1998, 2000; NCTM, 2000; Warren, 2004), sobre la importancia de fomentar el desarrollo de pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la educación matemática escolar, con el objetivo de promover un aprendizaje con comprensión y facilitar el posterior estudio formal del álgebra.

Destacamos, en particular, un trabajo dirigido por Carpenter (Carpenter y Franke, 2001; Carpenter et al., 2003, 2005; Falkner, Levi y Carpenter, 1999), en el que se aborda la integración de la aritmética y el álgebra, centrándose en el desarrollo de diversos aspectos del pensamiento algebraico, entre los que se encuentran: la comprensión del signo igual, la observación y generalización de relaciones numéricas y la elaboración y representación simbólica de conjeturas. Todo ello en un contexto de igualdades numéricas y simbólicas.

Este estudio forma parte de un programa de desarrollo profesional, conocido como CGI (Cognitive Guided Instruction), basado en investigación, que se centra en el pensamiento matemático de los alumnos, no sólo para comprenderlo sino también para que sirva de contexto a los docentes en el desarrollo de su conocimiento matemático, permitiéndoles reflexionar y revisar su práctica de enseñanza. Una idea fundamental de este programa es que los docentes tienen que tomar decisiones instruccionales que estén basadas en el pensamiento de cada niño.

Los autores siguen dos líneas de investigación: una sobre cómo los niños dotan de significado a las operaciones aritméticas básicas y, otra, sobre cómo elaboran este conocimiento cuando generan, utilizan, representan y justifican propiedades de estas operaciones aritméticas. Esta segunda línea es la más relacionada con nuestra investigación. Su enfoque combina la construcción de comprensión matemática con el desarrollo de habilidades, trabajando el cálculo, con los alumnos, en el contexto de la búsqueda y generalización de patrones y relaciones matemáticas. En dicho trabajo los autores introducen el término *pensamiento relacional* como un enfoque para el trabajo con números, diferente de la aplicación de un procedimiento de cálculo paso por paso, que ayuda a los docentes a involucrarse en conversaciones con los alumnos que promueven el uso de pensamiento algebraico. Definen el *pensamiento relacional* como *"mirar a expresiones y ecuaciones en su totalidad y apreciar relaciones numéricas entre y dentro de las expresiones y ecuaciones*" (Carpenter et al, 2005, p. 6).

El principal objetivo, para estos autores, es que los alumnos aprendan a pensar relacionalmente, y en segundo lugar, que utilicen *pensamiento relacional* para aprender. Concretamente, se centran en tres aspectos: ver el signo igual como expresión de una relación (una equivalencia numérica), usar relaciones numéricas para simplificar cálculos y aprender nuevos conceptos y procedimientos matemáticos, y hacer explícitas relaciones generales, en particular, las relativas a propiedades de las operaciones aritméticas.

Estos autores aportan fragmentos de discusiones en el aula ilustrativos del modo en que algunos alumnos manifiestan su comprensión del signo igual, usan *pensamiento relacional* en la resolución de las igualdades y sentencias, elaboran y justifican conjeturas e inician su representación simbólica. En particular, hacen manifiesta la capacidad de algunos alumnos de Educación Primaria de utilizar *pensamiento relacional* en el contexto de la resolución de igualdades y sentencias numéricas, y de generalizar relaciones aritméticas a partir de la discusión de sentencias numéricas basadas en dichas relaciones. Sin embargo, no aportan datos de las dificultades encontradas por los alumnos en este proceso, ni de la proporción de alumnos que muestra comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica o de los que ponen de manifiesto cierto uso de *pensamiento relacional*.

1.1 Origen y motivación de este trabajo de investigación

Motivados por las evidencias del potencial de la propuesta Early-Algebra para promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas, y siendo conscientes de que la aritmética comprende gran parte de las matemáticas abordadas durante la Educación Primaria, elegimos seguir la línea de investigación descrita por los trabajos de Carpenter y colaboradores y profundizar en el estudio del desarrollo de pensamiento algebraico en el contexto de la aritmética, trabajando con igualdades y sentencias numéricas.

Dichos trabajos nos condujeron inicialmente a plantearnos algunas cuestiones relativas a dos de los aspectos del pensamiento algebraico, o del álgebra, abordados por estos autores: la comprensión del signo igual y el *pensamiento relacional*. En relación con la comprensión del signo igual nos preguntamos: ¿De qué modo evolucionará la comprensión del signo igual de los alumnos a partir del trabajo con igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas? ¿Tienen capacidad, todos los alumnos de Educación Primaria, para desarrollar comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica, a partir de dicho trabajo? ¿Qué significados del signo igual pondrán de manifiesto los alumnos en este contexto? ¿Adoptarán los alumnos multiplicidad de significados para este símbolo o exigirán unicidad de significado? ¿Qué tipo de dificultades manifestarán los alumnos en el desarrollo de su comprensión del signo igual?

Otras de las cuestiones que nos surgieron se referían al *pensamiento relacional*: ¿Qué caracteriza al *pensamiento relacional*? ¿Puede este tipo de pensamiento tener lugar en contextos no aritméticos o en otros contextos aritméticos diferentes a la resolución de igualdades y sentencias? ¿Poseen todos los alumnos de Educación Primaria capacidad para utilizar este tipo de pensamiento en la resolución de igualdades y sentencias numéricas? ¿Qué dificultades encuentran los alumnos en su uso y desarrollo en este contexto? ¿De qué modo se manifiesta el uso de *pensamiento relacional* en la resolución de las igualdades y sentencias por parte de los alumnos? ¿Qué conocimiento sobre la estructura de la aritmética ponen de manifiesto los alumnos al utilizar *pensamiento relacional* en este contexto? ¿Qué relación existe, en el contexto de la aritmética, entre el pensamiento relacional y el sentido numérico o el sentido operacional? ¿Existen en la literatura otros constructos en conexión o que ayuden a explicar y delimitar en qué consiste este tipo de pensamiento?

El trabajo de Carpenter y colaboradores, así como por estas cuestiones, nos condujeron inicialmente a la realización de un experimento de enseñanza que constituyó el Trabajo de Investigación Tutelada denominado *"Resolución de igualdades por alumnos de tercer grado: Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional"* (Molina, 2005). Este trabajo constituye un estudio piloto con respecto a la investigación que se recoge en esta memoria, en la cual, utilizándose la misma metodología, se sigue profundizando en algunas de dichas cuestiones. A continuación, detallamos los objetivos de investigación concretos que guían esta segunda investigación.

1.2 Objetivos de investigación

Nuestro objetivo general, como se ha comentado previamente, es *el estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que los alumnos ponen de manifiesto, en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas.*

Este objetivo general se particulariza en los siguientes objetivos específicos:

O1. Identificar las estrategias[4] que emplean los alumnos participantes en la resolución de las sentencias numéricas consideradas y analizar, en especial, las que están basadas en cierto uso de *pensamiento relacional*.

O2. Caracterizar el uso de *pensamiento relacional* que evidencian las producciones e intervenciones de dichos alumnos, identificando los elementos en los que los alumnos centran su atención cuando hacen uso de *pensamiento relacional*.

O3. Analizar y evaluar la comprensión del signo igual que muestran los alumnos participantes en el estudio al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numéricas.

O4. Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a la comprensión del signo igual y el uso de *pensamiento relacional* que ponen de manifiesto.

Como parte del desarrollo del marco teórico de esta investigación se persiguen los siguientes objetivos:

O5. Describir y caracterizar el pensamiento relacional en cualquier contexto, y en especial, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas.

O6. Analizar la vinculación del pensamiento relacional, en el contexto de la aritmética, con otros constructos existentes en la literatura de Educación Matemática con los que esté conectado.

Con respecto a la metodología utilizada, al enmarcarse dentro de un paradigma metodológico que está actualmente emergiendo en la investigación educativa, nos planteamos los siguientes objetivos:

O7. Identificar los orígenes, la fundamentación y las principales características de la investigación de diseño y, más concretamente, del tipo de experimento de enseñanza realizado.

O8. Analizar la potencialidad y limitaciones de esta metodología.

[4] Entendemos por estrategia cualquier procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos, de una determinada estructura conceptual (Rico, Castro, Castro, Coriat, Martín, Puig, et al., 1997).

O9. Identificar, a través de la puesta en práctica del diseño de investigación elegido, dificultades que emergen, propias de la metodología utilizada.

1.3 Pertinencia de la investigación

Reconociendo el potencial de la propuesta Early-Algebra, variedad de autores (ver Capítulo 2) señalan, entre otras cuestiones, la necesidad de: a) explorar la puesta en práctica y el potencial de esta propuesta y analizar el desarrollo de pensamiento y razonamiento algebraico por alumnos de Educación Primaria, b) identificar qué contenidos algebraicos pueden y deben ser presentados, promovidos y enfatizados en el aula de Educación Primaria y cómo pueden ser integrados en la enseñanza y aprendizaje de otras sub-áreas de las matemáticas, c) analizar qué herramientas (diagramas, notaciones, gráficos) pueden conducir con éxito, a los alumnos, a desarrollar modos algebraicos de pensar, así como, d) estudiar la implicación de la aplicación de esta propuesta para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores (Lins y Kaput, 2004).

Algunas de estas cuestiones han sido abordadas en la investigación de la enseñanza y aprendizaje del álgebra para el caso de los alumnos de la Educación Secundaria, pero resultan novedosas al ser consideradas en relación a alumnos de niveles inferiores.

Por otra parte, en relación con la transición de la aritmética al álgebra, Booth (1989) señala la necesidad de examinar el reconocimiento y uso de conocimiento sobre estructura de las matemáticas, por parte de los alumnos, y cómo dicho reconocimiento puede evolucionar. Así mismo, insiste en la importancia de idear nuevas actividades y ambientes de enseñanza para ayudar a los alumnos en dicha transición.

Estas observaciones subrayan la pertinencia del trabajo de investigación recogido en esta memoria. Por una parte, nuestro trabajo es de utilidad para mostrar el potencial de la propuesta Early-Algebra, describiendo y analizando un enfoque particular, en el contexto de las igualdades y sentencias numéricas, que ayuda a promover el desarrollo de modos de pensamiento algebraicos. Además, centra la atención en un tipo de pensamiento que, como tal, no ha sido explorado en profundidad en la investigación y que destaca por su potencial para algebrificar la actividad aritmética y para favorecer un aprendizaje semántico de la aritmética.

El análisis de la utilización de este tipo de pensamiento posibilita abordar, en parte, las cuestiones planteadas por Booth (1989) al permitir explorar el conocimiento sobre la estructura de la aritmética, de los alumnos, y el modo en que lo utilizan para resolver igualdades y sentencias, así como el potencial del trabajo con igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas básicas para favorecer el desarrollo de este conocimiento.

La comprensión del signo igual de los alumnos, otro de los elementos a analizar, tiene también un papel destacado en la transición de la aritmética al álgebra, habiendo sido objeto de análisis en diversidad de estudios previos, aunque, a diferencia de nuestro trabajo, en la mayoría de los casos los alumnos en estudio no manifestaron inicialmente comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica. Este trabajo describe los significados de este signo que los alumnos ponen de manifiesto en el contexto de las igualdades y sentencias numéricas, a lo largo de las seis intervenciones en el aula, ayudando a comprender el modo en que desarrollan su comprensión.

La información que se obtiene de esta investigación, recogida en este informe, es de utilidad tanto para investigadores como para docentes, pudiéndose aplicar directamente a la práctica educativa en virtud de la metodología utilizada.

Adicionalmente, la realización de este trabajo resulta de intereses para investigadores interesados en la metodología de diseño. El Capítulo 7 constituye una detallada introducción a este paradigma metodológico. Debido al carácter emergente de esta metodología, la descripción y profundización en sus características y fundamentación así como la exploración de su potencialidad y limitaciones a través de su puesta en práctica en este estudio y de la consulta de documentos teóricos, son de destacado interés para contribuir a su desarrollo y a su divulgación.

CAPÍTULO 2

Aritmética, Álgebra y Early-Algebra

La enseñanza tradicional del álgebra es ampliamente criticada por numerosos investigadores (Booth, 1999; Kaput, 1995, 1998, 2000; Lee, en prensa). La crítica internacional se basa, principalmente, en el gran número de estudiantes que fracasan en esta sub-área y dejan de estudiar matemáticas, la falta de conexión entre el álgebra y las demás sub-áreas de las matemáticas, y la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes.

Ya en 1980 Martin Kindt destacó tres de los grandes problemas de la enseñanza del álgebra: falta de atención a la generalización y razonamiento, un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra, y la falta de claridad en para qué y para quién es de utilidad el álgebra (Van Reeuwijk, en prensa).

La insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales que están involucrados en actividades algebraicas, y la preocupación por hacer el estudio del álgebra accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar una forma más efectiva de enseñar álgebra. En los últimos años se ha investigado con intensidad la enseñanza y aprendizaje del álgebra llegándose a plantear diferentes propuestas para la mejora de la enseñanza de esta materia. Una diferencia fundamental entre estas propuestas radica en dónde se pone el énfasis en el proceso de enseñanza seguido. Según el caso, el enfoque se sitúa, por ejemplo, en la resolución de problemas, en el uso de software específico como apoyo a la enseñanza, o en potenciar y fortalecer las habilidades aritméticas (Freiman y Lee, 2004). Una de las propuestas más ambiciosas es denominada Early–Algebra.

2.1 Early-Algebra

2.1.1 ¿En qué consiste?

Esta propuesta consiste en un cambio curricular: la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con compresión de las matemáticas (Bastable y Schifter, en prensa; Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2000; Kaput, 1995, 1998, 2000). En términos de Kaput (2000), se refiere a la "algebrización[5] del currículo", es decir, la integración del razonamiento o pensamiento algebraico a lo largo de todos los cursos. Este enfoque propone cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas (Blanton y Kaput, 2005).

Según la propuesta Early–Algebra, los docentes de todos los niveles deben promover el pensamiento algebraico con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas. Los docentes han de suscitar la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y crear un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2004, 2005).

Los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son considerados hábitos mentales importantes, que todos los alumnos deben de adquirir, reconociéndose la necesidad para ello de un periodo prolongado de tiempo. Se afirma que estos modos de pensamiento tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética, y que pueden emerger con naturalidad de las matemáticas propias de esta etapa.

Algunos investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 1998) consideran que este cambio curricular tiene el potencial de preparar a los alumnos para las matemáticas que son necesarias para este nuevo siglo, al favorecer el desarrollo conceptual de matemáticas más profundas y complejas, en los alumnos, desde muy temprano.

[5] El término "*algebrizar*" (algebrafy) es introducido por Kaput (2000) y empleado por otros investigadores para referir a la idea base de la propuesta Early-Algebra: la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares.

Según Kaput (1998), esta integración añade coherencia, profundidad y poder a las matemáticas escolares, eliminando una introducción del álgebra tardía, abrupta y "superficial" y abriendo espacio curricular para las matemáticas necesarias en el siglo XXI. Esta reforma puede favorecer el acceso de todos los alumnos a importantes conceptos e ideas matemáticas, ya que el álgebra y la enseñanza superficial de las matemáticas se consideran dos de las principales barreras que dificultan el acceso al aprendizaje de las matemáticas (Kaput, 2000; Schifter, Monk, Russell y Bastable, en prensa).

Esta algebrización es interpretada de dos formas diferentes. Algunos autores consideran que se debe promover el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños. Otros, en cambio, consideran que los cambios en la forma de pensar de los niños son promovidos, de mejor modo, mediante el uso de herramientas, tales como notaciones y diagramas, que les permitan operar en un nivel más elevado de generalidad (Lins y Kaput, 2004).

Siguiendo una u otra perspectiva, una variedad de autores (Bastable y Schifter, en prensa; Blanton y Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Schifter, 1999; Sutherland, en prensa; Warren, 2001, 2003, 2004; entre otros) han explorado, en la última década, la viabilidad de esta propuesta, sus diferentes dimensiones, su interpretación y puesta en práctica por docentes, y las capacidades y modos de pensamiento algebraicos que ponen de manifiesto los alumnos de Educación Primaria, entre otros aspectos. Estos autores plantean cuestiones de mayor y menor especificidad como: ¿Cuál es el alcance de las generalizaciones de los alumnos? ¿Cuándo es apropiado dar importancia al rigor de las explicaciones de los alumnos sobre relaciones observadas? ¿De qué modo y cuándo el contexto promueve o limita el razonamiento algebraico de los alumnos? ¿Qué constituye una justificación en los niveles de Educación Primaria? ¿Las dificultades que ponen de manifiesto los alumnos, en el desarrollo de pensamiento algebraico, son resultado de la práctica educativa o de su desarrollo cognitivo? ¿Qué procesos cognitivos están involucrados en el desarrollo, por los alumnos, de ideas algebraicas?

Early-Algebra y aritmética

Siguiendo la propuesta Early–Algebra, diversas investigaciones se han centrado en el pensamiento algebraico que puede ser promovido en el contexto de la aritmética. Siendo conscientes de que la separación del álgebra y la aritmética acentúa y prolonga las dificultades de los alumnos, numerosos investigadores proponen trabajar con actividades que faciliten la transición del aritmética al álgebra (Carraher et al., 2000, Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Kaput, 2000; Malara, 2003; Subramaniam, 2004; Warren, 2004). Los autores de dichas investigaciones proponen un enfoque estructural que rompa con el énfasis computacional predominante en los primeros cursos escolares, y que favorezca el desarrollo de modos de pensamiento algebraicos. Dicho énfasis, como se ha mencionado anteriormente, es señalado como causa de la falta de conciencia de los alumnos sobre las estructuras que subyacen a las operaciones matemáticas y sus propiedades.

Recomiendan integrar ambas sub-áreas en el currículo tan temprano como sea posible. Desde esta consideración, el trabajo de los alumnos con expresiones numéricas se utiliza para la extracción de patrones y de relaciones funcionales. El objetivo es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, enfoque que conduce a una enseñanza de la aritmética más atractiva y promueve un aprendizaje con comprensión.

Concretamente, desde este contexto, se ha abordado la introducción del concepto de variable previamente a la introducción del simbolismo algebraico (Carpenter et al., 2003; Fujii, 2003; Fujii y Stephens, 2001), el proceso de generalización y la prueba y justificación de conjeturas (Carpenter y Franke, 2001), el estudio de relaciones funcionales (Brizuela y Lara-Roth, 2001), el desarrollo y uso de conocimiento estructural de la aritmética (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005; Warren, 2001), la comprensión del signo igual (Freiman y Lee, 2004; Koehler 2002; Molina, 2005; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998) y el uso de simbolismo algebraico para representar funciones o propiedades (Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2001), entre otras cuestiones.

2.1.2 Origen de la propuesta

Ha sido recientemente cuando la comunidad de educadores matemáticos ha empezado a reconocer que los niños desde muy jóvenes pueden hacer mucho más de lo que se les suponía previamente. En general, hasta principios de los 90, la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra estaba centrada en lo que los alumnos no podían hacer, más que en explorar lo que eran capaces de hacer y los modos de explotar su potencial de desarrollo. La mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, realizadas durante la década de los 80 y 90, estaba dedicada a producir sistemas de etapas de desarrollo o a elaborar catálogos de errores cometidos por los alumnos. Estas investigaciones contribuyeron, en general, a la asunción de que es mejor posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares (Lins y Kaput, 2004).

A principios de los noventa algunas investigaciones comenzaron a mostrar una perspectiva significativamente diferente: (a) al reportar cambios en la concepción de la educación algebraica y el pensamiento algebraico, (b) al sugerir que los alumnos jóvenes pueden hacer más matemáticas de las que se pensaba en un principio, en especial cuando se les provee de experiencias y enseñanza adecuada, y (c) al incorporar las nuevas tecnologías a la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Lins y Kaput, 2004).

Entre los autores que contribuyeron a este cambio de perspectiva destaca Mason (1991, 1996a) cuyos trabajos reflejan una visión compartida por numerosos investigadores de esta época: los alumnos llegan al colegio con capacidades naturales de generalización y habilidades para expresar generalidad, y el desarrollo del razonamiento algebraico es, en gran parte, cuestión de explotar estas capacidades naturales de los alumnos. Mason y colaboradores (Mason, 1991, 1996a; Mason, Graham, Gower y Pimm, 1985) proporcionan una amplia variedad de tareas y principios didácticos que operativizan estas observaciones.

No obstante, en décadas anteriores se habían llevado a cabo algunos estudios (Davydov, 1962; Freudenthal, 1974) que abordan la enseñanza del álgebra en los primeros cursos de la Educación Primaria siguiendo la asunción teórica propia de la Escuela Soviética de que el aprendizaje precede al desarrollo (Lins y Kaput, 2004).

Davis (1985, 1989) y Vergnaud (1988) también argumentaron la necesidad de iniciar, en la Educación Primaria, una enseñanza del álgebra que prepare a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la aritmética al álgebra (Carraher et al., 2006).

Según expresa Davis (1985), en la carta de invitación a la sesión del ICME–5 dedicada al tema del álgebra en la Educación Primaria, investigaciones realizadas en los 70 y 80 mostraron que el álgebra, así como la geometría y aplicaciones de las matemáticas, podía proveer a los alumnos con muchas oportunidades para la resolución de problemas y para el desarrollo de comprensión profunda de las matemáticas, creatividad y originalidad. Al igual que se hace desde la propuesta Early–Algebra, Davis insiste en que este álgebra no se refiere al álgebra formal propia de los últimos cursos de Educación Secundaria sino *"a una pensada exploración de ideas algebraicas"* (p.196).

En la actualidad va en aumento el número de educadores matemáticos e investigadores que consideran que el álgebra debería ser parte del currículo propio de la Educación Primaria (Carraher et al., 2006).

La propuesta actual rompe con estudios previos en los que el álgebra se ha considerado fuera del alcance de las capacidades cognitivas de los alumnos jóvenes. En particular, Filloy y Rojano (1989) y Herscovics y Linchevski (1994) han sugerido la existencia de un corte separador del pensamiento aritmético y el algebraico o de una "ruptura cognitiva" ("*cognitive gap")* entre la aritmética y el álgebra, respectivamente. Estas rupturas se basan en la incapacidad de los alumnos en operar espontáneamente con variables y se apoyan en el paralelismo de las trayectorias de aprendizaje de los alumnos y la evolución histórica del álgebra.

Dificultades observadas en el aprendizaje del álgebra tales como la limitada interpretación del signo igual, los concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como variables, el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema y la no aceptación de la falta de clausura, han sido atribuidas a la inherente abstracción del álgebra y a limitaciones en el desarrollo cognitivo de los alumnos (Brizuela y Schliemann, 2003; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth et al, 2003).

Otros investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Booth, 1999; Brizuela y Schliemann, 2003; Carpenter et al., 2003; Carraher et al, 2006; Fujii, 2003; Kaput, 2000), en cambio, sugieren que las dificultades de los alumnos con el álgebra pueden ser debidas al tipo de enseñanza recibida. Estudios empíricos recientes apoyan esta afirmación, al menos en relación a ciertos contenidos y modos de pensamiento algebraicos, dando muestras de la capacidad de alumnos de Educación Primaria de aprender y comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos. Concretamente se han aportado evidencias de que estos alumnos pueden elaborar y simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas (Carpenter et al., 2003), pensar sobre operaciones aritméticas como funciones en vez de como cálculos con números particulares (Schliemann et al, 2003), trabajar con relaciones funcionales y usar notación algebraica para representarlas (Carraher et al., 2000), usar representaciones algebraicas tales como gráficos, tablas y ecuaciones para resolver problemas (Brizuela y Schliemann, 2003), y representar y analizar problemas involucrando cantidades desconocidas en ambos miembros de una igualdad utilizando, en ocasiones, letras para representar dichas cantidades (Brizuela y Schliemann, 2003), por citar algunos ejemplos.

Estos estudios han analizado la factibilidad y potencialidad de la introducción temprana de algunas ideas algebraicas, mostrando, en particular, que *"cuando la enseñanza está fundamentada en las ideas matemáticas de los alumnos y en promover su curiosidad matemática, los niños tiende a exhibir maneras de pensar algebraicas en el contexto de lecciones de aritmética, geometría o medida"* (Bastable y Schifter, en prensa, p. 2).

El NCTM también ha mostrado apoyo a la propuesta Early–Algebra. En la primera versión de los Estándares del NCTM (1989) se recomendaba la introducción del álgebra como generalización de la aritmética en los dos últimos cursos de Educación Primaria y dos primeros de Educación Secundaria. Posteriormente, en la última edición de los Estándares del NCTM (2000), se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde los primeros años de escolarización:

> *viendo el álgebra como una constante en el currículo desde la educación infantil en adelante, los docentes pueden ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación*

> *para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior* (p. 37).

Promovidos por las recomendaciones de los estándares del NCTM de integrar el pensamiento algebraico en la educación matemática de la Educación Primaria recientemente se han llevado acabo estudios empíricos que exploran este enfoque; la mayoría de ellos en Estados Unidos (Lins y Kaput, 2004).

Estos trabajos, junto con los diversos estudios que han puesto de manifiesto que los alumnos jóvenes "pueden hacer más", han abierto el camino a la propuesta Early-Algebra. Además, el interés por aspectos tales como el uso de la historia para comprender las dificultades de los alumnos en el estudio del álgebra o la consideración de aspectos epistemológicos y lingüísticos del álgebra y la introducción de las nuevas tecnologías, han contribuido a estimular una visión más flexible de la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Lins y Kaput, 2004).

De este modo surge la propuesta de introducción temprana del pensamiento algebraico, la cual está guiada por la asunción de que unas matemáticas elementales "algebrizadas" darán poder a los alumnos, promoviendo un mayor grado de generalidad en su pensamiento y aumentando su capacidad de expresión de generalidad.

2.2 Enfoques de/para el álgebra

La propuesta Early–Algebra va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas (lo que incluye la aritmética generalizada), el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Blanton y Kaput, 2004, 2005; Kaput, 1998, 2000; Schliemann et al, 2003).

Esta visión se muestra paralela a los diferentes enfoques para el álgebra propuestos por la comunidad internacional de investigadores con el objetivo de que los alumnos desarrollen un aprendizaje con comprensión[6]. Dicha propuesta de multidimensionalidad del álgebra deja a un lado el intento de definir "qué es álgebra" ante el convencimiento de la imposibilidad de alcanzar un consenso a este respecto (Molina, 2005; Van Ameron, 2002).

Son de destacar las aportaciones de Bednarz, Kieran y Lee (1996) y Usiskin (1988) sobre concepciones o enfoques para el álgebra. Bednarz y otros distinguen cinco concepciones diferentes: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y el estudio de las funciones.

Usiskin, por su parte, propone una categorización muy similar de las percepciones del álgebra: aritmética generalizada, el estudio de procedimientos para resolver problemas, el estudio de relaciones entre cantidades (incluyendo la modelización y las funciones) y el estudio de estructuras.

Otra visión del álgebra, en la que se reconoce su multiplicidad de dimensiones o componentes, es la del NCTM. Los estándares del 2000 distinguen como componentes del estándar de álgebra la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio.

Por otra parte, Drijvers y Hendrikus (2003) distinguen en la literatura existente, cuatro enfoques del álgebra que entienden como una categorización fenomenológica. El primer enfoque se centra en el álgebra como un medio para resolver problemas; el segundo, en el estudio de las funciones, es decir, de relaciones entre variables. En tercer lugar hacen referencia a un enfoque centrado en la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras. El último enfoque se centra en el

[6] Recogemos aquí la visión amplia del álgebra que caracteriza la propuesta Early–Algebra, sin embargo, queremos señalar que no todos los autores, ni en todo momento, han compartido esta visión. Hasta hace algo más de una década, según Sutherland, Rojano, Bell y Lins (2001), en la investigación relacionada con la enseñanza y aprendizaje del álgebra había una asunción mayormente implícita de que el pensamiento algebraico, y, por tanto, el álgebra, sólo podía tener lugar en la presencia de lenguaje simbólico. Actualmente el uso del simbolismo algebraico sigue considerándose un elemento esencial del álgebra escolar pero dentro de una concepción más amplia de esta sub-área de las matemáticas (Drijvers y Hendrikus, 2003; Sutherland et al., 2001).

lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación.

Estos diferentes enfoques son señalados para abordar la introducción y enseñanza del álgebra escolar desde perspectivas muy diferentes, tales como la resolución de clases específicas de problemas, el estudio de estructuras algebraicas, las reglas para la trasformación y resolución de ecuaciones, la generalización de leyes de los conjuntos numéricos o la introducción del concepto de variable y de función (Bednarz et al., 1996). No obstante, como señalan Drijvers y Hendrikus (2003), en la práctica educativa dichos enfoques no pueden ser separados radicalmente debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas de diferentes enfoques.

Citando a Bell (1988) y Vergnaud (1989), Bednarz et al. insisten en que sólo un equilibrio entre las diferentes componentes del álgebra, y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, puede permitir a los alumnos comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico.

Para finalizar, mencionamos un quinto enfoque al que hacen referencia Bednarz et al. (1996) y Drijvers y Hendrikus (2003), el enfoque histórico, el cual no es considerado como una manera alternativa de introducir o abordar el álgebra sino como una herramienta pedagógica útil para investigadores y educadores. En particular, Drijvers y Hendrikus destacan su utilidad para detectar las dificultades conceptuales de un dominio específico y sugerir una trayectoria de aprendizaje.

2.3 Aritmética y Álgebra

> *Los números, como todos los objetos de los conocimientos humanos se pueden considerar en general y en particular, es decir, bajo la relación de sus leyes y bajo la de sus hechos. Por ejemplo esta proposición: la suma de dos números multiplicada por su diferencia, es igual a la diferencia de sus cuadrados, es una ley de los números, porque se aplica generalmente a todos ellos; mientras que ésta: once multiplicado por cinco es igual a cincuenta y cinco, es un hecho de dos números, porque sólo se aplica a los números 11, 5 y 55.*

> *Esta distinción divide a la ciencia de los números en dos ramos generales, de las cuales el que trata de leyes, es el álgebra, y el que trata de hechos es la Aritmética* (Vallejo, 1841, según cita Gómez, 1995b).

La aritmética es definida como el estudio de los sistemas numéricos junto con sus relaciones mutuas y sus reglas (Gómez, 1988). Por su parte, el álgebra es considerada como el estudio de conjuntos de elementos, cuya naturaleza puede no estar especificada, y de las propiedades formales de sus leyes de composición (Bouvier y George, 2000). El álgebra es, entre otras cosas, una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructura, para establecer conexiones y para formalizar los argumentos matemáticos (Arcavi, 1994; Gómez, 1995b).

Ambas son sub-áreas de las matemáticas que están muy relacionadas, siendo el álgebra considerada, en ocasiones, aunque bajo numerosas criticas, como generalización de la aritmética (Lee, en prensa). En la propuesta Early–Algebra no se hace esta identificación pero sí se reconoce la generalización de la aritmética como un enfoque o componente fundamental del álgebra. En palabras de Drijvers y Hendrikus (2003), existe una relación dual entre ambas sub-áreas: el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética, mientras que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Gómez (1995b) enfatiza esta idea señalando que el álgebra generaliza a la aritmética y la aritmética, por su parte, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis. De hecho la mayoría de los trabajos relacionados con el Early–Algebra se han centrado en la aritmética como acceso clave al álgebra (Warren, 2003).

Hewitt (1998) y Mason, Graham y Johnston–Wilder (2005) abordan la conexión de la aritmética y el álgebra desde una perspectiva diferente. Según estos autores, el álgebra o el pensamiento algebraico subyace a la aritmética: "*la aritmética necesita del pensamiento algebraico*" (Mason et al., 2005, p. 59), "*la aritmética es imposible sin álgebra*" (Hewitt, 1998, p. 19). La razón de estas afirmaciones es que la aritmética no consiste en la memorización de cientos de hechos numéricos sino en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos. El aprendizaje de la aritmética implica que los alumnos internalicen generalidades que se encuentran implícitas, relativas a la estructura de la aritmética y, en particular, del sistema de numeración decimal.

Según Hewitt (1998), la aritmética se centra en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado. De este modo, por ejemplo, ser capaz de contar requiere trabajar algebraicamente ya que es necesario tener una forma, estructurada y organizada, de contar. Hewitt explica que lo que está involucrado en la actividad algebraica es un doble nivel de conciencia, *conciencia* de la *conciencia*[7] que la persona tiene, es decir, la conciencia de la persona de las ideas, pensamiento, imágenes, conceptos,… que le vienen a la mente en relación a la situación que está considerando.

Estos autores coinciden en destacar, en el corazón del álgebra, la expresión de generalidad y, por tanto, la noción de estructura. Dicha generalidad es relativa a relaciones y su expresión conduce a la descripción o captura de cierta estructura. Según estos autores, el álgebra escolar consiste en la expresión de generalidad y el desarrollo de confianza en la manipulación de dichas generalidades.

Tradicionalmente la aritmética se sitúa en el curriculum escolar antes que el álgebra, al considerarse la generalización de la aritmética como un enfoque o componente fundamental del álgebra. Uno de los argumentos que sustenta esta organización es la consideración de la aritmética como más concreta, y, por tanto, más fácil que el álgebra, que es más abstracta. Esta visión es defendida alegando que el álgebra requiere de pensamiento formal mientras que la aritmética no, y que al corresponder el pensamiento formal con una etapa de desarrollo posterior, el álgebra debe abordarse después de la aritmética (Lins y Kaput, 2004).

Dicho orden va acompañado de una separación estricta entre la aritmética, centrada en los hechos numéricos, la fluidez en el cálculo y los problemas verbales de valores concretos, y el álgebra, que se ocupa, entre otras cuestiones, del estudio y simbolización de la generalización de la aritmética, las funciones, y las variables.

[7] Ver el significado dado al término conciencia en el anexo A.

De este modo, el álgebra es tradicionalmente introducida cuando se considera que los alumnos han adquirido las habilidades aritméticas necesarias, sin aprovecharse significativamente la importante conexión existente entre ambas sub-áreas, ni entre el álgebra y otras sub-áreas de las matemáticas. Se pretende que los alumnos adquieran el conocimiento de la estructura de las operaciones a partir de su aprendizaje de la aritmética y se asume que las relaciones matemáticas, que son el verdadero objeto de la representación algebraica, son familiares al alumno por su aprendizaje de la aritmética, dándosele poca atención durante la enseñanza del álgebra. Este enfoque confía en la generación inductiva, en vez del desarrollo directo de estos conceptos. Con base en esta suposición, la introducción del álgebra va enfocada al aspecto sintáctico, asumiéndose que las dificultades de los estudiantes son debidas a la complejidad de su sintaxis (Booth, 1989).

Sin embargo, diversos estudios han mostrado que muchos alumnos poseen una pobre comprensión de las relaciones y las estructuras matemáticas (Booth, 1989; Kieran, 1989; MacGregor, 1996; Schifter, 1999).

> *...una parte principal de las dificultades de los estudiantes es precisamente la falta de comprensión de las relaciones aritméticas. La habilidad de comprender y utilizar el álgebra con el manejo de las convecciones notacionales requiere que los estudiantes adquieran primero una comprensión semántica de la aritmética* (Booth, 1989, p. 58).

Lee y Wheeler (1989) evidencian la transmisión de esta ruptura entre la aritmética y el álgebra observando que los alumnos no reconocen el interés de evaluar expresiones algebraicas para determinar su veracidad o falsedad o de utilizar simbolismo algebraico en situaciones aritméticas. Los alumnos entienden que los números y las letras se comportan de manera diferente y aceptan que una expresión algebraica sea verdadera "en álgebra" pero sea falsa al sustituir ciertos valores aritméticos.

Trabajos más recientes siguen indicando que muchos alumnos experimentan dificultades al pasar de la aritmética al álgebra debido a la falta de una base aritmética adecuada y a la desconexión de sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos (Carpenter y Franke, 2001; Warren, 2001, 2004). Según

Kieran (1989, 1992), la forma tradicional de introducir la aritmética no ha sido eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática, dando lugar a una de las principales dificultades en la introducción del álgebra[8].

El énfasis predominante de lo computacional de los primeros cursos escolares es señalado como causa de la falta de conocimiento que muestran los alumnos sobre la estructura que subyace a las operaciones aritméticas y sus propiedades (Kieran y Chaloud, 1993; Liebenberg et al., 1999). La enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria se centra en gran medida en la forma correcta de realizar procedimientos y obtener la respuesta correcta, dejando a un lado la reflexión sobre las cantidades y las relaciones a las que se refieren las expresiones simbólicas (Resnick, 1992).

Posteriormente, en la enseñanza del álgebra, se produce un cambio drástico en el significado de las operaciones y de la equivalencia, ocasionando a los alumnos numerosas dificultades. Las operaciones pasan a describir relaciones entre elementos (cantidades o variables) en vez de acciones, y el signo igual requiere una interpretación más amplia. No es hasta entonces cuando las relaciones matemáticas son consideradas objeto de estudio.

Según Kieran (1989), el énfasis, en la Educación Primaria, en "encontrar la respuesta" hace que los alumnos consigan desenvolverse con procesos intuitivos e informales en la aritmética, pero cuando abordan el aprendizaje del álgebra se le pide que usen y reconozcan la estructura que han evitado a lo largo de la aritmética.

Concretamente se ha observado que los alumnos no poseen la capacidad de juzgar la equivalencia entre expresiones numéricas sin la realización del cálculo de las operaciones implicadas, como consecuencia de la falta de conocimiento de la estructura de la aritmética (Liebenberg et al., 1999). Otros estudios (Lindvall e Ibarra, 1978; Riley y Greeno, 1978) muestran que los alumnos que pueden resolver problemas verbales a menudo no son capaces de representar las relaciones cuantitativas del problema mediante una igualdad o sentencia. Los alumnos

[8] Las otras dos dificultades en el aprendizaje del álgebra, que señala Kieran (1989), son el significado de las letras y el cambio de convenciones respecto de la aritmética.

raramente escriben igualdades o sentencias para resolver un problema, y cuando se les exige lo resuelven primero y, luego, intentan representar el problema con una igualdad o sentencia numérica (Briars y Larkin, 1984, citado por Kieran 1989).

Kieran y Chalouh (1993) justifican parte de las dificultades que encuentran los alumnos en hacer esta transición, por la falta de oportunidades que tienen para hacer explicitas conexiones entre estas dos sub-áreas matemáticas. Según Kieran (1992), en la transición de la aritmética al álgebra, son cruciales el uso de símbolos para representar cantidades y la conciencia explícita de los métodos matemáticos que están siendo simbolizados mediante el uso de símbolos y números. El conocimiento de estructura matemática es considerado esencial para una exitosa transición (Boulton–Lewis, Cooper, Atweh, Pillay y Wills, 2000).

Conforme los alumnos evolucionan de un pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico, necesitan considerar las relaciones numéricas de una situación, discutirlas explícitamente en lenguaje cotidiano y, finalmente, representarlas mediante lenguaje simbólico (Herscovics y Linchevski, 1994).

Según MacGregor (1996), existen cinco elementos del conocimiento de la aritmética que son esenciales para el aprendizaje del álgebra: la capacidad de concentrarse en un procedimiento en vez de en la respuesta, la comprensión de las relaciones existentes entre las operaciones, el conocimiento de las diversas interpretaciones del signo igual, el conocimiento de las propiedades importantes de los números y la capacidad de trabajar en el sistema de números reales, sin limitarse al uso de números pequeños.

2.4 Aritmética versus Álgebra. Algunas diferencias a destacar

En este apartado nos centramos en algunas diferencias existentes entre la aritmética y el álgebra escolar que hemos considerado de interés en relación con esta investigación: el carácter procedimental u operacional de la aritmética frente al carácter estático–estructural del álgebra, la dualidad proceso/objeto, el obstáculo de la falta de clausura y la idea de estructura; aspectos que permiten describir y profundizar en el carácter algebraico de nuestro trabajo en el aula.

Estas diferencias, junto con otras como las que se recogen en la Tabla 2-1, han sido identificadas en estudios de Kieran (1989, 1992), Linchevski (1995), Van Ameron (2002) y Rojano (2002), entre otros.

Tabla 2-1: Principales diferencias entre la aritmética y el álgebra escolar

Aritmética	**Álgebra**
Objetivo general: encontrar una solución numérica	Objetivo general: generalizar y simbolizar métodos de resolución de problemas
Generalización de situaciones relativas a números concretos	Generalización de relaciones entre números, reducción a la uniformidad
Manipulación de números fijos	Manipulación de variables
Los símbolos son etiquetas de medidas o abreviaciones de un objeto	Los símbolos son variables o incógnitas
Las expresiones simbólicas representan procesos	Las expresiones simbólicas son consideradas como productos y procesos
Las operaciones se refieren a acciones	Las operaciones son objetos autónomos
Las operaciones son consideradas de forma unitaria y binaria	Predomina una visión unitaria de las operaciones al ser asignado el signo operacional al término al que acompaña.
El signo igual anuncia un resultado	El signo igual representa equivalencia
Razonamiento con cantidades conocidas	Razonamiento con cantidades desconocidas
Modo unidireccional de procesar la información	Modo bidireccional de procesar la información
Problemas lineales con una incógnita	Problemas con múltiples incógnitas

2.4.1. La dualidad operacional versus estructural

El aprendizaje de estructuras…es un objetivo superior [al aprendizaje de hechos]. *Los hechos a menudo pasan de moda, caen en el olvido por su falta de coherencia. En una estructura los hechos tienen sentido; si una parte de la estructura es olvidada, la parte restante facilita el recuerdo de la pérdida. Merece la pena estudiar el modo en que trabajan las estructuras por su importancia en el proceso del pensamiento.* Pierre Van Hiele, 1986 (Prólogo)

La aritmética se encuentra tradicionalmente ligada a las operaciones, entendidas como acciones, caracterizándose por el predominio en su enseñanza de un enfoque operacional (o procedimental), es decir, centrado en el cálculo y en la obtención de respuestas numéricas, siendo las expresiones aritméticas interpretadas como procesos. En la aritmética, las operaciones son consideradas principalmente como procesos que actúan sobre una colección de números siguiendo una secuencia de pasos para generar un único número, la respuesta. El álgebra escolar, en cambio, se caracteriza por un alto carácter estructural. Las expresiones algebraicas son consideradas como objetos y la actividad se centra en simbolizar relaciones numéricas generales y estructuras matemáticas y en operar en esas estructuras (Carpenter et al, 2005; Kieran, 1991, 1992; Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989; Van Ameron, 2002).

Dicha diferencia de perspectiva ha sido en ocasiones utilizada para distinguir entre el pensamiento aritmético y el algebraico, afirmándose que en el pensamiento algebraico la atención se centra en los procesos, en los métodos, mientras que el pensamiento aritmético se centra en la obtención de la respuesta (Kieran, 1992; Warren, 2004).

Esta dualidad procede de una dualidad inherente, según Sfard, a todos los conceptos matemáticos, la distinción entre proceso y objeto (Kieran, 1991; Sfard, 1991).

Proceso versus objeto

Sfard (1991) afirma que la mayoría de los conceptos matemáticos pueden ser considerados de dos modos: como objetos y como procesos[9]. Por ejemplo, una fracción es un objeto si la consideramos como un número racional y es un proceso si la consideramos como un cociente. De forma semejante, la simetría puede considerarse como una propiedad estática de una forma geométrica o como un tipo de transformación.

Ver una entidad matemática como un objeto requiere ser capaz de referirse a ella como si fuera una cosa real y ser capaz de manipularla como una unidad global, sin atender a los detalles. En cambio, interpretar una entidad matemática como un proceso implica considerarla como algo potencial, constituido por una secuencia de acciones, en vez de una verdadera entidad (Sfard, 1991). "*Mientras que la*

[9] Según Tall, Thomas, Davis, Gray y Simpson (2000), esta idea de la dualidad proceso/objeto surgió, en los años 50, a partir del trabajo de Piaget. Las ideas de Piaget sobre las acciones y operaciones que se convierten en objeto de pensamiento y asimilación han sido extendidas más allá de las matemáticas elementales.

concepción estructural es estática…, instantánea e integrada, la operacional es dinámica, secuencial y detallada” (Sfard, 1991, p. 4).

Por tanto, al hablar de algo como un proceso, no quiere decir que se esté realizando en el pensamiento sino que es representado cognitivamente como una operación matemática en vez de cómo un objeto; lo que no implica que haya únicamente una forma de llevarlo a cabo (Gray y Tall, 1994).

Según Sfard, la concepción operacional es para la mayoría de la gente el primer paso en la adquisición de una noción matemática, siendo la habilidad de ver un concepto matemático como un objeto y a la vez un proceso, indispensable para alcanzar una comprensión profunda de las matemáticas. Estas dos consideraciones de una misma noción matemática son complementarias.

En las aulas de Educación Primaria y Secundaria, de forma semejante a como ha ocurrido históricamente, los conceptos matemáticos suelen ser introducidos primeramente como procesos, siendo lenta y difícil la transición a su consideración como objetos matemáticos (Kieran, 1992). El modelo de desarrollo conceptual de Sfard (1991) describe cómo se produce esta evolución, distinguiendo tres etapas: interiorización, condensación y reificación. De la primera a la segunda etapa se va produciendo un cambio gradual. En la primera etapa, *interiorización,* el proceso matemático en cuestión es aplicado en objetos matemáticos, de menor nivel, ya conocidos. En la segunda etapa, *condensación*, se produce una reducción de las secuencias de acciones, que componen el proceso, en unidades más manejables. Finalmente, la tercera etapa, *reificación*, se produce cuando el proceso “ha solidificado” y pasa a ser considerado como una estructura estática, es decir, como un objeto matemático, identificándose las distintas representaciones de dicho objeto como una única entidad. En este momento, esta secuencia de tres etapas puede ser iniciada de nuevo, realizándose ahora procesos sobre este “nuevo” objeto matemático.

Por ejemplo, en el caso de una función, en la primera etapa se aprende la idea de variable y cómo evaluar una función. La función es entonces concebida como un procedimiento con datos entrantes y salientes. A lo largo de la segunda etapa se va aprendiendo a manejar una función sin prestar atención a sus valores específicos. La persona es entonces capaz de investigar funciones, representarlas, combinar parejas de funciones, calcular la inversa de una función,… Finalmente, en la tercera etapa, se es capaz de resolver ecuaciones en las que las incógnitas son funciones, considerar propiedades de operaciones realizadas con funciones,…en definitiva, considerar las funciones como objetos manipulables.

Este ciclo, denominado *interiorización* por Piaget y Beth (1980), *reificación* por Sfard (1991), *encapsulación* por Dubinsky (1991), *objetivación* por Dörfler (1991) y *entificación* por Gray y Tall (1994), puede ser una herramienta útil para analizar el desarrollo a largo plazo de la comprensión matemática. La consideración de objetos matemáticos como tales y, en general, la consideración de estructuras en matemáticas es de gran importancia para facilitar el almacenamiento, procesamiento y manipulación de los conocimientos matemáticos. Probablemente la concepción estructural subyace a la comprensión relacional definida por Skemp, mientras que la concepción operacional conduce a la comprensión instrumental (Sfard, 1991)[10].

El caso de la Aritmética y el Álgebra

Aunque las concepciones procedimental y estructural pueden tener cabida tanto en la aritmética como en el álgebra, tradicionalmente la aritmética se aborda desde una perspectiva operacional y es en el álgebra donde se combinan ambas concepciones (Drijvers y Hendrikus, 2003; Hall, 2002). Además, la experiencia aritmética pre-simbólica de los alumnos favorece la concepción operacional de la aritmética e induce a los alumnos a interpretar los signos aritméticos +, – y = como acciones a realizar (Kieran, 1981).

El álgebra es introducida, en los niveles iniciales, desde una perspectiva procedimental, como generalización de la aritmética, tratándose las representaciones algebraicas como generalizaciones de las operaciones aritméticas y siendo evaluadas dichas generalizaciones para valores concretos de las variables. Sin embargo, rápidamente pasa a ser considerada desde una perspectiva estructural. Entonces, las representaciones algebraicas son concebidas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales, tales como combinación de términos

[10] Skemp (1978) define la comprensión relacional como saber qué hacer y por qué, y la comprensión instrumental como saber qué hacer o conocer una regla y cómo usarla.

lineales, factorización, u operar de igualdad modo en ambos miembros de una ecuación (Kieran, 1992).

Este cambio obliga a los alumnos a afrontar la necesidad de una comprensión estructural que, a menudo, no han experimentado en su aprendizaje matemático previo. En el aprendizaje del álgebra los alumnos deben tratar representaciones simbólicas como objetos matemáticos, y operar estos objetos con procesos que habitualmente no conducen a la obtención de una respuesta numérica. Por otra parte, deben modificar sus interpretaciones previas sobre los símbolos y empezar a representar problemas verbales con operaciones que, a menudo, son las inversas de las que utilizan para resolver problemas similares en la aritmética (Kieran, 1992).

Los alumnos, ante este cambio, no sólo encuentran importantes dificultades en adquirir una comprensión estructural, sino también en conjugarla con su comprensión procedimental del álgebra; aspectos a los que, según Kieran (1991, 1992) habitualmente no se les presta especial atención en la enseñanza.

De este modo, la dualidad proceso/objeto causa un vacío ontogenético que ocasiona la ruptura entre la aritmética y el álgebra (Sfard y Linchevski, 1994).

Esta diferenciación de concepciones permite observar que un aspecto clave en la transición de la aritmética al álgebra es el proceso de reificación de procesos en objetos (Gray y Tall, 1994). El estudio del álgebra, en la Educación Secundaria, puede ser interpretado como una serie de ajustes proceso–objeto que los alumnos deben realizar para poder comprender los aspectos estructurales del álgebra (Kieran, 1992).

La forma tradicional de abordar dicha transición, introduciendo el álgebra desde un punto de vista operacional para pasar posteriormente a su concepción estructural, no ha sido eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática, según diversos estudios, como ya se ha comentado. Incluso los alumnos de nivel universitario muestran mayor comprensión de representaciones procedimentales que de representaciones estructurales (Kieran, 1992). Estas observaciones, así como la falta de acuerdo respecto al orden en que debe abordarse ambas concepciones (Sfard, 1991), conducen a señalar la necesidad de desarrollar la comprensión de los conceptos, estructuras y procedimientos matemáticos a la vez que se adquiere habilidad en su manejo.

Aspectos del lenguaje: la idea de precepto

La existencia de las perspectivas procedimental y estructural dentro del álgebra conlleva cierta ambigüedad en la notación algebraica, debido a que el mismo simbolismo es utilizado para representar tanto un proceso como un objeto (Drijvers y Hendrikus, 2003; Gray y Tall, 1994). Por ejemplo, la expresión 3 + 2 puede ser considerada como el proceso de sumar 3 y 2 o como la suma de dichos números. Gray y Tall denominan a este tipo de simbolismo un "*procepto elemental*", reservando el término "*procepto*" para referir a la colección de preceptos elementales que tienen un mismo objeto, o, en otras palabras, a todas las representaciones simbólicas de un mismo objeto.

Esta ambigüedad en la notación permite, a la persona que la comprende, flexibilidad en su pensamiento para moverse, en la ejecución de una tarea matemática, entre los procesos y los conceptos a ser manipulados mentalmente como partes de un esquema mental más amplio. Según Gray y Tall, la ambigüedad de esta notación evita la consideración constante de la complejidad de esta dualidad, siendo concretizado el significado de dicho simbolismo sólo cuando es necesario y en función del contexto. Los autores aseguran que la ambigüedad del simbolismo no puede ser utilizada si continuamente se está distinguiendo entre proceso y objeto.

A este modo de conjugación del pensamiento procedimental y el pensamiento estructural lo denominan proceptual, afirmando, a partir de un estudio realizado con alumnos de siete a doce años, que este tipo de pensamiento simplifica el modo en que se abordan las actividades matemáticas y está asociado con una mayor riqueza conceptual. En dicho estudio, Gray y Tall (1994) observan que los alumnos que muestran una conducta procedimental están por debajo de la media en eficacia en el cálculo, mientras que, los que proceden de forma proceptual, se sitúan por encima de la media. Además, distinguen diferentes modos de abordar los cálculos. Los pensadores procedimentales tienden a centrarse en el procedimiento y en ayudas físicas o casi–físicas que lo sustentan. Los números son utilizados sólo como entidades concretas que pueden ser manipuladas mediante procedimientos de conteo. El énfasis en el procedimiento reduce el foco de atención prestado a las relaciones entre los términos[11] y el resultado. En cambio, los pensadores proceptuales ven los números como objetos los cuales componen y descomponen de formas flexibles. Derivan hechos numéricos a partir de otros conocidos y reconocen y utilizan la propiedad complementaria de la suma y la resta.

En relación al lenguaje de las expresiones aritméticas y algebraicas, Pirie y Martin (1997) señalan la concepción temporal que predomina en la consideración de las expresiones aritméticas, correspondiente a una lectura de izquierda a derecha en vez de a un estado estático. Esta temporalidad se encuentra implícita en la interpretación de expresiones aritméticas como procesos en vez de cómo objetos, y de forma natural es transferida a las expresiones algebraicas, y en particular a las ecuaciones, dificultando su comprensión por parte de los alumnos.

Subramaniam y Banerjee (2004) señalan un tercer significado de las expresiones algebraicas y aritméticas, el significado de relación. Por ejemplo, la expresión 12 + 7 denota un número que es siete unidades más que 12. Según estos autores, mientras que las expresiones aritméticas son entendidas por los alumnos como preguntas a resolver, las expresiones algebraicas tienen un triple significado, expresan un proceso, un producto y una relación. Este tercer significado de relación es el que, por generalización, da lugar a la idea de función.

2.4.2 La Falta de Clausura

La falta de capacidad para considerar expresiones, ya sean algebraicas o aritméticas, como un objeto o totalidad, es denominado falta de clausura *("lack of closure").* Este obstáculo está relacionado con el proceso de reificación. Los alumnos no aceptan o no son capaces de dar significado a expresiones que contienen signos operacionales y no tienen un valor numérico, al menos a simple vista, es decir, escrito en la propia expresión. Su dificultad es debida a que entienden que el proceso no está cerrado. Para ellos hay un trabajo, un cálculo, por hacer y, por este motivo, no pueden considerar estas expresiones como algo con entidad en sí mismo. Este obstáculo es causado por la expectativa de una respuesta numérica y es la causa de errores

[11] Al considerar expresiones aritméticas y algebraicas denominaremos *términos* a los números y variables o incógnitas que las componen, siendo los elementos de una expresión tanto los términos como los demás signos o símbolos que la componen (ej., signos operacionales, el signo igual).

cometidos frecuentemente por los alumnos al simplificar una expresión algebraica como 3x + 5y en 8xy (Drijvers y Hendrikus, 2003; Socas et al., 1989).

Este obstáculo, lo consideramos en nuestro estudio en el contexto de la aritmética, pues se pone de manifiesto cuando se trabaja con expresiones aritméticas sin atender a su valor numérico. Sin embargo, en la literatura la mayoría de los autores utilizan este término en relación a expresiones algebraicas que, al incluir símbolos, no permiten ser simplificadas hasta un término numérico. En el aprendizaje del álgebra los alumnos se ven obligados a extender su concepción de las expresiones algebraicas como procesos, a verlas como objetos, pues en la mayoría de los casos no hay ningún proceso que llevar acabo. En el aprendizaje de la aritmética, sin embargo, no sólo suele ser posible realizar el proceso para trabajar con términos numéricos, en vez de con expresiones, sino que, además, el cómputo de las expresiones es fomentado desde la enseñanza.

2.4.3 Estructura en la Aritmética y el Álgebra

El término estructura aritmética o algebraica se refiere, en general, a la estructura matemática del sistema compuesto por los números y/o variables numéricas, alguna operación u operaciones y las propiedades de dichas operaciones. En particular Castro, Rico y Romero (1997) hacen referencia a las estructuras numéricas definiéndolas como *"un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componer esos números y de unas relaciones, mediante las que se comparan dichos entres"* (p.362). Estos autores, citando a Feferman (1989), destacan dichos entes, junto con sus operaciones y relaciones como los aspectos que caracterizan una estructura numérica.

En este sentido, el conocimiento de la estructura aritmética o algebraica comprende el conocimiento del conjuntos de objetos matemáticos (números y/o variables numéricas), de las operaciones, de las propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones (ej., equivalencia, desigualdad, asociatividad, conmutatividad, distributividad), y de las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad) (Kieran, 1989; Morris, 1999; Warren, 2001).

En particular, como señalan Kieran (1989) y Linchevski y Vinner (1990), este conocimiento implica ser capaces de identificar todas las formas equivalentes de una expresión, así como la habilidad de discriminar entre las formas que interesa considerar para la actividad que se aborde.

Chaiklin y Lesgold (1984) se refieren al conocimiento de la estructura de una expresión aritmética como conocimiento sobre las relaciones matemáticas entre los elementos que la componen. Este conocimiento es necesario para realizar operaciones matemáticas en expresiones aritméticas y algebraicas. Por ejemplo, saber cómo interpretar expresiones aritméticas incluye saber que un operador sólo se aplica al número dispuesto inmediatamente a su derecha, cuando no hay paréntesis, o conocer que la expresión $a+b+c$ puede ser agrupada como $(a+b)+c$ ó como $a+(b+c)$.

El conocimiento de la estructura de la aritmética se encuentra embebido en la realización de variedad de tareas matemáticas tales como la interpretación de expresiones, el cálculo de valores de expresiones, juzgar la equivalencia de expresiones y realizar transformaciones que preservan la equivalencia (Chaiklin y Lesgold, 1984).

Señalando la importancia del reconocimiento y uso de estructura en la enseñanza del álgebra propia de la Educación Secundaria, Kieran (1989) afirma que la experiencia previa de los alumnos con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, debe tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra. En particular sugiere la representación de problemas verbales mediante ecuaciones, la resolución de sentencias numéricas, y la simplificación y comparación de expresiones aritméticas complejas, como actividades que permiten un enfoque estructural de la aritmética.

En relación a la comprensión y conocimiento de la estructura matemática, Morris (1999) afirma, a partir de las evidencias de un estudio empírico, que la mayoría de los alumnos requiere un largo periodo de tiempo para abstraer generalizaciones que puedan ser aplicadas de unos contextos a otros, siendo más recomendable una enseñanza centrada en los conceptos de estructura que una larga experimentación procedimental con expresiones algebraicas.

CAPÍTULO 3

Pensamiento relacional

En las áreas de Psicología y Educación Matemática el término *pensamiento relacional* (relational thinking o relational thought) ha sido usado por algunos autores (Gentner y Loewenstein, 2002; Ruesga, 2003) para referir al pensamiento sobre relaciones o conceptos basados en relaciones, sin precisarse más esta definición. De forma similar han sido empleados otros términos como razonamiento relacional (razonamiento sobre relaciones) y conocimiento relacional (conocimiento sobre las relaciones), por Andrews (1996) y Baroody (1999) respectivamente.

Esta denominación parece proceder, en algunos casos del ámbito de la Educación Matemática, de la distinción hecha por Skemp (1978) entre comprensión relacional y comprensión instrumental que conduce a contraponer el término *pensamiento relacional* al de pensamiento procedimental[12].

Uno de los primeros usos de este término en el área de la Educación Matemática, corresponde a O'Brien (1974) quien lo utiliza para referir al pensamiento que conecta ideas de una persona, procedentes de su experiencia, y que analiza la necesidad de dichas conexiones. Según O´Brien, una persona piensa relacionalmente cuando ordena o clasifica cosas e ideas y también cuando conecta ideas de forma exhaustiva para extraer conclusiones.

[12] Skemp (1978) establece una distinción entre dos tipos de comprensión: relacional e instrumental. Denomina comprensión relacional a lo que en muchas ocasiones es referido simplemente como comprensión, "saber que hacer y por qué" (p. 9), mientras que el término comprensión instrumental lo emplea para referirse a "conocer ciertas reglas y saber cómo aplicarlas" (p. 9). A partir de esta distinción, Skemp diferencia entre matemáticas relacionales e instrumentales, enseñanza de las matemáticas relacional e instrumental, conocimiento relacional e instrumental y pensamiento relacional e instrumental.

Más recientemente, Doumas y Hummel (2005) utilizan el término *pensamiento relacional* para referir a la capacidad de formar y manipular representaciones relacionales, dando como ejemplos la capacidad de apreciar analogías entre objetos o eventos aparentemente diferentes, la capacidad de aplicar reglas abstractas en situaciones noveles, la capacidad de comprender y aprender un lenguaje e, incluso, la de apreciar semejanzas perceptuales.

Dentro de la propuesta Early-Algebra, Koehler (2004) y Carpenter et al. (2003, 2005) aportan aproximaciones a este término contextualizadas en la aritmética y en la resolución de igualdades numéricas, respectivamente. Koehler (2004) lo vincula con "*las muchas relaciones que los niños reconocen y construyen entre números, expresiones y operaciones*" (p.2). Esta autora señala que el *pensamiento relacional* involucra la reestructuración de secuencias de operaciones para modificar el cálculo a realizar, la transformación de secuencias numéricas haciendo uso de propiedades aritméticas fundamentales, y la obtención de hechos numéricos a partir de hechos numéricos conocidos.

Por su parte, Carpenter et al. (2003, 2005) denominan *pensamiento relacional* a la acción de considerar las expresiones e igualdades como totalidades, en vez de como procesos a realizar paso por paso, y utilizar propiedades aritméticas y relaciones existentes entre los términos que las componen, para resolver las igualdades, manipular las expresiones o para construir sentencias basadas en relaciones aritméticas (ej., 4 x 7 = 7 + 7 + 7 + 7). Este modo de proceder en la resolución de igualdades lo contraponen al cálculo directo de las operaciones expresadas.

En nuestro caso, en el contexto de la resolución de igualdades y sentencias, utilizamos el término *pensamiento relacional* con significado semejante al descrito por Carpenter y colaboradores. No obstante, ante la falta de definición general de este término y su importancia en esta investigación acudimos a documentos de Lengua, Filosofía, Psicología y Lógica, así como de Educación Matemática, que abordan los términos pensamiento, pensar y relaciones, para precisar su significado. A continuación, se recogen los resultados de dicha consulta.

3.1 Pensamiento y pensar

Muchos autores insisten en la imposibilidad de definir el pensar por ser una actividad que se manifiesta de muchas formas y ser éste un término al que se le asignan muy diversos usos. Además, se considera un proceso difícil de aislar respecto de otras actividades psíquicas (Ferrater, 1988). Teniendo en cuenta estas consideraciones, recogemos a continuación diversas definiciones de los términos pensamiento y pensar, con la intención de precisar el uso que haremos de estos términos.

3.1.1 Definiciones lingüísticas

El Diccionario de la Real Academia Española (RAE, 1992) define *pensamiento* como potencia o facultad de pensar, acción y efecto de pensar, conjunto de ideas propias de una persona o colectividad; definiendo *pensar* como imaginar, considerar o discurrir, reflexionar, examinar con cuidado una cosa para formar dictamen, intentar o formar ánimo de hacer una cosa.

El término pensamiento es definido en Moliner (1998) como acción y efecto de pensar; ejercicio de la mente, inteligencia, mente, cosa que se piensa. Definiéndose *pensar* como formar o relacionar ideas, tener una cosa en la mente e ir formando ideas a propósito de ella, dedicar la mente al examen de una cuestión para formar una opinión o tomar una resolución, reflexionar sobre una cosa antes de hacerla o decirla, entre otras acepciones.

3.1.2 Desde la filosofía

Según Brugger (1965), el término pensar se refiere al modo sensible de conocer, dirigido al ente en cuanto tal y a las relaciones implicadas en su sentido, no formando parte del pensar los actos inconscientes que suceden en la compresión de datos y sí las conexiones intelectuales dotadas de sentido. El pensar sigue las leyes de las asociaciones[13] y de los complejos (*necesidad subjetiva del pensar*) y, además, se orienta por la conexión necesaria de los contenidos mismos (*necesidad lógica u objetiva del pensar*).

[13] La asociación consiste en el hecho de que, al coincidir determinadas imágenes simultáneamente o en sucesión próxima en la conciencia, la presencia de la primera suscita la segunda sin que sus causas productoras actúen (Brugger, 1965).

El pensar está intensamente ligado a los datos procedentes de nuestra experiencia sensible y está influenciado por los contenidos de pensamiento adquiridos, a los cuales ha de incorporarse lo que va a entenderse por primera vez, y por la personalidad de la persona que poseerá un determinado estilo formal de pensamiento (Brugger, 1965).

Según Kant, pensar designa todo uso de conceptos; significa determinar mediante conceptos la diversidad dada, construyendo con ellos la unidad de un objeto, lo cual entiende como sinónimo de conocimiento (Brugger, 1965).

En el Diccionario de Filosofía de Ferrater (1988), se define *pensamiento* como lo que se tiene en mente cuando se reflexiona con el propósito de conocer algo, entender algo, tomar una decisión, etc. Ferrater distingue los términos pensar y pensamiento, entendiendo *pensar* como un acto u operación del sujeto, principalmente de carácter intelectual, y *pensamiento* como lo que contiene, o aquello a lo que apunta, dicho acto u operación intelectual llevada a cabo por el sujeto. Puede ser una imagen, un concepto, una proposición,… pero en todo caso es distinguible del acto de pensarlo; es el resultado de dicho acto mental y es comunicable a otros sujetos.

Por su parte, Brentano define *pensamiento* como algo aprehendido por un sujeto en el acto de pensar (Ferrater, 1988).

El pensar pretende alcanzar un saber, se hace con la intención de salir de la duda en la que se ha caído y llegar de nuevo a estar en lo cierto. Según esto, el conocimiento es una de las formas del pensamiento (Ferrater, 1988).

De forma similar, Serrano (1979) relaciona *pensamiento* y *conocimiento* y expone: "*todo cúmulo de conocimientos que va pasando a través de las generaciones, se puede realizar debido a los pensamientos que todos los hombres […] han concebido*" (p.13). Este autor explica que el pensamiento puede ser considerado desde dos puntos de vista: como la actividad intelectual mediante la cual el hombre entiende, comprende y dota de significado a lo que le rodea, y como el resultado de esta actividad intelectual. Reiterándose con esta distinción la posibilidad, anteriormente mencionada, de distinguir o, por el contrario, identificar los términos pensar y pensamiento.

Una definición muy general de pensamiento es la dada por Honecker, el cual lo define como la actividad interna dirigida hacia los objetos y tendiente a su aprehensión, señalando el carácter intencional del pensar (Ferrater, 1988).

Desde un punto de vista epistemológico, las diferentes formas en las que se ha considerado el pensar han venido determinadas por la consideración ontológica de los pensamientos, ya sea como imágenes, como conceptos incorporados en las imágenes, como conceptos abstraídos de las realidades,... (Ferrater, 1988).

Por otra parte, algunos fenomenólogos han señalado la necesidad de diferenciar entre un sujeto (que piensa), el pensar del sujeto (un proceso psíquico temporal), el pensamiento que el sujeto piensa al pensar (un objeto ideal) y aquello a que se refiere el pensamiento (lo cual puede no ser un objeto real) (Ferrater, 1988).

Honderich (2001) define *pensar* como razonar, creer, reflexionar, calcular, deliberar. Y más concretamente señala: Pensar qué es *p,* es estar en un estado mental susceptible de ser expresado con palabras diciendo que *p,* con la intención de decir la verdad. Según esto, el pensar puede realizarse sin palabras (aunque en ocasiones esté limitado por ellas) e implica un dominio de los conceptos, una respuesta mental interna, que en un principio no puede atribuirse más que a las personas.

De forma muy general, el *pensamiento* también es definido como toda clase de actividad intelectual (Tododeidure).

Dewey (1989), por su parte, distingue diversos significados del término pensamiento:

- El fortuito tránsito de cosas por la mente, el cual es automático y no está regulado. Este es el caso de los sueños y de las ensoñaciones o ensimismamientos que experimentan las personas cuando están despiertas.
- La imagen mental o idea de algo que está presente en la realidad. Siendo la sucesión, coherente y sin rupturas de continuidad, de tales imágenes lo que constituye el pensar.
- Creencia, idea preconcebida (no obtenida mediante actividad mental).

En contraposición a estos significados, Dewey destaca un tipo de pensamiento, el reflexivo, el cual implica una ordenación secuencial de ideas, cada una de ellas resultado de la anterior, deliberadamente utilizada para llegar a una conclusión. *"Lo que constituye el pensamiento reflexivo es el examen activo, persistente y cuidadoso de toda creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de los fundamentos que la sostienen y las conclusiones a las que atiende"* (p. 25). Lo que implica un esfuerzo voluntario y consciente.

3.1.3 Desde la psicología

Desde un punto de vista psicológico cabe destacar cuatro teorías que han tratado la idea del pensar desde distintas consideraciones psicológicas, centrándose en la cuestión de su génesis o de su estructura (Ferrater, 1988; Moya, 1998). Estas teorías son:

- *La Asociacionista:* Considera que el pensar consiste en la combinación de pensamientos de acuerdo con las leyes de asociación. Dichas leyes o principios de conexión son tres: la semejanza, la contigüidad (en el espacio y en el tiempo) y la causa efecto.
- *La Behaviorista o El Conductismo:* Reduce el pensar a las reacciones orgánico–físicas, a simples relaciones de estímulos y respuestas.
- *La Escuela de Würzburgo:* Parte de la visión asociacionista del pensar considerando la existencia, en la conciencia, de procesos sin contenido sensorial denominados "estados de conciencia". Considera la existencia de un pensamiento sin imágenes no descomponible en procesos más simples.
- *La Estructuralista o gestalista:* Entiende el pensar como un proceso perceptivo suscitado por un estímulo que se relaciona, formando un conjunto, con procesos anteriores alojados en la memoria.

Los psicólogos, en la mayoría de los casos, utilizan el término *pensar* para referir a una actividad intelectual que tiene como finalidad encontrar una respuesta a un problema o los medios para alcanzar una meta mediante el razonamiento (Moya, 1998). Para Myers (1999), pensar es formar conceptos que organizan nuestro mundo, resolver problemas, tomar decisiones y emitir juicios de eficacia.

El pensar es entendido como una actividad dirigida a resolver problemas y planear actividades, la cual está estrechamente vinculada al lenguaje e intensamente relacionada con la capacidad de representación de la realidad en términos de conceptos más o menos abstractos. En el pensamiento, la información almacenada y los datos sensoriales se combinan y se trasforman para formar nueva información (Moya, 1998).

Mayer (1986) destaca tres características del pensamiento: 1) es cognitivo pero se refiere a la conducta, 2) es un proceso que establece un conjunto de operaciones sobre el conocimiento en el sistema cognitivo, y 3) es dirigido y tiene como resultado la resolución de problemas.

García y Moreno (1998), también desde la psicología, definen muy genéricamente el término pensamiento como "*cualquier actividad mental que implique una manipulación interna de información*" (p.97). El pensamiento es considerado como uno de los tres orígenes del conocimiento junto con la razón y los sentidos.

Según explican estos autores, el pensamiento posee siempre un componente de abstracción, independientemente de que esté ligado a la presencia física de objetos o de que se realice sin ningún soporte físico (a partir, por ejemplo, de proposiciones verbales o de imágenes). Además, al igual que Dewey (1989), hacen observar la existencia de pensamientos no intencionales, basados únicamente en la asociación de ideas, que actúan sin control por parte del sujeto.

En relación con el carácter intencional del pensamiento, el cual es resaltado por muchos autores como una de sus características más relevantes, García y Moreno (1988) explican que se manifiesta en situaciones de resolución de problemas o en la búsqueda de la toma de una decisión o extracción de una conclusión, en las que el sujeto construye representaciones y manipula la información con el fin de lograr un objetivo. Este pensamiento incluye diversos tipos de actividades de pensamiento que pueden clasificarse en deterministas o no deterministas, según sean o no fruto de un proceso en el que, en cada paso, la opción posible venga determinada por el paso anterior. Lo que los gestalistas denominan como pensamiento reproductivo o productivo, respectivamente.

Cuando el proceso de pensamiento es no determinista entran en juego diversos tipos de pensamiento como el razonamiento o la creatividad (según se conozca o no el punto de partida del proceso de pensamiento).

Dorsch (1985) define el *pensamiento* como la elaboración interpretativa y ordenadora de informaciones y el ejercicio de funciones intelectuales o cognitivas como la formación de conceptos y operaciones mediante esquemas de diferentes grados de abstracción (ej., conocimientos y estructuras cognitivas para reconocer, descubrir o proponer relaciones entre ellos). En general, este término designa a las operaciones dirigidas a la resolución de problemas.

Además de esta acepción, que se refiere a la capacidad de pensar, Dorsch define pensamientos como las piezas más pequeñas de la vivencia del pensar. Según este autor, el término pensamiento queda restringido en psicología a las siguientes operaciones elementales: la cognición (reconocimiento, identificación), el ejercicio de la memoria, el pensamiento divergente (obtención de diversas conclusiones lógicamente posibles), el pensamiento convergente (obtención de una conclusión lógicamente necesaria) y la evaluación o valoración (verificación de una hipótesis) (Dorsch, 1985).

3.1.4 El término pensamiento en este trabajo

Observamos en las definiciones recogidas que en ocasiones se considera el pensamiento como una acción y, por tanto, como sinónimo de pensar, y en otros casos como el efecto, el resultado o el objeto de dicha acción.

En este trabajo vamos a emplear el primero de estos significados, definiendo el término *pensamiento* como:

La **actividad intelectual** (interna) mediante la cual el hombre entiende, comprende, y dota de significado a lo que le rodea; la cual **consiste,** entre otras acciones**, en formar, identificar, examinar, reflexionar y relacionar ideas o conceptos, tomar decisiones y emitir juicios de eficacia**; permitiendo encontrar respuestas ante situaciones de resolución de problemas o hallar los medios para alcanzar una meta.

Estamos implicando en esta definición cierta intencionalidad del sujeto descartando acepciones del pensamiento que hacen referencia a las ensoñaciones o el simple paso de ideas o imágenes por la mente. Esta definición, extraída de la búsqueda bibliográfica realizada, es suficientemente precisa y descriptiva para poderla aplicar al contexto en el que se sitúa este trabajo.

3.2 Relaciones

Las relaciones constituyen una parte esencial de las matemáticas debido a que los diversos conceptos o ideas matemáticas se encuentran organizados en estructuras interrelacionadas (Castro, Rico y Castro, 1987; Vergnaud, 2003). De hecho algunos autores (Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez y Torra, 1996; Ruesga, 2003) definen las matemáticas como una ciencia cuyo objetivo es el estudio de relaciones. Además, desde la perspectiva representacionalista del conocimiento se señala la importancia de las relaciones en el desarrollo de la comprensión y del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992).

A continuación, recogemos acepciones relativas al término relación procedentes de la consulta de documentos de Lengua, Filosofía, Lógica, Matemáticas y Educación Matemática.

3.2.1 Acepciones generales del término relación

El Diccionario de la Real Academia Española (RAE, 1992) define el término relación como referencia que se hace de un hecho, conexión, correspondencia de una cosa con otra, y en matemáticas: resultado de comparar dos cantidades expresadas en números.

Según el Diccionario de uso del Español de Maria Moliner (1998), una *relación* es una situación que se da entre dos cosas cuando hay alguna circunstancia que las une en la realidad o en la mente. En su acepción matemática la define como resultado numérico de comparar dos magnitudes, cantidades o números, lo que también denomina razón.

Según la Enciclopedia Oxford de Filosofía (Honderich, 2001), el término *relaciones* se refiere a maneras en que las cosas pueden estar conectadas entre sí (ej., algunos cosas son más viejas que otras) o consigo mismas (ej., cada cosa es idéntica a sí misma).

3.2.2 El término relación según Aristóteles

El término r*elación* es una categoría[14] según Aristóteles, el cual define lo relativo como la referencia de una cosa a otra (del doble al tercio, del exceso al defecto, de lo medido a la medida, del conocimiento a la ciencia, de lo sensible a la sensación) (Ferrater, 1988). En palabras de Larroyo (1982): *"los relativos son todas las cosas, cualesquiera que ellas sean, que no se dicen sino de otras cosas"* o *"que se refieren, de cualquier manera que sea, a otra cosa que ellas mismas"* (p. 32). Por ejemplo, "más grande" se dice de un objeto con respecto a otra cosa.

Las cosas pueden ser relativas por sí (ej., la igualdad), porque sus géneros lo son (ej., la medicina, por serlo su género que es la ciencia) o por accidente (ej., una cantidad que es doble de otra) (Aristóteles, 1998).

Aristóteles (1998) distingue tres sentidos del relativo:

<u>Primer sentido del relativo</u>: Como el múltiplo respecto del submúltiplo (como el doble respecto de la mitad) y lo que excede respecto de lo excedido. Este tipo de relaciones se denominan numéricas y corresponden a afecciones de los números, es decir, a cualidades en las que los números pueden alterarse. Estas relaciones pueden ser *determinadas* (o definidas) e *indeterminadas* (o indefinidas). Por ejemplo, la relación "ser doble de" es determinada mientras que la relación "ser múltiplo de" es indeterminada.

Entendemos que esta distinción se refiere a si las clases de equivalencia determinadas por la relación son finitas o infinitas, siendo una relación determinada o indeterminada respectivamente según esta distinción. Así, la relación de "ser doble de" es determinada ya que cada clase de equivalencia está formada por dos elementos. En cambio, la relación "ser múltiplo de" relaciona un conjunto infinito de números con uno dado, por lo que las clases de equivalencia tienen infinitos elementos.

[14] Aristóteles entiende por categorías términos o expresiones de enlace no ulteriormente analizables y, a su vez, diversos modos de hablar del ser (Ferrater, 1988). Las categorías corresponden a las diferentes cosas que pueden expresar las palabras cuando se toman aisladamente. Las diez categorías que considera Aristóteles son sustancia, cantidad, cualidad, relación, lugar, tiempo, situación, estado, acción y pasión (Larroyo, 1982).

Segundo sentido del relativo: Como lo activo respecto de lo pasivo (como lo que es capaz de cortar respecto de lo cortable). Estas son las relaciones según la potencia, y según los actos de la potencia, algunas de las cuales se dicen también relativas según tiempos distintos (ej., lo que hizo respecto de lo que fue hecho, lo que hará respecto a lo que será hecho). Son relaciones debidas a la privación de la potencia las que se expresan mediante los prefijos in– o im–, tales como lo invisible, lo imposible, lo impotente,...

Tercer sentido del relativo: Como lo mensurable respecto de la medida, lo cognoscible respecto del conocimiento, lo sensible respecto de la sensación, lo pensable respecto del pensamiento. Estas cosas se dice que son relativos porque otra cosa es relativa a ellas. Así, pensable significa que hay pensamiento de ello, pero el pensamiento no es relativo a aquello de que es pensamiento. De forma semejante, lo visible se dice así porque hay visión de ello, pero la visión no puede definirse a su vez por serlo de lo visible (Aristóteles, 1998). En cambio, en el caso de las relaciones numéricas y las relaciones según la potencia, lo que son se dice que lo son de otra cosa y no porque otra cosa sea relativa a ellas (ej., ser hijo precisamente es ser hijo del padre).

Propiedades de lo relativo

Según Larroyo (1982), Aristóteles distingue cuatro propiedades del relativo:

- Tienen la propiedad de los contrarios, es decir, cada relativo tiene su contrario y éste es a su vez un relativo (aunque existen algunas excepciones)
- La mayoría son susceptibles de ser más o menos
- Todos los relativos se aplican a cosas recíprocas, así si w es el doble de z, z es la mitad de w, o si z es esclavo de w, w es señor de z.
- La mayoría de los relativos pueden existir simultáneamente (ej., doble y mitad existen a la vez).

3.2.3 El término relación desde la filosofía

Al igual que Aristóteles, otros autores han coincidido en incluir *relación* como una de las categorías, entre ellos podemos mencionar a Leibniz, Renouvier, Natorp, a Plotino el cual la señala como una categoría del mundo sensible y a Kant quien, en función de las formas lógicas del juicio, distingue dentro de la categoría de relación entre substancia y accidente, causalidad y dependencia, y comunidad o reciprocidad entre agente y paciente. Kant presenta, además, una tabla de categorías de la voluntad sobre las nociones de bien y de mal, dentro de la cual también incluye la categoría de *relación* (Ferrater, 1988).

En la ontología se distingue entre relación de lo real y relación lógica. La relación se considera lógica cuando es sólo de la mente, y de lo real cuando es una relación ontológica. Los escolásticos distinguen a su vez entre relaciones de lo real creadas y relaciones de lo real increadas (Ferrater, 1988).

De entre los autores que han considerado la relación desde un punto de vista ontológico, Ferrater destaca a James y Honecker. James señala que las relaciones que conectan las experiencias deben ser también experimentadas. Considera las relaciones como algo real y las enumera de menor a mayor "intimidad": estar con (simultaneidad e intervalo temporal), ser adyacente en el espacio y distancia (similaridad y diferencia), actividad (cambio, tendencia, resistencia) y causalidad (sistema continuo del yo).

Por su parte, Honecker entiende las relaciones como hechos objetivos adscritos a dos o más objetos (Ferrater, 1988), y las clasifica en relaciones mixtas (ej., relación mayor–menor) y relaciones fundamentales. Las relaciones fundamentales las clasifica a su vez en relaciones de cualidad (ej., a y b son iguales, distintos,...) de unión (ej., a y b están unidos de algún modo), y relaciones no transformables en el mismo sentido (ej., causa–efecto, medio–fin,...).

Por otra parte, Paci considera la relación como modo de unión dinámica, es decir, como un proceso (Ferrater, 1988).

Una cuestión ampliamente debatida con respecto a las relaciones, es su consideración como externas o internas a las cosas, es decir, si las cosas relacionadas o relacionables poseen o no una realidad independientemente de sus relaciones o, por el contrario, las relaciones constituyen las cosas y son previas a ellas (Ferrater, 1988). Diversos autores se han posicionado en cada uno de los extremos de este debate. Honderich (2001), en cambio, considera la co–existencia de ambos tipos de relaciones, explicando: Si A está relacionado con B, y A no pudiera existir sin estar relacionado con B, la relación es interna, pero, si ni la identidad ni la naturaleza de A dependen de esta relación, entonces la relación es externa. Por ejemplo, 2 está relacionado internamente con 1 ya que ningún número puede ser idéntico a 2 sin ser mayor que 1, mientras que la relación de un libro con el lector es externa pues el libro es exactamente el mismo independientemente del lector que se considere.

De forma similar, Brugger (1965) explica que la relación puede ser considerada como relación trascendental (o esencial) o como relación predicamental (o accidental). En el primer caso, la relación forma parte de la constitución esencial del sujeto y, en el otro caso, alude a la referencia del sujeto a algo, añadiéndose como determinante ulterior al sujeto ya completo en su constitución esencial, siendo una categoría del accidente.

3.2.4 El término relación en la lógica[15]

En la lógica, la relación se examina como un predicamento, es decir, como una de las clases o categorías a que se reducen todas las cosas y entidades físicas (RAE, 1992), y se define como el orden de una cosa respecto a otra (Ferrater, 1988). La relación predicamental es un accidente real referido a otra cosa, que requiere la existencia de un sujeto real y de un término real distinto del sujeto para que la relación pueda existir a modo de intersección entre los términos (Ferrater, 1988).

Desde la lógica tradicional, la relación se refiere al carácter condicionado (proposiciones hipotéticas y disyuntivas) o incondicionado de los enunciados (proposiciones categóricas). Para representar las relaciones se utilizan esquemas cuantificables que son de la forma Fxy, Gxyz,… con una letra mayúscula y tantas letras minúsculas como elementos estén involucrados en la relación. Así, por ejemplo "Júpiter es mayor que Mercurio" tendría un esquema de la forma Fxy.

Estos diagramas permiten distinguir los elementos que están involucrados en una relación: los términos que se relacionan y el fundamento de la relación (Ferrater, 1988).

[15] Una parte de la lógica que se conoce como álgebra (booleana) de relaciones (análoga al álgebra booleana de clases) se centra en el estudio y manejo de las relaciones definiéndose sobre ellas la suma, el producto, la inclusión, el complemento, la identidad de relaciones,… entre otros functores (Sacristán, 1973).

Relaciones diádicas o binarias. A las relaciones que involucran dos elementos, las más simples y las más frecuentes en el lenguaje cotidiano, se les denomina diádicas o binarias. Estas relaciones pueden ser representadas mediante esquemas relacionales de la forma: ŝ ŵ (….s……w….), que se lee "la relación de todo s a todo w, que….s……w…." (Ferrater, 1988; Honderich, 2001).

Una notación más abreviada consiste en escribir x R z, que se lee "x tiene la relación R con z" o "x está relacionado con z con la relación R". Un ejemplo de esta notación son los enunciados "Carlos ama a Inés" o "Irene es más joven que Jose Luis" (Ferrater y Leblanc, 1967).

Como podemos observar, las relaciones diádicas se definen a partir de la idea de pares ordenados. Para este tipo de relaciones diádicas, según se indica en Ferrater (1988) y Honderich (2001), se distinguen las siguientes propiedades:

- *Reflexiva:* todo elemento está relacionado consigo mismo (ej., las relaciones "ser del mismo color" y "tener la misma edad que" son reflexivas).
- *Irreflexiva:* ningún elemento está relacionado consigo mismo (ej., las relaciones "ser más bajo" y "ser distinto de" son irreflexivas).
- *No reflexiva:* no es ni reflexiva ni irreflexiva, es decir, algunos elementos están relacionados consigo mismos y otros no (ej., las relaciones "querer a" es no reflexiva).
- *Simétrica:* si una entidad w está relacionada con una entidad z, entonces z está relacionada con w (ej., las relaciones "ser tan alto como" y "ser vecino de" son simétricas).
- *Asimétrica*: si ningún par de elementos cumple la propiedad simétrica (ej., las relaciones "ser más pesado que" y "ser padre de" son asimétricas).
- *Antisimétrica*: si los únicos pares de elementos que cumplen la propiedad simétrica son los formados por elementos iguales (ej., la relación "ser menor que").
- *No simétrica:* no es ni simétrica ni asimétrica (ej., la relación "conocer el nombre de" es no simétrica)
- *Transitiva:* si una entidad w está relacionada con una entidad z, y ésta a su vez está relacionada con una entidad x, entonces w está relacionada con x (ej., las relaciones "ser más largo" y "tener la misma edad que" son transitivas).

- *Intransitiva:* si una entidad w está relacionada con una entidad z, y ésta a su vez está relacionada con una entidad x, entonces w no está relacionada con x (ej., la relación de paternidad y la relación "ser doble de" son intransitivas).
- *No transitiva:* no es ni transitiva ni intransitiva (ej., la relación de amistad es no transitiva).

Cuando una relación diádica es reflexiva, simétrica y transitiva se dice que es una relación de equivalencia. Un ejemplo de relación de equivalencia es la relación "tener la misma edad que".

Otras relaciones de gran importancia son las relaciones de orden, que son aquellas relaciones diádicas que son reflexivas, transitivas y antisimétricas. Un ejemplo de relación de orden es la relación "ser más alto o igual de alto que".

Se puede distinguir también entre relaciones binarias de uno a muchos (ej., la relación de padre a hijo), de muchos a uno (ej., la relación de hijo a padre) o de uno a uno (ej., la relación de nación a capital). Lo cual se define formalmente como sigue; denominando, en un esquema relacional xRz, a "x" relacionante y a "z" relacionado (Ferrater, 1988).

- Relación de uno a muchos: relación en la que cada relacionado tiene exactamente un relacionante.
- Relación de muchos a uno: relación en la que cada relacionante tiene exactamente un relacionado.
- Relación de uno a uno: relación en la que cada relacionante tiene exactamente un relacionado y viceversa.

En otros casos se distingue entre relaciones mutuas y no mutuas o unilaterales, y relaciones en las que las dos partes son de la misma especie y otras en las que son de distinta especie (Brugger, 1965).

3.2.5 El término relación en la teoría de conjuntos

Dentro de las matemáticas, concretamente en la teoría de conjuntos, el término relación se define formalmente como un subconjunto de un producto cartesiano:

> Una *relación* R entre los conjuntos A_1, A_2,..., A_n es un subconjunto R cualquiera del producto cartesiano $A_1xA_2x…xA_n$.

A los conjuntos A_i (i = 1,…n) se les denomina *dominios de la relación*, al número de elementos de R *cardinalidad* y al número "n" *grado* de R. Para indicar explícitamente el grado de la relación se dice que R es una relación n–aria (Farran, 2003).

Concretamente, para n = 2, una *relación binaria* R entre dos conjuntos A y B es cualquier subconjunto R de AxB. Equivalentemente una relación binaria R entre dos conjuntos A y B se puede definir como una correspondencia de A en B.

Dados (a, b) un elemento de R por convenio se denota aRb, y se lee "a está relacionado con b". Cuando a y b son dos elementos de A y B, respectivamente, que no pertenecen a R, se escribe $a \not R b$ y se dice que "a no está relacionado con b" (Lelong– Ferrand y Arnaudiès, 1979).

En general, las relaciones se denotan mediante un símbolo genérico como R o ~, aunque en algunas relaciones especificas se usan otros símbolos como =, <, >, |, ≡.

Las operaciones conjuntistas básicas que se pueden realizar con relaciones entre un mismo grupo de conjuntos son la unión, la intersección, la diferencia y la complementación.

En muchas ocasiones se consideran relaciones entre un mismo conjunto, es decir, se toma B = A, y se dice que R es una relación binaria sobre A. En ese caso se consideran las propiedades anteriormente definidas dentro de la lógica: reflexividad, irreflexibilidad, no reflexividad, simetría, asimetría, no simetría, transitividad, intransitividad y no transitividad. Y, semejantemente, se definen las relaciones de equivalencia y las relaciones de orden (ver apartado anterior).

3.2.6 El término relación en este trabajo

En este trabajo manejamos dos acepciones diferentes del término relación. Por una parte, vamos a considerar la acepción general de este término que nos va a conducir a definir lo que entendemos por *pensamiento relacional*. Por otra parte, consideramos el concepto de relación binaria y relación de equivalencia, procedentes de la lógica y de la teoría de conjuntos, para abordar los conceptos de igualdad, equivalencia e identidad dentro de las matemáticas.

Como acepción general del término *relación* tomamos la siguiente definición:

Conexión, correspondencia o situación que se da de una cosa con otra o de una cosa con sí misma, en definitiva entre un par ordenado, ya sea en la realidad o en la mente.

En el contexto de la aritmética las relaciones corresponden, por ejemplo, a mismidad[16] (ej., las expresiones 2 + 3 y 7 + 5 representan en ambos casos la suma de dos números naturales, por lo tanto, se reconoce en ambas una mismidad de operación aunque aparezcan involucrados números diferentes), de no mismidad (ej., 15 – 7 y 15 + 7 involucran los mismos términos pero una operación diferente), diferencia de magnitud entre dos números (ej., "5 es dos unidades mayor que 3"), correspondencia de dos números por medio de una operación (ej., 15 se relaciona con 3 por ser un divisor, o porque al multiplicar 3 por 5 se obtiene el número 15), entre otros casos.

Diferencia entre relación y propiedad en las matemáticas

Las propiedades son hechos siempre ciertos con respecto a los elementos de un conjunto (Bult y Hobbs, 2001). Son ejemplos de propiedades las siguientes afirmaciones: "la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados", "todo número par es divisible por dos", "las diagonales de un rombo se cortan formando un ángulo recto", entre otras.

A diferencia de las propiedades, las relaciones se dicen de dos objetos matemáticos concretos. Las propiedades se encuentran en un nivel más elevado que las relaciones en cuanto a su grado de generalidad. "*El reconocimiento de relaciones tiende a centrarse en lo particular, mientras que la percepción de propiedades supone un movimiento hacia lo general*" (Mason, 2004).

[16] Utilizamos el término mismidad, por su brevedad, para referir a la condición de ser alguien o algo él mismo, acepción tomada de Seco, Andrés y Ramos (1999).

3.3 El término pensamiento relacional en este trabajo

Partiendo de las distintas acepciones de los términos *pensamiento* y *relación* recogidas anteriormente, nos encontramos en disposición de precisar qué vamos a entender por *pensamiento relacional*[17], definido como pensamiento sobre relaciones y considerando el pensamiento como una acción.

El *pensamiento relacional* es la actividad intelectual (interna) consistente en **examinar** objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, **detectar de manera espontánea o buscar** relaciones entre ellos, y **utilizar** dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo[18].

Entendemos que cuando una persona piensa relacionalmente o, equivalentemente, usa *pensamiento relacional*, no sólo observa o detecta relaciones existentes entre los objetos matemáticos en cuestión, sino que estas relaciones pasan a ser consideradas objeto de pensamiento para lograr un objetivo determinado. Dicho objetivo puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados. Las relaciones son los conceptos e ideas en los que se centra la atención del sujeto.

Para clarificar en qué consiste el uso de *pensamiento relacional* describimos detalladamente dicho proceso mediante varios ejemplos.

Por ejemplo, el uso de *pensamiento relacional* en la resolución de la actividad propuesta en la Figura 3-1 podría ser como sigue. Un primer acercamiento a la actividad conlleva un análisis o examen de la figura en el que se pueden distinguir la totalidad de la figura y diversas partes de ésta, como las líneas que dividen la figura ó la forma de la figura sombreada, dependiendo de donde se dirija la atención. Entonces, guiados por la cuestión formulada, pueden buscarse relaciones entre el triángulo sombreado y el cuadrado total, o entre el triángulo y alguna parte del cuadrado. Algunas de estas relaciones pueden no conducir a la obtención de la respuesta pero permitirán conocer más a fondo las características y estructura de la

[17] El término *relacional* es definido como "propio de la relación entre personas o cosas" (Moliner, 1998), "perteneciente o relativo a la relación o correspondencia entre cosas (RAE, 1992).

[18] En el examen del objeto o situacion y en la búsqueda de relaciones, la atención puede ir variando de la totalidad a ciertas partes o detalles del objeto matemático y viceversa, enfatizándose unos elementos o aspectos e ignorándose otros, en distintos momentos de dicho proceso (Mason, 2003).

figura y llevarán a explorar otras relaciones. Si se relaciona el área del triángulo con la del cuadrado que lo contiene, de área 1/4 del total, puede observarse que la proporción entre estas áreas es 4:1 (ver Paso 2 de la Figura 3-1), siendo éste un modo de obtener la respuesta 1/16. En esta actividad el uso de *pensamiento relacional* es promovido por el tipo de pregunta planteada que alude a relación entre áreas.

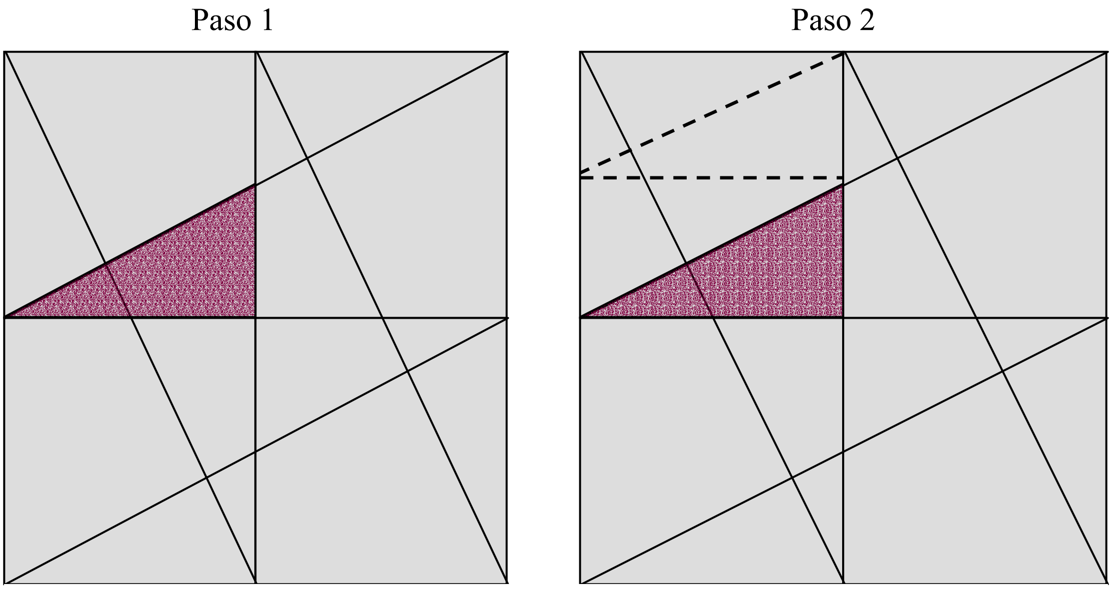


Figura 3-1: Actividad procedente de Mason (2006) en la que se pide calcular la proporción del área sombreada respecto del área total.

El *pensamiento relacional* puede ser asociado con cierta disposición a analizar la estructura y relaciones de los objetos matemáticos pero también puede tener lugar de forma espontánea. En ocasiones, es posible que, en el primer acercamiento al objeto u objetos matemáticos, ciertas características o relaciones entre los objetos “emerjan de él”, es decir, que sin haber realizado una búsqueda directa de relaciones éstas vengan a la mente del sujeto y “se hagan visibles”. Así, por ejemplo, al observar la Figura 3-1 algunas personas pueden apreciar, “a simple vista”, que los cuatro triángulos que se unen en el centro del cuadrado son iguales, o que el cuadrado está dividido en cuatro cuadrados iguales que se unen en el centro de la figura. De forma similar, en la expresión 5 + 5 + 5 + 5 puede saltar a la vista del lector que todos los términos involucrados son iguales, sin necesidad de haber realizado una búsqueda consciente de relaciones entre los elementos de dicha expresión.

Ciertas características o relaciones “sobresalientes” de, o entre, objetos matemáticos, al ser detectadas de forma espontánea, pueden favorecer un enfoque relacional en vez de un enfoque computacional o centrado en la aplicación de un procedimiento aprendido, al inducir al sujeto a estudiar el modo en que las relaciones que detecta, entre los objetos, le pueden conducir a la obtención de la respuesta o de información de interés sobre la situación en estudio. De este modo, el *pensamiento relacional* se presenta como una acción intelectual, alternativa a la aplicación de procedimientos estándares, centrada en la consideración y exploración de las relaciones y estructura de los objetos o situaciones matemáticas.

En el supuesto de una tarea de resolución de la igualdad $12 + 7 = 7 + \square$, el uso de pensamiento relacional podría ser como se describe a continuación. Primeramente el sujeto observa la totalidad de la expresión y comienza a examinarla. Detecta algunas de sus características y discierne algunos de sus componentes, por ejemplo: tiene un signo igual (lo que le confiere una estructura particular a la expresión), incluye dos términos en cada miembro y el miembro derecho contiene un recuadro en blanco.

De manera espontánea, o cuestionándose directamente, detecta relaciones entre las partes de la igualdad como la presencia de un siete en ambos miembros, así como que ambos miembros contienen una operación de suma. Estas características le permiten saber que ha de resolver una igualdad de suma en la que se desconoce uno de los sumandos del miembro derecho y, las relaciones observadas, le pueden conducir a reflexionar sobre la manera en que esta información le ayuda a obtener la respuesta: *...en uno de los miembros aparece la suma de 12 y 7, y en el otro también aparece una suma que involucra a un 7. Entonces, ¿cuál puede ser el número que ha de ir en el recuadro? ¿Qué conozco sobre sumas con términos iguales?...* Mediante dicho proceso de reflexión, o mediante el recuerdo espontáneo de la propiedad conmutativa de la suma, el sujeto obtendrá la respuesta 12 a dicha igualdad. Este proceso, que aquí ha sido descrito detalladamente, ocurre, en general, en cuestión de segundos, no siendo el sujeto explícitamente consciente de cada uno de los pasos realizados.

El *pensamiento relacional* es un tipo de la variedad de pensamiento y acciones intelectuales que tienen cabida en la actividad matemática. Este pensamiento puede tener lugar tanto en una etapa intermedia o final, como en una fase inicial. Por ejemplo, puede tener lugar tras un proceso de simbolización o representación o puede ser utilizado para reducir la situación o problema a otro equivalente, que sea más sencillo o de mayor utilidad. Así, por ejemplo, al considerarse cadenas de operaciones de fracciones (ej., $\frac{5}{3}(\frac{14}{3}+\frac{1}{2})\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$) el pensamiento sobre las relaciones que existen entre los términos que la componen puede ayudar a simplificar el cálculo a realizar: $\frac{5}{3}(\frac{14}{3}+\frac{1}{2})\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=(\frac{14}{3}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{14}{3}$.

Además, la búsqueda de relaciones, dentro del uso de pensamiento relacional, puede ser un proceso más o menos complejo que involucre diversidad de modos de razonamiento, en los que, no necesariamente, se utilice pensamiento relacional.

3.4 Pensamiento relacional en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas

Abordamos, a continuación, el interés y potencial de este tipo de pensamiento en el contexto de la aritmética y el álgebra, centrándonos en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. En este contexto nuestra concepción de *pensamiento relacional* se concretiza como:

La actividad intelectual de **examinar** expresiones aritméticas (algebraicas), considerándolas como totalidades, **detectar de manera espontánea o buscar relaciones** entre ellas o entre sus términos, **y utilizar** dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados.

En particular, este tipo de pensamiento puede tener lugar en situaciones de cálculo (transformación de expresiones algebraicas) o en situaciones en las que se relacionan expresiones aritméticas (algebraicas), por ejemplo, mediante relaciones de igualdad, desigualdad o de orden.

Situaciones de Cálculo

Por ejemplo, diremos que una persona usa *pensamiento relacional* para realizar el cálculo 14 + 9 cuando, tras examinar la expresión, busca o detecta relaciones entre uno de los términos y algún otro número, que le facilitan dicho cálculo. En este caso, puede buscar un número que sumado a 14 dé 20. Tras encontrar el valor desconocido en la sentencia *14 + n = 20*, para poder completar el cálculo, se necesita buscar qué relación existe entre 6 y 9. Otra posibilidad, en este mismo ejemplo, es que se relacione 9 y algún otro término, por ejemplo 10, y, puesto que $9+1=10$, se reste una unidad a 14 trasformando el cálculo a realizar en su equivalente 13 + 10, más sencillo para el cálculo.

En el caso del cálculo del valor numérico de la secuencia $14+9+6$ el uso de pensamiento relacional puede permitir simplificar su cálculo, al observarse que las operaciones a realizar resultan más sencillas cambiando el orden de los términos ($14+9+6=14+6+9=20+9=29$) o descomponiendo alguno de ellos ($14+9+6=10+4+9+6=10+4+6+9=10+10+9=20+9=29$).

De este modo, el *pensamiento relacional* puede ser utilizado para deducir respuestas o resultados que no se conocen o no se recuerdan en un determinado momento, a partir de otros que se conocen, o para resolver una secuencia de operaciones de forma más sencilla, transformándola mediante la aplicación de propiedades aritméticas o haciendo uso de la estructura del sistema numérico decimal.

Observamos, por tanto, que el uso de *pensamiento relacional* en el cálculo conlleva el uso de estrategias flexibles, no usuales o informales, muy relacionadas con el cálculo mental y con el uso del sentido numérico. Pensar de este modo requiere que los alumnos "miren" (consideren) la totalidad de la expresión para identificar relaciones numéricas significativas, antes de empezar a calcular, y tengan conciencia, al menos de manera implícita, de propiedades y relaciones aritméticas tales como la conmutatividad o la asociatividad de la suma (Carpenter et al, 2005).

Expresiones aritméticas relacionadas

Por otra parte, se puede usar *pensamiento relacional* en situaciones en las que se relacionan expresiones aritméticas, como en igualdades numéricas o expresiones aritméticas relacionadas mediante los signos *mayor que* o *menor que.*

Una posibilidad es que se utilice *pensamiento relacional* para calcular el valor numérico de una o ambas expresiones, o para averiguar la cantidad desconocida si la hay. Este caso es de la misma naturaleza que el cálculo anteriormente explicado.

Otra posibilidad de uso de *pensamiento relacional,* que es propia de este contexto, tiene lugar cuando, en vez de calcular el valor numérico de las expresiones relacionadas, se comparan y se establecen relaciones entre ellas, o dentro de ellas, que ayudan a obtener la respuesta. Por ejemplo, para resolver la igualdad numérica abierta 8 + 4 = □ + 5, se pueden comparar las expresiones que la componen, "8 + 4" y "□ + 5", y reconocer que ambas contienen una suma y que una contiene un 4 y otra un 5. Usando conocimiento de la propiedad de compensación y usando sentido numérico, mediante el cual se sabrá que 4 es una unidad menor que 5, puede deducirse que la respuesta es una unidad menos que 8, por tanto, 7.

Otro ejemplo puede darse al valorar la veracidad o falsedad de una desigualdad tal como 11 + 5 > 13 + 5. En este caso, a partir del análisis de las expresiones a ambos lados del signo *mayor que*, el alumno puede detectar la repetición de la operación suma y del número 5 y apreciar que 11 es menor que 13. La observación de estas relaciones le puede conducir a afirmar que la desigualdad es falsa puesto que a 5, se le está sumando, en el miembro izquierdo, un número mayor que en el derecho. En este caso se estaría haciendo uso de conocimiento sobre el efecto de la suma y sobre la magnitud relativa de los números 13 y 11.

Álgebra

De forma similar, el *pensamiento relacional* puede tener lugar en contextos algebraicos, en particular en la transformación de expresiones, en la resolución de igualdades, ecuaciones, inecuaciones y desigualdades o en la comparación de expresiones. Por ejemplo, la ecuación $3x+5=2x+4$ puede resolverse comparando ambos miembros y observando las relaciones expresadas por $3x=2x+x$ y $5=4+1$, y que, por tanto, la ecuación dada es equivalente a $x+1=0$; lo que permite obtener directamente la solución de la ecuación.

Esta estrategia conduce a trasformaciones semejantes a las utilizadas en los métodos tradicionales de resolución de ecuaciones, la diferencia subyace en el modo en que se justifican las transformaciones realizadas en la ecuación. En este caso el razonamiento no se basa en la propiedad de la igualdad que permite sumar, restar, multiplicar o dividir de igual modo en ambos miembros, sin que la igualdad se vea alterada, aunque se haga uso de estas propiedades. El pensamiento se centra en las relaciones que existen entre las expresiones de ambos miembros y en la relación que se fuerza entre ellas: la igualdad.

De forma similar, si en vez de una ecuación dicha expresión fuera la inecuación $3x+5>2x+4$, puede concluirse, a partir de las relaciones mencionadas anteriormente, que la diferencia existente entre dichas expresiones $(x+1)$ ha de ser un número positivo, lo que conduce a la resolución de la inecuación.

En resumen, este tipo de pensamiento hace referencia a situaciones en las que la aplicación directa de un procedimiento es dejada en un segundo plano, y la persona centra su atención en relaciones existentes entre las expresiones involucradas o entre partes de éstas.

Por último, es importante observar que la contextualización de nuestra definición de *pensamiento relacional* en el ámbito del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, es compatible con el uso que Koehler, Carpenter y colaboradores hacen de este término, en el sentido en que coinciden las manifestaciones que se le reconocen a este tipo de pensamiento.

3.4.1 Carácter algebraico

En los diversos ejemplos presentados se observa que el uso de *pensamiento relacional*, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas, comprende varios aspectos que evidencian el carácter algebraico de este tipo de pensamiento:

- La consideración de expresiones aritméticas y algebraicas desde un punto de vista estructural, promoviendo un enfoque no computacional de la aritmética al alejar la atención del valor numérico de las expresiones, es decir, de la obtención del resultado de las operaciones involucradas.
- La concepción de las expresiones como totalidades susceptibles de ser comparadas, ordenadas, igualadas y trasformadas, y, por tanto, la aceptación de la falta de clausura.
- El uso del lenguaje horizontal, tradicionalmente más propio del álgebra que de la aritmética.
- El favorecer la interpretación bidireccional de las igualdades y sentencias
- La potenciación de la exploración, identificación y descripción de patrones y relaciones sobre los números y operaciones, primeros pasos en el proceso de su generalización.

- El favorecer el desarrollo y uso de sentido numérico y de sentido operacional, facilitando el avance hacia la concepción de las operaciones y expresiones aritméticas como objetos, y no sólo como procesos.
- La potenciación de un enfoque aplicable a la resolución de ecuaciones, en el contexto de la resolución de igualdades. En el álgebra, los alumnos deben manejar expresiones que involucran operaciones que no es posible realizar (ej., $3x + 7y - 4z$). Tienen, por tanto, que pensar en relaciones entre expresiones, por ejemplo, para averiguar el modo en que las ecuaciones pueden ser transformadas para resolverlas o en que las expresiones pueden ser comparadas. A este respecto, conjeturamos que el *pensamiento relacional* puede ayudar a los alumnos a desarrollar métodos propios, personales y flexibles, para la resolución de ecuaciones. Algo que suele trabajarse en el aprendizaje de la aritmética pero no en el aprendizaje del álgebra.
- El promover la exploración de la igualdad como la representación de una relación estática entre dos expresiones.

El *pensamiento relacional* se muestra de esta forma relacionado con la parte del álgebra relativa al estudio y generalización de patrones y relaciones, que es uno de sus principales componentes. El trabajo centrado en el uso y desarrollo de *pensamiento relacional* pretende que el alumno desarrolle su comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal y de las operaciones aritméticas, antes de que sea necesario trabajar con variables e incógnitas, y que se trabajen de manera explícita las relaciones que subyacen a la aritmética, las cuales no son habitualmente articuladas en el aula.

3.4.2 Importancia del pensamiento relacional

La descripción de *pensamiento relacional* aportada permite vislumbrar la especial importancia de este tipo de pensamiento por el papel que desde la perspectiva representacionalista se le reconoce a las relaciones en el proceso de comprensión y desarrollo de conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992). Este tipo de pensamiento centra la atención en las relaciones, una parte esencial del conocimiento matemático. Las relaciones entre conceptos dan lugar a estructuras conceptuales que constituyen la esencia del conocimiento matemático organizado. *“Por ello debe ser un elemento permanente de trabajo el establecimiento y reconocimiento de* *relaciones que se dan entre los conceptos que se está trabajando"* (Rico, Castro, Fernández, Fortuna, Valenzuela y Valldara, 1990, p.9). Las matemáticas es una disciplina de ideas conectadas (NCTM, 2000).

En el contexto de la aritmética, como se ha mostrado en el apartado previo, el trabajo centrado en el uso y desarrollo de *pensamiento relacional* presenta variados aspectos algebraicos que favorecen el desarrollo de una buena base para el posterior estudio formal del álgebra. Permiten abordar dentro de la enseñanza de la aritmética aspectos que son habitualmente fuente de dificultades para los alumnos en el aprendizaje del álgebra, ayudando de este modo a prevenir algunas dificultades y a desarrollar modos de pensamiento algebraicos.

Los alumnos pueden usar *pensamiento relacional* para: simplificar cálculos, construir y aprender conceptos, extender procedimientos a nuevos dominios numéricos y, en general, dar sentido a la aritmética (Carpenter et al., 2005).

En el trabajo con expresiones aritméticas, el *pensamiento relacional* facilita la integración eficaz de las relaciones y propiedades aritméticas en la actividad matemática y que el conocimiento y capacidades que los alumnos desarrollan durante la Educación Primaria estén mejor alineados con los conceptos y capacidades que son posteriormente necesarios en el aprendizaje del álgebra (Carpenter et al., 2005). Se ha observado que los alumnos que utilizan propiedades y relaciones en contextos numéricos, a lo largo de la Educación Primaria, muestran mayor comprensión en su aplicación general cuando estudian dichas relaciones de manera formal en el álgebra (Howden, 1989).

Los alumnos poseen una importante cantidad de conocimiento implícito sobre propiedades aritméticas, pero generalmente no han examinado generalizaciones de propiedades sobre números y operaciones de forma explícita, o pensado sistemáticamente sobre ellas. Las actividades centradas en el uso de pensamiento relacional facilitan hacer explícito dicho conocimiento. Representan un cambio fundamental de un foco aritmético (procedimental, centrado en el cálculo de respuestas) a un foco algebraico (estructural, centrado en examinar relaciones).

El uso de *pensamiento relacional* ayuda a minimizar el cálculo de operaciones y hace que los alumnos piensen sobre las propiedades de las operaciones, la manipulación de expresiones numéricas y sobre cómo esta manipulación afecta a las expresiones (Koehler, 2004; Molina, 2005). En definitiva, persigue favorecer un aprendizaje significativo de la aritmética (al enfatizar su consideración como un sistema matemático organizado según ciertos principios), el desarrollo de fluidez en el cálculo y el desarrollo de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter et al., 2003; Koehler, 2004; Molina, 2005).

En particular, se considera que el estudio de las propiedades de las operaciones puede ser un buen instrumento para desarrollar el pensamiento inductivo y generalizador (Rico et al.,1990).

Considerando los principales objetivos del currículo español de matemáticas en la Educación Primaria para el desarrollo de conocimiento matemático (Real Decreto 115/2004), se observa que este tipo de pensamiento puede ayudar a abordar, en el contexto de la Aritmética, la comprensión de los conceptos, propiedades y relaciones de la estructura matemática relativas al sistema numérico decimal y a las operaciones de las estructuras aditiva y multiplicativa así como el uso adecuado del lenguaje matemático para identificar relaciones.

En particular, contribuye al desarrollo del sentido numérico y de las capacidades de estimar y juzgar la razonabilidad de los resultados de operaciones, y favorece la exploración y uso de patrones y relaciones numéricas, aspectos destacados en los estándares del NCTM (2000) como elementos esenciales de la educación matemática en la educación obligatoria. Además, ayuda a reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas, concretamente aritméticas, favoreciendo el desarrollo de una visión de las matemáticas como una disciplina de ideas conectadas.

3.5 Términos de la literatura en conexión con el pensamiento relacional

En este apartado recogemos las definiciones y principales características de diversos términos relacionados con el *pensamiento relacional* y el aprendizaje de la aritmética y el álgebra, lo que nos ayudará a establecer conexiones entre dicho término y otra terminología más habitual en la literatura.

3.5.1 Pensamiento cuantitativo flexible

Weaver (1957) hace referencia a la importancia del desarrollo de un pensamiento cuantitativo flexible definiendo éste como "*la habilidad de pensar y reaccionar ante una situación cuantitativa en formas diversas*" (p.184). De este modo, se refiere al uso de estrategias o patrones de pensamiento alternativos o no convencionales en el contexto de la aritmética. El valor de la flexibilidad en el pensamiento radica, según este autor, en la habilidad de seleccionar de, entre diversos modos de pensamiento o de actuación, el que es más útil o eficaz para ciertas circunstancias cuantitativas.

En ocasiones los niños muestran estrategias de pensamiento alternativas o no convencionales que no les han sido explícitamente enseñadas. Estos son ejemplos de grados de flexibilidad que han desarrollado por propia iniciativa. Según Weaver, estos ejemplos son consecuencia indirecta, sino directa, de la naturaleza significativa de las experiencias y actividades de aprendizaje.

En ocasiones estas estrategias empleadas por los alumnos no son apreciadas o incluso aceptadas en el aula, al primarse el uso de estrategias convencionales que los alumnos deben de aprender necesariamente. Los modos de pensamiento alternativos a los convencionales suelen ser considerados poco importantes o, incluso, en ocasiones innecesarios o indeseables.

Sin embargo, Weaver insiste en la importancia de la flexibilidad en el pensamiento pues contribuye a un aprendizaje con comprensión de las matemáticas. Considera esencial que en la enseñanza de la aritmética se acepte, se reconozca y se fomente la flexibilidad de pensamiento, animando a los alumnos a descubrir y emplear modos de pensamiento o procedimientos alternativos. Estas estrategias alternativas pueden ser empleadas tanto en el manejo de materiales manipulativos como en el pensamiento o en el empleo de notación simbólica. Sin embargo, Weaver señala que el propósito principal del maestro no debe ser la enseñanza de patrones de pensamiento y actuación alternativos, aunque en alguna ocasión esto puede ser deseable, sino el crear situaciones que ayuden a los alumnos a descubrirlos, pudiendo ser recomendable que el maestro realice algunas sugerencias o indicaciones al respecto.

> *El maestro puede facilitar el desarrollo de flexibilidad en el pensamiento y en la acción mediante una enseñanza matemática significativa que ponga el énfasis en las relaciones numéricas, las leyes básicas o los principios de operación con números, y similares* (Weaver, 1957, p.187).

Además, Weaver recomienda que los alumnos compartan las estrategias empleadas y debatan las ventajas de cada una de ellas, advirtiendo que unas estrategias pueden ser más útiles o eficaces para unos alumnos que para otros. No todos los alumnos pueden desarrollar igual flexibilidad de pensamiento, pero todos pueden desarrollar cierto grado de flexibilidad.

3.5.2 Cálculo mental

En relación con el pensamiento cuantitativo flexible se encuentra el cálculo mental, un aspecto de las matemáticas al que investigadores y educadores le han reconocido, y le reconocen, un papel destacado en la enseñanza matemática propia de la Educación Primaria e, incluso, de la Educación Secundaria (Baroody y Coslick, 1998; Ewbank, 1977; Gómez 1988, 1995a, 2005; Roa, 2001; Trafton, 1978). Los enfoques más recientes se refieren principalmente a propuestas de disminución de la atención prestada a los algoritmos estándares y, en menor medida, al carácter utilitario, rápido y agilizador de la mente de este tipo de cálculo (Gómez, 1995a).

En particular, el curriculum oficial español de Educación Primaria hace referencia a la utilidad del cálculo mental para promover el entendimiento de la reversibilidad de operaciones y favorecer el desarrollo de la capacidad intelectual (Real Decreto 115/2004). En el currículo de la Educación Secundaria se le sigue reconociendo su importancia, siendo un criterio de evaluación destacado, especialmente en los dos primeros cursos, la elección de un tipo de cálculo adecuado en la resolución de problemas; en particular el uso adecuado del cálculo mental (Real Decreto 116/2004).

Se considera que el cálculo mental es importante para el desarrollo de la comprensión de los números y de la capacidad de razonar con ellos, que puede conducir al descubrimiento y mejora de la comprensión de propiedades y de la estructura del sistema numérico y al desarrollo de flexibilidad del pensamiento cuantitativo, y que es susceptible de ser utilizado por los educadores para evaluar la comprensión del número, del sistema de numeración y de las operaciones (Gómez, 1995a; Trafton, 1978).

Es, según Gómez (1989), el cálculo que más se utiliza en la vida cotidiana, es rápido, es la base de los métodos de cálculo sobre papel, es una herramienta para detectar equivocaciones en cálculos hechos mediante otros medios (ej., escritos, con calculadora), y es una componente crucial del cálculo estimado.

Trafton (1978) y Gómez (1989) utilizan el término cálculo mental para referir a cualquier procedimiento algorítmico, no estándar, que permite dar respuestas de cálculo exacto que se realiza pensando, sin utilizar lápiz ni papel. Estos procedimientos o estrategias no son básicamente diferentes de los métodos de cálculo escrito que no corresponden al uso de algoritmos, con la salvedad de que no reciben el apoyo del uso de la escritura para anotar pasos intermedios o resultados parciales (Gómez, 2005). En otras ocasiones, Gómez (1995a) emplea el término cálculo mental con un significado más amplio, para referir a cualquier cálculo exacto que es hecho de memoria, es decir, sin ayuda externa, incluyendo la emulación y adaptación mental de los algoritmos estándares y de los métodos de recuento.

Gregorio (2004), por su parte, distingue dos tipos de cálculo mental, el reflexivo y el automático. El primero de estos términos se refiere al cálculo pensado mediante estrategias numéricas diferentes a los algoritmos estándares. El cálculo mental automático, en cambio, se refiere a los cálculos que han sido memorizados, como suele ser el caso de las tablas de multiplicar y numerosos hechos numéricos que involucran números pequeños.

El cálculo mental, también denominado cálculo pensado, es caracterizado por Gómez (1995a, 2005) a partir de los siguientes aspectos: es de cabeza, se puede hacer rápidamente, es flexible (se adapta a los datos), se apoya en un conjunto limitado de hechos numéricos, y requiere ciertas habilidades como conteos, recolocaciones, compensaciones, descomposiciones, redistribuciones, etc., para sustituir o alterar los datos iniciales y, así, trabajar con otros más cómodos o más fáciles de calcular.

Plunkett (1979, según cita Gómez, 1989) añade que es volátil, activo, global, constructivo, icónico y no está hecho para ser escrito.

Las bases del cálculo mental son el dominio de la secuencia contadora y de hechos numéricos conocidos, en combinación con propiedades específicas del sistema numérico; no sólo el conocimiento de la existencia de determinadas estrategias, sino también la reflexión sobre ellas para elegir o utilizar la más adecuada en cada situación (Miras, 1994; Thompson, 1999). El cálculo mental es una importante aplicación del sentido numérico (Baroody y Coslick, 1998).

Este tipo de cálculo requiere que los alumnos sean capaces de, ante una situación, tomar decisiones sobre como tratar los números, seleccionar una estrategia de cálculo adecuada para la situación y ejecutar los pasos necesarios para llevar a cabo dicho enfoque (Trafton, 1978).

Estrategias propias del cálculo mental.
Los algoritmos o estrategias propias del cálculo mental son flexibles y personales, están en función del conocimiento que cada individuo tiene sobre los números, las operaciones y sus propiedades e, incluso, de sus preferencias individuales (Roa, 2001).

Existen muy variados procedimientos de cálculo mental. Estos procedimientos facilitan el recuerdo de respuestas parciales, permiten una interpretación más significativa de los números y suelen ser más eficientes para el cálculo mental que los algoritmos estándares.

Dentro de la multitud de algoritmos que se pueden emplear en el cálculo mental, recogemos a continuación algunos de ellos para el caso de la suma y de la resta, varios de los cuales se basan en la descomposición de alguno de los términos a operar (Gómez, 1995a; Roa, 2001; Trafton, 1978).

De sumas:

- Completar un sumando hasta convertirlo en un múltiplo de diez u otro tipo de compensaciones (ej., $19 + 7 = 20 + 6 = 26$)

- Separar las distintas unidades de cada sumando (ej., 24 + 63 = (20 + 60) + (4 + 3) = 80 + 7 = 87
- Descomponer sólo uno de los sumandos (ej., 321 + 475 = 21 + (300 + 475) = 21 + 775 = 1 + (20 + 775) = 1 + 795 = 796)
- Usar patrones o hechos conocidos (ej., 25 + 28 = 25 + 25 + 3 = 50 + 3 = 53).

De restas:

- Recorrer distancias del substraendo al minuendo o viceversa (ej., 456 – 125, de 125 a 200 van 75 y de 200 a 456 van 256, luego 456 – 125 = 75 + 256)
- Descomponer ambos o uno de los términos en unidades de distinto orden o de forma conveniente según la operación a realizar (ej., 856 – 237 = (800–200) + (56 – 37) = 600 + 19 = 619)
- Realizar el algoritmo estándar de izquierda a derecha
- Obtener la misma terminación en ambos términos (ej., 461 – 166 = 661 – 161 – 5 = 295)
- Usar patrones o hechos conocidos (ej., 75 – 28 = 75 – 25 – 3 = 50 – 3 = 47).

Por otra parte, destacamos algunas estrategias de cálculo mental para sumas y restas identificadas por Thompson (1999, 2000) a partir de entrevistas realizadas a 350 alumnos de Educación Primaria que no habían recibido formación explícita al respecto.

En el caso de números menores de 20, el autor distingue entre estrategias basadas en el conteo y estrategias basadas en el uso y derivación de hechos numéricos. Según Thompson, estas estrategias aparecen ordenadas por grado de sofisticación:

<u>Estrategias basadas en el conteo:</u>
Para la suma: contar hacia delante desde el primer sumando, contar hacia delante desde el sumando más grande.
Para la resta: contar hacia atrás desde el minuendo tantos pasos como indique el substraendo, contar hacia atrás desde el minuendo hasta el substraendo, contar hacia delante desde el substraendo hasta el minuendo (suma complementaria).

<u>Estrategias basadas en el uso o derivación de hechos numéricos:</u>

Para la suma:

- Por la cercanía a un hecho numérico de suma de dobles (ej., 8 + 5 = , *“trece porque ocho y ocho son dieciséis…se restan tres”*)
- Usando cincos (ej., 6 + 7 = , “*trece porque tomo cinco del seis y cinco del siete y me sobran tres”)*
- Completando hasta diez (ej., 8 + 6 = , *“si ocho es dos menos que diez…suma dos del seis entonces todas las sobras de antes…las pones hasta catorce”*)
- Por compensación (ej., 9 + 5 = , *“catorce porque diez y cinco son quince… y por eso nueve y cinco serian catorce”*)
- Por balance (ej., 7 + 9 = , es lo mismo que 6 + 10, luego es dieciséis).

Para la resta:

- Utilizar un hecho numérico de suma de dobles (ej., 18 – 9 = , “*es nueve porque nueve más nueve son dieciocho”)*,
- Por la cercanía a un hecho numérico de suma de dobles (ej., 9 – 5 = , *“es cuatro porque diez menos cinco es cinco… y nueve es uno menos que diez”*),
- Viendo la resta como operación inversa o complementaria de la suma (ej., 7 – 3 =, “*cuatro porque se que cuatro y tres son siete… y yo sólo quito tres”*),
- Completando hasta diez (ej., 12 – 4 = , *“Ocho…yo se que si quitas dos es diez… y tienes otros dos de sobra, y quitas eso y es ocho”).*

En el caso de números mayores de 20, Thompson (2000) identifica cinco estrategias para el cálculo mental de sumas y restas: partición, secuenciación, un método híbrido, compensación y suma-complementaria. La primera de ellas, partición, es una de las más comunes tanto en la suma como en la resta y consiste en descomponer cada término en unidades de distinto orden, operar las unidades de mismo orden y, después, agrupar los términos resultantes (ej., 63 + 56 = , *“ciento diecinueve… sume sesenta y cincuenta primero y entonces añadí tres al seis”;* 86 – 39 = *,“cuarenta y siete… he quitado treinta de ochenta que da cincuenta, y entonces he quitado seis de nueve…y luego he quitado los tres, lo que da cuarenta y siete”*).

La estrategia de secuenciación es menos frecuente y consiste en la descomposición del segundo término en unidades de distinto orden, las cuales son sumadas o restadas de forma secuenciada al primer término (ej., 55 + 42: "97…*he sumado el 40 a 55 y eso hace 95… y otro dos es 97*"). El método mixto o híbrido combina parte de los dos métodos anteriores, primeramente se descomponen los términos en unidades de distinto orden, entonces se operan las unidades de mayor orden y, al resultado obtenido, se le van realizando el resto de operaciones (ej., 37 + 45: "82… *he sumado 40 y 30 lo que hace 70… y entonces he sumado 5 que hace 75…y entonces he sumado 7 lo que da 82*").

La estrategia de compensación consiste en sumar o restar un número mayor del indicado en la operación a realizar (habitualmente el siguiente múltiplo de diez) y, después, modificar el resultado compensando la cantidad extra sumada o restada (ej., 46 + 39: "*85… he dicho que era 40… entonces 40 más 46 es 86 y tienes que quitar uno*").

La estrategia suma-complementaria, también llamada sumar hasta 10, consiste en calcular hechos numéricos de resta añadiendo términos al minuendo hasta obtener el substraendo (ej., 73 – 68: "5… *he sumado 2 a 68… y entonces eso hace 70, y entonces he sumando otros 3*").

3.5.3 Estratégias de cálculo flexible

Las afirmaciones anteriores relativas a la importancia del cálculo mental y a los conocimientos y habilidades que pone en juego, son generalizables para las estrategias de pensamiento cuantitativo o de cálculo flexible, también denominadas personales o informales, independientemente de que sean realizadas mentalmente o no. Estas estrategias incluyen, en particular, las estrategias de cálculo mental que no consisten en la imitación de algoritmos estándares.

Investigadores de diferentes épocas (Baroody y Coslick, 1998; Gómez, 2005; Myers y Thornton, 1977; Putnam, deBettencourt y Leinhardt, 1990; Rathmell, 1978; Trafton, 1978) han señalado repetidamente la importancia de este tipo de estrategias, llegando en algunos casos a recomendar su enseñanza directa[19]. Se ha prestado una especial atención a su uso en la derivación de hechos numéricos a partir de otros hechos ya conocidos, en particular, en hechos numéricos de suma y resta. En dichos

[19] En el Capítulo 5, se resumen varios estudios que destacan la bondad de este tipo de estrategias y algunos aspectos de su desarrollo por parte de los alumnos.

casos son semejantes a las descritas anteriormente para el cálculo mental de hechos numéricos. Fuson, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter, et al. (1997) identifican estrategias similares para el caso de sumas y restas de términos con dos o tres dígitos.

Se considera que este tipo de estrategias son deseables y más sofisticadas que los simples procesos de conteo, porque se sustentan en la estructura y relaciones existentes entre los números. Además, son preferibles al uso sin comprensión de algoritmos estándares, ya que éste implica dejar de pensar en la magnitud de los números y la naturaleza de las operaciones (Schifter, 1999).

En particular, Carpenter (1980) señala que este tipo de estrategias involucran varios componentes importantes de la comprensión de la suma y la resta: relacionar la magnitud de diferentes combinaciones de números, saber cómo pueden descomponerse sumas y restas, comprender la relación existente entre la suma y la resta, y comprender propiedades básicas tales como la propiedad conmutativa y la asociativa de la suma.

Ashlock (1971) considera estas estrategias como un paso necesario entre el desarrollo del concepto de las operaciones y la práctica para el desarrollo de eficacia en el cálculo. Concretamente, distingue las relaciones entre los hechos numéricos como uno de los tres niveles del aprendizaje de los hechos numéricos que deben abordarse en la enseñanza de la aritmética, junto con la comprensión y el dominio de dichos hechos (entendiendo como dominio la capacidad de recordarlos).

Según este autor, mediante actividades que fomenten la observación y establecimiento de relaciones entre los hechos numéricos, se puede ayudar a los alumnos a deducir unos hechos numéricos a partir de otros más básicos. Por ejemplo, puede ser de utilidad agrupar hechos numéricos según una característica común, aplicando ideas tales como la conmutatividad o las operaciones inversas o las propiedades del 0 y del 1. Estas actividades permiten, además, la formulación de generalizaciones.

De forma similar, Rathmell (1978) destaca el papel de las estrategias de cálculo flexible como uno de los tres componentes de la enseñanza de los hechos numéricos, en este caso, junto al uso de materiales manipulativos y a las actividades de práctica repetida. Este autor considera esencial enseñar a los alumnos estrategias de pensamiento cuantitativo flexible para que, de este modo, aprendan estrategias maduras que les sean útiles y eficientes para resolver los hechos numéricos más difíciles, haciendo observar que, según parecen indicar numerosas investigaciones (ej., Myers y Thornton, 1977), las estrategias de pensamiento son elementos clave en la determinación de la eficacia del uso de materiales concretos o en el aprendizaje de los hechos numéricos.

Estas estrategias les permiten a los alumnos abandonar el uso de los materiales concretos y trabajar con representaciones simbólicas, siendo también importantes para ayudarles a recordar los hechos numéricos ya que facilitan la organización de la información y dotan de coherencia al conjunto de los hechos numéricos (Rathmell, 1978).

Trafton (1978) propone abordar en la enseñanza, de forma regular y directa, el desarrollo de estrategias específicas y patrones de pensamiento mediante actividades orales en las que los alumnos expliquen su pensamiento y puedan escuchar los patrones de pensamiento de sus compañeros. Estudios más recientes (Baroody y Coslick, 1998; Gómez, 2005; Koehler, 2004), recomiendan que la enseñanza promueva su desarrollo de forma indirecta. El hecho de que estas estrategias tiendan a ser personales, al ser unas más intuitivas o más eficaces para unos alumnos que para otros, y que los alumnos difieran significativamente en su habilidad para usarlas, en el nivel de pensamiento que emplean y en los procedimientos mediante los cuales llegan a la solución, implica, según Baroody y Coslick (1998), que no deban enseñarse directamente. En cambio, recomiendan promover en el aula la discusión sobre diversas estrategias posibles para que los alumnos las conozcan y se apropien de aquellas que les resulten de mayor utilidad.

Gómez (2005) sugiere una enseñanza

> *enmarcada en un programa orientado a un ‘cálculo flexible’, que se proponga disminuir el énfasis tradicional sobre el cálculo escrito rígido, en favor de una combinación de cálculo variado: mental, estimado, con calculadora o con*

algoritmos estándar, según convenga al momento, a la situación y, al tamaño y características de los números involucrados (p. 24).

Este autor desaconseja centrar el interés en la rapidez o la inmediatez del cálculo, o en la uniformidad en los procedimientos, recomendando como centro de atención el análisis de las situaciones numéricas y la compresión y adquisición de los conceptos relacionados con la operatoria y la numeración (Gómez, 2005).

Koehler (2004) coincide con Gómez en observar la bondad de enseñar a los alumnos estrategias de cálculo flexible y en que dicha enseñanza no persiga la memorización de procedimientos sino su descubrimiento.

Para finalizar este apartado, nos referimos a un tipo de cálculo flexible concreto, el cálculo estimado, el cual no implica el cálculo exacto del resultado de las operaciones consideradas sino que consiste en el juicio del valor del resultado de operaciones aritméticas, o en la habilidad mental para hacer conjeturas en cálculo con una formación previa (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989).

Este es un tipo de cálculo de gran utilidad de la vida cotidiana y en la actividad escolar, en el cual predomina una gran flexibilidad de actuación ya que no se impone una secuencia de actuación obligatoria, sino que cada persona, ante un problema, escoge la estrategia que considera más conveniente. Aunque existen algunas estrategias típicas de la estimación, este tipo de cálculo es destacado como un ámbito de las matemáticas en el que promover el desarrollo de estrategia personales por parte de los alumnos (Segovia et al., 1989).

3.5.4 Sentido numérico

Lo que actualmente es conocido por sentido numérico fue referido por primera vez por Carpenter, Coburn, Reys y Wilson (1976), según recoge Sowder (1992). Estos autores, después de analizar unos datos sobre estimación, concluyeron que para que los estudiantes pudiesen realizar buenas estimaciones era necesario que desarrollasen intuición cuantitativa, un sentido que captase la "cuantía" de las cantidades representadas por números.

Posteriormente, la concepción de sentido numérico ha ido evolucionando, y ha sido definida de formas más o menos precisas por diversos autores, como se muestra a continuación.

Howden (1989) define el sentido numérico como una buena intuición sobre números y sus relaciones, que se desarrolla gradualmente como resultado de la exploración de números, su visualización en varios contextos y el establecimiento de relaciones de formas no limitadas a los algoritmos tradicionales.

La importancia del sentido numérico la establece en relación a su potencial para mejorar la concepción que tienen los alumnos sobre las matemáticas, ayudándoles a dotarlas de sentido y a no concebirlas como una simple colección de reglas. "*Los alumnos que pueden juzgar la razonabilidad de un resultado computacional y darse cuenta de que hay más de un modo de llegar a la solución, ganan confianza en su habilidad para hacer matemáticas"* (Howden, 1089, p.7).

Hope (1989), en un intento de definir globalmente este término, hace referencia a variados tipos de capacidades que considera característica del sentido numérico:

- Un sentido sobre los números y sus variados usos e interpretaciones,
- Una apreciación de los varios niveles de precisión cuando se trazan figuras,
- Un enfoque basado en sentido común en el uso de figuras para apoyar argumentos,
- Producción de estimaciones razonables,
- Detección de errores de cálculo,
- Elección del procedimiento de cálculo más eficaz,
- Reconocimiento de patrones numéricos.

Muy genéricamente el sentido numérico aparece definido en los Estándares de la NCTM de 1989 como "*Una intuición sobre los números que está trazada desde todos los significados del número"* (NCTM 1989, p. 39). En este mismo documento se identifican cinco componentes del sentido numérico:

- Comprensión de los varios significados del número (cardinal, ordinal, nominal y de medida)
- Comprensión concreta de las relaciones entre los números

- Comprensión de las magnitudes[20] relativas de los números, en otras palabras, desarrollo de un sentido del tamaño de los números
- Comprensión de los efectos relativos de las operaciones aritméticas sobre los números
- Relacionar medidas con referentes comunes (situaciones u objetos de la vida cotidiana)

De forma más genérica, Sowder lo define en 1988 como una buena organización conceptual que permite relacionar propiedades de los números y de las operaciones, y resolver problemas numéricos de formas flexibles y creativas (Sowder, 1992). Posteriormente, esta misma autora lo define, más detalladamente, como

> *la habilidad para descomponer números de forma natural, utilizar ciertos números como 100 o ½ como referentes, usar las relaciones entre las operaciones aritméticas para resolver problemas, comprender el sistema de numeración decimal, estimar, dar sentido a los números y reconocer las magnitudes relativa y absoluta de los números* (Sowder, 1992).

Definición que aparece recogida en la última versión de los estándares del NCTM (NCTM, 2000).

El término sentido numérico se refiere a unas capacidades importantes pero difíciles de encontrar, las cuales incluyen un cálculo mental flexible, buena estimación numérica y juicios cuantitativos. El cálculo mental flexible implica el reconocimiento de las equivalencias necesarias para reagrupar los números en un cálculo mental. La estimación numérica, por su parte, implica el reconocimiento de valores numéricos aproximados en el cálculo. Los juicios cuantitativos son otro ejemplo de sentido numérico referente a situaciones en las que es necesario juzgar las cantidades y hacer inferencias sobre los valores numéricos.

[20] Empleamos aquí el término magnitud con el significado que recogen Seco et al. (1999) "cualidad de ser más o menos grande". Partiendo de esta definición se distingue entre magnitud absoluta y relativa de un número según se considere éste de manera aislada o en relación con otros números.

Sowder (1992) hace referencia a las siguientes posibles manifestaciones del sentido numérico:

- Habilidad para componer y descomponer números,
- Movimiento flexible entre distintas representaciones y reconocimiento de cuando una representación es más útil que otra,
- Habilidad para reconocer la magnitud de los números. Esta habilidad incluye la comparación de números y de resultados de operaciones,
- Habilidad para tratar la magnitud absoluta de los números,
- Habilidad para utilizar puntos de referencia, por ejemplo, el uso de hechos numéricos, y modificarlos (adaptarlos) como estrategia para resolver la operación,
- Habilidad para vincular la numeración, operaciones y relacionar los símbolos de manera significativa, la cual está relacionada con el establecimiento de relaciones entre las acciones sobre cantidades y las operaciones con números.
- Comprender los efectos de realizar operaciones sobre los números, por ejemplo, reconocer que efecto produce la modificación de algún número en una operación,
- Habilidad para realizar cálculos mentales mediante estrategias mentales que aprovechen las propiedades de los números y las operaciones,
- Usar los números de manera flexible para estimar las respuestas numéricas a los cálculos y reconocer cuando una estimación es apropiada,
- Realizar juicios sobre la racionalidad de las respuestas producidas.

En dicho trabajo Sowder recoge las acepciones de sentido numérico consideradas por Trafton (1989), Marshall (1989) y Reys, Rybolt, Betsgen y Wyatt (1980). Trafton considera el sentido numérico como un tipo de enfoque de la enseñanza destacando su importancia en los aspectos que se refieren al modo en que los niños procesan los números en situaciones cuantitativas, lo que incluye el reconocimiento de la magnitud relativa de los números, ser capaz de describir una cantidad en términos de otras cantidades, y hacer juicios razonables en la resolución de problemas y cálculo de operaciones.

Marshall coincide en sugerir la idea de red conceptual que señalaba Sowder, entendiendo que el sentido numérico constituye los conectores de una basta red de nodos de conocimiento matemático. Los estudiantes pueden tener conocimiento acerca de las propiedades y las operaciones de los números naturales y que estas ideas existan en la memoria sin ser conectadas. El sentido numérico es lo que las pone en conexión.

Reys et al. (1980) indican que el sentido numérico se refieren a una "sensación" acerca de los números: su variedad de usos y sus diferentes interpretaciones, una apreciación de los distintos niveles de exactitud donde aparecen, una habilidad para detectar errores aritméticos cometidos y una aproximación al sentido común de cómo y cuando usar los números. Por encima de todo, el sentido numérico se caracteriza por un deseo de dar sentido a las distintas situaciones numéricas, siendo la comprensión de los números su elemento más importante. Estos autores señalan cuatro aspectos involucrados en el desarrollo del sentido numérico: los distintos tipos de números (naturales, enteros, fracciones, decimales,…), el tamaño de los números, la comprensión del valor posiciona y la idea parte–todo.

Arcavi (1994), por su parte, resumiendo a otros autores, define el sentido numérico de la siguiente forma:

> *un sentir no algorítmico de los números, una profunda comprensión de su naturaleza y de la naturaleza de las operaciones, una necesidad de examinar la razonabilidad de los resultados, un sentido de los efectos relativos de las operaciones sobre los números, un sentir del orden de las magnitudes y la libertad de reinventar maneras de operar con números de forma diferente a la repetición mecánica de lo que fue enseñado y memorizado* (p. 24).

McIntosh, Reys y Reys (1997) definen el sentido numérico como la comprensión general de una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad e inclinación para usar esta comprensión flexiblemente para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles y eficientes para trabajar con números y operaciones.

Baroody y Coslick (1998) definen el sentido numérico como un sentido intuitivo sobre los números y sobre cómo funcionan, que guía de manera flexible e inteligente las decisiones sobre el uso de los números. Como ejemplos indican reconocer que 90 es mucho mayor que 10, es casi 100 y mucho más pequeño que 1000, o que la suma 8 + 4 ha de resultar en algo más grande que 8.

Estos autores hacen referencia al sentido numérico como una brújula cognitiva que ayuda a seguir la dirección correcta en las matemáticas escolares. En particular permite cambiar de manera flexible entre diferentes representaciones de números, elegir de manera flexible entre estimación o estrategias de cálculo mental y juzgar la razonabilidad de las respuestas obtenidas y detectar así posibles errores de cálculo.

En un trabajo más reciente, Llinares (2001) define el sentido numérico como la habilidad para operar con números de manera flexible; una forma de pensar y usar los números cuyo dominio de aplicación abarca diferentes tipos de números y relaciones y cuatro diferentes dominios de contenido curricular: numeración, magnitud de números (absoluta o relativa), cálculo mental y estimación en cálculo. La idea de sentido numérico se basa en la posesión, por parte de los alumnos, de una red conceptual que relaciona los conceptos de agrupamiento y valor de posición con la habilidad de utilizar las magnitudes absolutas y relativas de los números para, entre otros aspectos, emitir juicios sobre la razonabilidad de resultados producidos en problemas numéricos, generar algoritmos no convencionales y relacionar los números por medio de las propiedades de las operaciones.

Zanocco, Baeza, León y Riveros (2006) utilizan el término sentido del número, en vez de sentido numérico, explicando:

> *Tener sentido del número, significa manejar una red conceptual bien estructurada, que nos brinda la posibilidad de relacionar las propiedades de los números con las de las operaciones. Se refiere no sólo a la capacidad de hacer cálculos, sino a la de establecer relaciones numéricas y a las competencias necesarias, que nos brindan la posibilidad de usar estos conocimientos en una forma flexible para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias, para resolver problemas, progresivamente más exigentes.*

Dichas competencias que mencionan Zanocco y colaboradores son:

- Comprender el significado de la función representada por diversos números, en contextos y situaciones variados, significativos y complejos.

- Analizar las regularidades del sistema de numeración decimal, para facilitar la comprensión del conjunto de los números naturales, como un conjunto ordenado, y la generación y formación de los números.
- Analizar el significado de las operaciones, las relaciones entre ellas y sus efectos sobre los números, refutando resultados incoherentes, para lograr una aplicación eficiente a la resolución de problemas.
- Estimar cantidades, mediciones y resultados numéricos, a través de diversos procedimientos, los cuales deben ser analizados, para determinar si son o no razonables.
- Evaluar y tomar decisiones sobre el procedimiento más adecuado (estimación, cálculo mental, algoritmo escrito o uso de la calculadora) para dar la respuesta a un problema.

3.5.5 Sentido operacional

El término sentido operacional ha sido utilizado, por algunos autores, en paralelismo con el sentido numérico, para referir a aspectos del sentido numérico relativos a las operaciones aritméticas. Concretamente Baroody y Coslick (1998) lo utilizan para referir al conocimiento del efecto de las operaciones sobre los números y la capacidad de elegir entre el método de cálculo más adecuado en cada situación, considerándolo como un componente del sentido numérico.

Slavit (1995, 1999), en cambio, presenta una idea de sentido operacional más elaborada que surge de la aplicación de la teoría de la reificación (Sfard y Linchevski, 1994) al análisis de la comprensión de la aritmética en conexión con el desarrollo de “comprensión algebraica”. Esta perspectiva teórica va dirigida al estudio de la comprensión de las operaciones matemáticas, con un foco particular en la transición a maneras algebraicas de pensar, es decir, para comprender cómo las competencias aritméticas de los alumnos pueden verse como raíces de posteriores formas de pensamiento algebraico[21].

[21] Aunque reconoce la multidimensionalidad del álgebra, incluso en los primeros grados, Slavit se centra en los procesos y acciones cognitivas asociadas con la abstracción de cálculos a ámbitos más estructurales, lo que, según él, es comúnmente referido como aritmética generalizada. La idea de sentido operacional permite analizar y medir el desarrollo de estas estructuras hasta un adecuado nivel de abstracción. Concretamente, los aspectos que señala representan algunos de los más importantes

Partiendo de estas consideraciones, Slavit define el sentido operacional como la habilidad de usar operaciones en al menos un conjunto de objetos matemáticos, pero señala que el sentido operacional involucra varios tipos de concepciones flexibles que pueden ser interrelacionadas por el alumno, como son: la estructura que subyace a la operación, sus propiedades, su uso, sus relaciones con otras operaciones y estructuras matemáticas, sus generalizaciones potenciales y las varias formas y contextos en los que la operación puede existir.

Para clarificar esta definición Slavit destaca diez aspectos del pensamiento operacional que permiten vislumbrar, de forma general, esta noción. Estos aspectos son un intento de aislar características matemáticas, contextuales y simbólicas de las operaciones que pueden ayudar el desarrollo cognitivo y sentido de una operación dada. Slavit hace observar que esta lista no es exhaustiva y que existe mucho más en la noción de sentido operacional de lo que puede ser contenido en cualquier lista, por muy exhaustiva que ésta sea.

1. Conceptualización de los elementos base del proceso

Este aspecto involucra la habilidad de descomponer la operación en sus componentes base. Esta conceptualización comienza como una comprensión dinámica de la operación, donde la operación es inicialmente concebida como una acción. Por ejemplo, la suma como contar, la multiplicación como suma repetida y la derivación como proceso límite.

2. Familiaridad con las propiedades que posee la operación

El conocimiento de propiedades, características o no, de una operación tales como la conmutatividad, asociatividad, existencia de elemento neutro, etc., ayuda a clarificar su naturaleza. En particular, es de vital importancia la conciencia sobre la invertibilidad de la operación.

La comprensión de las propiedades de una operación puede promover flexibilidad en el pensamiento sobre el cálculo, lo cual considera Slavit que, para ciertas operaciones, puede conducir a formas de pensamiento algebraico, al permitir al alumno actuar en la operación en sí misma, no sólo en los elementos a operar. El

puntos de referencia en este desarrollo, así como el tipo de interacciones entre éstos que conducen a una mejor comprensión.

conocimiento y comprensión de una operación permite ver una tarea desde otro punto de vista. Por ejemplo, una situación de la forma _ + b = c puede considerarse equivalentemente como b + _ = c. Además, Slavit señala que resulta vital la habilidad de comprender y hacer uso de las propiedades de las operaciones cuando los alumnos encuentran el simbolismo algebraico.

Esta familiaridad con las propiedades de la operación es facilitada por la experiencia con diferentes operaciones matemáticas actuando sobre diferentes objetos matemáticos. Por ejemplo, la conciencia de la propiedad conmutativa de la suma suele ser adquirida de forma temprana mediante experiencias aditivas pero puede no ser completamente apreciada hasta que se aprende la resta, que no es conmutativa.

3. Conocimiento de las relaciones de la operación con otras operaciones

El reconocimiento de las relaciones entre distintas operaciones puede favorecer el conocimiento de cada una de las operaciones (ej., la existencia de una operación inversa o complementaria). En este sentido los puntos 2 y 3 se encuentran conectados, ya que la comparación de las propiedades de las distintas operaciones conduce a una mayor conciencia y apreciación de las características de cada operación.

4. Facilidad con los variados sistemas de símbolos asociados con la operación

En la construcción del sentido operacional es esencial la construcción y la naturaleza de las relaciones entre los símbolos y los objetos mentales asociados. Slavit explica que la facilidad de los alumnos con un adecuado sistema simbólico es esencial para llevar acabo generalizaciones relativas a las propiedades. Es crítico que las generalizaciones de la operación se hagan en el contexto de la actividad simbólica, no únicamente en actividades sensorio–motoras, lo que exige que los datos de entrada sean entendidos como objetos mentales y que el conocimiento de un sistema de símbolos apropiado sea alcanzado de manera que permita actuar en la operación misma.

5. Familiaridad con los contextos de la operación

La experiencia con diferentes contextos asociados a la operación provee varias perspectivas desde las cuales un alumno puede desarrollar su sentido de esa operación. El aumento de las perspectivas con las que cuenta un alumno para “ver” una operación desarrolla su capacidad para identificar el uso de dicha operación en contextos más generales.

6. Familiaridad con los hechos de la operación

El conocimiento de hechos de una operación permite enfoques más avanzados para una tarea dada, al disminuir la carga cognitiva de la tarea.

7. Habilidad para usar la operación sin referentes concretos o situacionales

Cuando un alumno es capaz de comprender el significado de una operación matemática que actúa sobre valores numéricos abstractos, está mostrando una comprensión de la operación que va mas allá de los referentes concretos o situacionales y, por tanto, posee un avanzado sentido del uso de esa operación. Este alumno está realizando la operación mediante mecanismos internos.

8. La habilidad para usar la operación en elementos arbitrarios o desconocidos.

Un nivel superior de sentido operacional es alcanzado cuando se es capaz de operar sobre elementos arbitrarios o desconocidos. Esto requiere actos de generalización y sitúa el foco principal en la operación misma. Cuando las cantidades cuantitativas son desconocidas el nivel de abstracción aumenta. La operación no sólo debe ser comprendida independientemente de acciones en elementos concretos, sino que es necesario comprender su estructura.

Este aspecto del sentido operacional es habitualmente necesario en procesos de justificación donde se examina un caso arbitrario. Según Slavit, este aspecto es el que más claramente conecta la aritmética con la parte del álgebra que puede considerarse aritmética generalizada.

9. La habilidad para relacionar el uso de la operación entre diferentes objetos matemáticos

Un alumno que experimenta una operación en distintos objetos matemáticos (y sistemas de símbolos) puede crear diferentes esquemas de acción que involucran la misma operación (ej., suma de vectores, fracciones, enteros, decimales,…). La habilidad de ver los aspectos similares de una operación en diferentes sistemas de objetos, muestra un nivel elevado de sentido operacional.

10. La habilidad de moverse entre las anteriores concepciones

Ver la operación desde las diferentes perspectivas anteriormente señaladas, ya sea de forma simultánea o aislada, implica el máximo uso del sentido operacional. Además, unos componentes del sentido operacional van a favorecer el desarrollo de otros.

3.5.6 Sentidos, Aritmética y Álgebra

La denominación de "sentido", utilizada en los términos sentido numérico y sentido operacional, y otros como sentido simbólico (Arcavi, 1994) y sentido estructural o de estructura (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006; Linchevski y Livneh, 1999; Novotná, Stehlíková y Hoch, 2006), procede de la consideración de los alumnos como pensadores, como personas capaces de comprender los dominios matemáticos. Son términos asociados a una visión de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, centrada en "darle sentido a las matemáticas", es decir, en promover su comprensión (Arcavi, 1994; Piccioto, 1998).

Al igual que en el caso de los sentidos numérico y operacional, estas otras nociones son difíciles de definir y delimitar. Arcavi (1994) introduce la noción de sentido simbólico, en paralelismo con la noción de sentido numérico, como guía para que la enseñanza de álgebra no se centre únicamente en el aprendizaje de las trasformaciones simbólicas. Según este autor, el sentido simbólico debería incluir, más allá de la invocación de símbolos y su uso, la apreciación de la elegancia, lo conciso, la comunicabilidad y el poder de los símbolos para representar y probar relaciones de una forma que la aritmética no puede.

Por otra parte, Linchevski y Livneh (1999) emplean el término sentido estructural o sentido de estructura para referir al uso de estructuras equivalentes de una misma expresión (algebraica o numérica) de forma flexible y creativa, y, en general, a la comprensión de la trasformación de expresiones. Hoch (2003) utiliza este mismo término para referir a una colección de habilidades, separadas de la habilidad de trasformar expresiones algebraicas, que permite a un alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Posteriormente, Hoch y Dreyfus (2004, 2005) precisan algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué trasformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad.

Como ejemplo estos autores indican que la ecuación $1-\frac{1}{n+2}-(1-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{110}$ puede resolverse sin realizar ningún cálculo, mediante sentido estructural, al observar la repetición de la expresión $1-\frac{1}{n+2}$. De forma similar puede deducirse la equivalencia de las ecuaciones $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1})$ y $-x=5$, al apreciar la presencia en ambos miembros de la expresión $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$.

Otros ejemplos en los que los alumnos dan muestra de sentido estructural tienen lugar al reconocer que la ecuación $(x+17)(x-12)=0$ tiene la estructura $ab=0$, o que la expresión $64x^6-36y^4$ es una diferencia de cuadrados.

En un trabajo más reciente (Hoch y Dreyfus, 2006), estos autores presentan una definición de este tipo de sentido más elaborada, contextualizada en el álgebra escolar[22]. Un alumno muestra sentido estructural para el álgebra de Educación Secundaria si puede:

- Reconocer una estructura familiar en su forma más simple (ej., reconocer $81-x^2$ como una diferencia de cuadrados)
- Tratar un término compuesto como una entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja, cuando el término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma (ej., reconocer x^4-y^4 como diferencia de cuadrados) o una suma y posiblemente también un producto o potencia (ej., reconocer $(x-3)^4-(x+3)^4$ como diferencia de cuadrados)

[22] La noción de sentido estructural ha sido reformulada por Novotná, Stehlíková y Hoch (2006) en el contexto de conjuntos cualesquiera de elementos en los que hay definida una operación binaria.

- Elegir las manipulaciones adecuadas para hacer un mejor uso de estructura cuando la estructura está en su forma más sencilla, como en el cálculo de $1001^2 - 999^2$, y cuando el término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma o una suma y un producto o potencia, como en la factorización de $24x^6y^4 - 150z^8$ o en la demostración de $(x+y)^4 = (x-y)^4 + 8xy(x^2+y^2)$.

Sentido numérico versus sentido operacional

Pese a la generalidad de sus definiciones, y considerando que unos de los principales objetos sobre los que actúan las operaciones son los números, es clara la existencia de aspectos comunes al sentido numérico y al sentido operacional (en el sentido de Slavit) aunque ambas nociones están centradas en aspectos diferentes, el número y la operación, respectivamente.

La intersección de ambos tipos de sentidos difiere según la noción de sentido numérico que adoptemos. Algunas de las caracterizaciones del sentido numérico hacen referencia al conocimiento de las operaciones y sus propiedades, especialmente a su efecto sobre los números y su uso en la resolución de problemas numéricos. Dicho conocimiento ha de permitir elaborar diferentes estrategias para la resolución de un problema y juzgar la razonabilidad de los resultados. Otras acepciones engloban también el conocimiento de las relaciones que existen entre las operaciones. Estos aspectos vinculan al sentido numérico y al sentido operacional.

La principal diferencia que observamos entre ambos tipos de sentidos se refiere al modo en que son consideradas las operaciones. Mientras que el sentido numérico permanece dentro del ámbito de la aritmética, el sentido operacional se considera en parte algebraico. Dicha diferenciación no se reduce a que las operaciones se apliquen sobre símbolos o números, sino que radica en una diferente concepción. En el sentido numérico las operaciones son concebidas principalmente como acciones o procesos, sin embargo, en el desarrollo del sentido operacional han de llegar a ser concebidas como objetos pertenecientes a una estructura conceptual. El sentido operacional comprende la evolución necesaria en el aprendizaje de las operaciones, entendida como un proceso de reificación.

La Figura 3-2 ilustra el modo en que concebimos la relación existente entre estos dos sentidos, el sentido simbólico y el sentido estructural.

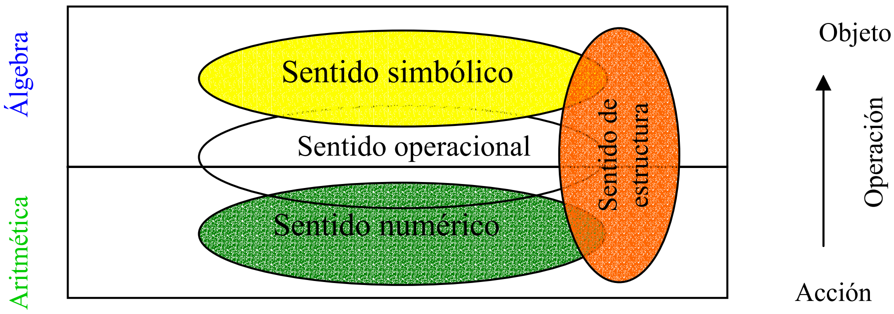


Figura 3-2: Sentidos relativos al aprendizaje y enseñanza de la aritmética y el álgebra

El sentido operacional comparte aspectos con el sentido simbólico y con el sentido numérico, como consecuencia de que las operaciones actúan sobre números y símbolos. Picciotto (1998) afirma, incluso, que el sentido operacional merece ser considerado en el núcleo de las matemáticas escolares debido a que las operaciones son la unión entre la aritmética y el álgebra.

El sentido estructural entendemos que comprende aspectos de los otros tres sentidos en tanto que se centra en la estructura que subyace a las expresiones aritméticas y simbólicas. No obstante, no es posible precisar el grado de coincidencia o de conexión entre los sentidos estructural y simbólico debido a que la definición dada por Arcavi es muy general. Es posible que muchas de las evidencias de sentido estructural destacadas por Hoch y Dreyfus puedan ser reconocidas, también, como evidencias de sentido simbólico.

3.5.7 Pensamiento cuasivariable

Fujii y Stephens han trabajado con expresiones numéricas generalizables (Fujii, 2003; Fujii y Stephens, 2001). Estos autores utilizan el término "cuasivariables" para referir al uso de los números en expresiones y sentencias numéricas que indican una relación matemática la cual es cierta para todos los números que se consideren (ej., $78+49-49=78$). Además, hacen referencia al "pensamiento cuasivariable" indicando que cuando un alumno explica la verdad de una expresión o afirmación basándose en sus propiedades estructurales está poniendo de manifiesto este tipo de pensamiento.

Estos autores parecen referir como pensamiento cuasivariable al pensamiento que se basa en la consideración de los números como variables, señalando que "*el uso de expresiones numéricas para ilustrar relaciones variables, requiere de un cambio de pensamiento, alejándose del cálculo hacia la investigación de patrones de generalidad y complejidad creciente"* (Fujii y Stephens, 2001, p. 264).

Fujii y Stephens insisten en la importancia de reconocer el potencial algebraico de la aritmética y destacan el papel de los números como cuasivariables como un elemento clave para abordar problemas aritméticos de manera algebraica, sin requerirse un conocimiento previo del lenguaje simbólico algebraico. Usándose los números de este modo, en expresiones generalizables, puede ayudarse a los alumnos a identificar y discutir generalizaciones algebraicas, de forma previa al aprendizaje del álgebra.

Además, el concepto de cuasivariable permite introducir la idea de variable en la transición de la aritmética al álgebra. Este es uno de los aspectos más destacados por Fujii (2003) al haber observado que el concepto de incógnita domina, frente al de variable, en la Educación Primaria y Secundaria.

El pensamiento cuasivariable en la matemática elemental implica atender a la naturaleza simbólica de las operaciones aritméticas. Concretamente, Fujii sugiere tres modos de suavizar la transición de la aritmética al álgebra: describir y hacer uso de los procesos y propiedades estructurales generalizables, generalizar soluciones a problemas aritméticos para facilitar el desarrollo, por los alumnos, del concepto de variable en un sentido informal, y proveer oportunidades a los alumnos para discutir sus estrategias de resolución de estos problemas con la intención de resaltar los procesos e ideas matemáticas fundamentales.

3.5.8 Meta-estrategias conceptuales y procedimentales

Hejny, Jirotkova y Kratochvilova (2006) diferencian entre meta-estrategias conceptuales y meta-estrategias procedimentales. La principal distinción entre ambos tipos de estrategias radica en que una meta-estrategia procedimental se basa en la activación, por parte del alumno, de ciertos procedimientos en su mente, tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. Sin embargo, se considera que un alumno utiliza una meta-estrategia conceptual, cuando crea en su mente una imagen del problema como una totalidad, lo analiza para conocer su estructura interna, y busca algunos elementos clave o relaciones para construir la estrategia de resolución.

Mientras que el uso de meta-estrategias procedimentales hacen al alumno más competente en problemas del mismo tipo que el dado, el uso de meta-estrategias conceptuales les conduce a una mayor comprensión de la situación abordada (Hejny et al, 2006).

Como ejemplos del uso de ambos tipos de estrategias estos autores hacen referencia a dos modos diferentes de abordar el cálculo de la expresión $\left|\frac{3+2i}{3-2i}\right|$: (a) multiplicar numerador y denominador por $3+2i$ y, posteriormente, calcular el módulo del número complejo resultante $\left|\frac{5+12i}{13}\right|$ y (b) responder 1 al apreciar que el módulo del numero complejo del numerador y el módulo del número complejo del denominador son ambos $\sqrt{13}$. El primer ejemplo corresponde, según los autores, al uso de una meta-estrategia procedimental y el segundo al de una meta-estrategia conceptual.

3.5.9 Conexiones de estos constructos con el pensamiento relacional

Meta-estrategias. Las meta-estrategias conceptuales, tal y como son definidas por Hejny et al. (2006), pueden considerarse sinónimas al uso de pensamiento relacional. En ambos casos el pensamiento del alumno se centra en la estructura de la situación o problema que se persigue abordar, siendo un aspecto destacado su consideración como totalidad. Ambos hacen referencia a modos flexibles de abordar la resolución de problemas o situaciones matemáticas centrando la atención en las relaciones y elementos clave que lo definen para construir la estrategia de resolución, dejando a un lado la aplicación de métodos estándares.

Pensamiento cuasivariable. En el contexto de la aritmética, cuando se consideran sentencias numéricas que expresan relaciones numéricas ciertas para cualesquiera números, el uso de pensamiento relacional puede ser identificado con lo que Fujii y Stephens (2001) denominan pensamiento cuasivariable. No obstante, este tipo de pensamiento es más específico que el pensamiento relacional ya que es aplicable sólo en expresiones y sentencias numéricas en las que los números son utilizados para expresar particularizaciones de propiedades matemáticas. Además, el término pensamiento cuasivariable es más restrictivo en el modo en que las relaciones apreciadas han de estar siendo concebidas por el sujeto, al exigirse su apreciación como casos particulares de propiedades.

<u>Sentidos aritméticos y algebraicos.</u> En el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas cualesquiera, destacamos conexiones del pensamiento relacional con los diferentes tipos de sentidos señalados previamente. En particular, se observa que el pensamiento relacional, en este contexto, implica el uso de sentido numérico y de sentido operacional, al establecerse relaciones entre los números, operaciones y expresiones consideradas y utilizarse conocimiento sobre la estructura del sistema numérico, las propiedades de las operaciones, y las relaciones entre operaciones, entre otros elementos. Este tipo de pensamiento también se encuentra vinculado con el uso de sentido estructural ya que este sentido incluye la capacidad de considerar las expresiones aritméticas o algebraicas así como la totalidad de la igualdad, sentencia o expresión como entidad; un componente clave en la definición del pensamiento relacional.

Adicionalmente, al examinarse objetos o situaciones matemáticas y apreciarse o establecerse relaciones, es necesario identificar subestructuras dentro de la totalidad de la expresión (en especial cuando las expresiones son complejas), compararlas entre sí y apreciar conexiones entre ellas. Todos éstos, componentes propios del sentido estructural según la definición dada por Hoch y Dreyfus (2004, 2005).

<u>Cálculo y pensamiento cuantitativo flexible.</u> El pensamiento relacional en el contexto del cálculo puede entenderse como pensamiento cuantitativo flexible en el sentido de Weaver en tanto que implica el uso de estrategias o patrones de pensamiento no convencionales en el contexto de la aritmética. No obstante, el pensamiento relacional es, en este caso, más específico.

También se observa que algunas de las estrategias propias del cálculo mental o algunas de las estrategias de cálculo flexible son modos de cálculo que corresponden al uso de pensamiento relacional, en aquellos casos en los que el alumno no está utilizando estrategias aprendidas como procedimientos estándares, sino que está actuando de forma flexible, analizando la expresión a calcular como una totalidad, apreciando su estructura concreta, y haciendo uso de relaciones apreciadas para realizar el cálculo o trasformarlo en otro más sencillo de resolver.

CAPÍTULO 4

Igualdad y Signo Igual

Abordamos aquí otra de las ideas o pilares base de este trabajo, el signo igual y sus significados. La consulta de los términos igualdad, equivalencia e identidad, de la evolución histórica del signo igual y de los distintos significados que se le atribuyen o se le han reconocido al signo igual, nos permiten profundizar en la comprensión de este símbolo y de las expresiones que lo contienen.

4.1 Las nociones igualdad, equivalencia e identidad

En este apartado se recogen las acepciones de los términos igualdad, equivalencia e identidad de diversos autores, obviando las acepciones jurídicas, morales o políticas. Debido a la diversidad de relaciones que se reconocen entre estos términos, los siguientes apartados han de ser considerados en conjunto y no independientemente, pues en ningún caso se trata únicamente de la igualdad, identidad o equivalencia sino que, en cada epígrafe, se da prioridad a uno u otro término para presentar de forma organizada las concepciones de los diversos autores consultados. En unos casos igualdad y equivalencia son considerados sinónimos, en otros, en cambio, lo son igualdad e identidad.

4.1.1 Igualdad

La Real Academia Española (RAE, 1992) define el término igualdad como conformidad de una cosa con otra, en naturaleza, forma, calidad o cantidad, correspondencia y proporción que resulta de muchas partes que uniformemente componen un todo; en matemáticas: expresión de la equivalencia de dos cantidades. Se define aquí *igual* como de la misma naturaleza, cantidad o calidad que otra cosa, del mismo valor y aprecio, constante, no variable, recogiéndose dos acepciones matemáticas: signo de la igualdad, formado por dos rayas horizontales y paralelas (=), y dícese de las figuras que se pueden superponer de modo que coincidan en su totalidad.

En el Diccionario del Uso de Español de Maria Moliner (1998) se define *igualdad* como cualidad de igual, circunstancia de ser iguales las cosas, definiéndose *igual* como se aplica, con respecto a una cosa, a otra que tiene la misma forma o el mismo aspecto, o que tiene comunes con aquella ciertos caracteres que son los que se consideran, muy semejante, lo mismo, de la misma manera, signo de la igualdad, entre otras acepciones. La acepción matemática del término de igualdad que recoge esta autora es fórmula con que se representa la equivalencia de dos expresiones, sinónimo de ecuación.

Desde la Filosofía

Brugger (1965) define la igualdad como un tipo de identidad, la identidad lógica, entendiendo que dos entes son iguales cuando se refieren al mismo concepto.

Abbagnano, en su Diccionario de Filosofía (1974), define la igualdad como la relación de sustitución entre dos términos, tomando la definición de Leibniz: *"Por lo general dos términos se dicen iguales cuando pueden ser sustituidos uno por el otro en el mismo contexto, sin que cambie el valor del contexto mismo"* (p. 635). Esta definición general, según Abbagnano, es aplicable tanto a las relaciones de igualdad puramente formales como a las relaciones políticas, morales y jurídicas.

Por su parte, Aristóteles (1998) considera la igualdad como una relación numérica sólo aplicable a las cosas que son cantidades[23], entendiendo que dos cosas son iguales si su cantidad es una. Cuando las cosas no son cantidades entonces debe hablarse de semejanza o desemejanza (Larroyo, 1982). Según Aristóteles (1998), a partir de la noción de unidad, de lo Uno, surgen las relaciones numéricas igualdad, semejanza y mismidad; entiendo que *son lo mismo* aquellas cosas cuya entidad es

[23] Aristóteles entiende que algo tiene cantidad cuando es divisible en partes internas, cada una de las cuales tienen entidad propia. La cantidad puede ser continua o discreta (Aristóteles, 1998).

una, *son semejantes* las cosas cuya cualidad es una y *son iguales* aquellas cuya cantidad es una[24].

En este contexto, la igualdad de objetos matemáticos es considerada como una mismidad. Así, dos líneas rectas iguales se dicen que son la misma línea, y dos cuadriláteros con lados y ángulos iguales se dicen que son el mismo (Aristóteles, 1998).

Otra de las fuentes filosóficas consultadas (Tododeiure), considera la igualdad como una noción predominantemente matemática, que se aplica por extensión en otros dominios. Según este autor, la igualdad consiste en la equivalencia de dos términos, de manera que uno pueda ser substituido por otro exacta y perfectamente, de tal suerte que después de la substitución la equivalencia no haya sufrido aumento ni disminución. En este diccionario se hace hincapié en la distinción entre igualdad e identidad, señalando que la identidad radica en la situación y propiedad ontológica de que todo objeto es igual a sí mismo, mientras que la igualdad es una equivalencia lógico-conceptual de dos o más factores individualizados y distintos.

Desde la Lógica

Frege expone que dos cosas son iguales si una de ellas puede ser sustituida por la otra sin pérdida de verdad. Sobre la igualdad matemática expone que es una forma de identidad, y no de igualdad, pues enuncia una relación entre dos nombres para objetos, no entre los signos que los designan. La igualdad matemática señala identidad de significado, no identidad de pensamiento, ni identidad de signos (Kenny, 1997).

Según Frege, una igualdad matemática es verdadera cuando los símbolos a ambos lados del signo igual se refieren al mismo número. Las diferentes expresiones que aparecen en los distintos lados de una igualdad verdadera, corresponden a diferentes nociones y aspectos, pero no a diferentes objetos (Kenny, 1997).

[24] Por entidad se refiere a los sujetos últimos que ya no se predican de otra cosa, y a lo que siendo algo determinado también es capaz de existir separadamente. Llama cualidad a las diferencias de la entidad, a todas las afecciones de las entidades sometidas a variación y, en el caso de las cosas inmóviles, como los objetos matemáticos, a lo que comprende su entidad a parte de la cantidad (Aristóteles, 1998; Larroyo, 1982).

Fregoso (1977), por su parte, define la igualdad entre objetos como una relación, identificándola con la noción de identidad:

> Dados A y B dos entes, objetos o ideas cualesquiera, se dice que *A es igual a B,* denotándose A = B si toda propiedad que tenga A la tiene también B y, recíprocamente, toda propiedad que tiene B la tiene A. En dicho caso también se dice que *A es idéntico a B* o que *A es lo mismo que B*. En caso contrario se escribe A ≠ B y se dice que A es distinto de B, A no es igual a B o A es diferente de B.

Partiendo de esta definición, de su noción de símbolo[25], y centrándose en la lógica proposicional, Fregoso define la igualdad de proposiciones[26], como una relación binaria definida sobre el conjunto de las proposiciones, noción basada en la idea de identidad numérica. Un elemento, un símbolo, va a ser únicamente igual a sí mismo.

> Dadas A y B dos proposiciones, sean R_A y R_B sus respectivos recipientes y S_A y S_B sus respectivos significados. Entonces, se dice que A y B son iguales, y se escribe A = B, si tienen los mismos recipientes ($R_A = R_B$) y los mismos significados ($S_A = S_B$) (Fregoso, 1977).

Desde las matemáticas y la Educación Matemática

En las matemáticas, debido a los numerosos ámbitos desde los cuales se puede considerar un determinado objeto matemático, no existe una noción única de igualdad, siendo a menudo una cuestión de definición. La igualdad entre dos objetos va a quedar determinada por las relaciones específicas del dominio al que pertenecen. (Freudenthal, 1994; Wilhelmi, Godino y Lacasta, en prensa). En ocasiones, cosas que no son iguales, tales como las expresiones 2/3 y 4/6, pasan a ser iguales al definirse una relación de equivalencia que las agrupa en una misma clase.

De forma genérica, Bouvier y George (2000) definen la igualdad como una relación binaria que asocia símbolos que representan un mismo objeto matemático. Esta

[25] Fregoso (1977) define *símbolo* como una pareja formada por un objeto — el significante o recipiente del símbolo —y una idea— el significado del símbolo. El significante, frecuentemente de naturaleza material, es escogido arbitrariamente y suele carecer de significado por sí mismo. Por otra parte, el significado puede ser de naturaleza muy variada. Un símbolo es, en definitiva, la materialización de una idea.

[26] Para Fregoso (1977) una proposición es un símbolo cuyo recipiente es una oración gramatical y cuyo contenido es verdadero o falso.

relación, que se denota con el signo igual (=), es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, es una relación de equivalencia. Estos autores afirman que la igualdad es una noción primitiva de las matemáticas como la pertenencia, la cual no se define más que por sus reglas de empleo que imponen que dos objetos matemáticos iguales tienen las mismas propiedades.

García (1992) coincide en considerar la igualdad como una relación que se expresa con el signo "=", pero la limita al ámbito del álgebra y la aritmética al definirla como una expresión de equivalencia entre dos cantidades, entendiendo la equivalencia como mismidad de valor. El término valor adquiere aquí un significado que viene determinado por el contexto en el que se trabaje.

Santamaría (1995), sin llegar a definir qué entiende por igual, define la noción de igualdad como "*la relación entre dos miembros iguales, entendiendo por miembros las expresiones que van delante y detrás del igual*" (p.206). Esta autora distingue diversos tipos de igualdades tales como la igualdad literal (igualdad algebraica) y la igualdad de ángulos, de números decimales, de segmentos y de triángulos (criterios de igualdad).

Vinogradov (1860) recoge los términos igualdad asintótica (relativa a funciones), igualdad de Parseval (relativa a la norma de un elemento en un espacio vectorial) e igualdad gráfica (procedente de la teoría de algoritmos de Márkov), junto con el de ecuación.

Díaz (1990) define de manera general la igualdad como una relación expresada por el signo igual, clarificando que dicha relación es una relación de equivalencia. Como ejemplos menciona las expresiones $L = 2\Pi r$ y $3 + 4 = 7$.

<u>Dentro de la Aritmética.</u> Chávez y León (2003) abordan la noción de igualdad de números naturales a partir de la idea de cardinal, definiendo: números iguales son los que representan conjuntos entre los que se puede establecer una correspondencia biunívoca. Esta relación binaria, así definida, es una relación de equivalencia que se denota mediante el signo igual.

Postigo (1991) también da una definición de igualdad restringida a contextos aritméticos. Define la igualdad como el modo gráfico de representar en la escritura la mismidad de valor entre números, para lo que se escribe entre ellos el signo igual.

Otros autores, como es el caso de Proyecto Sur (1997), denominan igualdades a las expresiones aritméticas o algebraicas que contienen el signo igual, limitando el uso de este signo, en la aritmética, a la expresión de relaciones verdaderas. Dentro de las igualdades algebraicas estos autores distinguen dos tipos: identidades y ecuaciones, según sean ciertas para todos los valores que se asignen a las variables o sólo para alguno o algunos.

En relación con la noción de igualdad, Wilhelmi y otros (en prensa) distinguen entre *tautológica lógica* y *tautología semántica* de forma similar a como Fragoso, desde la Lógica, distingue entre equivalencia e igualdad. Una tautológica lógica es una afirmación del tipo a = b donde ambos símbolos, a y b, representan al mismo objeto sin necesidad de que ambos tengan la misma representación (recipiente) (ej., $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$). La *tautología semántica* es un tipo de tautología lógica en la que se exige la mismidad de representante.

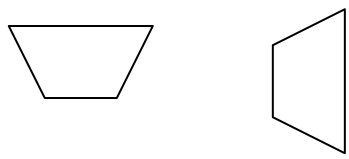
A partir de estos términos conciben la igualdad aritmética como una “identidad de nombre” explicando que para probar que dos representaciones son el mismo número se hacen trasformaciones en ambas expresiones, que conserven la igualdad, hasta obtener un mismo representante para ambas. La definición aritmética de igualdad remite, según estos autores, a la relación de equivalencia que clasifica al conjunto de los números reales en clases, pues no importa la representación del número sino su valor.

La distinción entre ambos tipos de tautologías nos permite distinguir dos tipos de relaciones de igualdad dentro de la aritmética, ambas denotadas por el signo =. La igualdad de dos números en el sentido de coincidencia de objeto matemático y de representante (ej., 3 = 3), y la igualdad en valor numérico de expresiones aritméticas tales como 5 + 7 y 6 + 6. En este último caso, la igualdad relaciona distintas representaciones de un mismo número.

Dentro del Álgebra. Godino y Font (2003) distinguen tres tipos de igualdades—identidad, ecuación y fórmula— entendiendo como tales expresiones que contienen el signo igual e indican dos maneras de designar o escribir un mismo objeto matemático. El primer tipo de igualdad, *identidad,* se refiere al caso en que aparecen variables y la igualdad es verdadera para cualquier valor que tomen las variables. Cuando la igualdad incluye variables, pero sólo es cierta para determinados valores, la denominan ecuación. Por último, las fórmulas son aquellas igualdades que expresan una relación de dependencia entre dos o más variables.

García (1992), Díaz (1990) y Santamaría (1995) hacen referencia a las igualdades condicionales o ecuaciones y recogen, además, el término "igualdades notables" que asocian a igualdades referentes al desarrollo de determinadas potencias y productos, concretamente el cuadrado, cubo y producto de suma por diferencia de un binomio, y el cuadrado de un trinomio.

Dentro de la geometría. Se dice que dos figuras geométricas son iguales cuando existe una isometría que hace coincidir una en otra (Bouvier y George, 2000; Proyecto Sur, 1997). Por ejemplo, se dice que dos segmentos de igual longitud son iguales, o que los siguientes trapecios son iguales:



También se hace referencia a la igualdad de vectores cuando tienen igual modulo y sentido.

De forma similar se puede considerar la igualdad de otros elementos propios del estudio de la geometría, que se define en cada caso a partir de las características propias de dicho objeto o idea, aunque algunos autores (Bouvier y George, 2000) consideran este uso del término igualdad un abuso del lenguaje.

4.1.2 Equivalencia

Según la Real Academia Española (RAE, 1992) se denomina *equivalencia* a igualdad en el valor, estimación, potencia o eficacia de dos o más cosas y, en geometría, a igualdad de áreas en figuras planas de distintas formas, o de áreas o volúmenes en sólidos diferentes.

En el Diccionario del Uso de Español de Maria Moliner (1998), es definida como cualidad de equivalente, relación entre cosas equivalentes. Definiéndose *equivalente* como lo que equivale a otra cosa determinada y, equivaler, como tener una cosa el mismo valor[27] que otra que se expresa, tener una cosa como consecuencia necesaria otra que se expresa; sinónimo de representar, valer, ser lo mismo, suponer, compensar, computar, convalidar, significar, ser igual.

En su acepción matemática, esta autora recoge sobre el término equivalencia: se aplica a las ecuaciones que tienen el mismo resultado y se aplica a las figuras o cuerpos que, con distinta forma, tienen la misma área o el mismo volumen que otro determinado.

Desde la Filosofía y la Lógica

Honderich (2001) señala que el término *equivalencia* corresponde a una relación entre dos enunciados p y q cuando p implica q y q implica p. Según este autor, la equivalencia es a veces interpretada como una relación que exige la identidad de los valores de verdad, otras la identidad de contenido y otras la identidad de significado.

Ferrater (1988) denomina equivalencia material o interpretación material del condicional a la relación "si y sólo si", que suele denotarse con los símbolos $\equiv$ o $\leftrightarrow$, principalmente con este último.

Abbagnano (1974) define la equivalencia como relación entre dos objetos que tienen el mismo valor. Como ejemplo de objetos equivalentes sugiere dos figuras planas que tengan la misma área o dos figuras sólidas que tengan el mismo volumen. Otra acepción que le reconoce a este término es la de sinónimo de equipolencia, término que define como la relación entre enunciados diferentes que tienen el mismo valor de verdad. Este autor recoge dos tipos de equipolencia (equivalencia): la *equipolencia gramatical* y la *equipolencia lógica.* La primera de ellas se refiere a frases que tienen igual significado pero están compuestas de palabras diferentes; la segunda, a

[27] Valor es definido por Moliner (1998) como aptitud de una cosa para producir efecto, sinónimo de efectividad.

enunciados que son simultáneamente verdaderos o falsos en cuanto responden al mismo objeto. Además, presenta la definición que desde la lógica moderna se le reconoce al término equivalencia: coincidencia de dos enunciados en su valor de verdad, la cual se simboliza con el signo ≡.

En contraposición a dicha definición del concepto de equivalencia, Fregoso (1977) recoge la definición tradicional. Situado en el contexto de la lógica de proposiciones y considerando el interés centrado en el significado de las proposiciones, define una relación de equivalencia distinta a la de igualdad: Dadas A y B dos proposiciones se dice que son equivalentes si tienen el mismo significado ($S_A = S_B$). Según esto, las proposiciones "hoy es jueves" y "hoy es la víspera del Viernes" son equivalentes, aunque no iguales al no tener el mismo recipiente (Fregoso, 1977).

Desde las matemáticas y la Educación Matemática

Bouvier y George (2000) recogen bajo el término equivalencia la noción de relación de equivalencia en un conjunto y la de equivalencia lógica. La primera de éstas se refiere a una relación binaria sobre un conjunto que es reflexiva, simétrica y transitiva. La segunda, la equivalencia lógica, es el conector $\leftrightarrow$ o $\Leftrightarrow$, también denominado bicondicional o doble implicación, que se lee "equivalente a". $A \leftrightarrow B$ es una abreviatura de $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$. La proposición $A \leftrightarrow B$ será verdadera si y sólo si A y B son los dos verdaderos o los dos falsos.

García (1992), Díaz (1990) y Santamaría (1995) definen la equivalencia como ser una cosa igual a otra en valor o eficacia, recogiendo las definiciones de relación de equivalencia y de clase de equivalencia. En particular, definen figuras equivalentes como aquellas que poseen la misma superficie, fracciones equivalentes como aquellas que tienen igual valor aunque distintos representantes y magnitudes equivalentes, como las unidades de medida de las magnitudes capacidad, volumen y masa que tienen un mismo valor (ej., $1\text{dm}^3 = 1\text{ l} = 1\text{ Kg.}$).

Observamos aquí la influencia del contexto en las nociones de igualdad o equivalencia. Por ejemplo, en el caso de las fracciones se habla de igualdad cuando se ven como elementos del conjunto de los números racionales y, en cambio, se habla de equivalencia cuando se consideran dichas fracciones como elementos del conjunto de las fracciones.

Vinográdov (1860) recoge, además de la definición de relación de equivalencia, la de equivalencia de afirmaciones o fórmulas. En esta última acepción, la equivalencia implica que, para cada conjunto admisible de los valores de ciertos parámetros, ambas afirmaciones son verdaderas o ambas son falsas. La equivalencia de las ecuaciones, de las desigualdades y de sus sistemas significa coincidencia de los conjuntos de sus soluciones.

Este autor recoge otras acepciones del término equivalencia dentro de las matemáticas tales como la equivalencia de algoritmos, la equivalencia de autómatas, la equivalencia de sistemas formales u otras pertenecientes al álgebra no escolar (ej., equivalencia de categorías, equivalencia de Morita), a la topología (equivalencia topológica) ó a la Probabilidad (la equivalencia estocástica).

Liebenberg et al. (1999) definen las expresiones numéricas (aritméticas) equivalentes como aquellas que tiene el mismo valor numérico, "la misma respuesta". En el contexto del álgebra distinguen entre expresiones algebraicas equivalentes (aquellas que tienen el mismo valor numérico para cualquier asignación de la variable dentro del dominio de definición de la expresión) y expresiones numéricamente equivalentes para un valor de la variable. Señalan tres tipos de expresiones algebraicas (con una única variable):

- Identidad algebraica: expresión cierta para todos los valores de x. (ej., $2x + 3x = 5x$).
- Ecuación: expresión cierta sólo para algunos valores de x (ej., $4x + 12 = 7x + 50$).
- Expresiones que no son ciertas para ningún valor de x (ej., $10x + 40 = 10x + 50$).

Gattegno (1974) establece la siguiente distinción entre la identidad, la igualdad y la equivalencia:

> *la identidad es un tipo de relación muy restrictiva relativa a la mismidad real, la igualdad se refiere a un atributo que no cambia, y la equivalencia se refiere a una relación más amplia donde uno acuerda que para ciertos propósitos es posible reemplazar un objeto por otro* (p.83).

Según Gattegno, la equivalencia es la relación más completa y la más flexible y, por tanto, la más útil.

4.1.3 Identidad

La Real Academia Española (RAE, 1992) define este término como cualidad de idéntico, hecho de ser una persona o cosa la misma que se supone o se busca, definiendo idéntico como sigue: dícese de lo que es lo mismo que otra cosa con que se compara, muy parecido. La acepción matemática que recoge de la identidad es igualdad que se verifica siempre, sea cualquiera el valor de las variables que su expresión contiene.

En el Diccionario del Uso de Español de Maria Moliner (1998) se define *identidad* como cualidad de idéntico, relación entre cosas idénticas. Definiéndose idéntico como completamente igual, sinónimo de equivalente, exacto, intercambiable, mismo, propio, uno, igual. La acepción matemática que recoge esta autora es igualdad que se verifica siempre, cualquiera que sea el valor de las variables que contiene.

Desde la Filosofía

Brugger (1965) expone en relación al término identidad que dos cosas son idénticas cuando se da a entender que no son dos sino una, advirtiendo que pese a ello la identidad como relación requiere por lo menos dos miembros. Bajo esta definición Brugger distingue varios tipos de identidades:

- *identidad lógica*: entes que se refieren al mismo concepto. En este caso recomienda emplear el término de *igualdad.*
- *identidad real u objetiva*: cuando coinciden varios contenidos de pensamiento en un sólo ente. Ésta no es una relación real, pues sólo existe en la mente (ej., este hombre es justo).
- *identidad real* (ontológica): se refiere a la existencia de un ente a través del tiempo a pesar del cambio de apariencia.
- *identidad conceptual:* conceptos de igual contenido distinguibles entre sí únicamente por el grado de claridad con el que se expresan.

El diccionario Oxford de Filosofía (Honderich, 2001) recoge dos acepciones del término *identidad,* señalándolo como sinónimo de *igualdad*: *identidad numérica* (cuando algo es nombrado dos veces refiriendo a un sólo ente), que es una relación de equivalencia, e *identidad cualitativa* (similaridad) que se puede dar en grados y modos. Son ejemplos de identidad cualitativa tener exactamente el mismo aspecto y ser aproximadamente del mismo peso.

La identidad, según Honderich, es una relación que viene determinada por los criterios de identidad que especifican las condiciones de identidad de objetos de un tipo dado, y que son diferentes según el tipo de entes a los que se refieren. Una forma común de definir un criterio de identidad es la siguiente: si w es un K, y z es un K, w es idéntico[28] a z si y sólo si w y z están en la relación R. Por ejemplo, un criterio de identidad para ríos puede ser: si w es un río y z es un río, w y z son el mismo río si y sólo si w y z tienen el mismo origen y la misma desembocadura.

Wittgenstein, en cambio, niega que la identidad sea una relación, haciendo alusión a la paradoja de la identidad: decir que dos cosas son idénticas es un sinsentido, y decir que una cosa es idéntica a sí misma es no decir absolutamente nada (Honderich, 2001).

Ferrater (1988) identifica los términos de *identidad* e *igualdad*, y distingue varios puntos de vista desde los que se han analizado. El primero es conocido como el principio ontológico de la identidad, según el cuál toda cosa es igual a sí misma. El segundo se manifiesta en el principio lógico de identidad, el cual es considerado por algunos como el reflejo lógico del anterior, y por otros como "*a* pertenece a todo *a*", o como "si *p* entonces *p*". Algunos autores hablan también del principio psicológico de identidad, entendiendo por ello la imposibilidad de pensar la no identidad de un ente consigo mismo.

Los escolásticos distinguieron distintos tipos de identidad: real, relacional o formal, numérica, específica, genérica, casual, primaria, secundaria,...; definiendo genéricamente la identidad como la conveniencia de cada cosa consigo misma.

Destaca el trabajo de Abbagnano (1974), el cual recoge tres definiciones fundamentales de este término:

[28] Honderich (2001) emplea indistintamente las expresiones "ser idéntico a" y "ser lo mismo que".

1. Identidad como igualdad de sustancia. Ésta es la definición que le adjudica Aristóteles al término identidad: Las cosas son idénticas sólo si es idéntica la definición de sus sustancias.
   Aristóteles distingue varias formas dentro de la noción de identidad: una unidad de ser, unidad de una multiplicidad de seres o unidad de un sólo ser tratado como múltiple. Y señala que la identidad propiamente dicha es la de la unidad numérica y que, en dicho caso, ambas cosas que se dicen idénticas pertenecen a la misma categoría, tienen el mismo género, los mismos opuestos, atienden a los mismos accidentes, y sus generaciones y destrucciones son las mismas (Larroyo, 1982).
   Este concepto de identidad lo utilizan también otros autores. En particular, Hegel define la identidad como coincidencia o unidad de la esencia consigo misma.

2. Identidad como sustituibilidad. Ésta es la definición de Leibniz que lo acerca a la noción de igualdad. Dos cosas se consideran idénticas si al sustituir una por otra en una proposición verdadera, ésta sigue siendo verdadera, y lo mismo ocurre con cualquier otra proposición. Una definición análoga es la de Wolf que define como idénticas las cosas que pueden sustituirse una a la otra permaneciendo a salvo cualquiera de sus predicados.

3. Identidad como convención. En este caso se considera que la identidad puede ser establecida o reconocida en base a cualquier criterio convencional. En este caso, el significado de la identidad no es único sino que dependen del contexto en el que se considere. Se entiende que el decir "x es idéntico a y" es una abreviación de "x es el mismo A que es y" donde A es un nombre que resulta del contexto. Ésta es, según Abbagnano, la concepción menos dogmática de la identidad y la que se adapta mejor a las exigencias del pensamiento lógico–filosófico.

Desde la Lógica

A la lógica pertenecen las definiciones de Leibiz y Wolf, recogidas anteriormente, que hacen referencia a la identidad como sustituibilidad.

Por su parte, Frege distingue dos tipos de identidades: la identidad de contenido que denota con el símbolo "≡" y otra identidad que denota con el símbolo "=". Según

Frege, el signo igual de la aritmética puede ser utilizado para indicar que dos expresiones aritméticas situadas a ambos lados denotan el mismo número. El símbolo "≡", en cambio, puede ser colocado entre expresiones de variada índole indicando que ambas expresiones nombran el mismo contenido, de cualquier clase que sea (Kenny, 1997).

Si dos signos tienen idéntico contenido, entonces uno puede ser reemplazado por el otro en una proposición sin afectar al contenido de ésta. Sin embargo, Kenny señala que Frege debe haberse referido a que dicho cambio o reemplazo no afecta a la verdad o falsedad de la proposición puesto que sí afecta al contenido. Esta cierta ambigüedad procedente del uso del término contenido que señala Kenny (1997) es aclarada por Frege al distinguir entre sentido y referencia de un signo. Dicha distinción permite diferenciar las proposiciones a = a y a = b. Denomina sentido del signo a la manera en cómo se representa el signo. El sentido de un signo se distingue de su significado, que es a lo que denomina referencia. Según esta distinción, Frege afirma que 2x2 y 12/3 tienen el mismo significado o referente pero distinto sentido.

La noción de identidad es desarrollada en la lógica de la identidad, empleándose los signos = (que se lee "es", "es idéntico a", "es igual a", "es equivalente a", "es lo mismo que") y ≠ (que se lee "no es", "es distinto de", "es diferente de").

Ferrater y Leblanc (1967) recogen las leyes principales de la identidad:

- La ley de sustituibilidad: dos términos son idénticos cuando son mutuamente sustituibles (lo que es verdadero para uno lo es para el otro).
- La ley de transitividad de la identidad: si dos entidades son iguales a una tercera, entonces son iguales entre sí.
- Ley de reflexividad: toda entidad es igual a sí misma.
- Ley de la simetría: cuando una entidad es igual a otra, ésta es igual a la primera.

En el estudio de la identidad, dentro de la lógica, destaca el *Principio de identidad*, el cual es considerado como uno de los tres principios que rigen la deducción lógica junto con el de no–contradición y el tercero excluido. Este principio afirma que toda cosa es igual a sí misma: A es A. De P siempre se infiere P (Ferrater, 1988).

También de habla de identidad en el álgebra de clases y en el álgebra de relaciones usándose a sí mismo el signo =. La igualdad o identidad de clases se define de la forma siguiente: dadas A y B dos clases, A es idéntica a B si y sólo si para todo elemento x, x pertenece a A si sólo si x pertenece a B. Por ejemplo, son iguales o idénticas la clase de los números primos y la clase de los números que sólo son divisibles por el número uno y por sí mismos (Ferrater, 1988).

En el álgebra de relaciones la identidad o igualdad se define de la siguiente forma: dadas R y S dos relaciones, R es idéntica a S si para cualesquiera elementos x e y, xRy si y sólo si xSy. Por ejemplo, son iguales o idénticas las relaciones “ser criado de” y “ser servidor masculino de”.

Desde las matemáticas y la Educación Matemática

Vinográdov (1860) define la identidad como un tipo de ecuación[29] que tiene como soluciones todos los números del dominio de la ecuación, es decir, todos los números que se admiten como valores de las variables.

Rojano (2002), por su parte, distingue entre identidades algebraicas y ecuaciones, según la expresión sea o no cierta para todos los valores de las incógnitas. De forma similar, García (1992), Díaz (1990) y Santamaría (1995) definen la identidad como una igualdad algebraica que se verifica siempre cualquiera que sea el valor de las variables. También recoge la definición de identidad de conjuntos basada en la igualdad de sus elementos.

El término identidad es también utilizado en matemáticas para denominar a ciertas formulas algebraicas tales como la fórmula del Binomio de Newton o la fórmula: $a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

[29] La ecuación es definida por Vinográdov (1860) como “la anotación analítica del problema de determinación de los valores de argumentos (incógnitas) con los que los valores de dos funciones dadas son iguales” (p. 358). A dichos valores les denomina soluciones.

4.2 Uso de los términos igualdad, equivalencia, identidad y sentencia en este trabajo

A continuación, resumimos brevemente las definiciones de los términos igualdad, equivalencia e identidad aportadas por los diferentes autores y señalamos el significado de estos vocablos que es adoptado en este trabajo.

<u>Igualdad.</u> Las diferentes definiciones de igualdad nos hablan de entes u objetos iguales cuando pueden ser sustituidos el uno por el otro sin pérdida de verdad, cuando se refieren al mismo concepto, cuando la cantidad es sólo una, cuando tienen las mismas propiedades, o cuando son de la misma naturaleza, cantidad o calidad.

Dentro de las matemáticas, la relación de igualdad alude en ocasiones a la mismidad de objeto, siendo en otros casos más restrictiva exigiendo la mismidad de representante. Dicha mismidad viene determinada por una convención vinculada a un contexto. Así, por ejemplo, en contextos aritméticos la igualdad implica mismidad de valor numérico, en contextos algebraicos mismidad de valor numérico para cualquier asignación dada a las variables, en contextos vectoriales mismidad de módulo y sentido.

Esta definición es equivalente a la acepción de Bouvier y George, los cuales, al igual que Aristóteles pero centrados en el contexto de las matemáticas, definen la igualdad como relación entre símbolos que representan un mismo objeto matemático ("mismidad" que viene definida por el contexto).

También se denomina igualdad a la expresión, fórmula o modo gráfico de representar en la escritura dicha relación de igualdad.

<u>Igualdad condicional o ecuación.</u> En la definición de igualdad los autores difieren en incluir o no las *ecuaciones,* para las cuales se utiliza el término "igualdad condicional", debido a que la mismidad de valor sólo se tiene en determinadas condiciones, es decir, para determinados valores de la variable y, por tanto, las expresiones de ambos miembros no necesariamente corresponden a distintas representaciones de un mismo objeto matemático.

Equivalencia. En la mayoría de los casos se define la equivalencia como mismidad de valor, de significado o de contenido, considerándose en ocasiones como un tipo de igualdad. Es considerada como una relación donde se acuerda que, para ciertos propósitos, es posible reemplazar un objeto por otro. En otros casos es definida como la doble implicación (si y sólo si), denominada equivalencia lógica.

Dentro de las matemáticas, este término, además de ser definido como la mismidad de valor, es identificado con la igualdad de áreas o volúmenes y con ecuaciones, afirmaciones o fórmulas que son simultáneamente verdaderas o falsas para cada conjunto admisible de valores de ciertos parámetros. El uso de este término corresponde a determinadas relaciones que son reflexivas, simétricas y transitivas.

Identidad. La identidad es definida, en ocasiones, como la igualdad de sustancia, en otras, como la sustituibilidad y, en otras, como una convención establecida en función a un criterio elegido. Dentro de las matemáticas este término es identificado con las expresiones algebraicas que contienen el signo igual y son ciertas para cualquier valor de la variable perteneciente al dominio de la expresión, siendo empleado, en ocasiones, para denominar a fórmulas algebraicas particulares.

Partiendo de las acepciones anteriores, en este trabajo vamos a denominar:

- ***Igualdad*** al modo gráfico de relacionar en la escritura dos expresiones o representaciones que refieren a un mismo objeto matemático, escribiendo entre ellas un signo igual, así como a la relación existente entre ellas. En el contexto de la aritmética, dichas expresiones son cadenas de números ligados entre sí por signos operacionales.
- ***Equivalencia*** a toda relación que cumpla las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. En particular, la igualdad es una relación de equivalencia. Especialmente destacamos la relación de equivalencia definida para ecuaciones, afirmaciones o fórmulas, considerándose equivalentes cuando son simultáneamente verdaderas o falsas para cada conjunto admisible de valores de ciertos parámetros.
- ***Identidad*** a las expresiones aritméticas o algebraicas que contienen el signo igual e involucran en ambos miembros el mismo objeto, representado del mismo modo.

Según estas definiciones, sólo consideramos como *igualdades algebraicas* aquellas expresiones que son ciertas para todos los valores de las variables, lo que otros autores denominan *identidades algebraicas*. Distinguimos este tipo de expresiones de aquellas que son ciertas sólo para algunos o ningún valor de la variable, para las que se reserva el término de *igualdad condicional o ecuación.*

Sentencias numéricas

De la definición de igualdad adoptada se desprende que las igualdades aritméticas, como representaciones escritas, están formadas por dos expresiones aritméticas de igual valor numérico (en otras palabras, dos representaciones diferentes de un mismo número) escritas a ambos lados del signo igual. En esta definición se aprecia que, necesariamente, las igualdades han de ser proposiciones verdaderas. Por este motivo, necesitamos adoptar otro término que englobe las expresiones aritméticas que contengan el signo igual y expresen proposiciones falsas.

Vamos a denominar ***sentencias,*** a aquellas expresiones aritméticas que contienen el signo igual y constituyen una proposición o enunciado declarativo (expresión completa sin ningún término por determinar). Las sentencias, por tanto, pueden ser verdaderas o falsas. Son ejemplos de sentencias las igualdades $5 + 7 = 9$ y $e^{\Pi} = 1$. En particular, toda sentencia verdadera es una igualdad.

4.2.1 Tipos de igualdades y sentencias numéricas

En este trabajo denominamos *igualdades numéricas abiertas* a aquellas igualdades numéricas que presentan alguna incógnita o término desconocido, e *igualdades numéricas cerradas,* a las que, por el contrario, incluyen todos los términos. En nuestro caso, no consideraremos igualdades abiertas con más de un término desconocido. Según esta clasificación, las igualdades cerradas coinciden con las sentencias verdaderas (ver Figura 4-1).

Por otra parte, distinguimos entre igualdades de acción o no–acción de forma similar a como lo hacen Behr, Erlwanger y Nichols (1980). Denominamos *igualdades numéricas de no–acción* a aquellas igualdades numéricas que incluyen signos operacionales en ambos miembros de la igualdad (ej., $3 + 5 = 7 + 1$) o que no incluyen ningún signo operacional (+, – , ×, ÷), es decir, igualdades de la forma a =

a[30] siendo a un número natural. Las *igualdades numéricas de acción* son aquellas que incluyen signos operacionales y éstos aparecen en tan sólo un miembro de la igualdad (ej., 13 – 7 = 6) (Ver ejemplos en Tabla 4-1). Esta denominación es debida a que este tipo de igualdades pueden ser interpretadas como la expresión de una acción (ej., "quitar", "añadir"), mientras que las anteriores sólo pueden ser consideradas como la expresión de una relación.

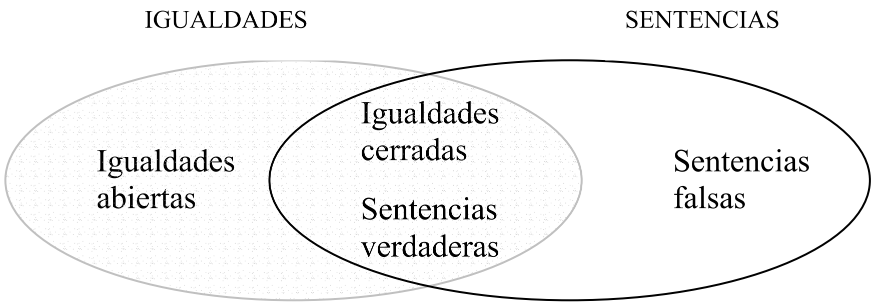


Figura 4-1: Relaciones entre los tipos de igualdades y sentencias numéricas

Por lo tanto, toda igualdad numérica puede ser: abierta y de no-acción, abierta y de acción, cerrada y de no-acción, o cerrada y de acción. Toda sentencia puede ser verdadera y de acción, verdadera y de no-acción, falsa y de acción, o falsa y de no-acción.

En este trabajo se consideran únicamente igualdades y sentencias formadas por números naturales y las operaciones básicas de la estructura aditiva. Además, todas las igualdades abiertas consideradas tienen solución dentro del conjunto de los números naturales. Denominamos *igualdades o sentencias (numéricas) de suma* a aquellas en las que sólo aparece simbolizada esta operación, y de forma paralela, denominamos *igualdades o sentencias (numéricas) de resta* a aquellas en las que sólo aparece simbolizada la operación de resta, sin referir en ningún caso a la operación necesaria para resolver la igualdad o sentencia. Referimos a *igualdades o sentencias (numéricas) de suma y resta* cuando ambas operaciones están contenidas en la igualdad o sentencia (ej., 12 – 4 + 4 = 12) (ver resumen en Tabla 4-1).

[30] Aunque como aquí se indica las sentencias del tipo a = a son sentencias de no-acción, a lo largo de este trabajo nos referiremos a ellas de forma independiente, distinguiéndolas del resto de sentencias de no-acción en las que aparecen signos operacionales.

Tabla 4-1: Tipos de igualdades y sentencias numéricas

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo</th><th>Definición</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Igualdad</td><td>Abierta</td><td>Igualdad incompleta (con un término a averiguar)</td><td>23 + □ = 30
10 + □ = 15 + 15</td></tr>
<tr><td>Cerrada</td><td>Igualdad completa (sin términos desconocidos)</td><td rowspan="2">5 + 7 = 12
12 + 11 = 11 + 12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sentencia</td><td>Verdadera</td><td>Proposición verdadera que contiene el signo igual</td></tr>
<tr><td>Falsa</td><td>Proposición falsa que contiene el signo igual</td><td>9 = 5 + 5
13 + 5 = 14 + 6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Igualdad o Sentencia</td><td>De acción</td><td>Igualdad o sentencia con operaciones en sólo un lado del signo igual</td><td>13 – 7 = 6
34 = □ + 34</td></tr>
<tr><td>De no-acción</td><td>Igualdad o sentencia con operaciones en ambos lados del signo igual o en ninguno de ellos</td><td>3 + 5 = □ + 1
3 = 3</td></tr>
</table>

A continuación, describimos los distintos tipos de sentencias numéricas de suma y resta que podemos distinguir atendiendo al número de términos que componen cada miembro sin distinguir entre ellos.

Entre las sentencias básicas a que estamos haciendo referencia, las de mayor sencillez (no se quiere decir las más sencillas para los escolares) son aquellas que sólo tienen un número a cada lado del signo igual y ningún signo de operación; son de la forma $a = b$, pudiendo ser a y b el mismo número.

A partir de este tipo, se puede ir ampliando la sentencia con otros números y signos. Con un número más y un signo operatorio más que la anterior, están las sentencias compuestas por tres números y dos signos (el signo igual y uno de operación). Presenta dos formas que son $a \pm b = c;$ $a = b \pm c.$

Con cuatro números naturales y tres signos (dos de ellos operatorios), las posibilidades de sentencias son tres: $a \pm b \pm c = d;$ $a \pm b = c \pm d;$ $a = b \pm c \pm d.$

Para cinco números y cuatro signos (tres de ellos operatorios) se tienen cuatro posibilidades:

$$a \pm b \pm c \pm d = e; \quad a \pm b \pm c = d \pm e; \quad a \pm b = c \pm d \pm e; \quad a = b \pm c \pm d \pm e$$

De este modo se obtiene la Tabla 4-2, en la que se aprecia que el número de sentencias numéricas que existen en cada caso coincide con el número de signos y que, a su vez, el número de signos es uno menos que el número de números que aparecen en la sentencia. Se puede razonar que esto es así debido a que los signos siempre han de estar entre dos números, por lo que se requiere uno más. Para la posición del signo igual, que es la que determina la forma de la sentencia, hay tantas posibilidades de cambio como signos se puedan poner. Todo esto sin distinguir entre los signos operacionales de suma y de resta.

Tabla 4-2: Número de términos, signos y sentencias en correspondencia

Nº de términos	2	3	4	5
Nº de signos	1	2	3	4
Nº de sentencias	1	2	3	4

Si en vez de sentencias consideramos igualdades abiertas con una cantidad desconocida obtenemos los siguientes casos. De la sentencia a = b se pueden obtener las dos igualdades abiertas $a = \square$; $\square = b$

De las sentencias $a \pm b = c$ y $a = b \pm c$ se obtienen las igualdades abiertas:

$a \pm b = \square$; $a \pm \square = c$; $\square \pm b = c$; $\square = b \pm c$; $a = \square \pm c$; $a = b \pm \square$;

A partir de las sentencias $a \pm b \pm c = d$; $a = b \pm c \pm d$; $a \pm b = c \pm d$; se pueden obtener las siguientes igualdades abiertas:

$a \pm b \pm c = \square$; $\square \pm b \pm c = d$; $a \pm \square \pm c = d$; $a \pm b \pm \square = d$;

$\square = b \pm c \pm d$; $a = \square \pm c \pm d$: $a = b \pm \square \pm d$; $a = b \pm c \pm \square$

$\square \pm b = c \pm d$; $a \pm \square = c \pm d$; $a \pm b = \square \pm d$; $a \pm b = c \pm \square$;

Se podría continuar de igual forma para las siguientes, pero es suficiente para apreciar algunas relaciones. Ordenando los datos en una tabla (Tabla 4-3) se aprecian patrones entre sus filas y sus columnas.

Tabla 4-3: Número de signos, números y sentencias e igualdades de cada tipo en correspondencia

Nº de signos	1	2	3	4
Nº de números	2	3	4	5
Nº de sentencias	1	2	3	4
Nº de igualdades abiertas	2	6	12	20

Relacionando las filas, se observa que los números que aparecen en la fila cuarta se corresponden con el producto de los que aparecen en el mismo lugar en las filas segunda y tercera, o primera y segunda.

De este modo, se observa que al poner en una sentencia un número más, el número de sentencias crece también en una unidad. Si consideramos que son los términos de una sucesión, la expresión del término general es $a_n = n$, siendo n el número de signos considerados. Sin embargo, el crecimiento del número de igualdades abiertas es producto de dos números y como en el caso anterior se tiene ahora $a_n= n(n+1)$, por lo que rápidamente la cantidad de las igualdades abiertas crece.

Si, además, consideramos que las sentencias pueden ser verdaderas y falsas, el número de sentencias posibles se multiplica por dos. Todo ello sin distinguir entre los signos de suma y resta.

4.2.2 Las igualdades y sentencias numéricas

La mayoría de los currículos elementales de aritmética emplean el lenguaje de las igualdades numéricas desde el inicio del estudio de las matemáticas, siendo éstas un componente importante del lenguaje matemático (Grouws, 1974; Lindvall e Ibarra, 1980). El trabajo con igualdades numéricas abiertas es considerado significativo, dentro del aprendizaje de la aritmética, para que los alumnos comprendan las operaciones básicas y la relación existente entre ellas, además de para modelizar y resolver problemas (Lindvall e Ibarra, 1980; Weaver, 1972).

Asimismo, las igualdades numéricas son consideradas un buen contexto en el cual introducir a los alumnos en la resolución de ecuaciones (siendo la incógnita representada mediante una línea o una figura) y trabajar la comprensión del signo igual, un componente esencial del pensamiento algebraico (Davis, 1964; Carpenter et al., 2003; Freiman y Lee, 2004; Herscovics y Kieran, 1980; McGregor (1996); Radford, 2000). Según Lindvall e Ibarra (1980), *"Puede decirse que los alumnos no poseen una verdadera compresión del signo igual y de las ecuaciones hasta que muestran cierta maestría en las igualdades abiertas"* (p. 50).

Las igualdades y sentencias numéricas sirven como una herramienta para ayudar a los alumnos a desarrollar su comprensión al ir confrontando variadas concepciones sobre el signo igual. Koehler (2002), a partir de su experiencia con alumnos de segundo grado, señala la utilidad de las sentencias verdaderas y falsas para desafiar las concepciones de los alumnos, establecer el significado del signo igual en este contexto, y favorecer el desarrollo de variadas estrategias para justificar la veracidad o falsedad de las sentencias.

Carpenter y colaboradores (2003), siguiendo el trabajo de Davis (1964), sugieren el uso de igualdades numéricas abiertas y sentencias numéricas verdaderas y falsas para trabajar en el aula la comprensión del signo igual y el desarrollo de *pensamiento relacional,* así como otros aspectos del pensamiento algebraico a desarrollar desde la enseñanza de la aritmética, cómo hacer explícita la generalización de relaciones aritméticas o representar generalizaciones mediante lenguaje natural y mediante notación algebraica.

Discusiones sobre diferentes tipos de igualdades y sentencias pueden ayudar a los alumnos a aprender aritmética con comprensión y desarrollar una base sólida para el posterior estudio formal del álgebra (Carpenter et al., 2003; Koehler, 2004; Molina, 2005; Molina, Castro y Ambrose, 2005). Según señala Resnick (1992), este tipo de representaciones parecen invitar y apoyar la discusión sobre números, operaciones y sus propiedades, mejor que otras representaciones.

Una vez que los alumnos empiezan a pensar en relaciones, las sentencias numéricas verdaderas y falsas y las igualdades numéricas abiertas proveen de un contexto flexible en el cual representar propiedades y relaciones aritméticas y, así, focalizar la atención de los alumnos en ellas y favorecer la detección de patrones, la elaboración de conjeturas y la generalización.

Constituyen un contexto específico en el cual los alumnos puede hablar de su comprensión con respecto a ideas matemáticas básicas, tales como las propiedades de las operaciones o de la estructura de nuestro sistema numérico de base diez, por ejemplo, con las igualdades 42 = 40 + 2, 2 + 40 = 42, 42 = 30 + 12.

De este modo, los alumnos son conscientes de propiedades importantes de las operaciones que les ayudan a ser más eficientes al operar, a desarrollar estrategias esenciales para la resolución y manejo de ecuaciones y, en general, a aprender importantes ideas matemáticas.

De este modo, el contexto de las igualdades numéricas permite el desarrollo del pensamiento algebraico al mismo tiempo que los alumnos aprenden aritmética, como es recomendado desde la propuesta Early–Algebra.

Nuestro estudio previo, Molina (2005), confirma la utilidad de las sentencias numéricas para promover la verbalización y discusión de las estrategias utilizadas por los alumnos, la explicitación de aspectos importantes de su conocimiento aritmético y el desarrollo y uso de *pensamiento relacional*. Las igualdades verdaderas y falsas ayudan a romper el hábito operacional de los alumnos. Las igualdades abiertas, en cambio, parecen ser adecuadas para evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos (ver Capítulo 5).

Otros autores (Lindvall e Ibarra, 1978; Riley y Greeno, 1978) han recomendado el uso de igualdades numéricas, al resolver un problema, para que los alumnos aprendan a expresar su secuencia de pensamientos mediante igualdades o secuencias numéricas, ya que raramente escriben secuencias para resolver un problema y, cuando se les pide que lo hagan, a menudo no son capaces de representar las relaciones cuantitativas contenidas. De esta forma se puede ayudar a los alumnos a vincular su conocimiento informal de la aritmética con las representaciones formales y a dar sentido a la notación aritmética, la cual puede ser introducida como una forma económica de comunicarse (Baroody y Coslick, 1998).

Por su parte, Herscovics y Kieran (1980) proponen la introducción de las ecuaciones (algebraicas) mediante la consideración de identidades aritméticas tales como 5 x 4 = 4 x 5 y 5 + 5 = 2 x 5 apoyándose en el conocimiento aritmético de los alumnos para que capten intuitivamente los conceptos, de forma previa a ser formalizados simbólicamente. La propuesta, que parte inicialmente de la construcción de ecuaciones, por parte de los alumnos, a partir de identidades aritméticas dadas (ocultando uno o varios términos), sigue la secuencia de representaciones identificada por Bruner (1963): enactiva (basada en operaciones concretas), icónica (involucrando imágenes) y simbólica. En esta propuesta, mediante un proceso gradual, el alumno va desarrollando significado para la ecuación, usando primero un recuadro y después una letra para representar al número desconocido dentro de una expresión aritmética.

En este caso, se persigue que los alumnos desarrollen comprensión del contenido matemático (conceptos, reglas y relaciones) de forma previa a la introducción de nuevas formas matemáticas (notación y simbolismo utilizados para expresar el contenido).

4.2.3 Propiedades aritméticas

En este apartado recogemos una colección de propiedades aritméticas que hemos identificado como susceptibles de ser abordadas en el contexto de las sentencias numéricas verdaderas y falsas e igualdades numéricas abiertas (con solución en N) formadas por números naturales y las operaciones suma y resta (no conteniendo paréntesis). Estas propiedades pertenecen o se derivan de las propiedades que caracterizan el conjunto de los números naturales con las operaciones suma y resta (conmutatividad, asociatividad, las propiedades del cero como elemento neutro, y la presencia de inversos aditivos por la derecha) y de las definiciones de estas operaciones, salvo la última de ellas que corresponde a la propiedad reflexiva de la relación de igualdad:

- *Conmutatividad de la suma:* $a + b = b + a$, siendo a y b números naturales.
- *No–conmutatividad de la resta:* $a - b \neq b - a$, siendo a y b números naturales diferentes.
- *Restricción del dominio de la resta:* si $a > b$ entonces $b - a$ no está definido dentro del conjunto de los números naturales.
- *Elemento neutro:* $a + 0 = a = 0 + a$ y $a - 0 = a$, siendo a un número natural.
- *Elemento inverso (por la derecha):* $a - a = 0$, siendo a un número natural.

- *Compensación*[31]*:*

  $a + b = (a - c) + (b + c)$ siendo a, b y c números naturales con $a > c$

  $a + b = (a + c) + (b - c)$ siendo a, b y c números naturales con $b > c$

  $a - b = (a + c) - (b + c)$ siendo a, b y c números naturales con $a > b$

  $a - b = (a - c) - (b - c)$ siendo a, b y c números naturales con $a > b > c$
- *Complementariedad de la suma y la resta:* $a + b - b = a$ y $a - b + b = a$, siendo a y b números naturales y, en la segunda expresión, $a > b$.
- *Composición/descomposición*[32]*:*

  Si $m + n = k$ entonces $a + k = a + m + n$ y $k + a = m + n + a$

  Si $m + n = k$ y $a > k$ entonces $a - k = a - m - n$

  Si $m + n = k$ y $k > a$ entonces $k - a = m + n - a$
- *Magnitud:* relaciones aritméticas generales basadas en la magnitud[33] de los números involucrados y el conocimiento de las operaciones básicas de la estructura aditiva, tales como

  Si $a > c$ entonces $a + b > c$ siendo a, b y c números naturales

  Si $a < c$ entonces $a - b < c$ siendo a, b y c números naturales y $a>b$

  $a + b \neq a + c$ siendo a, b y c números naturales y $b \neq c$.

  $a - b \neq a - c$ siendo a, b y c números naturales, $b \neq c$, $a > b$ y $a > c$.
- *Propiedad reflexiva de la relación de igualdad:* $a = a$ siendo a cualquier número natural o cualquier expresión aritmética.

Dichas propiedades van a delimitar el foco de atención en nuestra intervención en el aula, al ser empleadas en el diseño de las igualdades y sentencias que componen las actividades. En la Tabla 4-4 detallamos ejemplos de sentencias verdaderas y falsas y de igualdades abiertas basadas en estas propiedades, indicando las operaciones contenidas en éstas.

[31] Esta propiedad es también denominada invariancia, para el caso de la suma, e invariancia de la diferencia en el caso de la resta (Dickson, Brown y Gibson, 1988).
[32] Esta propiedad corresponde, en algunos casos, a la propiedad asociativa de la suma.
[33] Recordamos que se está utilizando el término magnitud con el significado que recogen Seco et al. (1999): cualidad de ser más o menos grande.

Tabla 4-4: Propiedades a ser trabajadas en el contexto de las igualdades y sentencias numéricas formadas por sumas y restas y números naturales, con solución en N y no involucrando paréntesis.

<table>
<tr><th colspan="2">Propiedad</th><th>Operaciones involucradas</th><th>Ejemplos de igualdades abiertas y sentencias V/F</th></tr>
<tr><td colspan="2">Conmutativa de la suma</td><td>Suma</td><td>12 + 11 = 11 + 12
12 + 7 = 7 + □</td></tr>
<tr><td colspan="2">No conmutativa de la resta</td><td>Resta</td><td>24 – 15 = 15 – 24</td></tr>
<tr><td colspan="2">Restricción del dominio de la resta (trabajando en N)</td><td>Resta</td><td>9 – 19 = □
2 = 8 – 10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elemento neutro</td><td>Suma o resta</td><td>23 + 0 = 24
□ = 15 + 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elemento Inverso (por la derecha)</td><td>Resta</td><td>100 – 100 = 1
100 – □ = 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Compensación</td><td>Suma o resta</td><td>51 + 51 = 50 + 52
8 + 5 = □ + 7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Complementariedad de la suma y la resta</td><td>Suma y resta</td><td>27 + 48 – 48 = 27
27 + 48 – 48 = □</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Composición/ descomposición</td><td>Según la estructura del sistema de numeración decimal</td><td>Suma y/o resta</td><td>24 – 15 = 24 – 10 – 5
24 – 15 = 24 – 10 – □</td></tr>
<tr><td>Otras descomposiciones</td><td>Suma y/o resta</td><td>7 + 7 + 6 = 14 + 6
7 + □ + 6 = 14 + 6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Magnitud</td><td>Suma y/o resta</td><td>75 – 14 = 340
7 + 15 = 8 + 15</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reflexiva de la Igualdad</td><td>Sin operación, suma y/o resta</td><td>3 = 3
4 + 7 = 4 + 7</td></tr>
</table>

4.3 El signo igual

Uno de los elementos clave de este trabajo es el signo igual; el símbolo matemático que da lugar a las igualdades y sentencias. Antes de hacer un recorrido por su evolución histórica y analizar los diversos significados y usos que se le reconocen, recogemos algunas consideraciones sobre las nociones de signo y símbolo que nos ayudarán a precisar la naturaleza del signo igual.

4.3.1 Signo

El Diccionario de la Real Academia Española (RAE, 1992) define *signo* como objeto, fenómeno o acción material, que natural o convencionalmente representa o sustituye a otro objeto, fenómeno o acción; indicio, señal de algo; cualquiera de los caracteres que se emplean en la escritura y en la imprenta; el que nos hace venir en conocimiento de una cosa por la analogía o dependencia natural que tiene con ella. En su acepción matemática: señal o figura que se usa en los cálculos para indicar, ya la naturaleza de las cantidades, ya las operaciones que se han de ejecutar con ellas.

Según el Diccionario del uso del Español de Maria Moliner (1998), este término se define como cualquier cosa, acción o suceso que, por una relación natural o convencional, evoca otra o la representa; dibujo con que se indica o representa convencionalmente algo, como las letras, los números y demás dibujos que se emplean en matemáticas para indicar las operaciones o los dibujos del Zodiaco. Otra de las acepciones que se destacan es seña o señal que indica algo. Se refiere como sinónimo de símbolo.

A lo largo de la historia han sido numerosos los filósofos, lingüistas, antropólogos y psicólogos, entre otros, que se han interesado por el tema de los signos, dándole distintos significados. Según Ferrater (1988), para muchos autores antiguos, entre ellos los estoicos y los escépticos, el signo era una señal, y especialmente una señal verbal, por medio de la cual se expresa algo.

En la lógica, el signo era lo que se llamaba vulgarmente término, el cual podía entenderse de varios modos: como representante de la cosa designada, como un signo que condujera al conocimiento por medio de una similitud, o como un signo que condujera al conocimiento de otra cosa mediante otra conexión distinta. En muchos casos, los signos eran considerados como símbolos, y éstos eran interpretados como los elementos conceptuales que correspondían a los elementos reales (Ferrater, 1988).

Por su parte, Guillermo de Occam considera el signo como aquello que siendo aprehendido puede hacer pensar en algo anteriormente conocido (como el efecto que se dice ser signo de la causa) y, más específicamente, como aquello que puede hacer pensar en algo y que puede hacerle de sustituto en una proposición y en todo lo que puede estar compuesto. De forma similar, Hobbes define signo como el antecedente evidente del consecuente, y a su vez el consecuente del antecedente cuando se han observado antes consecuencias parecidas. Según esto, la persona con más experiencia posee más signos (Ferrater, 1988).

En la denominada filosofía del sentido común, el signo aparece como algo que no ofrece similitud entre él y lo representado, limitándose a sugerir.

Por otra parte, según Ferdinand de Saussure, el signo es una entidad psíquica que tiene dos caras íntimamente unidas, la imagen acústica y el concepto, a lo que denomina significante y significado respectivamente, entendiendo como arbitraria la unión existente entre ambas (Ferrater, 1988).

Husserl hace una distinción especial entre signo y significación, señalando que en ocasiones el signo se limita a indicar y no a significar. "*Los signos, en el sentido de indicaciones (señales, notas, distintivos,...), no expresan nada, a no ser que, además de la función indicativa, cumplan una función significativa*" (Ferrater, 1988, p. 3030). Por esto distingue entre signos indicativos (o señalativos) y significativos.

Ogden y Richards definen signo como un estímulo similar a alguna parte de un estímulo original, suficiente para hacer surgir una excitación similar a la causada por el estímulo original. Gottsched explica "*cuando se concluye de una cosa a otra, la primera se llama un signo y la segunda se llama lo designado*" (Ferrater, 1988, p. 3029). Por otra parte, Lambert define signo como toda característica dada fácilmente a los sentidos, por medio de la cual se da a conocer la existencia, la posibilidad, la realidad u otra propiedad de una cosa (Ferrater, 1988).

Morris (1946), según cita von Kutschera (1979), adopta una definición behaviorista del término signo al entenderlo como un estímulo sustitutivo que produce la misma respuesta que suscitaría su referente, si estuviera presente. Definición que posteriormente amplia con la siguiente formulación, para incluir los casos en los que la respuesta no se produce por cuestiones circunstanciales o no es inmediata: si Z es un estímulo que causa en un organismo la disposición para reaccionar, en determinadas circunstancias, mediante un comportamiento T (dirigido a un fin), y A es un objeto que suscita el comportamiento T, entonces Z es signo de A.

Clasificaciones de los signos

Los distintos autores que han abordado el tema de los signos han propuesto distintas clasificaciones. Entre ellas destaca la recogida en la Tabla 4-5.

Tabla 4-5: Tipos de signos y ciencias que los estudian

Tipo de signo	**Ciencia que lo estudia**
Signos de sí mismos	Gramática pura
Signos relacionados con el objeto • Icónicos • Índices • Símbolos	Lógica
Signos relacionados con el sujeto	Retórica pura

Los signos relacionados con el objeto se clasifican a su vez en icónicos o iconos, índices y símbolos. Los *icónicos* son los signos que mantienen el carácter que los hace significantes, incluso aunque no exista su objeto; los *índices* son los que pierden dicho carácter cuando no existe el objeto pero no lo pierden cuando no existe el interpretador; y los *símbolos* son aquellos signos que perderían el carácter que los hace significantes si no existiera el interpretador (Ferrater, 1988).

Esta clasificación es similar a la de Morris, quien clasifica los signos según estén relacionados con otros signos, con el objeto designado por el signo o con el sujeto que usa el signo. En el primer caso su estudio se denomina Sintaxis, en el segundo Semántica y en el tercero se denomina Pragmática (Ferrater, 1988).

Otras clasificaciones, entre ellas la de Reichenbach y la de Pierce, se limitan a distinguir tres tipos de signos: índices, iconos y símbolos, de forma similar a como se ha detallado previamente. Los *signos–índice* adquieren su función mediante una relación causal (ej., el humo como signo de fuego). Los *iconos* son similares al significado, presentan alguna semejanza, física o de otro tipo, con su objeto (como la fotografía como signo del objeto fotografiado). En el caso de los *símbolos* la relación del signo con el objeto es arbitraria y determinada mediante reglas o convenciones (Ferrater, 1988; Radford y Grenier, 1996). Esta clasificación ha sido, según Radford y Greiner, universalmente adoptada por la semiótica moderna.

4.3.2 Símbolo

Según el Diccionario de la Real Academia Española (RAE, 1992), un símbolo es una representación sensorialmente perceptible de una realidad, en virtud de rasgos que se asocian con ésta por una convención socialmente aceptada. La acepción matemática que se recoge es letra o figura que representa un número variable o bien cualquiera de los entes para los cuales se ha definido la igualdad y la suma.

Según el Diccionario del uso del Español de Maria Moliner (1998), este término se define como cosa que representa convencionalmente a otra, considerándose sinónimo de signo y de representación. Otra de las acepciones que se recogen es signo con un valor determinado utilizado en una ciencia; por ejemplo, la letra o letras con que se representa cada cuerpo simple en la notación química.

En el diccionario de Filosofía de Ferrater Mora (1988), se reconoce que este término es, en ocasiones, empleado como sinónimo de signo, aunque explica que lo más común es hacer distinciones entre ambos términos considerando signo como una señal natural (como el humo como señal de que hay fuego) y símbolo como una señal no natural, sino convencional (como el uso del color rojo como señal de fuego). Esta distinción no es tan transparente en muchos casos puesto que dependiendo del contexto puede variar el grado de naturalidad o convencionalidad.

Es común definir el símbolo de forma muy general, como un signo que representa alguna cosa, ya sea directa o indirectamente, siendo así de utilidad para cubrir todos los casos: objeto representación de una idea, objeto representación de otro objeto, idea representación de otra idea,... Además, si se interpreta el término "representar" de manera general, se puede relacionar el término símbolo con el de analogía (Ferrater, 1988).

Fregoso (1977) define *símbolo* como una pareja formada por un objeto— el significante o recipiente del símbolo —y una idea— el significado del símbolo. El significante, frecuentemente de naturaleza material, es escogido arbitrariamente y, por sí mismo, suele carecer de significado. Por otra parte, el significado puede ser de naturaleza muy variada. Un símbolo es, en definitiva, la materialización de una idea.

4.3.3 Los símbolos y signos en el lenguaje matemático

> *La progresión en el aprendizaje de la matemática escolar, se produce gracias a la asimilación y uso de símbolos y estructuras simbólicas cada vez más abstractas y jerarquizadas* […] *El mayor o menor dominio de los códigos y de su*

operatoria a un determinado nivel sirve de acelerador o freno en el avance, en la conquista del conocimiento matemático escolar" (Alcalá, 2002, p.41).

Uno de los autores que ha estudiado ampliamente el simbolismo y el lenguaje matemático es Pimm (1999). Concretamente, ha analizado los usos y aspectos de los símbolos en las matemáticas escolares, no refiriendo en ningún caso al término signo. Según Pimm, los símbolos desempeñan diversas funciones: ilustran la estructura de las matemáticas, facilitan la rutina de las manipulaciones, permite la reflexión sobre las matemáticas, y facilitan la compacidad y permanencia del pensamiento. Especialmente señala dos funciones de los símbolos matemáticos: significación y "counterpart" (equivalencia). Este último término se refiere al uso de los símbolos como sustitutos visibles o tangibles para la manipulación. En las matemáticas, los objetos no son parte del mundo físico, por lo tanto, no pueden ser manipulados directamente, se hace necesario simbolizarlos mediante materiales manipulativos o marcas en el papel, siendo los símbolos matemáticos predominantemente estímulos visuales (Pimm, 1995).

La otra función de los símbolos, significación, nos permite nombrar algo y así hacerlo presente, además de permitir distinguir objetos o conceptos entre sí.

Pimm (1995) considera la existencia de los significados antes que los símbolos, admitiendo que también los símbolos y los nombres pueden dar lugar a significado. En las matemáticas a veces se requieren símbolos pero no significados.

En esta obra, Pimm hace referencia al origen de la palabra "símbolo" y recoge la definición de dos términos posiblemente relacionados "symbolom" y "símbolos". El primero de éstos se refiere a algo que no es completo en sí mismo, sino que necesita algo más, una mitad de sí mismo, para poder estar completo. Frye (1987, citado por Pimm, 1995) define este término como algo que podría romperse en dos y reconocerse por la identidad del corte. "Símbolos", en cambio, se refiere a algo que es demasiado complejo o misterioso para poder entenderse en una sola vez.

Este mismo autor propone en otra de sus obras (Pimm, 1999) una clasificación para los símbolos del lenguaje matemático:

- *Logogramas:* Signos inventados para hacer referencia a conceptos totales. Estos signos no tienen parecido alguno con lo que significan. Por ejemplo, las diez cifras del sistema numérico decimal (0, 1, 2, 3,…9) o los símbolos operatorios y relacionantes (ej., =, –, <, >).
- *Pictogramas:* Imágenes estilizadas del objeto en cuestión, pero interpretables con toda claridad. Este es el caso de unos pocos iconos geométricos, como el signo de ángulo, de cuadrado o de triángulo.
- *Símbolos de puntuación:* Símbolos tomados de la ortografía del lenguaje normal escrito a los que se le ha asignado un significado específico. Por ejemplo, “{}”, “[ ]”, “:”, “/”, “ '”,…
- *Símbolos alfabéticos:* Letras tomadas del alfabeto romano o del griego que son utilizadas con significado y finalidad muy diferente al alfabético. ej.,: A, B, C, x, y, π, α,…

Para Rubenstein y Thompson (2001), los símbolos matemáticos son el medio mediante el cual escribimos matemáticas y comunicamos significados matemáticos, al igual que, en otros lenguajes, se emplean las letras o caracteres. Usar símbolos con fluidez es una condición necesaria para aprender matemáticas. Algunos de los usos de los símbolos matemáticos son: nombrar un concepto, expresar una relación, indicar una operación o función con una entrada, indicar una operación o función con dos o más entradas, abreviar palabras, unidades, teoremas,… ó indicar agrupamientos.

En relación con los símbolos y el simbolismo, estos autores, y otros como Shuard y Rothery (1988), señalan algunos factores que producen dificultades a los alumnos en la comprensión de los símbolos escritos:

- La correspondencia de los símbolos escritos con las palabras con las que a ellos se refiere, no es biunívoca. Un mismo símbolo se puede decir de diversas formas o puede requerir usar varias palabras.
- La correspondencia de los símbolos y sus significados tampoco es uno a uno. Un mismo símbolo tiene distintos significados, según el contexto, y un mismo significado puede, en ocasiones, expresarse con distintos símbolos.
- El orden o disposición de los símbolos puede implicar un significado diferente.

- Su lectura procede de convenciones. Los símbolos no siempre se leen de izquierda a derecha.
- Los símbolos pueden estar implícitos.
- Variables específicas son usadas en contextos específicos.

4.3.4 Uso de los términos símbolo y signo en este trabajo

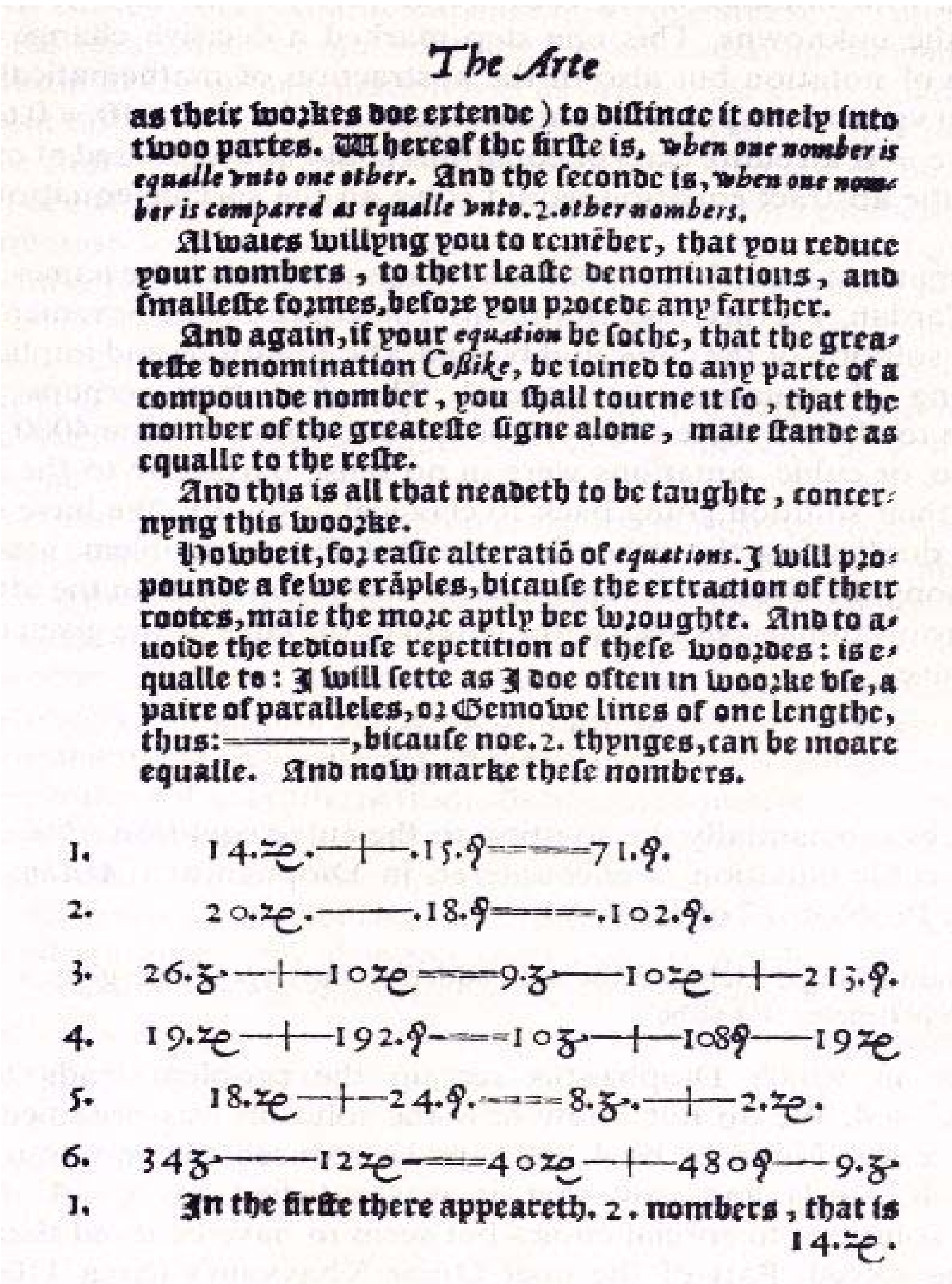
Aunque, como se ha puesto de manifiesto, el significado de los términos signo y símbolo varia dependiendo del autor considerado, siendo en ocasiones considerados términos sinónimos, en este trabajo adoptamos la posición reconocida en la semiótica moderna de considerar los símbolos como un tipo de signos en los cuales la relación con el objeto, al que el signo se refiere, es arbitraria y determinada mediante reglas o convenciones. Teniendo en cuenta esta definición la mayoría de los signos matemáticos se reconocen como símbolos ya que su significado ha sido establecido por medio de convenciones.

Dentro de las matemáticas los signos y símbolos poseen una importancia destacada hasta el punto de que la actividad matemática no es posible sin ellos, ya que, como señala Pimm, los objetos que se ponen en juego no son parte del mundo físico y no pueden ser manipulados directamente. De hecho, la "conquista" del conocimiento matemático escolar está condicionada por el manejo y comprensión del simbolismo matemático.

4.3.4 Historia del signo igual

El signo igual es uno de los pocos símbolos que ha sido adoptado de manera universal (Cajori, 1993) y, según Wheeler (1981), uno de los que ha sufrido en mayor medida de un mal uso a lo largo de su evolución. Como la mayoría de los símbolos de la aritmética tuvo un origen algebraico (Meavilla, 2001). Robert Recorde (c. 1510–1558), empleó por primera vez este signo en 1557 en su libro de álgebra, "The Whetstone of Witte" (El aguzador del ingenio o la Piedra de afilar el Ingenio). Esta obra es un tratado de álgebra típico del siglo XVI, el primer tratado inglés del álgebra, en el cual, además de las operaciones radicales, los caracteres cósicos (símbolos para las potencias de la incógnita) y la resolución de problemas de primer y segundo grado, hay una parte dedicada a la aritmética (Boyer, 1986; Stallings, 2000).

En la página que se muestra del citado texto (ver Figura 4-2), apareció por primera vez el signo moderno de igualdad, el cual, en su uso primero, era una versión más larga de la que utilizamos en la actualidad.



The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other.* And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.*

Alwaies willyng you to remẽber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiõ of *equations*. I will propounde a fewe exãples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =======, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze.—+—.15.ϑ======71.ϑ.
2. 20.ze.——.18.ϑ======.102.ϑ.
3. 26.ʒ.—+—10ze======9.ʒ——10ze—+—213.ϑ.
4. 19.ze—+—192.ϑ======10ʒ—+—108ϑ——19ze
5. 18.ze—+—24.ϑ.======8.ʒ.—+—2.ze.
6. 34ʒ——12ze======40ze—+—480ϑ——9.ʒ.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ze.

Figura 4-2: Primer uso del signo igual (Cajori, 1993).

Las expresiones que aparecen en la Figura 4-2, según Meavilla, (2001), se traducen al simbolismo moderno de la siguiente forma:

1. $14x + 15 = 71$
2. $20x–18 =102$
3. $26x^2 +10x = 9x^2 – 10x + 213$
4. $19x + 192 = 10x^2 + 108 – 19x$
5. $18x + 24 = 8x^2 + 2x$
6. $34x^2 – 12x = 40x + 408 – 9x^2$

Recorde justificó la adopción de dos segmentos de recta iguales explicando "*Pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o líneas gemelas de una misma longitud, así: ==, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales"* (Boyer, 1986, p. 349).

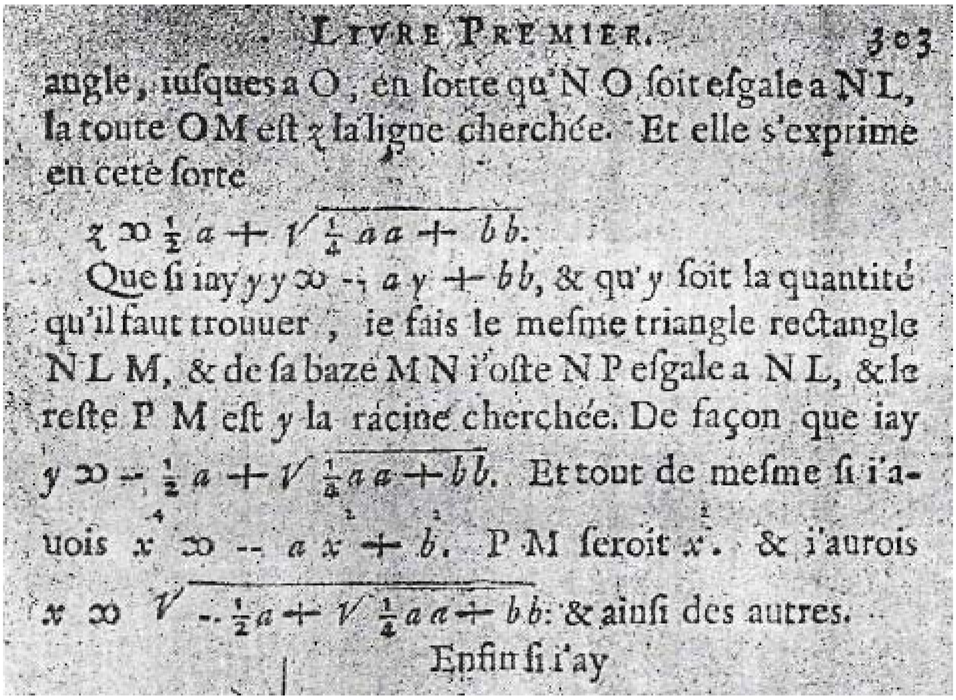
Casualmente, a la vez que Recorde, un matemático en Bolonia empleó el mismo signo en sus manuscritos, los cuales fueron probablemente escritos entre 1550 y 1568 (Cajori, 1993).

Previamente al trabajo de Recorde y, especialmente, durante el álgebra retórica (cuando el álgebra se escribía utilizando el lenguaje ordinario), en la mayoría de los libros de texto se empleaban palabras, tales como aequales, aequantur (a veces abreviado como aeq), esgale, faciunt, ghelijck y gleich, para hacer referencia a la igualdad. Después del trabajo de Recorde, y durante al menos cien años, esta notación siguió siendo utilizada por la mayoría de los matemáticos importantes.

Tras su primer uso, el signo igual no apareció escrito de nuevo hasta 1618, cuando fue utilizado en un apéndice anónimo, probablemente escrito por Oughtred, en la traducción al inglés por Edward Wright de la obra de Napier "Despcriptio" (Cajori, 1993). El reconocimiento general del signo de Recorde en Inglaterra se produjo más tarde, hacia 1631, al ser empleado en tres trabajos de gran influencia: "Artis analyticae praxis" de Thomas Harriot, "Clavis mathematicae" de William Oughtred y "Trigonometría" de Richard Norwood (Cajori, 1993). Posteriormente, fue utilizado por John Wallis, Isaac Barrow, e Isaac Newton, facilitando su adopción en Europa;

siendo a finales del siglo XVII cuando se produjo la adopción casi universal de este signo al ser utilizado por Leibniz (1646–1716) en su notación para el cálculo (Stallings, 2000).

A principios del siglo XVI, la rivalidad con otros signos cesó, siendo en la obra póstuma de Bernoulli “Ars Conjectandi” (1713) donde tiene lugar uno de los últimos usos del signo de Descartes para la igualdad; principal rival del signo de Recorde (Ver Figura 4-3) (Cajori, 1993).



LIVRE PREMIER. 303

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$z \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}.$$

Que si iay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze MN i'oste NP esgale a NL, & le reste PM est y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty - \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \infty - ax^2 + b^2$. PM seroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.

Enfin si i'ay

Figura 4-3: Página de La géométrie de Descartes en la que se aprecia el símbolo usado por Descartes para denotar la igualdad (Cajori, 1993).

Otros predecesores del signo igual de Recorde

Previamente al trabajo de Recorde diversos autores habían empleado otros signos para denotar la igualdad (Cajori, 1993; Meavilla, 2001; Stallings, 2000). Algunos de ellos son:

- un signo bastante elaborado que aparece en el papiro de Rhind (1650 BC) el cual significaba “da”,
- ι, usado por Diofanto (250 AD),
- pha, utilizado por matemáticos indios (900 BC),
- un signo curvo parecido a una inversión del signo ✓, usado por Al–Qalasadi, (1500 AD),

- un signo inspirado en la forma de la última letra de la palabra árabe que significa "igualar" usado por al–Qalasadi (siglo XV),
- un guión horizontal, utilizado por German Regiomontanus en 1470 y Pacioli en 1494,
- ae (de aequalis), utilizado también por Pacioli en 1494,
- tres guiones horizontales, usados por Ghaligai en 1552,
- un espacio negro, empleado por el italiano Cardan en 1539.

Incluso después de que Recorde introdujera el signo usado en la actualidad, nuevos signos para la igualdad siguieron siendo introducidos, tales como [, usado por Buteo en 1559, dos líneas verticales (||), empleadas en 1575 por Whilhelm Holtzmann (signo que fue adoptado por algunos matemáticos Franceses y Daneses durante los siguientes cien años),)=(, usado por Leonard y Thomas Digges en 1590, 2|2 y un signo como Π, pero invertido, usado por Hérigone en 1634, y una línea vertical utilizada por Reyher en 1698, entre otros (Cajori, 1993; Meavilla, 2001; Stallings, 2000).

El mayor rival del signo de Recorde fue el signo utilizado por Rene Descartes introducido en 1637 en su obra "La Géométrie", signo parecido al del infinito (∞) pero abierto por la izquierda, procedente de la contracción de la palabra aequalis, que significa igual (Cajori, 1993). Desde 1600 a 1800 éste fue el signo utilizado frecuentemente para denotar la igualdad (Meavilla, 2001).

Fue con esta obra de Descartes cuando el álgebra simbólica formal encontró su culminación, tras años de continuo avance, siendo éste el primer texto matemático en el que toda la notación empleada es semejante a la del álgebra actual (Boyer, 1986).

Diferentes significados de "=" a lo largo de la historia

Junto con la existencia de otras formas para denotar la igualdad, la adopción universal del signo "=" estuvo amenazada por el uso que se hacia de este signo con otros significados (Cajori, 1993; Meavilla, 2001). Concretamente:

- Francois Vieta lo empleó para la diferencia aritmética en 1591 en su "In artem analyticen isagoge", uso que adoptaron otros matemáticos tras la traducción de este texto. Vieta también utilizó el signo igual entre dos números para indicar que eran desiguales.

- Descartes en 1638 lo usó para significar más o menos (±)
- Caramuelis en 1670 lo empleó como separación entre la parte entera y decimal en los números decimales (ej., 102=857 denotaba 102.857)
- Paricius en 1706 usó los signos =, — y : para separar números en la resolución de problemas aritméticos
- Dulaurens en 1667 y Reyher en 1698 lo usaron para representar dos rectas paralelas
- Legendre lo empleó para denotar la congruencia de números, lo que es actualmente denotado con ≡, aunque también lo empleaba para denotar igualdad.

Variaciones en la escritura del símbolo de Recorde

Como hemos observado anteriormente (ver Figura 4-2), Recorde escribió este signo con los segmentos muy largos y muy cercanos el uno al otro, forma que también ha sido empleada por otros autores tales como Thomas Harriot, en 1631, y De Lagny, en 1733. Por su parte, Weigel en 1693 y Swedenborg en 1716, entre otros, escribieron los dos segmentos muy cortos, y en el caso Swedenborg un poco inclinados hacia arriba. En otras ocasiones este signo se ha representado de forma similar al actual pero con los segmentos más distanciados, y en su forma impresa también ha aparecido escrito como dos unos (11) girados noventa grados a la izquierda (Cajori, 1993).

Variaciones en el uso del símbolo de Recorde

Un uso extraño de este símbolo aparece en el trabajo de Deidier (Cajori, 1993) el cual escribe $\frac{0+1+2=}{2+2+2=}\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0.1.4.=5}{4{,}4{,}4{,}=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$

Otro uso inusual del signo igual, ha sido encontrado en un texto de aritmética americano "The Columbian Arithmetician" (1811) donde se emplea para la expresión de operaciones encadenadas de la forma: 1 + 6, = 7, x 6 = 42, ÷ 2 = 21 (Cajori, 1993).

Otros autores han modificado ligeramente este símbolo para denotar conceptos relacionados con la igualdad. Concretamente, Wolfgang Bolilla, en 1832, usa el signo = con un punto sobre la mitad del segmento superior para denotar igualdad absoluta, con un punto sobre la mitad del segmento inferior para denotar igualdad de contenido y entre paréntesis A (=) B para indicar que cada valor de A es igual a algún valor o valores de B y viceversa. También escribió A (= B para indicar que todo valor de A es igual a alguno o algunos de B.

Por otra parte, Pasquier empleó, en 1920, una señal de doble igualdad escribiendo un signo igual sobre otro, para denotar la igualdad por definición, lo que en la actualidad se denota a veces por ":=". En otras ocasiones se ha empleado el signo de Recorde con una f debajo para denotar que la igualdad es sólo formal y no aritmética. Otros autores han empleado el signo igual de Recorde con un significado más general para denotar "es explicado por" o "está asociado con". Bellavitis, por su aparte, lo empleó en 1832 para denotar la igualdad de vectores, aunque posteriormente adoptó otro signo.

4.3.5 Significados del signo igual

Si nos centramos en el signo igual, o igual, y consultamos su definición en diccionarios de la lengua española aparece definido como signo de la igualdad formado por dos rayas horizontales y paralelas (=) (RAE, 1992), el signo que expresa la igualdad (=) (Moliner 1998).

En su diccionario de Filosofía, Ferrater (1988) hace referencia a este signo junto a los signos de pertenencia y de inclusión y los signos ~, ≡ y ≠, entre otros. En relación al signo igual explica que se lee "es idéntico a" o "es igual", "es lo mismo que", y que se usa en la lógica de la identidad y en la lógica de las relaciones, así como en el álgebra de clases y en el álgebra de relaciones. Además, hace referencia al signo "= def" que se lee "se define" o "es definido por".

Honderich (2001) recoge el signo igual como un símbolo lógico con significado "igual a" o "si y sólo si" (equivalencia estricta). Ferrater y Leblanc (1967), por su parte, señalan el uso del signo igual para denotar las situaciones de identidad, escribiéndose a ambos lados dos términos singulares, dos nombres de clases o dos nombres de relaciones.

En ocasiones, en variados ámbitos, el signo igual es utilizado como abreviatura tipográfica de la expresión "igual que/a" o "es decir".

Puesto que nuestro principal interés se centra en los significados y usos de este símbolo en el contexto de la aritmética y el álgebra, a continuación se recogen los significados de este símbolo que distinguen diversos autores del área de Matemáticas y de la Educación Matemática en relación con ambas sub-áreas de las matemáticas. Estos significados no se refieren únicamente a aquellos reconocidos como significados de referencia dentro de las matemáticas; algunos de ellos son significados otorgados a este símbolo por los alumnos o en los libros de texto de matemáticas utilizados en Educación Primaria.

Vergnaud (1984), centrándose en la aritmética, define el signo igual como una identidad, en tanto a su significado, y como una equivalencia en tanto a su representación escrita. Considera que el número a ambos lados del signo igual es el mismo, aunque la secuencia de símbolos es diferente pero supuestamente equivalente. Partiendo de esta distinción hace referencia a tres interpretaciones diferentes de toda igualdad numérica, que verifican las propiedades simétrica y transitiva:

- *Identidad:* el número a la derecha del signo igual es exactamente el mismo que el número a la izquierda (considerando únicamente el significado de ambos miembros y obviando las diferencias de representación).
- *Equivalencia de símbolos:* la cadena de símbolos a la derecha del signo igual es equivalente a la cadena de símbolos a la izquierda, es decir, puede ser sustituida una por la otra y existen reglas que permiten trasformar una cadena en la otra.
- *Equivalencia de operaciones:* la naturaleza y propiedades de las operaciones expresadas permiten deducir que ambas operaciones tienen un mismo resultado.

Por ejemplo, la igualdad $5+7=8+4$ es entendida como una *identidad* al observar que ambos miembros representan al número 12, como una *equivalencia de símbolos* porque las expresiones aritméticas $5+7$ y $8+4$ son equivalentes y podemos obtener una a partir de la otra, $5+7=(4+1)+7=4+(1+7)=4+8=8+4$ y como *equivalencia de operaciones* porque las operaciones expresadas en ambos miembros conducen a un mismo resultado.

Además de estos significados, Vergnaud (1984), al igual que Vergnaud, Cortes y Favre–Artigue (1987), señala el significado que la mayoría de los alumnos de los primeros niveles de la Educación Secundaria adjudican a este símbolo como indicador del resultado de la operación realizada. Con este significado, este símbolo es usado, en ocasiones, de formas que violan las propiedades transitiva y simétrica de la igualdad, encadenándose operaciones de izquierda a derecha como en la siguiente expresión $24-6=18-7=11$.

Considerando el signo igual como expresión de una relación, Vergnaud et al. (1987) distinguen dos significados de este símbolo:

- *Igualdad de funciones,* como en las expresiones $5+3(x+6)=3x+23$ *y* $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, en las que la igualdad de ambos miembros se verifica para todos los valores de las variables. En este caso se están considerando dos funciones exactamente iguales.
- *Igualdad de número,* como es el caso de la expresión $5+3(x+6)=7x-17$, en la que se da la igualdad sólo para valores adecuados de las variables.

En relación a las igualdades algebraicas, Schoenfeld y Arcavi (1988) señalan la importancia del contexto en la compresión del simbolismo matemático. Para ello hacen observar la diferencia entre las dos expresiones siguientes:

para todo numero real x, $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$

para todo número real x, $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

Aunque ambas expresiones contienen los mismos miembros y son ciertas para cualesquiera valores de la variable x distintos de 1, en la primera igualdad se indica el resultado de restar dos expresiones algebraicas, mientras que en la segunda se representa la descomposición de la fracción $\frac{2}{x^2-1}$ en fracciones parciales.

Grupo Azarquiel (1991) señala algunas de las diferencias de significado de este símbolo entre la aritmética y el álgebra. Entre ellas, el hecho de que en la aritmética siempre se usa en expresiones verdaderas, mientras que en el álgebra puede ser utilizado para indicar restricciones, como ocurre en el caso de las ecuaciones. También señala el carácter unidireccional de este símbolo en el contexto de la aritmética frente a su carácter bidireccional en el álgebra.

Maurin y Johsua (1993) explican que el signo igual se utiliza para indicar dos expresiones que corresponden a dos maneras de designar un mismo objeto o a dos escrituras diferentes del mismo (Godino y Font, 2003).

Otro significado diferente del signo igual es mencionado por Freudenthal (1994). Dicho significado corresponde al uso de este signo en libros de texto para plantear actividades al alumnado que no necesariamente han de abordarse en el formato de una igualdad numérica. Así ocurre cuando se le presenta al alumnado expresiones tales como $4+3=$ *ó* $(a+b)(a-b)=$ como abreviación de las preguntas ¿cuánto es cuatro más tres? y ¿cuánto es el producto de $a+b$ y $a-b$?, respectivamente. En dichos casos, haciéndose un uso asimétrico del signo igual, se espera que el alumno escriba, a la derecha del signo igual, el resultado a la operación aritmética o algebraica. Con este significado del signo igual, expresiones como $a+b=$ carecen de sentido al no poderse realizar ninguna operación.

Freudenthal reconoce como significado convenido del signo igual el expresar que las "cosas" dispuestas a ambos lados de dicho signo son iguales. Este significado es simétrico y va a venir clarificado por el contexto. En particular, Freudenthal hace observar que, en ocasiones, una expresión tal como $a+b=c$ (a) puede significar la introducción de un nuevo símbolo, *c*, para denotar la suma de *a* y *b*, (b) puede expresar una relación de dependencia que se cumple entre dichas variables, por lo que *c* está siendo explicado a partir de las variables *a* y *b,* o (c) puede expresar una relación de dependencia entre las variables que se impone limitando los valores a tomar por *a* y *b*.

Además, Freudenthal señala el uso del signo igual como un operador en contextos aritméticos y algebraicos. La mayoría de los autores consultados (Behr et al., 1980; Carpenter et al., 2003; Falkner et al., 1999; Kieran, 1981; Koehler, 2002; Linchevski, 1995; Rojano, 2002; Seo y Ginsburg, 2003; Van Ameron, 2002) hace referencia a este significado en contextos aritméticos, es decir, como separación entre una cadena de números y operaciones a realizar y su resultado (ej., $12+7=19$). Sin embargo, Freudenthal afirman que también en el álgebra se enfatiza este significado cuando se promueve un enfoque o modo de trabajo automatizado. *"El álgebra como un sistema de reglas de transformación conduce automáticamente a una interpretación asimétrica del signo igual como algo dirigido unilateralmente hacia una 'reducción'"* (p. 77).

Linchevski (1995) distingue entre dos tipos de significado del signo igual, propios de un pensamiento aritmético y de un pensamiento algebraico respectivamente. Según este autor, en aritmética el signo igual indica un procedimiento de trasformación; siendo una señal unidireccional de izquierda a derecha. En cambio, en expresiones tales como $2+3=1+4$ y $2+3=3+2$ el significado es diferente. Dichas expresiones, según Linchevski, han de ser consideradas de un modo algebraico. En estos casos, ambos miembros de la sentencia dan la misma información. El paso de la aritmética al álgebra implica el cambio de un modo unidireccional de procesar la información a uno bidireccional.

Sáenz–Ludlow y Walgamuth (1998) distinguen dos tipos de significados del signo igual en igualdades y sentencias numéricas**—** mismidad nominal y mismidad cuantitativa **—**según los miembros sean idénticos (ej., $2+5=2+5$) o, por el contrario, las expresiones en ambos miembros correspondan a distintas representaciones de un mismo número (ej., $2+5=1+6$).

Palarea (1998), en su trabajo de tesis doctoral sobre la adquisición del lenguaje algebraico, hace referencia a la diferencia de significados del signo igual en la aritmética y en el álgebra:

> *En la aritmética se entiende como un acción física. Es usado para conectar un problema con su resultado numérico* […] *con menor frecuencia, se utiliza para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado, 3 x 4 = 4 + 4 + 4, y en algunos casos relaciona la secuencia de pasos intermedios en un proceso que conduce a un mismo resultado, por ejemplo, 3 x (5 - 2) + 4 = 3 x 3 + 4 = 1, donde cada eslabón de la cadena expresa una simplificación o cambio en la forma de su predecesor, es decir, 'una reducción', pero en todos los casos los supuestos que se establecen son siempre verdaderos* (p. 68).

Por su parte, Proyecto Sur (1997), en un libro de texto dirigido a segundo curso de la Educación Secundaria, hace referencia al signo igual como uno de los signos más utilizados en las matemáticas, aunque no siempre con el mismo significado. En particular señala su uso como sustitución de la palabra "es" o "es igual" al pasar a lenguaje simbólico expresiones (matemáticas) verbales como las siguientes:

- "El cuadrado de una suma es igual a la suma de los cuadrados de los sumandos más el doble del producto de estos" $\rightarrow (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- "Nueve es ocho más uno" $\rightarrow 9 = 8 + 1$

Estos autores distinguen entre el uso del signo igual en la aritmética, en la geometría, en el álgebra y en las calculadoras y ordenadores.

<u>En la aritmética</u> reconocen a este signo un significado unidireccional siendo utilizado para conectar el cálculo a realizar con su resultado numérico. Se indica a la izquierda la operación y a la derecha el resultado. Algunas veces este signo es usado para relacionar procesos (cadenas de operaciones) que dan lugar a un mismo resultado. En todos los casos se expresan relaciones verdaderas.

Estos autores recogen el uso repetido del signo igual para unir expresiones, a lo que denominan concatenación (ej., 3 x 4 = 4 + 4 + 4 = 12), recomendando al alumno que no lo utilice para evitar confusiones en otros contextos y que, en su lugar, escriba separadamente dichas expresiones (ej., 3 x 4 = 4 + 4 + 4 y 4 + 4 + 4 = 12).

<u>En la Geometría</u> consideran figuras iguales aquellas que tienen la misma forma (aunque su posición sea diferente), es decir, aquellas para las que existe una isometría que lleva una en la otra.

<u>En el Álgebra</u> el signo igual tiene un significado bidireccional conectando dos expresiones que son iguales, algebraicamente hablando, o que son iguales para ciertos valores de la variable o variables.

<u>En los ordenadores y calculadoras</u> este signo tiene un uso muy concreto. En la mayoría de las calculadoras la tecla que corresponde a este signo da la orden a la máquina de que efectúe los cálculos previamente indicados, o, en algunos casos, de que ejecute un programa. En los ordenadores este signo es utilizado para asignar un

valor a una variable, disponiéndose la variable a la izquierda del signo igual y el valor a la derecha.

A partir de un estudio del uso del signo igual en libros de texto de tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de Educación Secundaria[34], Anglada (2000) identifica variados usos del signo igual en actividades de Aritmética, Álgebra y Medida. Si bien estos usos no han de ser identificados como significados, son de interés para discernir e identificar distintos significados del signo igual. A continuación, se presentan en el modo en que son clasificados por Anglada.

Aritmética

- Unir la secuencia de pasos que conducen a un resultado final (ej., 3 x (8–1) =3 x 7 =21).
- Enlazar una expresión y su transformación. En particular se distinguen dos casos según se relacionen dos trasformaciones distintas o dos descomposiciones (ej., 6 x 2 = 6 + 6 y $4+7=2+9$).
- Relacionar dos expresiones que representan un mismo número (ej., $\frac{1}{2}=0.5$).
- Enlazar dos notaciones alternativas (ej., $\frac{7}{5}=7:5$).
- Designar equivalencia (ej., $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$).
- Enlazar expresiones verbales con su traducción numérica (ej., 20% de 4000 = 4000 x 20/100).
- Definir un objeto matemático (ej., $5^0=1$).

Álgebra

- En identidades algebraicas y ecuaciones

[34] Anglada analiza dos libros de texto de cada curso.

Medida

- Relacionar cantidades adjetivadas por medio de unidades de medida (ej., 100cm = 1m).
- Designar un objeto (ej., Área del rectángulo = a·b)
- Asociar a un objeto una cantidad adjetivada (ej., A = 30cm^2)

Otros usos

- Enlazar el significado de una expresión y su etiqueta (uso del signo igual en funciones)
- Comprobación de resultados (consecuencia del principio de sustitución) (ej., a + b = c y d + e = c → a + b = d + e)
- Expresar igualdad de conjuntos

Por otra parte, Rojano (2002) distingue cuatro significados diferentes del signo igual. Uno de ellos es el que denomina *significado aritmético*, al que hemos aludido anteriormente, que hace referencia al uso de este signo como operador, procediendo de izquierda a derecha. Los demás significados se localizan en el contexto del álgebra:

- de *equivalencia*: 2(a + b) = 2a + 2b
- de *igualdad restringida o ecuación:* 7x – 4 = 3x + 8
- de *igualdad funcional*: y = 3x – 2

Seo y Ginsburg (2003) hacen referencia a un significado, ya mencionado, al que denominan indicación de un paso siguiente. Este significado corresponde al uso del signo igual en cadenas de expresiones aritméticas o algebraicas en las que se indica los sucesivos pasos en el cálculo o simplificación de dicha cadena de operaciones (ej., 2^2 x (7 – 2) = 4 x 5 = 20).

En nuestro estudio Molina (2005), identificamos un significado del signo igual que extiende al significado *operador*. El significado *expresión de una acción* corresponde a la extensión bidireccional del significado *operador*, es decir, la interpretación del signo igual como un estímulo para dar una respuesta a una cadena de operaciones dispuesta a derecha o izquierda del signo igual, es decir, como un símbolo separador entre una expresión aritmética y su valor numérico, disponiéndose ambas indistintamente a cada lado de este símbolo.

Smith (2006) reconoce tres de los significados del signo igual ya mencionados, según este símbolo sea utilizado para dar una definición (ej., $f(x) = x^2 + 2x - 3$), para indicar el resultado de un cálculo (ej., $f(-3) = 0$) ó para expresar una relación (ej., $f(-3) = f(1)$).

Significados imprecisos del signo igual.

Carpenter et al. (2003), junto con Wheeler (1981), hacen referencia a otro significado un tanto impreciso del signo igual como indicador de la existencia de cierta relación o correspondencia entre expresiones ya sean matemáticas o no. Por ejemplo, en expresiones tales como Una bici = 35$, Tom = 13 años o Edad de Tom = 13 años.

Otro significado impreciso de este símbolo consiste en la abreviatura de una relación de correspondencia entre figuras y números (ver Figura 4-4). Carpenter et al. (2003) señalan que dicho uso del signo igual no corresponde al significado matemático de este símbolo y que, por lo tanto, pueden ocasionar a los estudiantes dificultades en la compresión del significado matemático del signo igual.

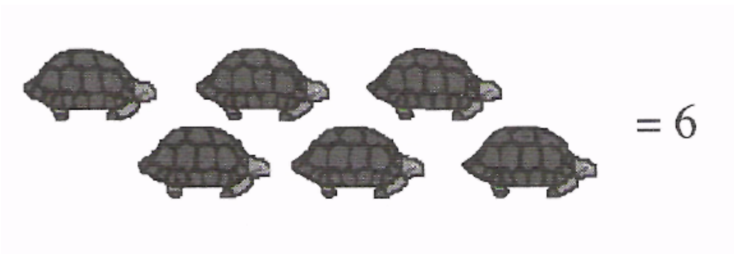


Figura 4-4: Uso del signo igual a evitar según Carpenter et al (2003)

También es frecuente en los libros de texto de los primeros cursos de Educación Infantil y Primaria, el uso de este signo entre imágenes (ver Figura 4-5), el cual tampoco corresponde al significado matemático de este símbolo.

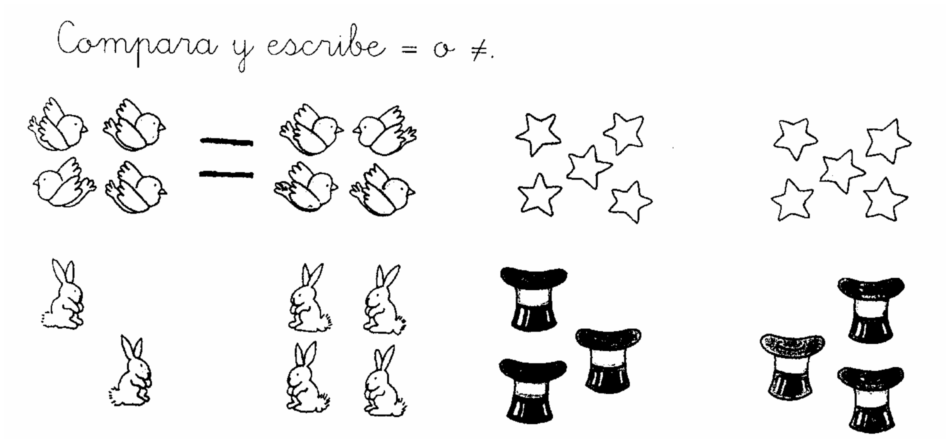


Figura 4-5: Ejemplo de uso del signo igual en un libro de texto de Primer Curso de Educación Primaria (Pedro-Viejo, Marín, Lorenzo y Molina, 1994).

Estos usos imprecisos del signo igual pueden desencadenar posteriores dificultades en la resolución de igualdades pues dificultan que los alumnos perciban con claridad el significado del signo igual en otros contextos y les conduce a adjudicar a este signo un significado de "unión multiuso", de indicador de la existencia de cierta conexión entre lo escrito antes y después de dicho símbolo (Carpenter et al., 2003; Wheeler, 1981).

Significados o usos del signo igual matemáticamente incorrectos.

Kieran (1981), Vergnaud et al. (1987), Wolters (1991), Rojano (2002) y Molina (2005) han señalado el uso del signo igual como separador de los pasos de resolución de un problema encadenando operaciones (ej., $12+3=15+21=36-9=25$) o expresiones (ej., $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x}=x^2+1=x=x^2-x+1=0$).

En estos casos se está haciendo un uso unidireccional de este signo. Para los alumnos estas expresiones tienen sentido, probablemente, porque se corresponden con el modo en que estas cadenas de operaciones son verbalizadas oralmente y el orden secuencial en el que abordan el cálculo. Como señala Rojano (2002), este encadenamiento de expresiones es posible cuando se trabaja con identidades simbólicas, es decir, con trasformaciones tautológicas, en cambio, no es permisible en el trabajo con ecuaciones.

En algunos casos, sin embargo, Kieran (1981) señala que no se puede precisar si los alumnos están usando el signo igual como símbolo separador o están usando un "atajo" en el trabajo procedimental. Como ejemplos toma de Byers y Herscovics (1977) y Clement (1982) las siguientes producciones de alumnos de Educación Secundaria e Universidad respectivamente:

$2x + 3 = 5 + x$	$f(x) = \sqrt{x^2+1}$
$2x + 3 - 3 = 5 + x - 3$	$= (x^2 + 1)^{1/2}$
$2x = 5 + x - x - 3$	$= ½(x^2 + 1)^{-1/2}\, d_x\, (x^2 + 1)$
$2x - x = 5 - 3$	$= ½(x^2 + 1)^{-1/2}\, (2x)$
$x = 2$	$= x(x^2+1)^{-1/2}$
	$= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Clasificación de los significados del signo igual

Partiendo de las distinciones realizadas por los distintos autores consultados en relación con el signo igual, clasificamos a continuación los significados que se le asignan a este símbolo en la aritmética y álgebra escolar, estableciendo la terminología que vamos a utilizar en el resto del trabajo (Ver Tabla 4-6).

Distinguimos once significados: *propuesta de actividad de cálculo*, *operador, separador, expresión de una acción, expresión de equivalencia condicional (ecuación), expresión de equivalencia, definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional o de dependencia, indicador de cierta conexión o correspondencia y aproximación.* El significado expresión de equivalencia se subdivide a su vez en 4 acepciones diferentes, dando lugar a un total de catorce significados diferentes del signo igual. Comentamos, a continuación, cada una de estas acepciones. En la Tabla 4-6 se recogen ejemplos aritméticos y/o algebraicos de cada una de ellas[35].

1. ***Propuesta de actividad de cálculo.*** Este es el significado que posee este símbolo en expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos,

[35] Algunos de los ejemplos propuestos involucran funciones. Aunque el estudio y trabajo con funciones es considerado, en general, como parte del Análisis Matemático, una sub-área diferente de las matemáticas, en este caso lo incluimos dentro del álgebra ya que estamos considerando la amplia definición de álgebra utilizada en la propuesta Early-Algebra. Esta inclusión de las funciones en el álgebra es compartida por variados autores al restringirse a considerar las matemáticas de la Educación Primaria y Secundaria.

encadenados con símbolos operacionales, seguida a su derecha del signo igual (ej., $16:3=$, $x(x+1)-3x(x+5)=$). Este tipo de expresiones se utilizan en actividades de cálculo de operaciones o simplificación de expresiones, para proponer al alumno una actividad a realizar que no necesariamente ha de abordarse en el formato de una igualdad.

2. ***Operador.*** Significado del signo igual en igualdades o sentencias de acción, unidireccionales, compuestas por una cadena de operaciones, dispuesta a su izquierda, y su resultado, dispuesto a la derecha (ej., 4 x 5 = 20, $x(x-2)+3x^2=4x^2-2x$). En estos casos el signo igual indica la respuesta a un cálculo o simplificación; es interpretado como un operador. Este significado es denominado por algunos autores como significado aritmético u operacional del signo igual (Rojano, 2002; Van Ameron, 2002).

En ocasiones el signo igual es utilizado por los alumnos con este significado para encadenar diferentes operaciones en el cálculo de una cadena de operaciones (ej., $12+3=15+21=36-9=25$), dando lugar a expresiones matemáticamente incorrectas. En este uso del signo igual, la sentencia no está siendo considerada como una totalidad sino como una secuencia unidireccional de izquierda a derecha.

3. ***Separador.*** Significado del signo igual otorgado por los alumnos al hacer uso de este símbolo en contextos algebraicos como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad (ej., $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x}=x^2+1=x=x^2-x+1=0$; $f(x)= x^2= f^2(x)=x^4$). En este caso el signo igual relaciona expresiones algebraicas que en el contexto considerado pueden no tener relación alguna, siendo pasos sucesivos en la resolución de la actividad en cuestión.

4. ***Expresión de una acción.*** Significado del signo igual en igualdades y sentencias de acción, como un símbolo operador o separador de una cadena de operaciones y su resultado, aceptándose que ambos se dispongan indistintamente a uno u otro lado de este símbolo (ej., $2x=x(x-2)-x^2+4x$, $x(x-2)-x^2+4x=2x$, $24=12+12$, $12+12=24$). Este significado bidireccional extiende el significado *operador* anteriormente descrito. Implica una interpretación operacional del signo igual y la interpretación de la sentencia numérica como la expresión de una acción (de ahí su nombre).

5. ***Expresión de una equivalencia condicional (ecuación).*** Este significado del signo igual lo encontramos en el contexto del álgebra en situaciones en las que la equivalencia expresada por medio del signo igual sólo es cierta para algún o algunos valores de la variable o variables, pudiendo no existir ninguno (ej., $x^2 + 4x = 5x - 6$). Por tanto, estamos imponiendo que la ecuación tenga un conjunto finito de soluciones, pudiendo ser el conjunto vacío.

6. ***Expresión de una equivalencia.*** El siguiente significado del signo igual se refiere al uso de este signo para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático. Este significado se particulariza en cuatro acepciones diferentes:

6.1. *Equivalencia numérica:* mismidad de valor numérico de las expresiones aritméticas de ambos miembros de la igualdad (ej., $4+5=3+6$, $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$). En este caso el signo igual es utilizado para conectar dos representaciones de un mismo número. Este significado es denominado, en ocasiones, *significado relacional* del signo igual, en contra posición al "significado operacional", como algunos autores denominan al significado *operador*.

Con este significado, el signo igual puede ser utilizado en diferentes situaciones, por ejemplo, para expresar la descomposición de una expresión aritmética (ej., 3 x 4 = 4 + 4 + 4), para indicar la equivalencia de pasos sucesivos en un cálculo (ej., 3 x (4 + 2) = 3 x 6), o simplemente para relacionar dos operaciones con igual valor numérico o dos representaciones de un mismo número (ej., $4+5=3+6$).

6.2. *Equivalencia simbólica (identidad simbólica):* mismidad en valor numérico de las expresiones algebraicas a ambos lados del signo igual para cualquier valor que tomen la variable o variables (uso del signo igual en expresiones algebraicas tautológicas) (ej., $x^2 + 2x = x(x-2)$).

De forma similar al caso anterior, el signo igual puede ser utilizado en diferentes contextos, por ejemplo, para expresar la descomposición de una expresión algebraica (ej., $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$), para indicar la equivalencia de pasos sucesivos en la simplificación de una expresión algebraica (ej., $3(x-5)(x+5)-3x^2=3(x^2-25)-3x^2$), o para expresar una propiedad aritmética de forma simbólica (ej., $a+b=b+a$, siendo a y b cualesquiera números naturales).

6.3. *Identidad estricta.* Significado restringido a expresiones donde los dos miembros representan el mismo objeto matemático, usando el mismo representante. Son, por tanto, igualdades de la forma $a=a$, siendo *"a"* una expresión aritmética o simbólica (ej., $3=3$, $x+5=x+5$). Este significado engloba algunos casos de equivalencia numérica o simbólica, sin embargo, lo distinguimos por su especial naturaleza (Ver Figura 4-6).

Figura 4-6: Significados del signo igual correspondientes a la expresión de una equivalencia.

6.4. *Equivalencia por definición o por notación:* equivalencia de dos expresiones aritméticas o algebraicas por definición o por equivalencia de significado de la notación utilizada (ej., $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ considerando $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ como representaciones de una misma fracción[36], $\frac{7}{5}=7:5$ siendo $\frac{7}{5}$ interpretado como cociente, $100cm=1m$, $\frac{a}{b}=ab^{-1}$).

7. *Definición de un objeto matemático.* En este caso el signo igual se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático. En algunos

[36] En este caso, 3/4 y 6/8 son consideradas como dos representaciones de una misma fracción. En cambio, si fueran consideradas como expresiones de cocientes entre números naturales, el significado del signo igual en la expresión 3/4 = 6/8 sería el de equivalencia numérica.

contextos se utiliza el símbolo ≡ en vez del signo igual, así ocurre cuando se considera la ecuación o ecuaciones de una recta o plano (ej., $a^0 = 1$ siendo a cualquier número natural, r ≡ ax + by + c = 0, f(x) = 2x + 3).

8. *Expresión de una relación funcional o dependencia.* Este significado del signo igual se refiere al uso del signo igual para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros (ej., $l = 2\Pi r$, $y = 3x + 2$). Por ejemplo, éste es el significado del signo igual en fórmulas del área de figuras geométricas.

9. *Indicador de cierta conexión o correspondencia.* Este significado impreciso del signo igual se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como, por ejemplo, entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas (ej., 🚲🚲🚲 = 3; Precio bici = 3x + 5, siendo x el precio de un balón de baloncesto).

10. *Aproximación.* Este significado corresponde a las situaciones en las que este símbolo relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico (ej., $\frac{1}{3} = 0.33$). En estos casos el signo igual puede ser reemplazado por el símbolo $\simeq$.

11. *Asignación de un valor numérico.* En este caso el signo igual asigna a un símbolo un valor numérico. Por ejemplo, si se está considerando una expresión algebraica se puede hacer uso del signo igual para asignar un valor a la variable en el cual evaluar la expresión (ej., sea $x = 4$ ¿cuál es el valor de $x^2 - 5$?). En otros casos, como en la resolución de ecuaciones, se utiliza el signo igual con este significado al resolver la ecuación, para indicar el valor de la incógnita. Si dicha ecuación está vinculada a un contexto, dicho valor numérico es acompañado, en ocasiones, de una unidad de medida (ej., $a = 30cm^2$).

Tabla 4-6: Ejemplos de los diferentes significados del signo igual identificados en el contexto de la aritmética y el álgebra.

SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL		Ejemplos (clasificados según el tipo de expresiones que contienen)	
		Aritméticos	**Algebraicos**
Propuesta de actividad de cálculo		$16 \div 3 =$	$x(x + 1) - 3x(x + 5)=$
Operador		$4 \text{ x } 5 = 20$	$x(x-2) + 3x^2= 4x^2 + 2x$
Separador		(No existe)	$f(x) = x^2= f^2(x)=x^4$
Expresión de una acción		$24 = 12 + 12$ $12 + 12 = 24$	$2x = x(x-2) - x^2 + 4x$ $x(x-2) - x^2 + 4x = 2x$
Expresión de equivalencia condicionada (Ecuación)		(No existe)	$x^2 + 4x = 5x - 6$
Expresión de equivalencia	*Equivalencia Numérica*	$4 + 5 = 3 + 6$ $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ $2/3 = 4/6$	(No existe)
	Equivalencia Simbólica	(No existe)	$x^2 + 2x = x(x-2)$ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ $a + b = b + a$
	Identidad estricta	$3 = 3$	$x = x$
	Equivalencia por definición o por notación	$3/4= 6/8$ $7/5 = 7:5$ $100 \text{ cm} = 1\text{m}$	$a/b = ab^{-1}$
Definición de un objeto matemático		$1^0=0$	$a^0 = 1, a \neq 0$ $r = ax + by + c = 0$ $f(x) = 3x + 2$ $c = a + b$ (Definidos a y b se introduce el valor de una nueva variable)
Expresión de una relación funcional o de dependencia		(No existe)	$c = 2\pi r$ $y = 3x + 2$ (cuando la variable “y” ha sido definida a priori)
Indicador de cierta conexión o correspondencia		Una bici = 50€	Una bici = $3x + 5$
		🚲🚲🚲 = 3	
Aproximación		$1/3 = 0.33$	(No existe)
Asignación de un valor numérico		(No existe)	$x = 4$ $a = 30 \text{ cm}^2$

Es importante observar que el contexto juega un papel principal en la determinación del significado del signo igual. En particular, en contextos no aritméticos, es en ocasiones difícil distinguir entre los significados *operador* y *equivalencia simbólica* pues al encontrar expresiones tales como $x(x+2)=x^2+2x$ el signo igual puede considerarse como separador de la cadena de expresiones $x(x+2)$ y su resultado, o puede entenderse como una equivalencia simbólica. Esta ambigüedad radica en que al operar expresiones simbólicas no suele obtenerse un valor numérico sino una expresión equivalente a la inicial. Según esto, la consideración del contexto es indispensable para determinar el significado de este signo del que se está haciendo uso.

Se observa, además, que pueden hacerse mayores distinciones entre los significados del signo igual en la aritmética y el algebra escolar si se consideran los diferentes modos en lo que puede interpretarse una igualdad que exprese una equivalencia numérica o una equivalencia simbólica (ej., factorización, agrupación, relación entre diferentes representaciones de un objeto).

En la Tabla 4-7 mostramos algunas de las características que se aprecian en estos significados del signo igual. Observamos que sólo el significado equivalencia está basado en una relación que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, en los demás casos, la relación no es reflexiva, y a veces tampoco transitiva. Además, se aprecia que al hacer uso del signo igual en el contexto de la aritmética y el algebra escolar no sólo se obtienen igualdades numéricas o algebraicas, también expresiones incompletas, ecuaciones e, incluso, expresiones que no se consideran propias del lenguaje matemático o "igualdades imprecisas".

En al menos seis de los significados del signo igual identificados, este símbolo se usa de modo unidireccional, es decir, las expresiones que lo contienen son dotadas de sentido mediante su consideración de izquierda a derecha. Los significados son bidireccionales cuando constituyen una expresión que puede ser interpretada tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda.

Tabla 4-7: Algunas características de los significados del signo igual

<table>
<tr><th colspan="2">SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL</th><th>Reflexivo</th><th>Simétrico</th><th>Transitivo</th><th>Se obtiene</th><th>Dirección</th></tr>
<tr><td colspan="2">Propuesta de actividad</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Expresión incompleta</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operador</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Igualdad o expresión no matemática</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Separador</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Expresión no matemática</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una acción</td><td>No</td><td>Sí</td><td>No</td><td>Igualdad</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una equivalencia condicionada</td><td>No</td><td>Sí</td><td>No</td><td>Ecuación</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Expresión de equivalencia</td><td><u>Equivalencia numérica</u></td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Igualdad</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td><u>Equivalencia simbólica</u></td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Igualdad</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td><u>Identidad estricta</u></td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Igualdad</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td><u>Equivalencia por definición</u></td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Igualdad</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición de un objeto matemático</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Igualdad</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una relación funcional</td><td>No</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Igualdad algebraica</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Indicador de cierta conexión o correspondencia</td><td>No</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Expresión no matemática</td><td>Según el caso</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aproximación</td><td>No</td><td>No</td><td>Sí</td><td>“Igualdad imprecisa”</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asignación de un valor numérico</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Igualdad algebraica</td><td>Unidireccional</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 5

Antecedentes

En este capítulo resumimos estudios previos relacionados con la resolución de igualdades numéricas abiertas, la comprensión del signo igual, el uso y desarrollo de pensamiento relacional, el aprendizaje y uso de las estrategias de pensamiento y cálculo flexible, y los conocimientos de los alumnos, principalmente de Educación Primaria, sobre la estructura de la aritmética. Todos estos trabajos nos permiten ilustrar el estado de la cuestión en relación con nuestro problema de investigación.

El capítulo se subdivide en dos grandes partes, la primera de ellas relativa a la resolución de igualdades numéricas y la compresión del signo igual; la segunda, al uso y desarrollo de pensamiento relacional y al conocimiento sobre la estructura de la aritmética.

5.1 Estudios sobre la resolución de igualdades numéricas abiertas y la comprensión del signo igual

Diversos investigadores han estudiado las estrategias que usan los alumnos y las dificultades que encuentran cuando resuelven igualdades numéricas abiertas de suma y resta de las formas $a \pm b = c$ y $c = a \pm b$ (Foster, 1994; Groen y Poll, 1973; Grouws, 1972, 1974; Lindvall e Ibarra, 1978; Nesher, 1980; Nibbeling, 1981; Weaver, 1971a, 1971b, 1972). Estos autores han analizado la variedad de respuestas que producen los alumnos así como la influencia de variados factores tales como la operación, la posición de la incógnita y la operación, la existencia o no de solución en el conjunto de los números naturales, la magnitud de los números, la disposición vertical u horizontal de dichas expresiones, y el método utilizado en la resolución de las igualdades.

En otros estudios (Baroody y Ginsburg, 1983; Behr et al., 1980; Collis, 1974; Denmark, Barco y Voran, 1976; Falkner et al., 1999; Freiman y Lee, 2004; Jones, 2006; Kieran, 1981; Knuth et al., 2005; Koehler, 2002; MacNeil, 2004; MacNeil y Alibali, 2004; Molina, 2005; Perry, 1985; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998; Seo y Ginsburg, 2003; Shoecraft, 1989; Theis, 2005; Warren, 2003; Wolters, 1991) se han considerado igualdades y sentencias con más de un término en cada miembro con la intención de analizar la comprensión de los alumnos del signo igual y las dificultades que encuentran en la resolución de este tipo de sentencias e igualdades. Otros autores (Baroody y Ginsburg, 1983; Byers y Herscovich, 1977; Gallardo y Rojano, 1988; Mevarech y Yitschak, 1983) analizan la comprensión del signo igual que muestran los alumnos en el contexto de las ecuaciones algebraicas.

Es de destacar la especial atención que ha recibido la igualdad y más concretamente el signo igual dentro de la propuesta Early-Algebra como concepto fundamental en la comprensión algebraica. En particular, destacan en este contexto los trabajos de Carpenter y colaboradores (Carpenter et al., 2003, 2005; Falkner et al., 1999), Freiman y Lee (2004), los de Knuth, McNeil, Alibali y colaboradores (Knuth et al., 2005; Knuth, Stephens, McNeil y Alibali, 2006; MacNeil, 2004; MacNeil y Alibali, 2004), y nuestro estudio previo Molina (2005).

En este apartado recogemos las principales aportaciones de todos estos autores, resumiendo así un importante número de estudios que abordan la resolución de igualdades y sentencias numéricas y la comprensión del signo igual.

5.1.1 La resolución de igualdades numéricas abiertas de tres términos

Los primeros trabajos que hemos encontrado que abordan el estudio de la resolución de igualdades numéricas, realizados en la década de los setenta, se centran, en su mayoría, en igualdades abiertas de tres términos de suma y resta[37].

Weaver (1971a, 1971b, 1972), Grouws (1972, 1974) y Lindvall e Ibarra (1978) analizan el comportamiento de los alumnos en la resolución de igualdades numéricas

[37] Sólo tenemos constancia de un estudio de esta década, Grouws y Good (1976), en el que se consideran igualdades numéricas abiertas de tres términos que contienen la multiplicación y la división.

abiertas de tres términos, de suma y resta, estudiando la influencia de la operación (suma o resta), de la posición de la operación (a la izquierda ó a la derecha del signo igual) y de la incógnita (en el lugar de *a, b* ó *c*), y de la existencia o no de solución en el conjunto de los números naturales.

Estos estudios aportan información sobre las dificultades que encuentran los alumnos en la resolución de este tipo de igualdades y los métodos de resolución empleados y su frecuencia. En particular, señalan como principales factores en el rendimiento de los alumnos, la forma de las igualdades, la oportunidad que los alumnos hayan tenido para aprender los distintos tipos de igualdades y el método de resolución empleado. Concretamente Weaver (1971b) distingue los siguientes factores:

- El curso al que pertenecen los alumnos: indicador indirecto de la experiencia con los distintos tipos de igualdades abiertas,
- La operación contenida en la igualdad (siendo la suma la que va asociada a un mayor porcentaje de acierto),
- La posición del término desconocido (siendo la posición c, seguida de b, las que causan un menor número de dificultades a los alumnos),
- La posición de la operación a la izquierda o derecha del signo igual (siendo en las igualdades de la forma $a \pm b = c$ en las que se presenta un mayor porcentaje de respuestas correctas),
- La existencia de solución en el conjunto de los números naturales.

Estos resultados permiten, en particular, observar que la propiedad simétrica de la relación de equivalencia no es obvia para los alumnos.

Estas conclusiones son resultado de un estudio en el que el autor presenta un cuestionario de 8 igualdades de suma y resta, con números cuya suma está comprendida entre 10 y 18, a 3268 alumnos; aproximadamente un tercio de primero de Educación Primaria, otro de segundo y otro de tercero. Estos cuestionarios incluyen igualdades de los 20 tipos posibles según la posición del término desconocido, la posición de la operación, la operación y la existencia o no de solución en el conjunto de los números naturales. Manteniéndose dentro de estos parámetros, los cuestionarios de unos alumnos y otros eran diferentes. Dos de las ocho igualdades no tienen solución en el conjunto de los números naturales. La Tabla

5-1 y Tabla 5-2, ambas tomadas de Weaver (1971b), resumen los resultados de este estudio. La media de respuestas correctas fue de 12.8 en primero de Educación Primaria, 19.1 en segundo y 22.5 de tercero, del total de 32 igualdades.

Tabla 5-1: Número y porcentaje de respuestas correctas según la operación involucrada y la posición del término "c" a derecha o izquierda del signo igual (Weaver, 1971b).

Curso	**Igualdades de suma (16 ítems)**		**Igualdades de resta (16 ítems)**		**Igualdades de la forma a ± b = c (16 ítems)**		**Igualdades de la forma c = a ± b (16 ítems)**	
1	7.3	46%	5.5	34%	7.5	47%	5.3	33%
2	11.1	69%	8.0	50%	10.7	67%	8.4	53%
3	13.1	82%	9.4	59%	11.8	74%	10.7	67%

Tabla 5-2: Número y porcentaje de respuestas correctas según la posición del término desconocido (Weaver 1971b)

Término desconocido / Curso	**C (10 ítems)**		**B (12 ítems)**		**A (10 ítems)**	
1	4.9	49%	5.2	43%	2.7	27%
2	6.7	67%	7.7	64%	4.7	47%
3	7.6	76%	9.0	73%	5.9	59%

Los resultados obtenidos, según Weaver (1971a, 1971b), reflejan en gran medida la relativa atención dada a los distintos tipos de igualdades abiertas en los currícula escolares. Concretamente, los sujetos de este estudio habían practicado más igualdades de la forma $a \pm b = c$ que de la forma $c = a \pm b$, como suele ser habitual en todos los currícula. Analizando los libros de texto de primer, segundo y tercero de Educación Primaria empleados en los colegios considerados, Weaver observa que, de entre todos los tipos de igualdades, habían practicado menos las de la forma $\square - b = c$ y $c = \square - b$ (igualdades con el término desconocido en la posición de a).

En relación con la existencia o no de solución en el conjunto de los números naturales, aspecto que no había sido trabajado en el aula con los alumnos, el número de respuestas correctas de los alumnos de primero no estuvo afectado por este factor, en cambio, en segundo y tercero el número de respuestas correctas fue un 15 % menor cuando no existía solución en el conjunto de los números naturales (Weaver, 1971b, 1972). El número de respuestas correctas fue mayor en el caso de las igualdades de suma. Según Weaver (1972), estas diferencias pueden ser debidas a que los alumnos asumen erróneamente la conmutatividad de la resta y de este modo consideran que toda igualdad de la forma $a - b = \square$ con $a < b$ tiene la misma solución que la igualdad $b - a = \square$. Además, Weaver observó que un número considerable de alumnos tendía a leer algunas igualdades al revés de cómo estaban escritas (ej., $\square + 2 = 7$ como "*siete igual a dos más algo*") lo cual puede inducir a errores en las igualdades de resta (ej., al leer $\square - 5 = 9$ como "*nueve igual a cinco menos algo*").

Como conclusiones de este estudio, Weaver (1972) hace hincapié en la necesidad de abordar en el currículo la no conmutatividad de la resta, así como igualdades de todas las formas posibles, entre ellas igualdades con la operación en el miembro derecho e igualdades que no tengan solución en el conjunto de los números naturales, para facilitar que los alumnos desarrollen su comprensión de igualdades abiertas de suma y resta.

Los resultados de Weaver son confirmados en un estudio de Foster (1994), citado por Tall (2001), sobre la resolución de igualdades abiertas de la forma $a + b = c$ con alumnos de primero, segundo y tercero de Educación Primaria. En este trabajo Foster observa que el 33% de alumnos de primero eran incapaces de resolver este tipo de igualdades cuando el término desconocido ocupaba la posición de a ó de b. En tercero, en cambio, dos tercios de la clase obtuvieron aproximadamente el 100% de respuestas correctas mientras que el tercio restante obtuvo un 93% de respuestas correctas cuando el término desconocido estaba en la posición de c, un 73% cuando el término desconocido estaba en la posición de b y 53% cuando estaba en la posición de a. Según Tall, estos resultados sugieren que este tercio de los alumnos de tercero de Educación Primaria operaban en un nivel más procedimental que proceptual.

Otros trabajos de interés sobre la resolución de igualdades numéricas abiertas de tres términos son los de Grouws (1972) y Lindvall e Ibarra (1978). Grouws (1972) realizó un estudio sobre la resolución de igualdades de las formas $a + \square = c$, $\square + b = c$, $a - \square = c$, y $\square - b = c$, habiendo observado que los niños aprenden mucho antes a resolver igualdades de la forma $a + b = \square$ y $a - b = \square$, que otras en las que el término desconocido ocupa la posición de a o de b.

En este estudio participaron 16 alumnos y 16 alumnas de un total de 9 clases de tercero de Educación Primaria, a los cuales se les propusieron 16 igualdades abiertas: ocho con números entre 5 y 18 y otras ocho con números entre 19 y 99. En total el 65% de los alumnos resolvieron correctamente las igualdades de la forma $a + \square = c$, 60 % las igualdades de la forma $\square + b = c$, 62% las igualdades de la forma $a - \square = c$ y 37 % las igualdades de la forma $\square - b = c$, porcentajes que corroboran los resultados del estudio de Weaver anteriormente comentado.

Además, se observó que el 78% de los alumnos resolvieron correctamente las ocho igualdades con números comprendidos entre 5 y 18 y el 34 % resolvieron correctamente las que contenían números comprendidos entre 19 y 99. Los errores cometidos en estas últimas igualdades fueron en su mayoría debidos al uso de una operación incorrecta o a un error en el uso de métodos informales de resolución tales como el anotar marcas para contar, y no a errores de cálculo como podía esperarse. Estas dificultades permiten afirmar que las diferencias en la eficacia en la resolución de las igualdades dependen en gran medida del tipo de método de resolución empleado.

Sabiendo que el uso de igualdades numéricas para la resolución de problemas es una técnica extendida, Grouws (1972) analiza el efecto del uso de problemas como ayuda en la resolución de igualdades numéricas abiertas, acompañando la mitad de las igualdades con un problema. A este respecto, los resultados no muestran una influencia significativa del uso de los problemas. Las dos posibles causas de este hecho identificadas por el autor son que los alumnos no encontraron la relación entre el problema en cuestión y la igualdad planteada o que el problema ayudó a entender la relación expresada por la igualdad pero no facilitó su resolución.

Lindvall e Ibarra (1978), por otra parte, realizaron una investigación sobre los procedimientos incorrectos, y su frecuencia, que emplean los alumnos en la resolución de igualdades o sentencias abiertas de las formas: $a + \square = c$, $\square + b = c$, $a - \square = c$, $\square - b = c$, $c = a + \square$, $c = \square + b$, $c = a - \square$.

El estudio, realizado con 101 alumnos de primero y segundo de Educación Primaria, de cinco colegios, estuvo dirigido a detectar capacidades que son necesarias para resolver correctamente igualdades abiertas y para aplicarlas a problemas. Los procedimientos incorrectos utilizados por los alumnos fueron estudiados en cuatro situaciones:

- La resolución escrita de igualdades abiertas,
- La lectura de igualdades abiertas,
- La resolución de problemas que involucraban una determinada igualdad abierta,
- La modelización con materiales manipulativos de una igualdad (utilizado para evaluar la comprensión de las igualdades por parte de los alumnos).

En las igualdades de suma de las formas $a + \square = c$ y $\square + b = c$, la mayoría de los alumnos no encontraron dificultades salvo en su aplicación a problemas cuando sumaron los dos números dados o dieron uno de los números dados como respuesta (ver Tabla 5-3). En el caso de las igualdades de las formas $a - \square = c$ y $\square - b = c$, la segunda de ellas fue resuelta correctamente por menos alumnos que la primera lo que concuerda con los resultados de los estudios anteriormente comentados. Concretamente, en el caso de dar respuesta a la igualdad escrita de la forma $\square - b = c$ o de modelizarla con materiales, el porcentaje de respuestas correctas fue menor del 35%, siendo superior al 75% para las igualdades de la forma $a - \square = c$.

Tabla 5-3: Porcentaje de respuestas correctas. N = 101. Lindvall e Ibarra (1978).

	a + □ = c	□ + b = c	A – □ = c	□ – b = c
Respuesta escrita	82%	85%	76%	26%
Lectura	95%	95%	95%	79%
Modelización	90%	86%	96%	36%
Resolución de problemas	68%	66%	78%	56%

Según Lindvall e Ibarra (1978),

> *Para muchos alumnos las igualdades no son expresiones de una relación y por eso debe ser leídas en el orden secuencial dado, sino una lista de dos números y un signo de operación, y la operación debe ser aplicada a esos números en la manera posible, y más conveniente* (p.54).

Ésta es, según estos autores, una de las principales razones de la diferencia en el porcentaje de respuestas correctas en las igualdades de las formas $a-\square=c$ y $\square-b= c$, pues este procedimiento sólo da lugar a respuestas correctas en el primero de estos tipos de igualdades.

La igualdad $\square - b = c$, en su lectura y modelización, fue interpretada por algunos alumnos como la igualdad $b - \square = c$ aunque la mayoría no mostró dificultades en la lectura de dichas igualdades. En la resolución de problemas la respuesta errónea más frecuente fue dar uno de los números contenidos en la igualdad.

En relación a la resolución de igualdades con la operación en el miembro derecho, se examinaron las respuestas en situaciones escritas, de lectura y de modelización (ver Tabla 5-4). Comparando la Tabla 5-3 y la Tabla 5-4 puede observarse como el número de respuestas correctas en igualdades de suma fue bastante menor en el caso de situar la operación a la derecha, forma menos convencional. El error más común fue sumar los dos números dados y en el caso de la lectura invertir el orden, es decir leer la igualdad de derecha a izquierda, lo cual es interpretado como una lectura incorrecta.

Tabla 5-4: Porcentaje de respuestas correctas. N = 101. (Lindvall e Ibarra , 1978).

	C = a + $\square$	c = $\square$ + b	c = a – $\square$
Respuesta escrita	59%	74%	46%
Lectura	53%	44%	55%
Modelización	79%	74%	55%

Los autores entienden que la lectura es correcta cuando se realiza de izquierda a derecha

En las igualdades de la forma $c = a - \square$, el procedimiento incorrecto más frecuente fue leer y modelizar la igualdad de derecha a izquierda, lo cual conducía a una respuesta incorrecta debido a la no conmutatividad de la resta. Según este estudio el procedimiento incorrecto empleado por los alumnos depende del tipo de igualdad, siendo las respuestas erróneas, en la mayoría de los casos, consecuencia de una lectura incorrecta de la igualdad o de una comprensión inadecuada de lo que significa, lo cual deducen Lindvall e Ibarra de la incorrecta modelización de la igualdad.

Los datos de este estudio sugieren que ser capaz de leer la igualdad es un requisito necesario aunque no suficiente para resolverla correctamente. Además, se observa que no existe relación entre la lectura de las igualdades y la resolución de problemas ya que los alumnos son capaces de resolver problemas sencillos sin hacer uso de igualdades numéricas.

La relación existente entre la resolución correcta de las igualdades y la capacidad de modelizarlas se observa sólo débilmente en los datos pues de 65 alumnos que no pudieron modelizar la igualdad, 10 la resolvieron correctamente. Por otra parte 20 alumnos modelizaron correctamente las secuencias aunque no las resolvieron correctamente. Ante la imposibilidad de explicar la resolución correcta de igualdades sin comprensión de su significado los autores concluyen que la prueba de modelización no mide adecuadamente la comprensión de los alumnos (Lindvall e Ibarra, 1978).

Las dificultades e inconsistencias que manifiestan los alumnos al leer igualdades numéricas son consideradas posibles consecuencias de que no se trabaje la lectura de igualdades en la enseñanza tradicional de la aritmética y de la existencia de dos posibilidades a la hora de leer una misma sentencia como la descripción de una operación (ej., "*cuando sumamos 2 a 3 el resultado es 5*") o como la expresión de un mismo número mediante dos representaciones diferentes (ej., "*el número 2 + 3 es el mismo que 5*"). En este estudio los alumnos tendían a leer las igualdades como descripciones de una operación (Lindvall e Ibarra, 1978).

Kieran (1981) resume estudios de Groen y Poll (1973) y Nesher (1980) sobre la resolución de igualdades numéricas abiertas. Según estos autores, en igualdades de la forma $a + \square = c$ o $a - \square = c$ los alumnos tienden a aumentar el sumando dado o bien restar $c - a$, lo que sea más rápido. Los alumnos tardan más tiempo en resolver las igualdades no canónicas, y especialmente las que involucran la operación resta.

En relación con las igualdades numéricas de tres términos, Kieran (1981) observa que a menudo son el marco en el que tienen lugar las primeras experiencias de los alumnos con la manipulación de cadenas de símbolos aritméticos, las cuales suelen plantarse sin referencia a un contexto. Dicha falta de contexto hace que el niño no tenga información sobre la operación que tienen que utilizar para resolver la igualdad. En la superficie la operación puede ser de suma pero desde otra perspectiva la operación involucrada puede ser la resta (ej., 3 + □ = 7). Además, Kieran señala la diferencia entre relaciones y procesos como una posible dificultad en el uso de los problemas para dar significado al simbolismo matemático.

Otro autor que analiza la resolución de igualdades numéricas abiertas, de suma y resta, de tres términos es Nibbeling (1981), el cual compara la eficacia de alumnos de primero de Educación Primaria en la resolución de igualdades numéricas abiertas en formato vertical y en formato horizontal. Este autor identifica tres modos diferentes en que los alumnos de los primeros cursos proceden en la lectura de igualdades numéricas abiertas que denomina inversión completa, filtración e inversión y haz-lo-que-dice-el-signo.

En el primer caso los alumnos hacen una lectura de la igualdad de derecha a izquierda (ej., □ - 7 = 3 leída en orden inverso tiene como respuesta 4 ya que $3 = 7 - 4$). En el caso de filtración e inversión, los alumnos buscan primero el signo operacional de la igualdad y posteriormente leen los términos de derecha a izquierda (ej., □ + 3 = 4 sería considerada como la igualdad 4 + 3 = □). En el caso de haz-lo-que-dice-el-signo, los alumnos consideran las igualdades como un signo operacional, algunos números y un recuadro, interpretando que la actividad consiste en operar los números según indica el signo operacional y escribir el resultado en el recuadro. En este caso la posición relativa de los términos en la igualdad no importa (ej., 3 + □= 7 sería considerada como 7 + 3 a escribir en el recuadro dado).Estos diferentes tipos de lecturas no son posibles en todas las igualdades numéricas y tampoco dan lugar a respuestas erróneas en todos los casos.

En este estudio Nibbeling propone igualdades numéricas abiertas en formato vertical y en formato horizontal a alumnos de primero de Educación Primaria. Comparando las respuestas el autor observa que las igualdades en formato horizontal ($a \pm b = c$) resultan más difíciles a los alumnos, concretamente las que incluyen el término desconocido en la posición de *a* y de *b*, en dicho orden. A partir del análisis de las respuestas, Nibbeling observa que las diferencias de rendimiento son menores del 1% si se consideran correctas las respuestas a las igualdades en formato horizontal que puedan proceder de una lectura inversa completa o una filtración e inversión. Por este motivo concluye que las dificultades observadas pueden ser debidas a las diferentes capacidades perceptuales que son requeridas en cada uno de los tipos de igualdades.

La lectura de la igualdad denominada haz-lo-que-dice-el-signo no produce diferencias entre ambos formatos de igualdades. Por tanto, las respuestas erróneas proceden de inversiones completas o filtraciones e inversiones. Según Nibbeling, los resultados parecen indicar que en el formato horizontal los alumnos son más propensos que en el caso del formato vertical a optar por un procedimiento alternativo, mediante otras lecturas de la expresión, cuando encuentran igualdades que les resultan más difíciles.

A partir de estos resultados, el autor hace observar la especial dificultad que entrañan las igualdades de la forma $c = a \pm b$, ya que los alumnos deben realizar una lectura de derecha a izquierda del igualdad, en tanto que el resultado de $a \pm b$ es c, y una lectura de izquierda a derecha del miembro derecho de la igualdad. Este modo de proceder puede ser especialmente difícil para alumnos que realizan procesos de inversión en la lectura de las igualdades.

Métodos de resolución de igualdades numéricas abiertas con tres términos

Grouws (1974) analiza los métodos empleados por alumnos de tercero de Educación Primaria en la resolución de igualdades abiertas de las formas $\square + b = c$, $a + \square = c$, $a - \square = c$ y $\square - b = c$, a partir del análisis de sus respuestas a una batería de 16 igualdades, 8 de operaciones sencillas y otras 8 involucrando números de dos dígitos cuya suma o resta implica el reagrupamiento. Treinta y dos alumnos de un total de tres colegios son entrevistados en dos ocasiones para resolver las 16 igualdades. Los alumnos deben leer primero cada una de las igualdades y posteriormente resolverlas.

En este estudio el autor observa que en las igualdades más sencillas el recuerdo de hechos numéricos es usado tanto como los algoritmos, en cambio, en las otras igualdades ningún alumno emplea el recuerdo de hechos numéricos y la mayoría de ellos emplea algoritmos de cálculo. Otra observación a destacar es el uso de la relación inversa de la suma y la resta, uso que es bastante frecuente en las igualdades más sencillas y es nulo en el otro caso. También se observa una importante relación entre el método empleado y la obtención o no de la respuesta correcta. Los alumnos que usan un menor número de métodos responden correctamente a un mayor número de igualdades. Aquellos alumnos que resuelven correctamente la mayoría de las igualdades utilizan en el 78% de las veces algoritmos para la resolución. Los alumnos utilizan más métodos de resolución no algorítmicos en el caso de igualdades sencillas que en el caso de igualdades más complejas (es decir con dos dígitos y con reagrupamiento). La Tabla 5-5 muestra los métodos detectados y su frecuencia de aparición (Grouws, 1974).

Según el autor, estos resultados apoyan la hipótesis de que los alumnos que desarrollan y adquieren práctica en el uso de métodos formales son capaces de resolver igualdades abiertas de forma bastante eficiente. Sin embargo, advierte que inicialmente debe fomentarse que los niños desarrollen sus propios métodos, para promover el desarrollo de pensamiento flexible y sea posteriormente cuando se anime a los alumnos a usar métodos de resolución más eficaces.

Tabla 5-5: Métodos de resolución y su frecuencia en la resolución de igualdades numéricas abiertas de suma y resta con tres términos (Grouws, 1974)

Método de resolución	**Número de veces empleado (Total 477)**	**%**
– Recordando un hecho numérico	67	14
– Contando hacia delante o hacia atrás (ayudándose de los dedos para luego saber cuantos pasos se ha dado al contar)	57	12
	47 hacia delante	10
	10 hacia atrás	2
– Algoritmo tradicional (disponiendo los números en vertical)	196	41
	52 en la suma	11
	144 en la resta	30
– Por adivinación	11	2,5
– Recurriendo a una igualdad del mismo tipo pero más sencilla	14	3
– Aplicando la relación complementaria existente entre la suma y la resta	22	4,5
– Contando mediante la anotación de marcas en un papel	15	3
– Ensayo y error no sistemático	7	1,5
– Ensayo y error de manera sistemática	31	6,5
– Considerando una igualdad equivalente pero de otra forma (por ejemplo resolviendo 42 – 28 = □ en vez de □ = 42 – 28).	11	2,5
– Obteniendo un dígito de la respuesta en cada paso	28	6
– Balanceo/compensación (probando distintos valores añadiendo o quitando a uno de los términos diversas cantidades hasta obtener la otra cantidad dada) y otros métodos	18	4

5.1.2 Comprensión del signo igual y resolución de igualdades y sentencias numéricas

Numerosos estudios (Baroody y Ginsburg, 1983; Behr et al., 1980; Collis, 1974; Denmark et al., 1976; Falkner et al., 1999; Freiman y Lee, 2004; Jones, 2006; Kieran, 1981; Knuth et al., 2005; Knuth et al., 2006; Koehler, 2002; MacNeil, 2004; MacNeil y Alibali, 2004; Molina 2005; Perry, 1985; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998; Shoecraft, 1989; Seo y Ginsburg, 2003; Theis, 2005; Warren, 2003; Wolters, 1991) dan muestras de que los alumnos de primero a sexto de Educación Primaria e, incluso de Educación Infantil, tienden a considerar el signo igual como un símbolo que separa un problema (una cadena de números y signos operacionales) y su resultado, mostrando poca conciencia de la equivalencia que expresa. Cuando los alumnos encuentran el signo igual en igualdades y sentencias numéricas tienden a percibirlo como un símbolo operacional, en otras palabras, un símbolo para hacer algo, y tienden a reaccionar negativamente ante expresiones que desafían su visión operacional del significado del signo igual, como en el caso de las igualdades o sentencias de la forma $c = a \pm b$, $a = a$ y $a \pm b = c \pm d$.

Desde Educación Primaria, y en ocasiones Infantil, los estudiantes encuentran el signo igual en diversas actividades matemáticas, no siendo habitualmente hasta el aprendizaje de las ecuaciones lineales cuando su comprensión de este símbolo, desarrollada a partir de sus experiencias aritméticas, es desafiada. Hasta este momento un significado operacional del signo igual ha sido, en general, suficiente en la mayoría de los casos (Pirie y Martin, 1997).

Alumnos de Educación Secundaria y Universidad continúan teniendo dificultades para dotar de significado y usar este símbolo. Estudios de Byers y Herscovich (1977), Mevarech y Yitschak (1983) y Gallardo y Rojano (1988) muestran que una vez los alumnos han adoptado un significado operacional del signo igual esta concepción se mantiene bastante estable a lo largo de los años.

Uno de los primeros estudios que aborda la comprensión del signo igual de alumnos de Educación Primaria es el de Behr y colaboradores (1980). Estos autores dan muestras de las reacciones de los alumnos ante igualdades numéricas abiertas y cerradas de acción y de no–acción.

En una serie de entrevistas no estructuradas realizadas a alumnos de seis a doce años, Behr et al. (1980) observaron que los alumnos percibían el signo igual como un estímulo para dar una respuesta y tenían ideas definidas sobre cómo debían escribirse las igualdades, rechazando las igualdades de forma no convencional, es decir, diferentes de la forma $a \pm b = c$. Los alumnos no aceptaban igualdades tales como □ = 2 + 5 afirmando que estaban al revés (*"la respuesta está en el lado equivocado"*) y las modificaban escribiendo 2 + 5 = □ ó □ + 2 = 5 en su lugar. Además, rechazaban igualdades de no–acción convirtiéndolas en igualdades de acción de forma semejante a como se indica en los siguientes ejemplos:

ej.,: 3 + 2 = 2 + 3 → 3 + 2 + 2 + 3 = 10

ej.,: 3 = 3 → 3 + 0 = 3 ó 3 – 3 = 0

Estos alumnos no percibían en las sentencias la expresión de una relación de equivalencia sino que las interpretaban como sentencias que indicaban una acción, siendo el signo igual el que indica lo que la operación ha dado como resultado. Interpretaban una cadena de operaciones como una acción a realizar, como una cuestión abierta, y no como la representación de un número.

Cuando las igualdades eran presentadas a los alumnos oralmente se observaron diferentes reacciones. Una alumna centraba su atención únicamente en el orden de los números ignorando su posición entre sí y respecto del signo igual. Así por ejemplo, al decir la sentencia "cinco es igual a dos más tres" explicó que no estaba bien pues el tres debía ser un cinco, reaccionado de forma similar a cuando encontraba las igualdades escritas. Esta alumna escribió $6 = 4 + 10$ leyendo "seis y cuatro dan diez". Otra alumna, en cambio, mostró mayor aceptación cuando las igualdades le eran leídas, aunque no aceptaba escribirlas con la operación en el miembro derecho. Otros alumnos, aún respondiendo correctamente a igualdades de la forma □ = *a* + *b*, las leían siempre de derecha a izquierda.

En este estudio un alumno desarrolló una notación alternativa para aplicar su significado operacional del signo igual a las expresiones de la forma a = a. Por ejemplo corrigió la sentencia $3 = 5$ escribiendo $3{+}{=}_8 5$. De forma similar modificó la sentencia $3 = 3$ escribiendo $3{+}{=}_6 3$. Ante sentencias de no-acción este alumno utilizó una notación similar incluyendo en la sentencia el valor numérico de ambos miembros: $1+2_3 = 2+1_3$.

Los alumnos mostraron tendencia a interpretar las secuencias de números y signos operacionales como estímulos para llevar acabo una acción, incluso sin la presencia del signo igual, llegando a añadir ellos mismos dicho símbolo: $3+5$ escribiendo $3+5=$.

Kieran (1981) por su parte hace observar dos nociones intuitivas de igualdad que desarrollan los alumnos de Educación Infantil. La primera de ellas es la noción de equivalencia numérica entre conjuntos que se basa en contar dos conjuntos de objetos y ver si en ambos casos se obtiene el mismo resultado. Ésta es una noción comparativa de igualdad. La otra noción tiene lugar en la unión de conjuntos y es utilizada cuando se introduce el signo igual: El cardinal de la unión de dos conjuntos coincide con (es igual a) el resultado de combinar ambos conjuntos y contar la totalidad de los elementos. Esta noción de igualdad va asociada a una acción.

Posteriormente cuando los alumnos son introducidos al simbolismo aritmético tienden a interpretar los signos +, – , =, como acciones a realizar, influenciados por su experiencia pre–simbólica (Ginsburg 1977, según cita Kieran, 1981). Así una sentencia de la forma $3+5=8$ tienden a leerla como "tres y cinco dan ocho". Como consecuencia de la interpretación de las igualdades y sentencias como acciones, los alumnos encuentran dificultades para leer igualdades y sentencias numéricas que no reflejan el orden de las operaciones como por ejemplo □ = 3 + 5 o que expresan relaciones y no acciones como $3=3$; dificultades como las que observan Behr et al. (1980). El signo igual es visto como un operador y no como un símbolo que expresa una relación; un símbolo que se define en términos de la respuesta.

Además, en ocasiones los alumnos hacen uso del signo igual en cadenas de operaciones que expresan las operaciones en el orden en que son realizadas, sirviendo para representar el proceso seguido en la resolución de un problema (concatenación de igualdades). Un ejemplo es el siguiente procedente de Kieran (1981):

<u>Problema:</u> "En un bosque se plantan 425 árboles nuevos. Unos años después se cortan 217 árboles viejos dejando el bosque con 1063 árboles. ¿Cuántos árboles había inicialmente en el bosque?

<u>Producción del alumno:</u> 1063 + 217= 1280 – 425 = 855

Este uso erróneo del signo igual en el que se expresan las operaciones en el orden en que se piensan mentalmente, es muy frecuente no sólo en niños sino también en adultos (Fennel y Rowan, 2001; Kieran, 1981; Ma, 1999).

Kieran señala una dificultad adicional en la comprensión de las igualdades y sentencias: la aceptación de la falta de clausura. Según un estudio de Collis (1974), citado por Kieran (1981), trece años es la edad a partir de la cual los alumnos[38] son capaces de emplear el signo igual como un símbolo que expresa equivalencia y usar ecuaciones flexiblemente. Este autor afirma, basándose en la observación del comportamiento matemático de alumnos, que en edades comprendidas entre 6 y 10 años los alumnos necesitan ver expresada en las igualdades y sentencias el valor numérico de las expresiones no entendiendo sentencias tales como $4+5=3+6$. Posteriormente, entre los 10 y los 13 años pueden ir perdiendo dicha dependencia de ver la unicidad de resultados de ambos miembros, expresada en la igualdad o sentencia, aunque aun estén limitados por la necesidad de la comprobación empírica. Posteriormente, sobre los 13 años de edad, el alumno podrá realizar inferencias más allá de los modelos físicos y elaborar generalizaciones a partir de casos específicos.

Kieran (1979) también observa que los alumnos de primer curso de Educación Secundaria tienden a construir únicamente sentencias de acción, con una operación entre dos números a la izquierda y su resultado a la derecha (Herscovics y Kieran, 1980).

Estudios de Perry (1985) y Wolters (1991) coinciden en documentar la limitada comprensión del signo igual de alumnos de Educación Primaria. En un estudio con 227 alumnos de cuarto y quinto de Educación Primaria, Perry observa que el 88% de los alumnos que resolvían correctamente problemas sencillos de suma fallaban en la resolución de sentencias numéricas de no–acción tales como 4 + 6 + 9 = $\square$ + 9

[38] Las argumentaciones de Collis (1974) se refieren a alumnos sin problemas cognitivos.

(Perry, Church y Goldin–Meadow, 1988). Por su parte Wolters detecta en los alumnos la tendencia a considerar y construir únicamente sentencias e igualdades de acción de la forma convencional $a \pm b = c$; tendencia que es significativamente menor en el caso de un grupo de alumnos que recibió enseñanza sobre relaciones y propiedades de las relaciones trabajando primeramente en un nivel no numérico.

Wolters también recoge las reacciones de alumnos al ser introducidos a las ecuaciones lineales de la forma $5 = 2x - 3$, las cuales verbalizan como "cinco da dos veces algo menos tres" evidenciando una comprensión operacional del signo igual.

En un estudio llevado acabo por Falkner et al. (1999), treinta clases de alumnos de Educación Primaria resolvieron la igualdad 8 + 4 = □ + 5. Las respuestas más frecuentes fueron doce (el resultado de la suma 8 + 4) y diecisiete (el resultado de sumar todos los números que aparecen en la igualdad), detectándose, además, la persistencia de una comprensión limitada del signo igual en alumnos de todos los niveles de Educación Primaria. Incluso en un grupo de alumnos que habitualmente escribía sentencias numéricas para mostrar cómo resolvían los problemas, la mayoría respondieron 12 y 17 a esta igualdad.

Warren (2003) realiza un estudio longitudinal de tres años con 76 alumnos de tercero de Educación Primaria en el que analiza su comprensión de la igualdad como equivalencia y su habilidad para expresar esta comprensión en problemas de la vida cotidiana. Warren plantea la igualdad 7 + 8 = □ + 9 a los alumnos cuando estaban en cuarto y quinto curso, obteniéndose como respuestas más frecuentes las mismas detectadas por Falkner et al. (1999): la respuesta correcta (26 y 37 % respectivamente), la suma de los términos a la izquierda del signo igual (30 y 26 % respectivamente) y la suma de todos los términos (25 y 24 % respectivamente). La diferencia de un año al siguiente no fue estadísticamente significativa. Al menos la mitad de los alumnos mostró una comprensión operacional del signo igual. Todos los alumnos fueron capaces de explicar cómo obtuvieron la respuesta.

Cuando los alumnos fueron capaces de proponer un problema verbal que ilustrara la igualdad, dicho problema reflejaba en la mayoría de los casos el pensamiento manifestado en su respuesta. En cuarto curso sólo uno de los veinte alumnos que resolvió correctamente dicha igualdad fue capaz de proponer un problema verbal apropiado para dicha igualdad. Doce alumnos no fueron capaces de proponer ningún problema, otro propuso un problema que no se adaptaba a la igualdad aunque involucraba todos los números, cuatro alumnos propusieron un problema para cada miembro de la igualdad y los dos restantes propusieron un problema en el que encadenaban las operaciones del miembro izquierdo y del derecho ($7+8=15+9=\square$). En la mayoría de los casos los alumnos necesitaron resolver la igualdad antes de proponer el problema verbal.

En quinto curso el tipo de problemas propuestos fueron similares aunque en este casos diez de los veintinueve alumnos que resolvieron correctamente la igualdad fueron capaces de proponer un problema adecuado para dicha igualdad. Según la autora, los datos contradicen la posible existencia de niveles o pasos en el desarrollo de la capacidad de proponer problemas verbales a partir de una igualdad abierta.

En general, la mayoría de los problemas propuestos por los alumnos están estructurados de forma que la respuesta aparece a la derecha del signo igual; el tipo de problemas que es más habitual en el aula.

Seo y Ginsburg (2003) señalan tres formas en las que la visión operacional del signo igual limita la flexibilidad de los alumnos. Las dos primeras, ya mencionadas por otros autores, son el rechazo de igualdades no canónicas y dificultades para determinar los valores desconocidos de dichas ecuaciones. Además, estos autores hacen referencia a las interferencias de esta comprensión del signo igual con la comprensión de matemáticas más avanzadas; en particular puede dificultar o interferir en el descubrimiento, la comprensión, el recuerdo y el uso de propiedades aritméticas tales como la propiedad distributiva o de procesos o principios algebraicos tales como la escritura de expresiones y ecuaciones algebraicas o los métodos formales e informales que se aplican para la resolución de ecuaciones.

Estos autores realizan un estudio en el que analizan tres aspectos relacionados con la comprensión del signo igual de un grupo de dieciséis alumnos de segundo de Educación Primaria cuya maestra estaba intentando promover el desarrollo de la comprensión del signo igual como expresión de equivalencia mediante la consideración de variedad de actividades. Los aspectos analizados son: el modo en que los libros de texto y la maestra presentan el signo igual y el modo en el que el contexto afecta la interpretación del signo igual por parte de los alumnos.

En el análisis del libro de texto los autores observaron que el signo igual era introducido únicamente en el contexto del cálculo de operaciones, siendo muy escaso el uso de este símbolo con el significado *equivalencia numérica*. La maestra, en cambio, trabajó el signo igual en una mayor variedad de contextos: la comparación de números ($5>3, 6<8$ y $5=5$), el cálculo de sumas y restas ($5+5+3+3+2=18$), diferentes "nombres" para un mismo número ($1+4=5, 2+3=5$), medida (comparando regletas Cuisinaire 1 naranja = 2 amarillas), y monedas equivalentes (1 nickel = 5 céntimos). Además, trabajó el uso de los términos "igual", "lo mismo", en contextos diversos de la vida cotidiana.

Para evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos, los autores realizaron diversas entrevistas en las que les preguntaron por el significado de dicho símbolo fuera de contexto y en el contexto de sentencias de la forma $a \pm b = \square$, de sentencias relativas a las regletas Cuisinaire y otras relativas a equivalencia de monedas. También les cuestionaron por si tenían sentido algunas igualdades y sentencias no canónicas (ej., $3=3$ y $\square = a \pm b$).

Inicialmente, al preguntar a los alumnos por el significado del signo igual fuera de contexto, sólo dos alumnos dieron muestras de comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica y la mayoría expresó un significado operacional (ej., "la respuesta", "el total", "la suma", "lo que es"). Al presentarles sentencias canónicas los mismos alumnos evidenciaron una interpretación operacional del signo igual. Cuatro de ellos le asignaron diferentes significados según si se trataba de una sentencia de suma ("todo es") o una sentencia de resta ("queda", "sobra"). En el caso de las sentencias de la forma $c = a \pm b$ y $a = a$, la mayoría de los alumnos mostraron rechazo, entre ellos los alumnos que habían mostrado el significado equivalencia. Su aceptación de diferentes formas de sentencias dependía de su experiencia previa y no de su comprensión del signo igual.

En el contexto de las regletas Cuisinaire y la equivalencia de monedas la mayoría de los alumnos mostraron comprensión del signo igual como expresión de equivalencia, aunque incluso en estos contextos, cuatro y tres alumnos, respectivamente, interpretaron el signo igual de forma operacional. Algunos alumnos reconocían y explicaban que el significado del signo igual dependía del contexto, pudiendo actuar como operador o ser expresión de una equivalencia, y aceptaban la desconexión de estos significados.

A partir de estos resultados, Seo y Ginsburg observan que los alumnos no están limitados a una comprensión operacional del signo igual pero su comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia puede no ser integrada con su comprensión operacional.

Reconociendo la comprensión del signo igual como un componente esencial del pensamiento algebraico, Freiman y Lee (2004) realizan un estudio sobre el signo igual con el objetivo de elaborar un instrumento que permita evaluar el pensamiento algebraico de los alumnos. Se entiende que dicho instrumento deberá incluir otros contenidos, además de la comprensión del signo igual. Este estudio se centra en detectar qué tipo de igualdades numéricas aportan mayor información sobre el pensamiento de los alumnos y su evolución en el tiempo, a partir del análisis de sus respuestas a igualdades abiertas de diferentes formas ($a = a$, $c = a + b$, $a + b = c$ y $a + b = c + d$). Participaron treinta y cinco alumnos de Educación Infantil, treinta y un alumnos de tercero de Educación Primaria y veintitrés alumnos de sexto de Educación Primaria.

Los resultados muestran que las igualdades de las formas $a + b = d + \square$ y $c = a + \square$ ocasionaron importantes dificultades en todos los niveles. En Educación Infantil y tercero de Educación Primaria ocasionaron un mayor número de dificultades las igualdades del tipo $\square = a + b$ y $a + b = \square + d$, y en el caso de tercero y sexto de Educación Primaria las de la forma $c = \square + b$. La mayoría de los alumnos resolvió correctamente las igualdades de la forma $a + b = c$ (independientemente de la posición del término desconocido), y las de la forma $a = a$ sólo causaron dificultades a los alumnos de Educación Infantil. La mayoría de las respuestas erróneas detectadas en este trabajo fueron: repetir uno de los términos, escribir la suma o diferencia de dos de los términos de la igualdad y la suma de todos los números de la igualdad.

Como resultado de este estudio, aquellas igualdades que permitieron distinguir mayormente entre unos alumnos y otros son propuestas para constituir parte de un instrumento de evaluación del pensamiento algebraico de los estudiantes. En orden de importancia se sugieren las siguientes igualdades para un test apto para los diferentes niveles de la Educación Primaria: $a + b = c + \square$, $a + b = \square + d$, $c=a + \square$, $\square = a + b$ y $c = \square + b$.

En otro estudio con ochenta alumnos de segundo y tercero de Educación Primaria, McNeil (2004) compara la resolución de igualdades numéricas abiertas de no-acción en dos grupos de alumnos, unos que habían recibido enseñanza previa sobre el significado del signo igual *equivalencia numérica*, y otros que, en cambio, habían estado trabajando en la resolución de igualdades de acción. Los resultados de este estudio muestran que la mayoría de los alumnos respondió incorrectamente a las igualdades. La respuesta más frecuente fue operar conjuntamente todos los términos, especialmente en el caso de los alumnos que habían mostrado fluidez en el cálculo en una prueba previa y no habían recibido enseñanza relativa al significado del signo igual *equivalencia numérica*. Otras respuestas detectadas fueron operar los términos del miembro derecho de la igualdad y repetir uno de los términos.

El interés de esta autora es analizar si el conocimiento de los alumnos sobre las operaciones aritméticas obstruye su habilidad para resolver igualdades abiertas noveles tras un periodo de enseñanza. Los resultados muestran que los alumnos que habían estado trabajando con igualdades abiertas de acción resolvieron incorrectamente un mayor número de igualdades de no-acción.

Esta autora señala con este estudio el papel del conocimiento previo del alumno como causa de dificultades en la adquisición de nuevo conocimiento. En el caso de las igualdades numéricas, el conocimiento previo de los alumnos favorece el uso de la estrategia de operar conjuntamente todos los términos, la consideración de la estructura de las igualdades de no-acción convencionales como la única aceptable y una interpretación operacional del signo igual.

En relación con este estudio destaca un trabajo de McNeil y Alibali (2004) en el que analizan el papel, en la codificación de igualdades por parte de alumnos de cuarto curso de Educación Primaria, de la estructura de una igualdad numérica y la estrategia utilizada en su resolución. Por codificación de las igualdades se refieren a la representación interna de las igualdades lo cual evalúan a partir de la reconstrucción de igualdades abiertas, por parte de los alumnos, tras haberlas observado durante 5 segundos.

Las igualdades abiertas consideradas son de acción con el término desconocido a la derecha del signo igual y las operaciones en el miembro izquierdo (ej., $3+4+5+3=\square$, $4+8+5+7=\square$), y de no-acción con el término desconocido en el miembro derecho el cual está formado únicamente por dos términos (ej., $3+4+5=3+\square$, $3+4+5=\square+5$). Todas involucran únicamente la operación suma y números de una cifra.

En la codificación de las igualdades los alumnos mostraron errores numéricos y errores conceptuales, en términos de McNeil y Alibali. Los primeros corresponden a la codificación incorrecta de algunos de los términos que componen la igualdad, los segundos a la codificación incorrecta de la estructura de la igualdad. Por ejemplo, en la codificación de la igualdad $4+3+5=4+\square$ algunos errores numéricos fueron manifestados por los alumnos al escribir las igualdades $4+3+6=4+\square$ y $4+5+3=4+\square$. En esta misma igualdad algunos errores conceptuales son ejemplificados al escribir los alumnos las expresiones $4+3+5+4=\square$, $4+3+5=4\ \square$, y $4+3+5=\square$.

Los errores conceptuales fueron los más frecuentes. En las igualdades de acción el error conceptual más frecuente fue omitir el signo igual. En las igualdades de no-acción este tipo de errores fueron más variados: omitir el signo igual, omitir el signo operacional del miembro derecho, omitir uno de los términos del miembro derecho u omitir tanto el signo operacional como uno de los términos del miembro derecho. El mayor número de errores tanto numéricos como conceptuales tuvieron lugar en las sentencias de no-acción con el término desconocido en el lugar más a la derecha del signo igual ($a+b+c=a+\square$). Según las autoras la codificación depende de características perceptivas de las igualdades, siendo la causa del menor rendimiento en ese tipo de igualdades de no-acción la similitud perceptiva de su estructura con la estructura de las igualdades de acción.

En la resolución de estas igualdades los alumnos dieron ocho tipos de respuestas: la suma de todos los números de la igualdad, la suma de los números del miembro izquierdo de la igualdad, cadenas de operaciones conectadas por medio del signo igual, la repetición de uno de los términos de la igualdad, el número que iguala el valor numérico de ambos miembros (respuesta correcta), la suma de los números del miembro izquierdo de la igualdad menos el término del miembro derecho (respuesta correcta), la suma o resta de dos de los términos del miembro izquierdo, y una respuesta inventada.

Los resultados del estudio muestran que los alumnos que emplearon estrategias correctas codificaron correctamente las igualdades en un mayor número de casos. Las autoras observan en los resultados la confirmación de que los resolutores codifican únicamente las características de una igualdad que les son necesarias para guiar su acción. Así, los alumnos que tendían a utilizar la estrategia de sumar conjuntamente todos los términos, hicieron la codificación de los números más correctamente que la codificación de la estructura (superficial) de la igualdad.

Además, observan que los alumnos que utilizaron una mayor variedad de estrategias tuvieron un mejor rendimiento en la codificación de las igualdades. Los resolutores que tendían a utilizar una única estrategia codificaban únicamente los elementos necesarios para el uso de esa estrategia no prestando atención a otras características de importancia en la igualdad. Los alumnos que utilizaron una menor variedad de estrategias cometieron menos errores numéricos mientras que los que utilizaron una mayor variedad de estrategias cometieron menos errores conceptuales.

En particular estos autores concluyen que los alumnos de cuarto de Educación Primaria no tienen una buena comprensión de la sintaxis de las igualdades, y en especial tienen una comprensión limitada del signo igual.

Knuth et al. (2005) realizan un estudio sobre la comprensión de los conceptos de equivalencia y variable con 373 alumnos de último curso de Educación Primaria y dos primeros cursos de Educación Secundaria. En este estudio los alumnos debían explicar cuál es el significado del signo igual y comparar las soluciones de las igualdades[39] 2 x □ + 15 = 31 y 2 x □ +15 – 9=31 – 9.

En los resultados se detecta una tendencia lineal, estadísticamente significativa, en el porcentaje de alumnos que verbaliza la interpretación del signo igual como una equivalencia, aunque, incluso en segundo de Educación Secundaria, sólo un 48% de los alumnos expresan esta interpretación. Los autores observan que los alumnos que expresan una interpretación del signo igual como equivalencia, muestran un mayor rendimiento en igualdades abiertas de no-acción.

Respecto a la comparación de las dos igualdades antes mencionadas, se observa que aquellos alumnos que habían expresado el significado del signo igual *equivalencia numérica* tienen un mejor rendimiento y son más propensos a reconocer la equivalencia de ambas igualdades a partir de la apreciación de que la misma operación ha sido aplicada a ambos miembros (es decir, hacen uso de pensamiento relacional), en vez de utilizar otras estrategias como calcular el término desconocido de cada igualdad y comparar. Ambos aspectos fueron más frecuentes conforme aumentaba el curso al que pertenecían los alumnos, siguiendo una tendencia lineal.

Es destacable el porcentaje de alumnos (24%) que reconocieron la equivalencia de las igualdades mediante pensamiento relacional habiendo expresado previamente una interpretación operacional del signo igual. No obstante, consideramos que el modo en que estos autores evalúan la comprensión del signo igual, peguntando directamente por el significado de este signo a partir de la consideración de la sentencia $3+4=7$, puede haber obstaculizado la verbalización del significado del signo igual *equivalencia numérica*.

Estos mismos autores, analizan la comprensión del signo igual de 177 alumnos de quinto y sexto de Educación Primaria y dos primeros cursos de Educación Secundaria y su relación con su rendimiento en la resolución de ecuaciones lineares (Knuth et al., 2006). En este estudio observan que relativamente pocos alumnos comprenden el signo igual como expresión de una equivalencia numérica, no

[39] Para distinguir el uso de la x como variable o incógnita de su uso como símbolo de operacional de la multiplicación, en este último caso se separa el signo operacional de los factores involucrados por medio de espacios a ambos lados de dicho signo.

observándose mejora en dicha comprensión a lo largo de los diferentes cursos considerados, aunque sí en la resolución de las ecuaciones lineales.

A partir de los resultados de un test estandarizado se detecta una relación positiva entre la habilidad matemática medida por dicho test y la comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica. También se observa una fuerte relación positiva entre la comprensión del signo igual de los alumnos y su rendimiento en la resolución de ecuaciones, incluso, cuando se controla la habilidad matemática por medio de los resultados del test estandarizado.

Estos autores prestan especial atención en el uso de estrategias algebraicas, es decir, de métodos algebraicos típicos para la resolución de ecuaciones, diferenciándolo del uso del ensayo y error o de la estrategia de deshacer el proceso expresado en la ecuación. El uso de este tipo de estrategias por los alumnos de segundo curso de Educación Secundaria se mostró en mayor medida en el caso de alumnos con comprensión del signo igual como una expresión de equivalencia numérica.

En un estudio reciente (Jones, 2006; Jones y Pratt, 2005), Jones y Pratt describen la interpretación operacional de alumnos de 12 años y de 8–9 años observada durante el manejo de diferentes software matemáticos. Mediante el uso con alumnos de 8–9 años de "Equivalence Calculator" (la calculadora de equivalencia), un software diseñado para dificultar la interpretación operacional del signo igual, los autores observan el rechazo de los alumnos a usar el signo igual con un significado no operacional, apreciando sus dificultades en la construcción de sentencias de no–acción. Los alumnos muestran rechazo o menor aceptación de las sentencias numéricas de la forma $c = a * b$, siendo * cualquier símbolo operacional aritmético. Pese a aceptar la bidirecionalidad de la calculadora de equivalencia, tienden a escribir las sentencias de acción con las operaciones en el miembro izquierdo, no trasfiriendo dicha bidireccionalidad a su uso del simbolismo aritmético.

Algunos alumnos expresan la imposibilidad de que se entiendan sentencias de no-acción en las que no se expresa el valor numérico de ambos miembros, evidenciando necesidad de clausura de las expresiones. Adicionalmente, los resultados del uso de ambos software informativos, muestran que los alumnos construyen significados diferentes del signo igual según si lo trabajan con una u otra de estas herramientas.

Compresión del signo igual en contextos algebraicos

En cursos superiores, de la Educación Secundaria y de Universidad, los alumnos siguen mostrando dificultades en la comprensión del signo igual. Dicha comprensión no necesariamente es desarrollada a lo largo de su formación aritmética y algebraica pese a haber trabajado la resolución de ecuaciones algebraicas y haber encontrado igualdades de no–acción relativas a las propiedades conmutativa y asociativa. En la mayoría de los casos estas dificultades no se hacen explícitas hasta la introducción del álgebra. La mayoría de los alumnos se encuentra entonces con la necesidad de concebir el signo igual como un símbolo de equivalencia, en particular para poder comprender y aprender las estrategias algebraicas para la resolución de ecuaciones (Baroody y Ginsburg, 1983; Gallardo y Rojano, 1988).

Los alumnos de Universidad, pese a ser capaces de resolver ecuaciones sencillas de una sola variable, muestra una inadecuada comprensión del signo igual. En un estudio realizado con 150 alumnos de Universidad, Mevarech y Yitschak (1983) observan que el signo igual presenta a los alumnos más dificultades que el signo $<$. Mientras un 19% consideró el signo "menor que" como un símbolo operacional, el 44% de los alumnos consideró el signo igual como "una señal para hacer algo". Apreciando también importantes dificultades en la comprensión de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la relación de igualdad.

Byers y Herscovich (1977) observan que alumnos de álgebra de Educación Secundaria emplean el signo igual incorrectamente como un símbolo separador, en vez de como expresión de una equivalencia entre las expresiones a ambos lados, como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{l} 2x + 3 = 5 + x \\ 2x + 3 - 3 = 5 + x \\ 2x = 5 + x - x - 3 \\ 2x - x = 5 - 3 \\ x = 2 \end{array}$$

$$f(x) = x^2 = f'(x) = 2x$$

También en relación con el signo igual, Gallardo y Rojano (1988) observan que, a partir de su experiencia aritmética, los alumnos tienden a construir la regla de que no importa dónde se realicen las operaciones expresadas en una ecuación con tal de que se ejecuten alguna vez. Por ejemplo, consideran equivalente las ecuaciones 3x + 154 = 475 y 3x = 475 + 154. La preocupación de los alumnos por operar de inmediato les conduce a ignorar el signo igual.

5.1.3 Desarrollo de comprensión del signo igual como equivalencia

Algunos de los estudios que consideran igualdades y sentencias de acción y no–acción, tales como Baroody y Ginsburg (1983), Sáenz–Ludlow y Walgamuth (1998), Koehler (2002, 2004), Carpenter et al. (2003, 2005) y nuestro estudio previo Molina (2005), dan muestras de la capacidad de los alumnos de Educación Primaria de desarrollar, en mayor o menor grado, una comprensión del signo igual como expresión de equivalencia numérica. Estos estudios permiten conocer algunas de las dificultades que encuentran los alumnos en el desarrollo de la comprensión del signo igual en contextos aritméticos, así como aspectos destacables de dicho proceso y actividades que pueden favorecerlo.

Kieran (1981) recoge los resultados de un estudio de Denmark y otros (1976) en el que analizan cómo alumnos de primero de Educación Primaria interpretan el signo igual después de haber realizado diversas actividades con una balanza. En dicho estudio observaron que los alumnos tendían a interpretar el signo igual como un comando para realizar una operación, pero habían desarrollado su comprensión llegando a aceptar expresiones de la forma $a = a$, $c = a \pm b$ y $a \pm b = c \pm d$. Estos autores concluyen que tanto la instrucción como limitaciones cognitivas determinan la concepción del signo igual de los estudiantes.

Baroody y Ginsburg (1983) evaluaron la comprensión del signo igual de tres grupos de 15 alumnos de primero, segundo, y tercero de Educación Primaria que habían recibido enseñanza, durante al menos siete meses, con un currículo que promueve la comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica en juegos en los que en ocasiones los alumnos debían completar sentencias abiertas (Currículo Wynroth). Dichos juegos abordaban la práctica del conteo, las relaciones más que, menos que, mismo número y relaciones de orden, el uso de los signos >, <, =, ≠, las operaciones básicas de la aritmética, y la estructura del sistema de numeración decimal.

Tras el periodo de implementación del currículo, los alumnos fueron entrevistados individualmente sobre la veracidad o falsedad de sentencias numéricas de acción y no–acción, así como sobre si la forma de las sentencias les era familiar. Los resultados obtenidos muestran que la enseñanza fue parcialmente exitosa en el desarrollo de comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia. Los alumnos que mostraron dicha comprensión lo hicieron en variadas ocasiones pero de manera inconsistente, siendo más consistentes los alumnos de primero con una diferencia estadísticamente significativa respecto de los de segundo. Dicha diferencia puede ser debida, según los autores, a la influencia de la enseñanza que los alumnos de segundo habían recibido en los cursos anteriores.

Tras el periodo de enseñanza, los alumnos mostraron una actitud más flexible hacia sentencias de formas no convencionales, es decir, diferentes de la forma $a \pm b = c$. En particular, al encontrar sentencias de formas diferentes a las consideradas a lo largo del proceso de enseñanza (ej., 7 + 6 = XIII, $7+6=6+6+1$) aproximadamente la mitad de los alumnos consideraron que dichas sentencias "tenían sentido", es decir, eran o parecían correctas. Aunque a lo largo de la instrucción los alumnos habían encontrado una frecuencia considerable de sentencias de la forma $c = a \pm b$, sólo el 47% de los alumnos de primero y el 20% de los alumnos de segundo consideraron su forma familiar. Además, sólo la mitad de los alumnos de segundo y tercero indicaron familiaridad con la sentencia $7+6=6+6+1$, habiendo encontrado previamente diversas variaciones de la igualdad 5 + 5 = 2 + 6 + $\square$.

La falta de clausura no mostró ser una dificultad relevante. Sí se detectó cierto conflicto entre la interpretación del signo igual como equivalencia y una interpretación operacional. Además, los alumnos de primero encontraron importantes dificultades en las sentencias de la forma $a \pm b = c \pm \square$ y, en mayor medida, en las de la forma $\square = a \pm b$.

A partir de este estudio, Baroody y Ginsburg concluyen que la instrucción puede promover un significado del signo igual como expresión de equivalencia, y que más que limitaciones cognitivas o de desarrollo relativas a la edad, lo que limita la comprensión del signo igual de los alumnos es el proceso de asimilación, en términos de Piaget, es decir, el proceso de comprensión del signo igual a partir de los esquema de los que dispone el sujeto (Slavin, 2003). Afirman que tanto factores de enseñanza como cognitivos contribuyen a la concepción operacional del signo igual de los alumnos. Según estos autores, los alumnos inician su formación matemática escolar con una tendencia a considerar el signo igual como un símbolo operacional debido a su experiencia informal con actividades de adición, y la enseñanza tradicional de este símbolo refuerza esta concepción. Una cuidada introducción del signo igual que aborde su significado expresión de equivalencia es sugerida para disminuir la resistencia cognitiva de los alumnos a aprender el significado de equivalencia de este símbolo y facilitar el aprendizaje de este significado necesario en niveles superiores.

Según Baroody y Ginsburg aunque matemáticamente el signo igual sea símbolo de equivalencia, psicológicamente no puede ser separado de un significado operacional en tanto que su uso, con la excepción de las expresiones de la forma a = a, conlleva el cálculo del valor numérico de las expresiones de ambos miembros para establecer la igualdad. Estos autores insisten en las diferencias psicológicas, aunque no matemáticas, de sentencias tales como $4+3=7$ y $7=4+3$, en tanto que la primera expresa la combinación de dos términos y la segunda la descomposición de un término.

Sáenz–Ludlow y Walgamuth (1998) también han documentado la confusión que experimentan los alumnos de tercero de Educación Primaria cuando encuentran igualdades de no–acción así como la frecuente interpretación del signo igual como un comando para realizar una operación. Los alumnos de tercero, con los que trabajaron durante un año, mostraron marcadas dificultades en la lectura de igualdades de no-acción.

Los alumnos manifestaron diferentes interpretaciones de los miembros derecho e izquierdo de las sentencias, explicando que los términos del miembro derecho no se operan, en contraposición con los del izquierdo que si lo hacen. También dieron muestras de la necesidad de la falta de clausura al exigir que “la respuesta” apareciera expresada en la sentencia.

En este experimento de enseñanza, los alumnos llegaron a desarrollar el significado del signo igual *equivalencia numérica* mediante discusiones que favorecían el intercambio y contraste del pensamiento de los distintos alumnos, considerándose algunas igualdades basadas en la propiedad reflexiva de la igualdad (ej., $6+6=6+6$) para desafiar sus concepciones del signo igual.

Carpenter et al. (2003, 2005) centran su atención en cuatro aspectos del pensamiento algebraico a desarrollar desde la enseñanza de la aritmética: la comprensión del signo igual, hacer explícitas las generalizaciones, la representación de generalizaciones mediante el lenguaje natural y mediante notación algebraica, y la comprensión de niveles de justificación y demostración. Dicho trabajo ha dado lugar a un libro (Carpenter et al., 2003) en el cual se exponen algunos de los resultados y se dan recomendaciones a los docentes para que creen en el aula situaciones en las que se promueva dichos aspectos del pensamiento algebraico.

En este libro, Carpenter y sus colaboradores enumeran una serie de etapas hacia las cuales se puede trabajar en el desarrollo de la comprensión del signo igual de los alumnos. Dichas etapas son propuestas como una guía para el educador, habiéndose observado que existe una gran variabilidad en la evolución de los alumnos en la comprensión del signo igual y que no todos los estudiantes atraviesan estas cuatro etapas.

Etapa 1: El alumno hace explícita su comprensión del signo igual, es decir, da a conocer su concepción inicial del signo igual.

Etapa 2: El alumno acepta como verdadera alguna sentencia de no-acción.

Etapa 3: El alumno reconoce que el signo igual representa una relación entre dos números iguales y compara ambos miembros de la sentencia realizando las operaciones expresadas en cada miembro.

Etapa 4: El alumno es capaz de comparar las expresiones matemáticas situadas a ambos lados del signo igual sin necesidad de llevar acabo las operaciones.

En este estudio la comprensión del signo igual fue abordada con el objetivo de poder utilizar las igualdades y sentencias numéricas como contexto en el que explorar cómo los estudiantes reflexionan sobre los procedimientos computacionales para construir generalizaciones y representaciones abstractas de estos procedimientos y estas generalizaciones. Los datos publicados se limitan a diversos diálogos o fragmentos de discusiones en el aula, ilustrativos del modo en que algunos alumnos manifestaron su comprensión del signo igual, usaron pensamiento relacional en la resolución de las igualdades y sentencias, elaboraron conjeturas o iniciaron su representación simbólica. No se tienen datos, por tanto, de las dificultades encontradas en este proceso ni del número de alumnos que mostraron avances en dicho desarrollo.

Estos autores sugieren el uso de igualdades numéricas abiertas y sentencias verdaderas y falsas para promover el desarrollo de la comprensión de los alumnos del signo igual y del uso de pensamiento relacional, señalando que no es suficiente con mostrarles a los alumnos el uso correcto del signo igual. Los alumnos necesitan oportunidades para aplicar y desarrollar su comprensión del signo igual, para poder desarrollar una comprensión robusta de este símbolo.

Koehler (2002) estudia el desarrollo de la comprensión del signo igual de cinco alumnos de segundo de Educación Primaria, con los que trabajó, en pequeño grupo, en la resolución de igualdades y sentencias numéricas, durante cinco sesiones de 30 a 40 minutos repartidas a lo largo de un mes. Cuatro de ellos manifestaron inicialmente una limitada comprensión del signo igual, explicando que el signo igual significaba que había que sumar todos los números o dar la respuesta a la operación en el miembro izquierdo de la igualdad. Los alumnos, además, expresaron que una misma igualdad abierta podía tener más de una solución.

A lo largo de las distintas sesiones los alumnos mostraron una interpretación del signo igual variable, según la sentencia considerada, desarrollando poco a poco comprensión de este símbolo como expresión de una equivalencia numérica en el contexto de las sentencias numéricas verdaderas y falsas. Sin embargo, dicha comprensión no fue trasferida por tres de ellos a las igualdades abiertas donde, repetidamente, volvían a interpretar el signo igual como un símbolo operacional. Una de las alumnas mostró ser capaz de juzgar la falsedad de la respuesta que había propuesto pero no supo averiguar el número que hacia verdadera la igualdad. Estos alumnos mostraron aceptar dualidad de significados para el signo igual.

En otro estudio de esta misma autora (Koehler, 2004), se aprecian dificultades por parte de alumnos de segundo y tercero de Educación Primaria en la comprensión del signo igual y en la resolución de igualdades abiertas de acción en las que la cantidad a averiguar se encuentra en el término más a la derecha del miembro izquierdo, tales como $73+18-\square = 73$. No obstante, el trabajo continuado con igualdades y sentencias numéricas basadas en la propiedad conmutativa ayudó a promover el desarrollo de esta comprensión ya que "*los alumnos querían que ambos lados del signo igual parecieran iguales*" (p.32).

Theis (2005) se centra en el caso de un alumno de primero de Educación Primaria el cual, pese a su buen rendimiento escolar general, muestra numerosas dificultades en el desarrollo de su comprensión del signo igual. Este alumno acepta únicamente sentencias de acción con la operación en el miembro izquierdo. El autor señala la enseñanza previa recibida por los alumnos como posible origen de esta concepción operacional del signo igual, al observar que en el libro de texto predominaban las igualdades de acción con las operaciones en el miembro derecho y que en el libro del docente no se hacia mención específica sobre la enseñanza de este signo. Además, los docentes confirmaron no hacer intervenciones adicionales a las incluidas en el libro de texto en relación con el signo igual.

Tras el periodo de enseñanza de seis semanas, centrado en el trabajo con materiales concretos en la resolución de igualdades abiertas y sentencias verdaderas y falsas, el alumno interpretó el signo igual como expresión de una equivalencia numérica en sentencias e igualdades de no-acción. No obstante, el autor señala la resistencia inicial del alumno a modificar su comprensión operacional del signo igual (aceptando sentencias de acción con las operaciones en el miembro derecho pero realizando su lectura de derecha a izquierda) y su tendencia a utilizar esta interpretación del signo igual en ciertas situaciones, durante el periodo de enseñanza y en una prueba realizada diez días después. Los demás alumnos del aula también mostraron cierto progreso en la comprensión del signo igual y fragilidad o inestabilidad en su comprensión del signo igual. La intervención realizada no ayudó a los alumnos a superar por completo su limitada comprensión del signo igual.

Por último, recogemos los principales resultados de nuestro estudio previo Molina (2005) en relación a la comprensión del signo igual. En dicho estudio llevamos a acabo un experimento de enseñanza con un grupo de 18 alumnos de tercero de Educación Primaria. Durante cinco sesiones de trabajo en el aula, trabajamos la resolución de igualdades abiertas y sentencias verdaderas y falsas, mediante discusiones y actividades escritas, promoviendo el uso y desarrollo de pensamiento relacional. Las igualdades están compuestas por números naturales y las operaciones elementales de la estructura aditiva, involucrando relaciones o propiedades aritméticas básicas. Uno de los principales aspectos abordados a lo largo de dichas sesiones fue el estudio y desarrollo de la comprensión del signo igual de los alumnos.

En este estudio se detectan tres etapas en la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos, las cuales denominamos: operador o estímulo para una respuesta, expresión de una acción y expresión de equivalencia.

La primera de estas etapas *operador o estímulo para una respuesta (ER)*, se refiere al uso del significado operador del signo igual al abordar cualquier tipo de igualdad o sentencia. En esta etapa los alumnos tendían a resolver correctamente igualdades y sentencias de la forma $a \pm b = c$ pero no las de formas menos convencionales ($a = a$, $c = a \pm b$, $a \pm b = c \pm b$ y $a \pm b = c \pm b \pm e$). Los alumnos en esta etapa tendían a centrarse en la parte de la sentencia de la forma $a \pm b = c$.

La segunda etapa, *expresión de una acción (EA)*, se refiere al uso del significado del signo igual *expresión de una acción* al abordar cualquier tipo de igualdad o sentencia. En esta etapa los alumnos resolvían correctamente igualdades y sentencias de la forma $c = a \pm b$, pero encontraban dificultades en las expresiones de la forma $a \pm b = c \pm b$ dando respuestas tales como: 17 en la igualdad 14 + □ = 13 + 4 (centrándose en la parte □ = 13 + 4 e ignorando el 14) ó 0 en 12 + 7 = 7 + □ (centrándose en la parte 7 = 7 + □ e ignorando el 12). En estos casos los alumnos se centraban en una parte de la igualdad o sentencia que era de la forma $c = a \pm b$, ignorando el otro término. En otras igualdades los alumnos consideraron que el término más a la derecha del signo igual era "la respuesta". Por ejemplo, un alumno respondió 5 a la igualdad 12 + 7 = 7 + □, ignorando el 7 del miembro izquierdo de la igualdad y centrándose en la parte 12 = 7 + □. En esta etapa los alumnos también dieron respuestas erróneas como las asociadas al uso del significado operador del signo igual.

Los alumnos que mostraron este significado reconocían la propiedad simétrica de la igualdad aunque no interpretaban el signo igual como la expresión de una equivalencia. Pensaban en el signo igual como la expresión de una cadena de operaciones y su resultado pero aceptaban que el resultado podía estar en cualquiera de los lados del signo igual.

En estas dos primeras etapas los alumnos representaban "la respuesta o resultado" de la expresión contenida en la igualdad, lo cual atribuimos a la dificultad con la falta de clausura de las expresiones anteriormente comentada. Estos alumnos consideraban las igualdades y sentencias como expresiones de acciones y no de una relación.

La última etapa, *expresión de equivalencia numérica (EE)*, se refiere a la interpretación del signo igual como un símbolo que expresa una equivalencia de valores numéricos entre las expresiones situadas a ambos lados. En esta etapa los alumnos resolvían correctamente igualdades de todas las formas consideradas.

A lo largo de las cinco sesiones de trabajo en el aula, los alumnos mostraron encontrarse en una de estas tres etapas en cada momento y su comprensión fue evolucionando tal y como se indica en la Tabla 5-6. La evolución de ocho de los alumnos siguió la trayectoria ER–EA–EE. La comprensión de otros cinco alumnos avanzó del significado estímulo para una respuesta a la de expresión de una equivalencia, saltando la etapa intermedia. Sólo la evolución de tres alumnos fue en contra de la trayectoria ER–EA–EE, al mostrar cierta regresión en su comprensión entre algunas sesiones (Ver Molina (2005) para una mayor descripción de los resultados).

Tabla 5-6: Evolución de los significados del signo igual de los alumnos a lo largo de las cinco sesiones

Significados del signo igual	**Igualdades y sentencias resueltas correctamente**	**1ª Sesión N = 14**	**2ª Sesión N = 15**	**3ª Sesión N = 18**	**5ª Sesión N = 15**
Estímulo para una respuesta (ER)	**a ± b = c**	8	5	0	1
Expresión de una acción (EA)	**a ± b = c y c = a ± b**	4	5	3	1
Expresión de una equivalencia numérica (EE)	**a ± b = c y c = a ± b y a ± b = c ± d**	0	3	12	12
No estable		2	2	3	1

En particular este estudio da muestras de la capacidad de los alumnos de tercero de Educación Primaria para desarrollar el significado equivalencia del signo igual. Concretamente, tres alumnos adoptaron rápidamente la concepción expresión de una equivalencia tras la primera sesión de intervención en el aula. La mayoría desarrolló esta concepción hacia el final de la tercera sesión, y tres alumnos necesitaron al menos de los cuatro días para desarrollar el significado equivalencia del signo igual. Dos alumnos retrocedieron en dicha comprensión entre la tercera y la quinta sesión.

Algunos alumnos escribieron sentencias con tres o cuatro miembros formados por expresiones equivalentes tales como $10+11=21=20+1$ ó $25+10=35=30+5=35$. Conjeturamos que este tipo de sentencias facilitaron a los alumnos la transición de una comprensión operacional del signo igual a una comprensión de este símbolo como expresión de equivalencia, ya que permiten representar todos los pasos de su pensamiento y escribir la "respuesta", o valor numérico de las expresiones, en la propia sentencia sin violar el significado equivalencia del signo igual. Este tipo de sentencias conjugan las sentencias de acción con las de no-acción evitando la falta de clausura.

En el desarrollo de su comprensión del signo igual los alumnos mostraron variadas dificultades. Primeramente observamos que, para la mayoría de los alumnos, no fue suficiente explicarles el significado equivalencia del signo igual para que lo adoptaran como propio. Sólo tres alumnos lo hicieron. El uso del signo igual en sentencias de no-acción no les resultaba natural.

En las igualdades abiertas de acción los alumnos dieron inicialmente variedad de respuestas: la respuesta correcta, la repetición de uno de los términos, el resultado de operar todos los números de la igualdad o la respuesta a una igualdad de tres términos obtenida al ignorar uno de los miembros de la igualdad; siendo esta última la respuesta más frecuente. Los alumnos mostraron ser capaces de hallar valores desconocidos permitiéndonos deducir que sus dificultades en la resolución de las igualdades y sentencias eran debidas a su limitada comprensión del signo igual.

Inicialmente, en la resolución de igualdades abiertas, detectamos una fuerte tendencia computacional: los alumnos procedían inmediatamente a calcular sin llegar a mirar la totalidad de la igualdad. Este comportamiento puede ser consecuencia de la fuerte orientación al cálculo que predomina en la enseñanza de la aritmética, especialmente en los primeros cursos, como señalan Kieran (1989) y Liebenberg et al. (1999).

Algunas respuestas de los alumnos mostraron que no estaban seguros de qué hacer. Simplemente las igualdades de la forma $c = a \pm b$ confundían a los alumnos. Observamos que, como señalan Lindvall e Ibarra (1978), algunos alumnos consideraban las igualdades o sentencias no como expresiones de relaciones sino como una lista de números y símbolos operacionales, y aplicaban las operaciones a los números como consideraban posible o más conveniente en cada caso. Un ejemplo de esto lo observamos en la primera sesión cuando un alumno explicó su respuesta 26 a la igualdad 12 + 7 = 7 + □: *"Por que doce más siete es diecinueve y entonces hay igual a siete y entonces hay un más de nuevo, pero si movemos este (7) aquí, es doce más siete más siete"*

Durante la sesión 2 los alumnos encontraron dificultades en las sentencias verdaderas y falsas debido a la posición del signo igual en mitad de la sentencia y a la falta de operación en las sentencias $a = a$. Explicaron que preferían ver el signo igual al final de la sentencia. También reaccionaron negativamente ante las sentencias de la forma $c = a \pm b$ afirmando que eran falsas porque estaban al revés y cambiándolas a la forma $a \pm b = c$ ó $c \pm a = b$.

Algunos alumnos usaron el signo igual incorrectamente para expresar cadenas de operaciones. Para los alumnos tenia sentido encadenar las operaciones mediante el signo igual, probablemente, porque este es el modo en que las sentencias suelen ser expresadas verbalmente. Este uso inadecuado del signo igual, al que hemos denominado previamente concatenación de igualdades, se mostró bastante duradero.

Elementos del enfoque de enseñanza claves en el desarrollo de la comprensión del signo igual de los alumnos. En este estudio, todos los alumnos mostraron inicialmente una limitada comprensión del signo igual. Para la mayoría de la clase las actividades y discusiones de igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades y relaciones aritméticas básicas, les facilitó el desarrollo del significado del signo igual *equivalencia numérica*. Varios elementos fueron claves en el enfoque de enseñanza:

- La consideración de variedad de igualdades y sentencias que ayudaron a detectar los significados del signo igual de los alumnos y a desafiarlos a reconsiderar sus interpretaciones del signo igual.
- El uso de sentencias basadas en propiedades aritméticas, las cuales favorecieron la disminución de la tendencia computacional de los alumnos y la consideración de las igualdades como totalidades a ser analizadas.
- Las discusiones en las que se incitó al intercambio de multiplicidad de modos de resolución de una sentencia o igualdad y al intercambio y escucha de las opiniones de todos los alumnos.
- El uso activo del signo igual por parte de los alumnos para construir sentencias de no–acción verdaderas y falsas fue también un elemento crítico en el aprendizaje de los alumnos según los datos. Esta actividad les permitió utilizar su comprensión emergente del signo igual. El tener que crear sentencias con cuatro términos, dos en cada lado del signo igual, y dos operaciones, iba en contra de su concepción de las sentencias numéricas como expresiones que involucran operaciones únicamente en un miembro.

5.1.4 Origen de la comprensión operacional del signo igual

Considerando las numerosas dificultades que los alumnos presentan en la comprensión del signo igual puede cuestionarse si su origen radica en una inadecuada comprensión del concepto de igualdad entre cantidades. Sin embargo, diversos autores (Falkner et al., 1999; Kieran, 1981; Schifter et al., en prensa; Schliemann, Carraher, Brizuela y Jones, 1998) han demostrado que la mayoría de los alumnos de Educación Infantil y primeros curso de Educación Primaria presentan una correcta comprensión del concepto de igualdad cuando consideran relaciones de igualdad en experiencias físicas de modelización o en problemas verbales. Las dificultades en la comprensión del signo igual parecen ser resultado de una limitada interpretación de dicho signo.

Un ejemplo puede observarse en la situación presentada por Schifter y colaboradores (en prensa) de un grupo de alumnos de segundo de Educación Primaria discutiendo sobre pares de números que dan lugar a la misma suma. En este ejemplo, los alumnos reconocen la igualdad de expresiones tales como $13+23$ y $23+13$ por ser en ambos casos la suma cuarenta y seis, pero, sin embargo, no consideran cierta la expresión

$13+23=23+13$ debido a la ausencia de una respuesta expresada en esta sentencia., y posiblemente su falta de familiaridad con este tipo de sentencias.

En general, han sido consideradas cuatro posibles causas de la limitada comprensión del signo igual de los alumnos: el uso de la calculadora, limitaciones cognitivas, el conocimiento informal de los alumnos y la instrucción escolar.

El uso de la calculadora

En muchas calculadoras una tecla con el signo igual es empleada para “dar la orden” del cálculo de la respuesta. Por este motivo una posible explicación a por qué los alumnos interpretan el signo igual como un comando para hacer una operación, es que desarrollan esta noción por su uso de la calculadora. Sin embargo, diversos estudios (Sisofo, 2000; Weaver, 1971b) han aportado evidencias en contra de este supuesto.

Weaver observó que un grupo de alumnos encontraba grandes dificultades en la resolución de igualdades de la forma $\square = a \pm b$, incluso antes de que comenzaran a usar calculadoras en el colegio.

Más recientemente Sisofo (2000) realizó un estudio con cuarenta y cinco alumnos de primero y segundo de Educación Primaria de un colegio en el cual no se usan calculadoras hasta sexto de Educación Primaria. En dicho estudio Sisofo presentó a los alumnos cuatro cuestiones, dos de la forma $a + b = \square$ y otras dos de la forma $\square = a + b$, siendo una de cada formuladas oralmente refiriendo a un contexto específico, y las otras formuladas oralmente y por escrito, de forma puramente simbólica. Un 80% de estos alumnos presentaron problemas únicamente al resolver la cuestión de la forma $\square = a + b$ planteada simbólicamente, debida al uso del simbolismo y a la forma de la igualdad. Este resultado sugiere que el uso de la calculadora no es la causa de las dificultades en la comprensión del signo igual.

Limitaciones cognitivas

Baroody y Ginsburg (1983) y Sisofo (2000) plantean como otra posible causa de la limitada compresión del signo igual de los estudiantes, una limitación cognitiva debida a la edad y al desarrollo de los alumnos, pudiendo depender de la consolidación de su pensamiento operacional concreto o del inicio de un pensamiento operacional formal más abstracto (Baroody y Ginsburg, 1983).

Kieran (1981) y Collis (1974), según citan Kieran (1981) y Baroody y Ginsburg (1983), también hacen referencia a ciertas limitaciones cognitivas. Estos autores, como se ha mencionado previamente, indican los trece años como edad final del periodo de transición de un significado operacional del signo igual al significado expresión de una equivalencia, distinguiendo como dificultad principal en este desarrollo la aceptación de la falta de clausura de las expresiones.

Los autores Denmark y colaboradores (1976) y Baroody y Ginsburg (1983) coinciden en reconocer la existencia de dichas limitaciones a partir de los resultados de sus estudios anteriormente comentados, reconociendo también el papel de la instrucción en la comprensión del signo igual de los alumnos. No obstante, puede cuestionarse si las limitaciones cognitivas a las que se alude son la causa de las dificultades observadas, siendo posible, según Sisofo (2000), que el desarrollo de la concepción del signo igual como expresión de equivalencia que promueven dichos currículos no fuera suficientemente explícito o estuviera demasiado ligado al cómputo de operaciones.

Conocimiento informal de la aritmética

Un menor número de investigadores hacen observar el papel del conocimiento informal de la aritmética en el desarrollo de la comprensión de este signo, el cual suelen encontrar los alumnos desde el principio de su formación aritmética. Como se ha descrito anteriormente, cuando los alumnos son introducidos al simbolismo aritmético tienden a interpretar los signos +, –, =, como acciones a realizar, influenciados por su experiencia pre–simbólica. Esta experiencia les conduce a dotar de significado a este lenguaje a partir de sus esquemas de acción y, por lo tanto, les induce a interpretar operacionalmente el signo igual (Seo y Ginsburg, 2003). Dicha interpretación, según Kieran (1981), se ve también favorecida por la enseñanza, ya que habitualmente el signo igual es introducido en relación con el cardinal de la unión de conjuntos, y, por lo tanto, con una concepción de igualdad vinculada a la acción.

La instrucción escolar

Los diversos estudios empíricos que dan muestras de la capacidad de los alumnos de Educación Primaria de desarrollar el significado del signo igual *equivalencia numérica* con una instrucción específica, evidencian el papel determinante de la enseñanza en el desarrollo de la comprensión del signo igual.

La mayoría de los estudios consultados aluden a la enseñanza recibida por los alumnos como la principal causa de la limitada comprensión del signo igual que muestran. Consideran que el curriculum tradicional no promueve una comprensión del signo igual como expresión de equivalencia, principalmente debido a la reiterada consideración de igualdades únicamente de la forma $a \pm b = c$ a lo largo del aprendizaje de la aritmética (Behr et al., 1980; Carpenter et al., 2003; Denmark et al, 1976; Falkner et al., 1999; McNeil, 2004; Pirie y Martin, 1997; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998; Shoecraft, 1989; Seo y Ginsburg, 2003).

Seo y Ginsburg (2003) mencionan otros factores que favorecen una visión operacional del signo igual. Argumentan que el signo igual suele considerarse mayormente en contextos aritméticos, no dando oportunidad a los alumnos de ver y usar este símbolo de formas diferentes, como por ejemplo para expresar equivalencias entre unidades de medida. Además, la interpretación operacional del signo igual es matemáticamente correcta en sentencias e igualdades tales como $2+3=5$, aunque no sea la única posible, y es la más promovida en los libros de texto y por los docentes. También hacen observar que, desde el punto de vista del alumno, el signo igual requiere una operación (o recuerdo de ella), incluso cuando se asume una relación de equivalencia.

Rojano (2000) señala la convención lingüística de escribir de izquierda a derecha, propia de numerosas lenguas, como otro posible factor que favorece el desarrollo de una interpretación operacional y unidireccional del signo igual.

Carpenter et al. (2003) hacen referencia a un uso incorrecto del signo igual que puede ocasionar a los alumnos el desarrollo de concepciones erróneas sobre dicho símbolo. Dicho uso corresponde a la utilización del signo igual como abreviación de una relación de correspondencia o igualdad en cierto sentido entre figuras y números; uso del signo igual con el significado “expresión de cierta conexión o correspondencia”.

Según Carpenter y colaboradores, todo uso del signo igual como representación de relaciones que no correspondan a igualdades entre números debería ser evitado con el objetivo de impedir que los alumnos adquieran, desde un principio, concepciones erróneas sobre el significado del signo igual.

Otros aspectos a señalar sobre la dificultad de comprensión del signo igual son aspectos generales relativos a la interpretación de símbolos matemáticos en general, tales como la complejidad que entraña la correspondencia no unívoca entre símbolos matemáticos y expresiones verbales que describen el significado de dicho símbolo, la dependencia del significado respecto del contexto y de su orden o disposición, que su significado sea una convención, que su lectura no sea necesariamente de izquierda a derecha, entre otros aspectos (Rubenstein y Thompson, 2001; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998).

Algunos de estos autores, entre ellos Shoecraft (1989) y Seo y Ginsburg (2003), sugieren las siguientes recomendaciones a tener en cuenta en la enseñanza de la Aritmética, dirigidas a favorecer el desarrollo de comprensión del signo igual como expresión de equivalencia:

- Evitar el uso del término igual al referir al resultado de un cálculo,
- Comparar el término igual con otros términos que expresan relaciones (ej., diferente, menos alto, más bajo, más joven),
- Considerar sentencias numéricas de variadas formas
- Iniciar el uso del signo igual con números equivalentes y no equivalentes (ej., $3 = 3$, $4 \neq 5$) y con conjuntos de objetos.
- Modelizar el significado de expresión de equivalencia del signo igual con balanzas de diversos tipos y con el columpio balancín.
- Introducir el signo igual en contextos no aritméticos
- Usar un símbolo diferente para diferentes conceptos de igual pudiendo usar inicialmente las representaciones informales que propongan los alumnos.

Señalan, además, que los alumnos necesitan aprender los diferentes significados que el signo igual puede tener en una expresión, así como los diferentes contextos en los que es utilizado este símbolo, ayudándoles a integrarlos o conectarlos, y que los docentes deberían ser conscientes de las diferentes interpretaciones de los alumnos de actividades, tareas o situaciones.

5.2 Estudios sobre el pensamiento relacional y la visión estructural de la aritmética

En esta segunda parte del capítulo recogemos las principales ideas y resultados de variados estudios que, de una u otra forma, abordan aspectos relacionados con el desarrollo y uso de pensamiento relacional en el contexto de las expresiones, igualdades y sentencias numéricas, los cuales se presentan organizados en cuatro apartados.

El primero de ellos recoge algunos trabajos que describen el modo en que los alumnos desarrollan comprensión y conocimiento de propiedades y relaciones matemáticas de forma previa y paralela a la introducción del simbolismo aritmético, prestando especial atención a las cuatro propiedades de la estructura aditiva: la propiedad inversa de la suma y la resta, la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad asociativa de la suma, y la compensación de la suma.

El segundo y tercer apartado recogen estudios que analizan el uso de pensamiento relacional en el contexto del simbolismo aritmético: en el cálculo de hechos numéricos, aplicando de manera más o menos implícita relaciones y propiedades aritméticas, y en el contexto de las expresiones e igualdades numéricas.

Finalmente, en el cuarto apartado, se presentan estudios que analizan el conocimiento de alumnos de Educación Primaria, y en menor medida de Educación Secundaria, de la estructura que subyace a la aritmética, tanto en contextos aritméticos como algebraicos; todos ellos vinculados al simbolismo propio de ambas sub-áreas de las matemáticas. Muchos de estos estudios utilizan como contexto la equivalencia de expresiones aritméticas y algebraicas.

La mayoría de los estudios aquí resumidos se centran en el contexto de la estructura aditiva, no obstante, algunos abordan aspectos relativos al conocimiento de las cuatro operaciones aritméticas básicas, en general.

5.2.1 Orígenes y desarrollo del conocimiento de las propiedades aritméticas

El desarrollo de conocimiento matemático, y concretamente de relaciones y propiedades que subyacen a la Aritmética, ha sido modelizado por Resnick (1992) a partir de la observación de alumnos sin escolarizar y en los primeros años escolares. Esta autora distingue cuatro tipos de pensamientos matemáticos a través de las cuales considera que va evolucionando gradualmente el pensamiento de los niños con el tiempo y con práctica intensa (ver Figura 5-1). Cada tipo de matemáticas es una manera de pensar adecuada a un conjunto particular de situaciones. En esta diferenciación utiliza el término protocantidades para referir a cantidades cuantitativas informales, con las que se trabaja sin cuantificar, mediante la consideración de materiales físicos.

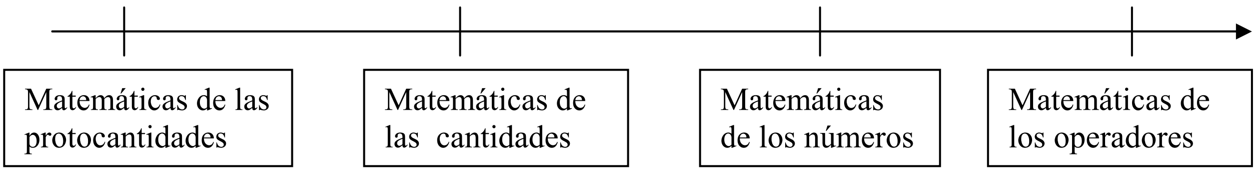


Figura 5-1: Distintos tipos de matemáticas que distingue Resnick (1992) y su ordenación en el proceso de aprendizaje de las matemáticas del niño**.**

Según Resnick, conforme se desarrollan las distintas formas de pensamiento matemático las más tempranas no son reemplazas, sino que forman parte del sistema total de conocimiento del individuo, siendo esencial la capacidad de moverse de uno a otro de estos tipos de pensamiento o tipos de matemáticas para ser capaz de relacionar el conocimiento matemático abstracto con las situaciones prácticas. Además, hace observar la existencia de estados intermedios, ya que la evidencia muestra que los objetos mentales se desarrollan poco a poco.

En su evolución, a lo largo de los cuatro tipos de matemáticas, los alumnos trabajan con un mismo tipo de relaciones que son primero consideradas en términos protocuantitativos, después cuantitativos, luego con números concretos y finalmente con números en general, es decir, con cuasivariables, utilizando la denominación de Fujii y Stephens (Fujii, 2003; Fujii y Stephens, 2001).

Por ejemplo, las distintas formulaciones de la propiedad conmutativa pueden expresarse de la siguiente forma: "Algo más otro algo es igual que eso otro algo más el algo inicial", "3 peras + 5 peras = 5 peras + 3 peras", $3+5=5+3$ y finalmente "En la suma el orden de los números no importa". Este último caso no involucra su expresión simbólica (algebraica) en términos de $n + m = m + n$, sino su consideración como propiedad independiente de los números que se sumen, es decir su reconocimiento como propiedad cierta para todos los números.

La autora considera que el conocimiento sobre relaciones aritméticas es reconstruido en cada nivel sucesivo, usando lo que el alumno ya sabe, junto con conocimiento nuevo (ej., la experiencia del cálculo) (Baroody, 1999). En particular, esta autora sugiere que los alumnos entienden las relaciones dinámicas entre las partes y el todo antes de comprender que los números tienen estas mismas relaciones.

La primera propiedad de los números que es probable que sea accesible a los alumnos a partir de su esquema cuantificado de parte-todo es el principio de composición aditiva, es decir, la propiedad de que cada número es composición aditiva de otros números. Esta propiedad provee de una base para la comprensión de propiedades fundamentales del sistema de numeración como la propiedad conmutativa y asociativa de la suma y la relación complementaria de la suma y la resta, y de las clases de equivalencia de pares aditivos. Según Resnick, los niños entienden inicialmente estas propiedades como permisos (evidentes) para combinar los números en cualquier orden pero no como leyes o propiedades.

El razonamiento más complejo que se desprende de la combinación parte/todo protocuantitativa y los esquemas de aumento y disminución es "la compensación": como el todo se puede mantener inalterable mediante cambios compensables en las dos partes. Esta propiedad, que es inicialmente concebida por los alumnos como una restricción en las estrategias de descomposición y composición, juega un papel esencial en "la llevada" en los algoritmos estándares de suma y resta así como en el desarrollo de los conceptos de equivalencia de expresiones. Las clases de equivalencia son construidas por los alumnos cuando conciben las expresiones de la suma o diferencia de un par de números (ej., $5+7$, $4-2$) como entidades mentales que pueden compararse entre sí.

Resnick señala que no es probable que las matemáticas de los números y de los operadores se desarrollen de manera informal ya que las situaciones que son necesarias para su desarrollo no son parte de la vida cotidiana de la mayoría de los niños. Los niños son capaces de establecer comparaciones desde la matemática protocuantitativa y saber qué ocurre cuando se modifica el todo o una de las partes, ya sea con un incremento o una disminución, pero no es hasta las matemáticas de los números cuando puede cuantificarse la diferencia existente entre distintas cantidades no homogéneas o entre números.

Para el desarrollo de capacidades relacionadas con este tipo de matemáticas, según la autora, es necesario participar en situaciones de razonamiento y discusión sobre números, operaciones, sus relaciones y propiedades, sin referencia inmediata a cantidades físicas. Los números y las operaciones deben tomar el estatus de entidades conceptuales. Resnick sugiere el uso de la notación formal (ecuaciones numéricas) para registrar los procedimientos de cálculo pues parecen invitar y apoyar la discusión sobre números, operaciones, sus relaciones y propiedades, mejor que otras representaciones; siempre y cuando se preste especial atención a la conexión de los formalismos con la semántica de la situación.

En estudios sobre el uso de algoritmos o estrategias inventadas en la resolución de problemas, Resnick y colaboradores (Resnick, Bill y Lesgold, 1992), así como otros investigadores (ej., Carpenter y Moser, 1984; Foxman y Beishuizen, 1999), han observado que los niños aprecian las propiedades conmutativa y asociativa y el principio aditivo desde muy jóvenes, utilizándolas cuando abordan cálculos de formas no estándares o cuando inventan y discuten múltiples soluciones de un problema verbal. Estrategias similares han sido observadas en adultos sin escolarizar (Resnick, 1992). Concretamente, al utilizar el principio de composición aditiva y descomponer y volver a componer los términos de una operación de distintas formas, los alumnos hacen un uso implícito de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

Completando el trabajo de Resnick, resumimos algunos estudios empíricos que describen el conocimiento y comprensión de relaciones matemáticas que muestran los alumnos en contextos no simbólicos, y analizan la conexión de esta comprensión y conocimiento con su análogo en el contexto de las matemáticas de las cantidades y de los números.

Concretamente, Brush (1978) estudia el modo en que los alumnos interpretan manipulaciones de conjuntos de objetos, que involucran cambios en la cantidad sin realizar ningún tipo de cuantificación, en situaciones de equivalencia y de no–equivalencia semejantes a las que expresan sentencias numéricas verdaderas o falsas basadas en la relación de compensación (ej., $14+1=14+2$). Según esta autora, la mayoría de los niños de 4 a 6 años pueden identificar correctamente, de entre dos grupos de objetos, cual tiene más elementos cuando se realizan operaciones de suma o resta en ambos conjuntos. También en este contexto cuantitativo la mayoría de estos alumnos reconocen la relación inversa de la suma y la resta.

Otros autores han observado que los alumnos de 5 y 6 años conocen que la suma de dos números es más grande que el primero de ellos y que la resta de dos números es menor que el primero de ellos, a pesar de tener un conocimiento incompleto de relaciones numéricas y cuantitativas. También se han detectado evidencias de cierta transferencia de conocimiento parte-todo protocuantitativo a problemas numéricos y de la dependencia de la comprensión de los hechos numéricos derivados con respecto al conocimiento de las relaciones entre las partes y el todo y el efecto, en el todo, de los cambios compensatorios en las partes (Irwin, 1996).

Partiendo del trabajo de Resnick, Irwin (1996) explora la comprensión de las relaciones dinámicas entre las partes y el todo, de doce alumnos de 4 a 7 años, cuando se realizan cambios sobre una o varias de las partes. Considera las relaciones de compensación y de covariación. Esta última se refiere a los casos en los que una de las partes de un todo es aumentada o disminuida.

Esta autora observa que la mayoría de los alumnos de 4 años muestran comprensión de los efectos de dichos cambios, considerando cantidades no cuantificadas, de manera previa a ser capaces de predecir dichas relaciones para cantidades cuantificadas. En el caso de los alumnos de 5 y 6 años, más de dos tercios podía predecir el efecto de situaciones de covariación tanto en cantidades cuantificadas como no cuantificadas, aunque muy pocos podían hacer tareas similares con ecuaciones en el contexto del simbolismo aritmético. Los alumnos de 7 años, en cambio, demostraron comprensión del efecto de las situaciones de covariación y de compensación en los tres contextos.

Los niños que dieron respuestas incorrectas mostraron mayor tendencia a centrar su atención en las partes, mientras que los alumnos exitosos se concentraban en el todo y en el cambio. La mayoría de los niños de cinco y seis años mostraron ser capaces de tener en cuenta los efectos en ambas partes y en el todo. Además, se observaron dificultades para expresar el modo en que los cambios afectaban al todo, en especial, en las situaciones de compensación, aunque las explicaciones de los alumnos evidenciaron la observación de dichas relaciones.

Los resultados de este estudio muestran que los alumnos tienen comprensión de la compensación y la covariación antes de empezar su educación formal y dan evidencias de la existencia de esquemas protocuantitativos para la compensación.

A continuación, resumimos algunos resultados de diversas investigaciones relativas a la comprensión de propiedades aritméticas concretas de la estructura aditiva: la propiedad complementaria de la suma y la resta, la propiedad conmutativa de la suma y la propiedad asociativa de la suma.

Propiedad complementaria de la suma y la resta

La propiedad complementaria de la suma y la resta es utilizada de manera implícita por los alumnos mayores de siete años al calcular hechos numéricos de resta a partir de una suma, según se aprecia en estudios de Svenson y Hedenborg (1979) y Woods, Resnick y Groen (1975) (Resnick, 1992).

En el caso de los alumnos de menor edad (Educación Infantil y primer curso de Educación Primaria), Baroody (1999) detecta dificultades en el reconocimiento de esta propiedad en contextos simbólicos, especialmente por parte de aquellos alumnos que no han recibido aun enseñanza formal sobre la resta, en estos contextos.

Incluso tras recibir, durante un periodo de 24 sesiones, enseñanza para el dominio de combinaciones aditivas básicas y el desarrollo de comprensión de la propiedad complementaria de la suma y la resta, sólo una minoría reconoce que un hecho numérico de suma (ej., $4+3=7$) pueda ser de utilidad para responder a una resta complementaria (ej., $7-4$). En este caso el dominio de hechos numéricos de suma no era necesario para descubrir y usar esta propiedad ya que los alumnos podían observar el correspondiente hecho aditivo junto a la resta a realizar. No obstante, se observa una influencia favorable de los hechos numéricos conocidos tales como las restas complementarias a hechos numéricos de suma de dobles (ej., $8-4$ resta complementaria de $4+4=8$).

Estos resultados muestran que la relación complementaria de la suma y la resta, no es obvia para los alumnos. Los alumnos no asocian automáticamente ambas operaciones, al menos, no cuando se considera la resta con el significado de quitar.

Al observarse que a menudo los alumnos construyen primero una comprensión aislada de esta propiedad con los complementos de la suma de dobles (ej., 8 – 4, $10-5$), se considera que el cálculo puede ser un mecanismo mediante el cual los alumnos descubren la propiedad complementaria de la suma y la resta a un nivel numérico y lo relacionan con su conocimiento previo.

Propiedad conmutativa

Con respecto a la propiedad conmutativa de la suma cabe destacar un trabajo de Baroody, Wilkins y Tiilikainen (2003) en el que se realiza una revisión de la literatura que aborda el desarrollo de conocimiento de esta propiedad, la cual es articulada en torno al modelo teórico de Resnick. Baroody y Ginsburg (1986) y Cowan (2003) resumen, también, algunos estudios sobre el aprendizaje de la conmutatividad de la suma.

Estos autores señalan la existencia de dos perspectivas sobre la relación existente entre el desarrollo de conocimiento sobre la propiedad conmutativa a nivel cuantitativo y la experiencia computacional del alumno. La primera de ellas supone la independencia de ambos aspectos: no es necesario tener práctica computacional para descubrir la propiedad conmutativa de la suma con cantidades, sino que ésta se desarrolla a partir del esquema parte-todo. La otra perspectiva, defendida por Resnick, considera que la propiedad conmutativa es construida en cada nivel sucesivo de desarrollo del pensamiento matemático del alumno, desde las matemáticas protocuantitativas a las matemáticas operacionales, utilizándose conocimiento previo y conocimiento nuevo.

Aunque existen estudios empíricos que sustentan ambas posiciones, Baroody y colaboradores argumentan la inconsistencia de aquellos estudios que defienden la independencia de la práctica computacional y del desarrollo de la propiedad conmutativa de la suma. Además, hacen referencia a un estudio (Baroody, Berent y Packman, 1982) que muestra que los alumnos de primero de Educación Primaria que utilizan estrategias de cálculo más avanzadas, tienen mayor tendencia a mostrar comprensión de la propiedad conmutativa de la suma que aquellos que usan estrategias menos eficaces. Otro estudio (Baroody, 1987) con alumnos con retraso mental muestra que aquellos con mayor experiencia computacional tienen mayor tendencia a usar la propiedad conmutativa en el cálculo.

Los trabajos resumidos por Cowan (2003) y Baroody y colaboradores (Baroody et al., 2003; Baroody y Ginsburg, 1986) junto con el estudio de Baroody, Ginsburg y Waxman (1983), dan muestras del uso implícito, por los niños, de la propiedad conmutativa de la suma, al operar sin dar importancia al orden tanto al trabajar con modelos físicos como al operar mediante conteo. No obstante, se observa que el uso de este tipo de estrategias no necesariamente garantiza el éxito de los alumnos en tareas de conmutatividad (ej., juzgar si $3+7$ y $7+3$ dan la misma respuesta). *"La competencia de utilización no necesariamente refleja competencia conceptual"* (Baroody y Ginsburg, 1986, p.80). La alteración del orden de los sumandos al operar parece ser simplemente una estrategia para disminuir el esfuerzo cognitivo de la tarea, sin preocuparse por el modo en que pueda afectar al resultado de la operación.

Los niños parecen poseer nociones contradictorias sobre el efecto del orden de las operaciones. Por una parte poseen una noción primitiva de conmutatividad, denominada proto-conmutatividad, que les ayuda a simplificar el cálculo de hechos numéricos aditivos. Por otra, asumen que el orden de los números supone una diferencia en la definición de una suma y, por lo tanto, en su resultado. Según esta noción, dos números pueden ser combinados en cualquier orden para producir respuestas correctas, aunque no necesariamente se obtendrán las mismas respuestas. A diferencia de la conmutatividad, la proto-conmutatividad permite al orden de los sumandos afectar al resultado de la suma. Los alumnos fallan al considerar la relación lógica existente entre el método y el resultado (Baroody y Ginsburg, 1986)

En línea con estas consideraciones, Baroody y Gannon (1984, según cita Cowan, 2003) identifican cuatro niveles en el desarrollo de la comprensión de la conmutatividad de la suma en el contexto de las cantidades y números:

- Nivel 0: los alumnos tienen una comprensión unitaria de la suma como un cambio de estado que hace más grande un conjunto inicial.
- Nivel 1. Proto-conmutatividad: Los alumnos pueden no dar importancia al orden al operar pero se muestran inseguros de la equivalencia de sumas tales como $2+4$ y $4+2$.
- Nivel 2. Pseudo-conmutatividad: Los alumnos aun tienen una concepción unitaria de la suma pero reconocen que sumas con sumandos igualdades tienen el mismo resultado.
- Nivel 3. Verdadera conmutatividad: Los alumnos tienen una concepción binaria de la suma como la combinación de dos conjuntos y una verdadera comprensión matemática de la conmutatividad.

En relación con estos niveles Baroody y Ginsburg (1986) hacen observar cierta falta de claridad existente en las evidencias que sustenta la afirmación de que inicialmente los alumnos poseen una concepción unitaria de la suma. No obstante, los datos relativos al desarrollo de estrategias mentales de suma son compatibles con esta hipótesis.

Canobi, Reeve y Pattison (2002) observan que, incluso antes de su escolarización, los alumnos muestran conocimiento de la propiedad conmutativa en contextos físicos. Por otra parte, Baroody y otros (1983) señalan que los alumnos de primero de Educación Primaria que no tienen una experiencia aritmética informal rica no suelen usar la conmutatividad para simplificar sus cálculos.

Según Baroody y Ginsburg (1986) la conmutatividad puede ser apreciada de forma separada por medio de la detección de regularidades en los procesos y resultados computacionales, antes o después de la invención de estrategias que no dan importancia al orden de las cantidades o números.

Aunque Resnick afirma que la comprensión de la conmutatividad aditiva es inicialmente dependiente del contexto y del tamaño de los números, no siendo comprendida como un principio general hasta que es alcanzado el nivel operacional, Baroody y colaboradores (2003) citan estudios que aportan evidencias contradictorias al respecto.

Warren (2001) analiza la capacidad de generalización, de alumnos de tercero de Educación Primaria, de la propiedad conmutativa de la suma y no conmutatividad de la resta, a partir de sus experiencias previas en el aprendizaje de la aritmética. De los 87 alumnos participantes en este estudio el 25 % da muestras de conocimiento de la propiedad conmutativa de la suma y de la no conmutatividad de la resta, justificando la veracidad de las sentencias $2+3=3+2$ y $31+16=16+31$, y la falsedad de las sentencias $2-3=3-2$ y $31-16=16-31$. Otro 25 % de los alumnos afirma la veracidad de todas estas sentencias aplicando la propiedad conmutativa tanto en la suma como en la resta. Un 35% de los alumnos consideran falsas todas las sentencias debido a que interpretan el signo igual como un operador. Otros 5 alumnos encuentran dificultades en la resolución de esta actividad debido a interferencias de su reciente aprendizaje de las operaciones con llevada. Estos alumnos afirman no poder sumar $16+32$ porque el primer término es menor que el segundo. El resto de los alumnos (cuatro) no es capaz de resolver la actividad.

En este estudio, los alumnos mostraron ser capaces de hacer generalizaciones de relaciones numéricas, algunas matemáticamente no correctas, y expresarlas con lenguaje cotidiano. En la mayoría de los casos también fueron capaces de proponer más sentencias basadas en sus generalizaciones. Algunos alumnos generalizaron la propiedad conmutativa al caso de la resta de forma intuitiva sin cuestionarse su veracidad. Otros, en cambio, tras afirmar intuitivamente su veracidad dudaron de su respuesta.

Según Warren, la enseñanza previa recibida por los alumnos se mostró como un obstáculo para abstraer la estructura de la aritmética, en particular la enseñanza de las operaciones con llevada, la tendencia a centrar la enseñanza de la aritmética en la obtención de respuestas, y el habitual formato vertical de las operaciones.

En línea con la propuesta Early-Algebra cabe destacar el trabajo de Schifter et al. (en prensa) los cuales exploran el desarrollo de conocimiento de las propiedades básicas de la aritmética, por parte de alumnos de Educación Primaria, a partir de la observación de regularidades en su práctica aritmética. Dichas regularidades son observadas conforme los alumnos aprenden las cuatro operaciones aritméticas básicas: desarrollando comprensión de los distintos tipos de situaciones que modelizan, clasificando diferentes tipos de representaciones para ellas, y averiguando como realizar los cálculos.

Estos autores confirman, a partir de su experiencia, la afirmación de Resnick de que los alumnos desarrollan una comprensión de la composición aditiva, la conmutatividad y la propiedad asociativa en el contexto de objetos físicos.

En contextos numéricos, los autores observan que cuando los alumnos tienen oportunidad de articular sus observaciones suelen expresar frecuentemente la idea de que el orden de los sumandos no afecta a la suma. Inicialmente, el patrón detectado puede ser local, vinculado a un contexto. Las evidencias aportadas por estos autores muestran que en ocasiones los alumnos generalizan sus observaciones locales, de la no importancia del orden de los números, a cualquier problema, y a cualquier operación. Los alumnos parecen pensar únicamente en los números y no en las operaciones. No obstante, algunos alumnos establecen limitaciones a esta generalización.

Los autores destacan la complejidad del conocimiento de la propiedad conmutativa, observando la tendencia de los alumnos a sobre-generalizar, a todas las operaciones, la no importancia del orden de los términos, y las dificultades iniciales para apreciar que esta propiedad de la suma es cierta para sumandos cualesquiera.

La sobre-generalización de la conmutatividad de la suma a otras operaciones, y en especial a la resta, ha sido apreciada también por otros autores, entre ellos Mitchell, (1983) y Dickson, Brown y Gibson (1988). Brown (1981) observa que de un grupo de alumnos de 12 años menos del 30% reconocía que la división no era conmutativa y menos del 60% que la resta tampoco lo era (Dickson et al., 1988). Este comportamiento de los alumnos de primeros cursos de Educación Primaria se encuentra, según Mitchell, relacionado con la falta de conciencia que, en general, muestran los alumnos sobre la importancia del orden de los números en el cálculo, siendo los alumnos de primero los menos propensos a ignorar el orden de los términos, debido a que su pensamiento es más concreto, mientras que el de los alumnos de cursos superiores es simbólico.

Propiedad asociativa

En relación con la propiedad asociativa, existen visiones diferentes sobre si se encuentra o no separada de la propiedad conmutativa en las representaciones de los niños. A partir del estudio longitudinal de un alumno, Resnick (1992) considera que ambos principios no son diferenciados en la comprensión de los niños, observando que dicho alumno consideraba ambas propiedades como permisos evidentes de la composición aditiva.

Otros autores, entre ellos Canobi et al. (2002), observan que los alumnos desarrollan una versión primitiva de la propiedad conmutativa de forma previa a comprender la propiedad asociativa, afirmando que las relaciones conceptuales que definen esta propiedad en contextos concretos, más que la mera presencia de tres conjuntos de objetos, son lo que hace esta propiedad más difícil de comprender. En un estudio previo, estos mismos autores observaron que un aspecto clave de las diferencias individuales de los alumnos en su conocimiento conceptual de la suma era su tendencia a comprender las propiedades conmutativa y asociativa, comprender sólo la propiedad conmutativa o no comprender ninguna de estas propiedades.

Estos autores resumen algunos estudios previos sobre la comprensión de esta propiedad, en contextos simbólicos o cuantitativos, que coinciden en observar que la comprensión de la propiedad conmutativa precede a la asociativa. No obstante, estos resultados son cuestionables debido a que los problemas propuestos para evaluar la comprensión de la propiedad asociativa requerían más carga cognitiva, necesaria para recordar los pasos dados por el investigador e involucrar más conjuntos, cantidades o números.

Schifter y colaboradores (en prensa) observan que la agrupación y reagrupación de sumandos son entendidas por los alumnos como una extensión de la propiedad conmutativa de la suma. Desde el punto de vista de los alumnos, la conmutatividad y la asociatividad no son separables. Ambas propiedades responden a la cuestión de si el orden de los sumandos importa. No obstante, observan que la propiedad asociativa, a diferencia de la propiedad conmutativa, no emerge de forma natural en la exploración de los números y operaciones de los alumnos.

Compensación de la suma

La propiedad denominada “compensación” ha recibido una menor atención, al no ser considerada una propiedad fundamental de la estructura aditiva. No obstante, cabe destacar un trabajo de Warren (2004) en el que realiza un estudio sobre la comprensión de la propiedad de compensación de la suma con 45 alumnos de tercero de Educación Primaria. La autora trabaja con los alumnos el desarrollo de comprensión de esta propiedad a partir de su representación en modelos de medida y posteriormente en lenguaje simbólico aritmético, con números inicialmente menores que 10 y después mayores que 10.

Warren observa dificultades debidas al lenguaje, a los números y a la comprensión de conceptos matemáticos como “igual”. Los alumnos mostraron dificultades para expresar sus generalizaciones verbalmente, especialmente en el contexto del simbolismo numérico. En sus explicaciones los alumnos omitían aspectos claves de esta propiedad tales como la invariancia del todo o el hecho de que cada parte aumenta o disminuye en la misma cantidad. Algunos, también mostraron una limitada comprensión de las operaciones, no siendo capaces de entenderlas como un proceso que produce un cambio.

Warren observa la bondad del uso combinado de los contextos de medida y del simbolismo numérico para trabajar la estructura de las matemáticas, aunque reconoce la necesidad de investigar el modo de transferir el conocimiento de un contexto a otro. La exploración de patrones en el contexto del simbolismo aritmético aumentaba la carga cognitiva de la tarea ya que al parecer los alumnos necesitaban calcular respuestas continuamente en su búsqueda de patrones. El aumento del tamaño de los números produjo una mayor carga cognitiva para algunos alumnos, aunque se les permitía usar la calculadora, no obstante, para otros alumnos supuso el comienzo de la observación de la compensación.

5.2.2 Pensamiento relacional en el cálculo de hechos numéricos

En los apartados de cálculo mental y estrategias de cálculo flexible, recogidos en el capítulo 2, hemos señalado la importancia de las estrategias de cálculo flexibles, en particular las estrategias de cálculo mental. Además, hemos descrito algunas de estas estrategias según han sido identificadas por Trafton (1978), Gómez (1995a), Roa (2001) y Thompson (1999, 2000). Estos estudios, entre otros, enumeran variadas estrategias de cálculo utilizadas por alumnos de distintos niveles educativos, e incluso adultos, dando muestras de su diversidad y de las relaciones y propiedades aritméticas que involucran.

En algunos casos estas estrategias son descubiertas por los alumnos, de forma espontánea, a partir de su experiencia aritmética (Carpenter y Moser, 1984; Foxman y Beishuizen, 1999; Thompson, 1999, 2000). En otros, en cambio, son resultado de su enseñanza directa (Thornton, 1978).

Los trabajos que abordan el estudio de las estrategias de cálculo flexible destacan la bondad de su uso en el aprendizaje de los hechos numéricos. (Myers y Thornton, 1977; Rathmell, 1978; Thornton, 1978). Dichos estudios muestran que la enseñanza de este tipo de estrategias favorece el aprendizaje y retención de hechos numéricos básicos así como la transferencia de este conocimiento a otros problemas.

Los estudios de Thiele (1938, según cita Rathmell, 1978) y Rathmell (1978) detectan importantes diferencias de rendimiento en el cálculo, por parte de alumnos de primeros cursos de Educación Primaria, debidas al uso de estrategias de cálculo flexible. Estas diferencias se localizan principalmente en la resolución de los hechos numéricos más difíciles. Además, se observa que los alumnos que usan estrategias de cálculo flexibles retienen su conocimiento de los hechos numéricos mejor, durante el periodo de las vacaciones de verano, que los demás alumnos.

Los resultados de este estudio son confirmados por Myers y Thornton (1977) al observar que los niños que resuelven correctamente un mayor número de hechos numéricos tienden a descubrir y usar relaciones entre hechos numéricos más sencillos, y los alumnos con peores resultados o con dificultades de aprendizaje, no lo hacen. Estas relaciones entre los hechos numéricos no fueron, en este caso, enseñadas por el docente, sino que fueron descubiertas por los alumnos más avanzados, quedando fuera del alcance del resto de los alumnos al no llegar a hacerse explícitas en el aula.

Abordando la enseñanza de estas estrategias de pensamiento de una en una en el aula y en entrevistas individuales, los autores observaron efectos positivos en los alumnos con dificultades de aprendizaje, los cuales mostraron recordar estas estrategias y aplicarlas en situaciones apropiadas, así como una mejora en el dominio de los hechos numéricos.

Estos autores identificaron los conceptos de dobles y de uno más o uno menos como las relaciones básicas, observando que muchos de los alumnos dominaban estos conceptos, incluso antes de su enseñanza formal. Otros dos conceptos o relaciones destacadas, que se basan en las relaciones de "dobles" y "uno más que", son "doble más uno" y "números que comparten". Este último caso se refiere a pares de números que se diferencian en dos unidades de modo que pasando una unidad de uno al otro se convierten en una suma de dobles (ej., $6+8=(6+1)+(8-1)$). Esta estrategia combina la relación de compensación con la suma de dobles. Además, entre los restantes hechos numéricos cabe distinguir los casos en los que uno de los sumandos es nueve, lo que equivale a sumar 10 y restar de uno, o cuando el par de números suman 10.

En la Tabla 5-7 clasificamos los hechos numéricos que involucran términos inferiores a diez, según las relaciones que pueden ser empleadas para facilitar su cálculo. Esta tabla es una extensión de la tabla construida por Myers y Thornton (1977).

Tabla 5-7: Relaciones que facilitan el cálculo de los hechos numéricos básicos

<table>
<tr><td>+</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="10">Sumando cero</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="9"></td><td colspan="9">Sumando uno</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="8"></td><td>D</td><td>D + 1</td><td>C</td><td></td><td></td><td></td><td>S10</td><td rowspan="7">Sumando nueve</td></tr>
<tr><td>3</td><td>D + 1</td><td>D</td><td>D + 1</td><td>C</td><td></td><td>S10</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>C</td><td>D + 1</td><td>D</td><td>D + 1</td><td>C S10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>C</td><td>D + 1</td><td>D</td><td>D + 1</td><td>C</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td>C S10</td><td>D + 1</td><td>D</td><td>D + 1</td><td>C</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>S10</td><td></td><td>C</td><td>D + 1</td><td>D</td><td>D + 1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>S10</td><td></td><td></td><td></td><td>C</td><td>D + 1</td><td>D</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="7">Sumando nueve</td><td>D</td></tr>
</table>

C= comparten, D= doble, S10 = suman 10

En otro estudio de Baroody y otros (1983), realizado con alumnos de primer, segundo y tercer curso de Educación Primaria, se analiza el uso, en el cálculo, de las propiedades conmutativa y complementaria de la suma y la resta y de la observación de la diferencia de una unidad. En este cálculo los alumnos dan muestras del uso de siete tipos de estrategias: conteo, algoritmos estándares, recuerdo de un hecho numérico, uso de hechos numéricos conocidos, uso de uno de los tres principios mencionados anteriormente, sobre-generalización de la relación numérica de progresión de una unidad y la adivinación de la respuesta.

Los autores observan que de los tres principios, la propiedad conmutativa fue el más usado, concretamente por más de 70% de alumnos de cada curso. Los alumnos usaron en menor medida la propiedad complementaria de la suma y la resta; uso que se vio facilitado por la capacidad de los alumnos de generar combinaciones aditivas eficientemente. Los autores conjeturan que el uso inconsistente de esta propiedad, evidenciado por la mayoría de los alumnos de primer y segundo curso de Educación Primaria, puede ser debido a que éste no es aun considerado por estos alumnos como un principio sino más bien como una regularidad que sólo es apreciada localmente.

La observación del patrón N + 1 en una de las secuencias de hechos numéricos propuesta fue muy baja. Los autores conjeturan que puede ser debido a la falta de familiaridad de los alumnos con este patrón en situaciones de cálculo y, en el caso de los alumnos de tercero, también a la disponibilidad de estrategias de cálculo familiares y eficaces.

Los autores observan que el uso en el cálculo, de las propiedades y patrones mencionados, pudo haber sido evitado por los alumnos por considerar que estaban "haciendo trampa". Algunos alumnos intentaron disimular los casos en los que miraban a hechos numéricos ya resueltos para resolver los siguientes.

Putnam et al. (1990) realizan un estudio sobre el uso de estrategias de derivación de hechos numéricos de suma y resta, a partir de hechos numéricos conocidos, por parte de alumnos de tercero de Educación Primaria y de alumnos con dificultades de aprendizaje de tercero a quinto de Educación Primaria. Los alumnos debían evaluar, justificar y completar las estrategias de cálculo modeladas por dos marionetas, las cuales sólo involucraban aumentos o disminuciones en una unidad.

En este estudio se observa que entre el 50 y el 60 % de los alumnos entrevistados eran capaces de justificar estrategias de derivación de hechos numéricos aditivos.

Muchos más podían completar las estrategias y dar explicaciones parciales, evidenciando tal vez una apreciación más implícita de las reglas. En el caso de los hechos numéricos de resta solamente entre un 10 y un 20% de los alumnos fueron capaces de aportar explicaciones completas de las estrategias modeladas por las marionetas.

Los alumnos con dificultades de aprendizaje eran más propensos a utilizar sus propios métodos, aprendidos o inventados, para la resolución de los hechos numéricos de resta, en vez de describir o explicar las estrategias modeladas por las marionetas; mostrando de este modo una menor flexibilidad en su uso de estrategias de cálculo.

En un estudio citado por Baroody y Coslick (1998), se obtienen resultados interesantes sobre el uso de cálculo mental. Se observa que los alumnos hábiles en el cálculo mental a menudo trabajan de izquierda a derecha (es decir, comenzando por las unidades de mayor orden), utilizan flexiblemente una variada colección de estrategias evitando “la llevada”, mantienen un total temporal, y hacen uso de su conocimiento sobre la estructura de los números. En cambio, los alumnos que no son hábiles en este tipo de cálculo tienden a usar el algoritmo estándar de derecha a izquierda en todas las situaciones (es decir, comenzando por las unidades de menor orden), no evitan estrategias “con llevada”, y tienden a aislar los dígitos sin tener en cuenta el valor posicional u otras relaciones numéricas.

Según este estudio, los calculadores mentales hábiles reconocen que existen muchas formas de realizar un cálculo y eligen flexiblemente o, incluso, inventan la estrategia que mejor se adecua a la tarea en cuestión. Constantemente buscan por formas de disminuir el esfuerzo del cálculo y son capaces de inventar procedimientos eficaces de cálculo mental, incluso para realizar cálculos que requieren llevada (Baroody y Coslick, 1998; Kamii, 1989/1992). Esta flexibilidad requiere comprensión y un sentido numérico bien desarrollado.

5.2.3 Pensamiento relacional en otros contextos aritméticos

Carpenter et al. (2003), Koehler (2002, 2003) y en menor medida Knuth et al. (2005) han trabajado el concepto de pensamiento relacional en el contexto de las igualdades y expresiones numéricas, además de en el cálculo. Los trabajos de Fujii y Stephens

(Fujii, 2003; Fujii y Stephens, 2001) se encuentran también estrechamente relacionados con este uso del pensamiento relacional, al centrarse en el estudio del pensamiento cuasivariable. A continuación, presentamos los principales resultados sobre el desarrollo y uso de pensamiento relacional de estos estudios.

Carpenter y colaboradores abordan el desarrollo de pensamiento relacional en el contexto de las igualdades numéricas abiertas y sentencias numéricas, sugiriendo actividades para su trabajo en el aula y dando ejemplos de las manifestaciones de este tipo de pensamiento por alumnos de Educación Primaria al realizar cálculos, al resolver igualdades y sentencias y al construir sus propias sentencias numéricas. Estos autores también dan evidencias de cómo los estudiantes reflexionan sobre los procedimientos computacionales para construir generalizaciones y representaciones abstractas de propiedades aritméticas. Principalmente, el trabajo de estos autores hace manifiesta la capacidad de algunos alumnos de Educación Primaria de utilizar pensamiento relacional en el contexto de igualdades y sentencias numéricas, y de generalizar relaciones aritméticas a partir de la discusión de sentencias numéricas concretas basadas en dichas relaciones.

Por otra parte, destacan los trabajos de Koehler (2002, 2004), de los cuales hemos comentado previamente los aspectos relativos a la comprensión del signo igual. En el primero de ellos la autora da evidencias de la emergencia natural del uso de pensamiento relacional en el trabajo de un grupo de cinco alumnos en la resolución de igualdades y sentencias numéricas. La autora trabajó con ellos durante cinco sesiones de 30 o 40 minutos repartidas en un mes. Los alumnos mostraron inicialmente uso de pensamiento relacional en la sentencia $58+123=115$, y en posteriores sesiones, también en la sentencia $3+5=3+5$, dando explicaciones basadas en la observación de relaciones de magnitud y en la propiedad conmutativa de la suma, respectivamente.

Tres de ellos emplearon en algún momento la relación de compensación de la suma para justificar la veracidad de algunas sentencias. El uso de esta estrategia se vio favorecido por la consideración de sentencias numéricas en las que en uno de los miembros había una suma de dobles y, en el otro, la expresión obtenida a partir del dicho miembro al sumarle una unidad a uno de los términos y restársela al otro. Esta estrategia fue utilizada por algunos alumnos para comprobar sus respuestas a igualdades abiertas.

En este estudio el uso de pensamiento relacional se desarrolló de forma paralela a la comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica, siendo mostrado por los alumnos incluso antes de manifestar una comprensión estable.

En Koehler (2004), la autora analiza la capacidad, de cinco alumnos de bajo rendimiento, tres de segundo de Educación Primaria y dos de tercero[40], de aprender a usar pensamiento relacional y utilizar este tipo de pensamiento para mejorar su conocimiento de hechos numéricos básicos. En este estudio, de un año de duración, la autora intervino puntualmente interactuando individualmente con los alumnos siendo la docencia realizada por la maestra oficial del aula, la cual llevó a cabo una enseñanza de las matemáticas que integraba el desarrollo de razonamiento algebraico y estaba guiada por el pensamiento matemático de sus alumnos. Por motivo de la realización del estudio, se trabajó de forma explícita y constante el desarrollo de pensamiento relacional llevándose a cabo frecuentes discusiones que ayudaron a los alumnos a verbalizar variedad de relaciones aritméticas.

La enseñanza estuvo centrada en diversos tópicos aritméticos, involucrando las cuatro operaciones básicas, los cuales fueron abordados principalmente en el contexto de igualdades y sentencias numéricas y problemas verbales. En especial se trabajó la comprensión del signo igual, la relación existente entre la suma y la multiplicación y el desarrollo de conjeturas sobre relaciones aritméticas.

Inicialmente, ninguno de los cinco alumnos dio muestras del uso de pensamiento relacional. Las primeras evidencias de este uso tuvieron lugar en igualdades de la forma $a + b - b = a$ y derivadas, tales como $a + b - (b \pm 1) = a$, por parte de los alumnos de tercero de Educación Primaria. Este tipo de sentencias permitieron a los alumnos considerar las sentencias numéricas como totalidades y no como secuencias de operaciones. Los alumnos de segundo de Educación Primaria comenzaron a dar muestras de este tipo de pensamiento a partir de la modelización de las igualdades a resolver, lo cual les sirvió de apoyo para la abstracción de las relaciones expresadas.

[40] El aula en al que se realizó el estudio estaba formada por alumnos de segundo y tercero de Primaria.

Los dos alumnos de tercero de Educación Primaria usaron regularmente estrategias de compensación. Respecto al uso de pensamiento relacional en el cálculo de los hechos numéricos, se observa que los alumnos de tercero emplearon regularmente su conocimiento de la tabla del diez para deducir otros hechos multiplicativos. En el caso de los alumnos de segundo de Educación Primaria este uso se produjo más tardíamente y con mayores dificultades.

Fue crítico en el uso de pensamiento relacional para generar hechos numéricos la capacidad de los alumnos para pensar en la multiplicación como suma repetida y su habilidad para hacer un uso implícito de la propiedad distributiva descomponiendo expresiones. Los alumnos utilizaron pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas basadas en variedad de relaciones antes de apropiarse de este tipo de estrategias para la generación de hechos numéricos. El tiempo que los alumnos necesitaron para hacer uso de pensamiento relacional en contextos diferentes a la resolución de igualdades y sentencias numéricas, fue variable de un alumno a otro.

Uno de los principales resultados de este estudio es la confirmación de una estrategia hipotética de aprendizaje sobre el uso de pensamiento relacional definida por tres etapas:

- Los alumnos comienzan a usar pensamiento relacional en situaciones en las que las relaciones son relativamente transparentes (por ejemplo relacionadas con el cero como $a + b - b = a$).
- Los alumnos utilizan pensamiento relacional en sentencias numéricas basadas en la visión de la multiplicación como suma repetida y en la propiedad distributiva.
- Los alumnos se apropian de estas estrategias en la resolución de problemas matemáticos y al generar hechos numéricos.

Este estudio muestra, además, que, bajo adecuadas circunstancias, los alumnos pueden pensar sobre relaciones de maneras poderosas y que los alumnos de menor rendimiento también se ven favorecidos por el desarrollo de este pensamiento no siendo, por tanto, necesario el dominio de las habilidades de cálculo para abordar este tipo de estrategias.

Otros de los trabajos referidos previamente en el apartado de comprensión del signo igual es el de Sáenz–Ludlow y Walgamuth (1998), en el cual se hace observar que el orden de los términos no tiene importancia para los alumnos, no le prestan atención, pues su interés se centra en el resultado de las operaciones involucradas en las igualdades y sentencias consideradas. No obstante, los alumnos mostraron cierta conciencia de que el orden de los términos tiene importancia "para los adultos".

Fujii y Stephens (Fujii, 2003; Fujii y Stephens, 2001) han trabajado con expresiones numéricas generalizables, basándose en la idea de cuasivariables, es decir el uso de los números en expresiones y sentencias numéricas que indican una relación o propiedad matemática que es cierta para todos los números que se consideren.

En un estudio realizado con alumnos de segundo y tercero de Educación Primaria (Fujii, 2003), Fujii propone a los alumnos una estrategia para restar 5 de números con el dígito de las unidades menor que 5, consistente en sumar 5 y restar 10 (ej., $32-5=32+5-10=37-10=27$). De este modo los cálculos a realizar resultan más sencillos para el alumno.

La comprensión y dominio de esta estrategia por parte de los alumnos fue muy variable. Algunos alumnos mostraron dificultades. Procedían directamente a dar la respuesta al cálculo propuesto y al pedirles que explicaran por qué la estrategia propuesta funciona, dijeron que porque daba la respuesta correcta. Otros alumnos fueron capaces de explicar la racionalidad de dicha estrategia, observando que al sumar y restar 10 se compensa el cambio realizado. Algunos de estos alumnos fueron capaces, incluso, de generalizar esta estrategia para cálculos en los que la cantidad a restar no era 5 sino 6, 7, 8 o 9, explicándola de los siguientes modos: "*para cualquier número que restes, tienes que sumar el otro número, que esté entre 1 y 10 y que sea igual a diez; como 7 y 3, o 4 y 6. Restas diez y te da la respuesta", "No importa que número estés restando, necesita tener otro número para hacer 10. Tú sumas el número para hacer 10, y entonces restas 10. Por ejemplo si tienes 22 – 9, sabes que 9 + 1 = 10, entonces sumas el 1 a 22 y restas 10*".

Estos alumnos reconocieron la falta de importancia del número inicial a la hora de aplicar el método y elaboraron generalizaciones adecuadas del método. Además, mostraron sentirse cómodos con la falta de clausura de las expresiones involucradas.

Otros alumnos, en cambio, manifestaron la necesidad de clausura de las expresiones realizando primeramente el cálculo de la operación expresada e intentado después calcular el número a sumar en las expresiones para aplicar la estrategia sugerida. Aunque alguno de estos alumnos consiguió calcular dicho número, ninguno de ellos fue capaz de explicar por qué este método siempre funciona. Parecían incapaces de ignorar el número de partida y de dejar las expresiones sin operar.

Knuth y colaboradores (2005), como se ha mencionado previamente, detectan un progreso lineal a lo largo del último curso de Educación Primaria y dos primeros cursos de Educación Secundaria en el uso de pensamiento relacional al comparar las soluciones de las igualdades $2 \times \square + 15 = 31$ y $2 \times \square + 15 - 9 = 31 - 9$. Siendo los alumnos que habían expresado verbalmente el significado del signo igual *equivalencia numérica* los más propensos a reconocer que la diferencia existente entre las igualdades implicaba la equivalencia de ambas igualdades en vez de utilizar otras estrategias como calcular el término desconocido de cada igualdad y comparar.

Nuestro estudio previo Molina (2005) también aborda cierto estudio de desarrollo y uso de pensamiento relacional al analizar el modo en que emerge en los alumnos este tipo de pensamiento durante el trabajo con igualdades y sentencias numéricas. Los resultados dan muestras de la capacidad de los alumnos de tercero de Educación Primaria de desarrollar pensamiento relacional y utilizarlo para resolver igualdades y sentencias numéricas. Los alumnos mostraron inicialmente una fuerte tendencia computacional por lo que fue necesario promover este tipo de pensamiento preguntándoles directamente por formas de resolver las sentencias e igualdades sin realizar los cálculos y favoreciendo el intercambio de explicaciones sobre diferentes formas de resolver una misma sentencia.

En total, once de los dieciocho alumnos dieron muestras del uso de pensamiento relacional, en alguna de las cinco sesiones. Concretamente, un alumno en la primera sesión, otro en la segunda, dos en la tercera, seis en la cuarta y siete en quinta. Además, algunos alumnos construyeron sentencias verdaderas y falsas que sugieren el uso de este tipo de pensamiento, aunque no lo articularan verbalmente.

Aunque las explicaciones que evidencian este tipo de pensamiento no fueron muy frecuentes, se observó que algunos alumnos eran capaces de frenar su tendencia computacional, considerar las igualdades y sentencias como totalidades y centrar su atención en las relaciones entre o dentro de las expresiones que las componen para dar respuesta.

Las actividades consideradas, en particular la discusión de sentencias verdaderas y falsas, favoreció el desarrollo de pensamiento relacional, siendo de vital importancia para este desarrollo el ayudar a los alumnos a superar la tendencia de hacer cálculos que manifestaban al abordar las igualdades y sentencias. En particular, este estudio muestra la capacidad de los alumnos de tercero de Educación Primaria para abordar la aritmética desde una perspectiva menos computacional y más estructural.

5.2.4 Conocimientos relativos a la estructura de la aritmética

Numerosos autores señalan la falta de conocimiento y comprensión de los alumnos de Educación Primaria y Secundaria sobre la estructura de la aritmética y la desconexión de sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos (Booth, 1989; Kieran, 1989, 1992; Kieran y Chaloud, 1993; Lee y Wheeler, 1989; Liebenberg et al., 1999; MacGregor, 1996; Schifter, 1999; Schliemann et al., 1998; Warren, 2001, 2004). En la mayoría de los casos, se identifican como causas principales el énfasis predominante de lo computacional en los primeros cursos escolares y la falta de oportunidades que tienen los alumnos para hacer explícitas conexiones entre la aritmética y el álgebra.

En este apartado resumimos algunos estudios que exploran el conocimiento de los alumnos sobre la estructura de la aritmética. Nos vamos a centrar en el conocimiento de esta estructura en conexión con el simbolismo aritmético, y en menor medida el simbolismo algebraico. Otros autores han explorado el conocimiento de estructura de la aritmética de los alumnos de Educación Primaria en contextos no simbólicos, tales como la resolución de problemas aritméticos, mostrando que los alumnos son capaces de desarrollar un sentido de la aritmética que va más allá de la directa obtención de la respuesta (Carpenter et al., 2003; Schifter, 1999).

5.2.4.1 En contextos aritméticos

Collis (1974, según cita Kieran, 1981) y Cauzinille–Marmeche, Mathieu y Resnick (1984), Chaiklin y Lesgold (1984), Kieran (1989), Linchevski y Livneh (1999), Liebenberg et al. (1999) y Warren (2004) analizan la comprensión de la estructura aritmética que muestran los alumnos en el manejo de expresiones aritméticas abordando aspectos como el orden de las operaciones, el uso de paréntesis, la clausura de las expresiones y las propiedades aritméticas básicas. Una gran parte de estos estudios consideran la comprensión de la equivalencia de expresiones aritméticas, como elemento de análisis del conocimiento estructural de los alumnos.

Una dificultad principal que manifiestan los alumnos al trabajar con expresiones aritméticas y algebraicas, ya mencionada en los apartados previos así como en el capítulo 3, es la necesidad de clausura de las expresiones. Esta dificultad es detectada en un gran número de estudios. No obstante, contradiciendo estas afirmaciones, también se han aportado evidencias del uso de pensamiento relacional en la resolución de igualdades numéricas por parte de alumnos de primeros cursos de Educación Primaria, lo cual implica, en el caso de las igualdades y sentencias de no-acción, trabajar con expresiones aritméticas sin calcular su valor numérico.

Con respecto al orden de las operaciones, Herscovics y Kieran (1980) y Booth (1999) señalan que los alumnos suelen creer que el orden de la secuencia de las operaciones determina el orden en el que debe realizarse la operación. La tendencia a proceder de izquierda a derecha hace que los alumnos no consideren necesario el uso de los paréntesis o el orden convencional de las operaciones, no percibiendo ninguna ambigüedad en expresiones tales como 2 + 1 x 5. Además, los alumnos piensan que el valor de una expresión permanece inalterable si se modifica el orden de las operaciones. En otros casos consideran que el contexto del que procede la expresión determina el orden en el que deben realizarse las operaciones

Chaiklin y Lesgold (1984) estudian el modo en que seis alumnos de sexto de Educación Primaria analizan y justifican, sin calcular el total, la equivalencia de expresiones aritméticas de suma y resta formadas por tres términos. Estos alumnos fueron capaces de, sin llevar a cabo el cálculo de las operaciones, juzgar la equivalencia o no equivalencia de algunas de las expresiones que involucraban términos menores que 12. En el caso de las expresiones que involucraban números mayores, el porcentaje de acierto fue un 25 % menor.

En ocasiones, los alumnos violaron las convenciones que regulan la interpretación de las expresiones aritméticas al considerar algunas expresiones de derecha a izquierda (ej., $685-492+947$ fue considerado equivalente a $947+492-685$), o al asignar un signo de resta a los dos términos situados a su derecha (ej., interpretar $947-492+685$ como $947-(492+685)$).

Los alumnos atribuyeron especial importancia, en la equivalencia de dos expresiones, al primer número de cada expresión y manifestaron en variadas ocasiones la suposición de que la equivalencia depende de que los mismos números sean sumados y restados.

Los autores observaron que los alumnos usaban variados métodos para combinar términos numéricos, incluso cuando comparaban un misma expresión con otras, dependiendo de la expresión con la que se comparara. Además, aparentemente, una expresión particular no determinaba un tipo particular de análisis, ya que diferentes alumnos abordaron de modo diferente el análisis de la equivalencia de un mismo par de expresiones. También se observa la falta de capacidad de los alumnos para distinguir entre los métodos matemáticamente adecuados y los que no lo son.

Al realizar el análisis de las expresiones aritméticas los alumnos procedieron de cuatro formas diferentes:

- <u>Análisis unitario:</u> las expresiones son analizadas término por término, no dando importancia a la disposición de cada término en la totalidad de la expresión y siendo en ocasiones considerado el primer término como la cantidad de partida a la que se le van añadiendo o quitando otras cantidades.
- <u>Análisis binario</u>: Se distinguen dos partes dentro de cada expresión considerando primero en un par de términos y después el término restante.
- <u>Análisis de izquierda a derecha:</u> se analiza la totalidad de la expresión procediendo de izquierda a derecha. Este tipo de análisis engloba los no incluidos en los casos anteriores.
- <u>Análisis en sentido contrario:</u> se analizan las expresiones de derecha a izquierda.

Los análisis unitarios tuvieron lugar principalmente en el caso de las expresiones que involucraban números menores que doce, en las cuales el tamaño de los números y que el primer término fuera el mayor facilitó a los alumnos la valoración del efecto de los distintos términos en el primero. En otros casos los alumnos hicieron referencia únicamente a una parte o a ciertos elementos de cada expresión, tales como los signos operacionales o un par de términos, ignorando parte de las expresiones o mencionando sólo la parte de las expresiones que les habían resultado clave para obtener la respuesta.

Al juzgar la equivalencia de las expresiones los alumnos utilizaron variedad de métodos mostrando no disponer de un modo fijo de abordar este tipo de tarea. Utilizaron métodos no-analíticos y métodos analíticos, teniendo en cuenta en ocasiones el valor de los números y en otras sólo si éstos eran iguales o diferentes. Dentro de los métodos analíticos se distinguen métodos número-dependientes y otros número-independientes. Como su nombre indica los métodos número-independientes no utilizan el valor concreto de los números para juzgar la equivalencia; se basan en el uso de propiedades aritméticas. Este tipo de métodos corresponde, en la mayoría de los casos, al uso de la suposición de que si dos expresiones incluyen los mismos términos son equivalentes, independientemente del orden de éstos.

Los autores sugieren que el uso de métodos no-analíticos corresponde a la ausencia de un método adecuado a aplicar. Dentro de estos métodos no-analíticos distinguen tres tipos: semi-analíticos, compensación y diferencia. El primero de ellos consiste en la estimación de la magnitud de las cantidades resultantes al combinar los términos, a partir del análisis de la magnitud de los términos involucrados y las operaciones que los relacionan. Este método deja a los alumnos con respuestas algo inciertas. En el método compensación los alumnos utilizan la suposición de que dos expresiones son equivalentes si observan diferencias que entienden que pueden compensarse, es decir, si los números reciben un tratamiento comparable en ambas expresiones. El método diferencia es utilizado cuando los alumnos no pueden aplicar otros métodos. En este caso los alumnos justifican la no equivalencia de las expresiones debido a la existencia de diferencias entre las expresiones, tales como que ambas empiezan por términos diferentes.

Los errores cometidos corresponden a la violación de propiedades aritméticas y al uso de métodos no-analíticos. Los alumnos asignaron a $a-b$ el mismo valor que a $b-a$, mostrando en variadas ocasiones la suposición de que la resta puede realizarse tanto de derecha a izquierda como de izquierda a derecha. Además, los alumnos muestran excesiva confianza en métodos no-analíticos que no son generalmente efectivos.

Cauzinille–Marmeche, Mathieu y Resnick (1987) presentan un estudio en el que 20 alumnos, de sexto de Educación Primaria y primeros tres cursos de Educación Secundaria, juzgan la equivalencia de expresiones numéricas y algebraicas formadas por tres términos y dos signos operacionales de suma o resta y relacionadas con:

- la propiedad conmutativa de la suma (ej., $12+(6-2)$ vs $(6-2)+12$; $(a-b)-c$ vs $(b-a)-c$),
- la propiedad asociativa (ej., $8+(11+13)$ vs $(8+11)+13$; $a-(b+c)$ vs $(a-b)+c)$,
- y la importancia de los paréntesis (ej., $15-(6+2)$ vs $15-6+2$; $a-(b-c)$ vs $a-b-c$).

Mientras que en las expresiones numéricas 14 de los 20 alumnos respondieron correctamente en los tres tipos de expresiones (conmutatividad, asociatividad y paréntesis), en el caso de las expresiones algebraicas sólo lo hicieron 3 de los 20 alumnos. Un 15%, 53 % y 39 % de los alumnos resolvió correctamente todos los casos relativos a la propiedad asociativa, importancia de los paréntesis y propiedad conmutativa respectivamente.

Los autores distinguen cuatro tipos de justificaciones dadas por los alumnos: la comparación formal, la reescritura, el cálculo y la evaluación. El primer tipo se refiere a la comparación directa de las expresiones haciendo referencia a una propiedad o regla. El segundo tipo consiste en la comparación de expresiones derivadas de las originales, tras haber realizado algún cálculo o transformación. La justificación llamada cálculo consiste en la comparación del valor numérico de ambas expresiones. Para ello, en el caso de las expresiones no numéricas, los alumnos sustituyen cada símbolo por un número, obteniendo así un valor numérico para cada miembro. El último tipo de justificación, evaluación, consiste en la comparación no cuantificada de las expresiones. En este caso las operaciones son consideradas como trasformaciones cualitativas (aumento, disminución).

Se observa que las estrategias de comparación formal y de evaluación son las que conducen en menos ocasiones a la respuesta correcta, siendo el porcentaje de respuestas en ambos casos inferior al 50%, frente al 67 y 88 % de las estrategias reescritura y cálculo. Además, el tipo de estrategia utilizada en la justificación de la equivalencia de las expresiones depende de si éstas son numéricas o algebraicas. Cuando las expresiones son algebraicas la estrategia más frecuente es la comparación formal (42%), seguida de la reescritura (22%). En el caso de las expresiones numéricas la estrategia más utilizada es el cálculo (72%). Incluso en los cursos superiores los alumnos tienden a utilizar el cálculo salvo en expresiones que corresponden a la forma típica de aplicación de propiedades aritméticas básicas. No obstante, para la mayoría de los alumnos, el tipo de estrategias utilizadas en las expresiones numéricas y algebraicas es diferente.

En sexto de Educación Primaria y primero de Educación Secundaria la tendencia a evaluar las expresiones, incluso cuando son algebraicas, es mayor que en los cursos superiores en los cuales predomina la reescritura de las expresiones.

A continuación, comentamos los errores detectados por estos autores distinguiendo entre los distintos tipos de justificaciones señaladas.

<u>Comparación formal.</u> Los errores más frecuentes parecen ser generalizaciones de la propiedad asociativa y conmutativa. Los alumnos muestran no dar especial importancia a los paréntesis considerando que éstos no afectan a la equivalencia de las expresiones, siempre y cuando las letras y los signos operacionales no cambien de posición (ej., $a-(b-c)$ es supuesto equivalente a $(a-b)-c$). En el caso de las expresiones basadas en la propiedad conmutativa, el error más frecuente es suponer la conmutatividad de la resta o aplicar la conmutatividad a partes de las expresiones que no están entre paréntesis (ej., $a-b+c$ es supuesto equivalente a $a-c+b$ porque $b+c$ es equivalente a $c+b$).

Un error menos frecuente consiste en comparar únicamente las expresiones contenidas en los paréntesis, exigiendo su igual como condición necesaria para tener la equivalencia de las expresiones (ej., $a+(b-c)$ es supuesto no equivalente a $(a+b)-c$). Los autores interpretan que esta supuesta ley, aplicada por los alumnos, procede de la regla que da prioridad en el cálculo a los paréntesis: "para calcular una expresión que contiene paréntesis, empezar por el paréntesis".

Reescritura. En error más frecuente en el caso del uso de este tipo de estrategia es no cambiar los signos al eliminar los paréntesis. Este error muestra la falta de importancia que los alumnos otorgan a los paréntesis y puede ser considerado como una sobre-generalización de la propiedad asociativa.

Cálculo. En este caso los principales errores se producen en el cálculo de expresiones que contienen paréntesis y en el cálculo de expresiones numéricas de la forma $b-a$ con $b<a$, siendo, en la mayoría de los casos, asignado el valor numérico de $a-b$. Alumnos de sexto de Educación Primaria y primer curso de Educación Secundaria afirman que dicha operación $b-a$ no se puede calcular y alumnos de segundo de Educación Secundaria cometen errores al operar números negativos. En el cálculo de expresiones con paréntesis los alumnos cometen tres tipos de errores:

- Cuando la expresión entre paréntesis se encuentra a la derecha, operan primero el paréntesis y luego interpretan la expresión resultante de derecha a izquierda (ej., Dan como respuesta 7 a la cadena de operaciones $15-(6+2)$ operando $6+2=8$ y $8-15=7$; Dan como respuesta 11 a la cadena de operaciones $14-(7+4)$ operando $7+4=11$ y $11-14=3$).
- Cuando eliminan un paréntesis que va precedido de un signo menos no cambian el signo de la operación interior al paréntesis ó realizan un cambio de signos incorrecto (ej., $18-(10-7)=18+10-7$ ó $18-(10-7)=18-10-7$).
- Tras eliminar correctamente los paréntesis, operan como si éstos aun estuvieran en la expresión (ej., $14-(9+3)=14-9-3=14-6=5$).

Evaluación. En este caso los errores más frecuentes tienen lugar al evaluar el resultado de las trasformaciones realizadas en los símbolos al ser tratados como entidades no cuantificadas y no tener en cuenta los paréntesis. En algunos casos, cuando las expresiones incluyen paréntesis al final, los alumnos empiezan calculando el paréntesis y a continuación interpretan la expresión procediendo de derecha a izquierda, como también ocurre al realizar el cálculo de dichas expresiones.

En general, los autores identifican errores que corresponden a falta de conocimiento (ej., no saben como operar números negativos), otros que corresponden a restricciones en la aplicación del conocimiento que poseen los alumnos (ej., sólo reconocen la propiedad asociativa en ejemplos típicos), y un último tipo consistente en sobre-generalizaciones de las condiciones en las que se puede aplicar una propiedad o ley (ej., suponen la conmutatividad de la resta). Los alumnos muestran una rica base de conocimiento aritmético, sin embargo, este conocimiento no constituye una estructura coherente, no se muestra coordinado.

Liebenberg et al. (1999) realizan un estudio con 40 alumnos de sexto de Educación Primaria, en el que analizan el modo en que construyen expresiones aritméticas equivalentes, así como las estrategias que utilizan para juzgar la equivalencia de pares de expresiones aritméticas sin realizar ningún cálculo.

La mayoría de estos alumnos procede en la construcción de las expresiones equivalentes de forma procedimental, es decir realizando operaciones. Cuando los alumnos debían juzgar la equivalencia de dos expresiones dadas, sin realizar ningún cálculo, 75% de los alumnos consideró diferentes las expresiones (208 + 59) x 61 x 48 y 208 + 59 x 61 x 48 apreciando la presencia de los paréntesis. Un alumno consideró equivalentes ambas expresiones por involucrar los mismos números y el resto aplicaron reglas incorrectas para justificar la equivalencia. En el caso de las expresiones (415 x 58) x (232: 29) y 415 x 58 x 232: 29 un 50% de los alumnos razonó la no equivalencia de las expresiones haciendo referencia a la diferencias existentes en el proceso expresado por cada una de ellas. Los demás alumnos consideraron equivalentes ambas expresiones alegando la mismidad de números en ambas expresiones (1), la mismidad de operaciones (1), considerando que la multiplicación siempre se hace antes que la división (8) y reconociendo que la segunda expresión puede calcularse de igual forma que la primera (8).

Un estudio de Linchevski y Livneh (1999) analiza también el modo en que los alumnos juzgan la equivalencia de expresiones aritméticas, abordando, además, otros aspectos, con la intención de demostrar que las dificultades de comprensión de las propiedades estructurales del sistema algebraico que manifiestan los alumnos, se originan en su comprensión de la estructura aritmética.

En este estudio participan 53 alumnos de sexto curso de Educación Primaria y primer curso de Educación Secundaria los cuales conocían el orden de las operaciones y el uso de los paréntesis, pero aun no habían sido introducidos al álgebra ni a los números negativos.

Linchevski y Livneh prestaron atención al orden en el que los alumnos realizaban las operaciones en expresiones tales como 5 + 6 x 10 = □, a la separación de un término de su operación asociada en expresiones tales como $50-10+10+10$ ó $926-167+167$, que los alumnos debían resolver de la forma más rápida, y a "saltar sobre un término"[41] en expresiones tales como $217+175-217+175+67$ en las que los alumnos tenían que detectar la cancelación de términos.

A partir de estas actividades los autores observaron, en relación con el orden de las operaciones, que la mayoría de los alumnos alteraba el orden de las operaciones en la expresión 5 + 6 x 10 procediendo de izquierda a derecha. Sin embargo, en las expresiones en las que aparecía un signo menos (ej., 17 – 3 x 5) lo utilizaban mentalmente como símbolo separador de la expresión. Este comportamiento ha sido también observado por Herscovics y Linchevski (1994) en contextos algebraicos. En total sólo 14 de los 53 alumnos no encontraron dificultad en el orden de las operaciones.

Los alumnos hicieron un uso adecuado de los paréntesis en la expresión 8 x (5 + 7) = □, sin embargo, la mayoría no reconoció como equivalentes las expresiones $926+167-167$ y $926-(167+167)$ y un 40% de los alumnos consideró equivalentes las expresiones $926-(167+167)$ y $926-167+167$. Según la explicación de un alumno los paréntesis sólo debían ser considerados a la hora de realizar la operación. En estos casos los alumnos fallaron en reconocer la equivalencia al centrarse únicamente en la estructura de superficie de la expresión. Similarmente ocurrió en las expresiones $926+167-167$ y $926-167+167$.

En un gran número de las expresiones propuestas, los alumnos separaron algún término de su operación asociada. Por ejemplo en las expresiones $27-5+3$ y

[41] Linchevski y Livneh (1999) se refieren con la expresión "saltar sobre un término" al comportamiento mostrado por algunos alumnos de saltarse un término pero adjudicar su operación a otro término. Por ejemplo los alumnos abordaban la expresión 115 – n + 9 = 61 restando 115 y 9, obteniendo (115 – 9) – n = 61.

24:3 x 2 realizaron primeramente las operaciones $5+3$ y 3 x 2 antes de restar y dividir respectivamente. Mientras que algunos alumnos siempre mostraron este comportamiento otros sólo lo manifestaron en algunas de las expresiones y sólo 6 de los 53 alumnos no mostró esta dificultad en ninguna ocasión. Este modo de operar conducía a los alumnos a cálculos erróneos y les ocasionaba dificultades para detectar la equivalencia de expresiones tales como $926+167-167$ y $926-167+167$. Los alumnos tendían a poner un paréntesis mental después del signo menos de esta última expresión.

En ocasiones, cuando los alumnos tendían a separar algún término de su operación y se les cuestionaba sobre su interpretación de la expresión se mostraban inseguros de lo que estaban haciendo.

Los alumnos mostraron tendencia a proceder de izquierda a derecha, mostrándose en ocasiones reacios a operar en otro orden. Esta tendencia junto con el separar términos de su operación asociada impidió a, aproximadamente, un 40% de los alumnos reconocer la cancelación de términos en expresiones de suma y resta tales como $237+89-89+267-92+92$. En este tipo de actividad también se manifestó la dificultad de "saltar sobre uno de los términos" en expresiones tales como $217+175-217+175+67$ en la que los alumnos cancelaron los términos 175 (28%) o, incluso, la suma $217+175$ con $-217+175$ (24 %). Esta dificultad se manifestó en la mitad de los alumnos.

Tras la realización de sumas parciales, los alumnos se mostraban dubitativos sobre como proseguir. Así en la expresión $195+7-117+39$, al pedirles que primero operasen conjuntamente los términos con igual número de dígitos, 21% restaron los resultados obtenidos, 14% no supo que hacer y un 64 % procedió correctamente a sumar ambos resultados (aunque en algunos casos tras dudar durante un largo periodo de tiempo). Cuando los alumnos no sabían como operar ambos resultados elegían la operación más repetida en la expresión o a la que ocupaba el lugar central.

Este estudio de Linchevski y Livneh (1999) permite observar que muchas de las dificultades detectadas en contextos algebraicos (ver apartado 5.2.4.2) también se manifiestan cuando los alumnos abordan la resolución de expresiones aritméticas. El análisis de las respuestas de los alumnos a los distintos tipos de expresiones propuestas permite a estos autores apreciar que el modo en que los alumnos perciben expresiones diferentes y las estructuras con las que las asocian de forma espontánea, depende de la combinación de números que componen la expresión. Ciertos números parecen invitar a particiones incorrectas de las expresiones. Según estos autores ante una expresión como $217-17+69$ los alumnos tienden a proceder de izquierda a derecha, mientras que en $267-30+30$ tienden a separar el término 30 de su operación y a operar $30+30$. De este modo se da explicación al comportamiento un tanto azaroso de los alumnos en relación a la estructura matemática al que alude Greeno (1982) (Linchevski y Livneh, 1999).

Los autores conjeturan que este comportamiento puede ser debido a que los alumnos generalizan modos en los que fueron inicialmente enseñados o a que se manifiestan ciertos comportamientos mentales que están fuera de su control y que dan significado a las ideas o hechos que se abordan. Independientemente de la causa, insisten en la importancia de abordar de forma previa a la enseñanza del álgebra la comprensión de la estructura de las expresiones con la intención de que los alumnos sean capaces de usar estructuras equivalentes de una expresión de manera flexible y creativa.

En conexión con el estudio de Linchevski y Livneh, que muestra que la comprensión de las expresiones aritméticas y las expresiones algebraicas está relacionada, destaca un estudio longitudinal de dos años de duración, con cuatro periodos de intervención de unas 12 sesiones, en el que Subramaniam y Banerjee exploran dicha relación (Banerjee y Subramaniam, 2004, 2005; Subramaniam y Banerjee, 2004).

Antes de explicar en que consiste este estudio es importante describir una idea principal de estos autores en relación con la enseñanza dirigida a la transición entre la aritmética y el álgebra. El concepto de "término", entendido como el par formado por un número y el símbolo operacional que le precede, es utilizado por Subramaniam y Banerjee como pieza clave en la conexión entre las expresiones aritméticas y algebraicas (Banerjee y Subramaniam, 2004).

Los autores observan que la idea de término no es introducida a los alumnos hasta el aprendizaje del álgebra para la introducción de las reglas para la manipulación y simplificación de expresiones, no siendo relacionada con otros conceptos como el de igualdad ni dotada de significado en contextos aritméticos (ej., +4 es "4 más" y -5 es

"5 menos"). De este modo se limita el poder de este concepto, el cual puede ser utilizado para ayudar a los alumnos a percibir la estructura de las expresiones aritméticas y a observar el paralelismo existente entre las expresiones aritméticas y las algebraicas.

En el estudio de estos autores, la idea de término, junto a la de igualdad de expresiones, es clave en la enseñanza dirigida a la comprensión de la estructura de las expresiones aritméticas, siendo primeramente introducida para analizar las expresiones y posteriormente relacionada con el orden de operaciones, para darle significado a dicho conjunto de reglas. No obstante, los resultados no permiten confirmar esta hipótesis, aunque sugieren ciertas evidencias a su favor.

Los autores comparan el rendimiento de diferentes grupos de alumnos. Todos recibieron una introducción al álgebra y algunos de ellos también enseñanza sobre las expresiones aritméticas, enfatizando sus aspectos estructurales en el contexto de la equivalencia de expresiones. Los resultados muestran que los alumnos son capaces de percibir la estructura de expresiones aritméticas a partir del uso de la idea de "término", no requiriendo realizar el cálculo del valor numérico de las expresiones para su comparación. En algunos casos refirieron a los términos por su posición en vez de referir específicamente al número y signo que lo forma. Estos alumnos dieron muestras del uso de pensamiento relacional al comparar expresiones aritméticas de suma y resta.

A lo largo del periodo en que trascurre el estudio los alumnos van mostrando una mayor comprensión estructural, aunque el progreso es lento, mostrando que el desarrollo de conocimiento de la estructura de la aritmética es un proceso largo y difícil. Los autores también observan que algunos alumnos realizaban la comparación de expresiones de forma procedimental, como un algoritmo, aunque esta tarea había sido diseñada y presentadas a los alumnos con un enfoque estructural.

Se observa un progreso en el uso de la regla del orden de las operaciones y de los paréntesis aunque, en algunas ocasiones, se manifiesta la tendencia de proceder de izquierda a derecha al encontrar expresiones de mayor complejidad tales como 3 x (6 + 3 x 5) o al sustituir valores numéricos en expresiones algebraicas. Si bien inicialmente los alumnos muestran repetidamente el error señalado por Linchevski y Livneh de separar un número del signo menos que le precede, la enseñanza centrada en la idea de término favoreció la eliminación progresiva de este error.

5.2.4.2 En contextos algebraicos

Booth (1982, 1989, 1999), Kieran (1988, 1992), Steinberg, Sleeman y Ktorza (1990), Herscovics y Linchevski (1994), Linchevski y Herscovics (1994), Pirie y Martin (1997), Liebenberg et al. (1999), son algunos de los investigadores que han observado la falta de conocimientos y comprensión de los aspectos estructurales de la aritmética que muestran los alumnos al trabajar en contextos algebraicos. Ésta es señalada como una de las principales causas de las dificultades que encuentran los alumnos en la comprensión de la estructura algebraica (Booth, 1989, 1999; Kieran, 1992). "*La habilidad de comprender y utilizar el álgebra con el manejo de las convecciones notacionales requiere que los estudiantes adquieran primero una comprensión semántica de la aritmética*" (Booth, 1989, p. 58).

Estos estudios hacen referencia a alumnos de Educación Secundaria ya que es en estos niveles donde se trabaja el uso y manipulación del simbolismo algebraico.

Booth (1982) investigó el tipo de expresiones algebraicas que los alumnos consideran equivalentes. En este estudio observó que los alumnos interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto ignorando las convenciones del orden de las operaciones. Los alumnos mostraban haber adoptado la siguiente regla: "Una expresión algebraica se resuelve siempre de izquierda a derecha a menos que el contexto especifique que otra operación debe realizarse previamente". Según esto, un par de expresiones pueden ser equivalentes en un contexto y no serlo en otro. Este modo de proceder elimina la necesidad del orden de las operaciones o el uso de paréntesis, reglas que sólo son utilizadas en actividades específicas para su práctica.

Wagner, Rachlin y Jensen (1984) observaron que los alumnos de Educación Secundaria tienen dificultad en tratar expresiones algebraicas con muchos términos como una sola unidad y no perciben que la estructura superficial de por ejemplo $4(2r+1)+7=35$ es igual que la de $4x+7=35$ (Kieran y Filloy, 1989).

Steinberg et al. (1990) analizan la comprensión de ecuaciones equivalentes por alumnos de segundo y tercer curso de Educación Secundaria que habían trabajado en el aula la resolución de ecuaciones lineales simples sumando un mismo número o expresión a ambos miembros. La mayoría de los alumnos era eficaz en dicha resolución. Estos alumnos mostraron poca comprensión de la equivalencia de expresiones pese a que la mayoría se obtenían una a partir de la otra mediante alguna trasformación sencilla (ej., $x+2=5$ y $x+2-2=5-2$ ó $x+2-9=5-9$). Los resultados muestran que la mayoría de los alumnos no estaban seguros o no percibían que las trasformaciones realizadas a las ecuaciones conservaban la solución pese a saber como utilizar las trasformaciones para resolver ecuaciones simples.

En particular, aproximadamente la mitad de los alumnos no fueron capaces de indicar qué pasaría si un número fuera añadido a un miembro de la ecuación o identificar ecuaciones equivalentes. Los alumnos que no habían estudiado álgebra basaron la mayoría de sus respuestas sobre la equivalencia de ecuaciones en conocimiento aritmético. La mayoría de los otros alumnos transformaron una de las ecuaciones moviendo un término al otro miembro afirmando la equivalencia de las ecuaciones si mediante dicha transformación se obtenía una ecuación a partir de la otra.

Casi un tercio de los alumnos juzgó la equivalencia de las expresiones principalmente mediante el cálculo de las soluciones y otro tercio mediante la observación o la aplicación de alguna trasformación. Estos últimos utilizaron, incluso, algunas trasformaciones no habituales en la resolución de ecuaciones. Los alumnos que dieron explicaciones basadas en trasformaciones de las ecuaciones presentaron un porcentaje de acierto más elevado que los que calcularon las soluciones de las ecuaciones.

Se observa, en particular, que juzgar la equivalencia de un par de ecuaciones era más sencillo cuando la transformación realizada era la que se utilizaría para la resolución de la ecuación (ej., $x+2=5$ y $x+2-2=5-2$ en vez de $x+2=5$ y $x+2-99=5-99$).

Los tipos de explicaciones incorrectas dadas por los alumnos, al juzgar la equivalencia de pares de ecuaciones, consistían en haber comparado únicamente uno de los miembros de ambas ecuaciones, asumir que a + x = ax, exigir que aparezcan los mismos números en ambas ecuaciones, creer que el restar un número en ambos miembros da lugar a una ecuación que no es equivalente por tener menos o estar restándole doblemente un número y basarse únicamente en aspectos de la estructura superficial de las ecuaciones ("su aspecto es diferente", "una ecuación tiene más números").

Los resultados obtenidos conducen a los autores a señalar la necesidad de abordar en la enseñanza la noción de equivalencia de ecuaciones, lo que puede ayudar a detectar y evitar que los alumnos desarrollen ideas tales como las que evidencian las explicaciones incorrectas detectadas en este estudio.

Herscovics y Linchevski (1994) y Linchevski y Herscovics (1994) identifican algunos obstáculos asociados con la estructura matemática vinculados al lenguaje algebraico, semejantes a los manifestados en contextos aritméticos: fallo en la percepción de la cancelación de expresiones, visión estática del uso de los paréntesis, falta de aceptación del signo igual como expresión de una equivalencia, un orden incorrecto de las operaciones, falta de habilidad para seleccionar la operación apropiada en la realización de sumas parciales, separación de un número del signo operacional que le precede y "saltar sobre un término".

Pirie y Martin (1997) señalan la tendencia de los alumnos a interpretar las ecuaciones como sucesos temporales, no estáticos, leyéndolos de izquierda a derecha. Así $2x-3=5$ es interpretado como que tengo el doble de algo (primer estado), entonces el resto 3 (segundo estado), y después obtengo como resultado 5 (estado final). Los alumnos tienden a no considerar la ecuación como un todo, en un instante, sino como una acumulación de ítems y operaciones que se realizan en el tiempo.

En este trabajo los autores presentan un enfoque para la introducción de la resolución de ecuaciones lineales, en la Educación Secundaria, que persigue su consideración como entidades estáticas a analizar, no como instrucciones en las que actuar para obtener un resultado. La propuesta difiere de los métodos tradicionales de realizar la misma operación en ambos miembros o pasar términos de un miembro a otro cambiando la operación que se les asocia por su inversa ("cambiar lados, cambiar signos"). En este estudio los alumnos son animados a descubrir un método para la resolución de igualdades abiertas de la forma □ + □ + □ + □ + □ - 10 = □ + □ + □ + 4 y □ + □ + 18 = □ + 53, a partir de la búsqueda de algún patrón que ayude a resolver este tipo de ecuaciones. No se trabaja con ninguna representación física de las ecuaciones (ej., por medio de una balanza) ni se establece conexión entre las ecuaciones y la realidad. Cuando los alumnos obtuvieron un método para resolver este tipo de igualdades abiertas, el docente reemplazó el recuadro por una incógnita simbólica introduciendo así a los alumnos en el lenguaje formal de las ecuaciones. En esta etapa el uso de calculadoras facilitó la automatización del método de resolución descubierto por los alumnos.

Estos alumnos desarrollaron un método eficaz para la resolución de ecuaciones lineales de forma personal, no mostrando las dificultades que son habituales en la resolución de ecuaciones lineales asociadas a la introducción de variables múltiples ($ax = b$ con $a \neq 1$), a la disposición de la variable en el miembro derecho de la ecuación, a la aparición del signo menos en al ecuación y el paso del uso de recuadros o figuras para representar la incógnita al uso de símbolos.

Liebenberg et al. (1999) trabajan con alumnos de tercero de Educación Secundaria el concepto de equivalencia algebraica de expresiones algebraicas, diferenciándolo de la equivalencia numérica de expresiones algebraicas, es decir la equivalencia de las expresiones para un cierto valor de la variable. En este estudio observan que los alumnos no aceptan el proceso de transformación de una expresión como prueba de la equivalencia de ambas expresiones, la dada y la obtenida a partir de la transformación. Además, los alumnos confunden los conceptos de equivalencia numérica y equivalencia algebraica.

Palarea (1998) destaca el uso de los paréntesis como una importante fuente de dificultades observando que los alumnos no requieren de su uso en contextos aditivos ni multiplicativos, donde tienden a proceder de izquierda a derecha, aunque muestran mejor manejo de ellos en expresiones basadas en la propiedad distributiva. Se identifica la dificultad de aceptación de la falta de clausura.

Ruano, Socas y Palarea (2003), en un trabajo de análisis de los errores cometidos por alumnos de cuarto curso de Educación Secundaria y primer curso de Bachillerato en un cuestionario de tareas algebraicas de sustitución formal, generalización y modelización, detectan manifestaciones de diferentes dificultades, algunas ya mencionadas. En especial destaca la necesidad de clausura que muestran los alumnos al trabajar con las expresiones algebraicas, la particularización de expresiones algebraicas dándoles valores numéricos al no encontrar sentido en el uso del lenguaje algebraico en algunos contextos, el uso inadecuado o no uso de paréntesis, la concatenación de igualdades y la sobre-generalización de la propiedad distributiva de la suma a la operación multiplicación.

Hoch y Dreyfus (2004) analizan el efecto de los paréntesis en el éxito al resolver ecuaciones algebraicas y el uso de sentido estructural en esta tarea de un grupo de 92 alumnos de 16 a 17 años que estaban cursando un nivel intermedio o avanzado de matemáticas. La tarea propuesta a cada alumno consiste en dos ecuaciones en las que aparecen repetidos algunos términos para facilitar la apreciación de subestructuras, dentro de la ecuación o dentro de uno de los miembros, y el uso de pensamiento relacional en su resolución. Una de las ecuaciones involucra la variable en el miembro izquierdo (ej., $1-\frac{1}{n+2}-(1-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{110}$) y la otra en ambos miembros (ej., $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1})$).

Menos del 20% de los alumnos utilizaron sentido estructural en al menos una de las ecuaciones, siendo este más frecuente entre los alumnos que cursaban unas matemáticas más avanzadas. Sólo 5 de los 18 que dieron muestras del uso de este sentido lo utilizaron en ambas ecuaciones. La presencia de la variable en ambos miembros facilitó la observación de la estructura por parte de los alumnos; en menor medida lo hizo también la presencia de paréntesis. Los paréntesis sirvieron para alertar a algunos alumnos de donde centrar su atención, facilitando su observación de términos repetidos. Al observar conexiones entre estructuras, en este caso relaciones de igualdad, los alumnos podían elegir la transformación más adecuada a realizar. Estos alumnos utilizaron pensamiento relacional tras haber identificado en las expresiones o ecuaciones ciertas subestructuras o términos parecidos. No obstante, algunos alumnos realizaron algunas trasformaciones tales como la eliminación de paréntesis antes de hacer uso de pensamiento relacional.

En la mayoría de los casos, los alumnos procedieron a resolver las ecuaciones multiplicando todos los términos por un denominador común y cancelando posteriormente términos repetidos. Algunos alumnos explicaron que no miraban a la ecuación en conjunto sino que consideraban cada miembro de forma independiente, siendo la eliminación de los paréntesis la primera cosa que se disponían a realizar. Al proceder de este modo los alumnos cometieron numerosos errores de cálculo y no identificaron las soluciones extrañas. En cambio, los alumnos que utilizaron sentido estructural (y pensamiento relacional) obtuvieron la respuesta correcta rápidamente.

Los autores observan que los alumnos que utilizaron sentido estructural mostraron la habilidad de ver una expresión o ecuación algebraica como una entidad, no procediendo inmediatamente a la realización de trasformaciones algebraicas.

Al proponer la misma tarea a un grupo de alumnos de un curso inferior, que habían trabajado más recientemente la resolución de ecuaciones lineales, los autores detectaron un mayor uso de sentido estructural (y de pensamiento relacional). Por este motivo Hoch y Dreyfus afirman que puede ser posible enseñar a prestar atención a la estructura de las expresiones y ecuaciones algebraicas pero que se necesitan encontrar mejores métodos para favorecer la retención de este conocimiento.

En un trabajo posterior (Hoch y Dreyfus, 2005), estos autores piden a alumnos de 15 años, que habían mostrado un nivel alto en matemáticas en el curso académico previo, que factoricen las expresiones $(x-3)^4-(x+3)^4$ y x^4-y^4, haciendo uso de la fórmula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Un 7.5% de un total de 160 factoriza correctamente la primera de estas expresiones, y un 77% de 190 alumnos la segunda. El bajo porcentaje de alumnos que factoriza correctamente la primera expresión es interpretado por los autores como evidencia de una alta falta de sentido estructural de los alumnos, ante la falta de capacidad de los alumnos de aplicar una fórmula en un contexto no familiar.

En otra investigación con alumnos de la misma edad, los autores comparan las habilidades de manipulaciones de expresiones algebraicas (despreciando errores menores), de los alumnos, con su sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2006). De los 165 alumnos participantes, un tercio muestra un alto sentido estructural, la mitad un sentido estructural medio y un sexto un sentido estructural bajo. Por otra parte, sólo un sexto de los alumnos muestra “altas habilidades” de manipulación, un tercio “habilidades medias” y la mitad “habilidades bajas”.

Los resultados del estudio evidencian que los alumnos que muestran un bajo sentido estructural también ponen de manifiesto poca habilidad en la manipulación de expresiones algebraicas. Cabe señalar que un 28 y un 17 % de los alumnos ponen de manifiesto bajas habilidades de manipulación pese a mostrar un sentido estructural medio y alto respectivamente. Además, sólo un 5% de los alumnos que evidencian un alto sentido estructural también ponen de manifiesto altas capacidades de manipulación. No obstante, los alumnos que hicieron uso de sentido estructural cometieron menos errores. Estos resultados conducen a los autores a cuestionarse las interrelaciones entre el sentido estructural y las habilidades de manipulación.

CAPÍTULO 6

Resumen y conclusiones de la parte teórica

En este capítulo se resumen los capítulos previos, extrayéndose conclusiones de interés para nuestro trabajo. Sirve para resumir y establecer los principales componentes del marco teórico desde el que se aborda la parte empírica de la investigación.

6.1 De la aritmética, el álgebra y la propuesta Early-Algebra

Existe una insatisfacción generalizada con la tradicional y actual enseñanza del álgebra que se ve enfatizada por la importancia que se le reconocen a los modos de pensamiento algebraicos y al uso del simbolismo algebraico dentro de la actividad matemática. Esta insatisfacción ha conducido, en particular, al planteamiento y desarrollo de la propuesta Early-Algebra, la cual está recibiendo una destacada atención desde la investigación en Educación Matemática en las últimas dos décadas.

Esta propuesta, que tiene antecedentes que se remontan a los trabajos de la Escuela Soviética, está basada en una amplia concepción del álgebra y consiste en la integración de modos de pensamiento algebraicos en el ámbito de las matemáticas escolares contempladas en el currículo. Se considera que estos modos de pensamiento tienen potencial para enriquecer la actividad matemática escolar y emerger con naturalidad de las matemáticas propias de esta etapa.

La propuesta Early-Algebra surge, principalmente, debido a los cambios producidos en la concepción de la educación algebraica y el pensamiento algebraico, a la observación de que los alumnos jóvenes pueden hacer más matemáticas de las que se pensaba en un principio, y a la incorporación de las nuevas tecnologías a la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

En esta propuesta se distinguen dos enfoques: promover el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños o utilizar representaciones que permitan a los alumnos operar en un nivel más elevado de generalidad. Se dejan en un segundo plano las investigaciones que hacen referencia a falta de capacidades cognitivas para el aprendizaje del álgebra, hasta una cierta edad o nivel de desarrollo cognitivo, poniéndose el énfasis en desarrollar las capacidades de pensamiento algebraico que ponen de manifiesto los alumnos.

Si bien es cierto que no existe una concepción univoca de qué abarca el álgebra desde esta nueva perspectiva más amplia, los estudios consultados coinciden en señalar la inclusión de aspectos como la modelización y el estudio y generalización de patrones y relaciones. Otros componentes mencionados son el estudio de relaciones funcionales, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo y el estudio de procedimientos para resolver problemas.

Los límites de esta propuesta no están aun claramente definidos y existen numerosas cuestiones abiertas a abordar desde la investigación. Se manifiesta como necesario explorar, no sólo cuestiones relativas a su aplicación en los niveles de la Educación Primaria, sino también y de manera destacada, su conexión con la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria y, en especial, con la introducción formal del álgebra. Los estudios realizados hasta el momento muestran su potencial así como la importancia y riqueza del pensamiento algebraico y la multiplicidad de contextos matemáticos en los que puede ponerse en juego. Algunos de los estudios, como ocurre con nuestra investigación, se centran en la integración del álgebra en el contexto de la aritmética, explorándose diversidad de aspectos que hacen referencia al estudio de patrones, relaciones numéricas y de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, a la generalización, y a la manipulación del simbolismo aritmético y algebraico. Enfoque que conduce a una enseñanza de la aritmética más atractiva y promueve un aprendizaje con comprensión.

En particular, destaca la visión de Hewitt (1998) y Mason, Graham y Johnston–Wilder (2005) sobre la conexión entre la aritmética y el álgebra, la cual resulta especialmente adecuada para la puesta en práctica del Early-Algebra.

La propuesta va en contra de que la enseñanza de la aritmética preceda a la del álgebra, proponiendo la integración de ambas y, en especial, el aprovechamiento de sus conexiones y la disminución de las diferencias “creadas” en su consideración en el ámbito escolar. Entre las diferencias que actualmente existen entre ambas que pueden ser no sólo matizadas, sino eliminadas, se identifican (a) la diferencia de enfoques, computacional vs estructural, en el modo de interpretar las expresiones y en los objetivos que guían la actividad matemática en ambas sub-áreas, (b) la unidireccionalidad de la aritmética frente a la bidireccionalidad del álgebra, (c) la diferencia de significado del signo igual (d) el papel de los símbolos, como etiquetas vs como variables e incógnitas, (e) el número de incógnitas consideradas, una versus varias, y (f) el tipo de generalización realizada, con números concretos vs con relaciones entre números. También se hace necesario prestar atención a la necesidad de clausura que experimentan los alumnos al trabajar con expresiones aritméticas y algebraicas.

Se destaca la idea de procepto que ayuda a ilustrar parte de la complejidad del simbolismo aritmético y algebraico y que señala un importante aspecto a trabajar desde la enseñanza. Esta idea hace referencia a la dualidad del simbolismo aritmético y algebraico basada en la distinción entre procesos y objetos.

La necesidad de promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas, ante la general insatisfacción con el aprendizaje matemático que adquieren los alumnos a lo largo de la Educación Primaria y Secundaria, da mayor relevancia a la implantación de esta propuesta y, tal vez, a la extensión (generalización) de este enfoque, en la medida de lo posible, a otros modos de pensamiento matemáticos que se manifiesten como fundamentales.

6.2 Del pensamiento relacional

Uno de los términos principales de este trabajo es el pensamiento relacional. Este término ha sido utilizado con significado más o menos preciso, según el caso, en las áreas de Psicología y Educación Matemática. En el contexto de la propuesta Early-Algebra ha sido vinculado a la consideración de expresiones e igualdades aritméticas como totalidades, en vez de como procesos a realizar paso por paso, y al uso de propiedades y relaciones aritméticas existentes entre los términos que las componen, para resolverlas o transformarlas.

Partiendo de la definición de Carpenter y colaboradores recogida en el Capítulo 3, y reconociendo la existencia de este tipo de pensamiento en otros contextos, incluso no aritméticos, se han consultado documentos de Lengua, Filosofía, Psicología y Lógica, así como de Educación Matemática, para precisar el significado de los términos pensamiento y relaciones y poder establecer el significado general del término *pensamiento relacional.*

Aunque algunos de los documentos presentan acepciones de los términos pensamiento y relaciones que se alejan de nuestro interés, la búsqueda realizada permite llegar a establecer una definición del pensamiento relacional que, al ser restringida al contexto de expresiones e igualdades aritméticas, es compatible con la acepción utilizada por Koehler, Carpenter y colaboradores, reconociéndose las mismas manifestaciones.

Concretamente la consulta realizada permite definir el pensamiento relacional como la actividad intelectual consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad. Este tipo de pensamiento puede ser asociado con cierta disposición a analizar la estructura de los objetos matemáticos y las relaciones existentes entre sus partes o entre diferentes objetos, pero también puede tener lugar de forma espontánea, como ocurre en ocasiones ante la presencia de ciertas características o relaciones "sobresalientes" de algunos objetos matemáticos.

El uso de este tipo de pensamiento se manifiesta equivalente a lo que Hejny et al. (2006) denominan meta-estrategia conceptual, contraponiéndose a la aplicación de procedimientos estándares tras haber identificado el área a la que pertenece el problema en cuestión, es decir, a las meta-estrategias procedimentales.

En el contexto de las expresiones aritméticas y algebraicas, la acción que define este tipo de pensamiento se aplica a las expresiones para manipularlas o resolver la igualdad o situación planteada, a partir del análisis de su estructura y la apreciación y uso de relaciones entre los términos que las componen. El *pensamiento relacional* se muestra de esta forma vinculado con la parte del álgebra relativa al estudio y generalización de patrones y relaciones.

El uso de pensamiento relacional en este contexto, implica, por tanto, el uso de sentido numérico, de sentido operacional y de sentido estructural; todos ellos constructos que se refieren a diferentes manifestaciones o elementos de un aprendizaje con comprensión de las matemáticas. El cálculo mental y las estrategias de cálculo flexible también corresponden, en algunos casos, a manifestaciones del uso de pensamiento relacional, concretamente cuando pueden identificarse como uso de un pensamiento cuantitativo flexible.

En particular, destacamos el carácter algebraico del pensamiento relacional, lo que señala el potencial de este constructo para la puesta en práctica de la propuesta Early-Algebra, en el contexto de la aritmética. Se ha señalado que este tipo de pensamiento comporta un enfoque estructural, no computacional, de la aritmética, al centrar la atención en la estructura de las expresiones y requerir su concepción como totalidades. También implica el uso de sentido numérico y de sentido operacional y facilita el avance hacia la concepción de las operaciones y expresiones aritméticas como objetos, y no sólo como procesos. Favorece la exploración de la igualdad como la representación de una relación estática entre dos expresiones, la interpretación bidireccional de las igualdades y sentencias, y la exploración, identificación y descripción de patrones y relaciones sobre los números y operaciones. De este modo se observa que este tipo de pensamiento permite abordar, dentro de la enseñanza de la aritmética, aspectos que son habitualmente fuente de dificultades para los alumnos en el aprendizaje del álgebra.

Además de su bondad para el desarrollo de una buena base para el estudio formal del álgebra, el trabajo centrado en el uso y desarrollo de pensamiento relacional favorece un aprendizaje con comprensión de la aritmética y la visión de las matemáticas como una disciplina de ideas conectadas, al centrar la atención del sujeto en las relaciones existentes entre los conceptos matemáticos.

6.3 Del signo igual y las igualdades y sentencias numéricas

Los diferentes documentos consultados nos han permitido apreciar la diversidad de significados del signo igual así como de las nociones de igualdad, equivalencia e identidad, lo que sugiere riqueza y complejidad en el fenómeno de la comprensión del signo igual.

Como se ha observado, los términos igualdad, equivalencia e identidad adquieren en algunos contextos el mismo significado o significados muy próximos, siendo difícil, en ocasiones, establecer los límites entre uno y otro. Se hace necesario, por tanto, precisar de qué modo se van a entender cada uno de estos términos, según el contexto en el que se esté trabajando.

En nuestro caso, reservamos el término igualdad para denominar al modo gráfico de relacionar en la escritura dos expresiones o representaciones que se refieren a un mismo objeto matemático, escribiendo entre ellas un signo igual, así como a la relación existente entre ellas. El término equivalencia se utiliza únicamente para hacer referencia a las relaciones binarias que verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. El término identidad es utilizado para distinguir un tipo de igualdades en las que los objetos matemáticos relacionados vienen dados con el mismo representante.

Con respecto a los significados del signo igual, la consulta de variados documentos de Matemáticas y de Educación Matemática nos ha permitido identificar catorce significados en el contexto de la aritmética y el álgebra escolar; no todos ellos aceptados como significados de referencia dentro de las matemáticas. Algunos de ellos otorgados a este símbolo por los alumnos o en los libros de texto de matemáticas utilizados en Educación Primaria.

Algunos de estos significados están vinculados a una visión computacional de las igualdades (operador, separador, expresión de una acción) o al planteamiento de una actividad concreta (propuesta de actividad de cálculo, expresión de equivalencia condicionada); otros están basados en una visión estructural de la aritmética (equivalencia); otros involucran cierta imprecisión en su significado (indicador de cierta conexión o correspondencia, aproximación), que contrasta con la concreción de la mismidad o equivalencia que este símbolo expresa en otros contextos. Además, difieren en el tipo de expresión a la que dan lugar así como en su unidireccionalidad o bidireccionalidad al ser interpretados.

El significado con el que este símbolo es utilizado depende del contexto en el que se esté trabajando, pudiéndose interpretar una misma igualdad de diferentes modos según la atención se centre, entre otros aspectos, en el objeto representado en cada miembro, en el uso de reglas que se desprenden de la estructura de la aritmética, en el resultado de los cálculos expresadas en cada miembro,… o según las expresiones sean consideradas de forma procedimental o como entidades en sí.

Algunos de los usos imprecisos del signo igual señalados son destacados por los autores como posibles fuentes de posteriores dificultades en la resolución de igualdades abiertas o ecuaciones, pues dificultan que los alumnos perciban con claridad el significado del signo igual en otros contextos y, en ocasiones, conducen a que se le adjudique a este símbolo un significado de "unión multiuso".

El análisis realizado nos permite, además, apreciar cierta imprecisión en el uso, por algunos de los investigadores consultados, de los términos "significado operacional" y "significado aritmético" del signo igual para referir al significado *operador* del signo igual. Se ha observado que éste no es el único significado operacional de este símbolo y que, además, no es su único significado en el contexto de la aritmética.

El listado de significados obtenido presenta diversidad de contextos en los que los alumnos encuentran y hacen uso de este símbolo en el aprendizaje de la aritmética y el álgebra, destacando la necesidad de que, en la enseñanza, se preste atención expresa a su variación en significado de unos contextos a otros, a la estructura de las expresiones en las que es utilizado, así como al modo en que los alumnos integran y dan sentido a esta pluralidad de significados de un mismo símbolo.

Por otra parte, diversos autores referidos en el Capítulo 4 señalan la importancia y potencialidad del trabajo con igualdades y sentencias numéricas, subrayando su papel en el aprendizaje del lenguaje matemático, la comprensión de las operaciones básicas y las relaciones existentes entre ellas, la comprensión del signo igual, el desarrollo de pensamiento relacional, la detección de patrones, la elaboración de conjeturas, la generalización y el hacer explícita dicha generalización, así como para iniciarse en la resolución de ecuaciones, para modelizar y resolver problemas y para aprender a expresar la secuencia de pensamientos involucrada en la resolución de un problema. En particular, en este trabajo se han identificado una serie de propiedades aritméticas, relativas a la estructura aditiva, susceptibles de ser utilizadas en el diseño de igualdades y sentencias numéricas para promover el uso y desarrollo de pensamiento relacional.

En relación con los significados de los términos signo y símbolo, habiendo consultado diversas acepciones, adoptamos la posición reconocida en la semiótica moderna: los símbolos son un tipo de signos en los que la relación con el objeto, al que el signo se refiere, es arbitraria y determinada mediante reglas o convenciones.

6.4 De los antecedentes: resumen, conclusiones y cuestiones abiertas

Estructuramos este apartado en dos partes, al igual que el capítulo previo en el que se han recogido estudios empíricos relacionados con nuestra investigación. La primera parte resume los resultados de estos estudios en relación con la comprensión del signo igual y la resolución de igualdades numéricas; la segunda, los relativos al uso y desarrollo de pensamiento relacional. Se persigue presentar brevemente el conocimiento que aportan los estudios consultados y los interrogantes que dejan abiertos.

6.4.1 Sobre la comprensión del signo igual y la resolución de igualdades numéricas

Igualdades numéricas abiertas de tres términos

Existen variedad de estudios que describen detalladamente las dificultades que encuentran los alumnos en la resolución de igualdades y sentencias numéricas de tres términos, así como factores que intervienen en su resolución: la operación, la posición de la operación y del término desconocido, el tamaño de los números, la existencia de su solución, el método de resolución empleado, la disposición vertical u horizontal de la expresión y, principalmente, la experiencia previa de los alumnos.

Es destacable el modo en que proceden los alumnos al encontrar alguna igualdad de tres términos que no les resulta familiar, que no comprenden o que les resulta más difícil, ya sea de uno u otro tipo. En estos casos los alumnos violan las convenciones de la aritmética sobre la interpretación y escritura de las igualdades y expresiones aritméticas. Un mismo alumno puede resolver correctamente igualdades numéricas abiertas de suma de la forma a + □ = c y □ + b = c y, en cambio, hacer una lectura inversa o combinar los términos de la igualdad, según su criterio, al encontrar sentencias de resta de las mismas formas (a – □ = c y □ – b = c). También tienden a violar las convenciones del simbolismo aritmético cuando encuentran la operación en el miembro derecho de la igualdad, en vez del izquierdo, o cuando encuentran igualdades sin solución en el conjunto de los números naturales.

En general, a los alumnos les resultan más fáciles las igualdades de suma que las de resta, las que tienen las operaciones en el miembro derecho que las que las tienen en el izquierdo y, dentro de cada tipo, las que tienen como término desconocido el c, el b y, en último lugar, el a. También se observa que los alumnos no resuelven correctamente las igualdades y sentencias cuando no son capaces de leerlas.

Los estudios evidencian que cuando los alumnos encuentran dificultades en las igualdades numéricas abiertas tienden a combinar los términos que las componen de alguna manera posible, según les parece más conveniente en función de la magnitud relativa de los términos y, posiblemente, de los signos operacionales que aparecen. En general, como señalan Lindvall e Ibarra (1978), para los alumnos, las igualdades no son expresiones de una relación sino ciertas operaciones a realizar y un resultado.

Los alumnos no reconocen la propiedad simétrica de la igualdad, ni muchas de las convenciones que regulan el simbolismo aritmético. Probablemente, como sugieren los estudios, debido a falta de experiencia previa con igualdades no convencionales. Entre sus reacciones destaca la lectura de las igualdades de derecha a izquierda, cuando la operación se dispone en el miembro derecho, o la lectura de los números por un lado y de los signos operacionales por otro, aplicando a los números la operación que indica el signo, procediendo del modo que consideran más conveniente.

Al resolver igualdades de resta, algunos alumnos aplican de forma implícita una supuesta conmutatividad de la resta, al considerar que el resultado de restas en las que el minuendo es menor que el substraendo es igual que el de su opuesta (ej., $5-10=5$).

Se observa que los alumnos no reconocen las expresiones aritméticas como totalidades, y menos aún como representaciones de un número, sino como números y operaciones que aplicarles. Los alumnos muestran un enfoque procedimental, no estructural y mucho menos proceptual, en su modo de abordar las igualdades.

El rendimiento de los alumnos en el cálculo es mayor cuando los hechos numéricos se disponen de manera vertical. Aunque probablemente el formato vertical incita en mayor medida a la aplicación de algoritmos estándares, se observa que presenta una estructura más familiar o con mayor significado para el alumno debido, probablemente, a ser más habitual en su práctica aritmética. La comprensión del formato horizontal no se deriva del vertical y, por lo tanto, es necesario que se aborde en el aula de manera específica.

Diversos estudios permiten apreciar la especial importancia del aprendizaje de las convenciones que regulan la interpretación y trasformación del simbolismo aritmético, como el significado del signo igual en cada contexto, las reglas del orden de las operaciones y del uso de los paréntesis, y la dirección en la que se interpretan o leen las expresiones e igualdades numéricas.

Los comportamientos que muestran los alumnos evidencian falta de comprensión de las igualdades y sentencias, lo cual se ve favorecido por la falta de un contexto que ayude a dar sentido o a intuir el modo en que resuelven la igualdad y la falta de correspondencia unívoca entre la operación expresada en la igualdad y la operación necesaria para resolverla.

Los alumnos resuelven las igualdades mediante métodos de conteo (hacia adelante o hacia atrás), recordando hechos numéricos conocidos, usando algoritmos estándares, por ensayo y error, por adivinación, obteniendo un dígito en cada paso, o mediante otros métodos basados en el uso de pensamiento relacional como transformar la igualdad en otra más sencilla o en otra equivalente, aplicar la relación complementaria de la suma y la resta, o por compensación. La mayor diversidad de métodos se utiliza en las igualdades formadas por números pequeños, donde los alumnos muestran mayor tendencia a aplicar métodos informales. En cambio, cuando encuentran números más grandes tienden a aplicar algoritmos estándares, especialmente en las igualdades de resta. Esto muestra que en las igualdades que les resultan más difíciles los alumnos no suelen, en general, aplicar métodos informales sino que recurren a los métodos estándares, no haciendo uso, por tanto, de pensamiento relacional. Se aprecia así la importancia de trabajar las relaciones aritméticas con números mayores, ya que es en estos casos donde los alumnos parecen tener más dificultades para aplicar su conocimiento de las operaciones y los números.

Es destacable observar la falta de atención prestada en la literatura a igualdades numéricas abiertas de acción con más de dos términos en el miembro que contiene el término desconocido, en especial, aquellas en las que dicho término se dispone en la posición intermedia de la cadena de operaciones, lo que puede dar lugar a dificultades específicas (ej., $13 + \square - 5 = 10$).

Comprensión del signo igual

La enseñanza tradicional de la aritmética contribuye al desarrollo de una comprensión operacional del signo igual, como estímulo para realizar una acción, la cual se mantiene estable a lo largo de los años y no suele ser desafiada hasta el aprendizaje del álgebra. También se favorece una concepción procedimental de la aritmética que conduce a la necesidad de clausura de las expresiones. Los alumnos tienden a proceder de izquierda a derecha, cuando trabajan con expresiones aritméticas, no interpretando las igualdades y sentencias como expresiones de una equivalencia sino como cadenas de cálculos a realizar, y no aceptando igualdades o sentencias de formas no-convencionales (ej., $a = a$, $c = a \pm b$ y $a \pm b = c \pm d$). Incluso cuando encuentran expresiones aritméticas que no incluyen el signo igual, las interpretan operacionalmente introduciendo ellos este símbolo. Cuando los alumnos han de construir sentencias numéricas, proceden en la mayoría de los casos de forma procedimental, realizando cálculos y no dando muestras de uso de pensamiento relacional.

Esta limitada visión de las igualdades y sentencias conduce a los alumnos a dar una variedad de respuestas en igualdades abiertas de no-acción. Según el modo en que dichas respuestas son obtenidas se distinguen los siguientes tipos: el resultado de operar juntos todos los números de la igualdad, el valor numérico de uno de los miembros, concatenaciones de expresiones aritméticas enlazadas por medio del signo igual, la repetición de uno de los términos de la igualdad, el número que iguala el valor numérico de ambos miembros, la suma de los números del miembro izquierdo de la igualdad menos el término del miembro derecho, la suma o resta de dos de los términos del miembro izquierdo, una respuesta inventada.

Se observa que, en ocasiones, los alumnos interpretan de modo diferente el miembro derecho de las igualdades y sentencias del izquierdo, considerando que sólo hay que operar en el miembro izquierdo. Muestran aceptar dualidad o multiplicidad de significados para el signo igual, haciendo uso de uno u otro según el contexto o según las características de la igualdad o sentencia considerada, no siendo para ellos un problema la desconexión de estos significados. Incluso en igualdades o sentencias de acción que expresan hechos numéricos, los alumnos interpretan, en ocasiones, de forma diferente el significado del signo igual en situaciones de suma que de resta, no abstrayendo un significado general para este signo, al menos para este tipo de igualdades o sentencias. También aceptan que una igualdad tenga más de una solución posible.

Se observa, además, que los alumnos que utilizan una mayor variedad de estrategias para abordar la resolución de las igualdades y sentencias, muestran un mayor rendimiento en este tipo de actividad poniendo de manifiesto una mayor conciencia de la estructura de las igualdades o sentencias.

Entre los factores que favorecen el desarrollo de la comprensión operacional del signo igual que manifiestan los alumnos, además de la enseñanza aritmética previa, los autores hacen referencia a la influencia del conocimiento aritmético pre-simbólico, el uso de la calculadora y ciertas limitaciones cognitivas, siendo considerado el periodo de 10 a 13 años como el umbral para la ampliación de esta comprensión.

Los estudios presentados descartan el uso de la calculadora como causa de esta limitada comprensión— aunque en la mayoría de los casos no favorece una comprensión no operacional del signo igual— así como la existencia de limitaciones cognitivas, habiéndose probado la capacidad de los alumnos de segundo y tercero de Educación Primaria para desarrollar esta comprensión. No obstante, en algunos estudios se reconoce la destacada resistencia de la concepción operacional del signo igual: los alumnos no adoptan el significado del signo igual *equivalencia numérica* a partir de una explicación directa e, incluso tras haberlo trabajado de forma continuada y haber dado muestras de esta comprensión evidencian, en ocasiones, un retroceso hacia una comprensión operacional.

Los alumnos inician su formación matemática escolar con una tendencia a considerar el signo igual como un símbolo operacional, debido a su experiencia informal con actividades de adición. La enseñanza tradicional de este símbolo refuerza esta concepción. Una cuidada introducción del signo igual que aborde su multiplicidad de significados y, en especial, su significado *equivalencia numérica* es sugerida para disminuir la resistencia cognitiva de los alumnos a aceptar o adoptar este significado y facilitar el desarrollo de su comprensión de este símbolo.

Es importante observar que el significado operacional del signo igual es válido en algunos tipos de igualdades y sentencias y, además, que incluso cuando el signo igual se usa con el significado *equivalencia numérica*, tradicionalmente se promueve la realización de los cálculos para comprobar o completar las igualdades y sentencias. Ambos aspectos dificultan el desarrollo de la comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica.

No obstante, queda demostrada la capacidad de los alumnos de Educación Primaria de desarrollar comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica, en especial, cuando se trabaja con igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas, siendo promovido conjuntamente el desarrollo y uso de pensamiento relacional. De este modo se conjuga un enfoque estructural de la aritmética con el desarrollo del significado del signo igual *equivalencia numérica*, lo cual incide en dos de los aspectos destacados de la limitada comprensión de las igualdades y sentencias evidenciada por los alumnos. Además, se observa que la consideración de igualdades y sentencias de diferentes formas, favorece la aceptación de los alumnos de igualdades y sentencias no convencionales o incluso inusuales.

Se destaca la utilidad de considerar sentencias verdaderas y falsas para promover el uso de pensamiento relacional y frenar la tendencia computacional de los alumnos. No obstante, la comprensión de las sentencias no necesariamente implica la capacidad de resolver igualdades abiertas de la misma forma. La construcción de sentencias verdaderas y falsas también se destaca como una actividad de importancia para el desarrollo de comprensión del signo igual al requerir que el alumno haga un uso activo de este signo.

Algunas de las cuestiones abiertas en la investigación sobre la comprensión del signo igual están relacionadas con el modo en que los alumnos que muestran el significado *equivalencia numérica* conjugan este significado con los otros significados de este símbolo: ¿Utiliza el alumno este significado para dar sentido a todo tipo de igualdades o sentencias numéricas o lo alterna con el uso de los significados *operador* o *expresión de una acción*? ¿Qué sucede en el caso de las igualdades y ecuaciones algebraicas? ¿El desarrollo de la comprensión del signo igual de los alumnos implica la conexión de diversos significados del signo igual o únicamente la adquisición de un mayor número de significados adecuados para diferentes contextos?

Otra cuestión de interés a investigar es si la comprensión de sentencias numéricas de acción y no-acción, la correcta resolución de igualdades abiertas de acción y no-acción y la construcción de sentencias numéricas verdaderas y falsas, constituyen tres etapas en el desarrollo de la comprensión del signo igual como puede conjeturarse a partir de los diversos estudios presentados.

6.4.2 Sobre el uso y desarrollo de pensamiento relacional

A partir de su experiencia en el contexto de las protocantidades, las cantidades y los números, los alumnos van desarrollando conocimiento de relaciones matemáticas relativas a las propiedades aritméticas (conmutativa, asociativa, compensación, magnitud, complementaria de la suma y la resta), en los cuatro niveles de matemáticas de los que habla Resnick. Según esta autora, en el contexto de los números, estas propiedades son concebidas inicialmente, por los alumnos, como permisos o restricciones en la combinación, separación y reagrupación de números, siendo necesario para el desarrollo de su conocimiento formal trabajarlas sin referencia inmediata a cantidades físicas.

Los estudios empíricos presentados no permiten conocer cómo se relacionan dichos niveles de conocimiento; una cuestión de gran interés para la Educación Matemática que, según los autores consultados, requiere de más investigación empírica. No obstante, estos estudios permiten observar manifestaciones de este conocimiento en contextos protocuantitativos, de cantidades y de números.

La propiedad conmutativa se muestra como una de las más accesibles a los alumnos en el contexto de los números, siendo previa a la propiedad asociativa. Ambas propiedades hacen referencia al modo en que se pueden combinar los sumandos. La experiencia aditiva de los alumnos favorece que desarrollen la idea de que el orden de los términos no es importante, lo cual aplican al realizar los cálculos, generalizándolo también a otras operaciones, en especial a la resta. Esta idea primitiva de conmutatividad parece estar inicialmente asociada a una concepción unitaria de la suma (como un cambio de estado que hace más grande un conjunto inicial).

En relación con la propiedad complementaria de la suma y la resta se observa que no es obvia para los alumnos, al menos en el contexto del simbolismo aritmético, siendo necesario que descubran esta propiedad en su experiencia de cálculo y la conecten con su conocimiento previo. En general, los estudios sugieren que a partir de los siete años los alumnos muestran comprensión de esta propiedad en contextos numéricos.

Con respecto a la compensación, el estudio de Warren (2004) muestra que es una propiedad accesible a los alumnos de Educación Primaria, aunque en menor medida que la propiedad conmutativa, debido a que la tendencia computacional de los alumnos aumenta la carga cognitiva de actividades que puedan favorecer la observación de esta propiedad. Se destaca la posible utilidad de contextos físicos en los que representar expresiones numéricas para ayudar a los alumnos apreciar relaciones y propiedades aritméticas.

El conocimiento sobre las propiedades aritméticas también es puesto de manifiesto al utilizar estrategias inventadas para la resolución de problemas o para la realización de cálculos, las cuales manifiestan los alumnos desde edades muy tempranas. El uso y el aprendizaje de estrategias flexibles para el cálculo favorecen el desarrollo de conocimiento sobre el cálculo de hechos numéricos y su transferencia a otros contextos.

La comprensión del esquema parte-todo se manifiesta esencial en el uso de estrategias para la derivación de hechos numéricos, siendo también la base del desarrollo de las propiedades aritméticas básicas, según Resnick.

Se observa, por tanto, que los alumnos hacen uso, de forma espontánea, de pensamiento relacional en el cálculo de operaciones, aunque no todos los alumnos sean capaces de descubrir por sí mismos estrategias de cálculo de igual grado de sofisticación. Según diversos estudios, los alumnos se ven beneficiados por el desarrollo de este tipo de estrategias, ya sea mediante la enseñanza directa o mediante el descubrimiento personal, no siendo un requisito previo el tener dominio del cálculo.

En el contexto de las igualdades y sentencias numéricas, los alumnos son también capaces de desarrollar y utilizar pensamiento relacional cuando éste se favorece de manera continuada en el trabajo en el aula. Inicialmente, los alumnos de primeros cursos de Educación Primaria muestran una fuerte tendencia computacional, pero la consideración de sentencias verdaderas y falsas basadas en propiedades aritméticas parece favorecer la inhibición de esta tendencia y la consideración de las sentencias y expresiones aritméticas como totalidades.

En el desarrollo de pensamiento relacional, la modelización de las sentencias puede ayudar a los alumnos a abstraer las relaciones expresadas, en especial a aquellos con más dificultades. Se observa, además, que el desarrollo y uso de este tipo de pensamiento, en el contexto de sentencias e igualdades numéricas, puede facilitar el uso de estrategias de cálculo flexibles en otros contextos.

Si bien los alumnos son capaces de desarrollar pensamiento relacional, los trabajos de Fujii y colaboradores permiten observar que los alumnos de primeros cursos de

Educación Primaria, no adoptan de forma inmediata estrategias basadas en el uso de este tipo de pensamiento y muestran una gran variabilidad en su capacidad para reconocer la racionalidad de estas estrategias y generalizarlas o aplicarlas a otras situaciones.

Dicho estudio sugiere que la enseñanza tradicional de las estrategias de cálculo flexibles, las cuales suelen ser propuestas directamente a los alumnos a modo de "trucos" a aplicar en situaciones específicas, puede no estar haciendo accesibles a los alumnos estas estrategias más que como reglas a memorizar. Algunas de estas estrategias, como la considerada por Fujii (2003) ($12 - 5 = 12 - 10 + 5$), pueden parecer obvias o transparentes a los adultos pero no son tan fácilmente comprensibles por los alumnos. La interpretación de izquierda a derecha propia del simbolismo aritmético, junto con la necesidad de clausura de las expresiones y, por tanto, la dificultad para considerarlas como totalidades o entidades en sí mismas, dificulta a los alumnos su comprensión.

No obstante, los estudios de Carpenter y colaboradores, Koehler, así como nuestro estudio previo, confirman la capacidad de los alumnos de Educación Primaria, especialmente de segundo y tercero, de desarrollar y comprender estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional. En todos estos estudios el uso de este tipo de pensamiento fue promovido de forma continuada e indirecta, no enseñándose estrategias particulares sino propiciándose la observación y uso de relaciones aritméticas.

Es destacable el progreso lineal en el desarrollo de pensamiento relacional a lo largo del último curso de Educación Primaria y de los dos primeros cursos de Educación Secundaria, sin haberse realizado ninguna intervención específica, mostrado por uno de los estudios.

También se han detectado posibles evidencias del uso de pensamiento relacional en contextos algebraicos al ser justificada la equivalencia de expresiones algebraicas a partir de alguna propiedad o regla, aunque éste es uno de los tipos de justificaciones que da lugar a un mayor número de respuestas incorrectas. En general, se detecta un uso escaso de este tipo de pensamiento en la identificación de ecuaciones equivalentes, aunque en dicho caso es cuestionable la comprensión de los alumnos sobre el concepto de equivalencia de ecuaciones.

En relación con el conocimiento de la estructura de la aritmética, los alumnos muestran, en general, un pobre conocimiento procedimental y falta de comprensión de la estructura de las expresiones, al trabajar tanto en contextos aritméticos como en algebraicos. Suelen utilizar reglas incorrectas de las operaciones y son inconsistentes en su forma de evaluar expresiones.

Muestran no saber diferenciar entre métodos para juzgar la equivalencia de expresiones, matemáticamente correctos y otros que no lo son, utilizando, en ocasiones, métodos poco rigurosos para obtener su respuesta. En general, consideran innecesario el uso de paréntesis interpretando las expresiones de izquierda a derecha, aunque, en ocasiones, proceden de derecha a izquierda cuando existe un paréntesis en la parte más a la derecha de la expresión. En unos casos sobre-generalizan propiedades, especialmente la conmutatividad de la suma al caso de la resta, en otros, en cambio, restringen la aplicación de alguna propiedad a las situaciones típicas en las que suelen presentarse en los libros de texto.

Destacan las dificultades ocasionadas por el signo menos el cual utilizan como símbolo separador, lo separan del número o símbolo al que precede, o lo asignan a todos los miembros dispuestos a su derecha (como si hubiera un paréntesis).

En el trabajo con expresiones aritméticas, cometen también errores como violar el orden de las operaciones o no dar importancia a la disposición de los términos o a los signos operacionales que los relacionan, llegando a considerar que una expresión permanece inalterable si se modifica el orden de las operaciones.

También es destacable la dificultad de la aceptación de la falta de clausura la cual se manifiesta en contextos aritméticos y algebraicos, aunque estudios recientes dan evidencias de que los alumnos de Educación Primaria son capaces de trabajar con expresiones aritméticas sin calcular su valor numérico, al menos en los casos en que estas expresiones han sido diseñadas para favorecer el uso de pensamiento relacional.

Si bien algunas de estas dificultades muestran falta de conocimiento sobre convenciones del lenguaje aritmético, otras, en cambio, evidencian ausencia de reconocimiento de estructura en las expresiones aritméticas y algebraicas. No obstante, los estudios de Subramaniam y Banerjee muestran que el desarrollo de conocimiento de la estructura de la aritmética es un proceso accesible a los alumnos de Educación Primaria aunque también lento y difícil.

Algunas de las principales cuestiones abiertas a la luz de estos estudios en relación con el uso y desarrollo de pensamiento relacional son las siguientes:

¿Cómo se relacionan los distintos tipos de conocimiento de las propiedades aritméticas que desarrollan los alumnos, distinguiendo los diferentes tipos de matemáticas señalados por Resnick? ¿Desarrollan todos los alumnos pensamiento relacional como resultado de su experiencia aritmética escolar? ¿Qué características presenta las primeras manifestaciones de pensamiento relacional de los alumnos? ¿Qué dificultades surgen en el proceso de desarrollo de este tipo de pensamiento en el contexto de las expresiones, igualdades y sentencias numéricas? ¿Cómo va evolucionando este desarrollo? ¿Cómo puede favorecerse la transferencia del uso de este tipo de pensamiento a otros contextos? ¿Qué capacidades y conocimientos son necesarios para el uso de pensamiento relacional en el contexto de las expresiones, igualdades y sentencias numéricas? ¿Y en el contexto de las expresiones algebraicas? ¿Puede favorecerse el desarrollo de métodos informales de resolución de ecuaciones a partir del uso de pensamiento relacional?

También se plantean dos líneas de interés en las cuales profundizar el estudio del pensamiento relacional: el proceso de generalización de las propiedades aritméticas una vez los alumnos han explicitado el uso de pensamiento relacional y el uso del pensamiento relacional en contextos algebraicos, en especial, en el contexto de las expresiones, igualdades y ecuaciones algebraicas.

BLOQUE II:

Metodología

CAPÍTULO 7

Metodología: investigación de diseño y experimentos de enseñanza

El trabajo de investigación realizado es un *experimento de enseñanza transformativo y dirigido por una conjetura,* en términos de Confrey y Lachance (2000); un tipo de estudio que se ubica dentro de la investigación de diseño. En este capítulo se describen en qué consiste el paradigma metodológico denominado investigación de diseño, detallando su origen y evolución, sus principales características, puntos fuertes y limitaciones y algunos de los criterios que permiten evaluar su calidad. Posteriormente se presenta el diseño de investigación concreto utilizado.

7.1 Investigación de diseño

La *investigación de diseño* o *investigación basada en diseño* es un paradigma metodológico que actualmente está siendo aplicado y desarrollado activamente en la investigación educativa. Está mostrando ser de utilidad en el campo de la Didáctica de la Matemática y las Ciencias (Kelly, 2003)[42]. Así lo evidencia la publicación del Handbook of Research Design in Mathematics and Sciences (2000) en el que se describen diversos diseños de investigación enmarcados dentro de esta metodología, la dedicación de un volumen completo de las revistas Educational Researcher y Journal of the Learning Sciences, en 2003 y 2004, al papel del diseño en la Investigación Educativa (Educational Researcher, Vol. 32, no.1 y Journal of the Learning Sciences, vol. 13, no.1), la realización de foros y seminarios entorno a este tema (Kelly, 2003) y la formación de un colectivo de investigadores, The Design

[42] Una forma de investigación de diseño que ha sido activamente utilizada en Europa es denominada investigación de desarrollo (“developmental research”) (Kelly, 2004).

Based Research Collective (DBRC), dedicados a examinar, mejorar y poner en práctica, en el campo de la educación, los métodos de investigación basados en diseño[43].

Los estudios que pertenecen a la investigación de diseño son denominados indistintamente como investigaciones, estudios o experimentos de diseño o basados en diseño. Este tipo de metodología, de naturaleza principalmente cualitativa, ha sido desarrollada dentro de las "*Ciencias del aprendizaje*" (Learning sciences), un campo multidisciplinar que estudia el aprendizaje y la enseñanza y abarca la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia, así como las didácticas específicas, entre otros campos (Confrey, 2006; Sawyer, 2006).

La mayoría de los autores consultados (Barab y Squire, 2004; Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004; Confrey, 2006), adjudican el primer uso del término investigación de diseño, en el campo de la investigación educativa, a Collins (1992) y Brown (1992).

Collins (1992) distingue entre ciencias de lo artificial o de diseño y ciencias naturales o analíticas[44], haciendo énfasis en la importancia de abordar la educación como una ciencia de diseño, no como una ciencia analítica, para poder determinar cómo diferentes diseños de ambientes de aprendizaje contribuyen al aprendizaje, cooperación, motivación y demás variables dependientes del proceso enseñanza-aprendizaje (Collins et al., 2004; Confrey, 2006). Para llevar a cabo dicha exploración Collins recomienda las siguientes acciones:

- involucrar a los docentes como investigadores,
- comparar innovaciones,
- llevar a cabo valoraciones objetivas,
- seleccionar innovaciones prometedoras,
- involucrar competencia/habilidad multidisciplinar,
- variar sistemáticamente,
- realizar revisiones frecuentes,

[43] Ver http://www.designbasedresearch.org.

[44] Las ciencias analíticas o naturales son aquellas que abordan el modo en que los fenómenos del mundo pueden explicarse (ej., Biología, Física). Las ciencias artificiales o de diseño, en cambio, tienen como objetivo determinar cómo se comporta, bajo diferentes condiciones, cualquier artefacto diseñado (ej., Aeronáutica, Inteligencia artificial).

- evaluar el éxito utilizando criterios múltiples.

Por otra parte, Brown (1992) describe los estudios de diseño como totalidades organizadas en torno a ambientes de trabajo a estudiar, ideados para desarrollar teorías de aprendizaje y favorecer su diseminación. Esta autora, movida por el objetivo de trabajar hacia el desarrollo de un modelo de enseñanza y aprendizaje arraigado en una firme base empírica, señala la necesidad de metodologías complejas que capturen la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. Anima a los investigadores a considerar las aulas y laboratorios como lugares donde pueden emerger avances teóricos.

Más recientemente, Shavelson y Towne (2002, según cita Confrey, 2006) definen este tipo de estudios como *"enfoques analíticos para examinar mecanismos que comienzan con ideas teóricas que son testadas a lo largo del diseño, implementación y estudio sistemático de herramientas educativas (currículo, métodos enseñanza, applets informáticos) que dan cuerpo al mecanismo conjeturado inicialmente"* (p.120). Estos autores enmarcan esta metodología de investigación dentro de las investigaciones que pretenden responder a la pregunta ¿cómo y por qué está pasando algo?

diSessa y Cobb (2004) describen estos estudios como intentos de entender y mejorar procesos educativos, que son iterativos y situados y están basados en teoría.

Confrey (2006), por su parte, define estos estudios como un tipo de investigaciones cuyo objetivo es producir teoría que ayude a guiar la práctica educativa en el aula y a identificar prácticas de enseñanza-aprendizaje eficaces, permitiendo adaptar las condiciones de la enseñanza para influir en la probabilidad de ciertos resultados o sucesos. Los estudios de diseño constituyen extensas investigaciones de prácticas educativas, provocadas por el uso de un conjunto de tareas curriculares noveles, cuidadosamente secuenciadas, que estudian como algún campo conceptual o conjunto de habilidades e ideas son aprendidas mediante la interacción de los alumnos, bajo la guía del docente. Estas investigaciones tratan de documentar "*qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en la tarea, cómo interaccionan los alumnos y docentes, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es* *llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción, mediante el estudio del trabajo de los alumnos, de grabaciones de videos y de evaluaciones de la clase"* (Confrey, 2006, p.2). En esta metodología, la investigación pura y la aplicada se combinan.

Más genéricamente, pero de forma compatible con las anteriores definiciones, la investigación de diseño es definida, por Cobb y Gravemeijer (en prensa), como un conjunto de enfoques metodológicos en los que el diseño instruccional y la investigación son interdependientes. Por una parte el diseño de ambientes de aprendizaje sirve como contexto para la investigación, por otra, los análisis continuados y el análisis retrospectivo informan para la mejora del diseño. Este paradigma persigue analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza. El diseño se considera central para promover el aprendizaje, crear conocimiento útil, y hacer progresar las teorías de aprendizaje y enseñanza en ambientes complejos (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; DBRC, 2003).

Este tipo de investigación, que combina la investigación educativa empírica con el diseño dirigido por teoría de ambientes de aprendizaje, va más allá del desarrollo y puesta a prueba de intervenciones particulares; incluyen fundamentos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje y reflejan un compromiso por comprender las relaciones existentes entre la teoría educativa, la práctica y los artefactos. Se centran en el diseño y exploración de innovaciones de diseño, ya sean artefactos o aspectos menos concretos como actividades, orientaciones o currículo, siendo los comportamientos emergentes de los alumnos, en respuesta a las actividades y situaciones propuestas, los que conducen al desarrollo de la intervención y la teoría (DBRC, 2003).

La principal consideración de esta metodología es que el uso de métodos que conectan los procesos de actuación con los resultados tiene el poder de generar conocimiento de aplicación directa a la práctica. Se persigue comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje cuando el investigador actúa activamente como un educador, abordando simultánea e iterativamente los procesos científicos de descubrimiento, exploración, confirmación y diseminación (Kelly, 2003).

Idealmente la metodología de diseño conduce a una mayor comprensión de los ambientes de aprendizaje mediante el diseño de sus elementos y la anticipación de cómo éstos van a funcionar conjuntamente para promover el aprendizaje. Más allá de crear diseños eficaces para un determinado aprendizaje, los estudios de diseño explican por qué el diseño funciona y sugieren modos en que puede ser adaptado a nuevas circunstancias (Cobb et al, 2003).

Este tipo de investigaciones, generadoras y trasformadoras, pretenden sustentar argumentos elaborados en torno a resultados de innovación e intervención activa en el aula. Proveen de información sobre la complejidad involucrada en el desarrollo de conocimiento y capacidades por parte de los alumnos, ayudan a entender el papel del docente en conjunción con los materiales de aprendizaje puestos en juego, permiten identificar factores contextuales relevantes y ayudan a comprender la naturaleza de la intervención. Modelos, más que artefactos o programas, son el objetivo y pueden ser generados a través de este trabajo (Cobb et al, 2003; DBRC, 2003).

El objetivo es producir conocimiento, apoyado por la evidencia, que guíe la toma de decisiones de la práctica educativa para mejorar el aprendizaje de los alumnos. No se pretende prescribir prácticas de enseñanza sino, en términos de Confrey (2006), marcos explicativos acompañados de datos, evidencias y argumentos. Confrey entiende por *marcos explicativos* modelos de resultados probables, íntimamente conectado a sus teorías, tan robustos como su unión a evidencias, que proceden de múltiples interacciones en ambientes auténticos; tan rigurosos como la documentación y análisis que subyace a los aspectos anteriormente señalados y tan válidos como útiles sean para personas experimentadas en contextos similares. Concretamente, estos estudios son de gran utilidad para investigar el desarrollo de conocimiento en ambientes enriquecidos, donde emergen ideas que difícilmente se desarrollan en ambientes naturales.

Los estudios de diseño son, por tanto, generadores, complejos, iterativos, multivariables, multiniveles, intervencionistas y orientados por la teoría y hacia la práctica (Cobb et al., 2003; Shavelson, Phillips, Towne y Feuer, 2003).

7.1.1 Características de estos estudios

En este apartado se recogen algunas de las principales características de los estudios de diseño:

1. Este tipo de estudios se centra en la caracterización de la situación en toda su complejidad, la mayor parte de la cual no es conocida a priori. Las clases o ambientes de enseñanza son considerados complejos y condicionales, siendo necesarias una amplia gama de medidas de resultados para capturar el proceso de aprendizaje, que allí tiene lugar, así como el estado final del alumno. Esta complejidad hace esencial distinguir entre aquellos elementos que van a ser objeto de estudio y aquellos otros que se consideran accidentales o se asumen como condiciones del entorno (Barab y Squire, 2004; Cobb et al., 2003).

2. Involucran múltiples variables, muchas de las cuales no pueden ser controladas. Se intenta optimizar el diseño tanto como sea posible y observar cuidadosamente cómo funcionan los diferentes elementos (Collins et al., 2004).

3. Ocurren en contextos de la vida real donde habitualmente se produce algún tipo de aprendizaje. Por lo tanto, el tipo de situaciones que comprenden son muy variadas: un equipo de investigadores trabajando con un pequeño grupo de alumnos, un grupo de investigadores trabajando en un aula en colaboración con un docente, un grupo de investigadores y formadores de profesores y maestros en activo promoviendo conjuntamente el desarrollo de una comunidad profesional, un equipo de investigadores colaborando con docentes y otros agentes del sistema educativo en estudios que involucran varios colegios… (Cobb et al., 2003; Barab y Squire, 2004).

La multiplicidad de contextos en los que estos estudios pueden tener lugar es, junto con el tipo de personas involucradas, uno de los factores que ocasiona la existencia de muy diversos tipos de estudios de diseño. Entre ellos destacamos dos tipos: los experimentos de enseñanza, según son definidos por Lesh y Kelly (2000) y Steffe y Thompson (2000), y los experimentos de enseñanza trasformativos y dirigidos por una conjetura, de Confrey y Lachance (2000); ambos detallados más adelante en este capítulo. Otros ejemplos de diferente naturaleza son descritos por Collins et al. (2004), en los cuales las sucesivas aplicaciones y elaboraciones del diseño son realizadas en contextos diferentes, y por Cobb, Stephan, McClain y

Gravemeijer (2001), en cuyo caso corresponden a un tipo de investigación realizada por el docente en su propia aula.

4. Involucran diferentes tipos de participantes en el diseño, para utilizar diferentes experiencias en la producción y análisis de éste; estando siempre implicada en el proceso de investigación, la persona que actúa como docente (Barab y Squire, 2004).

5. Las teorías que se desarrollan durante el proceso del experimento son humildes, en tanto que son específicas a un dominio de aprendizaje y porque son explicativas de la actividad del diseño. Estos estudios no proveen de grandes teorías de aprendizaje, sino que tienen un alcance teórico intermedio. No obstante, estas teorías son esenciales para la mejora de la educación, entendida como un proceso generativo a largo plazo (Cobb et al., 2003).

Collins (1999; según citan Collins et al, 2004) denomina al resultado de estos estudios "perfiles", contraponiendo el desarrollo de un perfil a la comprobación de hipótesis como una característica de estos trabajos. Por otra parte, diSessa y Cobb (2004) destacan la utilidad de estos estudios para el desarrollo de constructos teóricos útiles para detectar orden, regularidades y patrones, en los complejos contextos en los que se desarrollan.

6. Se caracterizan por un *refinamiento progresivo* ya que el diseño es constantemente revisado a partir de la experiencia (Collins et al., 2004). El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño. Los investigadores que emplean esta metodología hacen, testan, y refinan conjeturas sobre la trayectoria de aprendizaje basándose en la evidencias que van obteniendo en el transcurso de la investigación, colaborando o actuando como docentes y recogiendo extensos registros sobre lo que los alumnos, los docentes y los investigadores aprenden a lo largo del proceso (DBRC, 2003).

7. El análisis y resultados de los estudios de diseño comporta el análisis de múltiples aspectos del diseño así como el desarrollo de una descripción, que caracterice el diseño en la práctica, a partir del análisis retrospectivo del proceso de investigación (Barab y Squire, 2004).

7.1.2 Puntos fuertes y limitaciones

Una de las principales fortalezas que se le reconocen a los estudios de diseño es que eliminan el abismo existente entre la práctica educativa y los análisis teóricos, ya que provee de informes situados sobre el aprendizaje de los alumnos, relacionando directamente el proceso de aprendizaje con el modo en que ha sido promovido. Otros aspectos relativos a algunos de estos estudios, destacados por Shavelson et al. (2003), son el hecho de que testan teorías en la práctica, trabajan con los docentes en la construcción del conocimiento, reconocen los límites de la teoría, capturan las especificidades de la práctica y las ventajas potenciales de adaptar la teoría a su contexto de forma iterativa y refinadora y, además, abordan los problemas cotidianos del aula, de los colegios y de las comunidades que influyen en la enseñanza y el aprendizaje, adaptando la enseñanza a estas condiciones.

El carácter de estos estudios los señala como promotores de la identificación y crecimiento de nuevas ideas y constructos. Los estudios de diseño, en tanto que son generadores de hipótesis y de marcos o estructuras organizadoras, contribuyen a la formulación de modelos, más que a la estimación o validación de éstos, y de este modo son de utilidad para la generación de buenas cuestiones a abordar mediante otro tipo de metodologías (Kelly, 2004).

Concretamente los investigadores del DBRC (2003) identifican cuatro áreas en las que consideran que esta metodología puede aportar mayores beneficios: exploración de posibilidades para ambientes noveles de enseñanza y aprendizaje, desarrollo de teorías contextualizadas sobre enseñanza y aprendizaje, construcción de conocimiento acumulativo de diseño y desarrollo de la capacidad humana para la innovación. Kelly (2004) señala, además, la capacidad de los estudios de diseño para servir como incubadores de nuevas técnicas de investigación.

Entre las limitaciones y desafíos que se reconocen, en general, a esta metodología, Collins et al. (2004) destacan las dificultades que emergen desde la complejidad de las situaciones del mundo real, la gran cantidad de datos que resultan de la necesidad de combinar análisis cuantitativos y etnográficos, y la comparación entre diseños.

Por otra parte, Dede (2004) insiste en los desafíos que esta metodología conlleva debido a que muchas variables no están controladas deliberadamente, a que varios tipos de datos son a menudo recogidos por distintos investigadores, lo que conlleva problemas de coordinación, y a que las argumentaciones y los resultados del estudio deriven de un bajo porcentaje de los datos recogidos.

Kelly (2004) hace observar la necesidad de especificar la "gramática argumentativa" de estas investigaciones, es decir, la lógica que guía el uso de los métodos y que sustenta el razonamiento sobre los datos, para que sirva de garantía de las argumentaciones que se obtienen.

7.1.3 Evaluación de los estudios de diseño

Al ser la investigación de diseño una metodología incipiente en el campo de la investigación educativa, se encuentran en discusión los aspectos necesarios para garantizar su rigurosidad, así como el modo en que debe evaluarse su calidad. Por su naturaleza, los estudios de diseño son complejos, multivariables, multiniveles, e intervencionistas; haciendo particularmente difícil establecer garantías para sus argumentaciones y resultados (Shavelson et al., 2003). No obstante, son numerosos los investigadores que reconocen su importancia y potencial como metodología de investigación educativa (Cobb et al., 2001; Cobb et al., 2003; Cobb y Gravemeijer, en prensa; Confrey, 2006; DBRC, 2003; Dede, 2004; Kelly, 2003, 2004; Shavelson et al., 2003).

Los diversos autores consultados que han abordado la cuestión de la evaluación de los estudios de diseño hacen referencia a cuatro criterios: fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización e utilidad (Cobb et al., 2001; Cobb y Gravemeijer; en prensa; Confrey, 2006)

La fiabilidad se refiere al grado en que las inferencias y afirmaciones que resultan del análisis retrospectivo son razonables y justificables, al reconocerse que, a partir de un conjunto de datos, se pueden hacer análisis retrospectivos diferentes. En estos estudios la fiabilidad se mide a partir del grado en que:

- El análisis ha sido sistemático e involucra la refutación de conjeturas
- Los criterios utilizados para las argumentaciones son explícitos permitiendo a otros investigadores monitorizar el análisis

- Las argumentaciones y afirmaciones finales pueden ser justificadas siguiendo las sucesivas fases del análisis, para lo cual es necesario que se aporte una detallada descripción de cada una de estas fases y que se fundamenten las inferencias realizadas
- El análisis ha sido criticado por otros investigadores, no todos familiares con el contexto en el que se recogieron los datos.

La replicabilidad es entendida en relación a las variables del proceso de aprendizaje estudiado que pueden repetirse potencialmente en otros contextos o situaciones. Estas variables han de ser detalladamente delimitadas de aquellas que son dependientes del contexto, describiéndose el desarrollo de particulares formas de aprendizaje, pensamiento o actuación, los sucesivos cambios que especifican el desarrollo y los elementos del ambiente de aprendizaje que son necesarios para sustentar dicho proceso.

La capacidad de generalización en este tipo de estudios no está relacionada con la representatividad de la muestra, está íntimamente relacionada con la replicabilidad, e implica que otros serán capaces de usar los productos que deriven del experimento para promover aprendizaje en otros contextos. En este sentido, los autores destacan la importancia de situar el experimento en un caso más amplio de fenómenos. El alcance de esta capacidad de generalización depende del desarrollo de teorías de enseñanza específicas de un dominio, siendo recomendado llevar a cabo varios estudios basados en el mismo diseño, pero adaptado a los diferentes contextos y participantes, para enriquecer dichas teorías describiendo regularidades comunes a los contextos considerados.

No se persigue obtener leyes universales e inmutables, sino crear modelos de modos probables de andamiaje que conducen a resultados de aprendizaje exitosos, por medio de teorías, materiales y enfoques instruccionales y resultados progresivos, que permiten guiar la enseñanza relativa a contenidos específicos. De este modo, estos estudios proveen información a los docentes, de utilidad para dar sentido a sus experiencias en la práctica. Son investigaciones similares a los estudios de casos y etnográficos, en tanto que buscan aportar detalles y especificidad de complejas interacciones prolongadas en el tiempo, más que establecer patrones representativos y generales.

Otro criterio destacado en la valoración de estos estudios es la utilidad. Los resultados obtenidos deben dejar claro lo que implica para la enseñanza. De este modo, este tipo de investigaciones eliminan la desconexión existente entre la investigación y la práctica y, además, son de utilidad para promover el desarrollo de comunidades de profesionales de la enseñanza. El tipo de justificación aportada ofrece a los docentes la posibilidad de adaptar, comprobar y modificar las secuencias de enseñanza en sus aulas.

7.2 Evolución de los estudios de diseño

Los estudios de diseño tienen sus raíces en las entrevistas clínicas, los experimentos de enseñanza rusos, la psicología de Piaget y en el constructivismo radical y social, como se describe más adelante.

Surgen de un intenso interés por entender el pensamiento de los niños, y de la necesidad de producir teoría que ayude a guiar la práctica educativa en el aula y a identificar prácticas de enseñanza-aprendizaje eficaces, permitiendo adaptar las condiciones de la enseñanza, para afectar la probabilidad de ciertos resultados o sucesos. Se busca proveer conocimiento sistemático y garantizado sobre el aprendizaje y producir teorías que guíen la toma de decisiones de enseñanza hacia la mejora del aprendizaje del alumno (Confrey, 2006).

Según Collins et al. (2004), estos estudios fueron desarrollados como una forma de llevar a cabo investigación formativa, para probar y refinar diseños educativos basados en principios teóricos derivados de investigaciones previas.

Aunque la metodología de diseño es relativamente nueva en el campo de la investigación educativa, durante años ha sido utilizada productivamente en otras ciencias de diseño tales como la ingeniería o la arquitectura, estando definida de forma general por cuatro características principales, recogidas por (Lesh y Kelly, n.d.):

- Implica el diseño de una artefacto complejo o una herramienta conceptual
- En situaciones no triviales, el proceso de diseño involucra el desarrollo de un sistema conceptual, constructo o modelo, que a menudo es el resultado principal que se persigue con la investigación. En concreto, cuando se diseña algo, una de

las partes más significativas del producto es el propio diseño, cuando se modeliza algo es el modelo conceptual que sustenta el modelo, y cuando se construye algo el constructo o sistema conceptual que subyace.

- El artefacto o herramienta conceptual que resulta, es requerido por unos motivos específicos, los cuales proveen de los criterios para valorar la calidad del modelo, constructo o sistema conceptual
- El proceso de diseño involucra estudios que habitualmente ocurren durante una serie de ciclos de desarrollo-comprobación-revisión, los cuales utilizan formas cualitativas y cuantitativas de retroalimentación. Estos ciclos de diseño generan automáticamente estelas de documentación cuyas trayectorias revelan información importante sobre la naturaleza de los desarrollos que ocurren relativos a los artefactos y a los sistemas conceptuales que subyacen.

Esta metodología ha sido introducida y adaptada a la investigación educativa, y más concretamente a la investigación en Didáctica de la Matemática y de las Ciencias, ante la necesidad de aumentar radicalmente la relevancia de la investigación para la práctica, y al reconocerse que la mayoría de los fenómenos que necesitan ser comprendidos y explicados en estas áreas son sistemas complejos y que no todo el conocimiento es reducible a una lista de hipótesis a probar y preguntas a responder (Lesh y Kelly, n.d.).

Guiados por la asunción teórica de que la cognición no es algo situado en el individuo pensante sino que es un proceso distribuido entre el conocedor, el ambiente en el que el aprendizaje tiene lugar y la actividad en la que participan los alumnos, a los investigadores educativos les ha surgido la necesidad de desarrollar herramientas tecnológicas, curriculum y especialmente teorías que les ayuden a comprender y predecir sistemáticamente cómo ocurre el aprendizaje. La investigación de diseño surge en este contexto ante la necesidad de metodologías que permitan obtener argumentaciones basadas en la evidencia procedente de contextos naturales, de abordar cuestiones teóricas sobre la naturaleza del aprendizaje en contexto, de ir más allá de las medidas limitadas del aprendizaje y de producir resultados de investigación a partir de la evaluación formativa.

Los investigadores no se limitan a observar sino que se involucran sistemáticamente en el diseño de contextos de modos que permiten mejorar y generar argumentaciones, basadas en la evidencia sobre aprendizaje (AERA, 2004; Collins et al., 2004).

7.2.1 La influencia de Piaget, Vygostky y Dewey

Confrey (2006) localiza los fundamentos teóricos de estos estudios en los estudios clínicos y el trabajo de Piaget, Vygostky y Dewey. Estos autores argumentaron que la clave para caracterizar el aprendizaje surge del estudio de la formación del pensamiento de los alumnos.

La influencia de **Piaget** en el desarrollo de la metodología de los estudios de diseño se reconoce en la introducción de tres ideas principales que demandaron nuevas metodologías de investigación:

- Las ideas o puntos de vista de niños y adultos no son congruentes,
- El proceso mediante el cual el niño gana habilidades cognitivas requiere que su comprensión se vaya refinando, mediante la experiencia con tareas que conduzcan a reconstrucciones y cambios conceptuales, involucrando una coordinación de los procesos de asimilación y acomodación,
- Para que los niños hagan suyas las ideas es necesario que valoren su factibilidad, utilidad y durabilidad a lo largo de un proceso de construcción de esquemas y de abstracción reflexiva.

Estas ideas, junto con el reconocimiento de que el conocimiento involucra descripciones del mundo exterior e interacciones entre el conocedor y lo conocido, condujeron a la metodología del "método clínico", desarrollada por Piaget, la cual ha influido de forma esencial en los estudios de diseño. Esta metodología se caracteriza, entre otros aspectos, porque es empírica, depende de la observación directa y ayuda a explorar las tendencias espontáneas de la mente de los niños (Confrey, 2006). (Ver apartado siguiente)

Vygostky ha influido, de forma importante, en la concepción de los estudios de diseño enfatizando el papel del individuo en ambientes socio-culturales. Para Vygostky las actividades culturales son la fuente primaria de la cognición y determinan el pensamiento de forma fundamental. Sus influencias en esta metodología, según Confrey (2006), radican en la atención prestada a la selección de unidades propias de análisis en la experimentación y el especial análisis realizado a las relaciones existentes entre los conceptos espontáneos y los científicos[45], siendo estos últimos considerados como herramientas cognitivas.

Vygostky estudió el desarrollo conceptual mediante entrevistas pero reconoció la necesidad de nuevas metodologías para estudiar en profundidad los conceptos reales. Su idea de "zona de desarrollo próximo[46]" condujo al estudio del aprendizaje dentro de estudios de desarrollo, siendo el discurso una pieza metodológica fundamental en dichos estudios (Confrey, 2006).

Dewey es otro autor que ha ejercido una influencia fundamental en el desarrollo de la metodología de los estudios de diseño. Dewey considera que una teoría corresponde a los hechos cuando conduce a sus consecuencias a través de la experiencia; sus argumentaciones deben pasar el test pragmático de ser de utilidad en la interpretación de múltiples situaciones con el paso del tiempo. Estas consecuencias son, en principio, sólo uno de los posibles conjuntos de resultados, ante la posibilidad de que se estén obviando consecuencias futuras o errando en la observación de algunos hechos. Mediante la consideración de variadas circunstancias, dichas consecuencias se van haciendo más estables y seguras, manteniendo siempre cierto grado de provisionalidad.

Dewey argumenta que inicialmente sólo existe lo indeterminado, que va evolucionando desde ser una problemática a ser una hipótesis que es trasformada mediante la actividad de investigación. Los elementos de la situación original se convierten en un todo unificado, al ir detectándose relaciones y elementos constituyentes de dicha situación o sistema y la hipótesis conduce a un conjunto de afirmaciones de conocimiento que deberán ser contrastadas a lo largo del tiempo, comprobando su utilidad para interpretar otras situaciones (Confrey, 2006).

[45] Los conceptos científicos se originan en la actividad estructurada y especializada del aula e imponen al niño conceptos definidos lógicamente. Se caracterizan por formar parte de un sistema, adquirirse a través de una toma de conciencia de la propia actividad e implicar una relación espacial con el objeto, basada en la internalización de la esencia del concepto. Los conceptos espontáneos, en cambio, surgen de las propias reflexiones del niño sobre su experiencia cotidiana. Ambos tipos de conceptos siguen caminos inversos, los primeros van de lo abstracto a lo concreto, los segundos van de lo concreto a lo abstracto.

[46] "La zona de desarrollo próximo" es el punto de encuentro de ambos tipos de conceptos, es donde los conceptos espontáneos de un niño, empíricamente abundantes, pero desorganizados, se encuentran con la sistematización y la lógica del razonamiento adulto (Vygostky, 1995).

7.2.2 El Método Clínico

El Método Clínico de Piaget consiste en la intervención repetida del experimentador, ante la actuación y reacción de un sujeto, para poder esclarecer el curso de su pensamiento. Al sujeto en estudio se le plantea un problema, una tarea o algunas cuestiones que debe resolver y, mediante la interacción de forma adaptada a las respuestas del individuo, el experimentador trata de analizar diversos aspectos en la conducta del sujeto. Se intenta que el sujeto tenga la oportunidad de expresarse libremente, sin limitaciones, para, de esta manera, conocer más a fondo su pensamiento. El papel del investigador es realizar intervenciones motivadas por la actuación del sujeto para esclarecer el sentido de lo que esté haciendo o expresando (Mondragón, 2003). En palabras de Piaget: *"el arte clínico no consiste en conseguir que haya una respuesta, sino en hacer hablar libremente y en descubrir las tendencias espontáneas, en vez de canalizarlas y ponerles diques"* (Piaget, 1984, p. 14)

Se supone que en cada momento el experimentador se tiene que plantear cuál es el significado de la conducta del sujeto y tratar de producir una intervención que ayude a develar su sentido; por ello, la intervención del entrevistador debe ser extremadamente flexible y tener en cuenta lo que el sujeto está expresando. La intención del experimentador es reconstruir el modelo mental del sujeto (Mondragón, 2003).

> *El buen clínico, dirigiendo se deja dirigir, y tiene en cuenta todo el contexto mental, en vez de ser victima de 'errores sistemáticos', como ocurre con frecuencia en el caso del experimentador puro" "... debe, en efecto, reunir dos cualidades con frecuencia incompatibles: saber observar, es decir, dejar hablar al niño [....] y, al mismo tiempo, saber buscar algo preciso, tener en todo instante una hipótesis de trabajo, alguna teoría, justa o falsa que comprobar* (Piaget, 1984, p. 17).

Se encuentra en el interrogatorio clínico la flexibilidad de la información abierta y el rigor del control experimental. Con este método, Piaget pretende ir más allá de la observación pura, sin caer en los inconvenientes de los cuestionarios, y alcanzar las principales ventajas del método experimental. El objetivo es comprender el conocimiento actual de los alumnos sin pretender cambiarlo (Piaget, 1984).

Piaget distingue tres tipos de situaciones en las que interviene el método clínico: la entrevista verbal o conversación libre con el niño, siguiendo el curso de sus ideas, la explicación sobre una situación, en la que es necesario modificar una realidad y se mantiene una conversación con el sujeto acerca de lo que está haciendo y por qué lo va haciendo, y la observación pura de la acción del sujeto sin que intervenga el lenguaje (Mondragón, 2003).

7.2.3 Del método clínico a los experimentos de enseñanza

Con el desarrollo de las teorías constructivistas a lo largo de los años 80, el método clínico fue evolucionado hacia los experimentos de enseñanza procedentes de la investigación pedagógica de la Unión Soviética (Confrey, 2006; Kelly, 2003).

Las características generales de estos estudios soviéticos eran inicialmente:

- Una orientación hacia el descubrimiento de los procesos por los cuales los alumnos aprenden el contenido de las asignaturas escolares,
- La naturaleza longitudinal de la educación,
- Intervención del investigador en el proceso de aprendizaje de los alumnos,
- La constante interacción entre las observaciones recogidas hasta el momento en la investigación y la planificación de las actividades futuras de la investigación,
- Datos más cualitativos que cuantitativos, siendo los datos cuantitativos principalmente descriptivos (Thompson, 1979).

Los investigadores estadounidenses recurrieron a esta metodología cuando comenzaron a percibir la necesidad de elaborar modelos de los conocimientos y del aprendizaje y desarrollo de los alumnos, que tuvieran en cuenta la influencia de la comunicación matemática del aula. Los modelos existentes hasta el momento no eran sensibles a aspectos relacionados con la participación de los docentes en la modificación y el mantenimiento de la actividad de los alumnos. Además, existía un gran abismo entre la práctica de la investigación y la práctica de la enseñanza (Steffe y Thompson, 2000).

La metodología experimental existente anteriormente refería a la consideración de diversos sujetos o grupos de sujetos a los que se les aplicaba distintos tratamientos cuyos efectos se comparaban buscando las diferencias existentes entre ellos. Lo que en ocasiones es denominado *"paradigma de la agricultura",* es decir, la metodología clásica experimental. En estos estudios consideraban a los sujetos como recibidores de un tratamiento, no siendo un interés principal el estudio de la construcción de su conocimiento. El reconocimiento del papel, en la actividad matemática escolar, de la participación de los alumnos en el proceso enseñanza-aprendizaje, puso de manifiesto que estas metodologías experimentales no eran útiles para el estudio del modo en que los alumnos aprenden y comprenden los conceptos matemáticos (Steffe y Thompson, 2000).

En el paradigma experimental clásico se partía de la base de que los efectos observados eran resultado del tratamiento experimental, y no de variables ajenas al experimento, y que el tratamiento aplicado en otros ambientes produciría similares resultados. Los objetivos de la investigación educativa eran entonces la búsqueda de relaciones lineales causales entre el ambiente de los alumnos y su comportamiento (Thompson, 1979).

Según Steffe y Thompson (2000), los experimentos de enseñanza marcaron una revolución en la práctica de la investigación en Educación Matemática, dando respuesta a unas necesidades que se hicieron manifiestas al producirse cambios en los modos de concebir el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Ésta es una metodología viva diseñada inicialmente para explorar y explicar la actividad matemática de los alumnos.

Los experimentos de enseñanza estudian las maneras y los modos de influenciar el conocimiento de los alumnos, yendo más allá de los objetivos de las entrevistas clínicas, intentando formular un modelo de aprendizaje de los contenidos particulares involucrados. Mientras que las entrevistas clínicas pretenden analizar el conocimiento actual de los alumnos, los experimentos de enseñanza persiguen entender el progreso que los alumnos hacen a lo largo de periodos en el tiempo. El investigador toma a la vez el papel de entrevistador y de docente (Komorek y Duit, 2004; Steffe y Thompson, 2000).

En el paso de las entrevistas clínicas a los experimentos de enseñanza, según recoge Confrey (2006), los investigadores eliminaron, mantuvieron y modificaron diversos aspectos de la metodología añadiendo nuevos enfoques:

- Mantuvieron y, en cierto modo, reforzaron su comprensión de la importancia de construir un modelo de pensamiento matemático de los alumnos,
- Mantuvieron su visión de los niños como agentes activos constructivos, los cuales cuando se les facilitan tareas, retos y oportunidades adecuadas pueden crear soluciones creativas, interesantes y a menudo productivas,
- Reforzaron sus ideas sobre la importancia de desligar estos aspectos de la cognición activa para formar modelos viables de sus capacidades y tendencias,
- Reforzaron su consideración de la influencia de las experiencias y creencias de los niños en su conocimiento previo y el papel clave de la reflexión sobre la actividad; elementos delimitadores de las concepciones de los alumnos,
- Perduró la influencia de la perspectiva de la epistemología genética de Piaget,
- El desarrollo de nuevas tecnologías dinámicas y computacionales condujo a una consideración diferente de la naturaleza de las matemáticas y las ciencias,
- La consideración del estudio de los ambientes (complejos) del aula fue clave, situando el pensamiento individual, en una red de fuerzas socio-culturales que dan forma al desarrollo de las ideas. El conocimiento era visto como distribuido y mediado por las herramientas disponibles.

La evolución del método clínico a los experimentos de enseñanza influenció los enfoques socio-culturales de la educación matemática y de las ciencias. Los investigadores fueron reconociendo el papel de la práctica guiada y estructurada para trazar cambios en la enseñanza y aprendizaje en el transcurso del tiempo. Los experimentos de enseñanza permitieron descubrir el proceso por el cual los alumnos aprenden en relación a un tema, concepto o idea, llevándose a cabo estudios longitudinales, intervenciones en situaciones de aprendizaje, y procesos reiterativos principalmente cualitativos de planificación y recogida de datos.

Estos experimentos de enseñanza fueron adaptándose, bajo la perspectiva constructivista. Los investigadores pasaron a investigar las matemáticas de los niños, localizándolas en situaciones de negociación y comunicación interactiva, centrándose en la evolución de sus actividades más que en los productos, con la intención de examinar las modificaciones que se producen en sus esquemas en relación con actividades dirigidas a un objetivo (Confrey, 2006).

7.3 Experimentos de enseñanza

Los experimentos de enseñanza son, en la actualidad, un tipo de metodología considerada característica de la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de otras ciencias, que engloba diversos enfoques de investigación. Su principal característica es la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000).

Según los describen Kelly y Lesh (2000) y Steffe y Thompson (2000), los experimentos de enseñanza se reconocen como pertenecientes a la investigación de diseño.

Los investigadores se distancian de los contextos de laboratorio y se introducen en las aulas. No obstante, a diferencia de la "*investigación basada en el aula*" (classroom based-research), las intervenciones en el aula son realizadas por uno de los investigadores, y no por el docente habitual del aula, a no ser que éste se involucre plenamente en la investigación. Además, están determinadas y delimitadas por los objetivos de la investigación, anteponiéndose éstos a lo que desde el punto de vista del docente pueda ser más adecuado para los alumnos (Kelly y Lesh, 2000).

En estos estudios, los investigadores se convierten en una parte integral del sistema que están investigando, interaccionando con él y conduciendo a complejas interacciones que rompen la habitual distinción entre investigadores, docentes y alumnos. El investigador actúa a veces como docente, otras como alumno, y los alumnos y el docente, o docentes, a menudo colaboran en la búsqueda de aspectos críticos, perspectivas prometedoras, datos relevantes e interpretaciones útiles (Kelly y Lesh, 2000).

Se espera que el alumno construya conocimiento matemático, que el docente (investigador-docente) construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento matemático por parte de lo alumnos y, que los demás investigadores, construyan conocimiento sobre ambos y sobre sus interacciones. Esta distinción de diversos planos de acción ha conducido a que en ocasiones se denomine a estos estudios *experimentos multiniveles o multietapas* (*multi-tiered)* (Confrey, 2006; Lesh y Kelly, 2000).

¿En qué consisten?

En general un experimento de enseñanza involucra una secuencia de episodios de enseñanza en los que participan un investigador-docente, uno o más alumnos y un investigador-observador, que aportará interpretaciones alternativas a las del investigador-docente (Steffe y Thompson, 2000). En estos estudios se ha de recoger información de todo lo que ocurre en el aula para lo que se realizan grabaciones de video y/o toma de notas. El tiempo de duración puede ser variable, de unas horas a un año académico. El ambiente a observar puede ser desde pequeñas habitaciones-laboratorio para entrevistas, a clases completas o incluso ambientes de aprendizajes más grandes. Y el centro de interés puede ser tanto el desarrollo de los alumnos, como el de los docentes o de unas ideas o actividades de enseñanza determinadas (Kelly y Lesh, 2000).

Objetivos

El objetivo es estudiar la naturaleza del desarrollo de las ideas, herramientas o modelos en los que están contenidos los alumnos, profesores o grupos, no generalizar sobre ellos. El foco de atención pueden ser el desarrollo de los alumnos, de los docentes, de ambientes de enseñanza en el aula, o de actividades de enseñanza, entre otros casos (Kelly y Lesh, 2000).

Según estos autores, éste es un diseño centrado en la investigación del desarrollo de sistemas complejos, autoorganizados, en interacción y adaptativos, cuya evolución es a menudo extremamente sensible a pequeños cambios en sus condiciones, y que involucran la interacción de los alumnos, de los docentes y de las ideas o actividades de enseñanza. "*En general los experimentos de enseñanza se centran en el desarrollo que ocurre en ambientes conceptualmente ricos que son especialmente diseñados para optimizar las oportunidades de que desarrollos relevantes ocurran de modos observables"* (Kelly y Lesh, 2000, p. 192).

Los experimentos de enseñanza se hacen para testar y generar hipótesis durante el experimento en general o durante cada uno de los episodios. Las hipótesis podrán ser formuladas inicialmente o en el transcurso de los episodios, mediante la revisión de los datos de los episodios previos, siendo en ocasiones necesario abandonar hipótesis a la luz de los datos y formular nuevas hipótesis. Los investigadores deberán entonces, planificar las sucesivas interacciones en el aula y continuamente postular los posibles significados que subyacen al lenguaje y acciones de los alumnos, siendo así como los alumnos van guiando al investigador (Steffe y Thompson, 2000).

Refinamiento progresivo

En este proceso se distingue una idea inherente a los experimentos de enseñanza, así como a los experimentos de diseño, el "*refinamiento progresivo";* resultado del ciclo recurrente formado por la formulación de hipótesis, la experimentación en el aula y la reconstrucción de las hipótesis. Los investigadores inician la investigación con un modelo preliminar basado en sus asunciones teóricas y su experiencia previa. A lo largo de la interacción con los alumnos, los datos obtenidos permiten confirmar o rechazar las hipótesis inicialmente imprecisas y sugieren nuevas formas de experimentación que pueden conducir al desarrollo de un modelo firme de la actividad mental de los alumnos. Entonces el ciclo vuelve a iniciarse.

En el desarrollo del ciclo de la investigación existen dos objetivos que se mantienen en oposición. Por una parte, se quiere averiguar si el modelo permanece viable a la vista de los datos obtenidos en la investigación. Por otra parte, los investigadores están dispuestos en todo momento a modificar el modelo ante observaciones inesperadas (Confrey, 2006; Steffe y Thompson, 2000).

En las intervenciones en el aula el investigador-docente debe dejar a un lado sus hipótesis o conjeturas y centrarse en explorar las formas en que los alumnos actúan y dotan de significado a los conceptos que se estén trabajando. Para ello es importante que tenga conocimientos previos sobre dichos aspectos, en relación con los contenidos que se estén abordando, y que aprenda a interaccionar con los alumnos. Los investigadores durante la intervención en el aula estarán atentos a las contribuciones de los alumnos, a la trayectoria de la interacción y a todo lo que ocurra en el aula.

Inicialmente el investigador-docente cuenta con un conjunto de posibilidades y un sentido de la dirección donde se puede ver conducido por los alumnos, pero no conoce los modos en que éstos van a proceder, ni cómo deberá actuar a lo largo de las intervenciones en el aula. Por este motivo, a lo largo del desarrollo de los episodios de enseñanza, se verá obligado a actuar de forma intuitiva, aunque responsable, en el intento de explorar el pensamiento y razonamiento de los alumnos, poniéndose en su lugar para prever las posibles respuestas o reacciones a las actividades propuestas. Este tipo de intervenciones permiten generar hipótesis.

Conforme avanza el experimento y el investigador-docente adquiere más experiencia con los alumnos, a menudo tomará una postura analítica en vez de intuitiva y responsable. Se habla de interacciones analíticas cuando se dispone de hipótesis precisas sobre los esquemas o acciones de los alumnos y se realiza una interacción para comparar sus acciones con acciones correspondientes a dicha hipótesis (Steffe y Thompson, 2000).

El interés del investigador-docente se centra en analizar cuales son las capacidades del alumno, siendo una fuente de información esencial lo que el alumno no es capaz de hacer.

Análisis de los datos

En el desarrollo del experimento, los investigadores deberán trabajar de manera conjunta en el análisis de los datos y planificación de las intervenciones, pues la experiencia de ser docente y de ser observador, son significativamente distintas. Ambos tipos de investigadores pueden aportar aspectos relevantes y complementarios, facilitando una interpretación acertada de lo ocurrido en el aula (Steffe y Thompson, 2000).

Una parte crítica de esta metodología es el *análisis retrospectivo* de los datos recogidos de la actividad ocurrida en el aula. Mediante el análisis de las grabaciones o notas recogidas durante cada intervención el investigador-docente puede reactivar sus recuerdos de las experiencias vividas en el aula pudiendo así recordar las interpretaciones espontáneas que fueron realizadas, en el momento de la intervención, como respuesta a las acciones de los alumnos.

Además, el conjunto de los datos permite hacer un análisis de la evolución de los alumnos pudiendo detectar perspectivas de las interacciones de los alumnos no observadas durante el transcurso de la investigación. De esta forma, el investigador-docente puede localizar al alumno en un contexto evolutivo y modificar o estabilizar sus interpretaciones originales. En definitiva, lo que los investigadores persiguen es elaborar un modelo de los cambios que son considerados aprendizaje o desarrollo de los alumnos a lo largo del experimento de enseñanza, entendiendo éstos como ocasionados por las maneras de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente. Este modelo tiene el potencial de conectar la investigación y la práctica educativa.

Una consideración a tener en cuenta, señalada por Steffe y Thompson (2000), es que en los experimentos de enseñanza una sola observación no es muestra de aprendizaje o desarrollo. Un cambio es la transición de un punto a otro y, por tanto, requiere de al menos dos observaciones en diferentes momentos. En el transcurso del estudio los investigadores intentarán aprender qué cambios pueden inducir en los alumnos y cómo pueden explicarse. En ocasiones ocurre que una observación puede ser reinterpretada posteriormente como paso previo a un cambio que no era predecible en dicho momento.

Sobre el modelo

El modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos está basado, no sólo en el análisis conceptual del lenguaje y las acciones de los alumnos, sino también en los constructos teóricos establecidos en un análisis conceptual previo no involucrando a los alumnos. Ambos análisis actúan de manera entrelazada. Los constructos teóricos son utilizados para analizar el lenguaje y las acciones de los alumnos y, por tanto, condicionan el modo de actuación del investigador-docente en su interacción con ellos. Recíprocamente, estos constructos teóricos son modificados en su puesta en práctica pudiéndose establecer una necesidad de elaborar constructos teóricos noveles. Por tanto, no consiste en la confirmación de unos constructos teóricos previamente construidos, sino en la acomodación del modelo a la realidad observada. El modelo obtenido será de utilidad siempre y cuando vuelva a emerger en otras intervenciones semejantes con alumnos. Será viable mientras se mantenga adecuado para explicar las contribuciones independientes de los alumnos desde una determinada perspectiva (Steffe y Thompson, 2000).

Calidad

Con respecto a la evaluación de la calidad, los autores Steffe y Thompson hacen referencia a la validez de los resultados, la replicabilidad, y la capacidad de generalización. Ante todo, destacan la necesidad de que los investigadores que realizan experimentos de enseñanza justifiquen sus afirmaciones e interpretaciones y aporten evidencias que las apoyen.

En este tipo de estudios no tiene sentido la replicación en el sentido estricto del término sino el reemplazo o sustitución del modelo elaborado por otro más avanzado, realizando posteriores experimentos de enseñanza que utilicen el modelo obtenido como material conceptual a ser reorganizado. Así, no sólo se comprueban los resultados del experimento de enseñanza previo, además, se desarrolla el modelo de modo que es aplicable a un mayor número de contextos, aumentando, por tanto, su capacidad de generalización. No obstante, no se puede pedir que los resultados de un experimento de enseñanza sean generalizables en el sentido estricto del término. La cualidad que poseen estos resultados es la de ser explicativos y poder ser adaptados en caso de interacción con otros alumnos.

7.4 Experimentos de enseñanza trasformativos y dirigidos por una conjetura

El estudio que se recoge en este informe es un *experimento de enseñanza trasformativo y dirigido por una conjetura,* en términos de Confrey y Lachance (2000); un tipo de estudios que se ubica dentro de los experimentos de diseño. En particular es un experimento de enseñanza, aunque difiere en algunos aspectos de la definición descrita en el apartado anterior.

Estos experimentos se desarrollan en el aula y están habitualmente dirigidos a investigar nuevas estrategias de enseñanza o a analizar diferentes enfoques para el contenido y la pedagogía de un conjunto de conceptos matemáticos, siendo su característica fundamental la conjetura que lo define y actúa de guía en el proceso de investigación. Está enfocado al trabajo en clases "normales", no en clases donde se suponen las "mejores prácticas".

El paradigma en el que se encuadra es constructivista, completado desde una perspectiva sociocultural y una sensibilidad al pensamiento de los alumnos, al reconocerse que, mediante la atención al pensamiento de los alumnos, se pueden detectar relaciones, preguntas, representaciones, soluciones y, en general, posibilidades que en ocasiones escapan a la visión de los expertos.

La investigación es en sí misma una intervención en el aula, aportando información directa sobre cómo llevar los resultados a la práctica.

En los siguientes apartados desarrollamos las características de este diseño, resumiendo a Confrey y Lachance (2000). Detallamos los componentes de este modelo de investigación, describiendo su articulación en el proceso de investigación, y comentamos el tipo de análisis y recogida de datos que acompaña a estos estudios. Finalmente discutimos el modo en que se evalúan estas investigaciones.

7.4.1 La conjetura y el marco teórico

Los experimentos de enseñanza trasformativos y dirigidos por una conjetura se basan en una conjetura, es decir, en "*una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes*" (pp. 234-235), la cual es revisada y elaborada a lo largo del proceso de investigación. No existen hipótesis a ser probadas sino que la conjetura es la guía de la investigación, existiendo, además, objetivos y preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta.

Según explican Confrey y Lachance, la conjetura no está fijada de antemano desde el principio de la investigación, sino que evoluciona constantemente conforme la investigación progresa; idea que conectan con la visión de la evolución de la teoría de Lakatos a través de una incesante mejora de especulaciones y criticismo. La conjetura es como un gran esquema que va emergiendo de muchas piezas inicialmente inconexas, haciéndose cada vez más conexo al ayudar al investigador a percibir nuevos sucesos o relaciones y hacerle cambiar su perspectiva inicial.

En la conjetura se distinguen dos dimensiones: una de contenido matemático (qué debe enseñarse) y otra pedagógica (cómo debe enseñarse este contenido). Esta última dimensión guía al investigador en cómo necesita ser organizada la clase para la enseñanza y qué tipo de actividades, herramientas y recursos son necesarios para trabajar el contenido en cuestión. De acuerdo con ella se van a elaborar los elementos de instrucción de la intervención: el currículo, la interacción en el aula, la enseñanza, y la evaluación. La conjetura es una manera de reconceptualizar las formas de abordar el contenido y la pedagogía de un conjunto de objetos o contenidos matemáticos incluyendo, entre otros aspectos, cómo las matemáticas deben ser organizadas, conceptualizadas o enseñadas para un propósito educativo concreto. A menudo procede de una falta de satisfacción del investigador con los resultados de las prácticas habituales.

Para poder ser interpretada, la conjetura debe estar situada en una teoría que la relacione con otros aspectos de la educación o de las matemáticas. La teoría sirve para estructurar las actividades y la metodología en el experimento de enseñanza, ayuda a conectar la dimensión pedagógica y la dimensión de contenido matemático de la conjetura, determina qué se cuenta como evidencia, e influye en la elaboración de las categorías de observación y en la interpretación de los datos. La teoría, así como la ideología de los investigadores, interacciona con la construcción y articulación de la conjetura, influenciando todos los componentes de la enseñanza diseñados para operativizar la conjetura.

7.4.2 Desarrollo del experimento de enseñanza

Debido a que gran parte del diseño de la investigación se basa en la conjetura, es importante que se profundice en la comprensión y definición de ésta, de forma previa al desarrollo del experimento. Para ello pueden llevarse a cabo estudios preliminares relacionados con ciertos aspectos de la conjetura si así se considera necesario. En el plan general de diseño de la investigación también deben incluirse los productos potenciales de dicho estudio. La obtención de productos de varias formas y estructuras, permite asegurar que la conjetura llegará a una diversidad de público que podrá contribuir a su desarrollo.

Describimos, a continuación, el papel en la intervención en el aula de cuatro elementos principales de la enseñanza: el currículo, la interacción en el aula, el papel del docente y la evaluación. La Figura 7-1 muestra un modelo de este tipo de experimentos tomado de Confrey y Lachance (2000).

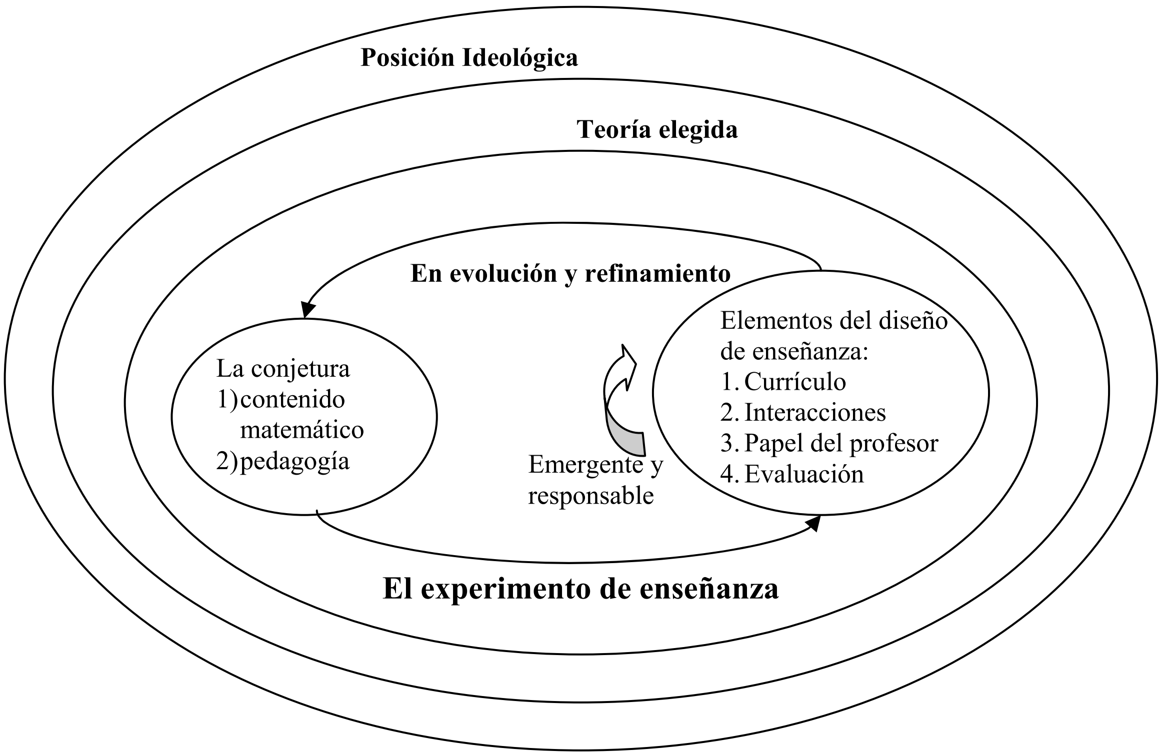


Figura 7-1: Modelo para el experimento de enseñanza trasformativo y dirigido por una conjetura (Confrey y Lachance, 2000).

El currículo

La conjetura determinará cuales son las áreas de contenido a cubrir durante la intervención en el aula, siendo necesario tener en cuenta el contenido que los alumnos y el docente han de cubrir durante dicho periodo, así como lo que han abordado en lo que ha trascurrido de curso. Esto puede obligar a realizar ciertos compromisos con el docente, sin embargo, el currículo no podrá ser diseñado por completo desde un principio, ciertas decisiones en el experimento serán tomadas a partir de lo que ocurra en las intervenciones previas. Este aspecto distingue la implementación de un programa de una intervención dirigida por una conjetura.

Los autores califican el currículo como responsable y emergente. Responsable en el sentido de que las actividades deben ser diseñadas de forma flexible y abierta, para poder adaptarlas en función de las respuestas e innovaciones aportadas por los alumnos. El responder a las necesidades y acciones de los estudiantes también hace al currículo emergente. Mediante la interacción con los alumnos el investigador profundiza en diversos aspectos del contenido, mirándolo siempre a través de las lentes de la conjetura. Los cambios en el currículo serán más significativos y mayores en número que los cambios en la conjetura pues ésta debe ser robusta y sufrir únicamente simples elaboraciones y refinamientos evolutivos.

La interacción en el aula

Este tipo de investigaciones son experimentos de enseñanza, por lo tanto, el investigador deberá decidir como va a estructurarse la enseñanza teniendo en cuenta ambas dimensiones de la conjetura: la pedagógica y la de contenido. El tipo de actividades elegidas determinará, en cierto modo, el tipo de interacción esperada en el aula durante la intervención. Las decisiones relativas a la forma en que se van a llevar a cabo estas interacciones, son decisivas para planificar los métodos de recogida de datos.

El papel del docente

Es necesario decidir quien va actuar como docente en el aula y cuál será su papel durante las intervenciones, el cual vendrá determinado por la conjetura y por las actividades elegidas. Lo esencial es que conozca la conjetura en profundidad e intervenga en el análisis preliminar y final de los datos y en la planificación de las sesiones. Por lo tanto, deberá ser miembro del equipo investigador.

La evaluación

Al igual que los demás componentes del experimento, las actividades de evaluación del aprendizaje y progreso de los alumnos deben estar informadas y ser consistentes con el contenido, la pedagogía y el marco teórico de la conjetura, así como con los otros componentes de la intervención. Los resultados de la evaluación no sólo aportaran datos relacionados con el impacto de la intervención, también informarán sobre el proceso de intervención, guiando la evolución de la conjetura y del currículo. Los autores recomiendan realizar diferentes tipos de evaluaciones a lo largo del proceso investigador.

7.4.3 Recogida de datos y análisis

La recogida de datos que acompaña a este diseño es exhaustiva para poder describir con precisión las interacciones ocurridas en el aula, la actuación y evolución de los alumnos, y las reflexiones y decisiones tomadas por los investigadores a lo largo del proceso de investigación.

Según los autores, este tipo de diseño requiere la participación de un equipo de investigadores para poder realizar una adecuada recogida de datos, pero principalmente para poder discutir y refinar las interpretaciones y planes de forma continuada. En este tipo de investigaciones deben utilizarse múltiples métodos de recogida de datos. Para capturar información sobre la interacción en el aula es recomendable grabar las sesiones en video, pudiéndose completar esta recogida con la toma de notas. Se considera necesario realizar evaluaciones individuales a los alumnos, para un mejor seguimiento de su progreso y aprendizaje, recogiéndose también muestras de su trabajo escrito.

Además, se debe recoger información sobre el pensamiento de los investigadores y las decisiones tomadas a lo largo del proceso de investigación, para poder describir la evolución de la conjetura y del diseño de las intervenciones en el aula. Los investigadores deben realizar anotaciones de sus pensamientos y reflexiones sobre la interacción y su continuación, pudiendo llegar a ser útil entrevistar a cada uno de ellos.

En este diseño de investigación son necesarios dos tipos de análisis de datos, los cuales tienen lugar en momentos diferentes. El primero de ellos, denominado análisis preliminar y continuo, se refiere al análisis de los datos después de cada intervención. Este análisis conduce a la toma de decisiones con respecto a futuras intervenciones, y facilita la revisión y el desarrollo de la conjetura de investigación. El otro análisis, denominado análisis final, es el análisis de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos. Este análisis conduce a la construcción de una historia coherente de la evolución de la conjetura y de la evolución del comportamiento o pensamiento de los alumnos a lo largo de la intervención.

Una descripción detallada del proceso de investigación, en la que se justifiquen las decisiones tomadas, es indispensable para que pueda llevarse a cabo una adecuada valoración del trabajo de investigación realizado con este diseño y pueda garantizarse su calidad.

En este análisis final, los métodos a utilizar dependerán de los métodos usados para recoger los datos, los resultados del análisis preliminar y la conjetura en sí misma.

7.4.4 Evaluación de la investigación

El hecho de que el diseño de este tipo de investigaciones esté regulado por una conjetura bien elaborada y explícitamente descrita, lo hace significativo y valioso para la investigación educativa. La dificultad radica en demostrar que realmente la conjetura guía el diseño de la práctica en el aula y el análisis de los datos.

La novedad y naturaleza emergente de esta metodología de investigación hace que no se puedan adoptar los estándares de calidad que se aplican en modelos de investigación más tradicionales. Los estándares de validez interna, validez externa, fiabilidad y objetividad no parecen adecuados, según Confrey y Lachance, para este tipo de diseño. Por este motivo los autores proponen, como indicadores de la calidad de la investigación, la calidad de los procesos internos de la investigación y su impacto potencial en la práctica.

Asegurar la calidad de los procesos internos

Teniendo en cuenta que no es posible evaluar la calidad de todos los aspectos del proceso de investigación, Confrey y Lachance proponen como medidas para dicha evaluación el poder explicativo de la conjetura, la racionalidad de la reconstrucción de la historia del proceso de investigación, y la fidelidad a la posición ideológica.

La calidad de la conjetura puede ser considerada como un asunto de validez aparente, juzgada por observadores externos. Al final del estudio, investigadores y docentes pueden evaluar la validez aparente de la conjetura elaborada, analizando su contenido, su camino de evolución y su relación con la literatura. Para ello, los investigadores responsables del estudio deberán aportar suficiente información sobre la conjetura, su contenido y su evolución, la pedagogía y el marco teórico.

Por otra parte, la calidad del proceso puede ser juzgada evaluando la coherencia de la historia que describe la relación dialéctica entre la conjetura y los sucesos ocurridos en el aula. Para ello, es necesario aportar datos tanto preliminares como del análisis final.

La fidelidad del estudio a su posición ideológica puede ser juzgada a través de una audiencia externa que valore si los datos aportados, de los alumnos, son suficientemente auténticos y extensos para convencer al lector de las argumentaciones que se están realizando.

También será importante asegurar que los datos son creíbles, fiables y que pueden confirmarse. Para ello los investigadores necesitarán demostrar que se ha reconstruido de forma correcta lo que los alumnos estaban experimentando. También deben describir con detalle las decisiones metodológicas y analíticas tomadas y probar que los resultados proceden de los datos recogidos. Es esencial presentar argumentos convincentes que confirmen los resultados de la investigación.

Evaluar el impacto potencial

La segunda parte del análisis de la calidad de estos estudios se centra en evaluar el modo en que los resultados están conectados con un cambio alcanzable, es decir, evaluar el potencial, de estos resultados, de actuar como una catarsis para el cambio. Los criterios propuestos por Confrey y Lachance a este respecto son:

- *Viabilidad:* Los productos de la investigación deben ser viables de implementar y útiles en todas las aulas.
- *Sostenibilidad:* Los productos de calidad deberán resistir y mantener sus impactos durante un periodo considerable de tiempo. Esto sólo podrá verificarse con el paso del tiempo, pero puede ser evaluado mediante comparación con otro tipo de productos.
- *Naturaleza convincente:* Los resultados y productos de la investigación deben convencer de la necesidad del cambio, a los docentes o agentes educativos afectados.
- *Adaptabilidad:* Los productos deben ser adaptables a multiplicidad de contextos
- *Capacidad generativa:* La conjetura debe aportar a los docentes, o agentes involucrados, un modo poderoso de volver a conceptualizar una variedad de sucesos, relaciones y prácticas.

Estos criterios son demasiado ambiciosos para un sólo equipo de investigadores, no obstante, Confrey y Lachance exponen que, conforme la investigación y la práctica se encuentren más integradas, los investigadores desarrollarán su capacidad de evaluar estos criterios de forma previa a la implementación de los estudios. Es un desafío encontrar modos creativos de trasladar la investigación a la práctica venciendo la resistencia del sistema educativo al cambio profundo.

CAPÍTULO 8

Recogida de datos

En este capítulo se describen las características metodológicas de este estudio, la conjetura de investigación que guía el trabajo, los sujetos con los que hemos trabajado, y todos los aspectos relativos al diseño, organización y desarrollo de las intervenciones en el aula. Se indica el tipo de datos que se han recogido y se presentan los resultados más destacados del primer análisis, realizado a lo largo del proceso de recogida de datos, el cual ha informado al diseño de las sucesivas sesiones.

8.1 Características generales del estudio

El trabajo que aquí se presenta, como toda investigación de diseño, es un estudio longitudinal, realizándose un total de seis sesiones de recogida de datos en el aula distribuidas en un periodo de un año. Según la terminología de Hernández, Fernández y Baptista (2003), el diseño longitudinal realizado es de tipo panel ya que el mismo grupo de sujetos es medido u observado en todos los momentos.

Además, se trata de un trabajo principalmente exploratorio y descriptivo, ya que se dispone de poca información procedente de estudios previos en relación con el desarrollo y uso de pensamiento relacional, y se persigue describir el modo en que los alumnos hacen uso de este tipo de pensamiento, así como otros aspectos relativos a la forma en que abordan la resolución de igualdades y sentencias numéricas.

Como se ha explicado en el capítulo 1, esta investigación pretende indagar en el proceso un proceso de enseñanza/aprendizaje que consiste en el trabajo con igualdades numéricas basadas en relaciones aritméticas básicas mediante una metodología de trabajo en el aula centrada en la discusión de las respuestas y estrategias utilizadas por los alumnos y la potenciación del uso de multiplicidad de estrategias para resolver las igualdades y sentencias consideradas, especialmente estrategias que hacen uso de relaciones y propiedades aritméticas.

En líneas generales, este estudio persigue profundizar en el estudio del fenómeno del uso y desarrollo de pensamiento relacional, y busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de éste, así como del trabajo de los alumnos con igualdades y sentencias numéricas. Nuestro interés se centra en el proceso de desarrollo conceptual matemático de los alumnos por lo que los demás elementos del ambiente de aprendizaje son considerados condiciones del entorno.

La finalidad última, como es característico de las investigaciones de diseño, es producir conocimiento que ayude a guiar la práctica educativa en el aula y a identificar prácticas de enseñanza-aprendizaje eficaces.

8.2 Conjetura de la investigación

Sabemos por la literatura existente que los alumnos de Educación Primaria, y en particular los de tercero, encuentran dificultades en la resolución de sentencias e igualdades numéricas, presentando una marcada tendencia computacional. Suponemos, como sugieren algunos estudios, que dichas dificultades no son atribuibles, en general, a falta de capacidad de los alumnos debido a su desarrollo evolutivo. Conjeturamos que los sujetos de nuestro estudio, darán muestras de dicha tendencia computacional y de dificultades en la comprensión de igualdades y sentencias no convencionales, aunque han recibido enseñanza previa relativa a la resolución de igualdades numéricas de no-acción. Se prevé que pongan de manifiesto en la resolución de igualdades abiertas y sentencias verdaderas y falsas los significados del signo igual denominados *operador, expresión de una acción* y *equivalencia numérica*. También es probable que manifiesten cierta inestabilidad en su comprensión del signo igual debido a que los estudios evidencian que el significado *operador* del signo igual es el más frecuente en el trabajo aritmético de los alumnos.

No obstante, mediante la consideración y discusión de distintas estrategias empleadas en la resolución de las sentencias e igualdades, en particular aquellas que hacen uso de propiedades aritméticas, los alumnos pueden desarrollar una adecuada comprensión de las igualdades y sentencias numéricas, y en especial del signo igual, y desarrollar pensamiento relacional como estrategia para su resolución.

En relación con el desarrollo y uso de pensamiento relacional y las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de las igualdades y sentencias numéricas, conjeturamos que los alumnos de tercero de Educación Primaria utilizarán estrategias basadas en el cálculo de las operaciones expresadas y en el uso de pensamiento relacional; siendo el primero de estos tipos de estrategias el más frecuente. La explicación, por parte de los alumnos, de las estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional, permitirá hacer explícito parte de su conocimiento sobre la estructura de la aritmética y facilitará el análisis de los aspectos y características de las sentencias en las que centran su atención al resolver igualdades y sentencias numéricas.

Este tipo de estrategias serán potenciadas favoreciendo el intercambio de distintas estrategias de resolución de una misma igualdad o sentencia y preguntando a los alumnos por formas de resolver las igualdades y las sentencias sin realizar operaciones.

8.3 Sujetos

Los sujetos participantes en el estudio son una clase de veintiséis alumnos, 12 niños y 14 niñas, de tercero de Educación Primaria de un colegio público de la provincia de Granada. De estos 26 alumnos, tres de ellos[47] (JA, RL Y MA) acuden a clases de apoyo de matemáticas dentro del horario escolar, siendo JA el alumno con más dificultades. Respecto a los demás alumnos, según el docente del aula, FB tiene dificultades en la expresión oral y RT es una alumna con problemas familiares que afectan significativamente a su rendimiento escolar.

En las seis intervenciones realizadas en el aula la asistencia es variable entre veintiséis y veintiún alumnos, con la excepción de la quinta sesión en la que

[47] A lo largo del trabajo empleamos siglas para referir a cada uno de los estudiantes. El investigador–docente es denotado con la sigla I.

entrevistamos individualmente a la mitad de la clase. Concretamente todos los alumnos asisten a la primera sesión, veintiuno a la segunda, veintidós a la tercera y veinticinco a la cuarta y a la sexta.

Aunque las primeras cinco sesiones y la sexta tienen lugar en curso académicos diferentes, en ambos casos el maestro oficial del aula es el mismo y los alumnos que participan también.

8.4 Organización del trabajo en el aula

En este apartado se describe el modo en que se organiza las intervenciones realizadas en el aula, detallándose la temporalización y objetivos de cada una de las sesiones y el tipo de actividades consideradas.

8.4.1 Temporalización de las sesiones

La intervención de la autora de este trabajo en el aula tuvo lugar durante un total de seis sesiones realizadas en días diferentes y durante el horario escolar; las primeras cinco sesiones durante el curso académico 2004–2005 y la sexta sesión durante el curso 2005–2006.

La primera sesión se realizó dos meses antes de la segunda. Las sesiones segunda, tercera, cuarta y quinta se realizaron con una separación entre ellas de una a dos semanas. La última sesión tuvo lugar aproximadamente ocho meses y medio después de la quinta sesión (ver fechas exactas en la Tabla 8-1). La temporalización de las sesiones fue intencionada, con la salvedad de los periodos vacacionales, para favorecer que nuestra intervención en el aula tuviera un efecto prolongado, disminuir la probabilidad de estar evaluando un aprendizaje memorístico, y contar con tiempo suficiente para analizar los resultados de cada sesión y tomar decisiones respecto a la siguiente intervención en el aula.

La duración aproximada de cada una de las sesiones fue de una hora en la mayoría de los casos con la excepción de la primera, de 30 minutos, y la quinta, de una hora y cincuenta minutos, en la que se realizaron entrevistas individuales de una duración media de ocho minutos (Ver Tabla 8-1 para conocer la organización y características generales de cada sesión).

Tabla 8-1: Organización y características generales de las sesiones de trabajo en el aula

Sesión	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Fecha	23–11–2004	24–1–2005	3–2–2005	16–2–2005	2–3–2005	16–11–2005
Nº alumnos asistentes	26	21	22	25	(13)	25
Duración	30’	1h	1h	1h	1h 50’ (8’ cada entrevista)	1h
Objetivos Principales	1. Evaluar comprensión inicial SI 2. Identificar y analizar las estrategias utilizadas (detectar uso de PR) 3.Familiarizar a alumnos con la metodología de trabajo y la docente 4. Detectar y analizar dificultades	1. Explorar dificultades detectadas en sesión 1 2. Examinar estabilidad y alcance de comprensión SI 3. Promover desarrollo comprensión SI 4.Identificar y analizar estrategias utilizadas (detectar uso de PR) 5. Detectar y analizar dificultades 6.Introducir a los alumnos la idea de las sentencias verdaderas y falsas	1. Promover desarrollo comprensión SI 2. Identificar y analizar estrategias utilizadas 3. Promover uso PR 4. Detectar y analizar dificultades	1. Evaluar comprensión SI 2. Identificar y analizar estrategias utilizadas 3. Detectar y analizar uso PR 4. Detectar y analizar dificultades	1.Profundizar en la actuación de tipologías de alumnos según el tipo de estrategias utilizadas previamente	1. Evaluar comprensión SI 2. Identificar y analizar estrategias utilizadas 3. Detectar y analizar uso PR 4. Detectar y analizar dificultades
Actividades realizadas	– actividad escrita –entrevista a 4 alumnos – discusión	– actividad escrita – discusión – actividad escrita – discusión	– discusión	– actividad escrita	– entrevistas individuales	– actividad escrita
Igualdades y sentencias numéricas empleadas	Igualdades abiertas	Igualdades abiertas				
			Sentencias v/f	Sentencias v/f	Sentencias v/f	Sentencias v/f
Recogida de datos	Grabación en video	Grabación en video	Grabación en video		Grabación en audio	
	Hojas alumnos	Hojas alumnos	Hojas alumnos	Hojas alumnos	Hojas alumnos	Hojas alumnos

SI = Signo igual, PR = Pensamiento relacional

8.4.2 Organización del trabajo en el aula

En la intervenciones en el aula y, por tanto, en la recogida de datos, participaron la investigadora y autora de este trabajo, un colaborador ajeno a la investigación, que realizó las grabaciones en video en las sesiones primera y tercera, y el maestro del aula que se encargó de la grabación en video de la segunda sesión.

Como es propio de la metodología utilizada, la recogida de datos ha sido exhaustiva, lo que ha permitido capturar con detalle las interacciones ocurridas en el aula. Se han llevado a cabo evaluaciones individuales para poder valorar el aprendizaje y evolución de cada alumno. Se han realizado grabaciones en video de las tres primeras sesiones, grabaciones en audio de las entrevistas de la quinta sesión, se han tomado notas de lo ocurrido en el aula y se han recogido las hojas de trabajo de los alumnos.

A lo largo del proceso de investigación, se han realizado anotaciones durante los diferentes encuentros realizados entre la investigadora y los directores de este trabajo, así como con otros colaboradores externos a la investigación que han sido consultados puntualmente. En dichas anotaciones se recogen las decisiones tomadas sobre el diseño de las diferentes intervenciones, junto con su justificación, y la opinión y pensamiento de los investigadores a lo largo del transcurso de la investigación. Todos los datos recogidos son de tipo cualitativo (ver Anexo B para consultar las transcripciones de las grabaciones realizadas).

Por tanto, en la recogida de datos en el aula se han utilizado tres métodos de obtención de información: observación participante, entrevista y cuestionario. El tipo de observación realizada, es denominada por Junker (1960), "participante como observador", lo que hace referencia a los casos en los que el investigador se vincula con la situación que observa, adquiriendo cierta responsabilidad en el grupo que observa, pero sin convertirse completamente en un miembro de dicho grupo ni compartiendo la totalidad de los valores ni de las metas de éste (Álvarez–Gayou, 2003).

Las entrevistas realizadas a algunos alumnos durante la primera sesión se realizaron en la propia mesa de trabajo de los alumnos, siendo la investigadora y la persona encargada de realizar la grabación en video, los que se desplazaban por el aula mientras los alumnos trabajaban individualmente en la actividad. En la quinta sesión, en cambio, se dispuso una mesa al fondo de la clase donde la investigadora fue entrevistando a cada uno de los alumnos. Cuando un alumno terminaba su entrevista, avisaba al compañero que sería entrevistado a continuación.

El maestro estuvo siempre presente en el aula, observando el desarrollo de las sesiones y haciendo llamadas de atención a algunos alumnos para mantener el orden en el aula. Previamente a cada sesión se le informó de forma general del trabajo que realizaríamos en el aula, sin darle muchos detalles para evitar producir cambios en la planificación y contenidos de su enseñanza. Su intervención en el proceso de investigación ha consistido en la grabación en video de una de las sesiones y en la aclaración de ciertos aspectos relativos a la interpretación de las producciones de los alumnos, posteriormente a la recogida de los datos.

8.4.3 Actividades realizadas[48]

Como se recoge en la Tabla 8-1, a lo largo de las seis intervenciones en el aula se realizan actividades escritas individuales, discusiones con toda la clase, algunas de ellas basadas en una actividad escrita previa, y entrevistas a varios alumnos, todo ello en el contexto de la resolución de igualdades abiertas y sentencias numéricas verdaderas y falsas.

En cada una de las intervenciones en el aula se emplearon una determinada colección de sentencias o igualdades que fueron elaboradas en función de los resultados de la sesión anterior, los objetivos de la sesión en cuestión, y considerando las sugerencias dadas por Carpenter et al. (2003) y nuestra experiencia en el estudio previo Molina (2005) (ver Tabla 8-2). En algunos casos consideramos sentencias que habían sido propuestas por los alumnos en intervenciones previas.

Utilizamos sentencias numéricas verdaderas y falsas e igualdades numéricas abiertas con un sólo término desconocido y con solución dentro del conjunto de los números naturales; todo dentro del contexto de la estructura aditiva e involucrando únicamente números naturales. En el caso de las igualdades abiertas los alumnos

[48] Para ayudar a comprender la fundamentación que guía el diseño de las intervenciones en el aula y, en particular, de las actividades a realizar, se describe en el anexo A, en líneas generales, nuestra visión de la enseñanza, el aprendizaje y la comprensión.

debían encontrar el (único) número natural que permite completar la igualdad para que sea verdadera y explicar el modo en que obtienen dicha respuesta. En cambio, en las actividades que involucran sentencias verdaderas y falsas, los alumnos debían juzgar la veracidad o falsedad de dichas expresiones, justificando su respuesta. En ocasiones también debían proponer correcciones para aquellas sentencias que consideraban falsas.

Las igualdades abiertas fueron utilizadas para evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos e identificar las estrategias empleadas y las dificultades encontradas en la resolución de diversos tipos de igualdades. Las sentencias verdaderas y falsas se emplearon, principalmente, para favorecer y detectar el uso de pensamiento relacional en la resolución de las sentencias, aunque también perseguían promover el desarrollo de la comprensión del signo igual e identificar las estrategias utilizadas por los alumnos.

Tabla 8-2: Clasificación de las igualdades y sentencias consideradas en las sesiones1, 2, 3, 4 y 6, en función de las propiedades en las que se basan.

Propiedad	**Sesión 1**	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4 y 6**
Conmutativa[1]	12 + 7 = 7 + □		10 + 4 = 4 + 10 15 – 6 = 6 – 15	75 + 23 = 23 + 75 18 – 7 = 7 – 18
Elemento neutro			0 + 325 = 326 125 – 0 = 125	
Elemento Inverso			24 – 24 = 0 100 – 100 = 1	
Compensación	8 + 4 = □ + 5 14 + □= 13 + 4 □ + 4 = 5 + 7 13 – 7 = □ – 6	12 – 4 = 13 – □ □ – 6 = 15 – 7 14 – 9 = □ – 10 9 – 4 = □– 3 17 – □ = 18 – 8	13 + 11 = 12 + 12 19 – 3 = 18 – 2 51 + 51 = 50 + 52 78 – 45 = 77 – 44	17 – 12 = 16 – 11 53 + 61= 54 + 60
Complementaria de la suma y la resta			13 – 5 + 5 = 13 27 – 14 + 14 = 26 100 + 94 – 94 = 100 62 – 13 + 13 = 65	16 + 14 – 14 = 36 122 + 35 – 35 = 122
Composición/ descomposición			78 – 16 = 78 – 10 – 6 231 + 48 = 231 + 40 + 8 24 – 15 = 24 – 10 – 5 7 + 7 + 9 = 14 + 9	254 – 37 = 254 – 30 – 7 6 + 4 + 18 = 10 + 18
Magnitud			72 = 56 – 14 37 + 22 = 300 10 – 7 = 10 – 4 7 + 3 = 10 + 3 18 + 3– 4 = 17	75 – 14 = 340 7 + 15 = 8 + 15
Reflexiva de la igualdad			93 = 93 7 = 12	

En esta tabla no se hace referencia a las sentencias utilizadas durante la sesión 5 debido a que a cada alumno se le propuso un grupo diferente de sentencias.
[1]En las sentencias e igualdades basadas en la no conmutatividad de la resta, también se encuentra involucrada la propiedad “Restricción del dominio de la resta”.

Las igualdades y sentencias consideradas son de acción y de no–acción, involucran las operaciones de suma y resta, e incluyen de dos a cinco términos dispuestos de todas las formas posibles a ambos lados del signo igual. Para su elaboración se tuvo en cuenta la magnitud de los números involucrados, así como la proporción de sentencias verdaderas y falsas, y la posición de la incógnita en el caso de las igualdades abiertas. En ninguna de las sentencias o igualdades se incluyen paréntesis.

Puesto que uno de los objetivos principales de esta investigación es el estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional, las sentencias e igualdades fueron diseñadas de modo que facilitaran el uso del pensamiento relacional en su resolución. En dicho diseño se utilizaron las propiedades aritméticas anteriormente señaladas en el capítulo 4, identificadas como susceptibles de ser trabajadas en este contexto.

Para la construcción de las sentencias elegimos no combinar ningunas propiedades, salvo la restricción del dominio de la resta que se consideró siempre en combinación con la no conmutatividad de la resta. Esto implica que no se consideren sentencias falsas basadas en las propiedades conmutativa de la suma (ej.,$12+5=5+14$), compensación (ej.,$12+4=13+5$), ni composición/descomposición (ej., $24+15=17+10+5$), pues, además de dichas propiedades, involucran la propiedad magnitud.

Es importante observar, además, que por definición no existen sentencias verdaderas basadas en la no conmutatividad de la resta, en la restricción del dominio de la resta, ni en la propiedad magnitud. En este último caso, la sentencia correspondería a la representación de un hecho numérico en formato de sentencia (ej.,$25+14=39$) cuya veracidad ha de ser juzgada realizando el cálculo exacto de las operaciones expresadas. Se observa, además, que las sentencias falsas de no-acción basadas en la propiedad reflexiva de la igualdad (ej.,$12+3=12+5$) corresponden a sentencias basadas en la propiedad magnitud.

El diseño concreto de las actividades de cada sesión aparece detallado en el apartado 8.6 donde se describen las características de cada sesión. Los resultados de las sesiones previas fueron considerados para el diseño de las sucesivas intervenciones, las cuales pretendían dar un paso más en el estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional y de la comprensión del signo igual, realizándose un seguimiento a veces global y otras individual, como recomiendan Confrey y Lachance (2000).

Las actividades escritas fueron siempre resueltas individualmente, usándose hojas distribuidas a los alumnos por la investigadora-docente (ver anexo B). Durante las discusiones participaron mayoritariamente aquellos alumnos que levantaron la mano para hablar. En pocas ocasiones algunas preguntas fueron planteadas de forma general a toda la clase, respondiendo varios alumnos, oralmente, de forma simultánea. En las discusiones los alumnos debían explicar distintas formas en las que habían resuelto las igualdades o sentencias. De este modo se favoreció la participación de un mayor número de alumnos y se hizo explícita la existencia de diversidad de formas de resolver una misma sentencia o igualdad así como nuestro interés por que los alumnos exploraran y explicaran todas las formas que se les ocurrieran.

En las sentencias e igualdades consideradas el signo igual es utilizado, en general, con el significado *equivalencia numérica.* No obstante, en las sentencias de acción, puede asignársele el significado *operador* (ej., $37+22=300$) o *expresión de una acción* (ej., $72=56-14$).

En las intervenciones realizadas en el aula nos centramos, primeramente en evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos e identificar las dificultades encontradas en las actividades propuestas y las estrategias utilizadas en su resolución. Inicialmente nuestro estudio del uso de pensamiento relacional fue observacional siendo en la tercera y en la quinta sesión cuando promovimos explícitamente su uso y manifestación preguntando a los alumnos por formas de resolver las sentencias sin realizar las operaciones.

No se promovió el aprendizaje de estrategias concretas basadas en el uso de pensamiento relacional sino la comprensión de las igualdades y sentencias como totalidades, que expresan una relación entre dos expresiones, y el desarrollo del hábito de observarlas en su totalidad y buscar relaciones entre los términos y expresiones involucradas, tratando de ayudar a los alumnos a hacer explícito y aplicar su conocimiento sobre las propiedades estructurales de la aritmética, que poseen de su experiencia aritmética previa.

Como puede comprobarse en las transcripciones de las discusiones realizadas en el aula, a lo largo de éstas la investigadora-docente enfatizó el interés de aquellas explicaciones aportadas por los alumnos que daban muestras del uso de pensamiento relacional, con la intención de que otros alumnos prestaran atención y fueran conscientes de la existencia de este tipo de estrategias para la resolución de igualdades y sentencias. El siguiente extracto ejemplifica este tipo de interacciones.

"CL ha hecho todas las operaciones y ha visto que los dos son iguales. Pero tenéis que fijaros porque, como ha dicho EF, no tenemos que hacer todas las cuentas, podemos ahorrárnoslas. Tú te has dado cuenta ¿verdad RB? Que como este número de aquí y éste es lo mismo, no hay que hacer todas las cuentas. Eso es muy importante porque así nos ahorramos mucho trabajo."

En general, cada explicación dada por los alumnos fue repetida por la investigadora para clarificar a los demás la estrategia empleada por sus compañeros, no haciéndose mención a ninguna relación aritmética cuando ésta no es explicitada por ninguno de los alumnos. Dicha repetición ayuda a enfatizar aquellas explicaciones que muestran el uso del significado del signo igual *equivalencia numérica*, llegando a hacerse explícito que para que una sentencia sea verdadera ambos miembros han de tener el mismo valor numérico.

8.5 Trabajo realizado en el aula entre las sesiones de recogida de datos

Durante el curso académico 2004/2005, en el que tuvo lugar la mayor parte de la recogida de datos, los alumnos utilizaron el libro de texto "*La tira de Colores. Matemáticas. Andalucía*" de Anaya (Ferrero, Gaztelu, Martín y Martínez, 2001).

Durante el siguiente curso académico, 2005/2006, en el que trascurrió la última intervención en el aula, el libro de texto utilizado fue "*Matemáticas 4*" de Santillana (Almodóvar, García, Garín, Gómez, Rodríguez y Uriondo, 2005), siendo abordado hasta la mitad del capítulo 3 previamente a nuestra última intervención en el aula.

En su docencia, el maestro utilizó estos libros de texto como guía[49], realizándose la mayoría de las actividades que en ellos se recogen, sólo omitiéndose ocasionalmente algunas actividades y modificándose ligeramente otras, a criterio del maestro. Para dar a conocer los contenidos que fueron abordados entre la realización de nuestras intervenciones en el aula, se describe a continuación el libro utilizado durante el curso 2004-2005, así como la parte del libro de texto del curso 2005-2006 trabajada previamente a la realización de la última sesión.

8.5.1 Descripción del libro de texto utilizado en el curso académico 2004/2005

El libro de texto, utilizado por el maestro como guía durante el curso académico 2004/2005, se organiza en los siguientes 15 capítulos:

- Capítulo 1: "Los números de tres cifras"
- Capítulo 2: "Los números de cuatro y de cinco cifras"
- Capítulo 3: "La suma y la resta"
- Capítulo 4: "Monedas y números"
- Capítulo 5: "La multiplicación"
- Capítulo 6: "Practicamos la multiplicación"
- Capítulo 7: "La medida de la longitud"
- Capítulo 8: "la medida del tiempo"
- Capítulo 9: "Forma y superficie"
- Capítulo 10: "Rectas y ángulos"
- Capítulo 11: "La división"
- Capítulo 12: "Medidas de capacidad y peso"
- Capítulo 13:"Triángulos y cuadriláteros"
- Capítulo 14: "Circunferencias y círculo"
- Capítulo 15: "Organización de la información"

En ellos se trabajan contenidos de números y operaciones (capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 11), de geometría (capítulos 9, 10, 13 y 14), de medida (capítulos 7, 8 y 12), y de tratamiento de la información (capítulo 15) y, en todos los capítulos, el cálculo mental y la resolución de problemas, incluyéndose también actividades de repaso de los contenidos abordados en los capítulos previos.

[49] El maestro planificó la temporalización del curso académico asignando de una o dos páginas a cada día lectivo del curso escolar.

Estructura de los capítulos

Cada capítulo comienza con una hoja que incluye un pequeño texto, relativo al contenido del capítulo, y una imagen que presenta un contexto sobre el que, a continuación, se plantean diversas cuestiones. Por ejemplo, como se observa en la Figura 8-1, en el primer capítulo el texto se refiere a la utilidad de los números, y la imagen, relativa a un circo, incluye elementos susceptibles de ser contados, datos numéricos de la longitud y peso de uno de los animales que aparecen, y elementos dispuestos en un orden.

A continuación, cada capítulo incluye cuatro apartados que abordan contenidos específicos. En el caso del primer capítulo, “Los números de tres cifras”, los títulos de los apartados son: la unidad, la decena y la centena; el valor de las cifras de un número; comparación de números; y los números ordinales (ver Figura 8-1 y Figura 8-2). En este caso la mayoría de las actividades de cada apartado involucra números de tres cifras como indica el título del capítulo.

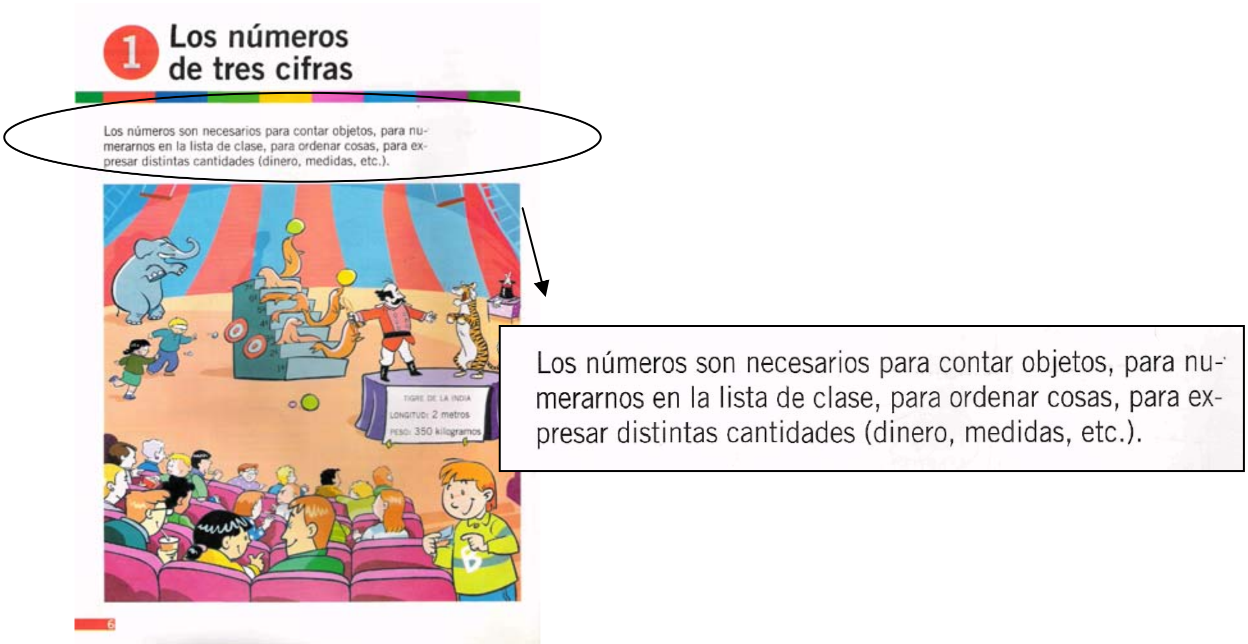


Figura 8-1: Primera página del capítulo 1 del libro de Texto de Anaya (Ferrero et al., 2001).

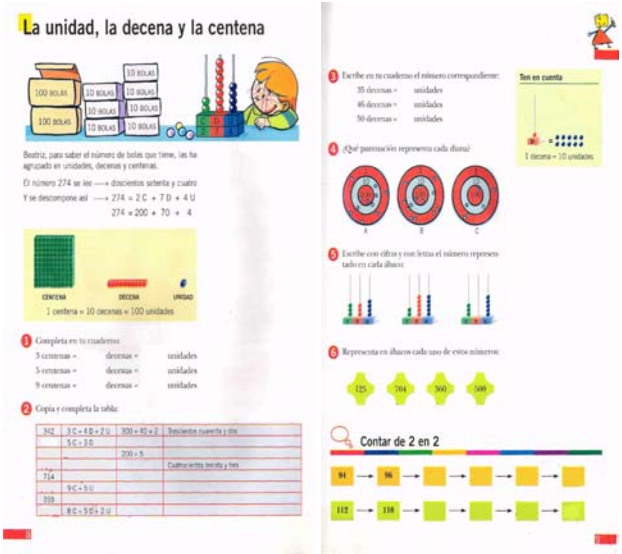


Figura 8-2: Ejemplo de uno de los apartados en los que se divide el capítulo 1 del libro de texto de Anaya (Ferrero et al., 2001).

Cada apartado ocupa dos páginas del libro y comienza con una breve presentación de un contexto que es utilizado para dar una explicación, de forma directa, utilizándose el lenguaje verbal, el lenguaje simbólico y representaciones e ilustraciones diversas. Tras la explicación se plantean al alumno 5 o 6 cuestiones o actividades de aplicación de lo explicado previamente. Al final de cada uno de estos apartados se incluye una breve actividad. En la mayoría de los casos consiste en alguna sucesión numérica a ser completada, ó colecciones de operaciones, para realizar mentalmente, acompañada de una explicación de la estrategia a utilizar (ver Figura 8-3).

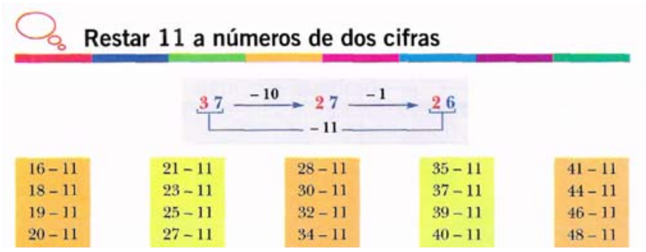


Figura 8-3: Ejemplo de un actividad para realizar mediante cálculo mental del libro de texto de Anaya (Ferrero et al., 2001)

En ocasiones en los márgenes del texto aparecen recuadros que recuerdan al alumno alguna información de utilidad, relacionada con el contenido que se esté trabajando en dichas páginas y necesaria para la resolución de las tareas (ver Figura 8-4).

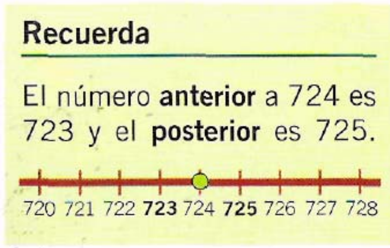


Figura 8-4: Ejemplo de los recuadros situados en los márgenes del texto de Anaya (Ferrero et al., 2001)

El resto de cada capítulo está compuesto por dos páginas de actividades sobre los contenidos de los apartados anteriores, una página con actividades de repaso, y otra página que incluye un problema verbal y un "juego para pensar". El planteamiento de dicho problema verbal aparece acompañado de una indicación de la estrategia a utilizar, tal como la organización de los datos en tablas o en diagramas de árbol, el planteamiento de preguntas intermedias o el método de ensayo y error. El "juego de pensar" es una actividad de matemática recreativa o un problema de respuesta múltiple.

Contenidos de Aritmética

Como se ha indicado previamente los capítulos que se centran en el contenido de "números y operaciones" son: el capítulo 1 "Los números de tres cifras", el capítulo 2 "Los números de cuatro y de cinco cifras", el capítulo 3 "La suma y la resta", el capítulo 4 "Monedas y números", el capítulo 5 "La multiplicación", el capítulo 6: "Practicamos la multiplicación" y el capítulo 11 "La división". Además, en todos los capítulos se trabajan contenidos de aritmética, ya sea en los ejercicios de repaso, en los problemas verbales, en las actividades de cálculo mental o en relación con otros contenidos tales como la medida (ej., del tiempo, de la longitud, de capacidad, de peso) ó la organización de la información.

Los contenidos concretos de Aritmética que se trabajan en el texto, presentados con brevedad, son los siguientes:

- Los números de tres, cuatro y cinco cifras: la unidad, la decena, la centena, la unidad de millar y la decena de millar.
- El valor de las cifras de un número de hasta cinco cifras.

- La comparación de números (<, > , =).
- Los números ordinales.
- La aproximación de números.
- La suma como unión y como incremento.
- La resta como disminución, como comparación y como complemento.
- La suma y resta con llevadas y sus términos.
- La suma de varios números.
- La prueba de la resta.
- Propiedades de la suma: conmutativa y asociativa.
- La multiplicación como suma de sumandos iguales.
- La división como reparto.
- La multiplicación y la división y sus términos.
- Las tablas de multiplicar.
- Propiedades de la multiplicación: conmutativa y asociativa.
- Multiplicar por diez, cien y mil.
- Multiplicar con llevadas.
- La división exacta y división inexacta.
- Relación entre los términos de la división. Prueba de la división
- Divisiones con divisores de dos y tres cifras.
- La división como operación inversa de la multiplicación.
- El cálculo mental

Epígrafes de cálculo mental

Como se ha mencionado previamente, a lo largo del libro aparecen pequeños epígrafes en los que se describe y se propone la práctica de una estrategia para el cálculo mental aconsejada para un tipo de operaciones concretas. Las estrategias presentadas en estos epígrafes se enumeran a continuación:

- sumar o restar 10 a un número
- sumar o restar 100 a un número
- sumar o restar decenas completas (ej., 10 + 70, 30 + 40)

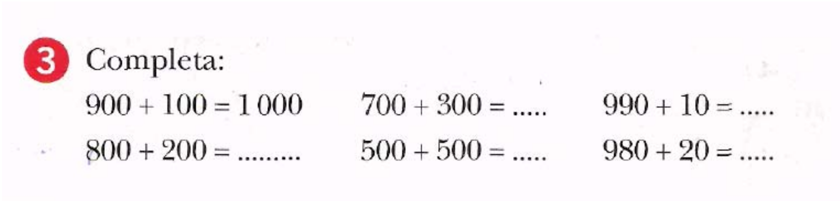
- sumar o restar 200, 300, 400, … a un número de tres cifras
- multiplicar números por 20, 30, 40,…
- multiplicar números por 200, 300, 400, …
- multiplicar números por 2000, 3000, 4000, …
- multiplicar tres números de una cifra de la forma más sencilla según los términos involucrados en cada caso
- sumar 9 a un número de dos cifras
- restar 9 a un número de dos cifras
- sumar 11 a un número de dos cifras
- restar 11 a un número de dos cifras
- sumar 18 a un número
- restar 18 a un número
- sumar 21 a un número
- restar 21 a un número
- multiplicar o dividir por 4
- multiplicar por 6

También se proponen, para resolver mediante cálculo mental, la descomposición de un número según el sistema numérico decimal, contar de 2 en 2 y contar de 5 en 5, pero en estos casos no se describe la estrategia a aplicar.

Las estrategias propuestas para cada tipo de operación no son abordadas explícitamente en ninguna otra actividad, por lo que queda bajo la responsabilidad del docente promover el uso de estas estrategias en otros contextos o en otras ocasiones.

Actividades aritméticas relacionadas con el uso y desarrollo de pensamiento relacional

Además de las actividades de cálculo mental anteriormente descritas, se identifican en el texto, en el contexto de la Aritmética, algunas explicaciones y actividades, no muy frecuentes, que pueden favorecer el aprendizaje o establecimiento de relaciones numéricas, y por tanto, de algún modo, el uso de pensamiento relacional, aunque no abordan directamente dicho tipo de pensamiento. Este es el caso de los apartados del libro que explican y proponen actividades relativas a las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación, las actividades de aproximación de números, las actividades de ordenación de números o expresiones aritméticas (ej., escribe < ó > entre las expresiones 200 + 40 + 3 y 200 + 40 + 8) y otras actividades en las que implícitamente se persigue que el alumno detecte algún patrón (Ver Figura 8-5). No obstante, en este último tipo de tareas no se le plantea ninguna cuestión al alumno que pueda favorecer la observación del patrón, quedando, por tanto, bajo la responsabilidad del docente el incidir o no en ese sentido.



3 Completa:

900 + 100 = 1 000 700 + 300 = ... 990 + 10 = ...

800 + 200 = ... 500 + 500 = ... 980 + 20 = ...

Figura 8-5: Actividad del libro de texto de Anaya (Ferrero et al., 2001) que puede permite la observación de un patrón o relación numérica entre los términos involucrados en las distintas igualdades.

Uso del signo igual en el libro de texto

A partir de un análisis del uso del signo igual en el libro de texto empleado por el maestro en el curso académico 2004/2005, se han identificado quince situaciones diferentes, las cuales se recogen en la Tabla 8-3. En dicha tabla se indica también si dicho uso forma parte de una actividad planteada al alumno o de una explicación y se identifica el significado con el que el signo igual es utilizado en cada caso y el tipo de igualdad o sentencia en la que aparece (acción o no–acción).

Como puede observarse, los significados del signo igual empleados en el texto son *equivalencia numérica, operador, expresión de una acción, expresión de una relación funcional o de dependencia* y *expresión de cierta conexión*; siendo estos dos últimos los menos frecuentes, el primero de ellos vinculado a la expresión simbólica de la prueba de la división y el segundo a la expresión de la equivalencia del valor de ciertas monedas representadas mediante imágenes (ver Figura 8-6).

Figura 8-6: Uso del signo igual entre imágenes en Ferrero et al. (2001).

Tabla 8-3: Presencia del signo igual en el libro de texto de Anaya utilizado por los alumnos en el curso académico 2004/2005.

Situaciones/usos del signo igual en el libro de texto	**Ejemplos**	**Lugar de aparición: explicación/ actividad**		**Sig. signo igual**	**Tipo de igualdad /sentencia**	
		E	**A**		**A**	**NA**
Expresa equivalencia entre unidades de distinto orden (con dos o más expresiones)	35 decenas = … unidades 1UM=10C=100D=100U	■	■	EN		■
Expresa equivalencia entre distintas expresiones de un número según su estructura en el SND, llegándose a encadenar tres expresiones	146 = 100 + 40 + 6 123 = 1C + 2 D + 3 U = 100 + 20 + 3	■	■	EN	■	■
Expresa equivalencia entre valores de monedas representadas en imágenes	Ver Figura 8-6	■	■	C		
Expresa equivalencia de cantidad de unidades de medida, con dos o más expresiones	2€ = 1€ + 50 cent + … 90 minutos = 1 hora y 30 minutos	■	■	EN	■	■
Expresa equivalencia de notación	1 metro = 1 m	■		ED	■	
Indica las operaciones a realizar en la resolución de un problema	¿Cuántas gominolas tiene Roberto? 18 – 13 = …	■		O	■	
Indica el resultado de una operación	6 x 4 = 24 5 + 2 + 1 = 8	■		O	■	
Plantea la actividad de completar una igualdad numérica	900 + 200 =…. 4 ○ 9 = 13 1000 = 900 + …		■	O/A	■	
Plantea una actividad de traducción del lenguaje aritmético al verbal o viceversa	13 + 7 = 20 "13 más 7 es igual a 20"		■	O	■	
Expresa equivalencia numérica entre expresiones mostrando una estrategia particular (encadena pasos que conducen al resultado de una operación)	Ver Figura 8-7	■		EN		■
Expresa la propiedad conmutativa ó asociativa de la suma y la multiplicación	347 + 265 = 265 + 347 8 x 3 = … x 8 Ver Figura 8-8	■	■	EN		■
Expresa la relación entre suma y multiplicación, llegándose a encadenar tres expresiones	6 + 6 + 6 + 6 = 6 x 4 = 24	■	■	EN	■	■
Expresa equivalencia numérica siendo usado, junto a los símbolos < y >, en actividades de ordenación de números o expresiones aritméticas	8 x 3 ○ 4 x 6		■	EN		■

Expresa una relación de dependencia entre los términos que componen la división (utilizándose lenguaje simbólico)	D = d x c + r	■	■	F	■	

Se utilizan las siguientes siglas para denotar los significados del signo igual descritos en el capítulo 2: P=propuesta de una actividad, O=operador, A=expresión de una acción, EN=equivalencia numérica, I=identidad, ED=equivalencia por definición o por la notación, D=definición de un objeto matemático, F=expresión de una relación funcional o de dependencia, C=indicador de cierta conexión o correspondencia, E=estimación.
SND= sistema de numeración decimal

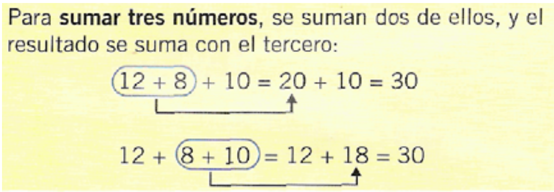


Figura 8-7: Uso del signo igual para encadenar pasos en el proceso de cálculo de varias operaciones, hasta la obtención del resultado (Ferrero et al., 2001).

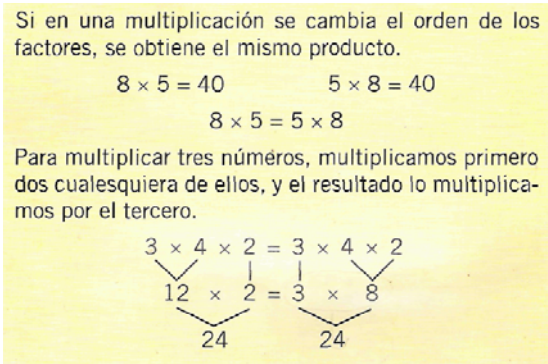


Figura 8-8: Uso del signo igual para expresar las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación. (Ferrero et al., 2001).

8.5.2 Descripción del libro de texto utilizado en el curso académico 2005/2006

Como ya se ha mencionado en el curso académico 2005/2006 los alumnos utilizaron el libro de texto "Matemáticas 4" de Santillana (Almodóvar et al., 2005). En el periodo previo a nuestra última intervención en el aula trabajaron concretamente dos páginas introductorias de repaso de contenidos del curso previo así como los dos primeros capítulos y la mitad del tercer capítulo de dicho texto. Por este motivo nos limitamos a describir esta primera parte del libro de texto.

En el apartado de repaso de contenidos del curso previo se presentan actividades de descomposición de un número en sus unidades de distinto orden, de ordenación de números de cuatro y cinco cifras, de cálculo de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, de identificación de tipos de ángulos, de polígonos y de cuerpos geométricos, de medida del tiempo, peso y volumen, de lectura de relojes digitales y analógicos, así como problemas verbales.

En los tres capítulos que le siguen se trabajan contenidos de números y operaciones, geometría, medida, resolución de problemas e interpretación de gráficos.

Estructura de los capítulos

Cada capítulo comienza con una doble página en la que se trabajan la comprensión lectora y la expresión oral, se proponen actividades relativas a contenidos de unidades anteriores y se propone una actividad de cálculo mental describiéndose la estrategia a utilizar (ver Figura 8-9).

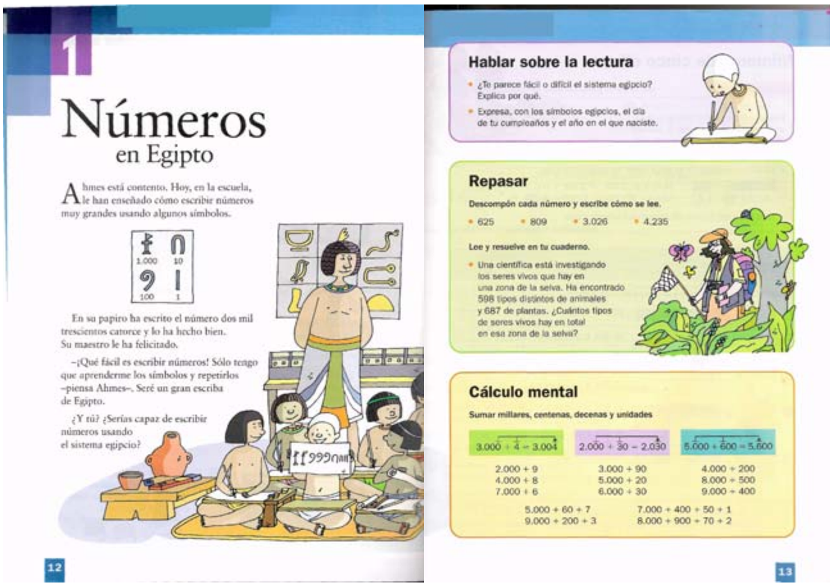


Figura 8-9: Primeras dos páginas del capítulo 1 del libro de texto de Santillana (Almodóvar et al., 2005).

A esta parte introductoria le siguen cuatro apartados, de dos páginas cada uno, en el que se trabajan contenidos diferentes. Por ejemplo, los cuatro apartados del primer capítulo son: Números de cinco cifras, comparación de números, aproximaciones y el reloj.

Cada uno de estos apartados contiene tres partes diferenciadas. La primera titulada “Observa” presenta brevemente un contexto que es utilizado para dar una explicación, de forma directa, utilizándose el lenguaje verbal, el lenguaje simbólico y representaciones e ilustraciones variadas, o una actividad que es resuelta explicándose cuidadosa y secuenciadamente cada paso. La segunda parte, “Comprende”, propone al alumno actividades de aplicación directa de la explicación previa con algunas indicaciones del proceso a realizar o con parte de la respuesta indicada; son actividades guiadas. Esta parte va en ocasiones seguida de un recuadro destacado en otro color en el que se resumen en una frase o párrafo breve el contenido que se persigue que el alumno aprenda en dicho apartado. La última parte, “practica”, está compuesta por varios ejercicios de aplicación directa del contenido de este epígrafe, supuestamente graduados según su dificultad, y algunas actividades de profundización en los contenidos (ver Figura 8-10).

El capítulo concluye con una doble página: en una parte se trabaja la resolución de problemas o la interpretación y uso de gráficos y, en la otra, se proponen actividades sobre todos los contenidos trabajados en el capítulo.

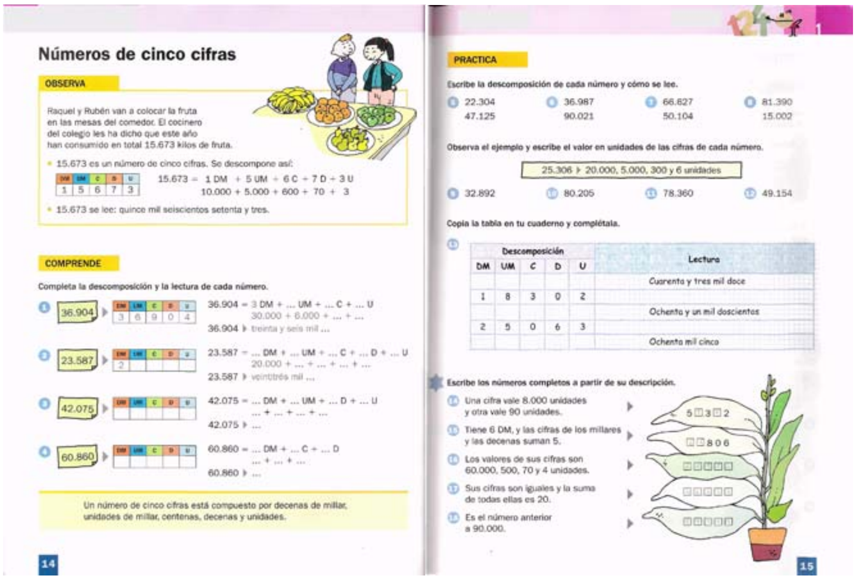


Figura 8-10: Primer apartado del capítulo 1 del libro de texto de Santillana (Almodóvar et al., 2005)

Contenidos de Aritmética

Los contenidos de aritmética abordados en estos tres capítulos son, presentados con brevedad, los que se enumeran a continuación:

- números de cinco cifras
- comparación de números

- aproximaciones
- relación entre la suma y la resta
- propiedades conmutativa y asociativa
- sumas y restas combinadas
- multiplicación por un dígito, por un número de dos cifras y por un número de tres cifras

Epígrafes de cálculo mental

Como se ha comentado previamente, en la parte introductoria de cada capítulo se incluye una actividad de cálculo mental en la cual, al igual que en el libro de Anaya utilizado en el curso previo, se describe y se propone la práctica de una estrategia para el cálculo mental aplicable a un tipo concreto de operaciones. En los tres primeros capítulos, estos epígrafes abordan la suma de números con una única cifra no nula y con distinto número de cifras (ej., 3000 + 4; 2000 + 30), la suma y resta de números con una única cifra no nula e igual número de cifras (ver Figura 8-11) y la multiplicación de un número de una sola cifra por otro con una única cifra no nula (ej., 6 x 30; 7 x 400).

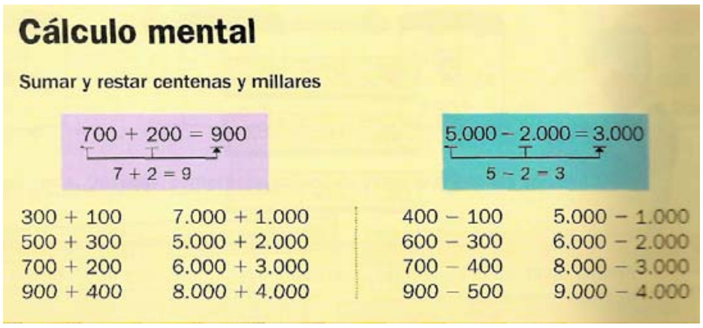
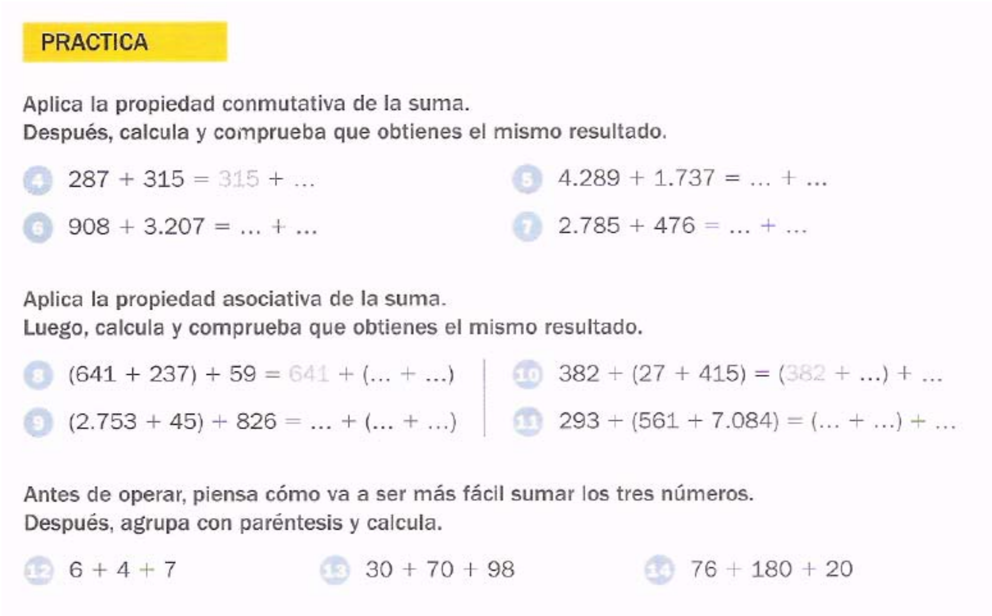


Figura 8-11: Ejemplo de epígrafe de cálculo mental del libro de texto de Santillana (Almodóvar et al., 2005).

Actividades aritméticas relacionadas con el uso y desarrollo de pensamiento relacional

En la parte del texto trabajada en el aula previamente a nuestras sexta intervención en el aula, además de las actividades de cálculo mental anteriormente descritas, las explicaciones y actividades que pueden favorecer el aprendizaje o establecimiento de relaciones numéricas y, por tanto, de algún modo, el uso de pensamiento relacional, son principalmente actividades relativas a las propiedades conmutativa y asociativa de la suma en las cuales se pide al alumno que complete igualdades numéricas y realice cadenas de operaciones en el orden que consideren más sencillo (ver Figura 8-12). No obstante, el desarrollo de este tipo de pensamiento por parte de los alumnos depende del modo en que se trabajen en el aula dichas actividades.


PRACTICA

Aplica la propiedad conmutativa de la suma.
Después, calcula y comprueba que obtienes el mismo resultado.

4 287 + 315 = 315 + ...
5 4.289 + 1.737 = ... + ...
6 908 + 3.207 = ... + ...
7 2.785 + 476 = ... + ...

Aplica la propiedad asociativa de la suma.
Luego, calcula y comprueba que obtienes el mismo resultado.

8 (641 + 237) + 59 = 641 + (... + ...)
9 (2.753 + 45) + 826 = ... + (... + ...)
10 382 + (27 + 415) = (382 + ...) + ...
11 293 + (561 + 7.084) = (... + ...) + ...

Antes de operar, piensa cómo va a ser más fácil sumar los tres números.
Después, agrupa con paréntesis y calcula.

12 6 + 4 + 7
13 30 + 70 + 98
14 76 + 180 + 20

Figura 8-12: Actividades del apartado "Propiedades conmutativa y asociativa" del capítulo 2 del libro de texto de Santillana (Almodóvar et al., 2005).

Uso del signo igual

En los tres primeros capítulos y el apartado de repaso del curso previo el signo igual es utilizado en las siguientes situaciones:

- Expresar equivalencia de cantidades de unidades de medida o entre monedas
- Indicar el resultado de una operación, disponiéndose la operación a la izquierda y el resultado a la derecha.
- Expresar equivalencia entre distintas expresiones de un número según su estructura en el SND, llegándose a encadenar tres expresiones (ej., 15673 = 1 DM + 5 UM + 6 C + 7 D + 3 U = 10000 + 5000 + 600 + 70 + 3).
- Relacionar números iguales, siendo utilizado junto a los símbolos >, <.
- Indicar las operaciones realizadas en la resolución de un problema
- Expresar la propiedad conmutativa y asociativa de la suma
- Plantear la actividad de completar una igualdad numérica

- Enlazar expresiones equivalentes en el proceso de resolución de una cadena de operaciones (ver Figura 8-13).

Se observa, por tanto, que el signo igual es utilizado con los significados *operador*, *expresión de equivalencia* (numérica y estricta) y *expresión de una acción*; apareciendo en igualdades y sentencias de acción y no-acción.

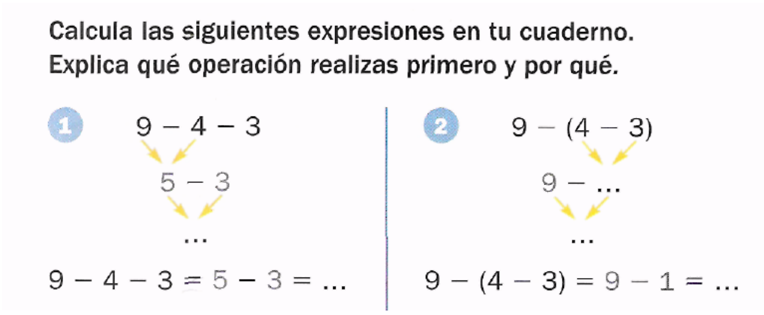


Figura 8-13: Actividad del capítulo 2 en la que se trabaja el uso de paréntesis en el libro de texto de SM (Almodóvar et al., 2005)

8.5.3 Trabajo realizado en el aula entre las sesiones

A continuación, en la Tabla 8-4, se indica la temporalización del seguimiento de los libros de textos con respecto a la realización de las intervenciones en el aula, con la intención de precisar los contenidos que los alumnos trabajaron antes y entre las sesiones de recogida de datos.

Tabla 8-4: Temporalización del seguimiento del libro de texto con respecto a las sesiones de recogida de datos.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="5">Antes de la sesión 1</td><td>Capítulo 1: Los números de tres cifras</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Los números de cuatro y de cinco cifras</td></tr>
<tr><td>Capítulo 3: La suma y la resta</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Monedas y números</td></tr>
<tr><td>Capítulo 5: La multiplicación</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Entre las sesiones 1 y 2</td><td>Capítulo 6: Practicamos la multiplicación</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capítulo 7: La medida de la longitud</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Entre las sesiones 2 y 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capítulo 8: la medida del tiempo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entre las sesiones 3 y 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entre las sesiones 4 y 5</td><td>Capítulo 9: Forma y superficie</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">Curso</td><td>Capítulo 10: Rectas y ángulos</td></tr>
<tr><td>Capítulo 11: La división</td></tr>
<tr><td>Capítulo 12: Medidas de capacidad y peso</td></tr>
</table>

Entre las sesiones 5 y 6	académico 2004/2005	Capítulo 13: Triángulos y cuadriláteros
		Capítulo 14: Circunferencias y círculo
		Capítulo 15: Organización de la información
	Curso académico 2005/2006	Capítulo 1: Números en Egipto
		Capítulo 2: Fibonacci y su suma
		Capítulo 3: Multiplicaciones en Babilonia

Enseñanza relativa a la comprensión del signo igual

Ordenación de números. Previamente a nuestra primera sesión, los alumnos trabajaron la comparación/ordenación de números de hasta tres cifras y el uso de los símbolos <, > e =, para la escritura ordenada de conjuntos de números (incluyendo elementos iguales), todo ello como parte del capítulo 1. En las actividades del libro los números a ordenar que aparecen son todos diferentes, pero el maestro introdujo números repetidos para trabajar conjuntamente los símbolos >, < e =. El uso conjunto de estos tres símbolos (<, >, =) también se trabajó en el contexto de expresiones aritméticas, involucrando la multiplicación, dentro de las actividades del capítulo 7.

En el primer capítulo del libro de texto de Santillana se vuelve a trabajar el uso conjunto de estos símbolos para ordenar números de cinco cifras.

Uso del signo igual. Como se ha podido observar en la descripción previa del uso que se hace del signo igual, en los libros de texto los alumnos encontraron igualdades y sentencias de acción y de no–acción en las que el signo igual era utilizado principalmente con los significados *equivalencia numérica, expresión de una acción* y *operador*. En la mayoría de los casos, el papel del alumno en las situaciones en las que aparece el signo igual es completar la igualdad numérica con el término, términos o símbolo que falta, ya sea en situaciones relativas a diferentes descomposiciones de un número, a expresiones particulares de la propiedad conmutativa de la suma o de la multiplicación o de la relación existente entre la suma y la multiplicación, o a un cálculo concreto entre números o entre cantidades adjetivadas. Por tanto, el alumno no hace un uso activo del signo igual, al no construir igualdades o sentencias numéricas por sí mismo.

No obstante, a lo largo de ambos cursos académicos el maestro recordó en repetidas ocasiones a los alumnos el significado del signo igual del que hacían uso en las sentencias consideradas, al igual que de otros símbolos matemáticos trabajados, pues consideraba esencial el que los alumnos conozcan y recuerden el significado de los símbolos que utilizan.

Enseñanza relativa al pensamiento relacional en el trabajo con expresiones aritméticas

Según nos explica el maestro, además de la realización de las actividades anteriormente mencionadas, el trabajo en el aula sobre relaciones aritméticas y propiedades de las operaciones fue a modo de "trucos" que les eran sugeridos a los alumnos como una forma más sencilla de realizar el cálculo de las operaciones. Estos trucos eran comentados por el maestro cuando lo consideraba conveniente.

8.6 Descripción de las sesiones

A continuación, recogemos la planificación y desarrollo de las sesiones en las que intervinimos en el aula, describiendo los objetivos de cada una de ellas y las actividades realizadas. Como se ha explicado anteriormente, y es propio de la metodología utilizada, el diseño de cada sesión toma en consideración los resultados de las sesiones previas por lo que haremos alusión a algunos de estos resultados cuando sea necesario. La descripción de cada sesión se inicia con una tabla que recoge las características principales de cada sesión, entre ellas los objetivos, sombreándose (en gris) el objetivo u objetivos principales planteados.

8.6.1 SESIÓN 1: 23–11–2004

Tabla 8-5: Características principales de la primera sesión

Actividades Sesión 1ª	Tipos de igualdades empleadas	Objetivos	Número de alumnos asistentes	Duración
– Actividad escrita – Entrevista a 4 alumnos – Discusión	Igualdades numéricas abiertas: □ = a - b a ± b = c ± d, con a, b c, o d desconocido y sustituido por un recuadro (Ver tabla 8-6)	1. Evaluar la comprensión inicial del SI 2. Identificar y analizar las estrategias utilizadas (Detectar evidencias de uso de PR) 3. Familiarizar a los alumnos con la metodología de trabajo en el aula y la investigadora-docente 4. Detectar y analizar dificultades encontradas	26 (toda la clase)	30'

Planificación de la sesión

Los objetivos de esta primera sesión fueron: evaluar la comprensión inicial del signo igual que ponían de manifiesto los alumnos, identificar estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de las igualdades numéricas abiertas propuestas, detectando en particular posibles evidencias del uso de pensamiento relacional, detectar y analizar las dificultades que encuentran los alumnos en la resolución de las igualdades abiertas propuestas, y familiarizar a los alumnos con la investigadora-docente y la metodología de trabajo a utilizar en las sucesivas sesiones de trabajo en el aula (Ver Tabla 8-5).

Se planificaron dos actividades: una actividad escrita, de resolución individual mediante lápiz y papel, compuesta por seis igualdades abiertas (ver Tabla 8-6), y una discusión de grupo, posterior, de cada una de dichas igualdades. Además, mientras los alumnos resolvían la actividad escrita, cuatro alumnos, elegidos al azar, serían entrevistados sobre el modo en que resolvían las igualdades, con el objetivo de profundizar en su comprensión del signo igual y conocer las estrategias que empleaban en su resolución.

Las respuestas a la actividad escrita permitirían analizar la comprensión inicial del signo igual puesta de manifiesto por los alumnos así como las dificultades que encontraban en la resolución de este tipo de sentencias. Con las entrevistas así como con la posterior discusión sobre las igualdades de la actividad escrita, se pretendía profundizar en dicha comprensión y dificultades y detectar estrategias empleadas en la resolución, en especial posibles usos de pensamiento relacional. La discusión también perseguía favorecer el desarrollo de la comprensión del signo igual de los alumnos a partir del intercambio de sus explicaciones.

Con la discusión se inicia un contacto más directo con los alumnos estableciéndose la dinámica de trabajo en el aula que, en líneas generales, se seguiría en sucesivas intervenciones. Esta discusión era importante para que la investigadora y los alumnos se acostumbraran a trabajar conjuntamente, lo cual, como se ha señalado en la descripción de la metodología de investigación utilizada, es esencial para un mejor desarrollo del proceso de intervención en el aula.

Actividad escrita individual. La actividad escrita realizada coincide con la prueba escrita de evaluación empleada en la primera sesión de nuestro estudio previo Molina (2005). La actividad está formada por cinco igualdades de no–acción y una de acción, todas ellas abiertas. Los alumnos debían resolver esta actividad encontrando el número que permite completar cada igualdad. Concretamente se les indicó a los alumnos que debían escribir en el recuadro el número que a su juicio debería ir ahí para completar la igualdad, o en otras palabras, para que la igualdad fuera verdad.

Tabla 8-6: Igualdades abiertas utilizadas en la sesión 1

Igualdades	**Estructura**
$8 + 4 = \square + 5$	$a + b = \square + (b + 1)$
$\square = 25 – 12$	$\square = a – b$
$14 + \square = 13 + 4$	$a + \square = (a – 1) + b$
$12 + 7 = 7 + \square$	$a + b = b + \square$
$13 – 7 = \square – 6$	$a – b = \square – (b – 1)$
$\square + 4 = 5 + 7$	$\square + a = (a + 1) + b$

Como se explica en Molina (2005), cualquier tipo de dificultad extra no relacionada con la comprensión del signo igual fue evitada en la elaboración de dicha actividad. Por este motivo sólo se incluyen operaciones sencillas de suma y resta que no suponen, en general, dificultad de cálculo para alumnos de tercero de Educación Primaria. Las igualdades incluyen sumas y restas con números de una o dos cifras no superiores a 25.

La única igualdad de no–acción incluida iba dirigida a detectar posibles dificultades de los estudiantes al encontrar expresiones de la forma $c = a \pm b$, con la respuesta a la operación en el miembro izquierdo en vez de en el derecho, como es habitual en la mayoría de las actividades aritméticas escolares.

Las igualdades de no–acción involucran en cuatro casos la operación suma y, sólo en un caso, la resta. Las igualdades de no–acción de suma se construyeron variando la posición de la cantidad a averiguar y considerando las cuatro posiciones posibles.

Una de estas igualdades, 8 + 4 = □ + 5, procede de un estudio previo (Falkner et al., 1999). La igualdad de resta fue considerada debido a la especial dificultad que manifiestan los alumnos al resolver igualdades abiertas con la cantidad a averiguar inmediatamente a la derecha del signo igual, según los estudios consultados. En el diseño de estas igualdades, la importancia es dada, por tanto, a la posición de la cantidad a averiguar y no a la operación involucrada.

La consideración de esta variada colección de igualdades perseguía analizar la comprensión del signo igual manifestada por los alumnos y estudiar la influencia de la posición del término a averiguar en la resolución de las igualdades.

Todas las igualdades de no–acción, salvo la igualdad 12 + 7 = 7 + □, fueron construidas basándose en la propiedad compensación de la suma, o de la resta, de manera que la diferencia entre dos de los términos, en lados opuestos del signo igual, es de tan sólo una unidad. Esta relación permite resolver las igualdades comparando ambos miembros y deduciendo que una relación inversa debe existir entre los otros dos términos (ver Tabla 8-6), lo cual puede facilitar la resolución de las igualdades si los alumnos establecen relaciones entre los términos a ambos lados del signo igual, es decir, si utilizan pensamiento relacional. La otra igualdad de no–acción, 12 + 7 = 7 + □, también es susceptible de ser resuelta sin realizar ningún cálculo, aplicando la propiedad conmutativa de la suma.

Desarrollo de la sesión

En esta sesión participaron los 26 alumnos. Los alumnos trabajaron individualmente en la resolución de las igualdades abiertas sin manifestar abiertamente ninguna dificultad. Se mostraron reacios a escribir sus operaciones en la hoja de la actividad recurriendo a escribir en hojas "a sucio", en la propia mesa o a borrarlas si las realizaban en la propia hoja que incluía las actividades.

Cuando los alumnos resolvieron la actividad escrita (aproximadamente 10 o 15 minutos después) y se recogieron sus hojas de trabajo, se procedió a la discusión de las respuestas de aquellos alumnos que voluntariamente levantaron la mano. Antes de considerar las igualdades incluidas en la actividad, se planteó la resolución de la igualdad abierta 10 + □ = 15 con la intención de motivar la participación de los alumnos con un ejemplo sencillo y ejemplificar el modo en que iba a transcurrir la discusión.

Para cada igualdad se pidió a los alumnos que propusieran una respuesta y la justificaran, animándoles a poner en común diferentes modos de resolver una misma igualdad. Tras la participación de algún alumno, la investigadora preguntó a los demás alumnos por otros modos de resolver la misma igualdad.

Decisiones relativas a la planificación de la siguiente sesión

El análisis de los datos recogidos en la sesión 1 permite detectar algunas dificultades concretas en la resolución de la sentencia de la forma $a - b = \square - (b - 1)$ por parte de un destacado número de alumnos, por lo que se decidió explorar dichas dificultades en la segunda sesión considerando igualdades abiertas de resta de diferentes formas. Una variada colección de igualdades permitiría detectar si el origen de dichas dificultades procedía de una inadecuada comprensión de la igualdad considerada o del uso de una estrategia no apropiada para la resolución de la igualdad.

Con la intención de obtener mayor información y así poder hacer una interpretación adecuada del origen de dichas dificultades, se decidió pedir a los alumnos que explicaran por escrito cómo resolvían cada igualdad. Estas explicaciones facilitarían la identificación de las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de las igualdades así como el estudio de su comprensión y dificultades.

También se decidió suministrar a los alumnos una hoja en blanco para realizar cualquier cálculo que necesitaran, al observar su rechazo a realizar dichas anotaciones en la hoja de trabajo. La recogida de las operaciones realizadas “a sucio” permitiría contar con mayor información sobre el origen de las respuestas, en particular, sobre las estrategias empleadas en la resolución de las sentencias.

Al observar que la mayoría de los sujetos mostraban el significado del signo igual *equivalencia numérica,* en el tipo de igualdades numéricas consideradas en la sesión 1, se decidió proponer a los alumnos la construcción de sus propias sentencias verdaderas y falsas. Esta actividad, junto con la actividad escrita de resolución de las igualdades de resta, permitiría profundizar en el análisis de la comprensión del signo igual de los alumnos por medio del estudio del uso que hacían de este símbolo. En

Molina (2005) se observó que este tipo de tarea ayuda a los alumnos a desarrollar su comprensión del signo igual y a los investigadores a explorar la comprensión del signo igual de los alumnos, detectar evidencias del uso de pensamiento relacional e indagar en su conocimiento de la estructura de la aritmética. De este modo podríamos comprobar, en particular, si la comprensión mostrada por los alumnos era también explicitada al hacer un uso activo del signo igual en la construcción de las igualdades.

Con la intención de facilitar la dinámica de la discusión se decidió, para las siguientes sesiones, distribuir a los alumnos cartulinas para que pusieran su nombre y las colocaran sobre su mesa. Así la investigadora podría dirigirse a cada alumno por su nombre, evitándose las puntuales respuestas orales de todo el grupo y facilitando la dinámica de las discusiones.

8.6.2 SESIÓN 2: 24–1–2005

Tabla 8-7: Características principales de la segunda sesión

Actividades Sesión 2ª	Tipos de igualdades y sentencias empleadas	Objetivos	Número de alumnos asistentes	Duración
– Actividad escrita – Discusión – Actividad escrita – Discusión	– Igualdades numéricas abiertas: a – b = c – d, con a, b, c o d desconocido (ver Figura 8-14) Sentencias verdaderas y falsas (a construir por los alumnos)	1. Explorar las dificultades detectadas en la sesión 1 2. Examinar la estabilidad y alcance de la comprensión del SI 3. Promover el desarrollo de la comprensión del SI 4. Identificar y analizar las estrategias utilizadas (Detectar evidencias de uso de PR) 5. Detectar y analizar dificultades 6. Introducir a los alumnos la idea de las sentencias verdaderas y falsas	21 (5 alumnos ausentes: RL, RT, DL, JA, MG)	1h

Planificación de la sesión

Dos meses después de la sesión 1, trascurrido el periodo vacacional de navidad, realizamos la segunda intervención en el aula. Los objetivos de esta sesión, como se señalan en la Tabla 8-7 eran explorar las dificultades detectadas en la resolución de la igualdad de resta de la sesión 1, examinar la estabilidad y alcance de la comprensión del signo igual mostrada por los alumnos en la sesión previa, seguir promoviendo dicha comprensión, identificar y analizar las estrategias que utilizaban los alumnos en la resolución de igualdades abiertas, en particular buscando evidencias de uso de pensamiento relacional, e introducir a los alumnos la idea de las sentencias verdaderas y falsas.

Para esta intervención en el aula se planificaron dos actividades escritas individuales, seguidas cada una de ellas de discusiones con todo el grupo sobre el trabajo realizado previamente de manera individual.

Primera actividad escrita: resolución de igualdades abiertas de resta. La primera de las actividades consiste en la resolución de cinco igualdades abiertas de resta (ver Figura 8-14). En este caso se pediría a los alumnos que, además de completar las igualdades con el número que las hacía verdaderas, explicaran por escrito cómo resolvían cada igualdad (indicando las operaciones realizadas o el modo en que lo habían pensado). Se perseguía obtener más información sobre la resolución de cada igualdad y así hacer una interpretación más precisa de las respuestas (ver hoja del alumno en el anexo B). Además, se les suministraría una hoja en blanco para que realizaran aparte los cálculos que les fueran necesarios.

Esta actividad estaba dirigida a explorar las dificultades asociadas a las igualdades de la forma $a - b = \square - (b - 1)$ detectadas en la sesión 1 y distinguir si las respuestas erróneas de los alumnos eran resultado de una limitada comprensión del signo igual o del uso de una estrategia inadecuada en la resolución de las igualdades. Con este objetivo se construyeron las igualdades variando la posición del término desconocido e incluyéndose operaciones sencillas de resta con números no superiores a 20. Todas las igualdades están basadas en la propiedad compensación de la resta con la intención de favorecer el uso de pensamiento relacional en su resolución.

Igualdades de la sesión 2ª

$12 - 4 = 13 - \square$

$\square - 6 = 15 - 7$

$14 - 9 = \square - 10$

$9 - 4 = \square - 3$

$17 - \square = 18 - 8$

Figura 8-14: Igualdades abiertas de la sesión 2

Entre las igualdades se consideran dos ($14 - 9 = \square - 10$ y $9 - 4 = \square - 3$) con el término desconocido en la misma posición, justo a la derecha del signo igual, debido a que en este tipo de igualdad se manifestaron las dificultades de la sesión 1. En una de estas igualdades aparecen términos de una sola cifra y en otra de hasta dos cifras. Además, en una de ellas el valor numérico del miembro izquierdo es menor que el término incluido en el miembro de la derecha, y en el otro caso es mayor lo cual no permite substraerlo del término dado.

Esta actividad también perseguía examinar la durabilidad de la comprensión del signo igual mostrada por los alumnos en la sesión previa y las estrategias que utilizaban en la resolución de las igualdades abiertas.

<u>Discusión de la primera actividad escrita.</u> La posterior discusión de la resolución de las igualdades abiertas estaba dirigida a favorecer, a través del intercambio de explicaciones de los alumnos, el desarrollo de su comprensión del signo igual así como el uso de diferentes estrategias para resolver una misma igualdad. Al igual que en la sesión anterior, se les pediría a los alumnos que aportaran una respuesta para la igualdad y, a continuación, explicaran cómo habían obtenido dicha respuesta, insistiéndose en que propusieran modos de resolver cada igualdad, diferentes a los explicitados por sus compañeros.

La discusión permitiría profundizar en el conocimiento de las estrategias y dificultades de aquellos alumnos que participaran, facilitando un mayor acercamiento de la investigadora-docente al pensamiento de los alumnos.

<u>Segunda actividad escrita: construcción de sentencias.</u> Durante la segunda parte de la sesión 2 se les plantearía a los alumnos la construcción de tres sentencias verdaderas y tres falsas, en las que intervengan las operaciones de suma y resta. Para obtener mayor información, se les pediría, además, otras tres sentencias verdaderas más difíciles con una explicación por escrito de por qué las consideran más difíciles (Ver hoja de trabajo en el anexo B).

Los objetivos de esta actividad eran tres: analizar el uso del signo igual que hacían los alumnos, evaluando de este modo el alcance de la comprensión del signo igual puesta de manifiesto en la actividad previa, detectar (no promover explícitamente) un posible uso de pensamiento relacional en la construcción de las sentencias y en su caso, identificar las relaciones aritméticas utilizadas, e introducir a los alumnos la idea de las sentencias verdaderas y falsas.

Una bondad de esta actividad es que al ser muy abierta puede ser abordada por alumnos de distintos niveles, independientemente de su comprensión del signo igual y de su habilidad en el cálculo.

Discusión de las sentencias construidas. Tras la construcción de las sentencias se realizaría una breve discusión de algunas de las sentencias escritas por los alumnos, concretamente aquellas que se considerara podían favorecer el uso de pensamiento relacional. De este modo se perseguía "forzar" la verbalización del uso de pensamiento relacional.

Desarrollo de la sesión

Este segundo día, como se decidió a partir de la realización de la primera sesión, se distribuyó a los alumnos cartulinas para que pusieran su nombre y las colocaran sobre su mesa y de este modo la investigadora pudiera dirigirse a cada alumno por su nombre.

La primera actividad transcurrió sin dificultad, tanto en su parte escrita como en su parte oral. Al proponer la segunda actividad, los alumnos mostraron dificultades en entender en qué consistía, preguntando si debían resolver las igualdades propuestas, al haber entendido que debían construir igualdades abiertas semejantes a las incluidas en la actividad previa. Por este motivo, se les mostró un ejemplo de sentencia verdadera ($12-4=13-5$) y otra falsa ($12-4=13-10$) a partir de la igualdad de la actividad anterior $12 - 4 = 13 - \square$ que estaba escrita en la pizarra. Se les explicó que debían construir igualdades que no tuvieran ningún hueco sino que estuvieran completas. En esta explicación se les indicó que las sentencias falsas son las sentencias que son "mentira".

Para la discusión posterior se seleccionaron las siguientes sentencias construidas por los alumnos en la actividad escrita: $15-15=0-0$, $10+120=100+20$, $11+11=11+11$, $1000+100=0$, $10+4=10+4$. La discusión sirvió para introducir en el aula la idea de que algunas sentencias podían ser resueltas sin realizar ninguna operación.

Decisiones relativas a la planificación de la siguiente sesión

Tras la realización de esta sesión, ya exploradas las dificultades encontradas por los alumnos en las igualdades de resta, se decidió centrar nuestra atención en el uso de pensamiento relacional para lo cual se planificó una discusión de sentencias verdaderas y falsas. Esta discusión también favorecería el desarrollo de la comprensión del signo igual de los alumnos y el estudio de las estrategias y dificultades puestas de manifiesto.

8.6.3 SESIÓN 3: 3–2–2005

Tabla 8-8: Características principales de la tercera sesión

Actividades Sesión 3ª	Tipos de sentencias empleadas	Objetivos	Número de alumnos asistentes	Duración
– Discusión de grupo	<u>Sentencias numéricas verdaderas y falsas:</u> a = a a ± b = c c = a ± b a ± b ± c = d a ± b = c ± d a ± b ± c = d ± e a ± b = c ± d ± e (ver Tabla 8-9 y Figura 8-15)	1. Promover el desarrollo de la comprensión del SI 2. Identificar y analizar las estrategias utilizadas 3. Promover el uso de PR 4. Detectar y analizar dificultades	22 (4 alumnos ausentes: MAG, MT, JA, MG)	1h

Planificación de la sesión

Para esta sesión, realizada diez días después de la segunda sesión, se planificó una discusión, con toda la clase, de sentencias verdaderas y falsas. Los alumnos debían indicar y justificar si las sentencias eran verdaderas o falsas y proponer correcciones cuando las consideraran falsas. Se decidió comenzar a promover explícitamente el uso de pensamiento relacional preguntando a los alumnos por formas de resolver las sentencias sin hacer todos los cálculos, sin llegar a proponerles ninguna estrategia concreta. En las sesiones previas sólo se había insistido en que aportaran explicaciones de diferentes formas de resolución, sin animarles al uso de pensamiento relacional.

El objetivo de esta actividad era detectar y promover verbalizaciones que involucraran pensamiento relacional, facilitando de este modo que se hicieran explícitas importantes relaciones o propiedades aritméticas. Además, se perseguía promover el desarrollo de la comprensión del signo igual así como identificar y analizar las estrategias utilizadas en la resolución de las sentencias (ver Tabla 8-8).

Para esta actividad se distribuiría a los alumnos algunos folios para realizar cálculos si les era necesario.

<u>Descripción de las sentencias.</u> Las sentencias consideradas se diseñaron con la intención de favorecer el uso de pensamiento relacional en su resolución. Todas las propiedades recogidas en el capítulo 2, identificadas como susceptibles de ser consideradas en el contexto de las sentencias numéricas de suma y resta, fueron involucradas en estas sentencias: conmutativa de la suma, no conmutativa de la resta (combinada con la restricción del dominio de la resta), magnitud, compensación, complementaria de la suma y resta, composición/descomposición, elemento neutro, elemento inverso y reflexiva de la igualdad. Como ya se ha indicado en el apartado 8.4.3 elegimos no combinar propiedades, con la salvedad de la restricción del dominio de la resta, por lo que no se consideran algunos tipos de sentencias posibles.

Otras variables consideradas en la construcción de las sentencias fueron la veracidad o falsedad de la sentencia, la operación involucrada (suma o resta) y la magnitud de los números distinguiendo entre números pequeños (menores de 30), y números grandes (comprendidos entre 50 y 326).

En total elegimos 24 sentencias, propuestas en el orden que se muestra en la Tabla 8-9. El orden de presentación de las sentencias fue elegido variando la columna y fila a la que pertenecen en dicha doble tabla. No se eligieron sentencias para todos los casos posibles debido a la limitación del tiempo disponible para la sesión e intentando evitar el cansancio de los alumnos. Concretamente se consideraron las siguientes restricciones:

- Para la propiedad conmutativa de la suma y no conmutativa de la resta se decidió involucrar únicamente números pequeños
- En el caso del elemento neutro, se consideraron únicamente sentencias con números grandes, en las cuales podía ser más sencillo distinguir si el alumno hacia uso de un hecho numérico conocido o de la propiedad del elemento neutro. Además, nos limitamos a considerar una sentencia falsa de suma y una verdadera

de resta. Se eligió, al azar, que la sentencia de resta sería verdadera y la de suma sería falsa.

- En la propiedad elemento inverso y en la propiedad reflexiva de la igualdad decidimos tomar únicamente una sentencia verdadera y una falsa, involucrando en una de ellas números pequeños y, en otra, números grandes.

Tabla 8-9: Clasificación de las sentencias consideradas en la discusión de la sesión 3.

			Conmutativa	**Magnitud**	**Compensación**	**Complementariedad de la suma y resta**[1]
Números pequeños (≤30)	+	V	10 + 4 = 4 + 10 3		13 + 11 = 12 + 12 22	13 – 5 + 5 = 13 1
		F		7 + 3 = 10 + 3 20		27 – 14 + 14 = 26 18
	–	V			19 – 3 = 18 – 2 17	
		F	15 – 6 = 6 – 15 10	10 – 7 = 10 – 4 4		
Números grandes (50≤X≥ 326)	+	V	NO ELEGIDA		51 + 51 = 50 + 52 5	100 - 94 + 94 = 100 21
		F		37 + 22 = 300 11		62 – 13 + 13 = 65 13
	–	V			78 – 45 = 77 – 44 12	
		F	NO ELEGIDA	72 = 56 – 14 24		

			Descomposición	**Elemento neutro**	**Elemento Inverso**	**Reflexiva de la igualdad**[1]
Números pequeños (≤30)	+	V	7 + 7 + 9 = 14 + 9 2	NO ELEGIDAS		NO ELEGIDA
		F				7 = 12 9
	–	V	24 – 15 = 24 – 10 – 5 14		24 – 24 = 0 8	
		F			NO ELEGIDA	
Números grandes (50≤ x ≥ 326)	+	V	231 + 48 = 231 + 40 + 8 19			93 = 93 16
		F		0 + 325 = 326 7		NO ELEGIDA
	–	V	78 – 16 = 78 – 10 – 6 6	125 – 0 = 125 15	NO ELEGIDA	
		F		NO ELEGIDA	100 – 100 = 1 23	

Las celdas en gris corresponden a categorías no existentes (ver apartado 8.4.3). El número en rojo denota el orden en el que fueron consideradas.

[1] En estas columnas no puede considerarse la distinción entre operación suma o resta, aunque en la tabla aparecen incluidas dentro de la categoría de suma. Por este motivo, las demás celdas de esta columna aparecen en blanco.

En total se consideraron diez sentencias de acción, diez de no-acción y dos de la forma $a = a$. Además de las sentencias recogidas en la Tabla 8-9

se prepararon algunas sentencias adicionales por si era necesario cubrir algún tiempo extra.

Desarrollo de la sesión

Al igual que en las otras sesiones, sólo los alumnos que levantaron la mano participaron en la discusión de las sentencias. Al observar que los alumnos encontraban dificultades en la resolución de las sentencias de la forma a – b + b = c, por considerar equivalentes las expresiones a – b + b y a – (b + b), reemplazamos la sentencia $100-94+94=100$ por $100+94-94=100$. En la Figura 8-15 se muestra el listado de sentencias consideradas finalmente en la discusión, siendo este el único cambio realizado.

$72=56-14$	$78-45=77-44$
$13-5+5=13$	$62-13+13=65$
$7+7+9=14+9$	$24-15=24-10-5$
$10+4=4+10$	$125-0=125$
$10-7=10-4$	$93=93$
$51+51=50+52$	$19-3=18-2$
$78-16=78-10-6$	$27-14+14=26$
$0+325=326$	$231+48=231+40+8$
$24-24=0$	$7+3=10+3$
$7=12$	$100+94-94=100$
$15-6=6-15$	$13+11=12+12$
$37+22=300$	$100-100=1$

Figura 8-15: Listado de sentencias definitivo considerado en la discusión de la sesión 3.

Estos alumnos no habían sido introducidos en el concepto de los números negativos, como es habitual según el currículo nacional, habiéndoseles indicado que no es posible realizar restas en las que el minuendo es menor que el substraendo. Por este motivo, en esta discusión nos apoyamos en esta suposición aceptada por los alumnos, independientemente de estar o no de acuerdo con ella.

De las sentencias adicionales preparadas por si era necesario cubrir algún tiempo adicional, sólo pudo discutirse una de ellas[50]: $18+3-4=17$.

Decisiones relativas a la planificación de la siguiente sesión

La discusión de esta sesión hizo explícita la existencia de diferentes tipos de estrategias para juzgar la veracidad o falsedad de las sentencias y, en particular, el interés de la investigadora-docente en que los alumnos propusieran una variedad de explicaciones para una misma sentencia, especialmente explicaciones que no implicaran el cálculo de las operaciones contenidas en la misma. Por este motivo, habiendo observado que los alumnos daban diferentes explicaciones que evidenciaban el uso de pensamiento relacional decidimos, para la siguiente sesión, recoger datos individuales que nos permitieran analizar qué alumnos y de qué manera manifestaban uso de pensamiento relacional.

8.6.4 SESIÓN 4: 16–2–2005

Tabla 8-10: Características principales de la cuarta sesión

Actividades Sesión 4ª	**Tipos de sentencias empleadas**	**Objetivos**	**Número de alumnos asistentes**	**Duración**
– Actividad escrita	<u>Sentencias numéricas verdaderas y falsas:</u> a – b = c a ± b ± c = d a ± b = c ± d a ± b ± c = d ± e a ± b = c ± d ± e (ver Tabla 8-11)	1. Evaluar la comprensión del SI 2. Identificar y analizar las estrategias utilizadas 3. Detectar y analizar el uso de PR 4. Detectar y analizar dificultades	25 (1 alumna ausente: RT)	1h

Planificación de la sesión

Para esta sesión se elaboró una actividad escrita individual, compuesta por sentencias numéricas, en la que se pediría a los alumnos que indicaran si cada una de las sentencias era verdadera o falsa y justificaran el por qué. Además, debían proponer una manera de corregir las sentencias que consideraran falsas. Esta actividad se

[50] El objetivo de esta sentencia 18 + 3 – 4 = 17 era comprobar si los alumnos utilizaban pensamiento relacional al observar que a 18 se le sumaba una unidad menos de lo que se le restaba. El hecho de que 3 – 4 no pueda calcularse en el conjunto de los números naturales podía inducir al uso de pensamiento relacional, ante la solicitud de la investigadora de proponer diferentes modos de resolver la sentencia.

distribuiría en dos hojas con cinco sentencias en cada una. Cada una de las hojas se repartiría separadamente, no dándoles a los alumnos la segunda hoja hasta que no acabaran la primera. De este modo facilitaríamos que los alumnos resolvieran las sentencias con tranquilidad y no se sintieran agobiados o desanimados por la cantidad de sentencias a resolver.

El principal objetivo de esta sesión era detectar el uso de pensamiento relacional de los alumnos y analizar las propiedades y relaciones aritméticas que reconocían y utilizaban al hacer dicho uso. También se perseguía identificar y analizar otro tipo de estrategias utilizadas en la resolución de las sentencias así como evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos (ver Tabla 8-10). Los datos de esta sesión permitirían distinguir entre los alumnos según las estrategias utilizadas en la resolución de las sentencias, obteniéndose información individual que completara la obtenida en la sesión previa.

Sentencias consideradas. Las sentencias fueron diseñadas con la intención de favorecer el uso de pensamiento relacional en su resolución (ver Figura 8-16). En este caso las propiedades consideradas fueron: conmutativa, magnitud, compensación, complementaria de la suma y resta y composición/descomposición.

No se incluyeron sentencias basadas en las propiedades elemento neutro, elemento inverso y reflexiva, para limitar el número de sentencias a resolver por los alumnos. Se consideró que las cinco propiedades seleccionadas podrían dar lugar a explicaciones más ricas con respecto al uso de pensamiento relacional.

$$18-7=7-18$$
$$75-14=340$$
$$17-12=16-11$$
$$122+35-35=122$$
$$6+4+18=10+18$$
$$75+23=23+75$$
$$7+15=8+15$$
$$53+41=54+40$$
$$16+14-14=36$$
$$257-34=257-30-4$$

Figura 8-16: Sentencias utilizadas en la sesión 4.

Al igual que en la elaboración de las sentencias de la sesión 3, las variables consideradas en la construcción de las sentencias fueron la veracidad o falsedad de la sentencia, la operación involucrada y la magnitud de los números, distinguiéndose entre números pequeños y números grandes.

Para la construcción de las sentencias no se combinaron ningunas propiedades, con la salvedad de la restricción del dominio de la resta, lo cual como se ha explicado anteriormente limita el tipo de sentencias a considerar. Además, se consideraron la mitad de las sentencias posibles, para reducir la extensión de la tarea. Como se muestra en la Tabla 8-11, sólo se consideró un par de sentencias basadas en cada propiedad, una involucrando números grandes y otra de números pequeños.

En total elegimos 10 sentencias en el orden que se muestra en la Tabla 8-11 (ver hoja en anexo B). El orden de las sentencias se estableció tomando una sentencia de cada columna, empezando por la derecha, y alternando una de números pequeños y otra de números grandes. En el caso de la propiedad de magnitud, se eligió una con más de tres términos y otra con sólo tres términos.

Tabla 8-11: Clasificación de las sentencias consideradas en la actividad escrita de la sesión 4.

			Conmutativa	**Magnitud**	**Compensación**	**Complementaria suma y resta**	**Composición/ Descomposición**
Números pequeños (≤ 30)	Suma	V	NO ELEGIDA		NO ELEGIDA	NO ELEGIDA	6 + 4 + 18 = 10 + 18 5
		F		7 + 15 = 8 + 15 7		16 + 14 – 14 = 36 9	
	Resta	V			17 – 12 = 16 – 11 3		NO ELEGIDA
		F	18 – 7 = 7 – 18 1	NO ELEGIDA			
Números grandes ($50 \leq x \geq 340$)	Suma	V	75 + 23 = 23 + 75 6		NO ELEGIDA	122 + 35 – 35 = 122 4	NO ELEGIDA
		F		NO ELEGIDA		NO ELEGIDA	
	Resta	V			53 + 61= 54 + 60 8		257- 34 = 257- 30 – 4 10
		F	NO ELEGIDA	75 – 14 = 340 2			

Las celdas en gris corresponden a categorías no existentes. El número en rojo denota el orden en el que fueron consideradas.

Desarrollo de la sesión

Esta sesión trascurrió sin dificultades a destacar siguiéndose la planificación descrita. El hecho de que cada una de las hojas de sentencias se repartiera separadamente, ocasionó que tres alumnos sólo recibieran la primera hoja.

Decisiones relativas a la planificación de la siguiente sesión: Clasificación de los alumnos

A partir de los datos de esta sesión y la anterior (sesión 3), en las que se comprobó que los alumnos seguían diferentes estrategias en su trabajo con sentencias, se acordó clasificar a los alumnos según las estrategias que habían utilizado. Se distinguieron cuatro topologías de comportamiento en función de dicho criterio: los alumnos que utilizaron únicamente estrategias de cálculo, los que puntualmente utilizaron estrategias basadas en pensamiento relacional y en los demás casos utilizaron estrategias de cálculo, los que utilizaron ambos tipos de estrategias en igual proporción aproximadamente, y los que utilizaron en la mayoría de los casos estrategias basadas en pensamiento relacional (ver Tabla 8-12). En esta clasificación no se incluyen a RT y JA debido a que no participaron en la sesión 4. Además, dentro de cada uno de estos tipos de comportamientos identificamos parejas de alumnos que habían tenido una actuación semejante con respecto al uso de pensamiento relacional, es decir, que habían puesto de manifiesto pensamiento relacional en el mismo tipo de sentencias.

Esta clasificación nos permitiría seleccionar una muestra representativa de la clase con respecto a estos aspectos, para entrevistarla durante la siguiente sesión. De este modo se podría profundizar en el estudio de las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver las sentencias y, en especial, en el uso de pensamiento relacional,

Tabla 8-12: Clasificación de los alumnos según las estrategias utilizadas en las sentencias verdaderas y falsas de las sesiones 3 y 4.

Estrategias de cálculo	Estrategias de cálculo y de PR puntualmente	Ambos tipos de estrategias	Estrategias de PR en la mayoría de los casos	Casos dudosos
RB = VS BR = BI MG	NM = JQ EV, CL, FB, DL, MAG, MA	JM = MT MP = RL	CH, FM, EF	MR = MB, CA, CY

El signo igual relaciona alumnos con perfiles semejantes respecto al uso de pensamiento relacional, concretamente aquellos que ponen de manifiesto el uso de pensamiento relacional en el mismo tipo de sentencias.

8.6.5 SESIÓN 5: 2–3–2005

Tabla 8-13: Características principales de la quinta sesión

Actividades Sesión 5ª	Tipos de sentencias empleadas	Objetivos	Número de Alumnos participantes	Duración
– Entrevistas individuales	Sentencias numéricas verdaderas y falsas (ver Tabla 9-17)	1. Profundizar en el análisis de las estrategias utilizadas y el uso de PR	13 (CH, JM, EF, MR, NM, MP, BR, RB, DL, FM, FB, EV, CL)	1h 50’ (8’ cada entrevista)

Planificación de la sesión

Para esta sesión, realizada catorce días después de la cuarta, se planificaron entrevistas para trece alumnos, seleccionados a partir de la clasificación realizada en función del tipo de estrategias utilizadas en la resolución de las sentencias verdaderas y falsas de las sesiones 3 y 4. Estas entrevistas tenían como objetivo profundizar en el uso de pensamiento relacional en la resolución de sentencias numéricas verdaderas y falsas, en particular, explorar si los alumnos daban muestras de uso de pensamiento relacional en sentencias de estructura diferente a las sentencias en las que habían manifestado dicho uso previamente (ver Tabla 8-13).

Se seleccionaron trece alumnos en función de dicha clasificación y teniendo en cuenta la asistencia a la sesiones previas, principalmente a las sesiones 3 y 4. En todos salvo uno de los casos (DL), fue posible seleccionar alumnos que habían asistido a todas las sesiones. De entre los pares de alumnos de comportamientos equivalentes se eligió un representante en cada caso (ver Tabla 8-14).

Tabla 8-14: Alumnos seleccionados para las entrevistas de la sesión 5 (sombreados)

Estrategias de cálculo	Estrategias de cálculo y de PR puntualmente	Ambos tipos de estrategias	Estrategias de PR en la mayoría de los casos	Casos dudosos
RB = VS BR = BI MG[1]	NM = JQ EV, CL, FB, DL, MAG[1], MA	JM = MT[1] MP =RL	CH, FM, EF	MR = MB, CA, CY

El signo igual asocia alumnos con comportamiento semejante en relación con el tipo de sentencias en las que utilizaron pensamiento relacional.
[1]Estos alumnos no asistieron a la sesión 3.

Diseño de las entrevistas. Se planificó una entrevista (semiestructurada) para que los alumnos resolvieran entre 4 y 8 sentencias indicando si eran verdaderas o falsas y explicando el por qué. Se consideró que si los alumnos no mostraban hacer uso de pensamiento relacional, se les preguntaría si se les ocurría otra forma de resolver la sentencia que no requiriera el cálculo de las operaciones. En esta ocasión no se les pediría a los alumnos que corrigieran las sentencias que consideraran falsas.

Las sentencias a proponer a cada alumno fueron seleccionadas previamente teniendo en cuenta la fluidez en el cálculo puesta de manifiesto, las dificultades particulares evidenciadas en otras sesiones, y, ante todo, el uso de pensamiento relacional manifestado con anterioridad (ver Tabla 8-15). Se seleccionaron las sentencias que serían propuestas a cada alumno a partir de una colección de sentencias verdaderas y falsas basadas en las distintas propiedades aritméticas consideradas e involucrando en unos casos sumas, en otros restas o ambas operaciones, y números naturales de diferentes magnitudes.

Según la fluidez en el cálculo del alumno entrevistado se seleccionaron sentencias con números de mayor o menor magnitud. Además, al explorar si un alumno daba muestras del uso de pensamiento relacional en un tipo concreto de sentencia, primeramente se le propuso sentencias de suma y posteriormente de resta. Las propiedades elemento neutro y elemento inverso fueron relegadas a un segundo plano en el diseño de la mayoría de las entrevistas, ya que, en general, las sentencias basadas en las otras propiedades parecían dar lugar a explicaciones más ricas cuando se hacia uso de pensamiento relacional. La propiedad reflexiva de la igualdad fue únicamente considerada en una sentencia, propuesta de manera adicional a alguno de los alumnos.

A cada uno de los alumnos se les presentaría una hoja con varios renglones en los cuales se les iría escribiendo, de una en una, cada una de las sentencias seleccionadas previamente para su entrevista (ver Tabla 8-16).

Tabla 8-15: Tipos de sentencias en las que los alumnos habían manifestado cierto uso de pensamiento relacional en las sesiones 3 y 4, y tipos de sentencias seleccionadas para cada entrevista.

Suplentes	**Seleccionados**	**Conmutativa**	**Magnitud**	**Compensación**	**Compl. suma y resta**	**Comp.-Descomp.**	**E. Neutro**	**E. Inverso**
VS	RB							
		E(S)	E(R)		E	E (S)	E(S)	E(R)
BI	BR							
		E(S)	E(R)		E	E (S)	E(S)	E(R)
	DL				**X**			
		E(S)	E(R)	E (S/R)		E (S)		
	FB	**X**				X		
			E(R)	E (S)	E	E(S/R)	E(S)	E(R)
	EV	**X**						**X**
			E(R)	E(S)	E	E(S)	E(S)	E(R)
	CL					**X**		**X**
				E (S)	E	E (S/R)	E(S)	E(R)
JQ	NM	**X**						
			E(R)	E (S)	E	E (S)	E(S)	E(R)
MB	MR	**X**	**X**					
				E (S/R)	E	E (S/R)		
RL	MP	**X**			¿?			
			E	E (S)	E	E (S/R)		
MT	JM	**X**	**X**			X (S)		
				E (S/R)	E	E (R)		
	EF	**X**	**X**	**X** (S)	**X**	**X**		
				E (R)			E(S)	E(R)
	CH	**X**	**X**		**X**	**X**		
				E (S/R)			E(S)	E(R)
	FM	**X**	**X**		**X**	**X**		
				E (S/R)			E(S)	E(R)

X señala las propiedades utilizadas por los alumnos en su uso de pensamiento relacional manifestado en las sesiones 3 y 4. Entre paréntesis se indica si se manifestó en una sentencia de suma (S), de resta (R) o de ambos casos (S/R).
E indica las propiedades seleccionadas para el diseño de las sentencias de la entrevista de cada alumno. Entre paréntesis se indica si la sentencia a proponer al alumno es de suma (S), de resta (R) o de ambos tipos (S/R).

Tabla 8-16: Sentencias utilizadas en las entrevistas de cada alumno de la sesión 5.

Propiedad		**Sentencias Consideradas**	**CH**	**JM**	**EF**	**MR**	**NM**	**MP**	**BR**	**RB**	**DL**	**FM**	**FB**	**EV**	**CL**
Compensación	+	11 + 24 = 10 + 25										■			
		8 + 4 = 9 + 5													
		11 + 7 = 10 + 8		■		■	■	■			■		■	■	■
	−	11 – 6 = 10 – 5	■	■	■	■					■	■			
		19 – 13 = 9 – 3	■	■	■							■			
Conmutativa		7 + 5 = 5 + 7							■						
		13 + 5 = 5 + 13								■	■				
Complementaria de la suma y la resta		9 + 4 – 4 = 9		■		■	■	■	■	■			■	■	■
		10 + 7 – 7 =12													
Comp/descomp		20 – 12 = 20 – 10 – 2		■		■		■					■		■
		8 + 6 = 4 + 4 + 6				■	■	■	■	■	■		■	■	■
Magnitud		10 – 7= 100					■		■				■	■	
		26 – 8 = 100						■		■	■				
		4 + 6 = 300													
		7 + 5 = 10 + 6													
Elemento Inverso		9 – 9 = 3					■		■				■	■	
		35 – 35 = 14													
		125 – 125 = 14	■		■					■		■			■
Elemento neutro		8 + 0 = 8					■		■				■	■	
		23 + 0 = 23	■		■					■		■			■

Desarrollo de la sesión

Esta sesión trascurrió sin dificultades a destacar siguiéndose la planificación descrita. Se entrevistaron los alumnos seleccionados al encontrarse todos ellos en el aula, no siendo necesario recurrir a ninguno de los suplentes.

Aunque las sentencias a proponer a cada alumno fueron escogidas con anterioridad a la entrevista, en el transcurso de ésta, en algunos casos, se añadieron algunas sentencias con la intención de profundizar en el análisis del uso de pensamiento relacional por parte de los alumnos (ver Tabla 8-17). Por ejemplo, a BR se le propuso adicionalmente la sentencia 5 + 5 = 5 + 5 con la intención de provocar el uso de pensamiento relacional del cual no había dado muestras en ningún momento de la entrevista, i en sesiones previas. De forma similar, a DL, tras dar muestra del uso de pensamiento relacional en la resolución de la sentencia 11 – 6 = 10 – 5, se le propuso una sentencia extra basada en la propiedad compensación de la resta, con diferente estructura, en el sentido en que un miembro no se obtenía a partir de otro sumando ni restando una unidad (19 – 13 = 9 – 3), para explorar si en dicho caso también hacia uso de este tipo de pensamiento.

En ocasiones, cuando los alumnos no daban evidencias de la apreciación de relación alguna, en ninguna de las sentencias propuestas, se les realizaron algunas cuestiones e indicaciones para dirigir su atención a las relaciones más destacadas de la sentencia. Por ejemplo, a BR, en la resolución de la sentencia $8+6=4+4+6$, se le preguntó por el valor de 4 + 4 y, posteriormente, indicándosele la "presencia" de 8 + 6 en ambos miembros, se le cuestionó si con dicha información sabría que la sentencia era verdadera (como había determinado, previamente, a partir del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros).

Tabla 8-17: Sentencias utilizadas en las entrevistas de cada alumno de la sesión 5.

Propiedad		Sentencias Consideradas	CH	JM	EF	MR	NM	MP	BR	RB	DL	FM	FB	EV	CL
Compensación	+	11 + 24 = 10 + 25										■			
	+	8 + 4 = 9 + 5										■			
	+	11 + 7 = 10 + 8		■		■	■	■		■	■		■	■	■
	−	11 – 6 = 10 – 5	■	■	■	■					■	■			
	−	19 – 13 = 9 – 3	■	■	■						■	■			
Conmutativa		7 + 5 = 5 + 7							■						
		13 + 5 = 5 + 13								■	■				
Complementaria de la suma y la resta		9 + 4 – 4 = 9		■		■	■	■	■	■			■	■	■
		10 + 7 – 7 =12				■									
Comp/descomp		20 – 12 = 20 – 10 – 2		■		■		■					■		■
		8 + 6 = 4 + 4 + 6				■	■	■	■	■	■		■	■	■
Magnitud		10 – 7= 100					■		■				■	■	
		26 – 8 = 100						■		■	■				
		4 + 6 = 300 (4 + 5 =300)						■	■						
		7 + 5 = 10 + 6										■			
Elemento Inverso		9 – 9 = 3					■		■				■	■	
		35 – 35 = 14								■					
		125 – 125 = 14	■		■		■			■		■			■
Elemento neutro		8 + 0 = 8					■		■				■	■	
		23 + 0 = 23	■		■					■		■			■
Propiedad reflexiva		5 + 5 = 5 + 5							■						

En rojo se señalan las sentencias que fueron añadidas a la entrevista durante el desarrollo de ésta.

Decisiones tomadas relativas a la planificación de la siguiente sesión

La recogida de datos perteneciente a este curso académico se dio por concluida tras esta sesión. No obstante, se decidió realizar una recogida de datos puntual en el siguiente curso para contrastar y analizar el trabajo de los alumnos en la resolución de sentencias numéricas, considerable tiempo después de nuestras intervenciones. La realización de esta última sesión fue aconsejada por expertos.

8.6.6 SESIÓN 6: 16–11–2005

Tabla 8-18: Características principales de la sesión sexta

Actividades Sesión 6ª	Tipos de sentencias empleadas	Objetivos	Número de Alumnos participantes	Duración
– Actividad escrita	Sentencias numéricas verdaderas y falsas: a – b = c a ± b ± c = d a ± b = c ± d a ± b ± c = d ± e a ± b = c ± d ± e (ver tabla 8-11) Sentencias extra: 9 + 9 = 2 x 9, 5 x 4 = 4 + 4 + 4, 3 x 6 + 6 = 4 x 6, 4 x 7 = 2 x 7 + 2 x 7, 2 x 5 = 3 x 5	1. Evaluación final de la comprensión del SI 2. Identificar y analizar las estrategias utilizadas 3. Detectar y analizar el uso de PR 4. Detectar y analizar dificultades	25 (1 alumno ausente: EV)	1h

Planificación de la sesión

Para esta última sesión, realizada ocho meses después de la sesión 5, en el siguiente curso académico, se decidió proponerles a los alumnos la misma actividad escrita individual que en la sesión 4, aunque en este caso se diseñó una hoja extra de sentencias verdaderas y falsas de multiplicación[51], con la intención de que los alumnos que acabaran antes pudieran proseguir trabajando y, de este modo, no molestaran a sus compañeros. Dicha hoja extra incluía las siguientes sentencias: 9 + 9 = 2 x 9, 5 x 4 = 4 + 4 + 4, 3 x 6 + 6 = 4 x 6, 4 x 7 = 2 x 7 + 2 x 7 y 2 x 5 = 3 x 5.

Al igual que en la sesión 4 cada una de las hojas se repartiría separadamente, con la intención de que los alumnos resolvieran las sentencias con tranquilidad y no se sintieran agobiados o desanimados por la cantidad de sentencias a resolver.

El principal objetivo de esta sesión era detectar el uso de pensamiento relacional de los alumnos y analizar las propiedades y relaciones aritméticas que reconocían y utilizaban al hacer dicho uso. También se perseguía identificar y analizar otro tipo de estrategias utilizadas en la resolución de las sentencias así como evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos (ver Tabla 8-18).

[51] Los alumnos habían trabajado en el aula el aprendizaje de las tablas de multiplicar y estaban en dicho momento iniciándose en la multiplicación de números de tres cifras por números de una cifra.

Sentencias de multiplicación. Aunque las respuestas a la última hoja de la actividad no son analizadas en el análisis de los datos, siendo utilizadas únicamente para "entretener" a algunos de los alumnos, detallamos los aspectos considerados en su diseño.

Estas sentencias involucran las operaciones suma y multiplicación, no incluyendo factores mayores que 5 para no dificultar el cálculo. Además, están basadas en la propiedad asociativa de la multiplicación y la relación existente entre la multiplicación y la suma, con la excepción de la sentencia 2 x 5 = 3 x 5 basada en la propiedad magnitud en el contexto de la multiplicación. La proporción de sentencias verdaderas y falsas fue 3:2. En el caso de las sentencias de suma y multiplicación, la mitad de las veces se dispone la suma en el miembro derecho y la otra mitad en el izquierdo.

Desarrollo de la sesión

Esta sesión trascurrió sin dificultades a destacar siguiéndose la planificación descrita. Cuatro alumnos no llegaron a recibir la segunda hoja de sentencias de suma y resta.

BLOQUE III:

Analisis de los datos, resultados y conclusiones

CAPÍTULO 9

Análisis de los datos

En este capítulo se presenta el análisis de los datos recogidos a lo largo de la parte empírica de la investigación y se discuten los resultados obtenidos. Como se ha mencionado en la descripción de la metodología, se han llevado a cabo dos tipos de análisis. Un primer análisis, realizado tras cada una de las sesiones, dirigido a planificar las siguientes intervenciones en el aula y a refinar la formulación de la conjetura de investigación. Y un segundo análisis retrospectivo, de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos, el cual permite dar respuesta a los objetivos de investigación y describir la evolución del comportamiento de los alumnos a lo largo de la intervención.

Los resultados del primer análisis han sido recogidos previamente, en el Capítulo 8, junto a la descripción de las intervenciones en el aula, para justificar el diseño de éstas. Se trata ahora de recoger el análisis retrospectivo de todo el proceso de investigación. En los primeros apartados se comentan algunos aspectos generales sobre el modo en que se ha realizado este análisis. Le sigue la descripción del análisis y la discusión de los resultados; todo ello estructurado en dos partes.

Parte I. Tres de los objetivos de investigación de este trabajo hacen referencia al estudio del uso de pensamiento relacional por parte de los alumnos. Se persigue identificar las estrategias que utilizan y detectar evidencias del uso de pensamiento relacional, para analizar y caracterizar dicho uso, así como examinar su evolución a lo largo de las diversas intervenciones en el aula. De este modo, se profundiza en la comprensión del uso y desarrollo de este tipo de pensamiento. A ello se dedica la primera parte de este capítulo.

Parte II. En la segunda parte abordamos el análisis de la comprensión del signo igual que manifiestan los alumnos participantes en el estudio, en la resolución y construcción de igualdades y sentencias numéricas, en otras palabras, los significados, de este signo, que los alumnos ponen de manifiesto. Describimos también las dificultades manifestadas en la realización de las diversas tareas propuestas.

9.1 Aspectos metodológicos del análisis retrospectivo de los datos

Como describe Álvarez–Gayou (2003), el análisis de datos cualitativos es un proceso largo, ordenado y cuidadoso, de gran flexibilidad, en el que se pretende llegar a una mejor comprensión de un fenómeno, dar explicaciones alternativas y representar un proceso de comparación en el que se encuentran patrones. El fenómeno a comprender viene determinado por los objetivos de investigación. En este caso, consiste en el análisis del uso y desarrollo de pensamiento relacional y de la comprensión del signo igual manifestada por los alumnos con los que trabajamos.

9.1.1 Tipos de datos recogidos

Como es propio de la investigación cualitativa, en este trabajo contamos con una cantidad abundante de datos, en nuestro caso procedentes de los siguientes tipos de producciones de los alumnos, de diferente naturaleza:

- Respuestas escritas sin explicación a igualdades numéricas abiertas (sesión 1)
- Respuestas orales con explicación a igualdades numéricas abiertas (sesión 1 y Parte I de la Sesión 2)
- Respuestas escritas con explicación a igualdades numéricas abiertas (Parte I de la Sesión 2)
- Sentencias construidas, por escrito, por los alumnos (Parte II de la sesión 2)
- Respuestas orales con explicación a sentencias verdaderas y falsas (sesión 3 y 5)
- Respuestas escritas con explicación a sentencias verdaderas y falsas (sesiones 4 y 6)
- Correcciones orales a sentencias verdaderas y falsas (sesión 3)
- Correcciones escritas a sentencias verdaderas y falsas (sesiones 4 y 6)

Estos datos se complementan con anotaciones realizadas por los alumnos en la misma hoja de trabajo o en una hoja aparte, con las grabaciones en video y audio de las sesiones 1, 2, 3 y 5, y con las notas tomadas por la investigadora durante el proceso de recogida y análisis continuado de los datos.

9.1.2 Descripción del proceso de análisis retrospectivo

Tras el primer acercamiento a los datos durante el análisis realizado entre las intervenciones en el aula, ha sido necesario distanciarse, en cierta medida, de los resultados obtenidos en ese primer análisis y de los objetivos perseguidos en cada sesión, y considerar únicamente los objetivos de investigación y los datos de la experiencia en el aula disponibles. De este modo hemos podido profundizar en el análisis de los datos evitando la influencia del análisis previo realizado, aunque esto no quiere decir que se haya desechado información alguna de la recogida durante el periodo de intervención en el aula.

Para la realización de este análisis, en primer lugar, se han trascrito las grabaciones de video y audio de las sesiones 1, 2, 3 y 5 (ver Anexo C). También se han organizado en tablas las respuestas de los alumnos a las actividades escritas de las sesiones 1, 2, 4, y 6, añadiéndose comentarios sobre las anotaciones realizadas por los alumnos en hojas aparte (ver tablas D-1, D-2, D-3, D-4, D-5, D-6 y D-7 en el Anexo D). Estas tablas y trascripciones han sido de gran utilidad para hacer los datos más accesibles. No obstante, a lo largo del proceso de análisis se ha recurrido, en variadas ocasiones, a la escucha y visionado de las grabaciones para poder apreciar con mayor precisión el modo en que trascurre la actividad en el aula y prestar atención a detalles tales como el tono de voz o los gestos de los alumnos, que aportan información de utilidad para interpretar sus explicaciones.

Proceso de categorización o codificación

Tras la realización de la trascripciones de las sesiones y la organización de las respuestas de los alumnos en tablas, al iniciar el análisis detallado de los datos recogidos, se han ido detectando patrones que se refieren, principalmente, al modo en que los alumnos abordan las igualdades y sentencias numéricas, los tipos de respuestas que aportan, las dificultades que encuentra, los significados del signo igual que ponen de manifiesto, las estrategias que utilizan y el modo en que hacen uso de pensamiento relacional. Estos patrones han conducido a un proceso de codificación, a la toma de notas sobre inferencias y conjeturas, y a la comparación y estudio de relaciones y contrastes entre los datos, así como entre los datos y la literatura consultada.

Mediante una constante organización y re–estructuración de los datos se han establecido categorías[52], las cuales actúan como un andamiaje que proporciona soporte y cobertura a aquellas conductas que son consideradas relevantes de acuerdo con los objetivos de investigación, y todo esto con una gran flexibilidad que permite la adaptación al flujo de la conducta, a la situación y al contexto (Anguera, 1991).

Tras un proceso intenso de elaboración de varios códigos y diferentes organizaciones de los datos, subdividiendo algunas de las categorías o englobando unas en otras, en esta memoria se recoge la codificación y organización final. Reconocemos que existen otras formas de clasificar y organizar los datos, las cuales pueden conducir a detectar aspectos que aquí aparecen latentes. No obstante, justificamos con detalle la codificación realizada para permitir al lector comprender la lógica y criterios del análisis así como la línea de razonamiento que conduce a las conclusiones de este estudio.

[52] Según Anguera (1991), una categoría existe siempre que dos o más objetos o eventos sean distinguibles de forma equivalente, y puede ser definida como "*el resultado de una serie de operaciones cognitivas que llevan al establecimiento de clases entre las cuales existen unas relaciones de complementariedad, establecidas de acuerdo a un criterio fijado al efecto, y en donde cada una de ellas cumple a su vez unos requisitos internos de equivalencia en atributos esenciales, aunque pueda mostrar una gama diferencial o hererogeneidad en su forma*" (p. 120).

PARTE I

ESTRATEGIAS Y USO DE PENSAMIENTO RELACIONAL EN LA RESOLUCIÓN DE IGUALDADES Y SENTENCIAS

En esta primera parte se describen las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de las sentencias numéricas verdaderas y falsas, se detallan y analizan las manifestaciones del uso de pensamiento relacional y se examina la evolución del comportamiento de los alumnos respecto a su uso de pensamiento relacional.

Los datos que permiten analizar en profundidad las estrategias y el uso de pensamiento relacional manifestados por los alumnos corresponden a las sesiones 3, 4, 5 y 6, en las que se trabajó con sentencias verdaderas y falsas. No obstante, los datos de las primeras sesiones nos permiten identificar algunas primeras manifestaciones, espontáneas, del uso de este tipo de pensamiento y explorar el modo en que los alumnos interpretan las igualdades abiertas.

Entendemos por resolución de sentencias verdaderas y falsas, no sólo la determinación de la veracidad o falsedad de la sentencia, sino, también, la justificación de dicho juicio. De forma similar, en el caso de las igualdades abiertas la resolución consiste en dar una respuesta (el número a averiguar) y explicar el modo en que se ha obtenido. Analizamos conjuntamente las estrategias que utilizan los alumnos en la obtención de sus respuestas sin distinguir si éstas son correctas o incorrectas.

El análisis del modo en que los alumnos resuelven las sentencias o igualdades, o en otras palabras, las estrategias que utilizan para dicha resolución, se realiza a partir de sus explicaciones sobre la veracidad o falsedad de cada sentencia o sobre el origen de su respuesta, sus anotaciones realizadas aparte y las correcciones sugeridas para las sentencias que consideran falsas. Puntualmente se tienen en cuenta otros registros recogidos en las grabaciones de video y audio, tales como el tono de voz empleado o los gestos manuales que acompañan sus explicaciones, para poder clarificar el significado de su respuesta.

9.2 Resolución de igualdades abiertas: Primeras evidencias de uso de pensamiento relacional

En las primeras dos sesiones los alumnos resuelven colecciones de igualdades abiertas, trabajando inicialmente en actividades escritas de forma individual y discutiendo después sus respuestas, con toda la clase. En estas sesiones no se promueve explícitamente el uso de pensamiento relacional, aunque sí se atiende a posibles manifestaciones espontáneas de este uso y a explorar los modos en que los alumnos abordan las igualdades propuestas.

En general, las explicaciones de los alumnos, algunas anotaciones realizadas en las hojas aparte y las grabaciones en video de su trabajo individual, ponen de manifiesto una tendencia general a proceder a resolver la sentencia realizando algún cálculo, el cual está condicionado por el significado del signo igual utilizado. En las igualdades de no-acción, como se muestra en los siguientes extractos de entrevistas realizadas durante la sesión 1, la mayoría de los alumnos resuelve primero las operaciones del miembro completo de la igualdad, dando lugar a una igualdad de tres términos y, a continuación, buscan el término desconocido de la misma[53]:

> **I:** *¿…cómo has hecho éste?* (12 + 7 = 7 + □ con respuesta 11).
> **MB:** *He sumado doce más siete, y el resultado este te tiene que dar lo mismo que esto* (Señala 7 + □).
>
> **I:** *¿Me puedes decir cómo has hecho éste de aquí?* (12 + 7 = 7 + □ con respuesta 12)
> **EV:** *Pues primero he sumado doce más siete, he visto lo que me daba, y he sumado siete para que me diera eso.*
> **I:** *Ah vale, ¿Y éste de aquí* (14 + □ = 13 + 4)*? ¿Cómo lo has hecho?*
> **EV:** *He sumado trece más cuatro, lo mismo que he hecho antes*[54].

[53] En las citas textuales de las explicaciones o respuestas de los alumnos no se han mantenido las faltas de ortografía ya que no aportan aspectos de interés a nuestro estudio y pueden dificultar su comprensión. Cuando los alumnos omiten alguna palabra, indicamos ésta entre corchetes para facilitar la coprension de la explicación.
[54] Esta alumna va efectuando las operaciones, escribiéndolas verticalmente en una hoja aparte, utilizando los algoritmos estándares de la suma y la resta.

Para realizar dichos cálculos los alumnos emplean los algoritmos estándares de la suma o la resta, hacen uso de estrategias de conteo (apoyándose en el uso de los dedos en casos puntuales), utilizan el recuerdo de hechos numéricos, y hacen uso de su sentido numérico relacionando las operaciones de suma y resta o derivando un hecho numérico de otros hechos que conocen. Todas éstas son estrategias habituales en la realización de cálculos aritméticos por alumnos de Educación Primaria. De forma similar, en el caso de las igualdades de acción abiertas los alumnos utilizan estas estrategias para calcular la cantidad desconocida.

En particular, se observa que la mayoría de los alumnos son capaces de encontrar sumandos o substraendos desconocidos en igualdades numéricas.

La realización de algún cálculo es puesta de manifiesto por los alumnos haciendo referencia, en su explicación, al valor numérico de los miembros o al resultado de operar algunos términos de la igualdad (ej., explicación de EF a su respuesta 15 en la igualdad 14 – 9 = □ – 1: *"He restado a catorce nueve y luego me ha salido seis, he ido contando seis más diez y me ha salido quince")* o realizando cálculos aparte (ej., Ver Figura 9-1 y Figura 9-2).

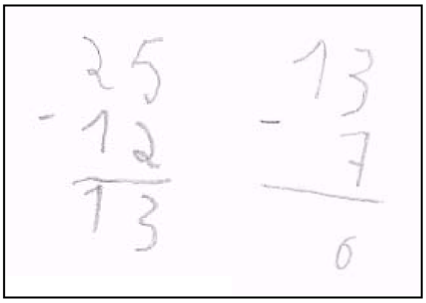


Figura 9-1: Cálculos realizados aparte por DL, durante la actividad escrita de la sesión 1, en relación con las igualdades □ = 25 – 12 y 13 – 7 = □ –6.

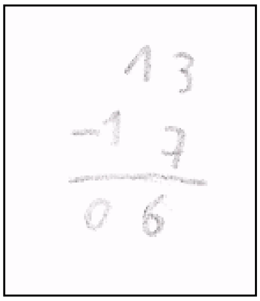


Figura 9-2: Cálculos realizados aparte por MAG durante la actividad escrita de la sesión 1, en relación con la igualdad 13 – 7 = □ –6.

En otros casos la respuesta dada lo sugiere. Por ejemplo, la respuesta 04 de NM a la igualdad 14 – 9 = □ – 10 sugiere la realización de algún cálculo ya que el cero situado delante del 4 indica que, probablemente, dicha respuesta ha sido obtenida mediante la aplicación del algoritmo estándar. Otros ejemplos de este tipo de respuestas son 17 en la igualdad 14 + □ = 13 + 4, y 17 ó 12 en la igualdad 8 + 4 = □ + 5. En general, evidencian la realización de algún cálculo todas las respuestas resultantes de operar juntos todos los términos de la sentencia (ej., 17 en la igualdad 8 + 4 = □ + 5), de ignorar uno de los términos de la sentencia y resolver la igualdad de tres términos resultante (ej., 6 en la igualdad 13 – 7 = □ – 6) y las respuestas que sugieren un error en el cálculo (ej., 11 en la igualdad 13 – 7= □ – 6).

Uso de pensamiento relacional

En ambas sesiones se aportan evidencias de uso puntual de pensamiento relacional en la resolución de alguna de las igualdades. Así ocurre, por ejemplo, en la discusión de la igualdad 12 + 7 = 7 + □ durante la primera sesión:

> **I:** *Y éste. ¿Quién me lo puede decir? A ver tú*
> **MT:** *Siete más doce*
> **I:** *¿Aquí va un doce? ¿Cómo lo has hecho tan rápido?* (Algunos alumnos intentan contestar). *Esperad un momento que se lo he preguntado a ella. ¿Cómo lo has hecho tan rápido?*
> **MT:** *Porque es el mismo número*
> **I:** *¿Es el mismo número? Ah, entonces, ¿qué es lo que ha pasado?*
> **Algunos alumnos:** *Lo han puesto al revés*
> **MT:** *Han cambiado los números de orden*

En este extracto de la discusión se observa cómo varios alumnos distinguen la repetición de la operación suma y del término siete en ambos miembros de la igualdad y, a partir de esta observación, obtienen la respuesta haciendo uso de su conocimiento de la propiedad conmutativa de la suma.

En la segunda sesión se identifica el uso de pensamiento relacional en la resolución de la igualdad 9 – 4 = □ – 3 por CH, a partir de las anotaciones que realiza debajo de la expresión 9 – 4. Dichas anotaciones explicitan la resta de una unidad a cada uno de los términos y, por tanto, evidencian el uso de la propiedad de compensación de la resta (ver Figura 9-3). La explicación de CH en la sentencia 12 – 4 = 13 – □ sugiere un uso semejante de pensamiento relacional aunque su explicación es algo imprecisa.

Algunas respuestas erróneas permiten observar que los alumnos no utilizan pensamiento relacional para valorar la veracidad de sus respuestas tras la realización del cálculo, lo que les permitiría en ocasiones detectar errores de cálculo propios (ej., 4 en la igualdad 12 – 4 = 13 – □; 15 en la igualdad □ – 6 = 15 – 7). En particular, en la sesión 1, a vista de las respuestas obtenidas en la igualdad 12 + 7 = 7 + □, es posible afirmar que al menos un tercio de la clase no emplea pensamiento relacional en la resolución de dicha igualdad, al dar como respuestas 10, 11, 14, 19, 21, 24 y 26.

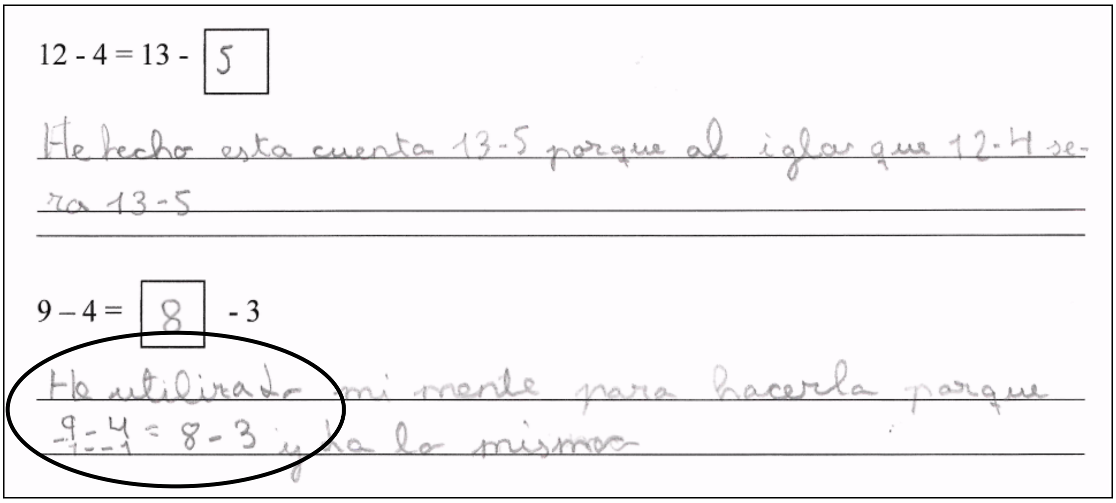


Figura 9-3: Extractos de las respuestas de CH a las igualdades abiertas de la sesión 2. Se señalan las anotaciones de CH que evidencian la estrategia empleada.

Se observa, por tanto, que algunos alumnos utilizan de forma espontánea estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional, pero ésta no parece ser la forma habitual en la que abordan la resolución de las igualdades propuestas.

En algunos casos no es posible identificar la estrategia utilizada, debido a que los alumnos no realizan anotaciones aparte, no aportan explicación a su respuesta, o la explicación dada no da información o es bastante imprecisa (ej., "*lo he hecho pensando*"). En ocasiones los alumnos, en vez de explicar cómo han obtenido la respuesta, justifican por qué saben que la respuesta dada es correcta. Así, por ejemplo, en la sentencia $12 + 4 = 13 - \square$, JM explica su respuesta 5 escribiendo *"porque si 12 menos 4 es 8, 13 menos 5 son 8"*.

9.3 Resolución de las sentencias verdaderas y falsas

Un primer análisis de la producción de los alumnos permite observar que, al iniciar la resolución de las sentencias verdaderas y falsas los alumnos muestran dos modos de abordar dicho proceso: proceden a hallar y comparar el valor numérico de ambos miembros[55], o bien, observan la sentencia, detectan alguna característica particular de ésta o relaciones entre sus elementos y utilizan conocimiento aritmético relacionado para resolverla. Estos dos enfoques coinciden con la distinción realizada por Hejny et

[55] Ocasionalmente, cuando los alumnos hacen uso del significado del signo igual denominado operador, en vez de proceder a hallar el valor numérico de ambos miembros, proceden a realizar algún cálculo con todos o algunos de los números involucrados en la sentencia.

al. (2006) entre estrategias meta-procedimentales y estrategias meta-conceptuales o, equivalentemente, con nuestra distinción entre enfoques basados en el cálculo y enfoques basados en el uso de pensamiento relacional. Sin embargo, al analizar el modo en que los alumnos realizan la resolución de las sentencias se observa que no siempre siguen su intención inicial y que la riqueza de las estrategias que utilizan es mayor, distinguiéndose un total ocho estrategias diferentes; la mayoría de ellas no puramente meta-conceptuales ni puramente meta-procedimentales.

Para describir las diferentes estrategias manifestadas por los alumnos, elaboramos un diagrama que ayuda a explicar cada estrategia y a hacer explícitas sus diferencias y características poniendo de manifiesto el flujo de pensamiento del alumno (ver Figura 9-4). En este diagrama distinguimos seis elementos:

- Inicio del proceso de resolución de la sentencia (I),
- Detección de relaciones entre los elementos de la sentencia o de alguna característica particular de la misma (R),
- Aplicación de algún conocimiento aritmético relativo a dicha característica o relaciones apreciadas (CA),
- Obtención de los valores numéricos de ambos miembros[56] o de algún valor numérico relativo a la sentencia (VN)
- Proceso de cálculo[57] dirigido, en la mayoría de los casos, a la obtención de los valores numéricos de ambos miembros ($\dashv\ \vdash\!\longrightarrow$)
- y respuesta (“verdadera” o “falsa”) (V/F).

En la Figura 9-4 se aprecia el modo en que articulamos estos elementos identificados por medio de siglas. El recuadro que incluye la letra I aparece sombreado para destacarlo como punto de inicio del proceso de resolución de la sentencia. Las flechas indican los diversos pasos posibles en el proceso de resolución hasta la obtención de la respuesta: “verdadera” o “falsa” (V/F). En la Tabla 9-2 se detalla el modo en que se interpretan cada uno de estos pasos, de la resolución de las sentencias, representados en el diagrama. Una de las flechas, la que representa la

[56] Ha de entenderse que, en el caso de las sentencias de acción, se refiere a la obtención del valor numérico del miembro que contiene operaciones, puesto que el valor numérico del otro miembro viene dado por el único término que lo compone.
[57] En este estudio no vamos a diferenciar la estrategia de cálculo utilizada aunque en algunos casos es explicitada y es, sin duda, un aspecto adicional que diferencia la actuación de los alumnos.

realización del proceso de cálculo, aparece seccionada para indicar si el alumno realiza el proceso de cálculo completo o sólo lo inicia, no llegando a obtener, a partir de él, el valor numérico de ambos miembros.

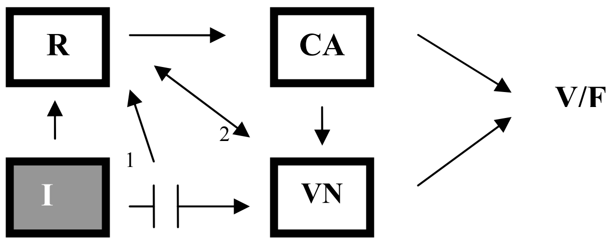


Figura 9-4: Diagrama general para describir el flujo de pensamiento de los alumnos al resolver las sentencias.

Los números 1 y 2 explicitan una limitación en la interpretación del diagrama: la flecha 2 sólo actúa en dirección descendente cuando tiene lugar después de la flecha 1, es decir, cuando "se ha llegado" a R a través de la flecha 1, en otros casos esta flecha es únicamente ascendente.

Tabla 9-2: Código para la interpretación de los diagramas utilizados para describir las estrategias

I→R	Se inicia la resolución de la sentencia detectando una o varias relaciones entre sus elementos o una característica particular de ésta, a partir de la observación de la sentencia y realización de distinciones.
I╢R	Inicialmente se procede a realizar un cálculo, en general el de los valores numéricos de ambos miembros pero, en el proceso, se detectan algunas relaciones entre los elementos de la sentencia o una característica particular de ésta, no continuando el proceso de cálculo.
I→VN	En primer lugar se calcula el valor numérico de ambos miembros u otro valor numérico relativo a la sentencia
R→CA	A partir de la detección de algunas relaciones o alguna característica particular en la sentencia se recurre a, o se recuerda, algún conocimiento aritmético relacionado.
R→VN	La detección de una relación en la sentencia permite, sin aplicar ningún conocimiento aritmético, obtener los valores numéricos de ambos miembros. Esta situación sólo es posible cuando previamente se han realizado parte de los cálculos necesarios para obtener el valor numérico de ambos miembros.
CA→V/F	Se concluye la veracidad o falsedad de la sentencia haciendo uso de algún conocimiento aritmético relativo a algunas relaciones o alguna característica previamente apreciada.
CA→VN	Se obtienen los valores numéricos de ambos miembros a partir de la aplicación de algún conocimiento aritmético relativo a algunas relaciones o alguna característica previamente apreciada.
VN→V/F	Se concluye la veracidad o falsedad de la sentencia comparando los valores numéricos de ambos miembros, de los que ya se dispone. En algunos casos en los que se utiliza un significado operacional del signo igual se concluye a partir

	de otro valor numérico relacionado con la sentencia.
VN→R	A partir de la obtención de los valores numéricos de ambos miembros, se detectan algunas relaciones entre los elementos de la sentencia o una característica de la misma no apreciada previamente.

El símbolo ┤║ hace referencia a la primera parte de la flecha que representa el proceso del cálculo. Al usar este símbolo se está indicando que sólo se realiza parte del proceso del cálculo.

Ayudándonos de este diagrama presentamos, a continuación, cada una de las estrategias identificadas que quedaran organizadas como trayectorias del mismo. Además, se aportan ejemplos (extractos de las discusiones o de las entrevistas y explicaciones dadas por escrito) en los que se identifica el uso de cada una de las estrategias por parte de los alumnos.

Al utilizar este diagrama para describir las estrategias utilizadas por los alumnos, presentamos de forma difuminada aquellas partes del diagrama que no intervienen (◻ , ⟶). Cuando, para una misma estrategia, son posibles diferentes trayectorias del diagrama, las flechas se presentan con mayor o menor grosor (➡ o ⟶) según constituyen elementos obligados de las trayectorias que definen la estrategia o son sólo una de las opciones posibles, respectivamente.

Inicialmente clasificamos en dos grupos las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de las sentencias verdaderas y falsas, según la motivación que guía inicialmente la estrategia.

- *Estrategias tipo HC (hallar y comparar)*: realizar algún cálculo para hallar y comparar los valores numéricos de ambos miembros.
- *Estrategias tipo DR (detectar relación):* detectar características particulares de la sentencia o relaciones entre sus elementos.

Estos dos grupos, a su vez, contemplan otras subdivisiones al considerarse diferentes actuaciones de los alumnos (Ver Figura 9-5). Detectándose, finalmente, ocho estrategias.

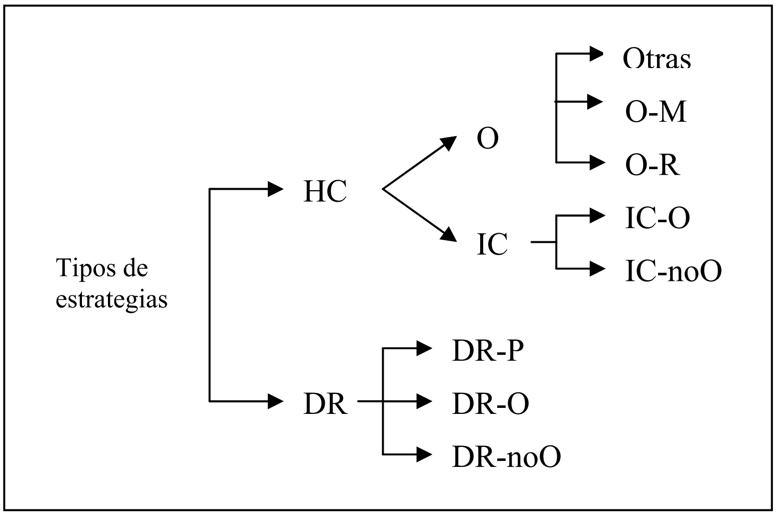


Figura 9-5: Esquema de la estrategias utilizadas por los alumnos

Estrategias tipo HC: _Proceder a hallar y comparar los valores numéricos de ambos miembros._

Tanto en las discusiones como en las entrevistas o en las actividades escritas algunos alumnos muestran una primera tendencia a proceder a calcular los valores numéricos de ambos miembros de la sentencia o a realizar algún cálculo con los números contenidos en la sentencia. No obstante, en ocasiones, en el proceso de realización de dicho cálculo o al escribir de forma vertical los números a operar, algunos alumnos ponen de manifiesto un cambio de estrategia al apreciar alguna característica de la sentencia o algunas relaciones entre sus términos, no observadas previamente. Dicha observación les conduce a resolver la sentencia sin necesidad de concluir el cálculo iniciado. En estos casos, el inicio del proceso de cálculo sirve al alumno para tomar conciencia de la composición de la sentencia y prestar atención a cada uno de sus elementos, favoreciendo la apreciación de relaciones.

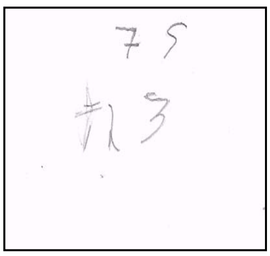


Figura 9-6: Anotaciones aparte de MP sobre la sentencia 75 + 23 = 23 +75

Este cambio de enfoque es apreciado a partir de la comparación de las explicaciones y las anotaciones realizadas aparte por los alumnos (ver Figura 9-6), o a partir de explicaciones tales como la dada por FM sobre la veracidad de la sentencia $51+51=50+52$ propuesta durante la discusión de la sesión 3: *"Es que como cincuenta y uno más* *cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno si le quitas cincuenta, le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos … Y te da ahí, ciento…cincuenta más cincuenta y dos".* Este alumno realiza el cálculo de uno de los miembros y, al prestar atención al otro miembro, aprecia algunas relaciones entre los términos, abandonando su enfoque inicial. En la Figura 9-6 se observa como MP inicia la escritura en vertical de la operación contenida en el miembro izquierdo de la sentencia, pero no llega a realizar ningún cálculo. Su explicación sugiere que ha apreciado alguna mismidad entre los miembros de la sentencia: "*es verdadera porque es igual"*. Se aprecia, por tanto, un cambio de enfoque.

Teniendo en cuenta esta distinción en el modo de abordar las sentencias, distinguimos entre dos tipos de estrategias: tipo *O* (operacional) y tipo *IC* (interrupción del cálculo).

Tanto en uno como en otro caso, al realizar algún cálculo los alumnos utilizan estrategias semejantes a las puestas de manifiesto en la resolución de las igualdades abiertas: emplean los algoritmos estándares de la suma o la resta, hacen uso de estrategias de conteo (apoyándose en el uso de los dedos en casos puntuales), utilizan el recuerdo de hechos numéricos, y hacen uso de su sentido numérico relacionando las operaciones de suma y resta o derivando un hecho numérico de otros hechos que conocen.

HC-1. *Estrategias tipo O (operacional):*

Las estrategias tipo *O* consisten en la obtención, por medio del cálculo (por cualquiera de los procedimientos previamente mencionados), de los valores numéricos de ambos miembros y su comparación para juzgar la veracidad o falsedad de la sentencia. En este caso, el alumno muestra dependencia del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, en tanto que le es necesario para determinar la veracidad o falsedad de la sentencia. Ocasionalmente, cuando el alumno hace uso del significado del signo igual denominado *operador*, al utilizar este tipo de estrategias realiza otro tipo de cálculo que de algún modo le permite concluir la veracidad o falsedad de la sentencia.

Un ejemplo de estrategia tipo *O* es la realización del cálculo de ambos valores numéricos sin apreciar ninguna relación o característica especial en la sentencia o en relación a los elementos que la componen (estrategia definida por la trayectoria I→VN→V/F del diagrama, ver Figura 9-7). Otra estrategia tipo *O* consiste en la realización del cálculo de ambos valores numéricos habiendo prestado atención, previamente, a los términos contenidos en la sentencia y las operaciones a realizar, para decidir el modo de abordar dicho cálculo (estrategia no reflejada en el diagrama).

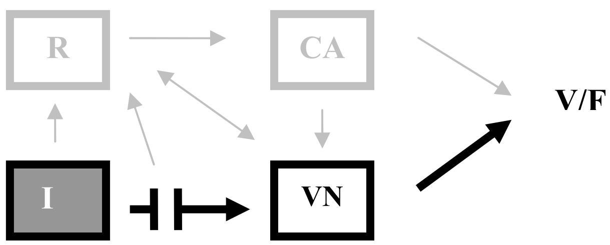


Figura 9-7: Representación de flujo de pensamiento en la estrategia tipo *O* consistente en el cálculo y comparación de ambos valores numéricos sin apreciar o hacer uso de ninguna relación o característica de la sentencia.

Un ejemplo del uso de una estrategia tipo *O* se observa en la resolución de la sentencia $7+7+9=14+9$, por parte de CL, en la discusión de la sesión 3. Esta alumna explica: "[Es verdadera] *Porque… porque nueve más siete son dieciséis, más siete, veintitrés, y… catorce más nueve dan veintitrés*". Como se identifica a partir de su explicación, CL ha calculado ambos valores numéricos, comenzando en ambos casos a realizar los cálculos por el término de mayor magnitud. Su explicación no hace referencia a ninguna relación existente entre los términos de la sentencia, únicamente describe el cálculo de las operaciones contenidas en cada miembro. Por tanto, no podemos precisar si ha apreciado alguna relación entre los términos que componen la sentencia. Únicamente se puede afirmar que la estrategia utilizada por CL en esta sentencia es del tipo *O* ya que su modo de justificar la veracidad de la sentencia se basa en el cálculo y comparación de los valores numéricos de ambos miembros.

En general, en ningún caso es posible precisar que el alumno no haya apreciado alguna relación al abordar la resolución de una sentencia. Nuestra identificación de la estrategia utilizada está limitada por la información que el alumno manifiesta.

En la discusión de la sesión 3, FM da otra explicación que evidencia el uso de una estrategia tipo *O* en la resolución de la sentencia $19-3=18-2$. En este caso el alumno presta atención a las operaciones a realizar previamente a proceder al cálculo, para decidir sobre el modo de ejecutar dicho cálculo: "*Es que como dos es menor que tres…* [I: Sí]*… Pues es más fácil restarlo, entonces he restado dieciocho menos dos, que es más fácil, y dan dieciséis, y el otro diecinueve menos tres dan dieciséis".*

En particular, dentro de este tipo de estrategias vamos a destacar dos que hemos denominado estrategia *O-M* y estrategia *O-R*. La primera de ellas, la *estrategia O-M,* se refiere al caso en que, en el proceso de cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, tras calcular el valor numérico de uno de ellos, el alumno detecta que las operaciones involucradas en el otro miembro coinciden con algunos de los cálculos ya realizados (sin aplicar la propiedad conmutativa), determinando su valor numérico sin necesidad de realizar más cálculos. La trayectoria del diagrama que define a esta estrategia es I⊣∥R→VN→V/F (ver Figura 9-8).

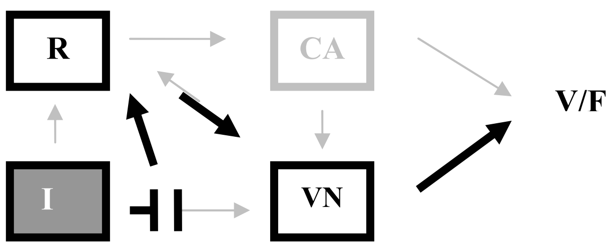


Figura 9-8: Representación de flujo de pensamiento en la estrategia *O-M*.

Por ejemplo, la alumna CH utiliza esta estrategia en la sentencia $7+7+9=14+9$: *"He sumado siete más siete, que dan catorce, y más nueve que dan veintitrés. Y después, he visto que son catorce más nueve y son veintitrés".* Al escuchar la explicación y prestar atención a la entonación de la parte final, se aprecia que CH reconoce la operación contenida en el miembro derecho como una de las operaciones realizadas previamente.

La otra estrategia destacada dentro de las estrategias tipo *O*, la e*strategia O-R,* consiste, además de en la obtención y comparación de los valores numéricos de ambos miembros, en la detección, a partir de la realización de dicho cálculo, de alguna característica particular de la sentencia y/o algunas relaciones entre sus elementos que permiten al alumno concluir la veracidad o falsedad de la sentencia haciendo uso de algún conocimiento aritmético relacionado. Al utilizar esta estrategia con frecuencia los alumnos aportan dos justificaciones de la veracidad o falsedad de la sentencia: una basada en la comparación de los valores numéricos de ambos miembros y otra haciendo uso de las relaciones o alguna característica apreciada. Las trayectorias del diagrama que definen esta estrategia son (ver Figura 9-9):

I→VN (→V/F)→R→CA→V/F y I→VN (→V/F)→R→CA→VN→V/F

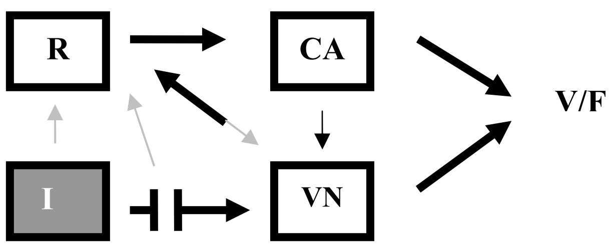


Figura 9-9: Representación de flujo de pensamiento en la estrategia *O-R*.

La diferencia entre ambas trayectorias radica en sí la relación o característica apreciada conduce o no a conocer el valor numérico de ambos miembros, lo cual está condicionado, en la mayoría de los casos, por el tipo de sentencia considerada.

Un ejemplo del uso de esta estrategia es evidenciado por la actuación de EF, en la sesión 4, en la sentencia $7+15=8+15$. Esta alumna utiliza el algoritmo para calcular el valor numérico de ambos miembros, según muestran sus anotaciones realizadas aparte y, además, justifica la falsedad de la sentencia a partir de la observación de una relación ("diferencia de magnitud") entre los términos que la componen: *"Falsa porque no te sale lo mismo y aparte que siete es más pequeño"*. De forma similar, en la sentencia $53+41=54+40$, esta alumna realiza el cálculo de los valores numéricos de ambos miembros aunque aporta una explicación de la veracidad de la sentencia basada en la apreciación de una relación numérica entre los miembros que le permite obtener uno a partir de otro: "*Verdadera porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40* [y] *te da lo mismo"*.

***HC-2**. Estrategias IC (interrupción del cálculo).*

Estas estrategias consisten en iniciar el cálculo de los valores numéricos de ambos miembros y, en el proceso del cálculo, apreciar algunas relaciones entre los elementos de la sentencia o alguna característica particular de ésta[58]. En este caso se determina la veracidad o falsedad de la sentencia a partir de dichas relaciones o dicha característica observada, haciéndose uso de conocimiento aritmético relacionado y no requiriéndose concluir el proceso de cálculo iniciado. Las trayectorias del diagrama que definen esta estrategia son I⊣‖R→CA→VN→V/F e I⊣‖R→CA→V/F (ver Figura 9-10 y Figura 9-11), según si las relaciones o alguna característica observada conduce al alumno al valor numérico de ambos miembros, o no. Según cada una de estas trayectorias del diagrama distinguimos entre la estrategia *IC-O* y la estrategia *IC-noO*.

Al hacer uso de este tipo de estrategias es posible que el alumno obtenga y compare los valores numéricos de ambos miembros, pero a diferencia de las estrategias tipo O, ambos valores numéricos no son obtenidos a partir de la realización del cálculo sino haciendo uso de algunas relaciones observadas entre los términos de la sentencia.

[58] En sentencias de acción la apreciación de dicha relación o característica ocurre en el proceso de cálculo del valor numérico del miembro izquierdo, mientras que en el caso de sentencias de no-acción puede ocurrir en el proceso de cálculo del valor de uno u otro de los miembros, habiéndose calculado o no previamente el valor numérico del otro miembro.

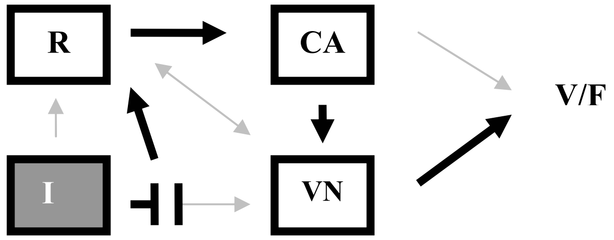


Figura 9-10: Representación de flujo de pensamiento en la estrategia *IC-O*.

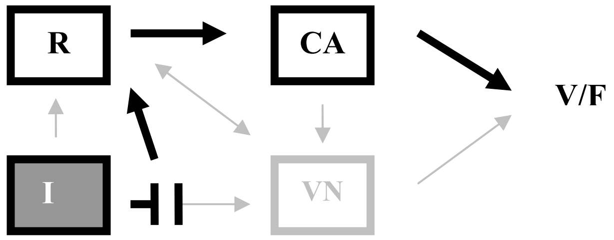


Figura 9-11: Representación de flujo de pensamiento en la estrategia *IC-noO*.

En el caso de las sentencias basadas en la propiedad conmutativa de la suma, el uso de esta estrategia puede consistir, en ocasiones, en obtener el valor numérico de uno de los miembros tras haber calculado el del otro, apreciando que en ambos casos están involucrados los mismos números (ver ejemplo en Figura 9-12). La diferencia con la estrategia *O-M* es que, en este caso, se hace un uso implícito de la propiedad conmutativa de la suma. La Figura 9-12 recoge una explicación de MG que parece evidenciar el uso de la estrategia *IC-O* en la sentencia $75+23=23+75$. La explicación sugiere que MG no ha requerido realizar el cálculo del miembro derecho de la sentencia, habiendo observado que consiste en operar los mismos términos que en el miembro izquierdo, aunque en distinto orden.

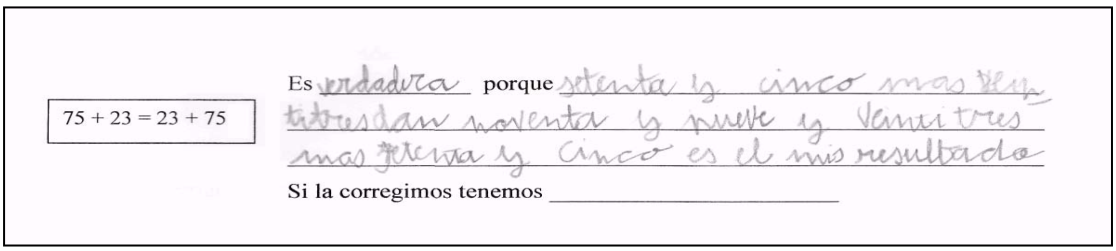


Figura 9-12: Respuesta de MG a la sentencia $75+23=23+75$ en la sesión 4

En el siguiente ejemplo, previamente mencionado, observamos cómo en la resolución de la sentencia $51+51=50+52$, durante la discusión de la sesión 3, FM muestra el uso de la estrategia *IC-noO*. Este alumno procede a calcular los valores numéricos de ambos miembros, pero, en el proceso, aprecia una relación numérica existente entre términos de ambos miembros que le permite obtener un miembro a partir de otro y concluir la veracidad de la sentencia: "*Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno si le quitas cincuenta le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos*".

En algunos casos la relación observada por el alumno podía haber sido detectada inicialmente, antes de realizar cálculo alguno, observando y analizando la sentencia. No obstante, la realización de los cálculos parece ayudarle a tomar conciencia de la estructura y composición de la sentencia. En otros casos, algunas relaciones o alguna característica son apreciadas a partir de la obtención de un resultado parcial del valor numérico de uno de los miembros.

Un ejemplo de este último caso, que evidencia el uso de la estrategia *IC-noO*, es la explicación de FM a la sentencia $27-14+14=26$ propuesta en la discusión de la sesión 3. Este alumno explica: **"***Yo es que he sumado catorce más catorce, como da veintisiete, ya lo tengo ahí el veintisiete, y no puede dar veintiséis que está ahí".*

En ocasiones se observa que los cálculos realizados no son correctos, sin embargo, son de utilidad al alumno para tomar conciencia de la estructura de la sentencia y de los elementos de la misma, y apreciar alguna relación o característica que le permite concluir la veracidad o falsedad de la sentencia. Así ocurre, por ejemplo, cuando EF resuelve la sentencia $257-34=257-30-4$ en la sesión 6. Esta alumna responde es *"falsa porque en vez de restarle 34 le restan 30 y el cuatro va aparte"*, habiendo realizado aparte, mediante el algoritmo de la resta, las siguientes operaciones: $257-34=1223$, $257-30=227$ y $227-4=223$).

Estrategias tipo DR (detectar relación): <u>*Detectar características particulares de la sentencia o relaciones entre los elementos que la componen.*</u>

En este caso se inicia la resolución de la sentencia observando la totalidad de ésta y apreciando algunas relaciones entre sus elementos o alguna característica de la misma. Concretamente se distinguen tres tipos de estrategias *DR*: *DR*-P, *DR*-noO y *DR-O*. En la *estrategia DR-P (predicción),* estas relaciones o característica apreciada sólo son utilizadas para determinar si la sentencia es verdadera o falsa, recurriéndose al cálculo de los valores numéricos de ambos miembros para la justificación de dicha respuesta (ver Figura 9-13). Las dos trayectorias del diagrama que definen esta estrategia son dobles: I→R→CA→V/F y I→VN→V/F o I→R→CA→VN→V/F y I→VN→V/F, las cuales se diferencian en si las relaciones o alguna característica observada conduce al alumno al valor numérico de ambos miembros, o no.

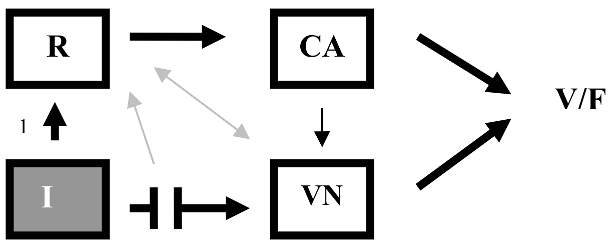


Figura 9-13: Representación de flujo de pensamiento en la estrategia *DR*-P.
[1] En esta estrategia el primer paso de la trayectoria es I → R

La entrevista a CH sobre la resolución de la sentencia $11-6=10-5$, en la sesión 5, aporta evidencias que sugieren el uso de esta estrategia. Inicialmente responde que la sentencia es verdadera, recurriendo a continuación a la realización del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, al pedírsele que justifique su respuesta. El modo en que aporta posteriormente una segunda explicación haciendo referencia a la compensación de las diferencias de magnitud entre los términos de ambos miembros, sugiere que esta relación había sido observada previamente. El siguiente extracto, recogido en la Tabla 9-3, corresponde a dicha parte de la entrevista.

Tabla 9-3: Extracto de la entrevista a CH en la sesión 5 correspondiente a la resolución de la sentencia $11-6=10-5$, acompañado de comentarios sobre el transcurso de la entrevista.

I: *Toma, tú que crees, ¿Qué ésta es verdadera o falsa?* **CH:** *Verdadera*	Esta respuesta no es aportada inmediatamente. La alumna se toma unos segundos para pensar su respuesta.
I: *¿Por qué?* **CH:** "*Porque si a once le quitas seis son... cinco, y si a diez le quitas cinco, cinco*" **I:** *Muy bien. ¿Y sabrías decírmelo también de otra forma, que es verdadera?*	Conforme va explicando los cálculos va realizando las operaciones

CH: *¿El qué?* **I:** *¿Podrías explicármelo también de otra forma, por qué es verdadera? Sin hacer las cuentas.* **CH:** *Porque... si once es mayor que diez y le quitas uno más que cinco, te sale igual.*	Se toma muy poco tiempo para pensar su respuesta, lo que sugiere que ya había apreciado previamente las relaciones que expresa.

En el caso de las *estrategias DR-noO (no operacional) y DR-O (operacional),* en cambio, las relaciones o alguna característica apreciada son utilizadas, a partir del uso de conocimiento aritmético relacionado, para concluir directamente si la sentencia es verdadera o falsa (I→R→CA→V/F) u obtener los valores numéricos de ambos o uno de los miembros y, entonces, concluir la veracidad o falsedad de la sentencia (I→R→CA→VN→V/F) (ver Figura 9-14 y Figura 9-15).

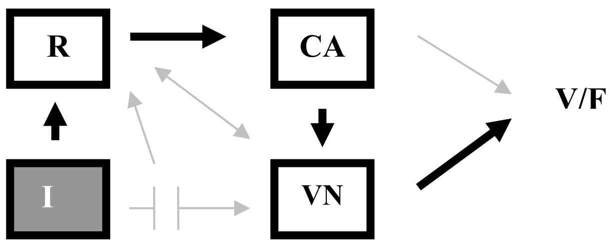


Figura 9-14: Representación de flujo de pensamiento en la estrategia *DR-O*.

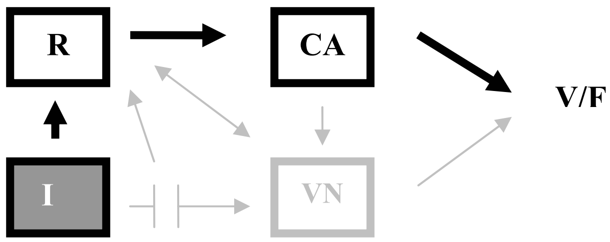


Figura 9-15: Representación de flujo de pensamiento en la estrategia *DR*-noO.

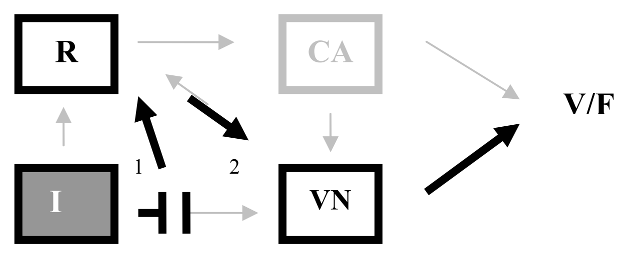
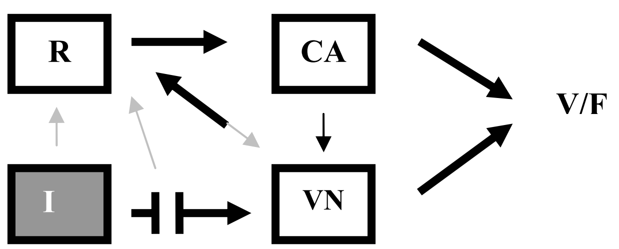
Por ejemplo, en la entrevista a EF en la sesión 5, su respuesta a la sentencia $125-125=13$ sugiere el uso de la estrategia *DR-O*. Al observar la mismidad de los términos involucrados en el miembro izquierdo, aplica la propiedad "$a-a=0$" para concluir la falsedad de la sentencia: *"Falsa, porque a ciento veinticinco le quitas ciento veinticinco son cero, no trece* [I: ¿Cómo sabes que es cero?] *Porque aquí son los mismos números y si le quitas los mismos números son cero, aquí no te puede dar trece*".

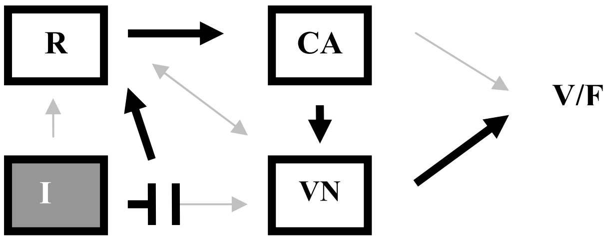
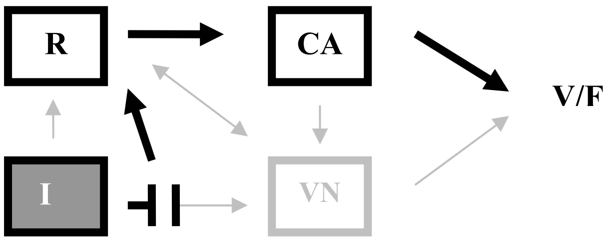
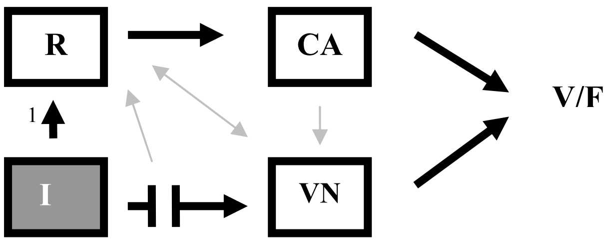
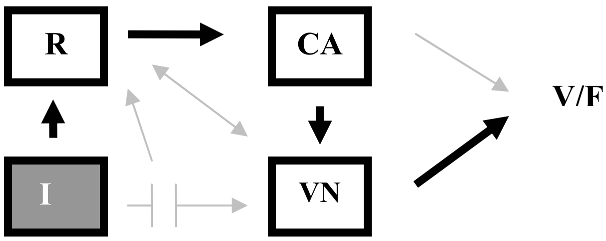
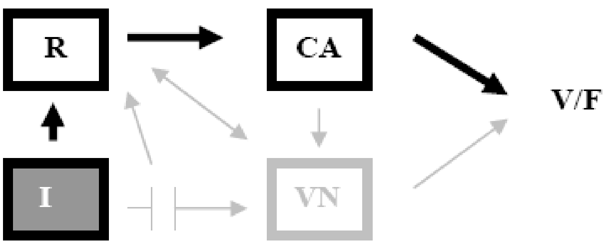
En la sesión 6, se identifica el uso de la estrategia *DR*-noO en la explicación de CH a la veracidad de la sentencia $75+23=23+75$. Esta alumna aprecia la mismidad de términos en ambos miembros, aunque en distinto orden, y aplica la propiedad conmutativa para concluir la veracidad de la sentencia, sin necesidad de conocer el valor numérico de ambos miembros: *"Verdadera porque en la suma no importa cambiar el orden"*. De forma similar, en esta misma sentencia, MT explica "*Verdadera porque son los mismos números que hay en una cuenta y en otra",* poniendo también de manifiesto el uso de esta estrategia.

En el caso de CH su explicación expresa con claridad el uso de la propiedad conmutativa, mostrando un conocimiento explícito de esta propiedad. No obstante, en otras ocasiones, el conocimiento aritmético utilizado por el alumno, relativo a alguna relación o característica de la sentencia apreciada, no es necesariamente tan explícito.

A continuación, presentamos una tabla (Tabla 9-4) que resume la descripción de las estrategias realizada (ver también Figura 9-17).

Tabla 9-4: Resumen de los tipos de estrategias identificadas

E	Representación en el diagrama	Descripción	
O-M		Obtiene y compara los valores numéricos de ambos miembros por medio del cálculo	Tras calcular el valor numérico de uno de los miembros, aprecia que las operaciones a realizar en el otro miembro coinciden exactamente con algunas de las ya realizadas, no requiriendo volver a realizar dichos cálculos
O-R			A partir del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, aprecia una relación entre los términos que componen la sentencia que conduce a una justificación alternativa.

<table>
<tr><td>IC-O</td><td></td><td rowspan="2">Inicia el cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, y en el proceso, aprecia y utiliza relaciones entre los elementos de la sentencia que le permiten resolverla sin concluir los cálculos</td><td>Concluye al conocer y comparar los valores numéricos de ambos miembros</td></tr>
<tr><td>IC-noO</td><td></td><td>Concluye sin conocer los valores numéricos de ambos miembros</td></tr>
<tr><td>DR-P</td><td>[1] En esta estrategia el primer paso de la trayectoria es I →R</td><td rowspan="3">Detecta características particulares de la sentencia y/o relaciones entre sus elementos y utiliza algún conocimiento aritmético relacionado</td><td>Utiliza dicha apreciación para determinar si la sentencia es verdadera o falsa recurriendo al cálculo de los valores numéricos de ambos miembros para su justificación</td></tr>
<tr><td>DR-O</td><td></td><td>Obtiene los valores numéricos de ambos miembros a partir de dicho conocimiento</td></tr>
<tr><td>DR-noO</td><td></td><td>Resuelve aplicando dicho conocimiento directamente, sin llegar a conocer el valor numérico de ambos miembros</td></tr>
</table>

Para facilitar la comprensión de las diferencias existentes entre cada una de estas estrategias, las cuales son en ocasiones muy sutiles, se recogen a continuación ejemplos ficticios de explicaciones sobre la veracidad o falsedad de las sentencias $12+11=11+12$ y $5+7-7=16$ que evidencian el uso de cada una de estas estrategias (ver Tabla 9-5 y Tabla 9-6).

Tabla 9-5: Ejemplos ficticios en los que se identifica el posible uso de cada una de las estrategias, en la resolución de la sentencia de no-acción $12+11=11+12$.

Estrategias		**Ejemplos ficticios del uso de las diferentes estrategias en la resolución de la sentencia** $12+11=11+12$
Tipo O	*O-M*	*"Es verdadera porque doce más once es veintitrés, y doce más once…va a ser también veintitrés"* (en este caso el miembro de izquierdo de la sentencia está siendo interpretado de izquierda a derecha, y el miembro derecho de derecha a izquierda)
	O-R	*"Es verdadera porque he sumado doce y once y me ha dado veintitrés, y luego he sumado once y doce y también me ha dado veintitrés. Es que en las dos cuentas se están sumando los mismos números"* (aparte aparecen anotaciones del uso del algoritmo de la suma para la realización de ambos cálculos).
		"Es verdadera porque he sumado doce y once y me ha dado veintitrés, y luego he sumado once y doce y también me ha dado veintitrés" (aparte aparecen anotaciones del uso del algoritmo de la suma para la realización de ambos cálculos).
IC-O		*"Es verdadera porque doce más once es veintitrés, y once más doce…, es lo mismo, va a dar el mismo resultados"*
IC-noO		*"Porque doce más once es veintitrés, pero… yo he visto que hay los mismos números en los dos miembros y por eso se que es verdadera"*
DR-P		*"Verdadera…" "Porque 12 + 11 es igual a trece, catorce, quince,….veintidós, veintitrés, y 11 más doce es igual a….veintitrés"* (dando alguna evidencia de la observación de la relación antes de la realización del cálculo)
DR-O		-----------No es posible[59] ------------
DR-noO		*"Es verdadera porque en la suma no importa cambiar el orden de los sumandos"*

Tabla 9-6: Ejemplos ficticios en los que se identifica el posible uso de cada una de las estrategias, en la resolución de la sentencia de acción $5+7-7=16$.

Estrategias		**Ejemplos ficticios del uso de las diferentes estrategias en la resolución de la sentencia** $5+7-7=16$
Tipo O	*O-M*	-----------No es posible[60]------------
	O-R	*"Es falsa porque cinco más siete son doce y menos siete son,…diez, nueve,…seis, cinco, y no son dieciséis. Es que, sumar y restar el mismo número es como no hacer nada y entonces no puede ser más grande"*
		"Es falsa porque como siete es más grande que cinco, he sumado siete y cinco y son doce, y menos siete son cinco y no son dieciséis."
		"Es falsa porque cinco más siete son, siete más tres, diez más dos, doce; y doce

[59] En esta sentencia no es posible concluir el valor numérico de ambos miembros a partir de relaciones o características de la sentencia, sin realizar ningún cálculo.
[60] En esta sentencia no puede tener lugar el uso de esta estrategia ya que sólo contiene operaciones en uno de sus miembros.

	menos siete son…doce menos dos, diez, y menos cinco, cinco; y no son dieciséis"
<u>*IC-O*</u>	*"Es falsa porque he sumado cinco más siete y me ha dado doce y si le quitas otra vez el siete, es como si no hicieras nada, y tienes otra vez cinco"*
<u>*IC-noO*</u>	*"Es falsa porque he sumado cinco más siete y me ha dado doce y como no sumas nada más no te puede salir un número más grande"*
<u>*DR-P*</u>	*"Es falsa…" "Porque cinco más siete son,..ocho, nueve,…, doce, y menos siete son,…., cinco, y no son dieciséis"* (dando alguna evidencia de la observación de la relación antes de la realización del cálculo)
<u>*DR-O*</u>	*"Es falsa porque si a cinco le quitas y le sumas el mismo número te da cinco, no dieciséis"*
<u>*DR-noO*</u>	*"Es falsa porque cinco más siete no va a ser más grande que dieciséis y entonces no puede dar dieciséis"*

El diagrama recogido en la Figura 9-17 presenta las diferentes estrategias organizadas en el modo en que han sido descritas previamente y secuenciadas de derecha a izquierda según el grado de cálculo requerido para concluir la veracidad o falsedad de las sentencias, así como la dependencia que manifiesta respecto de la comparación de los valores numéricos de ambos miembros, para resolver la sentencia.

Las estrategias dispuestas más a la derecha, las estrategias tipo *O*, son las que manifiestan una mayor dependencia de la realización del cálculo de ambos valores numéricos. La estrategia *IC* requiere sólo de la realización de parte de este cálculo. Las estrategias tipo *DR,* en cambio, no requieren del cálculo de los valores numéricos, sino que se basan en la apreciación y uso de relaciones y características de la sentencia. No obstante, dentro de cada uno de estos tipos de estrategias, se distinguen diferentes casos según el alumno requiera o no de la comparación de los valores numéricos de ambos miembros para concluir la veracidad o falsedad.

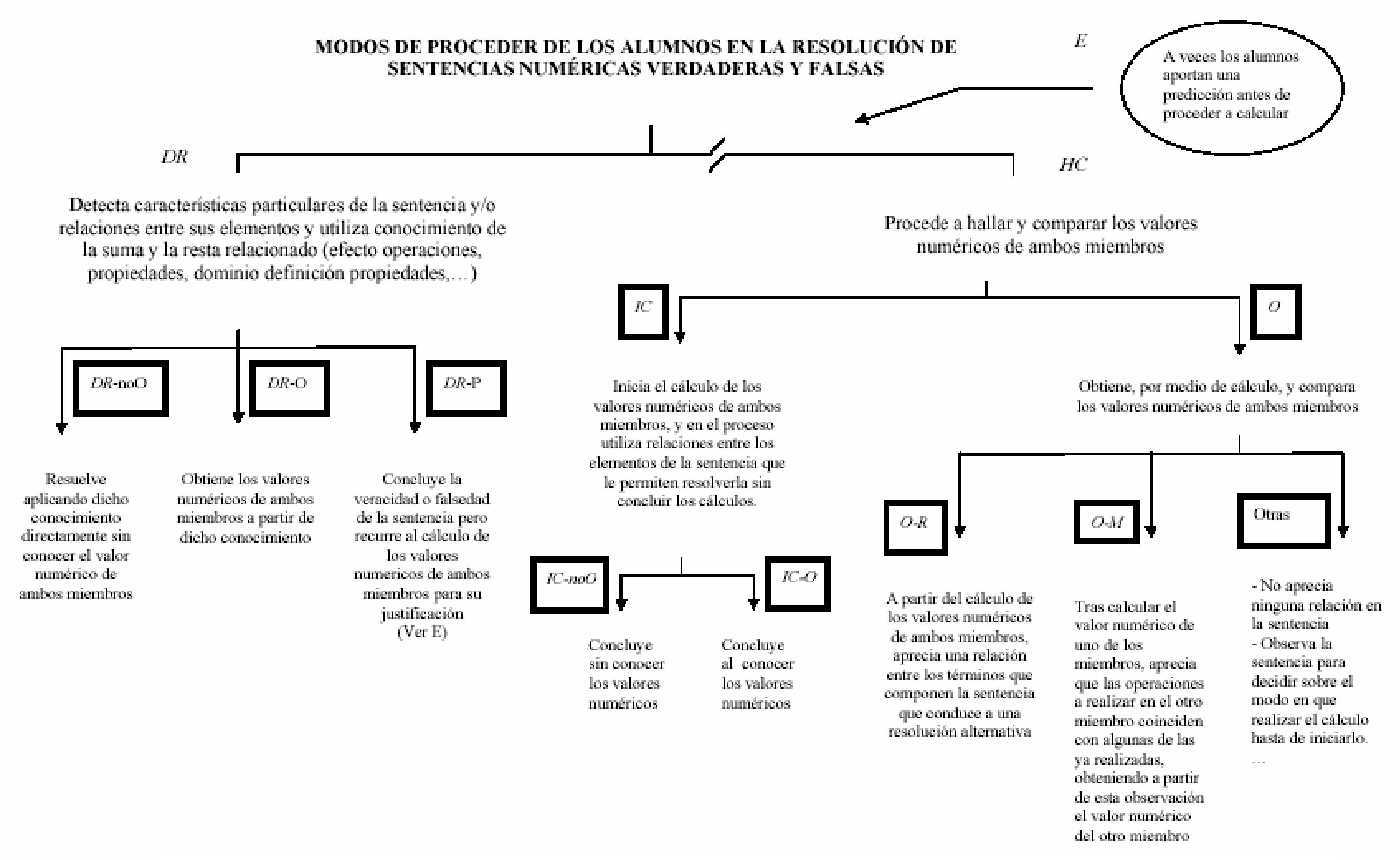


Figura 9-16: Modos de proceder mostrados por los alumnos en la resolución de las sentencias numéricas verdaderas y falsas consideradas

Predicciones de la veracidad o falsedad de la sentencia

Como se muestra en la Figura 9-16, en ocasiones los alumnos aportan una predicción sobre la veracidad o falsedad de la sentencia procediendo, a continuación, a calcular los valores numéricos de ambos miembros para justificar, y tal vez verificar, su predicción. Esta actuación se pone de manifiesto en las sesiones 3 y 5, en las que los alumnos deben pensar "sobre la marcha" cada una de las sentencias y proponer su respuesta y explicación de forma oral. En la mayoría de estos casos, la respuesta inicial del alumno relativa a la veracidad o falsedad de la sentencia no parece estar basada en un cálculo exacto previo, sino en una estimación, en una conjetura a partir de algunos aspectos distinguidos en la sentencia o en la apreciación de alguna relación en la sentencia (como ocurre cuando hacen uso de la estrategia *DR-P).*

Es posible, por tanto, que algunos de estos alumnos estén utilizando, de algún modo, pensamiento relacional para predecir la veracidad o falsedad de la sentencia antes de ponerse a calcular, pero que (a) no otorguen a dicho tipo de estrategia la misma validez que al cálculo y comparación de los valores numéricos, (b) consideren que no es el tipo de explicación esperada por la investigadora-docente o (c) que encuentren dificultades para expresar el modo en que hacen uso de las relaciones observadas.

Un ejemplo de este tipo de participación por parte de los alumnos se presenta en el siguiente extracto de la discusión de la sesión 3 sobre la resolución de las sentencias $10-7=10-4$ y $52-13+13=65$, siendo JM el primer alumno en intervenir en relación con ambas sentencias:

I: *¿JM, tú qué piensas?*
JM: *Falsa*
I: *¿Por qué piensas que es falsa?*
JM: *Porque diez menos siete son… tres y diez menos cuatro son… seis.* (Calcula conforme va explicando la justificación de su respuesta)

I: *Miradla a ver qué os parece. JM ¿Tú qué crees?*
JM: *Falsa*
I: *¿Por qué?*
JM: *Porque sesenta y dos menos trece son… (Cuenta con los dedos)*
I: *¿Pero tú has hecho todas las cuentas, antes?*
JM: *No.*
I: *Entonces cuéntame cómo lo has sabido tan rápido. Porque yo te he visto que has levantado la mano muy pronto. ¿Cómo has sabido que era falsa sin hacer las cuentas?*
JM: *Porque trece más trece son… veintiséis*
I: *Sí*
JM: *Menos sesenta y dos…*

I: *Pero tú me has dicho antes que tú no has hecho todas las cuentas, tú has sabido que era falsa mirándola nada más.*
JM: *Sí*
I: *De golpe.*
JM: *Sí*
I: *¿Cómo? ¿Sabes explicarnos por qué?*
JM: *(gesto de negación con la cabeza*

Este mismo alumno, en la discusión de la resolución de la sentencia $13+11=12+12$ predice inicialmente que la sentencia es falsa sorprendiéndose al comprobar que los valores numéricos de ambos miembros coinciden cuando realiza los cálculos.

Durante la sesión 3, el que los alumnos aporten una predicción de manera previa a la realización del cálculo, parece en ocasiones ser consecuencia de su interés por participar lo antes posible en la discusión y la necesidad de afirmar o negar la veracidad de la sentencia antes de proceder a explicar su respuesta. Al participar en la discusión de esta sesión, algunos alumnos realizan el cálculo de ambos miembros en voz alta, sin precisar previamente si la sentencia es verdadera o falsa, o dudan repetidamente sobre si la sentencia es verdadera o falsa antes de realizar verbalmente los cálculos. En otros casos los alumnos sólo afirman la veracidad o falsedad de la sentencia sin aportar explicación alguna de su respuesta, afirmando no saber explicarlo. Algunas de estas participaciones parecen ser debidas al interés de los alumnos por participar de algún modo en la discusión.

En la mayoría de los casos, concretamente en aquellos que tienen lugar durante la sesión 3, no es posible identificar el origen del juicio sobre la veracidad o falsedad de la sentencia aportado por el alumno, no pudiéndose precisar, por tanto, cuando se hace uso de la estrategia *DR-P*.

9.4 Análisis del uso de pensamiento relacional y la estructura de la atención de los alumnos[61]

Habiendo identificado las diferentes estrategias que utilizan los alumnos para resolver las sentencias numéricas, es posible analizar los diferentes modos en que el pensamiento relacional está siendo utilizado en uno u otro caso. Se observa que, aunque en el caso de alguna estrategia tipo *O* puede no tener lugar este tipo de

[61] Ver en el anexo A, el significado con el que se utiliza el término estructura de la atención.

pensamiento, en las demás estrategias se manifiesta de algún modo, siendo variable la sofisticación de dicho uso, en cada caso, así como la influencia en él del proceso de cálculo.

El modo más simple en que es puesto de manifiesto algún uso de pensamiento relacional corresponde a la comparación de los términos de la sentencia para tomar decisiones relativas a la realización del cálculo, concretamente para determinar que miembro operar primero, según la dificultad de las operaciones a realizar en cada caso.

El uso de pensamiento relacional que subyace a la estrategia *O-M* es también básico, en tanto que se reduce a la observación de mismidad entre las operaciones a realizar y aquellas ya realizadas, no requiriéndose hacer uso de ninguna propiedad o principio aritmético. No obstante, a diferencia de otras estrategias tipo *O*, pone de manifiesto que parte de la atención del alumno no está centrada en la realización del cálculo, permitiéndole distinguir semejanza entre los términos que está operando.

El uso de pensamiento relacional en la estrategia *O-R* es más sofisticado pues el alumno considera la sentencia como una totalidad, hace distinciones y aprecia relaciones entre sus términos. Este uso de pensamiento relacional está vinculado a la realización del cálculo el cual ayuda al alumno a tomar conciencia de los elementos que componen la sentencia y a relacionarlos entre sí. Se constata que los alumnos que utilizan esta estrategia manifiestan cierta dependencia de la comparación de los valores numéricos de ambos miembros para determinar y/o justificar la veracidad o falsedad de la sentencia.

Al igual que en la estrategia *O-R*, al hacer uso de las estrategias tipo *IC* los alumnos manifiestan un uso de pensamiento relacional vinculado a la realización del cálculo, ya que aprecian relaciones o características particulares de la sentencia a través de la realización de parte del cálculo. Es posible, en este caso, que alguna tendencia a realizar los cálculos influya en el alumno y le condicione a no apreciar la relación o característica previamente, o que realmente el alumno necesite tomar conciencia de los elementos que componen la sentencia a través del proceso de cálculo. No obstante, los alumnos abandonan el cálculo iniciado, mostrando menor dependencia de éste al justificar la veracidad o falsedad de la sentencia haciendo uso de la relación o característica apreciada.

En las estrategias del tipo *DR*, el alumno aborda inicialmente la resolución de la sentencia en busca de relaciones o características destacadas en la misma, con disposición a utilizar pensamiento relacional, no mostrando dependencia alguna de la realización de las operaciones contenidas en la sentencia. Por este motivo, consideramos que estas estrategias *DR* son las que muestran un uso más sofisticado o avanzado de pensamiento relacional. No distinguimos entre las distintas estrategias de este tipo según el uso de pensamiento relacional ya que en el análisis de los datos se percibe que el uso de una u otra está influenciado por la propiedad considerada en el diseño de la sentencia.

Según estas observaciones, se aprecian diferentes modos en los que la atención del alumno está estructurada al hacer uso de uno u otro tipo de estrategia. En algunos casos los alumnos consideran las sentencias y las expresiones con dos o más términos de forma global (como un todo) y miran a través del signo igual, así como dentro de cada miembro, para hacer distinciones y apreciar relaciones entre los elementos. El modo en que hacen uso de estas relaciones está influenciado por su percepción de la estructura de la sentencia así como su conocimiento de la estructura de la aritmética. Así mismo, las relaciones y distinciones que aprecian están condicionadas por su experiencia aritmética previa que determina, en particular, su reconocimiento de los aspectos que son importantes y su conocimiento sobre las relaciones existentes entre números y las relaciones existentes entre las operaciones.

En otros casos, los alumnos proceden a realizar operaciones, aparentemente prestando atención únicamente a los números involucrados en las sentencias y a las operaciones a realizar con ellos, considerando cada miembro de la sentencia o, incluso cada operación, de forma independiente. En otras ocasiones, en cambio, la atención de los alumnos, a la vez que estar centrada en la realización de las operaciones, fluctúa entre los números que se están operando, los resultados parciales que se van obteniendo y los elementos de la sentencia. Esta fluctuación hace posible apreciar características y relaciones en la sentencia no identificadas previamente.

9.5 Análisis de las manifestaciones de cada estrategia

En este apartado analizamos con mayor detalle cada una de estas estrategias prestando atención a las diferentes manifestaciones de cada una de ellas.

9.5.1 Identificación de la estrategia utilizada

Al analizar las respuestas de los alumnos en cada una de las sentencias no siempre es posible identificar con exactitud la estrategia utilizada. En ocasiones, una respuesta puede ser resultado de más de una de las estrategias. Esto es consecuencia, en la mayoría de los casos, de la brevedad o ambigüedad de algunas respuestas o de la pérdida de la temporalidad de las acciones expresadas por los alumnos, es decir, de no poder precisarse, en algunos casos, el orden secuencial en el que han sido realizadas cada una de las acciones que reporta el alumno, especialmente en los datos recogidos en las sesiones 4 y 6.

Además, es importante observar que nuestra identificación de la estrategia se basa en la producción del alumno, por tanto, en los aspectos de su estrategia que hace explícitos, no siendo posible conocer otros aspectos del pensamiento del alumno que hayan podido intervenir en la resolución de la sentencia en cuestión. Por tanto, no afirmamos que el alumno no ha utilizado pensamiento relacional, sino que éste no ha sido puesto de manifiesto. Debe tenerse en cuenta que los alumnos no necesariamente explicitan la justificación que les ha ayudado inicialmente a obtener la respuesta "verdadera o falsa", sino que pueden estar aportando la justificación que consideran más fiable o que a su juicio puede ser mejor valorada por la investigadora-docente. No obstante, esto es igualmente interesante pues pone de manifiesto la estrategia a la que por un motivo u otro dan más valor.

Por ejemplo, la explicación de RB durante la discusión de la sentencia $7+7+9=14+9$ en la sesión 3 *"catorce más nueve me dan veintitrés. Y en el otro, siete más siete me dan catorce y más nueve, veintitrés"* evidencia que el alumno ha utilizado una estrategia tipo *O*, no pudiéndose precisar si la estrategia concreta utilizada es, por ejemplo, *O-M* o, incluso *O-R*, aunque el alumno no de evidencias de haber apreciado ninguna relación. Otro ejemplo viene dado por la explicación de EV a la sentencia $75+23=23+75$ durante la sesión 4: "*Verdadera porque en la primera igualdad da 98 y en la segunda, sólo que están al revés"*. En este caso no podemos precisar si la estrategia utilizada por la alumna es *O-R* o *IC-O,* puesto que no conocemos si la alumna ha apreciado la mismidad de términos tras realizar el cálculo del valor numérico de un miembro o de ambos, es decir, si ha requerido de la realización del cálculo completo del valor numérico de ambos miembros para apreciar dicha relación.

Otro ejemplo semejante es el caso de la explicación dada por JQ en la sentencia $10+4=4+10$: "*Porque diez más cuatro son catorce y cuatro más diez son catorce, sólo que las has puesto al revés".* En este caso la respuesta del alumno no permite conocer si la relación observada entre ambos miembros ha sido, o no, utilizada para obtener el valor numérico de uno de los miembros. Por este motivo la estrategia utilizada puede ser *O-R o IC-O.*

Adicionalmente se observa que en las sentencias basadas en la propiedad de composición/descomposición es, en ocasiones, difícil distinguir entre *DR-noO* y *IC-noO.* Así ocurre, por ejemplo, en las explicaciones dadas por CL y FM a la veracidad de las sentencias $7+7+9=14+9$ y $6+4+18=10+18$, respectivamente: *"Sumando siete más siete que dan catorce, lo mismo que ahí, nueve lo mismo que ahí también", "Verdadera porque 6 + 4 =10 y + 18 = 10 + 18".* En estos casos desconocemos si el alumno ha procedido inicialmente a realizar los cálculos y, en el proceso, ha apreciado alguna relación entre los miembros o la presencia de un hecho numérico contenido en la sentencia directamente. En el siguiente ejemplo, en cambio, sí se identifica el uso de la estrategia *DR-noO*: "[$231+48=231+40+8$] *Es verdadera, porque sale lo mismo. A cuarenta y ocho le pongo un ocho…, a cuarenta le pongo un ocho y me sale lo mismo".*

En ocasiones los alumnos aportan "lecturas"[62] de la sentencia como justificación de su respuesta, lo cual es consistente con otros estudios en los que se les pide que justifiquen la veracidad o falsedad de una afirmación matemática (Evens y Houssart, 2004). Por ejemplo, en la sentencia $122+35-35=122$ en la sesión 4, FB da como justificación de la veracidad de la sentencia una "lectura" de la misma ("*Verdadera porque 122 más treinta cinco menos treinta cinco me da veintidós")* tras realizar la

[62] Este tipo de explicación a la que denominamos lectura consiste en afirmar la veracidad o falsedad de una sentencia nombrando o escribiendo los términos y operaciones que componen la sentencia, procediendo de izquierda a derecha. Este tipo de explicaciones sólo hacen referencia a números y operaciones contenidas en la sentencia.

operación $122+35-35$ utilizando el algoritmo de la suma y obteniendo como resultado 192. En la sesión 6 este alumno también da como justificación una "lectura" de la sentencia $18-7=7-18$: "*Verdadera porque dieciocho menos siete es lo mismo a siete menos dieciocho*". En ambos casos no se puede inferir qué estrategia ha utilizado. En otros casos, aunque la explicación dada sea una "lectura" de la sentencia, las anotaciones realizadas aparte permiten identificar la estrategia empleada.

9.5.2 Manifestaciones en los diversos tipos de sentencias

Al analizar las manifestaciones, dadas por los alumnos, de cada una de las estrategias en los diferentes tipos de sentencias propuestas, se observa que, salvo en la resolución de sentencias basadas en las propiedades del cero como elemento neutro, la propiedad $a-a=0$ y la propiedad reflexiva, en la resolución de los demás tipos de sentencias se pone de manifiesto el uso de estrategias de los tres tipos: tipo *O*, tipo *IC* y tipo *DR* (ver Tabla 9-7).

El hecho de que las sentencias basadas en las propiedades del cero como elemento neutro, la propiedad $a-a=0$ y la propiedad reflexiva fueron menos frecuentes en las actividades propuestas, siendo consideradas sólo en las sesiones 3 y 5, ha podido condicionar la diversidad de estrategias puestas de manifiesto en las mismas. Además, en el caso de las sentencias basadas en las propiedades del cero como elemento neutro, al no haber ninguna operación que realizar en expresiones del tipo *a – 0, a + 0* ó *0 + a,* las respuestas de los alumnos siempre proceden de la aplicación de su conocimiento sobre las propiedades del cero como elemento neutro. Por lo tanto, este tipo de sentencias son siempre resueltas mediante la estrategia *DR-noO*. Así ocurre, por ejemplo, en la explicación dada por CA en la sentencia $125-0=125$: "*Yo he pensado que, si quitas el cero, como el cero no es nada, pues te quedan los dos ciento veinticinco. Ciento veinticinco igual a ciento veinticinco*". Los alumnos muestran hacer uso de conocimiento sobre propiedades aritméticas, aunque sólo en algunos casos justifican su respuesta expresando la propiedad que utilizan.

Tabla 9-7: Ejemplos que ponen de manifiesto el uso de estrategias de los tipos *O, IC* y *DR* en cada uno de los tipos de sentencias considerados.

Propiedad aritmética en la que se basa el diseño de la sentencia	Estrategias utilizadas	Ejemplos
Conmutativa de la suma	Tipo *O*	$[75+23=23+75]$ *"Verdadera porque 75+23 son 91 y 23 + 75 son 28"* (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 = 28 y 23 + 75 = 98)
	Tipo *IC*	$[75+23=23+75]$ *"Verdadera porque 75 + 23 son 98 y 23 + 75 son 98, es como si a los números le hubieran dado la vuelta"* (Utiliza el algoritmo de la suma para calcular 75 + 23 = 98) [63]
	Tipo *DR*	$[75+23=23+75]$ *"Verdadera porque son los mismos números y nada más han cambiado una posición"*
		$[75+23=23+75]$ *"Verdadera porque los dos números son iguales"*
No conmutativa de la resta + Restricción del dominio de la resta	Tipo *O*	$[18-7=7-18]$ *"Falsa porque no son los mismos resultados uno da 17 y el otro da 19"*
	Tipo *IC*	$[18-7=7-18]$*"Falsa porque 18 – 7 son 11 y a 7 no le puedes quitar 18"*
	Tipo *DR*	$[18-7=7-18]$ "*Verdadera porque dieciocho menos 7 y el otro es lo mismo y si es lo mismo da igual"*
		$[18-7=7-18]$ *"Falsa porque 7–18 no se puede restar"*
Cero elemento neutro	Tipo *O*	-------------------
	Tipo *IC*	-------------------
	Tipo *DR*	$[23+0=23]$ "*Porque veintitrés más cero igual a veintitrés, porque si a veintitrés no le sumamos nada es veintitrés"*
Elemento Inverso (por la derecha) *"a – a = 0"*	Tipo *O*	$[125-125=13]$ *"Ciento veinticinco menos ciento veinticinco... a ciento veinticinco le quito ciento veinticinco…*[…] *Cinco menos cinco, cero…no me llevo ninguna, dos menos dos cero, y una menos una cero. Falsa"* (Por escrito va realizando el cálculo 125 – 125, utilizando el algoritmo de la resta)
	Tipo *IC*	-------------------
	Tipo *DR*	$[125-125=13]$ "*Porque ciento veinticinco, si le quitamos ciento veinticinco, son cero [...] Porque ciento veinticinco, si si si se le quita todos los números..."* [64]
Relación complementaria suma y resta	Tipo *O*	$[122+35-35=122]$ *"Verdadera porque 122 más 35 da 157 y si a 157 le restamos 35 nos [da] 122"*
	Tipo *IC*	$[122+35-35=122]$ *"Verdadera porque como si te pones vida y te la quitas y da lo mismo"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)
	Tipo *DR*	$[122+35-35=122]$ *"Verdadera porque 122 + 35 – 35 = 122 porque si a 122 le ponemos 35 y se lo quitamos es como*

[63] En este caso se considera que la estrategia utilizada es del tipo *IC,* descartando la estrategia *O-R* debido a que las evidencias sugieren que el alumno no realizó el cálculo del miembro derecho, deduciendo el valor numérico de dicho miembro a partir de la observación de que contiene los mismos términos que el otro miembro, aunque en distinto orden. El alumno pone de manifiesto, así, el uso de la estrategia *IC-O.*

[64] En este caso la alumna aporta la respuesta con rapidez al ver la sentencia, lo que sugiere que no ha realizado ningún cálculo.

		si no hubiera sumado nada"
Compensación	Tipo *O*	[$17-12=16-11$] *"Verdadera porque en las dos me da lo mismo"* (Aparte calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)
		[$17-12=16-11$] *"Verdadera porque 17–12 son 05* [y] *16–11 es 05 y, además, a 17* [es] *como, si le quitamos 2 y nos da el resultado"* (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)
	Tipo *IC*	[$51+51=50+52$] "*Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno si le quitas cincuenta le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos"*
	Tipo *DR*	[$17-12=16-11$] *"Falsa porque 17-12 no es igual a 16-11 sería 11-16 y después 16-11"*
Composición/ descomposición	Tipo *O*	[$257-34=257-30-4$] *"Verdadera porque da lo mismo"* (calcula mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 223 y 257 – 30 –4 = 223)
	Tipo *IC*	[$257-34=257-30-4$] *"Falsa porque en vez de restarle 34 le restan 30 y el cuatro va aparte"* (Calcula aparte mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 1223, 257 – 30 = 227 y 227 – 4 = 223)
	Tipo *DR*	[$257-34=257-30-4$] "*Verdadera porque es la misma sólo han puesto más números para restar"*
		[$257-34=257-30-4$] *"Verdadera porque doscientos cincuenta y siete es igual a treinta y cuatro y doscientos cincuenta y cuatro es igual a treinta y cuatro"*
Magnitud	Tipo *O*	[$75-14=340$] *"Falsa porque 75 – 14 es 61 y no es 340"*
		[$75-14=340$] *"Falsa porque 75 – 14 son 61 y, además, si a 75 le restamos más no puede salir 340"*
		[$7+15=8+15$] *"Falsa porque siete y quince dan 22 y ocho más quince dan 23"* (Calcula mediante el algoritmo de la suma ambos valores numéricos)
	Tipo *IC*	[$7+15=8+15$] *"Falsa porque 7 + 15 son 22 pero 8 + 15 son 23 porque a 7 le han puesto una más"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22)[65]
	Tipo *DR*	[$75-14=340$] *"Falsa porque 75 menos 14 son menos, no le puede salir un número mayor"*
		[$7+15=8+15$] *"Falsa porque 7 no es = a 8 pero 15=15 si entonces no son los mismos números"*
Reflexiva de la Igualdad	Tipo *O*	[$5+5=5+5$] *"Porque cinco más cinco son diez y cinco más cinco son diez"*
		[$7=12$] *"Porque siete más cero son siete y no puede dar doce"*
	Tipo *IC*	-------------------
	Tipo *DR*	[$7=12$] *"Porque siete no son doce"*

[65] El que haya realizado aparte sólo el cálculo de las operaciones del miembro izquierdo y haya apreciado que en uno de los miembros se está sumando una unidad más que en otro, sugiere que no ha requerido realizar el cálculo del miembro derecho de la sentencia para concluir la falsedad de ésta.

Manifestación e incompatibilidades

A continuación, presentamos ejemplos que ponen de manifiesto cada tipo de estrategia en las sentencias en las que fue puesta de manifiesto (ver Tabla 9-8, Tabla 9-8 y Tabla 9-10). Siempre que es posible, para cada tipo de sentencia se aportan explicaciones correspondientes a la resolución de una misma sentencia con la intención de facilitar su comparación. Estos ejemplos muestran que las estrategias identificadas no son dependientes del tipo de sentencia a resolver, salvo ciertas incompatibilidades determinadas teóricamente que se indican en las tablas y se comentan posteriormente.

Tabla 9-8: Ejemplos que ponen de manifiesto el uso de las estrategias tipo *DR* en los tipos de sentencias propuestas (según la propiedad considerada en su diseño)

Estrategia / Propiedad	Tipo *DR*	
	DR-NoO	***DR-O***
Conmutativa suma	[$75+23=23+75$] *"Verdadera porque los dos números son iguales"*	No es posible
No-conmutativa resta	[$15-6=6-15$] "*Que es verdadera.[...] Porque sólo lo que han hecho es cambiar el orden"*	No es posible
Complementariedad suma y resta	No manifestada	[$122+35-35=122$] *"Verdadera porque 122 + 35 – 35 = 122 porque si a 122 le ponemos 35 y se lo quitamos es como si no hubiera sumado nada"*
Compensación	[$13+11=12+12$] *"He pensado que a trece le puedo quitar una y te quedan doce y ese uno se lo he puesto al once y me sale doce más doce igual a doce más doce"*	No es posible
Composición/ Descomposición	[$231+48=231+40+8$] "*Es verdadera, porque sale lo mismo. A cuarenta y ocho le pongo un ocho…, a cuarenta le pongo un ocho y me sale lo mismo"*	No es posible
Magnitud	[$26-8=100$] *"Porque…esto… porque veintiséis menos ocho no te da cien. [...] Porque sino tendría que ser pues…sumando"*	No es posible
Cero-Neutro	No es posible	[$125-0=125$] *"Yo he pensado que, si quitas el cero, como el cero no es nada, pues te quedan los dos ciento veinticinco. Ciento veinticinco igual a ciento veinticinco"*
Elemento inverso	No es posible	[$125-125=14$] *"Porque aquí*

(por la derecha)		*son los mismos números y si le quitas los mismos números son cero, aquí no te puede dar trece"*
Reflexiva	No manifestada	$[7=12]$ *"Porque siete no son doce"*

Tabla 9-9: Ejemplos que ponen de manifiesto el uso de las estrategias tipo *IC* en los tipos de sentencias propuestas (según la propiedad considerada en su diseño)

Estrategia / Propiedad	Tipo *IC*	
	IC-NoO	***IC-O***
Conmutativa suma	$[75+23=23+75]$*"Verdadera porque es igual"* (Comienza a escribir verticalmente 75 + 23 pero no sigue operando)[66]	$[75+23=23+75]$ *"Verdadera porque 75 + 23 son 98 y 23 + 75 son 98, es como si a los números le hubieran dado la vuelta"* (Utiliza el algoritmo de la suma para calcular 75 + 23 = 98) [67]
No-conmutativa resta	$[15-6=6-15]$ *"Falsa [...] Porque quince menos seis son once y a seis no le puedes quitar quince"*	$[18-7=7-18]$ *"Verdadera porque 18 menos siete es once y siete menos 18 es once.* (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 11y escribe 7 – 18 en vertical pero no opera).
Complementariedad suma y resta	$[27-14+14=26]$ "*Yo es que he sumado catorce más catorce, como da veintisiete, ya lo tengo ahí el veintisiete, y no puede dar veintiséis que está ahí. [...] Y me da veintisiete, y como ya está ahí el veintisiete pues no pueden ser veintiséis"*	$[122+35-35=122]$ *"Verdadera porque como si te pones vida y te la quitas y da lo mismo"* (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)
Compensación	$[51+51=50+52]$ "*Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno si le quitas cincuenta le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos"*	No manifestada
Composición/ Descomposición	$[6+4+18=10+18]$*"Verdadera porque 6+4=10+18=10+18"*	No manifestada

[66] En este caso, aunque la explicación del alumno no es muy explícita, consideramos que sugiere que ha apreciado la mismidad de los términos involucrados en ambos miembros puesto que no realiza el cálculo que pretendía. Además se puede observar que en las demás sentencias de dicha sesión el alumno realiza el cálculo de los valores de ambos miembros haciendo uso de los algoritmos estándares.

[67] En este caso se considera que la estrategia utilizada es del tipo *IC,* descartando la estrategia *O-R* debido a que las evidencias sugieren que el alumno no realizó el cálculo del miembro derecho, deduciendo el valor numérico de dicho miembro a partir de la observación de que contiene los mismos términos que el otro miembro, aunque en distinto orden. El alumno pone de este modo de manifiesto el uso de la estrategia *IC-O*.

	*(*calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 = 10)[68]	
Magnitud	$[7+15=8+15]$ *"Falsa porque 7 + 15 da 22 y a 8 no le puedes sumar 15"*	$[7+15=8+15]$ *"Falsa porque 7 + 15 son 22 pero 8 + 15 son 23 porque a 7 le han puesto una más"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22)[69]
Cero-Neutro	No es posible	No es posible
Elemento inverso (por la derecha)	No es posible	No manifestada
Reflexiva	No manifestada	No manifestada

Tabla 9-10: Ejemplos que ponen de manifiesto el uso de las estrategias tipo *O* en los tipos de sentencias propuestas (según la propiedad considerada en su diseño)

Estrategia / Propiedad	Tipo *O*		
	O-R	***O-M***	**Otras (pudiendo ser *O-R* o *O-M* no evidenciadas)**
Conmutativa suma	$[10+4=4+10]$ *"Porque diez más cuatro son catorce y cuatro más diez son catorce, sólo que las has puesto al revés"*[70]	No manifestada	$[75+23=23+75]$ "*Verdadera porque 75 + 23 son 91 y 23 + 75 son 28"(*Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 = 28 y 23 + 75 = 98)
No-conmutativa resta	No manifestada	No manifestada	$[18-7=7-18]$ "*Falsa porque no son los mismos resultados uno da 17 y el otro da 19"*
Complementariedad suma y resta	$[16+14-14=36]$ *"Falsa porque 16+14 dan 30 y como le restan 14 no puede dar 36" (*Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30 y 30 – 14 = 16)[71]	No es posible	$[122+35-35=122]$ "*Verdadera porque en la cuenta da ciento veinte y dos"* (calcula mediante los algoritmos 122 + 35 = 157 y 157 – 35 = 122)

[68] Consideramos que esta explicación evidencia el uso de la estrategia *IC-noO* porque el alumno no reconoce directamente el hecho numérico 6 + 4 = 10, sino que requiere del uso del algoritmo para calcularlo. Esta observación sugiere que el alumno procede inicialmente a realizar los cálculos y obtener el valor numérico del miembro izquierdo.

[69] En este caso, como el alumno sólo utiliza el algoritmo para realizar el cálculo del miembro izquierdo, consideramos que probablemente ha hecho uso de la relación apreciada "*a 7 le han puesto una más*" para obtener el valor numérico del miembro derecho a partir del valor numérico del miembro izquierdo.

[70] En este caso no podemos precisar si el alumno ha apreciado la relación tras realizar el cálculo o en el proceso de cálculo, por lo que puede haber utilizado la estrategia O-R o la estrategia IC-O.

[71] La expresión utilizada por este alumno "no puede dar" sugiere que ha apreciado cierta imposibilidad en que 30-14 sea igual a 36, no obstante, desconocemos si realmente ha apreciado o no dicha imposibilidad o se refiere a que "no da". En dicho caso la estrategia no sería O-R, sino otra estrategia tipo-O.

Compensación	[$53+41=54+40$] *"Verdadera porque 53 + 41 = 54 + 40 es lo mismo sólo quitando un número a uno y sumando al otro"* (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94)	No es posible	[$13+11=12+12$] *"Doce más doce me dan veinticuatro y trece más once me dan veinticuatro"*
Composición/ Descomposición	No manifestada	$7+7+9=14+9$ *"He sumado siete más siete, que dan catorce, y más nueve que dan veintitrés. Y después, he visto que son catorce más nueve, y son veintitrés"*[72]	[$6+4+18=10+18$]*"Verdadera porque 6 más cuatro más dieciocho dan 28 y 10 más dieciséis dan 28"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28)
Magnitud	[$75-14=61$] *"Falsa porque a 75 se le resta un número menor y el resultado no puede salir más grande"* (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	No es posible	*[*$37+22=300$*]* *"Falsa[...] Porque treinta y siete más veintidós dan cincuenta y nueve, y no dan trescientos*"
Cero-Neutro	No es posible	No es posible	No es posible
Elemento inverso (por la derecha)	No manifestada	No es posible	[$125-125=13$] *"Ciento veinticinco menos ciento veinticinco... a ciento veinticinco le quito ciento veinticinco…*[…] *Cinco menos cinco, cero…no me llevo ninguna, dos menos dos cero, y una menos una cero. Falsa"* (realiza aparte el cálculo utilizando el algoritmo de la resta)
Reflexiva	No manifestada	No manifestada	[$5+5=5+5$] *"Porque cinco más cinco son diez y cinco más cinco son diez"*

En estas tablas se señalan ciertas incompatibilidades, es decir, ciertas sentencias en cuya resolución no parece posible utilizar alguna de las estrategias. No obstante, esta

[72] Como se ha comentado previamente, al escuchar la explicación y prestar atención a la entonación de la parte final, se aprecia que esta alumna reconoce la operación contenida en el miembro derecho como una de las operaciones realizadas previamente.

incompatibilidad está condicionada por el modo en que sea interpretada la sentencia. Así, por ejemplo, en las sentencias basadas en la propiedad inversa de la suma y la resta, se pone de manifiesto una de las estrategias que teóricamente no puede tener lugar: la estrategia *IC-noO*. Esto es debido a que el alumno resuelve incorrectamente la sentencia al aislar uno de los términos del signo menos que le precede: [$27-14+14=26$] "*Yo es que he sumado catorce más catorce, como da veintisiete, ya lo tengo ahí el veintisiete, y no puede dar veintiséis que está ahí. [...] Y me da veintisiete, y como ya está ahí el veintisiete pues no pueden ser veintiséis.* Teóricamente este tipo de sentencias no pueden resolverse utilizando la estrategia *IC-noO* ya que la apreciación de la cancelación de los términos conduce al conocimiento del valor numérico del miembro izquierdo, en otras palabras, el uso de pensamiento relacional en la resolución de la sentencia conduce a la obtención del valor numérico de sus miembros.

Teniendo en cuenta esta observación justificamos a continuación las supuestas incompatibilidades (desde un punto de vista teórico) señaladas en las tablas.

- La estrategia *O-M* no puede ser utilizada en la resolución de sentencias de acción, debido a que este tipo de sentencias sólo incluyen operaciones en uno de sus miembros. Concretamente esta estrategia sólo pueden ser utilizadas para resolver sentencias basadas en las propiedades reflexiva y composición/descomposición y, si la lectura de ambos miembros se realiza en distinto sentido, también en las sentencias basadas en las propiedades conmutatividad de la suma y no conmutatividad de la resta. En los demás casos, independientemente del modo en que se realicen los cálculos, no es posible que los cálculos que conducen al valor numérico de uno de los miembros sean iguales a los realizados para obtener el valor numérico del otro miembro.
- La estrategia *DR-O* no puede ser utilizada en la resolución de las sentencias de no-acción de las sesiones 3, 4, 5 y 6 ya que no permiten el cálculo del valor numérico de ambos miembros a partir de la observación de algunas relaciones o alguna característica y la aplicación directa de algún conocimiento aritmético relacionado. Ésta es, por tanto, una limitación impuesta por el tipo de sentencias consideradas. La estrategia *DR-O* podría haber sido utilizada en sentencias tales como $4+0=0+5$ y $6-6=13-13$.

- En las sentencias basadas en la propiedad de magnitud no es posible concluir la veracidad o falsedad de la sentencia a partir del uso de una estrategia *DR-O*. Las sentencias consideradas, de este tipo, no permiten el cálculo del valor numérico de ambos miembros a partir de la observación de algunas relaciones o alguna característica y la aplicación directa de algún conocimiento aritmético relacionado.
- En las sentencias basadas en la propiedad "$a-a=0$" o en las propiedades del cero como elemento neutro, no es posible utilizar la estrategias *DR-noO* ni *IC-noO* puesto que el uso de la observación de algunas relaciones o alguna característica que permita resolver la sentencia conduce a la obtención del valor numérico de ambos miembros.
- Como se ha observado previamente, en las sentencias basadas en las propiedades del cero como elemento neutro, al no haber ninguna operación que realizar en expresiones del tipo $a - 0$, $a + 0$ ó $0 + a$, la única estrategia posible es *DR-O*.

Como se muestra en la Tabla 9-8, Tabla 9-8 y Tabla 9-10, además de la menor variedad de estrategias manifestada en las sentencias basadas en las propiedades del cero como elemento neutro, la propiedad $a-a=0$ y la propiedad reflexiva, ya comentada, se observa que en alguna de los tipos de sentencias no se ha manifestado el uso de algunas de las estrategias (siendo posible teóricamente). No obstante, estas tablas revelan que las estrategias identificadas son utilizadas por los alumnos en sentencias de formas diversas.

9.5.3 Otras observaciones

Se observa que, inicialmente, al solicitar de los alumnos que propongan diferentes formas de resolver una misma sentencia, tienden a proponer diferentes órdenes en los que realizar el cálculo de las operaciones contenidas en ambos miembros, poniendo de manifiesto el uso de estrategias tipo *O*.

Cuando los alumnos proceden a realizar los cálculos, la elección del orden en que los realizan condiciona en algunos casos su posibilidad de apreciar relaciones a partir de dicho cálculo. Así se observa, en particular, en el caso de CL al resolver la sentencia $7+7+9=14+9$ operando ambos miembros comenzando por el término de mayor magnitud: "*Porque…porque nueve más siete son dieciséis, más siete, veintitrés, y…*

catorce más nueve dan veintitrés". En otros casos el desconocimiento de las convenciones de la aritmética impide que el cálculo ayude a los alumnos a preciar una relación. Así ocurre en las sentencias de la forma $a - b + b = c$, cuando al sumar $b + b$ se pierde la oportunidad de apreciar que $-b$ y b se cancelan.

Otro factor a destacar es la carga cognitiva que la sentencia suponga para el alumno, lo cual va a condicionar que pueda dedicar parte de su atención a hacer distinciones en la sentencia y apreciar relaciones. Así ocurre, por ejemplo, cuando forman parte de la sentencia números de gran magnitud, si el alumno no los concibe como entidades sino como secuencias de números. De forma semejante, si el alumno requiere toda su atención para realizar los cálculos, difícilmente podrá apreciar alguna relación o característica especial de la sentencia. En la realización del cálculo, para que el alumno aprecie relaciones necesita tener libre alguna atención para prestarla a los términos que está operando, los resultados parciales que está obteniendo y los términos que forman la sentencia.

9.5.4 Tipos de justificaciones dadas

Al resolver las sentencias verdaderas y falsas utilizando las diferentes estrategias, los alumnos aportan seis tipos de justificaciones:

- alegan la mismidad o diferencia de valor numérico,
- indican que las operaciones expresadas mantienen la mismidad de valor numérico, es decir, aprecian un cambio que está compensado,
- argumentan la mismidad o no mismidad de los términos que aparecen en la sentencia,
- expresan la imposibilidad de la veracidad de la sentencia, en ocasiones debido a no estar definida una de las operaciones
- ponen de manifiesto la posibilidad de trasformar uno de los miembros de la sentencia en el otro,
- aluden a una relación arbitraria existente entre los términos de la sentencia como prueba de la veracidad de ésta.

La Tabla 9-11 recoge ejemplos de explicaciones de los alumnos que ponen de manifiesto cada una de estas justificaciones.

Tabla 9-11: Ejemplos de los tipos de justificaciones de la veracidad o falsedad de la sentencia

Tipo de Justificación	Ejemplo
Mismidad o diferencia de valor numérico	[$7+7+9=14+9$] "*He sumado siete más siete, que dan catorce, y más nueve que dan veintitrés. Y después, he visto que son catorce más nueve y son veintitrés*"
Cambio compensado	[$122+35-35=122$] "*Verdadera porque es* [como] *si le das el número y luego lo recuperas*"
Mismidad o no mismidad de los términos	[$10-7=10-4$] "*Sí, porque yo me he fijado en 10 – 7 y me he fijado en 10 – 4 y no son los mismos números*"
Imposibilidad de la veracidad de la sentencia	[$37+22=300$] "*Porque… porque treinta y siete más, porque treinta y siete más veintidós,… porque treinta y siete más veintidós no te dan trescientos porque trescientos es un número más mayor*" [$15-6=6-15$] "*Falsa porque quince menos seis son once y a seis no le puedes quitar quince*
Posibilidad de trasformar uno de los miembros en el otro	[$24-15=24-10-5$] "*Porque es que tú has hecho diez menos cinco, y si eso lo juntas te dan quince*"
Relación arbitraria entre los términos	"[$11-6=10-5$] *Como seis más seis... seis más cinco son once, pues se puede... no tienes que hacer la cuenta ni nada al decir eso*"

Al utilizar una estrategia tipo *O* o las estrategias *IC-O* y *DR-O* la justificación aportada consiste en la mismidad o diferencia de los valores numéricos de ambos miembros, con la salvedad de la estrategia *O-R*. Al utilizar la estrategia *O-R*, si los alumnos aportan una justificación doble, una de ellas consiste en la mismidad o diferencia de los valores numéricos de ambos miembros; si aportan una justificación simple pertenece a uno de los otros cinco tipos mencionados. Las otras estrategias, *IC-noO* y *DR-noO*, por definición, nunca conducen a una justificación relativa a la mismidad o diferencia de valores numéricos, sino a cualquiera de los otros cinco tipos.

9.6 Perfiles de comportamiento de los alumnos en cuanto al uso de pensamiento relacional

En este apartado describimos diferentes tipos de comportamientos, o perfiles de comportamiento, manifestados por los alumnos en las sesiones 3, 4 y 6, relativos al uso de pensamiento relacional que ponen de manifiesto en la resolución de las sentencias. Nuestra intención es abordar el objetivo "analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto al uso de *pensamiento relacional* que ponen de manifiesto".

Previamente se ha analizado y comentado el uso de pensamiento relacional que implica la puesta en práctica de cada una de las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de las sentencias numéricas verdaderas y falsas consideradas. En este caso, nos centramos en la actuación general del alumno en la totalidad de cada sesión. Debido a que no siempre es posible precisar la estrategia concreta utilizada por el alumno en cada sentencia, el análisis de su comportamiento general, en cada sesión, resulta más adecuado para comparar las actuaciones de los alumnos y su evolución a lo largo de las sesiones.

9.6.1 Origen de los perfiles de comportamiento

La identificación y análisis de las estrategias, utilizadas por los alumnos para resolver las sentencias verdaderas y falsas, nos ha permitido señalar diferentes modos y momentos del proceso de resolución en los que los alumnos utilizan pensamiento relacional así como diferentes tendencias, más operacionales o más conceptuales, en el modo de abordar la resolución de las sentencias. Partiendo de este conocimiento, nos centramos ahora en los elementos o aspectos de la sentencia a los que se refieren o en los que basan, los alumnos, el uso de pensamiento relacional.

Por una parte, observamos un importante número de explicaciones que hacen referencia a mismidad entre términos o expresiones, siendo esta relación la base de la justificación de la veracidad o falsedad de la sentencia (ej., "$[18-7=7-18]$ *Verdadera porque dieciocho menos 7 y el otro es lo mismo y si es lo mismo da igual")*. La relación de mismidad se manifiesta como una relación destacada, posiblemente por ser más fácilmente apreciada que otras relaciones que están más vinculadas a algún conocimiento aritmético o al uso del sentido numérico y del sentido operacional. En estos casos, el uso de pensamiento relacional corresponde, principalmente, a la aplicación de la propiedad reflexiva de la igualdad o al uso del conocimiento (más o menos implícito) de la conmutatividad de la suma o, incluso, de una supuesta conmutatividad de la resta. Algunos alumnos también hacen uso de una sobre-generalización de la propiedad reflexiva de la igualdad: la suposición de que una sentencia es verdadera si y sólo si involucra términos repetidos (independientemente de su posición relativa o respecto del signo igual) (ej., "$[9+4-4=9]$ *Que pueden ser, que éstos son los mismos y al ser los mismos es verdadera"*).

En otros casos las explicaciones de los alumnos hacen referencia a: conocimiento sobre el efecto de las operaciones de la estructura aditiva, la presencia en la sentencia de algún hecho numérico conocido, la apreciación de relaciones numéricas entre términos de la sentencia o diferencias de magnitud entre términos (ver Tabla 9-12). Estas explicaciones sugieren, por lo general, el uso (más o menos implícito) de alguna propiedad aritmética como la propiedad de compensación de la suma o de la resta y la complementariedad de la suma y la resta.

Tabla 9-12: Ejemplos de explicaciones dadas por los alumnos en las diferentes sesiones que evidencian diferentes formas de uso de pensamiento relacional.

Elementos puesto en juego al hacer uso de PR	**Explicaciones dadas por los alumnos**
Mismidad entre términos y presencia de hechos numéricos conocidos	**CL, S3,** $7+7+9=14+9$**:** **"***Sumando siete más siete…[…] Sumando siete más siete que dan catorce, lo mismo que ahí, nueve lo mismo que ahí también"* **JM, S4,** $6+4+18=10+18$**:** "*Verdadera porque 6 + 4 = 10 + 18 = 10 + 18 es lo mismo en las dos cuentas"*
Mismidad entre términos y conocimiento sobre el efecto de las operaciones	**DL, S4,** $16+14-14=36$**:** *"Verdadera porque es si le das el número y luego lo recuperas"* **EF, S6,** $122+35-35=122$**:** *"Verdadera porque si a 122 le sumas 35 y luego se la quitas te da 122"*
Diferencias de magnitud entre términos y conocimiento del efecto de las operaciones.	**JM, S3,** $37+22=300$**:** "*Porque… porque treinta y siete más, porque treinta y siete más veintidós,… porque treinta y siete más veintidós no te dan trescientos porque trescientos es un número más mayor"* **MT, S6,** $75-14=340$**:** *"Falsa porque si a 75 le restas 14 no puede dar más que 75"*
Relaciones numéricas entre términos y mismidad de términos	**DL, S3,** $13+11=12+12$**:** **"***Al doce le quitas un uno y se lo pones al otro doce y te da la de allí"* **CH , S3,** $13+11=12+12$**:** **"***He pensado que a trece le puedo quitar una y te quedan doce y ese uno se lo he puesto al once y me sale doce más doce igual a doce más doce"*
Relaciones numéricas entre términos y conocimiento del efecto de las operaciones	**CH, S5**, $11-6=10-5$: *"Porque... si once es mayor que diez y le quitas uno más que cinco, te sale igual"* **CH, S6,** 17 – 11 = 16 – 12: *"Verdadera porque a 17 le restamos 12 y nos da 5 y a un número menor que el diecisiete le restamos un número menor que el 12 nos da lo mismo"*

PR= pensamiento relacional
En la columna de la derecha se indica el alumno al que pertenece la explicación, así como la sesión y la sentencia en la que tuvo lugar. La sesión se indica con una S seguida del número de la sesión.

Por lo general, los elementos que son utilizados al hacer uso de pensamiento relacional (columna izquierda de la Tabla 9-12) están condicionados por el tipo de sentencia que se está abordando, concretamente por la propiedad que se ha considerado en el diseño de dicha sentencia. En la mayoría de los casos se hace uso de:

- la apreciación de mismidad entre términos y presencia de hechos numéricos conocidos, en sentencias cuyo diseño está basado en la propiedad de composición/descomposición,
- la apreciación de mismidad entre términos y de conocimiento sobre el efecto de las operaciones, en sentencias cuyo diseño está basado en la relación de complementariedad existente entre la suma y la resta,
- la apreciación de diferencias de magnitud entre términos de la sentencia y conocimiento del efecto de las operaciones, en sentencias cuyo diseño está basado en la propiedad magnitud,
- la apreciación de relaciones numéricas entre términos y mismidad de términos, en sentencias cuyo diseño está basado en la propiedad de compensación de la suma o la resta,
- la apreciación de relaciones numéricas entre términos y conocimiento del efecto de las operaciones, en sentencias cuyo diseño está basado en la propiedad de compensación de la suma o la resta.

Además de estas diferencias en el uso de pensamiento relacional de los alumnos, observamos cierto contraste entre dicho uso en unas sentencias y otras, más allá del tipo de relaciones o aspectos apreciados. Por ejemplo, observamos diferente sofisticación en el uso de pensamiento relacional en los siguientes grupos de explicaciones:

> $[125-0=125]$ *"Yo he pensado que, si quitas el cero, como el cero no es nada, pues te quedan los dos ciento veinticinco. Ciento veinticinco igual a ciento veinticinco"*
>
> $[15-6=6-15]$ *"Falsa* [...] *Porque quince menos seis son once y a seis no le puedes quitar quince"*

$[26-8=100]$ "*Porque…esto… porque veintiséis menos ocho no te da cien. […] Porque sino tendría que ser pues…sumando*"

$[13+11=12+12]$ *"He pensado que a trece le puedo quitar una y te quedan doce y ese uno se lo he puesto al once y me sale doce más doce igual a doce más doce"*

$[257-34=257-30-4]$ "*Verdadera porque es la misma sólo han puesto más números para restar*"

En los dos primeros ejemplos, y otros semejantes en los que se utilizan las propiedades del cero como neutro de la suma y de la resta por la derecha, las restricciones del dominio de definición de la resta y la propiedad "$a-a=0$", observamos que el alumno está aplicando, directamente, alguna ley o principio aritmético que conoce, tras haber apreciado algunas relaciones o alguna característica en la sentencia. Este hecho conocido de forma general le permite concluir la veracidad o falsedad de la sentencia.

En las otras tres explicaciones, en cambio, el uso de pensamiento relacional no consiste en la directa aplicación de una ley general conocida. En estos casos la sentencia no coincide, en general, con un esquema previo, del alumno, sobre un tipo de problemas aritméticos. Se hace necesario observar las particularidades de la sentencia, apreciar relaciones y características de sus términos y relacionarlas unas con otras, haciendo uso de conocimiento aritmético que informe sobre la articulación de lo apreciado, para poder resolver la sentencia. Destaca, en este segundo uso de pensamiento relacional, cierta flexibilidad que no se aprecia en los casos previamente mencionados.

Teniendo en cuenta todas estas observaciones sobre la sofisticación y los diferentes elementos en los que se basan las manifestaciones del uso de pensamiento relacional, clasificamos el perfil de comportamiento de los alumnos.

Para su identificación y a partir de los datos recogidos, se han elaborado unas tablas que conforman el Anexo E, en las que se codifica el uso de pensamiento relacional del alumno en la resolución de las sentencias numéricas propuestas. En ellas se distinguen comportamientos que no evidencian ningún uso de pensamiento relacional, otros que evidencian cierto uso del mismo basado en la aplicación de cierta ley aritmética, y otros que muestran uso de pensamiento relacional basado en la apreciación de mismidad o de otros elementos, precisándose cuales.

9.6.2 Conexión entre estrategias y perfiles

En total hemos identificado seis perfiles de comportamiento: no-PR, simple-PR, mismidad-PR, PR-puntual, PR-variado y PR-máximo, cuya descripción se recoge en el siguiente apartado.

Tomando en consideración las observaciones realizadas en el apartado anterior sobre el origen de estos perfiles, puede intuirse que los elementos señalados y distinguidos en los perfiles y en las estrategias son sustancialmente diferentes. Las estrategias detallan el proceso de pensamiento del alumno en la resolución de la sentencia, siendo el orden de los pasos que constituyen la estrategia y el papel del cálculo, elementos característicos de ésta. Los perfiles, en cambios, son atemporales, se centran en el modo en que se utiliza el pensamiento relacional y obvian el papel del cálculo.

No obstante, dentro de cada perfil, salvo en el *no-PR*, se manifiestan dos modalidades de comportamientos según el papel que tiene el cálculo de operaciones expresadas en la sentencia, al hacer uso de pensamiento relacional. En unos casos, el alumno muestra dependencia de la realización de algún cálculo para apreciar relaciones entre los elementos de la sentencia o características destacadas de ésta, en otros, en cambio, no da evidencias de haber realizado ningún cálculo previa, o conjuntamente, a la resolución de la sentencia. Este variable papel del cálculo se ha hecho explícito en la diversidad de estrategias anteriormente descritas.

9.6.3 Descripción de los perfiles de comportamiento

Identificamos seis tipos de comportamientos, a los que denominamos perfiles, cuya descripción acompañamos de algunos ejemplos. No prestamos atención aquí a si el modo en que se hace uso del pensamiento relacional es, o no, correcto.

<u>Perfil no-PR</u>

En este caso el comportamiento del alumno no aporta evidencias del uso de pensamiento relacional en la resolución de ninguna de las sentencias consideradas.

Consiste en la obtención y comparación de los valores numéricos de ambos miembros, aunque, en ocasiones, se sólo se consideran parte de los términos o no se respeta la estructura de la sentencia[73]. En este caso el alumno no muestra haber discernido características o relaciones entre los elementos de la sentencia, más allá de los números que la componen, los signos operacionales que los relacionan y la presencia del signo igual.

Este tipo de comportamiento evidencia dependencia del conocimiento de los valores numéricos para determinar la veracidad o falsedad de la sentencia. Esta dependencia puede tener diversas causas, como que ése sea el método habitual en el aula, que el alumno sienta mayor confianza en una respuesta obtenida a partir del cálculo de ambos valores numéricos, que considere que este método va a ser mejor aceptado por la investigadora-docente o que, en ese momento, sea el único modo del que es consciente para abordar la resolución.

Los alumnos que ponen de manifiesto el perfil *no-PR* utilizan, en general, estrategias tipo *O*, aunque es posible que hagan uso de la estrategia *IC-O* pero no pongan de manifiesto la observación y uso de alguna relación entre los términos de la sentencia. Por lo tanto, es posible que los alumnos estén, en este caso, haciendo cierto uso de pensamiento relacional en la resolución de alguna de las sentencias, pero no lo pongan de manifiesto, centrando su justificación en la mismidad de valor numérico de ambos miembros.

Un ejemplo de respuesta propia del comportamiento que define este perfil es la dada por MR en la sentencia $8+6=4+4+6$ durante la entrevista de la sesión 5:

> ***I:*** *A ver, ¿qué crees que es ésta? ¿Verdadera o falsa?*
> ***MR:*** *Falsa*
> ***I:*** *¿Cómo lo sabes?*
> ***MR:*** *Porque ocho más... más… ocho más... más seis son...catorce*
> ***I:*** *Muy bien*
> ***MR:*** *Y...catorce... igual a cuatro más cuatro son...ocho, y más seis... son catorce*
> ***I:*** *Vale, entonces esto te ha salido catorce ¿no?*
> ***MR****: Sí*
> ***I:*** *¿Y esto?, también te ha salido catorce*
> ***MR:*** *Sí, entonces es verdadera*

[73] Estas ocasiones corresponden, en la mayoría de los casos, a la resolución de sentencias haciendo uso de los significados del signo igual operador o expresión de una acción.

Ejemplos de alumnos que muestran el perfil no-PR. En la sesión 4, BR y BI resuelven la mayoría de las sentencias realizando aparte las operaciones que componen cada miembro, por medio del uso de los algoritmos estándares de la suma y la resta (ver Tabla 9-13 y Tabla 9-14). En ninguna de sus explicaciones hacen referencia a la apreciación de relaciones o características destacadas de la sentencia, únicamente a la comparación de los resultados obtenidos por medio de sus cálculos. Por lo tanto, el único modo de proceder, manifestado por estas alumnas, es la realización del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros y su comparación para determinar la veracidad o falsedad de cada sentencia. Ambas alumnas muestran un comportamiento *no-PR* en esta sesión.

Tabla 9-13: Respuestas de BI a las sentencias de la sesión 4.

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Falsa porque 18 – 7 = 11 y 7 – 18 = 19" (calcula mediante el algoritmo de la resta 7 – 18 = 19 y 18 – 7 = 11)	*"Falsa porque 75 – 14 = 61 y 14 – 75 = 49 no 340"* (calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61 y 14 – 75 = 49)	*"Falsa porque 16 – 12 = 05"* (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05)	*"Verdadera porque 122 + 35 = 197 y da la resta lo mismo"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 197 y mediante el de la resta 122 – 35 = 96)	*"Verdadera porque 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28)

Esta alumna sólo resuelve la primera hoja de sentencias de esta sesión. Entre paréntesis se detallan las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias.

Tabla 9-14: Respuestas de BR a las sentencias de la sesión 4.

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Verdadera porque 18 – 7 = 25 y 7 – 18 = 25"	*"Falsa porque 75 – 14 = 61"* C: *"15 + 21 = 36"* (calcula con el algoritmo de la resta 75– 14 = 61)	*"Verdadera porque 17 –12 = 05 y 16 –11 = 05"* (calcula con el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	*"Verdadera porque 122 + 35 – 35 = 122"* (calcula con el algoritmo de la resta 122 + 35 – 35 = 122)	*"Falsa porque 6 + 4 + 18 = 118"* C: 46 + 60 = 106 (calcula mediante el algoritmo de la suma 46 + 60 = 106 y 6 + 4 + 18 = 118)

Esta alumna sólo resuelve la primera hoja de sentencias de esta sesión. Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.

Según la explicación dada por BR a la veracidad de la sentencia $18-7=7-18$, cabe la posibilidad de que no haya realizado el cálculo de ambos miembros, sino sólo de uno de ellos, y que haya concluido el valor del otro miembro al observar que involucra los mismos términos, aunque en diferente orden. En dicho caso habría utilizado la estrategia IC-*O* (generalizando la propiedad conmutativa de la suma o no dando importancia al orden de los términos). En los demás casos está explícito que las alumnas realizan el cálculo de los valores numéricos de ambos miembros y que, por tanto, hacen uso de estrategias tipo *O*.

<u>Perfil simple-PR</u>

En este tipo de comportamiento el alumno da evidencias de la aplicación directa de alguna ley o principio aritmético para resolver algunas de las sentencias, tras haber apreciado alguna característica especial de ésta (ej., la presencia del cero) o algunas relaciones entre los términos que la componen (ej., mismidad de los términos a operar). Concretamente la ley o principio utilizado consiste en las propiedades del cero como neutro de la suma y de la resta por la derecha, las restricciones del dominio de definición de la resta y la propiedad "$a-a=0$". En otras sentencias el comportamiento del alumno es semejante al del perfil *no-PR*.

En este caso el alumno está reconociendo en alguna de las sentencias una particularización de alguna propiedad o principio aritmético general que conoce. Un ejemplo de este tipo de respuesta tiene lugar durante la entrevista de la sesión 5 a CH, concretamente en relación a la sentencia $125-125=14$:

> **I:** *A ver, ¿ésta cómo crees que es, verdadera o falsa?*
> **CH:** *Falsa*
> **I:** *Muy bien ¿cómo lo sabes?*
> **CH:** *Porque ciento veinticinco, si le quitamos ciento veinticinco, son cero*
> **I:** *¿Cómo lo sabes tan rápido?*
> **CH:** *Porque ciento veinticinco, si si si se le quita todos los números...*
> **I:** *No te queda nada, ¿no?*
> **CH:** *No*

<u>Ejemplos de alumnos que muestran el perfil simple-PR.</u> En la sesión 3, las participaciones de CA y EV ponen de manifiesto un comportamiento *simple-PR* (ver Tabla 9-15 y Tabla 9-16). Algunas de las estrategias utilizadas en la resolución de las

sentencias consisten en la aplicación directa de algún conocimiento aprendido sobre la estructura aditiva, es decir, alguna ley o propiedad. CA evidencia este uso de pensamiento relacional en las sentencias $325+0=326$ y $125-0=125$, EV en la resolución de la sentencia $100-100=1$. Ambos responden con rapidez, sin haber realizado ningún cálculo aparte. Las demás estrategias utilizadas por CA en esta sesión consisten en el cálculo y comparación de los valores numéricos de ambos miembros, no haciendo uso de pensamiento relacional. EV no participa en ningún otro momento de esta sesión.

Tabla 9-15: Participación de CA durante la discusión de la sesión 3.

$325+0=326$	*"Que es falsa. [...] Porque trescientos veinticinco más cero son trescientos veinticinco, y trescientos veintiséis no es nada..."*
	"Trescientos veinticinco" (número que propone para el miembro derecho de la igualdad)
$37+22=300$	(afirma estar de acuerdo con CL que dice que 37 + 33 = 59)
$125-0=125$	*"Que es verdadera. [...] Porque ciento veinticinco menos cero dan ciento veinticinco"*
$7+3=10+3$	*"Falsa [...] Porque siete más tres son... diez, y diez más tres son trece"*
	"Diez más siete dan diecisiete y tres más tres dan seis"

En azul se indican las correcciones propuestas a alguna de las sentencias considerada falsas.

Tabla 9-16: Participación de EV durante la discusión de la sesión 3.

$100-100=1$	*"Falsa [...] Porque cien menos cien son cero, no uno"*

Durante la actividad escrita de la sesión 4, VS muestra un comportamiento *simple-PR* (ver Tabla 9-17). Esta alumna resuelve la mayoría de las sentencias calculando y comparando los valores numéricos de ambos miembros, y, en tres de las sentencias, al proceder a calcular las operaciones de ambos miembros, aprecia diferencias de magnitud entre los términos que le permiten concluir su falsedad debido a limitaciones en el dominio de definición de la operación a realizar. En particular, en las sentencias $75+23=23+75$ y $7+15=8+15$, aplica una sobre-generalización de la limitación del dominio de definición de la resta (en el conjunto de los números naturales) al suponer que no se pueden sumar dos términos cuando el primero es menor que el segundo.

Tabla 9-17: Respuestas de VS a las sentencias de la sesión 4.

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Falsa porque a 18 le puedes quitar 7 y a 7 no le puedes quitar 18"	*"Falsa porque 74 menos 14 es 51"*	*"Verdadera porque 17 menos 12 da 5 y 16 menos 11 da 5"*	*"Verdadera porque 122 más 35 da 157 y si a 157 le restamos 35 nos [da] 122"*	*"Verdadera porque 6 más 4 más 18 da 28 y 10 más 18 da 28."*
$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
"Falsa porque 75 más 23 da 98 y a 23 no le puedes sumar 75"	*"Falsa porque 7 + 15 da 22 y a 8 no le puedes sumar 15"*	*"Verdadera porque 53 + 21 da 92 y 54 + 40 da 94"*	*"Falsa porque 16 + 14 da 30 y 30 menos 14 da 26"*	*"Verdadera porque 257 menos 34 da 223 y 257 menos 30 menos 4 da 223"*

<u>Perfil mismidad-PR</u>

Este comportamiento corresponde a los casos en que el alumno evidencia algún uso de pensamiento relacional, a partir de la observación de mismidad o "falta de mismidad" entre los elementos que componen la sentencia. Dicho uso de pensamiento relacional corresponde, en la mayoría de los casos, a la aplicación de la propiedad reflexiva de la igualdad o al uso del conocimiento (más o menos implícito) de la conmutatividad de la suma o, incluso, de una supuesta conmutatividad de la resta. Como ya se ha comentado previamente, algunos alumnos también utilizan una sobre-generalización de la propiedad reflexiva de la igualdad, obviando la posición relativa de los términos o su posición respecto del signo igual. En otros casos el comportamiento del alumno puede ser semejante al propio de los perfiles *no-PR* y *simple-PR*.

Una respuesta que evidencia el uso de pensamiento relacional basado en la apreciación de mismidad de los términos, contenidos en la sentencia, es dada por FB en la sentencia $18-7=7-18$ en la sesión 4: "*Verdadera porque dieciocho menos 7 y el otro es lo mismo y si es lo mismo da igual*".

<u>Ejemplos de alumnos que muestran el perfil mismidad-PR.</u> En la sesión 4, MB manifiesta un comportamiento *mismidad-PR*. Esta alumna, en la mayoría de los casos, procede a comparar los valores numéricos ("resultados") de ambos miembros, salvo en el caso de la sentencia $122+35-35=122$, en la cual justifica la veracidad a partir de la apreciación de alguna mismidad. Además, muestra apreciación de la mismidad o diferencia de los términos que componen las sentencias, ya sea previa o

posteriormente al cálculo, en sus correcciones a las sentencias $18-7=7-18$ y $7+15=8+15$ y en la resolución de las sentencia $17-12=16-11$ (ver Tabla 9-18).

Dentro de este perfil de comportamiento incluimos casos diferentes, unos como el de MB en la sesión 6, en el que el uso de pensamiento relacional está principalmente basado en la aplicación de la propiedad reflexiva o de una sobre-generalización de ésta (al no dar importancia a la posición de los términos respecto del signo igual), y otros, como el que comentamos a continuación, en el cual se está haciendo uso de la propiedad conmutativa de la suma y/o de una supuesta conmutatividad de la resta. En este segundo caso, a diferencia del anterior, se hace uso de algún conocimiento sobre la estructura aditiva.

Tabla 9-18: Respuestas de MB a las sentencias de la sesión 4.

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Falsa porque no son los mismos resultados uno da 17 y el otro da 19" C: *"en la segunda cuenta cambio el 18 por el 7"*	*"Falsa porque no da los mismos resultados"* C: *"sacaría el 340 y pondría el 75 – 14"*	*"Verdadera porque aunque estén los números estén cambiados da el mismo resultado"*	*"Verdadera porque los números y las cantidades son iguales"*	*"Verdadera porque da el mismo resultado"*
$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
"Verdadera porque son los mismos resultados"	*"Falsa porque no da el resultado en los dos"* C: *"el 7 lo cambio por un 8"*	*"Verdadera porque dan los mismos resultados"* (escribe bajo cada miembro de la igualdad 94)	*"Falsa porque no da el mismo resultado"* C: *"sacaría – 14"*	*"Falsa porque no da el resultado"* C: *"pondría + 4"*

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.

En la sesión 4, FB pone de manifiesto este segundo caso que hemos comentado. Este alumno resuelve todas las sentencias calculando y comparando el valor numérico de ambos miembros, salvo en las sentencias $18-7=7-18$ y $75+23=23+75$ en las que hace uso de pensamiento relacional apreciando la mismidad de los términos contenidos en ambos miembros (ver Tabla 9-19).

Tabla 9-19: Respuestas de FB a las sentencias de la sesión 4.

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Verdadera porque dieciocho menos 7 y el otro es lo mismo y si es lo mismo da igual"	*"Falsa porque setenta cinco menos 14 no da trescientos cuarenta"* C: *"300 + 40 = 340"* (calcula con el algoritmo 75 – 14 = 51)	*"Verdadera"* (escribe verticalmente 17, 12, 16 y 11 con un signo menos, pero no opera)	*"Verdadera porque 122 más treinta [y] cinco menos treinta [y] cinco me da veintidós"* (calcula mediante el algoritmo 122 + 35 – 35 = 192)	*"Verdadera porque 6 más cuatro más dieciocho dan 28 y 10 más dieciséis dan 28"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28)
$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
"Verdadera porque son iguales y entonces dan lo mismo"	*"Falsa porque siete y quince dan 22 y ocho más quince dan 23"* C: *"7 15 + 157 = 22"* (Calcula con el algoritmo 8 + 15 = 23 y 7 + 15 = 22)	*"Falsa porque 53 más 41 dan 98 y 54 más cuarenta dan 94"* C: *"53 + 41= 41 + 53"* (Calcula mediante el algoritmo 57 + 41 = 98 y 54 + 40= 94)	(explicó que no la entendía)	*"Falsa porque 257 menos 30 menos y no dan 222"* C: *"257 – 34 = 257 – 34"* (Calcula mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 222)

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.

Algunos alumnos llevan al extremo la sobre-generalización de la propiedad reflexiva, aplicándola a todas (o la mayoría) las sentencias de no-acción propuestas en una misma sesión. Así puede observarse en las respuestas de CY en la sesión 6, especialmente en las sentencias $257-34=257-30-4$, $17-12=16-11$, $6+4+18=10+18$ y $7+15=8+15$ (ver Tabla 9-20).

Tabla 9-20: Respuestas de CY a las sentencias de la sesión 6

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Verdadera porque 18-7 es = 7-18 y te da el mismo resultado"	*"Falsa porque 75-14 no es 340 es 61"* C: *"75-14=61 y ahí pone 340"* (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	*"Falsa porque 17-12 no es igual a 16-11 sería 11-16 y después 16-11"* C: *"17-12 y después 12-17"*	*"Verdadera porque 122+35 =157 y luego 157-35 da 122"* (Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157 y 157 + 35 = 122)	*"Falsa porque sería 6+4 y luego 4+6"* C: *"6+4=4+6 y ahí pone 10+18"*

$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
"Verdadera porque 75 +23 = 23+75""	*"Falsa porque 7+15 =15+7"* C: *"porque 7+15 sería igual a 15+7"*	*"Falsa porque 53+41 =40+53"* C: *"porque 53+41 sería igual a 41+53"*	*"Falsa porque 16+14 da 30 y 30-14 da 16"* C: *"porque 16+14 sería igual a 14+16"* (Calcula mediante los algoritmos estándares 16 + 14 = 30, 30 – 14 = 16)	*"Falsa porque 257-34 no es igual a 257-30-4"* C: *"porque 257-34=257-30-4 y han puesto un 30"*

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.

<u>Otros perfiles: PR-puntual, PR-variado, PR-máximo</u>

Se definen otros tres perfiles de comportamiento, los cuales no se diferencian en cómo se hace uso de pensamiento relacional, sino en la diversidad de modos en que es utilizado. En el apartado 9.6.1 se han señalado diversos elementos en los que se basa el uso de pensamiento relacional de los alumnos, entre los que se encuentran el conocimiento sobre el efecto de las operaciones de la estructura aditiva o la observación de la presencia, en la sentencia, de algún hecho numérico conocido. Concretamente hemos identificado el uso de los siguientes pares de elementos: "mismidad entre términos y presencia de hechos numéricos conocidos", "mismidad entre términos y conocimiento sobre el efecto de las operaciones", "diferencias de magnitud entre términos y conocimiento del efecto de las operaciones", "relaciones numéricas entre términos y mismidad de términos" y "relaciones numéricas entre términos y conocimiento del efecto de las operaciones" (ver tabla 9-11 en el apartado 9.6.1).

Según esto, se considera que un alumno pone de manifiesto un perfil *PR-puntual* cuando en la mayoría de los casos pone de manifiesto un comportamiento propio de los perfiles *no-PR y simple-PR,* dando puntualmente muestras de uso de pensamiento relacional basado en uno, y sólo uno, de los pares de elementos señalados previamente. Se observa, por tanto, que este perfil de comportamiento no incluye usos de pensamiento relacional propios del perfil *mismidad-PR*.

Para definir los otros dos perfiles, consideramos, además de dichos cinco pares de elementos, la apreciación de mismidad entre los términos (aspecto que define el uso de pensamiento relacional propio del perfil mismidad-PR), y según se haga uso de todos o sólo algunos (al menos un par) de ellos se distingue entre los perfiles *PR-máximo y PR-variado,* respectivamente[74].

No obstante, debido a que el pensamiento relacional basado en los pares de elementos "relaciones numéricas entre términos y mismidad de términos" y "relaciones numéricas entre términos y conocimiento del efecto de las operaciones", suele tener lugar en el mismo tipo de sentencias y, por tanto, ser menos probable la manifestación de ambos modos de uso de pensamiento relacional en una misma sesión, en la práctica se considera que un alumno pone de manifiesto el perfil *PR-máximo* cuando manifiesta pensamiento relacional basado en los demás elementos y al menos uno de estos dos pares.

A continuación, se aportan ejemplos de alumnos que manifiestan cada uno de estos perfiles en alguna sesión.

<u>Ejemplos de alumnos que muestran el perfil PR-puntual.</u> En la sesión 3, la participación de CL muestra un perfil *PR-puntual* al manifestar comportamientos propios de los perfiles *no-PR* y *simple-PR* y aportar evidencias de un uso más sofisticado de pensamiento relacional en la sentencia $7+7+9=14+9$ (ver Tabla 9-21). En dicha sentencia CL muestra apreciación de un hecho numérico contenido en la sentencia ($7+7=14$) y de cierta mismidad de términos (habiendo calculado previamente los valores numéricos de ambos miembros). En las demás sentencias, la alumna obtiene y compara los valores numéricos de ambos miembros con la salvedad de la sentencia $125-0=125$ donde hace uso directo de la propiedad $a-a=0$ (alterando la disposición de los términos en la sentencia).

Tabla 9-21: Participación de CL durante la discusión de la sesión 3

$7+7+9=14+9$	*"Verdadera [...] Porque....porque nueve más siete son dieciséis, más siete, veintitrés, y... catorce más nueve dan veintitrés."*
	"Sumando siete más siete....[...] Sumando siete más siete que dan catorce, lo mismo que ahí, nueve lo mismo que ahí también."
$51+51=50+52$	*"Porque... porque cincuenta y uno más cincuenta y uno dan ciento dos, y cincuenta más cincuenta y dos también dan ciento dos."*
$37+22=300$	*"Que es falsa [...] Porque treinta y siete más veintidós dan cincuenta y nueve, y no dan trescientos."*
	"Treinta y siete más veintidós [...] Es igual a trescient... a...[...]

[74] Se observa que, según esta definición del perfil PR-máximo no se exige que el alumno haga uso de pensamiento relacional en todas las sentencias propuestas en dicha sesión.

	A doscientos cuarenta y uno [...] Más cincuenta y nueve.
$78-45=77-44$	*“Que setenta ocho menos cuarenta y cinco son treinta y tres y setenta y siete menos cuarenta y cuatro dan treinta y tres.”*
$125-0=125$	*“Porque ciento veinticinco menos ciento veinticinco dan cero”*
$19-3=18-2$	*“Igual” (que VS, VS: “Porque diecinueve menos tres [...] Dan dieci…dieci…séis [...] Y dieciocho menos dos dan dieciséis”)*
$231+48=231+40+8$	*“Porque doscientos treinta y uno más cuarenta y ocho dan doscientos setenta y nueve, y doscientos treinta y uno más cuarenta, dan doscientos setenta y uno, más ocho, doscientos setenta y nueve.”*
$100-100=1$	*“Poniendo cien menos cien más uno, igual a uno”*
	“Más grande” (respuesta a la pregunta: Si a un número le quito cien y me sale uno, ¿qué número será?... ¿Será más grande que el cien o más chico?)
$72=56-14$	*“Sí [...] Porque cincuenta y seis menos catorce son treinta y no son setenta y dos”*
$18+3-4=17$	*“Dieciocho más tres son veintiuno y diecisiete más cuatro son veintiuno”*

En azul se indican las correcciones propuestas a alguna de las sentencias consideradas falsas.
Se sombrean en gris las explicaciones que evidencian uso de pensamiento relacional.

Otro ejemplo de un perfil de comportamiento *PR-puntual* es puesto de manifiesto, en la sesión 4, por la actuación de DL (ver Tabla 9-22).

Tabla 9-22: Respuestas de DL en la sesión 4

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$22+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
“Falsa porque 7-18 no se puede restar” C: *“18-7 seria”*	*“Falsa porque 75-14 es 61 y no es 340”* C: *“61”*	*“Verdadera porque 17-12 es 5 y 16-11 es 5”* (calcula aparte mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	*“Verdadera porque es si le das el número y luego lo recuperas”*	*“Verdadera porque 6+4+18 son 28 y 10 +18 es 28”*
$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
“Verdadera porque 75 + 23 es 98 y 23 + 75 es 98”	*“Falsa porque 7 + 15 es 22 y 8 + 15 es 23”* C: *“7 + 15 seria”*	*“Falsa porque 53 + 41 es 93 y 54 + 40 es 84”* C: *“53+ 41 seria”*	*“Falsa porque 16 + 14 es 30 y 30 – 14 es 16”*	

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. “C:” va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.
Se sombrean en gris las explicaciones que evidencian uso de pensamiento relacional.

Este alumno resuelve la mayoría de las sentencias calculando y comparando los valores numéricos de ambos miembros con la excepción de las sentencias $122+35-35=122$ y $18-7=7-18$, en las cuales utiliza pensamiento relacional. En el primer caso observa la mismidad de dos de los términos y hace uso de conocimiento sobre las operaciones suma y resta. En la otra sentencia aprecia la diferencia de magnitud entre los términos 7 y 18 y alude a las restricciones del dominio de definición de la resta. Por lo tanto, pone de manifiesto comportamientos propios de los perfiles *no-PR* y *simple-PR* y hace un uso más sofisticado de pensamiento relacional en la sentencia $122+35-35=122$.

Ejemplos de alumnos que muestran el perfil PR-variado. Como ejemplo del perfil *PR-variado* mostramos la participación de JM en la sesión 4 (ver Tabla 9-23). Las respuestas de JM ponen de manifiesto el uso de pensamiento relacional en las sentencias $6+4+18=10+18$ y $75-14=340$, apreciando, en el primer caso, mismidad entre términos y la presencia de un hecho numérico contenido en la sentencia ("*Verdadera porque 6 + 4 = 10 + 18 = 10 + 18 es lo mismo en las dos cuentas*") y, en el otro caso, la diferencia de magnitud de los términos involucrados ("*Falsa porque 75–14 no puede dar 340").* En este último caso hace uso de su sentido numérico y su sentido operacional, concretamente de su conocimiento sobre el efecto de las operaciones.

Algunas otras explicaciones de este alumno, junto con la falta de evidencias de la realización del cálculo de las operaciones, sugieren un posible uso de pensamiento relacional en algunas otras sentencias (ej., "*Verdadera porque 18 – 7 es = 7 – 18 es lo mismo"; "Verdadera porque 75 + 23 es lo mismo que 23 + 75").*

Tabla 9-23: Respuestas de JM a las sentencias de la sesión 4.

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$22+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Verdadera porque 18 – 7 es = 7 – 18 es lo mismo" C: *"lo mismo"*	*"Falsa porque 75–14 no puede dar 340"* C: *"una falsa"*	*"Verdadera porque 17 – 12 es = que 16 – 11"* C: *"lo mismo"*	*"Falsa porque 122 + 35 = 175 175 – 35 = 140 por eso no da 122"* C: *"una falsa"* (calcula mediante el algoritmo de la resta 175 – 35= 140)	*"Verdadera porque 6 + 4 = 10 + 18 = 10 + 18 es lo mismo en las dos cuentas"* C: *"lo mismo"*
$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
"Verdadera porque 75 + 23 es lo mismo que 23 + 75" C: *"lo mismo"*	*"Falsa porque 7 + 15 son 22 y 8 + 15 son 23"* C: *"diferente"*	*"Verdadera porque 53 + 41 son 91 y 54 + 40 son 94"* C: *"igual"*	*"Falsa porque 16 + 14 son 30 – 14 son 20"* C: *"diferente"*	*"Verdadera porque 257 –34 son 223 y 257 – 30 – 4 son 223"* C: *"iguales"*

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.
Se sombrean en gris las explicaciones que evidencian uso de pensamiento relacional.

Otro ejemplo de comportamiento *PR-variado* se pone de manifiesto en la participación de JQ en la discusión de la sesión 3 (ver Tabla 9-24). Las intervenciones de este alumno evidencian uso de pensamiento relacional al resolver las sentencias $10+4=4+10$ y $27-14+14=26$. En la resolución de la sentencia $10+4=4+10$, el alumno aprecia la mismidad de términos presentes en ambos miembros, además de comprobar la mismidad de valor numérico de ambos miembros. En la otra sentencia, el alumno opera dos de los términos y aprecia algunas diferencias de magnitud entre términos que le permiten concluir la falsedad de la sentencia, haciendo uso de su conocimiento sobre el efecto de la resta. En las demás sentencias obtiene y compara el valor numérico de ambos miembros no dando más evidencias de uso de pensamiento relacional.

Tabla 9-24: Participaciones de JQ durante la discusión de la sesión 3

$10+4=4+10$	*"Verdadera.[...] Porque diez más cuatro son catorce y cuatro más diez son catorce, sólo que las has puesto al revés."*
$78-16=78-10-6$	*"Verdadera, porque setent… falsa, porque setenta y ocho menos dieciséis son sesenta y dos, y setenta y ocho menos diez son sesenta y…sesenta y ocho, y seis, sesenta y dos."*
$7=12$	*"Porque siete más cero son siete y no puede dar doce"*
	"Siete más cinco."
$37+22=300$	*"Porque yo he sumado dos más siete [...] Que dan nueve, dos más tres que dan cinco y no da trescientos."*
$62-13+13=65$	*"Porque sesenta y dos menos trece son… cincuenta y una, más… más trece… sesent... sesenta y dos."*
$27-14+14=26$	*"Porque, veintisiete menos catorce…[...] Falsa [...] Porque catorce más catorce… [...] son veintiocho, menos veintisiete… [...] No… no puede dar veintiséis."*

En azul se indican las correcciones propuestas a alguna de las sentencias consideradas falsas.
Se sombrean en gris las explicaciones que evidencian uso de pensamiento relacional.

Ejemplos de alumnos que muestran el perfil PR-máximo. Presentamos como ejemplos de este perfil los comportamientos de EF en la sesión 6 y de CH en la sesión 4. EF muestra apreciación de la magnitud de los términos involucrados en las sentencias $18-7=7-18$, $75-14=340$ y $7+15=8+15$, lo cual combina con su conocimiento del dominio de definición de la resta y del efecto de la suma y la resta, para resolver dichas sentencias por medio de uso de pensamiento relacional, no recurriendo a la realización de ningún cálculo para justificar su respuesta (ver Tabla 9-25). En las demás sentencias, según el caso, hace uso de pensamiento relacional apreciando la mismidad de términos a operar o presentes en diferentes miembros, la presencia de hechos numéricos en la sentencia y algunas relaciones numéricas entre los términos que le permiten obtener un miembro a partir de otro. También utiliza conocimiento sobre el efecto de las operaciones.

En la sesión 4, CH pone de manifiesto algún uso de pensamiento relacional en la mayoría de las sentencias (ver Tabla 9-26). Concretamente hace uso de su conocimiento sobre el efecto de las operaciones, la comparación de la magnitud de los términos involucrados, la apreciación de mismidad y de relaciones numéricas entre términos de algunas de las sentencias y la presencia de hechos numéricos.

Tabla 9-25: Respuestas de EF a las sentencias de la sesión 6.

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Falsa porque a 7 no le puedes quitar 18 porque es un número mayor" *C: "18–7=18–7"*	*"Falsa porque 75 menos 14 son menos, no le puede salir un número mayor"* *C: "340=340"*	*"Verdadera porque te sale lo mismo"* (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	*"Verdadera porque si a 122 le sumas 35 y luego se los quitas le sale 122"*	*"Verdadera porque sumas 6 más 4 le da 10 pues igual que el otro número"*
$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
"Verdadera porque son los mismos números solo cambiados de orden"	*"Falsa porque no te sale lo mismo y a parte que siete es más pequeño"* *C: "7 + 15 = 7 + 15"* (calcula con el algoritmo 7 + 15 = 22 y 8 + 15 = 23)	*"Verdadera porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40 te da lo mismo"* (calcula con el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94)	*"Falsa porque a 16 le sumas 14 y luego se los quitas son 16 no 36"* *C: "16 + 14 – 14 = 16"*	*"Verdadera porque a 30 le sumas 4 te da 34 y son los mismos números"*

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.
Se sombrean en gris las explicaciones que evidencian uso de pensamiento relacional.

Tabla 9-26: Respuestas de CH a las sentencias de la sesión 4.

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Falsa porque a 18-7 se le puede restar pero a 7-18 no se puede restar" C: *"18-7=18-7=11"*	*"Falsa porque 75 – 14 son 61 y, además, si a 75 le restamos más no puede salir 340"* C: *"75-14=61"*	*"Verdadera porque 17-12 son 05 16-11 es 05 y, además, a 17 como, si le quitamos 2 y nos da el resultado"* C: *"17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05 "* (calcula mediante	*"Verdadera porque 122 + 35 – 35 = 122 porque si a 122 le ponemos 35 y se lo quitamos es como si no hubiera sumado nada"*	*"Verdadera porque 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28 y se puede sumar 6 + 4 y después 10 + 18 que es 28"*

		el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)		
$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
"Verdadera porque 75 + 23 son 98 y 23 + 75 son 98 es como si a los números le hubieran dado la vuelta" (calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 = 98)	*"Falsa porque 7 + 15 son 22 pero 8 + 15 son 23 porque a 7 le han puesto una más"* C: *"7 + 15 = 7 + 15"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22)	*"Verdadera porque 53 + 41 son 94 y 54 + 40 son 94 es como si a los números le pusieran uno y le quitaran"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94)	*"Falsa porque 16 + 14 – 14 son 16 porque le quitamos y le ponemos a los números"* C: *"16 + 14 + 6 = 36"* (calcula mediante el algoritmo de la suma 14 + 14 = 28, 28 + 16 = 44 y 16 + 14 = 30)	*"Verdadera porque a 254 es como si le hubieran quitado y la hubieran puesto a parte"*

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.
Se sombrean en gris las explicaciones que evidencian uso de pensamiento relacional.

9.6.4 Relación entre los perfiles de comportamiento

La Figura 9-17 pone de manifiesto la inclusión existente entre los comportamientos propios de cada perfil. Cada uno de los perfiles se caracteriza por la manifestación de un modo de proceder no presente en los comportamientos previos pero, a su vez, incluye los modos de proceder propios de dichos comportamientos. Los perfiles *PR-variado* y *PR-máximo* se representan conjuntamente en una misma capa del diagrama debido a que no se diferencian en los comportamientos que engloban sino en la diversidad de formas, que manifiesta el alumno, en las que se hace uso de pensamiento relacional. De forma similar, el perfil *PR-puntual* incluye los comportamientos propios de los otros perfiles con la salvedad del perfil *mismidad-PR*.

No obstante, es importante observar que estas relaciones no implican que todo alumno que manifieste, por ejemplo, un comportamiento tipo *PR-variado* haya manifestado conjuntamente modos de proceder propios del perfil de comportamiento *no-PR,* sino que esto es posible mientras que el reciproco nunca es cierto.

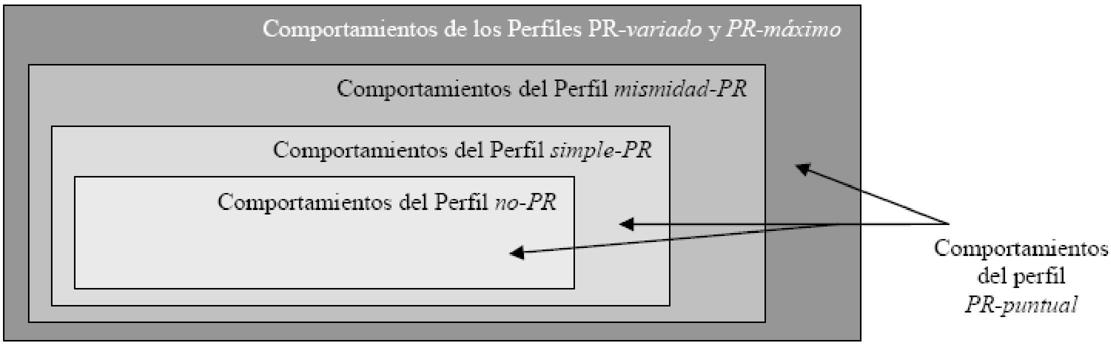


Figura 9-17: Representación de la relación de inclusión entre los comportamientos que caracterizan cada perfil de comportamiento

9.7 Diferencias en la estructura de la atención de los alumnos

Los diferentes perfiles de comportamiento describen diferentes modos generales de abordar la resolución de sentencias numéricas verdaderas y falsas cuyo diseño está basado en propiedades o relaciones aritméticas. También ponen de manifiesto diferentes estructuras de la atención de los alumnos al trabajar con este tipo de sentencias. Esto perfiles se diferencian en el modo en que los alumnos prestan atención a las sentencias, las distinciones que hacen en ellas, las relaciones que explicitan haber apreciado y el conocimiento aritmético que, estas distinciones y relaciones, evocan en la mente de los alumnos.

A continuación, comentamos la estructura de la atención de los alumnos que evidencia cada uno de los perfiles de comportamiento.

<u>En el perfil *no-PR*.</u> En este caso, la totalidad de la atención del alumno parece estar centrada en la realización de los cálculos, operando secuencialmente los términos de dos en dos, y sin considerar globalmente la sentencia ni las expresiones de más de dos términos, sino concibiéndolas como cadenas de operaciones.

Dentro de este comportamiento se observan casos en los que los alumnos reconocen la igualdad como una totalidad estructurada en dos partes diferenciadas (ambos miembros) pero no consideran las expresiones de ambos lados como totalidades susceptibles de ser comparadas, sino como cadenas de símbolos que les detallan las operaciones a realizar (siendo sus resultados los susceptibles de ser comparados). Este caso es puesto de manifiesto en la resolución de la sentencia $8+6=4+4+6$ por MR: *“Falsa* […] *Porque ocho más... más… ocho más... más seis son...catorce Y...catorce... igual a cuatro más cuatro son...ocho, y más seis... son catorce* […] *entonces es verdadera”.* Como ocurre en la mayoría de los casos en los que los alumnos calculan los valores numéricos de ambos miembros, esta alumna procede a calcular de izquierda a derecha, diferenciando las operaciones que componen ambos miembros.

Cuando los alumnos hacen uso del significado operacional del signo igual, no consideran la igualdad como una totalidad y, en algunos casos, ignoran alguno de los elementos existentes en la misma. Detectan la presencia de números y operaciones y proceden a realizar algún cálculo, habitualmente de izquierda a derecha, operando los números sucesivamente de dos en dos, hasta obtener un resultado que consideran final. En estos casos, la posición relativa de los números y su disposición respecto del signo igual es considerada importante sólo por algunos alumnos; otros no parecen reconocer la estructura de la sentencia.

Por ejemplo, en la resolución de las sentencias $17-12=16-11$ y $6+4+18=10+18$ durante la sesión 4, MA explica: “*Falsa porque 17 menos doce no son 16 – ni 11*” y “*Falsa porque 6+4+18 = no es igual a 10 y 18*” dando como corrección 5 y 28 respectivamente. Este alumno reconoce una estructura parcial dentro de la sentencia dada, a la que da sentido obviando la operación que relaciona los términos del miembro derecho de la sentencia. En cambio, MG, en la sesión 6, opera conjuntamente términos de diferentes miembros considerando la igualdad como un conjunto de números y operaciones a realizar procediendo de izquierda a derecha (ver Tabla 9-27). No tenemos evidencias que nos indiquen el modo en que este alumno determina la veracidad o falsedad de la sentencia y, en particular, el papel de dicho valor numérico en ese juicio.

Tabla 9-27: Algunas respuestas de MG a las sentencias de la actividad escrita de la sesión 6.

$18-7=7-18$	$17-12=16-11$	$122+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Falsa porque dieciocho menos siete y siete dan cero" C: *"dieciocho menos siete dan once"* (Calcula aparte mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 11 y 18 – 7 – 7 – 18 = 00)	*"Verdadera porque diecisiete menos doce igual dieciséis menos once dan cinco"* (Calcula aparte mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 -16 – 11 = 05)	*"Verdadera porque ciento veintidós más treinta y cinco menos treinta y cinco dan 210"* (Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 – 35 = 210)	*"Verdadera porque seis más cuatro más dieciocho igual más dieciocho dan treinta y cuatro"* (Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 + 10 + 18 = 34)

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.

En el perfil *simple-PR*. En este caso no tenemos indicadores claros del modo en que el alumno considera la igualdad. No obstante, se observa que la atención del alumno no está, en todos los casos, completamente ocupada por la realización de los cálculos contenidos en la misma puesto que hace distinciones dentro de ésta y aprecia alguna característica destacada o alguna relación entre sus elementos. Reconoce, en la sentencia, la particularización de algún principio o propiedad aritmética que conoce, ya sea implícita o explícitamente, de forma general.

El perfil *no-PR* puede englobar casos en los que el alumno esté concibiendo los números como alguna secuencia de cifras con las que operar. En este caso, en cambio, el alumno muestra conciencia de los números como entidades al compararlos unos con otros.

En el perfil *Mismidad-PR*. Mientras que en el caso anterior la sentencia no necesariamente es considerada globalmente[75], ya que el alumno puede estar centrando su atención en cada miembro de forma independiente, en este caso sí lo es, al establecerse relaciones entre términos de diferentes miembros. Los números son considerados como entidades y, en ocasiones, las expresiones también, al hablarse de mismidad de los miembros y no de los términos que los componen.

[75] En el perfil *simple-PR*, como el alumno no establece relaciones que involucren a términos de diferentes miembros, puede estar considerando la igualdad como un todo con dos partes independientes. Referimos a establecimiento de relaciones entre diferentes miembros cuando lo que se compara no es el valor numérico de ambos (siendo estos conocidos), sino partes de un miembro y de otro.

La principal diferencia con los sucesivos perfiles de comportamiento radica en el tipo de relaciones que se establecen o aprecian. En este perfil dichas relaciones se basan en la forma más básica de hacer distinciones que consiste en distinguir mismidad y diferencia.

<u>En los perfiles *PR-puntual, PR-variado y PR-máximo*</u>. En estos perfiles de comportamiento se distinguen diferencias en la estructura de la atención de los alumnos según el papel del cálculo al hacer uso de pensamiento relacional.

En los casos en los que el alumno realiza algún cálculo antes de apreciar algunas relaciones o características en la sentencia, puede considerar la sentencia como una totalidad, puede estar concibiendo los dos miembros como entidades independientes y puede, incluso, estar considerando las expresiones que componen ambos miembros como cadenas de operaciones cuyo resultado hay que comparar. No obstante, independientemente de cual de estos sea el caso, aprecia alguna relación y hace uso de algún conocimiento aritmético, por lo que su atención no está únicamente centrada en la realización de los cálculos. La atención del alumno fluctúa entre los términos ya operados, los términos que componen la sentencia, las operaciones que los relacionan y los resultados parciales obtenidos.

Por otro lado, cuando el uso de pensamiento relacional, por parte del alumno, es independiente de la realización de cálculo alguno previo, puede afirmarse que considera las sentencias o las expresiones que componen los miembros, de forma global. En general, en la resolución de las sentencias de acción, el uso de pensamiento relacional es compatible con una visión fragmentada de la sentencia como dos partes independientes cuyos valores numéricos han de coincidir, aunque las expresiones que constituyen ambos miembros son consideradas de forma global. No obstante, en las sentencias de acción basadas en relaciones de magnitud y en las sentencias de no-acción, la situación es ligeramente diferente en tanto que, al hacer uso de pensamiento relacional, la sentencia ha de ser considerada como una totalidad comparándose ambos miembros.

9.8 Evolución de los comportamientos de los alumnos

En este apartado analizamos las manifestaciones de los distintos perfiles de comportamiento en las sesiones 3, 4 y 6 así como la evolución del comportamiento de cada alumno a lo largo de dichas sesiones.

9.8.1 Manifestaciones de los perfiles de comportamiento

A continuación, comentamos las diferencias en los perfiles de comportamiento que son puestos de manifiesto en cada sesión. Debido a que en algunos casos no es posible determinar con unicidad el comportamiento mostrado por cada alumno, consideramos el intervalo del número de alumnos que evidencian cada perfil en cada una de las sesiones (ver Tabla 9-28).

Tabla 9-28: Intervalos del número de alumnos que ponen de manifiesto cada uno de los comportamientos en las sesiones 3, 4 y 6

	No-PR	Simple-PR	Mismidad-PR	PR-puntual	PR-variado	PR-máximo	PR-variado o PR-máximo
S3 N=22 (4)	[4,6]	[3,5]	[1,1]	[1,5]	[4,6]	[0,0]	[4.6]
S4 N=25 (3)	[3,5]	[1,1]	[8,10]	[1,3]	[3,5]	[2,2]	[5,7]
S6 N=24 (0)	[7,11]	[2,4]	[1,5]	[0,1]	[3,9]	[1,3]	[6,10]

Entre paréntesis se indica el número de alumnos cuyo comportamiento no puede ser clasificado o que no resolvieron ninguna de las sentencias propuestas. La última columna recoge el intervalo de alumnos que pone de manifiesto los perfiles *PR-variado* o *PR-máximo*. Esta columna no corresponde a la suma de las columnas "*PR-variado*" y "*PR-máximo*", ya que en dicho caso se estaría contando doblemente a aquellos alumnos cuyo perfil de comportamiento es dudoso entre *PR-variado* y *PR-máximo*.

En la Tabla 9-28 se observa:

- En todas las sesiones se manifiestan al menos cinco de los seis comportamientos.
- El perfil *PR-máximo* se manifiesta aproximadamente con la misma frecuencia en las sesiones 4 y 6. En la sesión 3 difícilmente puede tener lugar debido a que no todos los alumnos pudieron participar en sentencias de todos los tipos. Por tanto, su manifestación estuvo limitada por el tipo de actividad realizada. Esto justifica su nula presencia.

- Si se consideran conjuntamente los perfiles *PR-variado* y *PR-máximo*, se observa cierto incremento en su manifestación, de cada sesión a la siguiente, y principalmente en la sesión 6.
- El perfil PR-puntual tiene una modesta presencia en todas las sesiones, siendo más frecuente en la primera sesión.
- El perfil *mismidad-PR* tiene mayor presencia durante la sesión 4 en la cual es el comportamiento más frecuente entre los alumnos, no teniendo casi ninguna presencia en la sesión 3.
- El perfil *simple-PR* presenta su menor presencia en la sesión 4, puesto de manifiesto únicamente por un alumno.
- El perfil *no-PR* es el más frecuente en la sesión 6, siendo su presencia importante en todas las sesiones aunque en menor medida.
- La presencia de los perfiles *no-PR y PR-variado* es la misma en las sesiones 3 y 4

Considerando cada sesión de forma independiente y en comparación con las otras sesiones, se observa que:

- Durante la sesión 3, no predomina ningún perfil concreto. La mayoría de los comportamientos tienen una presencia semejante con la excepción de *mismidad-PR* que apenas se hace manifiesto.
- Durante la sesión 4, destaca especialmente la mayor presencia del perfil *mismidad-PR*, siendo ésta la sesión en la que éste perfil se manifiesta con mayor frecuencia. El perfil *simple-PR* es el menos manifestado en esta sesión, seguido del perfil *PR-puntual.*
- Durante la sesión 6 el perfil más frecuente es *no-PR* seguido de *PR-variado*. En comparación con las otras sesiones destaca la mayor presencia del perfil *no-PR*. En comparación con la sesión 4 destaca la menor presencia del perfil *mismidad-PR*.

En general, se observa que el perfil *no-PR* es el más frecuente seguido del perfil *mismidad-PR,* ambos puestos de manifiesto en alguna de las sesiones 3, 4 o 6 por 15 y 13 alumnos respectivamente (de los 26). El perfil *PR-variado* es puesto de manifiesto por 11 alumnos, el perfil *simple-PR* por 6 y el perfil *PR-puntual* por 5. El perfil menos manifestado es *PR-máximo* (3 alumnos) (ver Tabla 9-29).

Tabla 9-29: Perfiles de comportamiento de los alumnos en cada una de las sesiones

	S 3 N=22						S 4 N=25						S 6 N=24					
	NR	S	M	P	V	X	NR	S	M	P	V	X	NR	S	M	P	V	X
FB	■			■					■				■		■			
FM					■						■						■	■
RB	■						■								■		■	
MAG	╳	╳	╳	╳	╳	╳			■				■					
RL	■								■		■						■	
MA	╱	╱	╱	╱	╱	╱	■			■			■	■				
CA		■					■			■					■		■	
CL				■					■				■					
RT	■						╳	╳	╳	╳	╳	╳		■				
MT	╳	╳	╳	╳	╳	╳					■						■	
JM				■	■						■						■	
DL				■	■					■						■	■	
MB			■						■				■		■			
EF					■							■					■	■
CH					■							■						■
MR		■		■					■		■			■			■	
JQ					■				■					■				
NM	╱	╱	╱	╱	╱	╱			■				■					
JA	╳	╳	╳	╳	╳	╳	╱	╱	╱	╱	╱	╱	╳	╳	╳	╳	╳	╳
MG	╳	╳	╳	╳	╳	╳							■					
BR	╱	╱	╱	╱	╱	╱	■						■					
MP	■								■				■		■			
VS	■	■						■					■					
CY		■													■			
BI	╱	╱	╱	╱	╱	╱	■						■					
EV		■							■				╳	╳	╳	╳	╳	╳

NR= perfil *no-PR*, S= perfil *simple-PR,* M= perfil *mismidad-PR*, P= perfil *PR-puntual*, V= perfil *PR-variado*, X= perfil *PR-máximo*. Cuando no se indica el perfil de comportamiento de un alumno es porque no ha podido ser clasificado.
Las celdas cruzadas indican que el alumno no asistió a dicha sesión y, las parcialmente cruzadas que, aunque asiste, no responde ninguna de las sentencias.

Antes de profundizar en estas observaciones, analizamos la evolución de los perfiles de comportamiento de cada alumno, de forma individual, para poder contar con información más detallada sobre la evolución de los comportamientos de los alumnos de una sesión a otra.

9.8.2 Evolución de los perfiles de comportamiento por alumno

En la Tabla 9-29 se indica el perfil de comportamiento puesto de manifiesto por cada alumno en las sesiones 3, 4 y 6. En ocasiones se indican dos posibles perfiles de comportamiento para un alumno en una determinada sesión al no poder precisarse exactamente el comportamiento evidenciado.

Al analizar la evolución de cada alumno a lo largo de las sesión 3, 4 y 6 es importante recordar que en la sesión 3 los alumnos participaron en la discusión de forma voluntaria por lo que, en general, se dispone de menos información sobre su comportamiento al abordar las sentencias. En las sesiones 4 y 6, en cambio, cada alumno trabajó individualmente en 10 igualdades, lo que permite disponer de mayor información al respecto.

Al comparar los perfiles de los alumnos de la sesión 3 a la 4 se observa:

- JQ, que había puesto de manifiesto en un par de intervenciones cierto uso de pensamiento relacional (perfil *PR-variado),* da una única evidencia del uso de este tipo de pensamiento en las sesión 4. Esta menor manifestación de este tipo de estrategias puede ser simplemente consecuencia de no estar explícita y directamente promoviéndose el uso de pensamiento relacional.
- Ocho alumnos (FB, FM, RB, CL, JM, DL, MB y VS) muestran un comportamiento similar en ambas sesiones, aunque FB y CL manifiestan un comportamiento *mismidad-PR* en vez de *PR-puntual*.
- Siete alumnos (RL, CA, EF, CH, MR, MP y EV) evidencian un mayor uso de pensamiento relacional en la sesión 4 que en la 3, aunque CA también podría estar poniendo de manifiesto un comportamiento estable. Esta mayor manifestación de este tipo de pensamiento puede ser debía a que en la sesión 4 los alumnos tienen oportunidad de participar en un mayor número de sentencias, trabajando en ellas de forma más tranquila y sin tener que explicar su respuesta delante de toda la clase[76]. Por otra parte, también puede ser consecuencia del especial énfasis puesto en el uso de este tipo de estrategias durante la sesión 3 así como haberse hecho explícito en el aula la existencia de estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional.
- CY presenta un comportamiento difícil de clasificar en la sesión 4, no proporcionando indicios sobre en que basa la determinación de la veracidad o

[76] En particular el mayor uso de pensamiento relacional puesto de manifiesto por EF y CH al evidenciar el perfil de comportamiento PR-máximo se considera consecuencia de no haber participado, durante la sesión 3, en la resolución de sentencias de todos los tipos considerados.

falsedad de las sentencias ni como las resuelve. En la sesión 3 resuelve correctamente alguna sentencia de acción y pone de manifiesto un perfil simple-PR.

- La evolución de los nueve alumnos restantes no puede ser comentada porque cinco de ellos (MAG, MT, JA, MG y RT) no participan en alguna de las dos sesiones y los otros cuatro (NM, BR, BI y MA) casi no participan en la discusión de la sesión 3.

Al comparar los perfiles de los alumnos de la sesión 4 a la 6 se observa:

- Cuatro alumnos (MAG, CL, NM, y VS) que habían puesto de manifiesto algún uso de pensamiento relacional en la sesión 4, evidencian un *perfil no-PR* en la sesión 6. Otro alumno (JQ) pone de manifiesto un menor uso de pensamiento relacional en un par de intervenciones, aunque este no es nulo en la sesión 6. Esta menor manifestación de este tipo de estrategias puede ser consecuencia de la debilitación de la influencia de nuestra intervención, al existir un distanciamiento de 9 meses entre una sesión y otra.
- MG muestra un comportamiento ambiguo en la sesión 4 que, en ocasiones, sugiere un posible uso de pensamiento relacional y, en la sesión 6, pone de manifiesto un perfil *no-PR.*
- MA también parece poner de manifiesto un menor uso de pensamiento relacional, aunque la ambigüedad de su perfil en la sesión 4, no permite precisar si éste es o no el caso
- Tres alumnos (FM, RB y CA) evidencian un mayor uso de pensamiento relacional de la sesión 4 a la 6, manifestando los perfiles *Mismidad-PR, PR-variado o PR-máximo.* El caso de cada uno de estos alumnos es diferente.
- CY presenta un comportamiento difícil de clasificar en la sesión 4, sin embargo, en la sesión 6 muestra con claridad un comportamiento *mismidad-PR* y resuelve correctamente las sentencias de no-acción.
- Doce alumnos (FB, RL, MT, JM, DL, MB, EF, CH, MR, BR, MP y BI) muestran un comportamiento similar en ambas sesiones.
- La evolución de los tres alumnos restantes (RT, JA y EV) no puede ser comentada ya que no participaron en alguna de las dos sesiones.

Al considerarse la evolución de los alumnos a lo largo de las tres sesiones, se observa una gran diversidad de situaciones:

- De los ocho alumnos que manifiestan un perfil semejante en las sesiones 3 y 4, cuatro (MB, DL, JM y FB) mantienen dicho perfil en la sesión 6, otros dos (CL y VS) dejan de dar evidencias de uso de pensamiento relacional poniendo de manifiesto un perfil *no-PR* y los otros dos (FM y RB) ponen de manifiesto un mayor uso de pensamiento relacional
- De los siete alumnos que manifiestan algún progreso en su uso de pensamiento relacional de la sesión 3 a la 4, la mayoría (RL, EF, CH, MR y MP) mantienen el mismo perfil de comportamiento de la sesión 4 a la 6, salvo CA que sigue avanzando en su uso de pensamiento relacional. La otra alumna, EV, no asiste a la sesión 6.
- El alumno que muestra un menor uso de pensamiento relacional en la sesión 4 con respecto a la sesión 3, JQ, evidencia la misma tendencia poniendo de manifiesto, en este caso, el perfil *PR-simple*.
- Respecto a los alumnos que no participan o cuyo perfil no puede ser identificado, en una de las dos primeras sesiones, se observa que de la sesión 4 a la sesión 6:

    ○ Tres de ellos manifiestan un perfil en general estable el cual es *no-PR* para dos de ellos (BI y BR) y *PR-variado* para MT.
    ○ Dos de ellos (MAG y NM) muestran en alguna de las sesiones el perfil *mismidad-PR* pero en la sesión 6 no dan evidencias algunas de usar pensamiento relacional.
    ○ Otros dos alumnos (MG y MA) también parecen poner de manifiesto un menor uso de pensamiento relacional en la sesión 6, con respecto a la sesión 4, aunque en este caso sus explicaciones son más ambiguas.
    ○ Una alumna (CY) manifiesta algún progreso en su uso de pensamiento relacional.
    ○ El comportamiento de JA y RT no puede ser identificado puesto que no asisten a alguna de las dos sesiones.

Por lo tanto, ocho (MB, DL, JM, FB, BI, BR, MT y RT) alumnos mantienen, en general, un comportamiento estable a lo largo de las sesiones 3, 4 y 5 en cuanto a su uso de pensamiento relacional, seis o siete (JQ, CL, VS, MG, MAG, NM y ¿MA?)

muestran algún descenso en su uso de este tipo de pensamiento y diez alumnos (FM, RB, RL, EF, CH, MR, MP, CA, EV y CY) muestran algún progreso en dicho uso. La evolución de uno de los alumnos JA no es analizada ya que sólo participó en una de las sesiones.

El descenso en el uso de pensamiento relacional evidenciado se produce de forma progresiva en el caso de CL y JQ, y en el caso de los otros alumnos tiene lugar de la sesión 4 a la 6. El incremento se produce de forma progresiva en el caso de CA pero en la mayoría de los casos tiene lugar justo a partir de la discusión de la sesión 3. En algunos de estos casos, en especial para EF y CH, el progreso puede ser ficticio, como consecuencia de no participar durante la sesión 3 en todos los tipos de sentencias consideradas Sólo tres alumnos (FM, RB y CY) manifiestan dicho incremento de la sesión 4 a la 6. Toda esta información se recoge, de forma resumida, en la Tabla 9-30.

Prestando atención a los perfiles concretos puestos de manifiesto por cada alumno en las sesiones 3, 4 y 6, se observa (ver Tabla 9-31):

- Tres alumnos sólo ponen de manifiesto el perfil no-PR, aunque las respuestas de MG sugieren cierto uso de pensamiento relacional en alguna de las sesiones
- Siete alumnos ponen en algún momento de manifiesto algún uso de pensamiento relacional, evidenciando uno de los siguientes comportamientos: *Simple-PR* o *Mismidad-PR*, en alguna o varias sesiones, pero siempre el mismo.
- Cuatro alumnos ponen de manifiesto, en más de una ocasión, algún uso de pensamiento relacional, evidenciando, en diferentes sesiones, dos de los siguientes comportamientos: *Simple-PR, PR-puntual* o *Mismidad-PR.*
- Tres alumnos ponen de manifiesto el perfil *PR-variado* sólo en una de las sesiones.
- Ocho alumnos ponen de manifiesto el perfil *PR-máximo* o *PR-variado*: cuatro de ellos en todas las sesiones y otros cuatro, en dos de las sesiones, siendo dudoso, en algunos casos, el perfil mostrado.

Tabla 9-30: Resumen de la evolución del comportamiento manifestado por cada alumno en las sesiones 3, 4 y 6, según los perfiles identificados

Evolución del comportamiento, en el uso de PR, entre las sesiones											
S3 ⇒ S4 (N= 22) (N= 25)			**S4 ⇒ S6**			**S4 ⇒ S6 (N= 25) (N= 26)**			**General N= 26**		
JQ	1	⇓	JQ	1	⇓	MAG, CL, NM, VS, JQ, MG + ¿MA?	6 + 1	⇓	JQ, CL, VS, MG, MAG, y NM + ¿MA?	6 +1	⇓
RL, CA, EF, CH, MR, MP y EV	7	⇑	CA	1	⇑	FM, RB, CA, CY	4	⇑	FM, RB, RL, EF, CH, MR, MP, CA, EV y CY	10	⇑
			RL, EF, CH, MR y MP	5	=						
			EV	1	?						
FB, FM, RB, CL, JM, DL, MB y VS	8	=	CL y VS	2	⇓	FB, RL, MT, JM, DL, MB, EF, CH, MR, BR, MP y BI	12	=	MB, DL, JM, FB, BI, BR, MT y RT	8	=
			FM y RB	2	⇑						
			MB, DL, JM y FB	4	=						
MAG, MT, JA, MG, RT, NM, BR, BI y MA + ¿CY?	9 + 1	?	MAG y NM + ¿MG y MA?	2 +2	⇓	RT, JA y EV	3	?	JA	1	?
			CY	1	⇑						
			BI, BR y MT	3	=						
			RT y JA	2	?						

Cuando el número se expresa como suma es porque el segundo sumando se refiere a **c**asos en los la evolución es algo ambigua
La segunda columna detalla la evolución de la sesión 4 a la 6, manteniendo la agrupación de los alumnos dada por la evolución de su comportamiento de la sesión 3 a la 4.

Tabla 9-31: Clasificación de los alumnos según los perfiles puestos de manifiesto en las sesiones 3, 4 y 6.

Ningún uso de PR / Sólo perfil *no-PR*		BI, MG y BR
Algún uso de PR	*Simple-PR*	RT, VS y MA
	Mismidad-PR	MAG, MB, NM y MP
	Simple-PR y Mismidad-PR	CY y EV
	PR-puntual y Mismidad-PR	FB y CL
Perfiles *PR-máximo y PR- variado*	Sólo en una sesión	CA, RB, y JQ
	En alguna de las sesiones	JM, DL, RL y MR
	En todas las sesiones	FM EF CH MT

Con respecto al papel del cálculo en el uso de pensamiento relacional, aunque no se tiene mucha información al respecto, se aprecian situaciones diversas: independencia de la realización del cálculo en todas las sesiones (ej., MT), dependencia del cálculo sólo en algunas de las sentencias aunque en todas las sesiones (ej., FM) o dependencia del cálculo en algunas de las sesiones (ej., CH, EF, CL).

9.8.3 Información aportada por las entrevistas

Como complemento a la descripción sobre el modo en que los alumnos hacen uso y ponen de manifiesto pensamiento relacional a lo largo de las sesiones 3, 4 y 6, consideramos los datos de las entrevistas de la sesión 5 que nos aportan información adicional.

Los alumnos entrevistados son FB, FM, CL, JM, DL, EF, CH, MR, NM, RB, BR, MP y EV. Estos alumnos fueron seleccionados de acuerdo a una clasificación que no corresponde con la de sus perfiles de comportamiento (habiéndose realizado previamente a la obtención de los perfiles) sino con su mayor o menor uso de pensamiento relacional y del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros.

En las entrevistas, a los alumnos no les fueron propuestas sentencias de todos los tipos posibles, sino de aquellos tipos en los que no habían dado evidencias de uso de pensamiento relacional en las sesiones previas.

Considerando los perfiles de comportamiento de cada uno de ellos, puestos de manifiesto en las sesiones 3 y 4, se observa que:

- Dos de los alumnos (RB y BR) no dan muestra alguna de uso de pensamiento relacional en las sesiones previas a la entrevista
- Otros dos (NM y MP) dan muestras, únicamente, en una de las sesiones manifestando el perfil *mismidad-PR*
- Tres alumnos (FB, CL y EV) ponen de manifiesto, en las sesiones 3 y 4, alguno de los perfiles *simple-PR, mismidad-PR* o *PR-puntual*
- Otros tres alumnos (JM, DL, MR) dan muestras de uso de pensamiento relacional en ambas sesiones, poniendo de manifiesto en una de ellas el perfil *PR-variado.*
- Los tres alumnos restantes (EF, CH, FM) dan muestras en las sesiones 3 y 4 de los perfiles *PR-variado* o *PR-máximo.*

En general, se observa que el uso de pensamiento relacional manifestado durante las entrevistas es semejante o superior, según el caso, al puesto de manifiesto en las sesiones previas (ver Tabla 9-32).

En el caso de los alumnos **EF, JM, CH, NM y MP**[77], la entrevista permite confirmar el perfil de comportamiento identificado a partir de sus respuestas en la sesión 4, poniéndose de manifiesto uso de pensamiento relacional basado exactamente en los mismos elementos en ambas sesiones (perfiles *no-PR*, *PR-variado* o *PR-máximo*, según el caso).

Tabla 9-32: Perfiles de los alumnos entrevistados, en las sesiones 3, 4, 5 y 6

	S 3 N=22						**S 4 N=25**						**S5 N=13**		**S 6 N=24**					
	NR	**S**	**M**	**P**	**V**	**X**	**NR**	**S**	**M**	**P**	**V**	**X**	**Perfil**		**NR**	**S**	**M**	**P**	**V**	**X**
FB	■			■					■				P	C	■		■			
FM					■						■		X	↑					■	■
RB	■						■						V	↑			■		■	
CL				■					■				V	↑	■					
JM				■	■						■		V	C					■	
DL				■	■					■			X	↑					■	
EF					■							■	X	C					■	■
CH					■							■	X	C						■
MR		■		■					■		■		P/V	C		■			■	
NM	/	/	/	/	/	/			■				NR	C	■					
BR	/	/	/	/	/	/	■						NR/S	C	■					
MP	■								■				NR	C	■		■			
EV		■							■				P	↑	/	/	/	/	/	/

NR= perfil *no-PR*, S= perfil *simple-PR,* M= perfil *mismidad-PR*, P= perfil *PR-puntual*, V= perfil *PR-variado*, X= perfil *PR-máximo*. Cuando no se indica el perfil de comportamiento de un alumno es porque no ha podido ser clasificado.
Las celdas parcialmente cruzadas indican que el alumno no responde ninguna de las sentencias.
C = se confirma el uso de pensamiento relacional puesto de manifiesto en las sesiones 3 y 4 ↑= muestra un mayor uso de pensamiento relacional que en las sesiones previas

En relación a la entrevista de estos alumnos cabe destacar el uso que JM hace de pensamiento relacional en la resolución de las sentencias $9+4-4=9$ y $11-6=10-5$. Su explicación de la veracidad de la sentencia $9+4-4=9$, al ser cuestionado por un modo de justificar la veracidad de la sentencia no basado en el cálculo, nos sugiere que el alumno no está convencido de que la mismidad de los términos (relación apreciada) garantice la veracidad de la sentencia: *"Que pueden*

[77] Al describir y discutir el caso de cada alumno se resaltan en negrita las siglas quedenominan a los alumnos la primera vez que son mencionados.

ser, que éstos son los mismos y al ser los mismos es verdadera". En la sentencia $11-6=10-5$, tras explicar su veracidad aludiendo a la mismidad de valor numérico de ambos miembros, y al pedírsele otra justificación, busca relaciones entre los términos de forma un tanto aleatoria*: "Sí, umm el seis, como seis más seis... seis más cinco son once, pues se puede... no tienes que hacer la cuenta ni nada al decir eso".* Esta explicación sugiere que cualquier relación que sea apreciada entre los términos de la sentencia permite justificar su veracidad.

En relación a NM cabe destacar que, además de no mostrar reconocimiento de relaciones entre los elementos que componen las sentencias, muestra no tener conciencia de 125 como número o no haber generalizado el hecho numérico "$a-a=0$" (al menos no para todos los números naturales) ya que al preguntarle si podría saber que 125 – 125 es 0 sin realizar el cálculo, hace un intento de expresar una relación pero evidencia no reconocer que está restando un número a sí mismo *"Por que a dos… a uno es igual, a uno le quitas dos es cero, y a dos le quitas uno da uno, es casi igual".*

MP procede a resolver todas las sentencias propuestas calculando y comparando el valor numérico de ambos miembros, no respetando en algunas ocasiones la estructura de la sentencia. Su modo de responder a nuestras cuestiones sobre modos diferentes de resolver la sentencia, consiste en proponer diferentes modos de operar los términos de forma que se obtengan dos valores numéricos a comparar, no prestando atención a su posición respecto del signo igual. En ninguna de las sentencias da evidencias del uso de pensamiento relacional. A continuación, se recoge un extracto de su entrevista sobre la resolución de la sentencia $20-12=20-10-2$:

> **I:** *Muy bien, has hecho las operaciones de las dos partes y has visto que te dan el mismo resultado ¿no? y mirándolo aquí ¿tú sabrías que es verdadera, sin hacer las operaciones? Mirando los números que hay*
> **MP:** *Sí, a doce le quitas dos y te da…diez, y a veinte y a veinte le quitas veinte, cero, y el diez se queda….*
> **I:** *Se queda….mira, aquí tenemos veinte ¿no? y aquí tenemos otro veinte, y este doce. Y aquí tenemos diez y dos.*
> **MP:** *Resto doce… menos diez y dos, me da…cero*
> **I:** *Muy bien. Entonces tú has visto que a doce, si le quitas diez y le quitas dos te da cero*
> **MP:** *Y a veinte… le quitas veinte, también da cero*

En la sentencia $4+5=300$, al preguntarle si cree, sin hacer las operaciones, que el miembro izquierdo va a ser un número más grande o más pequeño que 300 explica "*Más chico* [Muy bien ¿Cómo los sabes?] *Porque trescientos es más alto que… del ocho, si fuera ochocientos sí.* Las indicaciones de la investigadora persiguen conducir a la alumna a pensar en las relaciones entre ambos miembros, pero MP se centra en comparar los valores numéricos (considerando que 4 +5 = 8). Este ejemplo ilustra un hecho apreciado en varias entrevistas: conocer el valor numérico de ambos miembros puede actuar como un obstáculo para que el alumno aprecie relaciones entre los miembros de la sentencia.

Los alumnos **FB y MR** ponen de manifiesto un perfil algo diferente al de la sesión previa, no obstante, al considerar sus perfiles de comportamiento en las sesiones 3 y 4 se observa que el uso de pensamiento relacional evidenciado en la entrevista es semejante al puesto de manifiesto en la totalidad de sus producciones previas. Este hecho permite apreciar que, al menos en este caso, los datos recogidos en la sesión 4 no ponen de manifiesto todas las formas en las que estos alumnos son capaces de utilizar pensamiento relacional en el tipo de sentencias propuestas. La discusión de la sesión 3 y la actividad escrita de la sesión 4 aportan, en el caso de estos alumnos, información complementaria, no redundante.

Cabe destacar las justificaciones dadas por MR al intentar aportar una explicación de la veracidad o falsedad de la sentencia diferente al cálculo de los valores numéricos de ambos miembros. Así ocurre en las sentencias $20-12=20-10-2$, $11+7=10+8$ y $11-6=10-5$: "*Si veinte y veinte son…es lo mismo, y diez y doce no son lo mismo pero da casi todo, casi…eso da ocho y esto da ocho", "Once y diez y siete y ocho. Que siete y ocho, éste es mayor que éste, es uno mayor que éste y éste es uno menor que éste", "Y que esto es…es uno menos que éste y éste es uno más que éste, uno más que éste y ésta uno más que éste".* En estas dos últimas explicaciones no podemos apreciar si la alumna reconoce la implicación de la veracidad a partir de las relaciones observadas.

Por otra parte, **BR** manifiesta un uso de pensamiento relacional prácticamente nulo al igual que en las sesiones previas. No obstante, en la resolución de la sentencia $9-9=3$, no podemos precisar si reconoce una particularización de la propiedad "$a-a=0$" o hace uso de un hecho numérico conocido. Ella explica "*es que esa me* *la se de memoria*". Esta alumna no da muestras de apreciar la mismidad de los términos involucrados en las sentencias $5+5=5+5$ o $7+5=5+7$, ni ninguna otra relación en las sentencias propuestas. En general muestra un comportamiento *no-PR*, al calcular y comparar los valores numéricos de ambos miembros en todas las sentencias, no sugiriendo ningún otro tipo de estrategia al preguntarle por otras formas de resolver las sentencias. No muestra ningún reconocimiento de estar operando los mismos números en ambos miembros de la sentencia $7+5=5+7$, aceptando que ambos miembros puedan tener valores numéricos diferentes. Tampoco evidencia uso de pensamiento relacional al realizar los cálculos.

Incluso habiendo apreciado con la ayuda de la investigadora la presencia de 8 + 6 en ambos lados, resultante de operar 4 + 4 en la sentencia $8+6=4+4+6$, la alumna niega que sabiendo que en ambos miembros tiene 8 + 6 pueda concluir que la sentencia es verdadera. En todo momento afirma necesitar realizar los cálculos para concluir la veracidad o falsedad de la sentencia. Para esta alumna las sentencias parecen tener un significado completamente procedimental; las aborda como un tipo de ejercicio de cálculo concreto para el que conoce un procedimiento "estándar". Esta visión de las sentencias no es compatible con el uso de pensamiento relacional.

En el caso de los otros cinco alumnos **FM, RB, DL, CL y EV** la entrevista permite detectar un mayor uso de pensamiento relacional del que había sido manifestado en las sesiones previas.

En relación a estos alumnos, cabe destacar que pese a no haber dado evidencia alguna del uso de pensamiento relacional en las sesiones previas, RB lo utiliza para abordar algunas de las sentencias sin necesidad de ser incitado a ello. No obstante, no parece apreciar que en los miembros izquierdos de las sentencias $35-35=14$ y $125-125=14$ aparece dos veces el mismo número. Concretamente en el caso de la sentencia $35-35=14$ opera por separado 5 – 5 y 3 – 3.

En el caso de EV, aunque pone de manifiesto uso de pensamiento relacional en la resolución de la sentencia $10-7=100$, utilizando algún conocimiento sobre el efecto de la resta para resolver dicha sentencia, en las demás sentencias no da muestras de uso alguno de este tipo de pensamiento, aun siendo guiada por la investigadora a apreciar que en ambos miembros de la sentencia $8+6=4+4+6$ se tiene ocho más seis:

> **I:** *Vale, Muy bien. ¿Y tú sabrías que ésta va a ser verdadera, de otra forma? ¿Habría otra forma de hacerlo?... Mirando la igualdad ¿habría alguna otra forma que no haya que hacer todas las cuentas?*
> **EV:** *No*
> **I:** *¿No? Mira, aquí, cuatro más cuatro ¿Cuánto es?*
> **EV:** *Ocho*
> **I:** *Ocho. Entonces tú sabes que esto de aquí es ocho, ¿eso te ayuda para ver que es verdadera? El saber que esta parte es ocho.*
> **EV:** *Sí*
> **I:** *¿Por qué?*
> **EV:** *Es que no lo sé explicar.*
> **I:** *¿No lo sabes explicar? A ver tú sabes que esto de aquí es ocho ¿no?*
> **EV:** *Sí*
> **I:** *Entonces para ver que es verdadera ¿haría falta hacer las cuentas y sumarle seis? ¿O hay alguna forma de saber que es verdadera, mirando el otro lado?*
> **EV:** *Con las cuentas*

9.9 Discusión de los resultados presentados

Sobre los perfiles y las estrategias

Mientras que las estrategias permiten detallar el flujo de pensamiento de los alumnos al abordar una sentencia y, en particular, el momento de dicho proceso en el que se hace uso de pensamiento relacional, los perfiles centran la atención en la capacidad de uso de pensamiento relacional, manifestada por cada alumno, y el modo en que este uso se realiza, independientemente de que haya sido puesto de manifiesto en todas las sentencias o haya sido, o no, el primer enfoque al abordar la resolución en éstas.

Ambos tipos de resultados aportan información diferente y complementaria. Las estrategias permiten apreciar la diversidad de modos de abordar la resolución de sentencias que evidencian los alumnos, el modo en que va variando su atención a lo largo del proceso de resolución y el papel del cálculo y del pensamiento relacional en este proceso. Esta información es de utilidad para comprender el tipo de respuestas que aportan los alumnos y sus modos de pensamiento, facilitando el promover en el aula determinado tipo de estrategias, así como, dirigir la atención del alumno a los elementos que son relevantes en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas, favoreciendo el desarrollo de su comprensión de estas expresiones matemáticas.

Los perfiles de comportamiento permiten, por una parte, identificar diferentes modos en los que los alumnos hacen uso de pensamiento relacional y en los que consideran o conciben las sentencias numéricas y, por otra parte, analizar la evolución del uso de pensamiento relacional de los alumnos.

A continuación, comentamos los resultados presentados en los apartados previos, aportando posteriormente algunas conclusiones generales.

Perfiles de comportamiento por sesiones

Los resultados relativos a la sesión 3 ponen de manifiesto que, cuando se fomenta en el aula el uso de estrategias basadas en pensamiento relacional, una gran parte de los alumnos (entre 12 y 14 de los 22 alumnos) pone de manifiesto, de algún modo, el uso de este tipo de estrategias partiendo de su conocimiento aritmético. No habiéndose trabajado previamente el uso de este tipo de pensamiento de este modo, se evidenciaron variedad de usos. Algo menos de la mitad de los alumnos que participan en esta sesión, entre 8 y 9 alumnos, dan evidencias del uso de pensamiento relacional haciendo distinciones y estableciendo relaciones no únicamente basadas en la mismidad de los términos involucrados. Y otros 5 o 6 alumnos ponen de manifiesto no estar únicamente centrados en la realización de los cálculos, evidenciando un comportamiento tipo *simple-PR o mismidad-PR*.

Los resultados de la sesión 4 evidencian que, pese a haberse promovido el uso de pensamiento relacional en la sesión anterior, algunos alumnos no lo ponen de manifiesto. En este caso nuestro interés en la manifestación de estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional no se estaba haciendo explícito a los alumnos durante la resolución de la actividad escrita. No obstante, se percibe un aumento en el número de alumnos que ponen de manifiesto algún uso de pensamiento relacional, el cual oscila entre 16 y 18 alumnos de los 25 que participan en esta sesión.

Los resultados de la sesión 6 muestran una interesante tendencia en la evolución del comportamiento de los alumnos al producirse una mayor presencia de los comportamientos extremos *no-PR*, *PR-variado* y *PR-máximo*. Habiéndose debilitado, por el paso del tiempo, el efecto de nuestra potenciación y especial apreciación del uso de pensamiento relacional, algunos alumnos dejan de poner de manifiesto el uso de este tipo de pensamiento. Siguen poniéndose de manifiesto todos los tipos de comportamientos.

Es especialmente relevante el hecho de que, en esta sesión, los perfiles de comportamientos más evidenciados sean los extremos. Mientras que la mayor manifestación del perfil *no-PR* parece deberse a la debilitación de la influencia de nuestra intervención debido al transcurso del tiempo, la mayor manifestación de los perfiles *PR-variado* y *PR-máximo* podría deberse al desarrollo evolutivo y mayor experiencia aritmética de los alumnos. Por una parte, este hecho sugiere que los alumnos hacen uso de pensamiento relacional de forma espontánea sin necesidad de ser incitados a ello. Por otra, que el tipo de sentencias consideradas favorece, por sí mismas, este tipo de estrategias cuando los alumnos son conscientes de la existencia de estrategias basadas en pensamiento relacional así como de su valoración por el investigadora-docente.

Manifestación de cada perfil

En relación con la presencia de cada perfil de comportamiento, cabe señalar la destacada presencia del perfil *mismidad-PR* en la sesión 4 y la diferencia en la frecuencia de la manifestación de este perfil entre las sesiones 4 y 6, ambas idénticas en el tipo de tarea propuesta a los alumnos. Habiéndose promovido la verbalización de estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional durante la sesión 3, este perfil parece corresponder, en al menos nueve de los trece alumnos que lo ponen de manifiesto en alguna sesión, a una de sus primeras manifestaciones de uso de este tipo de pensamiento. Siendo la mismidad, junto con la diferencia (= no mismidad), una de las relaciones más básicas, en sentido no únicamente matemático, estos resultados sugieren que para los alumnos es una de las relaciones más fácilmente apreciables y/o expresables al trabajar con las sentencias propuestas, en especial cuando comienzan a hacer uso de pensamiento relacional, o a hacerlo explícito. La destacada manifestación del perfil *mismidad-PR* en la sesión 4 es, por tanto, interpretada como resultado de la potenciación del uso y verbalización de pensamiento relacional durante la discusión de la sesión previa.

En el caso de una alumna, este es el único perfil que pone de manifiesto a lo largo de las sesiones 3, 4 y 6, nos mostrando evidencias alguna de apreciar otro tipo de relaciones en la sentencias.

Estas observaciones justifican la menor presencia del perfil *PR-puntual* en las sesiones 4 y 6, ya que cuando los alumnos ponen de manifiesto un único modo de uso de pensamiento relacional, éste se basa, en la mayoría de los casos, en las propiedades conmutatividad y reflexiva.

Cabe destacar sólo dos casos en los que los alumnos ponen de manifiesto los perfiles *PR-puntual* y *PR-variado,* no dando evidencia alguna de uso de pensamiento semejante al del perfil *mismidad-PR*[78]. DL da muestras del uso de pensamiento relacional en las sesiones 3 y 4 abordando la resolución de la sentencias $122+35-35=122$, $100+94-94=100$ y $13+11=12+12$ haciendo uso de algún conocimiento de la relación complementaria de la suma y la resta y la propiedad de compensación. Sin embargo, hasta la sesión 6 no hace uso de pensamiento relacional basado en la las propiedades conmutativa o reflexiva. El caso de CA es algo más confuso, en tanto que no podemos precisar con claridad si hace uso de pensamiento relacional en resolución de la sentencia $122+35-35=122$, en la sesión 4. Este alumno evidencia el perfil *mismidad*-PR posteriormente en la sesión 6.

El uso de una sobre-generalización de la propiedad reflexiva aplicándola a algunas o incluso todas las sentencias de no-acción, es otro fenómeno a destacar. No siendo muy frecuente, este comportamiento es puesto de manifiesto por diferentes alumnos en las sesiones 4 y 6, lo que evidencia que no es necesariamente un resultado de nuestra potenciación del uso de este tipo de pensamiento durante la sesión 3, ya que se mantiene en el tiempo. En algunos casos los alumnos aplican esta generalización puntualmente para concluir la veracidad de aquellas sentencias que involucran términos repetidos, al apreciar alguna mismidad de términos y obviar la estructura de la sentencia. Algún alumno hace un uso más extremo de esta generalización, al concluir que toda sentencia de no-acción que no involucra términos iguales es falsa. En este caso, el especial diseño de las sentencias propuestas, y su apreciación de alguna mismidad y parecido de términos en las diversas sentencias, conduce al alumno a una sobre-generalización restringida a las sentencias de no-acción, sin cuestionarse el modo en que dichas relaciones afectan a las expresiones aritméticas que componen ambos miembros o se relacionan con su valor numérico.

[78] Para realizar esta afirmación se ha tenido en cuenta que durante la sesión 3 todos los alumnos no tuvieron oportunidad de manifestar uso de pensamiento relacional basado en la mismidad de los términos.

Las relaciones aleatorias argumentadas por algunos alumnos, así como las justificaciones basadas en la apreciación de relaciones que son aportadas mostrando poco convencimiento de que justifiquen su respuesta, son otros comportamientos a destacar. Dichas explicaciones fueron aportadas durante la entrevista en el intento de proponer una forma diferente de resolver la sentencia. En este comportamiento reconocemos la influencia del contrato didáctico. Al hacerse explícito un interés especial en que se aporten explicaciones basadas en la apreciación de relaciones, los alumnos pueden tender a buscar relaciones cualesquiera, dejando a un lado el contexto de igualdad que presenta la sentencia, o expresar relaciones semejantes a las discutidas en el aula sin reconocer el por qué garantizan la veracidad de la sentencia.

La menor presencia del perfil *simple-PR* se considera consecuencia, por una parte, de la menor posibilidad que tenían los alumnos de poner de manifiesto este tipo de pensamiento debido al tipo de sentencias consideradas. Por otra parte, debido a que la mayor parte de los alumnos, al abordar la resolución de la sentencia $18-7=7-18$ suponen la conmutatividad de la resta u operan de algún modo $7-18$.

En todas las sesiones existe una considerable presencia del perfil *no-PR* lo cual indica que algunos alumnos no ponen de manifiesto pensamiento relacional en el tipo de actividades propuestas. No obstante, sólo tres de estos alumnos (BR, BI y MG) no ponen de manifiesto pensamiento relacional en ninguna de las sesiones, aunque en el caso de MG las evidencias son confusas. Otros tres alumnos (RT, VS y MA) sólo evidencian pensamiento relacional propio del perfil *simple-PR*.

Considerando las entrevistas

En las entrevistas se observa como algunos alumnos ponen de manifiesto un mayor uso de pensamiento relacional que en las sesiones previas, lo cual consideramos consecuencia de las cuestiones de la investigadora sobre otros modos de resolver las sentencias aparte del dado en primer lugar. En uno de los casos es destacable la significativa diferencia entre el pensamiento relacional puesto de manifiesto en la entrevista y en la sesiones previas. RB no evidencia ningún uso de pensamiento relacional en las sesiones 3 y 4 y, sin embargo, en las entrevistas manifiesta su uso sin necesidad de ser incitado a ello. Estos resultados ponen de manifiesto la dificultad de conocer realmente el uso de pensamiento relacional del que son capaces o que realmente llevan acabo los alumnos, así como las relaciones que aprecian en las sentencias propuestas, en especial, cuando se realiza a través de actividades escritas. En este sentido se observa que el uso o desarrollo de un alumno de pensamiento relacional es algo que no se puede determinar por completo.

Al considerar la información aportada por las entrevistas, se observa que, de las sesiones 4 y 5 al siguiente curso académico, la mayoría de los alumnos evidencian un perfil de comportamiento semejante, aunque algunos ponen de manifiesto un menor uso de pensamiento relacional en la última sesión.

Esta observación sugiere que el efecto de nuestra intervención no es el aprendizaje memorístico de estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional. Como se ha mencionado anteriormente, se observa que el tipo de sentencias consideradas favorece, por sí mismas, este tipo de estrategias, cuando los alumnos son conscientes de la existencia de estrategias basadas en pensamiento relacional y de su valoración por el investigadora-docente. El principal efecto que se identifica en nuestra intervención es el de hacer explícita la existencia y nuestro interés en este tipo de estrategias, y animar a los alumnos a hacer uso de de las distinciones y relaciones que aprecian y de su conocimiento de la estructura de la aritmética.

Aunque los datos de las sesiones 4 y 6 sugieren un progreso en el uso de pensamiento relacional en el caso de los alumnos FM, RB, CA y CY, las entrevistas a FM y RB evidencian que, en la sesión 5, utilizan pensamiento relacional más frecuentemente de lo apreciado en la sesión 4. Esta observación sugiere que éste puede ser el caso de los otros dos alumnos y que, por lo tanto, dicho progreso es ficticio.

Al considerar la evolución de los alumnos entrevistados desde la sesión 3 a la 6, se observa que la mayoría pone de manifiesto un comportamiento semejante en las sesiones 4 y 6, mientras que dos evidencian un mayor uso de pensamiento relacional y otros dos una disminución en la manifestación de dicho uso. Estos resultados sugieren que, en general, las entrevistas no supusieron una destacada influencia en el uso de pensamiento relacional de los alumnos en la sesión 6, lo cual puede ser debido al distanciamiento en el tiempo de las sesiones 5 y 6.

Algunas conclusiones

En general, el análisis de los datos nos permite afirmar que todos los alumnos tienen alguna estrategia o método para abordar las sentencias propuestas, aunque en algunas ocasiones no respeten la estructura de la sentencia o no hagan uso del significado del signo igual *equivalencia numérica*. Además, muestran capacidad para hallar un valor numérico desconocido en sentencias de tres términos.

Aunque inicialmente, en las sesiones 1 y 2, predominan las estrategias basadas en la realización de las operaciones contenidas en la sentencia, no siendo manifestado el uso de pensamiento relacional salvo en ocasiones puntuales, 21 de los 26 alumnos evidencian en algún momento algún uso de este tipo de pensamiento a lo largo de las siguientes sesiones. Desde el primer momento en que es promovido el uso de pensamiento relacional, éste es puesto de manifiesto. Este hecho evidencia que es un tipo de pensamiento que es desarrollado por los alumnos a partir de su aprendizaje/experiencia aritmética, pese a que no sea directamente promovido en la enseñanza (pero se acelera si se trata en la misma). No obstante, el que tres alumnos no dieran muestras de este tipo de pensamiento en ninguna de las sesiones, sugiere que no, necesariamente, todos los alumnos desarrollan este tipo de pensamiento o bien que no son capaces de aplicarlo en este contexto.

Aunque es posible que alguno de estos alumnos simplemente no pusiera de manifiesto el uso de relaciones o características apreciadas en las sentencias, la entrevista a BR sugiere que, al menos esta alumna, no presta atención a las relaciones entre los elementos de la sentencia o a las características particulares de ésta al abordar su resolución. En el modo de proceder de BR se reconoce cierta rigidez al abordar las sentencias, considerando las expresiones que componen ambos miembros como cadenas de operaciones a realizar y no como entidades en sí. Considerando los resultados del estudio de Koehler (2002, 2004), queda la duda de si estos alumnos habrían desarrollado y puesto de manifiesto este tipo de pensamiento si se hubiera trabajado con ellos la modelización de las sentencias para ayudarles a abstraer las relaciones expresadas.

Resultados de estudios previos señalan que, en la realización de cálculos aritméticos, los alumnos dan evidencias espontáneas de este tipo de pensamiento aunque no todos ponen de manifiesto pensamiento relacional en igual grado de sofisticación. Estos resultados se ven extendidos, con nuestro estudio, al contexto de la resolución de sentencias numéricas.

La manifestación de casi todos los perfiles en cada sesión, la semejanza de la frecuencia con que se manifiestan la mayoría de los perfiles en la sesión 3 así como la diversidad en la manifestación de los perfiles entre una sesión y otra y en el modo en que progresan los comportamientos de los alumnos a lo largo de las diferentes sesiones, muestra que el uso de pensamiento relacional presenta una importante componente individual, manifestándose como un tipo de pensamiento que los alumnos no desarrollan o manifiestan de forma semejante como resultado de la enseñanza aritmética recibida y de nuestras intervenciones en el aula. Consideramos que esto puede ser debido a que, en gran parte, el uso y desarrollo de pensamiento relacional parece ser un producto indirecto más que directo de su experiencia aritmética previa.

La diversidad de usos de pensamiento relacional evidenciados así como las diferencias apreciadas en el modo en que la atención de los alumnos está estructurada al trabajar en la resolución de las sentencias propuestas, pone de manifiesto la riqueza de usos de este tipo de pensamiento así como algunos de los factores que influyen en su uso, tales como el lugar y modo en que está centrada la atención del alumno al iniciar la resolución de la sentencia y a lo largo de su resolución, la fluctuación de dicha atención, la carga cognitiva de la tarea para el alumno (lo que condiciona que tenga o no atención libre), su menor o mayor tendencia computacional, su modo de concebir los números, las expresiones y la sentencia, su conciencia o conocimiento sobre las dimensiones de variación de una sentencia, sus conocimientos aritméticos y, en general, su experiencia aritmética previa.

Se observa que al menos ocho alumnos manifiestan un perfil de comportamiento estable en las diferentes sesiones, lo cual sugiere que nuestras intervenciones no les conducen a un mayor uso de pensamiento relacional. El tipo de intervenciones realizadas no pretendía enseñar a los alumnos a resolver las sentencias por medio de pensamiento relacional, a no ser que aprendieran a partir de la observación de las estrategias utilizadas por sus compañeros durante la discusión de la sesión 3. Sí se pretendía, no obstante, favorecer el uso y la manifestación de este tipo de pensamiento a través de la discusión de la sesión 3 y el tipo de sentencias propuestas.

En el caso de estos alumnos, conjeturamos que desde el primer momento explicitan el uso de pensamiento relacional que utilizan, y que la discusión de la sesión 3 no es suficiente para ayudarles a desarrollar su apreciación de otro tipo de relaciones en las sentencias o a desarrollar su conocimiento aritmético.

Estas observaciones apoyan nuestra creencia en la importancia de la experiencia aritmética del alumno en el uso de pensamiento relacional, pues condiciona el modo en que hace uso de las relaciones apreciadas. Así, aquellos alumnos que, por ejemplo, no son conscientes explícitamente de la relación complementaria de la suma y la resta, pueden apreciar alguna mismidad de términos en sentencias del tipo $a+b-b=c$, pero difícilmente podrán utilizar una estrategia para resolverlas que implique el uso de la complementariedad de ambas operaciones. No obstante, si parte de su atención fluctúa adecuadamente durante la realización del proceso de cálculo, queda la posibilidad de que la cancelación de los términos sea apreciada, teniendo en cuenta que, de acuerdo con alguno de los estudios presentados en el capítulo 5, la mayoría de los alumnos de esta edad tienen un conocimiento implícito de la relación complementaria de la suma y la resta.

La destacada influencia de la experiencia aritmética previa del alumno es también puesta de manifiesto en estudios previos que detectan un progreso lineal en el desarrollo de pensamiento relacional a lo largo del último curso de Educación Primaria y dos primeros cursos de Educación Secundaria, sin haberse realizado ninguna intervención específica.

A la vista de los resultados, nuestra intervención en el aula, en la que mostramos especial apreciación de las explicaciones que evidencian algún uso de pensamiento relacional y animamos a los alumnos a que resuelvan las sentencias sin realizar todas las operaciones, fue exitosa en promover la manifestación y el uso de pensamiento relacional. En particular, el descenso en la manifestación del uso de pensamiento relacional, por algunos alumnos, se considera consecuencia de la debilitación de la influencia de nuestra potenciación del uso de este tipo de pensamiento, pudiendo corresponder ciertamente a un descenso en el uso pensamiento relacional o únicamente a una menor manifestación de éste. Este último puede ser el caso para algunos alumnos, teniendo en cuenta que, en general, muestran mayor dificultad en describir sus estrategias cuando implican algún uso de pensamiento relacional, que cuando consisten en el cálculo y la comparación de los valores numéricos.

Se observa que nuestra intervención en la sesión 3, además de ser de utilidad para hacer explícito nuestro interés por el uso de este tipo de pensamiento, ayuda a algunos alumnos a tomar conciencia de la existencia de dos enfoques (generales) diferentes para la resolución de este tipo de sentencias y promueve el hábito de buscar relaciones.

Así mismo, se evidencia la capacidad de la mayoría de los alumnos (20 de los 26)[79], de considerar las expresiones aritméticas y las igualdades y sentencias como totalidades, habiéndose superado la tendencia general de realizar los cálculos y comparar los valores numéricos de ambos miembros. Sin duda alguna, los resultados son prometedores en tanto a la capacidad de los alumnos de hacer uso de este tipo de pensamiento.

Por otra parte, destacan las dificultades de algunos alumnos para reconocer las restricciones de la estructura de las igualdades y sentencias, llegando incluso a hacer uso del significado del signo igual *equivalencia numérica* comparando los valores numéricos resultantes de combinar términos de diferentes miembros.

Algunos de los estudios consultados han señalado las especiales dificultades que encuentran los alumnos en la comprensión de la estructura de las expresiones, al trabajar tanto en contextos aritméticos como en algebraicos. Si bien nuestro enfoque de enseñanza ha estado centrado en promover la flexibilidad en el modo de abordar la resolución de igualdades y sentencias, a la vista de los resultados consideramos necesario trabajar conjuntamente en el aula las convenciones que regulan el lenguaje simbólico.

[79] Nos referimos a aquellos que ponen de manifiesto en alguna de las sentencias los perfiles *mismidad-PR*, *PR-puntual, PR-variado y PR-máximo.*

PARTE II

COMPRENSIÓN DEL SIGNO IGUAL

En esta segunda parte, como se ha mencionado previamente, abordamos el análisis de la comprensión del signo igual que manifiestan los alumnos participantes en el estudio al resolver y construir igualdades y sentencias numéricas, en otras palabras, los significados del signo igual que los alumnos ponen de manifiesto. También describimos las dificultades manifestadas por los alumnos en la realización de las diversas tareas propuestas (En el Anexo F se recoge el análisis pormenorizado de estas cuestiones, considerando los datos de cada sesión de forma independiente).

Por lo tanto, recogemos el análisis y resultados que se corresponden con el objetivo de investigación O3: "Analizar la comprensión del signo igual que muestran los alumnos participantes en el estudio al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numéricas." Parcialmente también se aborda el objetivo O4: "Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a la comprensión del signo igual y el uso de pensamiento relacional que ponen de manifiesto".

Descripción de los criterios de análisis

Para estudiar la comprensión de las igualdades, mostrada por los alumnos, se han analizado los significados del signo igual puestos de manifiesto en las respuestas y explicaciones dadas, en la resolución de cada una de las igualdades y sentencias, (*criterio semántico*) y el modo en que los alumnos combinan los términos de las igualdades y sentencias al resolverlas (*criterio sintáctico*). Este último criterio se refiere a si los alumnos ignoran o no alguno de los términos y a si alteran o respetan la disposición de éstos en la igualdad o sentencia.

Distinguimos entre la alteración de la totalidad de la igualdad o sentencia y la alteración de los términos dentro de uno de los miembros. El primer caso tiene lugar cuando los alumnos operan conjuntamente términos de distintos miembros (ej., cuando en la igualdad 8 + 4 = □ + 5 se opera el término 5 con el término 8, con 4 o con ambos). La alteración dentro de uno de los miembros sólo es de relevancia en las igualdades y sentencias de resta, puesto que la conmutatividad de la suma permite la alteración de la disposición de los términos en expresiones aditivas. Por lo tanto, nos referimos a la alteración de los términos en uno de los miembros cuando los alumnos consideran o interpretan de derecha a izquierda, en vez de izquierda a derecha, alguno de los miembros de una igualdad o sentencia de resta (ej., cuando el miembro derecho de la igualdad 14 – 9 = □ – 10 es interpretado como 10 – □).

El criterio sintáctico de este análisis, nos permite precisar el modo en que los alumnos dan sentido a las igualdades y sentencias consideradas, haciendo uso de sus significados del signo igual, y explorar su conocimiento sobre las convenciones que regulan la escritura e interpretación de las igualdades y sentencias numéricas.

Ambos criterios nos permiten identificar las dificultades encontradas en la resolución de las igualdades y sentencias numéricas, las cuales están relacionadas con la comprensión del signo igual, con las convenciones que regulan el simbolismo aritmético y con la sobre-generalización de alguna propiedad aritmética (ver apartado 9.13).

Comenzamos detallando los significados puestos de manifiesto por los alumnos y analizando la evolución de su comprensión a lo largo de las seis sesiones de trabajo en el aula.

9.10 Significados del signo igual y sus manifestaciones

Entre los significados del signo igual que los alumnos han evidenciado en sus respuestas a las distintas actividades realizadas, se identifican los significados ya detectados y definidos en nuestro estudio previo Molina (2005)—*operador*, *expresión de una acción* y *equivalencia numérica*— y un significado adicional al que hemos denominado *similitud numérica.*

Los tres primeros significados coinciden con significados matemáticos de referencia de este signo, descritos previamente en la búsqueda bibliográfica realizada. El significado que hemos denominado *similitud numérica* se refiere al uso de este signo para expresar cierto parecido o similitud entre expresiones, es decir para relacionar expresiones en las que se repiten varios términos (ej., $122+35-35=122$, $12-5=5-12$ y $4+7=7-4$) o expresiones con una estructura[80] similar (ej., $17-7=18-8$). La sentencia o igualdad es interpretada como la expresión de un parecido o semejanza.

Este significado conduce a los alumnos a considerar verdaderas aquellas sentencias en las que los mismos números se repiten, ya sea dentro de un mismo miembro o en ambos (sobregeneralizando la propiedad reflexiva de la igualdad), o, en general, en las que detectan cierta similitud entre las expresiones que componen ambos miembros, obviando, en ocasiones, los signos operacionales así como la posición relativa de los términos y su posición respecto del signo igual. En particular, este significado, llevado al extremo, podría conducir a afirmar que la igualdad $23=32$ es verdadera, pues ambos miembros contienen al 2 y al 3.

Este significado del signo igual, algo impreciso, no es adecuado en el contexto de las matemáticas, a diferencia de los anteriores significados que tienen validez en determinados tipos de igualdades y sentencias. No obstante, los alumnos también hacen usos inadecuados de los significados *operador*, *expresión de una acción* y *equivalencia numérica* en algunas igualdades y sentencias. A continuación, se detallan esos usos al describirse los diversos casos en los que identificamos la manifestación de cada uno de estos cuatro significados, en las respuestas de los alumnos.

SIGNIFICADO OPERADOR. Consideramos que un alumno pone de manifiesto el uso del significado del signo igual *operador* cuando actúa de la siguiente forma.

En igualdades abiertas y sentencias de acción, acepta y resuelve correctamente (pudiendo cometer algún error de cálculo) las igualdades y sentencias que contienen las operaciones en el miembro izquierdo (ej., "[37 + 22 = 300] *Falsa* […] *Porque treinta y siete más veintidós dan cincuenta y nueve, y no dan trescientos*"), y no resuelve o lo hace de forma incorrecta las que contienen las operaciones en el

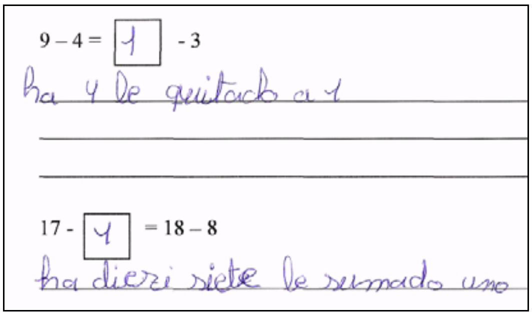
[80] Utilizamos el término estructura, en relación a las sentencias e igualdades, para referir a lo que Kieran (1989) denomina estructura de superficie de una expresión numérica o algebraica: la forma o disposición de los términos y operaciones sujetas a las restricciones del orden de las operaciones. Así la estructura de superficie de $3(x + 2) + 5$ se refiere a la disposición de los términos y operaciones, en este caso, la multiplicación de 3 por $x + 2$ seguido de la suma de 5.

miembro derecho (ej., □ = 25-12). En igualdades abiertas de no–acción, el alumno opera conjuntamente todos los términos de la igualdad (ej., da la respuesta 26 a la igualdad 12 + 7 = 7 + □), o ignora uno de los términos y consideran sólo una parte de la igualdad de la forma $a \pm b = c$, siendo *a, b ó c* la cantidad a averiguar (ej., da la respuesta 12 en 8 + 4 = □ + 5, ignorando el 5 y sumando 8 y 4; da la respuesta 19 en la igualdad 12 + 7 = 7 + □, ignorando el 7 del miembro derecho y sumando 12 y 7).

En sentencias de no–acción verdaderas y falsas, el alumno exige que el miembro derecho de la sentencia esté compuesto por un único término, siendo éste el resultado de la operación expresada en el miembro izquierdo (ej., "$[6+4+18=10+18]$ *Falsa porque 6 + 4 + 18 = 118*") u obligan a que uno de los términos del miembro derecho sea el valor numérico del miembro izquierdo (ej., "[18 – 7 = 7 – 18] *Falsa porque 18 – 7 no son 7",* "$[53+41=54+40]$ *Falsa porque 53 + 41 no son 40").* Con menor frecuencia, algún alumno opera conjuntamente todos los términos sin explicitar el modo en que determina la veracidad o falsedad de la sentencia a partir de dicho cálculo (ej. "$[75+23=23+75]$ *Verdadera porque setenta y cinco más 23 igual veintitrés mas setenta y cinco dan ciento noventa y uno";* calculando aparte $75+23+23+75=191$, mediante el algoritmo de la suma).

Los alumnos que dan muestras de este significado tienden a centrarse en una parte de la igualdad o sentencia de la forma $a \pm b = c$ o a interpretar la igualdad o sentencia como si fuera de acción, procediendo de izquierda a derecha y modificando, en ocasiones, la estructura de la misma. Sólo responden correctamente a igualdades y sentencias de acción en las que las operaciones aparecen en el miembro izquierdo.

En la Figura 9-18 y Figura 9-19 se muestran algunas respuestas de los alumnos que evidencian el uso de este significado del signo igual. Como podemos observar en la Figura 9-18, en ambas igualdades FB ignora uno de los términos del miembro de la igualdad que aparece completo, dando respuesta a una igualdad abierta de tres términos. Al aplicar este significado operacional del signo igual, FB modifica la estructura de la igualdad de diferentes modos: altera la disposición de los términos de la igualdad en el primer caso, y cambia la operación de uno de los miembros, en el segundo.



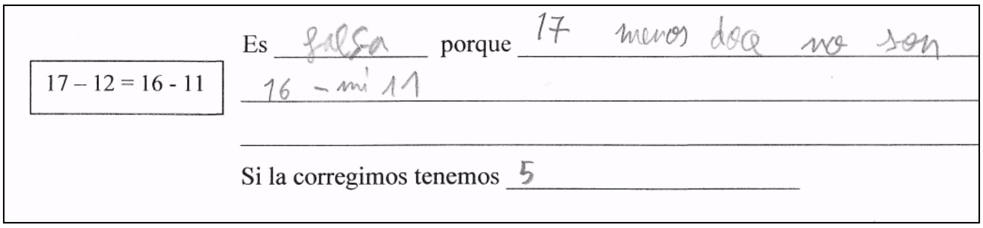
9 – 4 = 1 - 3
ha 4 le quitado a 1

17 - 1 = 18 – 8
ha diezi siete le sumado uno

Figura 9-18: Extractos de las respuestas de FB a las igualdades de la sesión 2.

En la primera igualdad, FB da como respuesta 1 explicando que ha restado 4 y 1. De este modo obtiene 3, el término que se sitúa más a la derecha del signo igual. FB ignora el término 9 y resuelve la igualdad 4 – □ = 3, en vez de la igualdad de tres términos 4 = □ – 3, alterando la disposición de la totalidad de la igualdad. En la otra igualdad, 17 – □ = 18 – 8, este alumno vuelve a ignorar el término situado más a la derecha del signo igual. Considera la igualdad de tres términos 17 – □ = 18 y da como respuesta 1, al observar la diferencia de una unidad entre los términos 17 y 18. En su explicación FB evidencia estar considerando la operación suma en vez de la resta.

La explicación de MA (ver Figura 9-19) pone de manifiesto el uso de este mismo significado del signo igual, ya que exige que uno de los términos del miembro derecho, 16 ó 11, sea el resultado de la operación expresada en el miembro izquierdo (17 – 12), es decir que sea 5.



17 – 12 = 16 - 11

Es falsa porque 17 menos doce no son 16 – ni 11

Si la corregimos tenemos 5

Figura 9-19: Extracto respuestas de MA a igualdades verdaderas y falsas de la sesión 4.

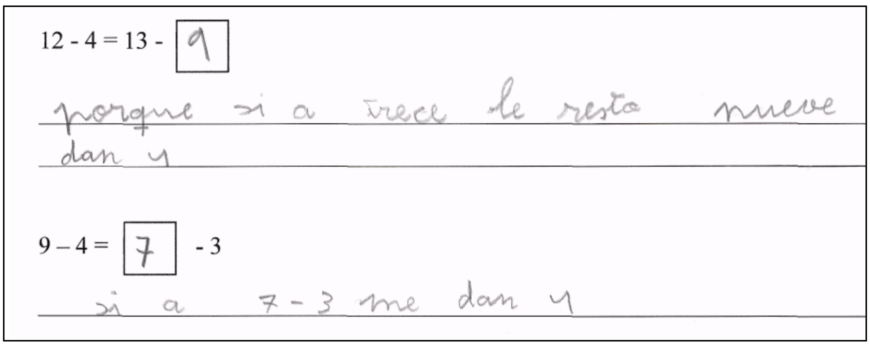
EXPRESIÓN DE UNA ACCIÓN. Consideramos que un alumno pone de manifiesto el uso del significado del signo igual *expresión de una acción* cuando actúa de la siguiente forma.

Resuelve correctamente igualdades y sentencias numéricas de acción (pudiendo cometer algún error de cálculo). En igualdades abiertas de no–acción, ignora uno de los términos y consideran sólo una parte de la igualdad o sentencia de la forma $c = a \pm b$, siendo *a, b* ó *c* la cantidad a averiguar (ej., da la respuesta 17 a la igualdad 14 + □ = 13 + 4 al operar el miembro derecho de la igualdad; da la respuesta 12 a la igualdad □ + 4 = 5 + 7 ignorando el 4 y sumando 5 y 7). En otros casos procede como en el caso del uso del significado *operador* del signo igual, resolviendo una parte de la igualdad de la forma $a \pm b = c$, siendo *a, b* ó *c* desconocido.

Estos alumnos, al abordar la lectura y resolución de la igualdad o sentencia, proceden, en ocasiones, de derecha a izquierda y otras de izquierda a derecha. En sentencias de no-acción, al no tener que averiguar un valor numérico, tienden a proceder de izquierda a derecha y hacen uso del significado *operador* del signo igual[81].

El uso del significado *expresión de una acción*, lleva a los alumnos a resolver correctamente igualdades y sentencias de acción pero no igualdades o sentencias de no–acción, al no interpretar el signo igual como expresión de una *equivalencia numérica*. La diferencia entre la actuación de los alumnos que poseen únicamente el significado *operador* del signo igual y los que poseen el significado *expresión de una acción* radica en: el rechazo o la aceptación por parte del alumno de sentencias e igualdades de acción con las operaciones en el miembro derecho y la consideración de las igualdades o sentencias únicamente de izquierda a derecha o, también, de derecha a izquierda.

La Figura 9-20 muestra algunas respuestas de MAG a igualdades abiertas de no-acción que evidencian el uso de este significado. En ambas, el alumno ignora el término más a la izquierda del signo igual y resuelve la igualdad abierta de tres términos resultante.


12 - 4 = 13 - $\boxed{9}$

porque si a trece le resta nueve dan 4

9 – 4 = $\boxed{7}$ - 3

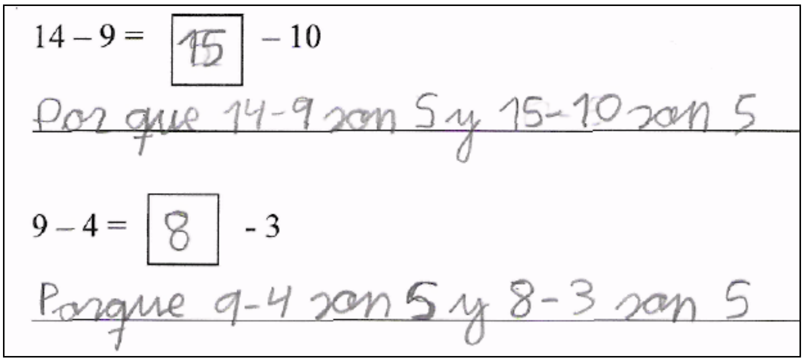
si a 7 - 3 me dan 4

Figura 9-20: Extracto de las respuestas de MAG a igualdades de la sesión 2

[81] Como se ha detallado en el Capítulo 4, el significado *expresión de una acción* es una extensión del significado *operador.*

Los diversos ejemplos del uso inadecuado de los significados del signo igual *operador* y *expresión de una acción*, muestran intentos de los alumnos por dar sentido a las igualdades y sentencias propuestas con su limitada comprensión del signo igual, no adecuada para igualdades y sentencias que expresan *equivalencia numérica*.

EQUIVALENCIA NUMÉRICA. El significado *equivalencia numérica* es puesto de manifiesto por los alumnos al resolver correctamente (pudiendo cometer algún error de cálculo) igualdades y sentencias numéricas de no–acción (ej., la respuesta 12 en la igualdad 12 + 7 = 7 + □). La Figura 9-21 y la Figura 9-22 muestran algunas respuestas de EF y JQ que evidencian el uso de este significado. Las explicaciones de EF describen como ha hallado la respuesta a la igualdad; las de JQ, en cambio, justifican la veracidad de su respuesta.

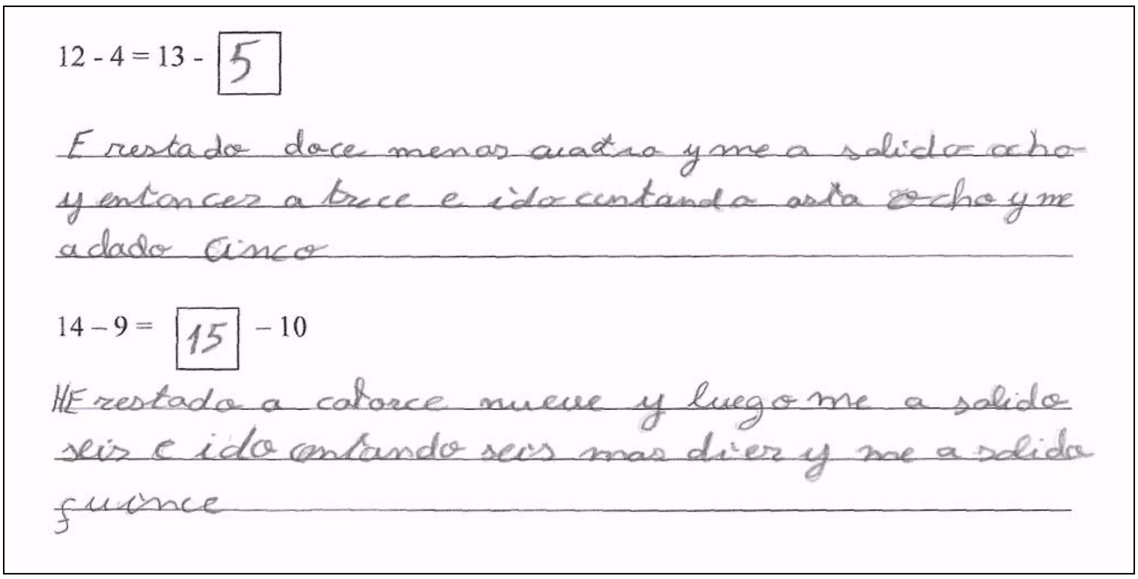

14 – 9 = $\boxed{15}$ – 10

Por que 14-9 son 5 y 15-10 son 5

9 – 4 = $\boxed{8}$ - 3

Porque 9-4 son 5 y 8-3 son 5

Figura 9-21: Extracto de las respuestas de JQ a las igualdades abiertas de la sesión 2.


12 - 4 = 13 - $\boxed{5}$

E restado doce menos cuatro y me a salido ocho y entonces a trece e ido contando asta ocho y me a dado cinco

14 – 9 = $\boxed{15}$ – 10

HE restado a catorce nueve y luego me a salido seis e ido contando seis mas diez y me a salido quince

Figura 9-22: Extracto de las respuestas de EF a las igualdades verdaderas y falsas de la sesión 4

SIMILITUD NUMÉRICA. El significado *similitud numérica* es manifestado por los alumnos al abordar sentencias de acción y no-acción en las que se repiten términos o aparecen expresiones similares, en algún sentido. En dichos casos, este significado es utilizado al justificar la veracidad o falsedad de la sentencia a partir de la mismidad de los términos o el parecido de las expresiones involucradas, no dando importancia a las operaciones que aparecen, a la posición de los términos respecto del signo igual o a la posición relativa de éstos. Este significado, que se basa en aspectos estéticos de la sentencia o igualdad, es identificado a partir del análisis de las explicaciones de los alumnos, no siendo identificable, en principio, a partir de las respuestas numéricas aisladas dadas a las igualdades abiertas.

Dos ejemplos que evidencian el uso de este significado del signo igual son las explicaciones de MB y RL a la sentencia $122+35-35=122$ durante la sesión 4: "*Verdadera porque ciento veintidós es igual a ciento veintidós y treinta y cinco es igual a treinta y cinco*" y "*Verdadera porque los números y las cantidades son iguales*". Estas explicaciones sugieren que los alumnos consideran que dicha sentencia es verdadera porque contiene términos que se repiten, no teniendo en cuenta, aparentemente, las operaciones que los relacionan ni su posición respecto del signo igual.

Otro ejemplo que sugiere el uso de este significado tiene lugar en la sesión 2. MR manifiesta en todas salvo en una de las igualdades el significado del signo igual *expresión de una acción* y, sin embargo, acepta un significado no operacional de este signo en la igualdad 17 - $\square$ $=18-8$. Aunque su explicación es muy imprecisa, sugiere haber apreciado cierto parecido entre las expresiones, que le ha conducido a la obtención de la respuesta correcta (ver Figura 9-23).

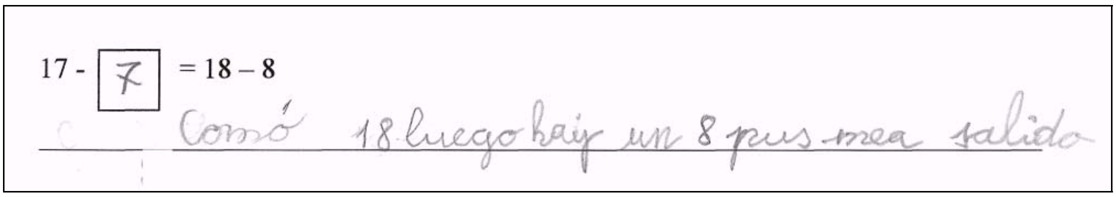


Figura 9-23: Extracto de las respuestas de MR a las igualdades abiertas de la sesión 2.

En ocasiones, al analizar las respuestas de los alumnos a igualdades y sentencias basadas en una propiedad aritmética que implica la repetición de términos, tal como la propiedad conmutativa de la suma o la complementariedad de la suma y la resta, es difícil distinguir si el alumno está haciendo uso del significado *equivalencia numérica* o del significado *similitud numérica*. Así ocurre, por ejemplo, en las siguientes explicaciones: "[$18-7=7-18$] *Verdadera porque dieciocho menos 7 y el otro es lo mismo y si es lo mismo da igual*", "[$75+23=23+75$] *Verdadera porque son iguales y entonces dan lo mismo*". En el análisis de los datos, se ha optado por determinar el significado puesto de manifiesto en esos casos, a partir del análisis del significado evidenciado por las demás respuestas aportadas por el alumno en esa actividad. La distinción entre estos dos significados radica en si el alumno considera o no las operaciones involucradas, la posición relativa de los términos y la posición de éstos respecto del signo igual.

Construcción de sentencias verdaderas y falsas

A continuación, mostramos manifestaciones de los significados *operador*, *equivalencia numérica* y *similitud numérica* en las sentencias construidas por los alumnos durante la segunda sesión o propuestas como correcciones a las sentencias de la sesiones 3, 4 y 6 que consideraban falsas. En la construcción de sentencias ningún alumno pone de manifiesto el significado *expresión de una acción* del signo igual. No es propuesta ninguna sentencia de acción con la operación u operaciones en el miembro derecho.

Los alumnos manifiestan el uso del significado *operador* cuando construyen o proponen sentencias de acción con las operaciones en el miembro izquierdo. Por ejemplo, las sentencias[82] $10+4-10=50^F$, $100+1000=1100^V$, $1000+1000=1^F$ y $10+20=30^V$ manifiestan el uso de este significado. Incluso en sentencias que incluyen operaciones en ambos miembros algunos alumnos, en casos puntuales, ponen de manifiesto este significado (ej., $5+5=10-5^V$).

En otros casos, los alumnos construyen sentencias de no-acción, evidenciando el uso del significado *equivalencia numérica*. Por ejemplo, construyen las siguientes sentencias: $12+4=13+3^V$, $50+40=100-10^V$, $16-13=12+14^F$ $340=340^V$ y $19+16=20-3^F$.

[82] Los superíndices que acompañan a cada sentencia precisan si ésta fue propuesta por el alumno como sentencia verdadera o como sentencia falsa.

Otras sentencias ponen de manifiesto el uso del significado del signo igual *similitud numérica* al presentar términos repetidos en ambos miembros y no dar importancia a la operación que los relaciona: $2+11=11-2^V$, $9+11=11-9^V$ y $8-1=1+8^V$.

En ocasiones, al igual que ocurre en la resolución de las igualdades y sentencias, las sentencias propuestas por los alumnos no permiten apreciar si el significado del signo igual, del que están haciendo uso, es el significado *equivalencia numérica* o *similitud numérica*. Así ocurre, por ejemplo, en las sentencias $20+30=30+20^V$, $19-9=19-9^V$ y $15-15=0-0^V$, las cuales contienen en ambos miembros términos iguales o expresiones de estructura similar. En estos casos, se analizan los significados del signo igual que dicho alumno pone de manifiesto en las demás sentencias construidas en dicha sesión, para poder determinar si interpreta las sentencias como expresiones de una *equivalencia numérica* o únicamente da importancia a la mismidad o parecido de los términos y de las expresiones involucradas, utilizando, por tanto, el significado *similitud numérica.*

9.11 Comprensión del signo igual manifestada

Mediante los significados del signo igual *operador*, *expresión de una acción*, *equivalencia numérica* y *similitud numérica*, los alumnos dan sentido a las diversas igualdades y sentencias propuestas. En ocasiones, los significados de los que disponen les permiten comprender adecuadamente los distintos tipos de igualdades y sentencias que se les presentan, en otros casos, les conducen a respuestas matemáticamente inadecuadas.

En el análisis de los datos se observa que los alumnos que manifiestan el significado *equivalencia numérica* del signo igual resuelven correctamente (salvo posibles errores de cálculo) las igualdades y sentencias de acción que contienen las operaciones en el miembro izquierdo. No es éste el caso, necesariamente, en la resolución de igualdades de acción con las operaciones en el miembro derecho. En los datos procedentes de la sesión 1, en la que los alumnos resuelven una igualdad de acción con las operaciones en el miembro derecho, $\square = 25 - 12$, se observa que dos alumnas no dan respuesta a dicha igualdad, pese a resolver correctamente algunas de las sentencias de no-acción y, por tanto, dar muestras del significado *equivalencia numérica*.

Esta observación sugiere que el desarrollo del significado del signo *equivalencia numérica* no engloba, ni implica, el desarrollo del significado del signo igual *expresión de una acción*. Tampoco este significado es un paso necesario en el desarrollo de comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica. En nuestro primer estudio Molina (2005), observamos que los alumnos tendían a aceptar este significado previamente a desarrollar el significado *equivalencia numérica*. No obstante, aquí se aprecia que, si bien es posible que sea más fácilmente adoptado o desarrollado, por los alumnos, que el significado *equivalencia numérica*[83], éste último significado no implica la comprensión y aceptación de este tipo de sentencias e igualdades de acción.

Teóricamente el significado *equivalencia numérica* implica la comprensión "adecuada" del signo igual en todo tipo de sentencias numéricas y, de este modo, es el único significado del signo igual necesario para dar sentido a todos los tipos de igualdades y sentencias consideradas en nuestra intervención en el aula. Sin embargo, a vista de los datos, conjeturamos que los alumnos disponen de varios significados del signo igual y utilizan, en cada momento, el que les ayuda a dar sentido a la igualdad o sentencia en cuestión. Además de los hechos señalados en el párrafo previo, esta conjetura es sustentada por la observación de que algunos alumnos utilizan un significado operacional del signo igual al encontrar igualdades o sentencias que les ocasionan alguna dificultad, pese a haber puesto de manifiesto el significado *equivalencia numérica.* No obstante, la imposibilidad de distinguir entre el uso de un significado operacional o el significado *equivalencia numérica*, en sentencias e igualdades de acción, a partir de las respuestas de los alumnos (ej., "[$27-14+14=26$] *Que es verdadera* [...] *porque veintisiete menos catorce me dan doce, y doce más catorce me dan veintiséis"),* no permite confirmar esta conjetura.

En la Tabla 9-33 (ver sentencias 17 – 9 = ☐ -10 y 9 – 4 = ☐ -3) y en el siguiente extracto de la entrevista a NM, sobre la resolución de la sentencia *11 + 7 = 10 + 8* en la sesión 6, se observa este uso puntual de un significado operacional del signo igual cuando los alumnos encuentran dificultades en la resolución de una igualdad o sentencia.

83 Pues así se observa en Molina (2005) y en este estudio sólo dos alumnos manifiestan dificultades en las sentencias e igualdades de acción con operaciones en el miembro derecho.

Tabla 9-33: Respuestas de NM a las igualdades abiertas de la sesión 2.

12 – 4 = 13 - □	**14 – 9 = □ - 10**	**9 – 4 = □ - 3**	**17 - □ = 18 – 8**	**□ - 6 = 15 – 7**
5 12 – 4 = 13 – 5	04 14 – 9 = 04 – 10	13 9 – 4 = 13	**7** 17 – 7 = 18 – 8	NR

NM: *Once más siete, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, diecisiete. Dieciocho te da.*
I: *Muy bien.*
NM: *Igual, ahora…Diez más ocho, diecisiete, no, ¿cuánto he dicho?*
I: *Tú has dicho dieciocho aquí*
NM: *Dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho. A mi me da veintiocho sumando... diez más...no, ahora me he hecho un lío,*
I: *Tranquila no pasa nada.*
NM: *Dieciocho…*
I: *Tú has hecho once más siete y te ha dado dieciocho*
NM: *Dieciocho. Ahora más diez, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho,...ahora más ocho, veintiocho, veintinueve, treinta, treinta y uno, treinta y dos, treinta y tres, treinta y cuatro, treinta y cinco y treinta y seis, me da.*
I: *Entonces lo que has hecho es sumar todos los números juntos ¿no? y te da treinta y seis. Vale ¿y eso te dice si es verdadera o falsa?*
NM: *A mi me dice que es falsa*
I: *¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?*
NM: *Porque si once más siete te da dieciocho, no te da diez*
I: *Ah vale, tú dices que once más siete no da diez de aquí ¿Y este ocho de aquí? ¿Crees que hay que sumárselo al diez? ¿O no hay que sumárselo?... ¿No? ¿Qué harías con él?... ¿Lo dejarías ahí?*
NM*: Sí*

En este extracto se observa como NM se muestra algo confundida ("*me he hecho un lío*"). Aunque inicialmente parece proceder a calcular el valor numérico de ambos miembros de la sentencia de forma separada, como hace previamente en la resolución de la sentencia $8+6=4+4+6$ [84], su falta de fluidez en el cálculo parece ser la causa de una cierta confusión y de un cambio de estrategia, pasando a operar conjuntamente todos los términos de la sentencia. Sin embargo, este cálculo no le conduce a deducir la falsedad o veracidad de la sentencia, recurriendo finalmente a ignorar uno de los términos de la sentencia y hacer uso del significado *operador* del signo igual.

[84] En dicha sentencia la alumna da la siguiente explicación: *"Ocho más seis…ocho más seis nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince y dieciséis. Ocho más seis me da dieciséis, y cuatro más cuatro...me da ocho, más seis...me da otro dieciséis* [**I:** Entonces te da los dos lados dieciséis ¿No? ¿Y por eso qué es? ¿Verdadera o falsa?] *Son… iguales".*

Partiendo de esta conjetura, cuando un alumno resuelve o construye correctamente una sentencia o igualdad de acción (pudiendo cometer algún error de cálculo) diremos que ha puesto de manifiesto el significado *expresión de una acción* o el significado *operador,* según el tipo de igualdad o sentencia, independientemente de que en otras sentencias o igualdades ponga o no de manifiesto el significado *equivalencia numérica.*

Niveles de comprensión

Partiendo de estas observaciones y a partir de la identificación del significado puesto de manifiesto, por cada alumno, en cada igualdad o sentencia, se han identificado tres niveles en la comprensión del signo igual manifestada (ver Tabla 9-34): comprensión operacional, comprensión no estable y comprensión avanzada.

Tabla 9-34: Relación entre los niveles de comprensión y los significados del signo igual puestos de manifiesto en cada tipo de sentencia

<table>
<tr><th rowspan="3">Niveles de comprensión del signo igual</th><th colspan="3">Significado del signo igual en cada tipo de sentencia[1]</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Sentencias e igualdades de no-acción</th><th colspan="2">Sentencias e igualdades de acción</th></tr>
<tr><th>Operaciones en el miembro derecho</th><th>Operaciones en el miembro izquierdo</th></tr>
<tr><td>3º Comprensión avanzada del signo igual</td><td>EN</td><td>EA</td><td>O</td></tr>
<tr><td>2º Comprensión no estable del signo igual</td><td>EN y EA u O[2]</td><td>EA u O[2]</td><td>O</td></tr>
<tr><td>1º Comprensión operacional del signo igual</td><td>EA y/u O[2]</td><td>EA u O[2]</td><td>O</td></tr>
<tr><td>Casos dudosos</td><td colspan="3">Según el caso</td></tr>
</table>

EN= *equivalencia numérica*; EA= *expresión de una acción*; O= *operador*

[1] En todos los tipos de sentencias, alumnos de diferentes niveles de comprensión evidencian ocasionalmente el significado *similitud numérica*

[2] También es posible que el alumno no responda a este tipo de sentencias o igualdades

3º Nivel. *Comprensión avanzada del signo igual:* El alumno da muestras del uso del significado *equivalencia numérica* en la resolución de las igualdades y sentencias de no-acción, del significado *operador* en las igualdades y/o sentencias de acción con las operaciones en el miembro izquierdo, y del significado del signo igual *expresión de una acción* en las igualdades de acción con las operaciones en el miembro derecho. Por lo tanto, responde correctamente (pudiendo cometer algún error de cálculo) las igualdades y sentencias propuestas en la actividad.

Por ejemplo, clasificamos la comprensión del signo igual de JQ en la sesión 1 como avanzada porque resuelve correctamente todas las igualdades de la actividad, entre las que se encuentran igualdades de acción con las operaciones en el miembro derecho e igualdades de no-acción (ver Tabla 9-35).

Tabla 9-35: Respuestas de JQ a las igualdades abiertas de la sesión 1

8 + 4 = □ + 5	□= 25-12	14 + □ = 13 + 4	12 + 7 = 7 +□	13 – 7 = □ - 6	*□ + 4 = 5 + 7*
7	*13*	*3*	*12*	*12*	*8*

2º Nivel. *Comprensión no estable del signo igual:* El alumno manifiesta el significado *equivalencia numérica* en alguna de las igualdades y/o sentencias de no-acción pero en otras hace uso del significado *operador* o *expresión de una acción*. En el caso de igualdades y/o sentencias de acción manifiesta también uno de estos dos significados operacionales del signo igual. En este caso distinguimos en función del significado operacional del signo igual manifestado: *operador* (**O/E**) y *expresión de una acción* **(A/E).** Los alumnos que manifiestan este nivel de comprensión resuelven correctamente algunas de las sentencias o igualdades de no-acción, aunque no todas.

Por ejemplo, la comprensión del signo igual de CA durante la sesión 2 se considera no estable ya que da muestras del uso del significado del signo igual *expresión de una acción* en al menos dos igualdades de no-acción (dando como respuesta 17 a las igualdades 8 + 4 = □ + 5 y 14 + □ = 13 + 4) y del significado *equivalencia numérica* del signo igual en al menos una igualdad de no-acción (dando como respuesta 12 a la igualdad 13 – 7 = □ – 6). Sus otras respuestas a igualdades de no–acción pueden ser debidas a posibles errores de cálculo haciendo uso del significado del signo igual *equivalencia numérica* (10 en las igualdades 12 + 7 = 7 + □ y □ + 4 = 5 + 7).

1º Nivel. *Comprensión operacional del signo igual:* Cuando el alumno manifiesta únicamente los significados del signo igual *operador* y/o *expresión de una acción*, interpretando el signo igual como un símbolo operacional en todas las igualdades y sentencias consideradas. En este caso no resuelve correctamente ninguna sentencia o igualdad de no-acción. Para cada alumno se indica cual de estos dos significados operacionales manifiesta en la mayoría de las igualdades y sentencias.

Por ejemplo, la comprensión de MA durante la sesión 4 es clasificada como operacional ya que este alumno muestra el significado *operador* del signo igual en todas las sentencias de no–acción, exigiendo que uno de los términos del miembro derecho, coincida con el valor numérico del miembro izquierdo (ej., "[$75+23=23+75$] *Falsa porque 75 + 23 no es 75 ni 23"),* con la excepción de la última sentencia, $257-34=257-30-4$, en la que no se ha podido precisar el significado del signo igual empleado ("*Verdadera porque 257 – 34 =257 – 30 – 40").* Además, muestra este significado en las sentencias de acción consideradas en esta sesión, aunque en dichos caso el significado del signo igual *operador* le permite interpretar de forma adecuada las sentencias en cuestión (ej., "[$75-14=340$] *Falsa porque 75 menos 14 no son 340").*

En algunos casos las respuestas de los alumnos no permiten precisar el significado del signo igual que está utilizando. Nos referiremos a estos casos como dudosos. Por ejemplo, las respuestas de CY a las sentencias de la sesión 4 no permiten identificar el significado del signo igual del que está haciendo uso al consistir, en la mayoría de los casos, en una "lectura" de la sentencia, ya sea en positivo o en negativo. Dicha "lectura" es dada como justificación tanto de la veracidad como de la falsedad de las sentencias, como se puede observar en las siguientes explicaciones: *"*[$122+35-35=122$] *Falsa porque 122 más 35 menos 35 no da 122",* y "[$16+14-14=36$] *Verdadera porque 16 + 14 menos 14 da 36".*

Similitud Numérica

Como se puede observar, ninguno de estos niveles hace referencia al uso del significado *similitud numérica*. Este significado es manifestado por los alumnos de forma puntual, poniendo de manifiesto comprensión propia de una de dichas etapas. Por este motivo, lo señalamos de manera expresa cuando es manifestado.

El significado *similitud numérica* es evidenciado por siete alumnos en alguna de las seis sesiones (ver Tabla 9-36) ya sea de forma puntual o de forma más estable, tanto en sentencias de acción como en sentencias de no-acción.

Las primeras manifestaciones de los alumnos evidenciando el uso de este significado, concretamente de MR y CY, nos hicieron suponer que podía ser, en cierto sentido, un paso hacia el desarrollo de una comprensión avanzada del signo igual, al aceptarse sentencias que no expresaban una acción sino una relación, aunque no de equivalencia numérica. Sin embargo, el análisis de las sucesivas manifestaciones muestra que se manifiesta en muy diversas ocasiones, no estando relacionado con un nivel concreto de compresión del signo igual. Cuatro alumnos lo manifiestan junto al significado *equivalencia numérica*. Otro alumno junto a un significado operacional del signo igual. Los demás casos corresponden a sesiones en las que los alumnos no muestran una comprensión estable del signo igual ó únicamente dan muestras de este significado del signo igual (ver tabla 9-35 en el próximo apartado).

Merecen atención las sentencias construidas por MR y CY durante la sesión 2 y las respuestas de estas dos alumnas y de CA, durante las sesiones 4 y 6, que evidencian este significado. Estos tres alumnos exigen la mismidad de términos para la veracidad de sentencias de acción y no-acción, no dando importancia a la posición relativa de los términos, a las operaciones que los relacionan o, incluso, a su posición respecto del signo igual.

Es posible que el tipo de intervención realizada en el aula, en la que se ha favorecido el uso de pensamiento relacional y se ha trabajado con sentencias basadas en propiedades aritméticas, haya propiciado el desarrollo de este significado del signo igual y sea la causa de que no haya sido identificado en otros estudios. No obstante, evidencia la asunción de algunos alumnos de que las sentencias que incluyen términos repetidos son verdaderas; una creencia de interés a abordar en el aula. En nuestro estudio previo ya observamos que algunas explicaciones de los alumnos sobre la resolución de igualdades y sentencias, que mostraban uso de pensamiento relacional, podían estar basadas únicamente en los números y no en las operaciones que intervienen.

Hacer uso de este significado del signo igual puede conducir a los alumnos a afirmar la veracidad de sentencias de la forma $a+b-b=a$, $a+b=b-a$, $a+b=b+a$, $a-b=b-a$ y $a-b+b=a$, únicamente por la observación de la repetición de términos. Este tipo de sentencias pueden ser utilizadas en el aula para hacer explícitas algunas de las convenciones de la escritura e interpretación de las igualdades y sentencias que, en particular, permiten diferenciar entre el significado de las sentencias anteriores. Esta reflexión nos permite alertar a los docentes de la necesidad de conocer dónde están centrando, los alumnos, su atención y si están obviando elementos o características de la sentencia, o de la igualdad, que son importantes.

9.12 Evolución de la comprensión del signo igual

En este apartado describimos y analizamos la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos a lo largo de las seis intervenciones realizadas en el aula. En la Tabla 9-36 se detalla la comprensión del signo igual mostrada por cada alumno en cada una de las sesiones, así como las muestras que dan los alumnos del significado *similitud numérica*. En la Tabla 9-38 se indica, en líneas generales, los diferentes modos en que evoluciona dicha comprensión, los cuales procedemos a comentar brevemente (ver anexo F para una justificación detallada de la comprensión del signo igual, de cada alumno, en cada sesión).

A partir del análisis de la Tabla 9-36, se observa que catorce alumnos, **FM, RB, RL, CL, MT, JM, DL, MB, EF, CH, JQ, MP, VS y EV**[85], muestran una comprensión avanzada del signo igual de manera estable a lo largo de las seis sesiones, aunque RB muestra ciertas dificultades en la construcción de sentencias verdaderas y falsas, al tener que hacer un uso más activo del signo igual, no llegando a construir ninguna sentencia de no-acción verdadera. De estos alumnos, tres (FM, RL, JM) dan muestras puntuales, en la sesión 4, del significado *similitud numérica*.

Otros seis alumnos, CA, FB, MAG, MR, BI y NM, **dan muestras de una comprensión avanzada del signo igual en alguna de las sesiones, pero no de forma estable, variando el grado o el momento en el que muestran dicha inestabilidad en su comprensión. En el caso de FB y MAG dicha inestabilidad tiene lugar únicamente en la segunda sesión. Ambos muestran en esta sesión una comprensión operacional de este signo, aunque en el caso de MAG únicamente se manifiesta durante la primera parte de la segunda sesión. Tras la discusión de las igualdades abiertas consideradas, el alumno construye sentencias de no-acción verdaderas y falsas, sin dificultad (ver** Figura 9-24).

[85] Al describir y discutir la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos, se resaltan en negrita los nombres de los alumnos la primera vez que son mencionados, cuando se describe de forma general la comprensión manifestada.

Tabla 9-36: Evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos a lo largo de las seis sesiones

	S 1 N=26	**S 2 N=21**		**S 3 N=22**	**S 4 N=25**	**S 5[1] N=13**	**S 6 N=24**
		Parte I	**Parte II**				
FB							
FM					SN		
RB			D				
MAG							
RL					SN		
MA							
CA							SN
CL							
RT							
MT							
JM						¿SN?	
DL							
MB				¿EN ó SN?[2]	SN		
EF							
CH							
MR		SN	SN/ D		SN		
JQ							
NM							
JA	¿EN?				NR		NR
MG							
BR				NR			
MP							
VS							
CY	D	D	SN		D		SN
BI							
EV							

= comprensión operacional ; = comprensión avanzada; = comprensión no estable

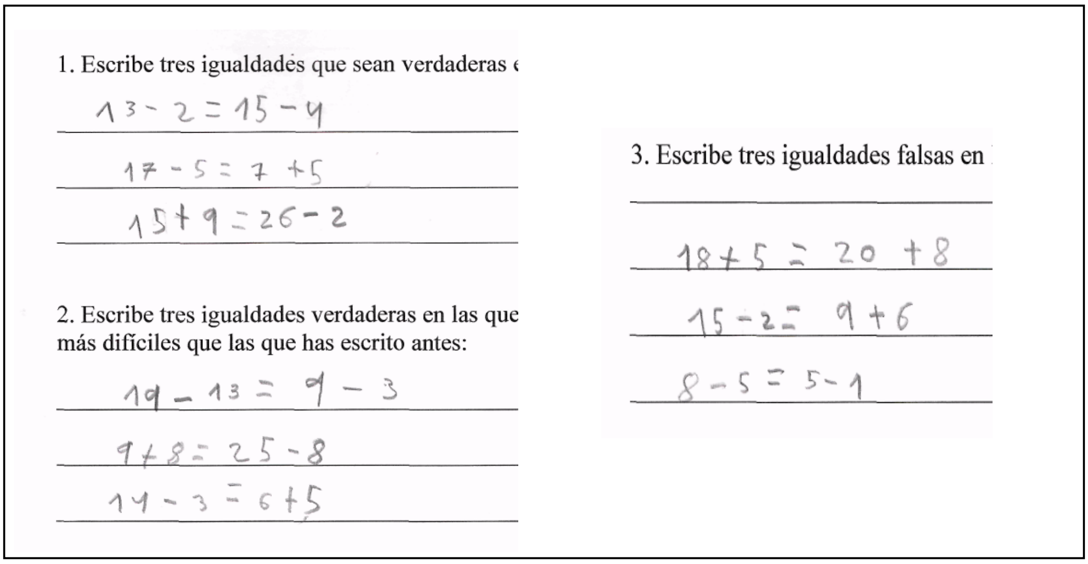
= no se puede precisar el significado por falta de información

= no presente en el aula y, en el caso de la sesión 5, no entrevistado

SN = *similitud numérica*; EN= equivalencia numérica; D = comprensión dudosa (no se puede determinar); NR = no responde o no participa

[1]En la sesión 5 sólo se consideran los alumnos entrevistados

[2]La única participación de MB en esta discusión no permite identificar cual de estos dos significados está utilizando



1. Escribe tres igualdades que sean verdaderas

13 - 2 = 15 - 4

17 - 5 = 7 + 5

15 + 9 = 26 - 2

2. Escribe tres igualdades verdaderas en las que más difíciles que las que has escrito antes:

19 - 13 = 9 - 3

9 + 8 = 25 - 8

14 - 3 = 6 + 5

3. Escribe tres igualdades falsas en

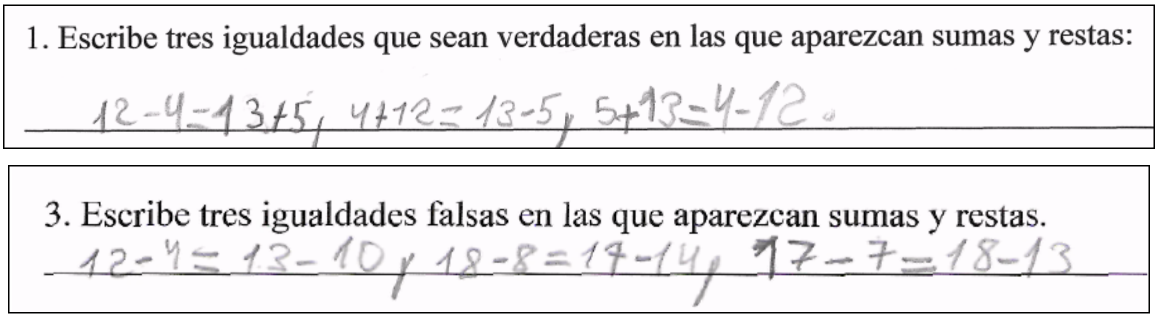
18 + 5 = 20 + 8

15 - 2 = 9 + 6

8 - 5 = 5 - 1

Figura 9-24: Sentencias verdaderas y falsas construidas por MAG en la segunda parte de la sesión 2

MR y BI muestran cierta inestabilidad en su comprensión del signo igual en algunas de las sesiones intermedias. MR muestra una comprensión operacional del signo igual durante la sesión 2, en la que construye sentencias verdaderas y falsas dando importancia únicamente a los términos y no al orden de éstos (ver Figura 9-25)[86]. Además, en diferentes sesiones da muestras del significado *similitud numérica* ya sea puntualmente (sesión 2) o de manera más estable (sesión 4).



1. Escribe tres igualdades que sean verdaderas en las que aparezcan sumas y restas:

12 - 4 = 13 + 5, 4 + 12 = 13 - 5, 5 + 13 = 4 - 12.

3. Escribe tres igualdades falsas en las que aparezcan sumas y restas.

12 - 4 = 13 - 10, 18 - 8 = 17 - 14, 17 - 7 = 18 - 13

Figura 9-25: Sentencias verdaderas y falsas construidas por MR en la sesión 2

En el caso de BI, no se puede precisar su comprensión durante las sesiones 2 y 3. En la primera de ellas parece copiar las respuestas de una compañera, mostrando cierta comprensión operacional, y en la segunda no participa en la discusión. Es destacable observar que esta alumna no construye ninguna sentencia de no-acción verdadera

[86] Se recuerda que, al presentar la actividad de construcción de sentencias verdaderas y falsas, se propuso como sentencia verdadera 12 – 4 = 13 -5 y como sentencia falsa 12 – 4 = 13 – 10.

durante la segunda parte de la sesión 2 pero sí sentencias de no-acción falsas, aunque, en ese caso, no podemos identificar el significado del signo igual del que está haciendo uso. Dichas construcciones muestran al menos un intento de construir sentencias con operaciones en ambos miembros) (ver Figura 9-26).

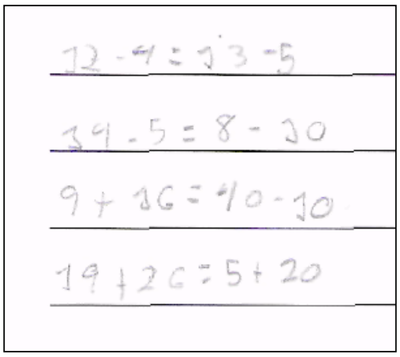


Figura 9-26: Sentencias falsas de BI construidas en la sesión 2

En el caso de CA y MG se detecta cierta inestabilidad inicial y final. Conjeturamos que las actividades realizadas favorecieron el desarrollo de su comprensión aunque no permitieron que alcanzaran una comprensión avanzada del signo igual afianzada que perdurará hasta el siguiente curso académico. CA muestra una comprensión no estable del signo igual (A/E) en la primera sesión, y hace uso del significado *similitud numérica* en la mayoría de las sentencias de la sesión 6. En las demás sesiones muestra una comprensión avanzada del signo igual (ver Tabla 9-37).

Tabla 9-37: Respuestas de CA a las sentencias verdaderas y falsas de la sesión 6

$18-7=7-18$	$75-14=340$	$17-12=16-11$	$22+35-35=122$	$6+4+18=10+18$
"Verdadera porque el 7 y el 7 son iguales y el 18 y el 18 son iguales"	*"Falsa porque 75 y el 15 no son iguales"* C: *"100 + 240 = 340"* (Calcula mediante algoritmos 75 – 14 = 61 y 75 + 15 = 90 100 + 240 = 340)	*"Falsa porque 17-12 no son 16-11 no son 16"* C: *"10+1"* (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05)	*"Verdadera"*	*"Verdadera"*
$75+23=23+75$	$7+15=8+15$	$53+41=54+40$	$16+14-14=36$	$257-34=257-30-4$
"Verdadera porque 77 + 23 es igual que 23 + 75"	*"Falsa porque 7+15 no es = a 8+15"* C: *"7 + 15 = 15 + 7"*	*"Falsa porque 53 + 41 no es igual a 54 + 40"* C: *"40 + 54 = 54 + 40"*	*"Falsa porque 16 +14 = es igual a 30-14 son 24"* C: *30+6* (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30 y 30 – 14 = 24)	*"Verdadera porque 257-34 =257-30-4"*

Entre paréntesis se describen las anotaciones realizadas aparte relativas a la resolución de cada una de las sentencias. "C:" va seguido de la corrección propuesta por el alumno a dicha sentencia.

MG muestra una comprensión operacional en la primera y última sesión, y en la única sesión intermedia en la que interviene, da evidencias de una comprensión avanzada del signo igual aunque algunas de sus explicaciones son algo confusas. Este alumno probablemente habría requerido de una trabajo más continuado para desarrollar dicha comprensión incipiente del significado del signo igual *equivalencia numérica*.

En el caso de los alumnos **BR y RT**, se detecta un progreso en su comprensión del signo igual desde una comprensión operacional o no estable a una comprensión avanzada del signo igual. BR muestra inicialmente cierta comprensión operacional del signo igual, no dando muestras de una comprensión avanzada del signo igual hasta la cuarta sesión. No obstante, desde las primeras sesiones resuelve correctamente algunas igualdades de no-acción. Es destacable que durante la sesión 2 sólo construye sentencias de acción, y en ninguna otra sesión propone como corrección una sentencia de no-acción. Por su parte, RT evidencia en la primera sesión una comprensión operacional del signo igual pero en las demás sesiones en las que participa (sesión 3 y 6) da muestras de una comprensión avanzada del signo igual. Probablemente el desarrollo de la comprensión de esta alumna se vio favorecido por su mayor fluidez en el cálculo y por la discusión realizada en la sesión 3. En dicha discusión no participó hasta la séptima sentencia considerada, pero en dicho caso puso de manifiesto el significado *equivalencia numérica*.

En el caso de **MA** ocurre al contrario que en los casos anteriores. Este alumno muestra una comprensión avanzada del signo igual en las primeras tres sesiones, resolviendo correctamente igualdades numéricas abiertas y construyendo sentencias verdaderas y falsas de no-acción. En cambio, tras participar durante la discusión de la sesión 3 sólo en sentencias de acción, muestra una comprensión operacional del signo igual en la cuarta sesión y una comprensión no estable en la sexta sesión, dando una única muestra del uso del significado del signo igual *equivalencia numérica*.

NM muestra una evolución irregular en su comprensión del signo igual, alternando una comprensión no estable del signo igual con una comprensión operacional, pese a mostrar en la primera sesión una adecuada comprensión del signo igual evidenciando puntualmente una comprensión operacional de este signo. Esta inestabilidad en su comprensión se percibe especialmente en la entrevista de la sesión 5 en la cual muestra reconocer la necesidad de que los miembros de una sentencia de no-acción tengan el mismo valor numérico, pero interpreta operacionalmente el signo igual cuando encuentra dificultades debidas, concretamente, a la mayor magnitud de los números. Este comportamiento se detecta también en las sesiones 1, 2 y 4, en las cuales la alumna manifiesta una comprensión operacional del signo igual cuando encuentra dificultades puntuales debidas a las operaciones que componen las igualdades y sentencias o a la posición de la cantidad desconocida (siendo la posición c en la que evidencia más dificultades). Además, NM muestra requerir más tiempo que la mayoría de sus compañeros en la resolución de las sentencias e igualdades de las sesiones 2, 4 y 6, dejando algunas sin resolver.

Los dos alumnos restantes son **JA y CY**. En el caso de JA se dispone de muy pocos datos para hacer juicio alguno sobre la evolución de su comprensión del signo igual. CY no muestra una comprensión estable del significado del signo igual en ninguna de las sesiones, aunque en casos puntuales resuelve correctamente alguna igualdad o sentencia de no-acción. En general, es difícil interpretar sus respuestas ya sea por errores de cálculo o por la brevedad o falta de detalle de sus explicaciones.

En resumen, como se recoge en la Tabla 9-38, se observa que catorce alumnos muestran una comprensión avanzada del signo igual de manera estable a lo largo de las seis sesiones, otros seis lo hacen de forma intermitente mostrando cierta inestabilidad de su comprensión puntualmente en una de las sesiones, en sesiones intermedias o en las primeras y últimas sesiones, según el caso. De los demás alumnos, dos muestran progreso en su comprensión partiendo de una comprensión operacional o no estable en la primera sesión y alcanzando una comprensión avanzada del signo igual en las últimas sesiones. Otro alumno, en cambio, muestra retroceso en su comprensión del signo igual. Una alumna muestra una evolución irregular a lo largo de las seis sesiones dando muestras tanto de una comprensión avanzada del signo igual como de una comprensión operacional y una comprensión no estable, no detectándose un progreso ni un retroceso claro en dicha evolución. Con respeto a la evolución de la comprensión de los dos alumnos restantes no se puede hacer ninguna afirmación por motivos diferentes, escasa participación y ambigüedad de sus explicaciones.

Tabla 9-38: Líneas generales de la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos.

Comprensión del SI a lo largo de las seis sesiones	Alumnos
Comprensión avanzada estable	FM, RB, RL, CL, MT, JM, DL, MB, EF, CH, JQ, MP, VS y EV
Comprensión avanzada en todas salvo una de las sesiones	FB y MAG
Comprensión avanzada en las primeras y últimas sesiones	MR y BI
Comprensión avanzada en las sesiones intermedias	CA y ¿MG[1]?
Progresa hacia una comprensión avanzada	BR y RT
Retrocede en su comprensión	MA
Irregular	NM
No se puede precisar	CY y JA[2]

[1]Este alumno participa únicamente en una de las sesiones intermedias.
[2]Este alumno participa únicamente en la primera sesión.
N = 26.

Esta descripción de la evolución de la comprensión del signo igual manifestada, permite observar que casi la mitad de los alumnos dieron muestras de una comprensión avanzada del signo igual en todas las sesiones. Además, se observa una constante variabilidad en la comprensión del signo igual de los alumnos, aproximadamente de cuatro o cinco personas de una sesión a otra.

En general se observa que, aproximadamente, 20 de los 26 alumnos ponen de manifiesto una comprensión avanzada del signo igual en las sesiones 1, 4 y 6, siendo menor este número en las sesiones 2 y 3 (ver Tabla 9-39). En la sesión 3 esta menor evidencia de una comprensión avanzada se considera consecuencia de no haberse podido precisar el nivel de comprensión de ocho alumnos debido a su escasa o nula participación en la sesión. En la sesión 2, en cambio, parece consecuencia del mayor número de dificultades que encuentran los alumnos en las sentencias de resta, lo cual les induce a hacer uso de los significados operacionales del signo igual.

Tabla 9-39: Numero de alumnos que manifiestan cada nivel de comprensión en cada sesión

	S 1 N=26	**S 2 N=21**		**S 3 N=22**	**S 4 N=25**	**S 5 N=13**	**S 6 N=24**
Comprensión avanzada	20	14	14	14	20	12	19
Comprensión no estable	2	2	0	0	1	1	1
Comprensión operacional	2	3	4	0	1	0	2
Casos dudosos o no clasificables	2	2	3	8	3	0	2
Significado *similitud numérica*	0	1	2	1	4	1	2

Construcción de sentencias

A lo largo de las distintas sesiones, los alumnos tienen diversas oportunidades para construir sentencias verdaderas y falsas, ya sea en la actividad de la segunda parte de la sesión 2 o al proponer correcciones para las sentencias que consideran falsas en las sesiones 3, 4 y 6.

La mayoría de los alumnos construye sentencias de no-acción, salvo seis de ellos (RT, FB, DL, NM, BR, y JA). Todos salvo JA construyen, al menos, alguna sentencia de acción. FB realiza varios intentos de construcción de una sentencia de no-acción verdadera: en la sesión 3 propone de forma verbal la sentencia $10+6=10+1$ como corrección para la sentencia $10 - 7 = 10 - 4$ y, en la sesión 4, escribe la corrección 7 15 + 15 7 = 22 para la sentencia $7+15=8+15$, tras calcular mediante el algoritmo de la suma el valor numérico de ambos miembros de la sentencia dada.

Consideramos que el primero de estos intentos puede ser consecuencia de su falta de fluidez en el cálculo; el segundo intento evidencia importantes dificultades en la construcción de sentencias de no-acción. El alumno intenta relacionar dos expresiones que incluyen los mismos términos (7 + 15 y 15 + 7) y, a su vez, dar clausura a la sentencia escribiendo el valor numérico de éstas.

Otros alumnos muestran también cierta necesidad de clausura de las expresiones escribiendo puntualmente alguna sentencia con tres miembros siendo uno de ellos el valor numérico. CA muestra esta necesidad pero encuentra dificultades en combinar mediante el signo igual ambas expresiones de igual valor numérico y el valor numérico de ambas, dejando un espacio en blanco en vez de escribir un segundo signo igual (ver Figura 9-27 y Figura 9-28).

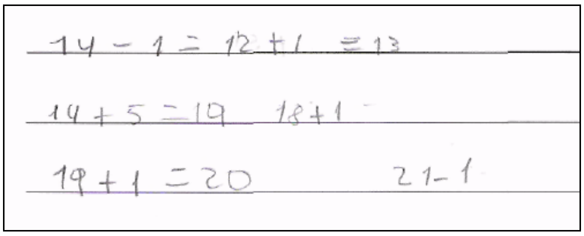


Figura 9-27: Igualdades verdaderas escritas por CA en la sesión 2.

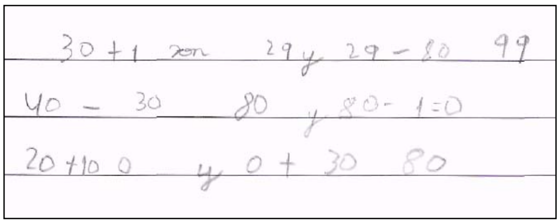


Figura 9-28: Igualdades falsas escritas por CA.

Se observa, además, que en sólo dos ocasiones los alumnos construyen sentencias de no-acción en las que el signo igual tiene un significado operacional (ej., $5+5=10-5^{V}$ y $14-8=26-15^{V}$).

En algunos casos en las sesiones 3 y 4 los alumnos proponen sentencias de la forma a=a. En cambio, ningún alumno propone este tipo de sentencias en la sesión 6, probablemente por haber perdido cierta familiaridad con sentencias en las que no aparecen signos operacionales. Simplemente el hecho de que todas las sentencias de la actividad incluyan operaciones puede haberles inducido a considerar únicamente este tipo de sentencias.

9.13 Dificultades encontradas en la resolución de igualdades y sentencias

A lo largo de las seis sesiones, los alumnos han dado muestras de variadas dificultades en la resolución de las igualdades y sentencias propuestas. Se han detectado algunas dificultades en el cálculo y también en la aplicación de los algoritmos estándares (de lápiz y papel) de la suma y la resta. A continuación, destacamos dificultades relacionadas con la comprensión del signo igual, con las convenciones del lenguaje aritmético o con el conocimiento de la estructura aditiva, la mayoría de las cuales ya han sido mencionadas.

Con respeto a la comprensión del signo igual, cabe destacar la limitada comprensión que evidencian algunos alumnos al mostrar una interpretación operacional de este signo. Uno de los alumnos muestra, además, confusión ante las sentencias de la forma *a*=*a*, debido a la falta de signos operacionales. En otras ocasiones, los alumnos muestran una comprensión no estable del signo igual haciendo un uso puntual del significado *operador* o *expresión de una acción*, al encontrar dificultades debidas, por ejemplo, a la magnitud de los números o a la falta de dominio de la operación involucrada en la sentencia.

La limitada o no estable comprensión del signo igual de los alumnos les conduce a ignorar términos, combinar términos de distintos miembros, a operar conjuntamente todos los términos que componen la sentencia o igualdad y a hacer una lectura inversa de parte de la sentencia o igualdad en el proceso de obtención de una respuesta. Los alumnos intentan dotar de sentido a las igualdades y sentencias con su comprensión del signo igual.

Destaca el uso del significado del signo igual *similitud numérica* que implica considerar verdaderas las sentencias formadas por números que se repiten, (independientemente de la posición relativa de los términos y la posición de éstos respecto del signo igual) y únicamente este tipo de sentencias, obligando en los casos más extremos a que sentencias de acción involucren términos repetidos.

En otros casos se observa la aplicación del significado *equivalencia numérica* a sentencias de acción, puesta de manifiesto por RL, BR, MP y RB en sentencias de la forma a + b – b = c, al combinan términos de distintos miembros en el intento de justificar la veracidad o falsedad de la sentencia. Por ejemplo, en la resolución de la sentencia 122 + 35 – 35 = 122 , RB resta 122 – 35, obteniendo 113, y suma 122 + 35 = 157, concluyendo la falsedad de la sentencia por ser diferentes los resultados obtenidos. De forma similar en la sentencia 16 + 14 – 14 = 36, MP realiza mediante el algoritmo de la resta las operaciones 14 – 36 = 78 y 16 + 14 = 30 y explica "*Falsa porque me da 30 y en la otra 78*".

También se ha observado que, al utilizar el significado del signo igual equivalencia numérica en una sentencia de no-acción, un alumno opera pares de términos de diferentes miembros y compara los valores numéricos obtenidos.

Con respecto al conocimiento de las convenciones que regulan el lenguaje aritmético y, en particular, la interpretación de las igualdades y sentencias, cabe destacar las siguientes actuaciones de los alumnos que evidencian dificultades en la interpretación de las igualdades y sentencias, algunas de las cuales ya han sido mencionadas:

- La lectura inversa de partes de la sentencia o igualdad, concretamente, del miembro derecho en igualdades de la forma a – b = □ - d ó de parte de la igualdad al hacer uso del significado *expresión de una acción*.
- La consideración (de forma implícita) de las expresiones $a-b+c$ y $a-(b+c)$ como equivalentes, pudiendo ser b=c[87]
- La omisión, en el proceso de resolución, de alguno de los términos que componen la sentencia al hacer uso de un significado operacional del signo igual.
- La combinación de términos de distintos miembros, no dando importancia a su posición respecto del signo igual:
    - Al aplicar el significado *equivalencia numérica* en sentencias y/o igualdades de acción, exigiendo la mismidad de resultado al operar pares de números de diferentes miembros.
    - Al aplicar el significado *equivalencia numérica* en igualdades y/o sentencias de no-acción, exigiendo la mismidad de valor numérico de la combinación de pares de números de diferentes miembros.
    - Al hacer uso de un significado operacional del signo igual.

Estas actuaciones concretas de los alumnos muestran una excesiva flexibilidad o un desconocimiento de las convenciones que regulan la estructura de las igualdades y sentencias. Consideramos que, en la mayoría de los casos, estas violaciones de las convenciones son resultado de los intentos de los alumnos de dar respuesta a igualdades y sentencias de no-acción, las cuales no comprenden debido a su desconocimiento del significado del signo igual *equivalencia numérica* o a su menor familiaridad con ellas, y de no dar importancia a la estructura de las sentencias e igualdades.

En otros casos, los alumnos violan las convenciones de la escritura y de la interpretación de las igualdades y sentencias, en el intento de aportar una explicación diferente a las dadas por sus compañeros, respecto a una misma igualdad o sentencia. En particular, ésta parece ser la causa de la aplicación del significado *equivalencia*

[87] Esta dificultad es debida a que los alumnos aun no habían trabajado en el aula el orden de las operaciones aritméticas.

numérica a igualdades y sentencias de no-acción operando pares de términos de diferentes miembros.

Las dificultades de los alumnos, en sentencias de acción, con las expresiones $a-b+b$ y $a-b+c$ poseen un origen distinto. En estos casos, los alumnos muestran falta de conocimiento sobre el modo en que los signos afectan a la agrupación de los términos. Algunos alumnos proceden de forma correcta en algunos casos y en otros suponen una equivalencia incorrecta. Consideramos que dicha variabilidad en la interpretación de este tipo de expresiones está condicionada por los términos que componen la totalidad de la sentencia, siendo en ese sentido un tanto fortuita.

En relación con el conocimiento de las operaciones y propiedades de la estructura aditiva, destacan dos dificultades: la sobregeneralización de propiedades aritméticas y el dar sentido a cálculos no definidos en el conjunto de los números naturales. En variadas ocasiones, algunos alumnos suponen la conmutatividad de la resta afirmando que sentencias de la forma $a-b=b-a$ son ciertas y suponiendo que el valor numérico de a – b con a<b es igual que el de su operación opuesta. Otro caso de sobregeneralización es manifestado por una alumna al imponer las restricciones de la resta en el conjunto de los números naturales al caso de la suma.

Algunos alumnos no reconocen la imposibilidad de dar sentido, dentro del conjunto de los números naturales, a restas en las que el minuendo es menor que el substraendo. Esto se observa cuando operan e incluso aplican los algoritmos estándares a dicho tipo de restas o cuando aplican una supuesta conmutatividad de la resta.

9.14 Resumen y discusión de los resultados sobre la comprensión del signo igual

Como hemos mostrado, a lo largo de las seis sesiones los alumnos dan muestras de cuatro significados del signo igual— *operador*, *expresión de una acción*, *equivalencia numérica* y *similitud numérica*— los cuales permiten distinguir grados o niveles de comprensión del signo igual en relación con los tipos de igualdades y sentencias consideradas. Destaca el carácter operacional de los dos primeros significados frente al carácter relacional de los dos últimos.

Similitud numérica

El desarrollo del significado *similitud numérica* puede haber sido favorecido por el tipo de intervención realizada en el aula, en la que se ha potenciado el uso de pensamiento relacional y se ha trabajado con igualdades y sentencias basadas en propiedades aritméticas. No se ha podido precisar si los alumnos desarrollan este significado debido a falta de comprensión de las justificaciones, dadas por sus compañeros, que explicitan uso de pensamiento relacional, o si están explorando el uso de pensamiento relacional o la comprensión de tipos de igualdades y sentencias que probablemente no le son muy familiares (porque incluyen expresiones entre las que aprecian mismidad o parecido).

Este significado del signo igual es puesto de manifiesto por los alumnos en variadas ocasiones, no apreciándose relación con el nivel de desarrollo de la comprensión del signo igual del alumno. No obstante, en el caso de MR el uso de este significado corresponde a un estado intermedio en el desarrollo de su comprensión del signo igual, que pasa de la aceptación, únicamente, de igualdades y sentencias de acción, al desarrollo del significado del signo igual *equivalencia numérica*.

Si bien es cierto que el significado *similitud numérica* no ha sido identificado en estudios previos, en Molina (2005) se señala que algunas explicaciones de los alumnos que mostraban uso de pensamiento relacional podían estar basadas únicamente en los números y no en las operaciones que intervienen. En particular, este significado evidencia la falta de importancia que los alumnos confieren a la disposición de los términos; un hecho que se manifiesta en otros comportamientos de los alumnos tales como suponer, de forma implícita o explícita, la conmutatividad de la resta o considerar que al alterar el orden de los términos de una sentencia falsa (verdadera) se obtiene otra sentencia falsa (verdadera).

El significado *similitud numérica* implica la resolución de igualdades y sentencias por medio del uso de pensamiento relacional, pero se basa en aspectos puramente estéticos dejando a un lado la comprensión de las operaciones que aparecen y de la relación de igualdad que se expresa. La manifestación de este significado por los alumnos hace apreciar la necesidad de que comprendan la restricción que supone la relación de igualdad. Para este objetivo es un obstáculo los usos imprecisos del signo igual, como indican Carpenter et al. (2003) y Wheeler (1981).

Manifestaciones de los significados del signo igual

Los demás significados del signo igual identificados en las respuestas de los alumnos sí han recibido atención en estudios previos. En la Tabla 9-40 y Tabla 9-41 se resumen resultados de estos estudios así como de nuestra investigación que permiten identificar el uso de cada uno de estos significados a partir de las respuestas de los alumnos a los tipos de sentencias e igualdades consideradas. En la Tabla 9-42 se detalla el tipo de sentencias que construyen cuando hacen uso de cada uno de estos significados.

Tabla 9-40: Tabla de respuestas dadas en cada tipo de igualdad al hacer uso de cada uno de los significados del signo igual identificados (resume resultados de este trabajo y de estudios previos)

Significado del signo igual	**Tipos de respuesta en cada tipo de igualdades**		
	De acción		**De no-acción**
	Operaciones en el miembro izq.	**Operaciones en el miembro dcho.**	
Operador	Correcta[1]	NR o Incorrecta: - interpreta la igualdad de izquierda a derecha - trasforma la igualdad en una de acción con las operaciones en el miembro izquierdo - opera todos o dos de los términos de la igualdad - repite uno de los términos	NR o Incorrecta interpretando la igualdad de izquierda a derecha: - opera conjuntamente todos los términos - ignora uno de los términos y consideran sólo una parte de la igualdad de la forma $a \pm b = c$ - repite uno de los términos - combina un par de términos de la igualdad - construye una cadena de operaciones enlazadas (En las de la forma a=a, las trasforma en igualdades de acción con las operaciones en la izquierda o las rechaza)
Expresión de una acción	Correcta[1]	Correcta[1]	NR o Incorrecta: - ignora uno de los términos y considera sólo una parte de la igualdad de la forma $c = a \pm b$ o de la forma $a \pm b = c$ - opera conjuntamente todos los términos repite uno de los términos - combina un par de términos de la igualdad - construye una cadena de operaciones enlazadas (En las de la forma a=a, las

			trasforma en igualdades de acción con las operaciones en la izquierda o las rechaza)
Equivalencia numérica	Correcta[1]	Según el caso	Correcta[1]
Similitud numérica	Se repite uno de los términos en la igualdad o un término que de lugar a parecido entre las expresiones	Se repite uno de los términos en la igualdad o un término que de lugar a parecido entre las expresiones	Se repite uno de los términos en la igualdad, o un término que de lugar a parecido entre las expresiones (Resuelve correctamente las igualdades de la forma a=a)

[1] Pudiendo cometer algún error de cálculo.
NR = no responde

Tabla 9-41: Tabla de respuestas dadas en cada tipo de sentencias al hacer uso de cada uno de los significados del signo igual identificados (resume resultados de este trabajo y de estudios previos)

Significado del signo igual	**Tipos de respuesta en cada tipo de sentencias**		
	De acción		**De no-acción**
	Operaciones en el miembro izq.	**Operaciones en el miembro dcho.**	
Operador	Correcta	NR o Incorrecta interpretándola de izquierda a derecha	NR o Incorrecta interpretándola de izquierda a derecha: - opera conjuntamente todos los términos - exige que el miembro derecho sólo contenga un término y sea el valor numérico del miembro izquierdo - obliga a que uno de los términos del miembro derecho sea el valor numérico del miembro izquierdo - la trasforma en sentencia de acción con las operaciones en el miembro izquierdo - la rechaza - construye una cadena de operaciones enlazadas (En las de la forma a=a, las trasforma en sentencias de acción con las operaciones en la izquierda o las rechaza como falsas)
Expresión de una acción	Correcta[1]	Correcta[1]	(Aporta el mismo tipo de respuestas que con el significado *operador*, aunque, teóricamente, también podría interpretar las sentencias de derecha a izquierda)
Equivalencia numérica	Correcta[1]	Según el caso	Correcta[1]
Similitud numérica	Correcta o incorrecta, según el caso, basando la justificación en	Correcta o incorrecta, según el caso, basando la	Correcta o incorrecta, según el caso, basando la justificación en la mismidad o diferencia de los términos involucrados

	la mismidad o diferencia de los términos	justificación en la mismidad o diferencia de los términos	(Resuelve correctamente las igualdades de la forma a=a)

[1] Pudiendo cometer algún error de cálculo
NR = no responde

Tabla 9-42: Tabla de tipos de sentencias construidas al hacer uso de cada uno de los significados del signo igual identificados (resume resultados de este trabajo y de estudios previos)

Significado del signo igual	**Tipos de sentencias construidas**
Operador	- sentencias de acción con las operaciones en el miembro izquierdo - sentencias que encadenan operaciones
Expresión de una acción	- de acción con las operaciones en el miembro derecho e izquierdo - sentencias que encadenan operaciones
Equivalencia numérica	- sentencias de no-acción
Similitud numérica	- sentencias con términos iguales, o expresiones parecidas, obviándose en ocasiones su disposición en la sentencia o los signos operacionales que contiene

Comprensión manifestada

Los estudios previos revisados sugieren que los alumnos tienden a interpretar el signo igual de forma operacional y muestran resistencia a adoptar o desarrollar el significado del signo igual *equivalencia numérica.* Sin embargo, la mayoría de los alumnos participantes en este estudio muestran, desde el primer momento, este significado del signo igual y catorce de ellos lo ponen de manifiesto de forma estable durante todas las sesiones. En general, muestran conciencia de tener que involucrar todos los términos de la igualdad y sólo dos alumnas encuentran dificultades en la igualdad de acción $\square = 25 - 12$, debidas a su forma menos convencional.

Estas diferencias en la comprensión del signo igual respecto a otros estudios radican, probablemente, en el tipo de enseñanza recibida previamente por los alumnos. El maestro de estos alumnos da una importancia destacada al significado de los símbolos y su papel en el lenguaje matemático y había trabajado con ellos, previamente, la resolución de igualdades numéricas. Como resultado de este trabajo, los alumnos mostraron disponer de un modo de abordar este tipo de sentencias e igualdades, las cuales entendían como un tipo de expresiones aritméticas particulares. No obstante, se observa que algunos alumnos muestran cierta inestabilidad en su comprensión, la cual tiene lugar en momentos diferentes, en especial cuando encuentran cálculos que les requieren mayor carga cognitiva o les suponen algún tipo de dificultad, lo que confirma la necesidad de promover la comprensión del signo igual de forma continuada.

Es importante observar, en relación con la comprensión del signo igual, la conjetura señalada previamente: los alumnos aceptan y disponen de multiplicidad de significados del signo igual. Según esta hipótesis, los alumnos que dan muestras de una comprensión avanzada no utilizan el significado *equivalencia numérica* para dar sentido a todos los tipos de igualdades y sentencias consideradas sino que, en cada caso, hacen uso del significado que consideran adecuado para interpretar la igualdad o sentencia, atendiendo a la estructura de ésta. Esta conjetura, sugerida por los datos, concuerda con los resultados del estudio de Seo y Ginsburg (2003) en el que se observa que los alumnos otorgan un significado diferente al signo igual en diferentes contextos, entre ellos, el cálculo, la medida de la longitud de regletas Cuisinaire y equivalencias monetarias.

Además, se ha observado que el desarrollo del significado del signo igual *expresión de una acción* no es un paso necesario en el desarrollo de comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica.

Dificultades

Los resultados de este trabajo confirman algunas de las dificultades que, según los estudios resumidos en el Capítulo 5, encuentran los alumnos en la comprensión de las igualdades y sentencias numéricas. Entre ellas destaca la necesidad de clausura de las expresiones, la cual detectamos en la construcción de sentencias o igualdades. Otro tipo de dificultades observadas están relacionadas con las convenciones de la aritmética, al no ser reconocidas por los alumnos, y con la sobregeneralización de propiedades aritméticas.

Los alumnos violan las convenciones de la aritmética sobre la interpretación de igualdades y expresiones haciendo una lectura inversa o combinando términos de la igualdad según su criterio, cuando encuentran sentencias o igualdades de no-acción que les resultan más difíciles, haciendo uso de un significado operacional del signo igual. Al hacer uso de este significado, interpretan la sentencia o igualdad de izquierda a derecha, concibiéndola con la expresión de una cadena de operaciones y su resultado, aunque no necesariamente prestan atención a su estructura. Los significados operacionales del signo igual se muestran compatibles con ignorar la estructura de la sentencia.

Se cumple la observación realizada por Lindvall e Ibarra (1978) de que para los alumnos, las igualdades no son expresiones de una relación sino ciertas operaciones a realizar y un resultado. No obstante, esta afirmación no es cierta de manera general. Cuando los alumnos han trabajado las sentencias e igualdades de no-acción, muestran aceptación y comprensión de éstas, desarrollando comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica.

Otra dificultad observada, a destacar, es la aplicación del significado *equivalencia* numérica en cualquier tipo de sentencia, realizada ocasionalmente por algún alumno. Su uso en sentencias de acción muestra una operacionalización de este significado: los alumnos se centran en operar parejas de términos para obtener dos valores iguales y, en caso contrario, concluyen la falsedad de la sentencia. Este hecho muestra que dichos alumnos no han desarrollado comprensión del signo igual como expresión de equivalencia ya que no respetan la disposición de los términos en la sentencia.

CAPÍTULO 10

Conclusiones y principales aportes de la investigación

La investigación que se ha recogido en esta memoria ha consistido en un estudio, realizado en el campo de la Educación Matemática, dedicado a profundizar en el fenómeno de la comprensión del signo igual y del uso y desarrollo de pensamiento relacional, concebidos como elementos relevantes en la propuesta de integrar el pensamiento algebraico en el aprendizaje de las matemáticas escolares de la Educación Primaria.

Con este propósito se han consultado estudios teóricos y empíricos del área de Didáctica de las Matemáticas y de otras áreas de conocimiento como la Matemática, la Psicología y la Filosofía, relacionados de algún modo con el tema, que nos han permitido (a) conocer el estado actual de la propuesta Early-Algebra: principales avances que se están realizando en esta línea de investigación y cuestiones de investigación que se han planteado, (b) definir, ejemplificar y caracterizar el pensamiento relacional, principalmente en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, (c) estudiar la conexión de este constructo con otros más frecuentes en la literatura, (d) analizar los componentes algebraicos del pensamiento relacional en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas, a partir del análisis de las principales diferencias y conexiones existentes entre la aritmética y el álgebra, (e) identificar parte de la potencialidad e importancia de este tipo de pensamiento, (f) recoger resultados de investigaciones previas relativos a estrategias o modos de actuación relacionados con el uso y desarrollo de pensamiento relacional, (g) indagar en la complejidad de la comprensión del signo igual, trazando la evolución de este símbolo en la historia, los significados de términos con los que está relacionado (igualdad, identidad, y equivalencia) y la multiplicidad de significados del signo igual en el contexto de la aritmética y el algebra escolar y (h) conocer el estado de la cuestión sobre el fenómeno de la comprensión del signo igual y la resolución de sentencias, igualdades y ecuaciones por alumnos, principalmente, de Educación Primaria, así como otros situaciones matemáticas relacionadas como el estudio de la equivalencia de expresiones aritméticas o algebraicas.

Partiendo de nuestro conocimiento de la metodología de los experimentos de enseñanza trasformativos y dirigidos por una conjetura de Confrey y Lachance (2000), utilizada en nuestro trabajo previo Molina (2005), y considerándola adecuada para abordar el nuevo problema de investigación planteado, se ha ahondado en el conocimiento de esta metodología, comenzando por identificar el paradigma metodológico al que pertenece: la metodología de diseño. Contextualizándonos en este paradigma emergente, hemos explorado sus orígenes, fundamentación y principales características, profundizando, posteriormente, en el conocimiento de los experimentos de enseñanza y del diseño de investigación concreto utilizado.

En la parte empírica del trabajo, además de diseñar la intervención en el aula de acuerdo con los objetivos de investigación y con el análisis continuado que se ha ido realizando, se ha llevado a cabo un cuidadoso estudio de los datos recogidos. Se ha llegado a la identificación de (a) las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de las sentencias numéricas propuestas, (b) perfiles de comportamiento en cuanto al uso de pensamiento relacional, (c) los significados del signo igual manifestados por los alumnos y (e) niveles en la comprensión del signo igual puesta de manifiesto por los mismos. En torno a estos cuatro pilares se articulan los resultados que se desprenden del trabajo empírico de esta investigación.

Este capítulo pone cierre a la memoria resumiendo el modo en que se ha dado respuesta a los objetivos planteados, señalando algunas de las limitaciones de este trabajo y sus principales aportaciones, y destacando las principales cuestiones abiertas o perspectivas de investigación que se han identificado.

10.1 Recordando el problema de investigación

Como se ha expuesto en la presentación de esta memoria y más detalladamente en el capítulo 1, el problema de investigación que se aborda en este trabajo es *el estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que los alumnos ponen de manifiesto, en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas.*

Con este objetivo esta investigación extiende al trabajo previo realizado para la obtención de la suficiencia investigadora, profundizando en la comprensión del constructo pensamiento relacional así como en el fenómeno de su uso y desarrollo por los alumnos y de la comprensión del signo igual. Volvemos a recoger aquí los objetivos específicos que nos planteamos inicialmente para analizar, en los siguientes apartados, el grado en que han sido alcanzados:

O1. Identificar las estrategias que emplean los alumnos participantes en la resolución de las sentencias numéricas consideradas, y analizar, en especial, las que están basadas en cierto uso de pensamiento relacional.

O2. Caracterizar el uso de pensamiento relacional que evidencian las producciones e intervenciones de dichos alumnos, identificando los elementos en los que los alumnos centran su atención cuando hacen uso de pensamiento relacional así como las relaciones y propiedades aritméticas que emplean.

O3. Analizar y evaluar la comprensión del signo igual que muestran los alumnos participantes en el estudio al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numéricas.

O4. Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a la comprensión del signo igual y el uso de pensamiento relacional que ponen de manifiesto.

Como parte del desarrollo del marco teórico de esta investigación se perseguían los siguientes objetivos:

O5. Describir y caracterizar el pensamiento relacional en cualquier contexto, y en especial, en el contexto de la aritmética.

O6. Analizar la vinculación del pensamiento relacional, en el contexto de la aritmética, con otros constructos existentes en la literatura de Educación Matemática con los que esté vinculado.

Con respecto a la metodología utilizada, al enmarcarse dentro de un paradigma metodológico que está actualmente emergiendo en la investigación educativa, nos planteábamos los siguientes objetivos:

O7. Identificar los orígenes, la fundamentación y las principales características de la investigación de diseño, y más concretamente del tipo de experimento de enseñanza realizado.
O8. Analizar la potencialidad y limitaciones de esta metodología.
O9. Identificar, a través de la puesta en práctica del diseño de investigación elegido, dificultades que emergen, propias de la metodología utilizada.

En los siguientes apartados se detalla el modo en que se ha dado respuesta a estos objetivos.

10.2 Conclusiones del trabajo empírico

Detallamos en este apartado el grado y modo en que se ha dado cumplimiento a los cuatro primeros objetivos, los cuales se refieren a la parte empírica de este estudio.

Objetivo O1. Identificar las estrategias que emplean los alumnos participantes en la resolución de las sentencias numéricas consideradas y analizar, en especial, las que están basadas en cierto uso de pensamiento relacional.

El análisis de los datos recogidos ha permitido identificar la diversidad de estrategias utilizadas por los alumnos para resolver las sentencias numéricas verdaderas y falsas consideradas. Guiados por la distinción entre el papel del cálculo y del pensamiento relacional en el proceso de resolución, se han diferenciado y estructurado los modos de proceder reconocidos en las respuestas de los alumnos distinguiéndose ocho estrategias que se organizan en dos ramas según si, al iniciar la resolución, se proceda a hallar y comparar el valor numérico de ambos miembros, o bien, a observar la sentencia, detectar alguna característica particular de ésta o relaciones entre sus elementos y utilizar conocimiento aritmético relacionado para resolverla.

Salvo en una de estas estrategias, en el resto se pone de manifiesto uso de pensamiento relacional, siendo variable la sofisticación de dicho uso en cada caso, el momento del proceso de resolución en el que tiene lugar y la influencia en él del proceso de cálculo; todos ellos, aspectos que se han discutido en el capítulo 9.

La identificación de ciertos elementos clave en el proceso de resolución de la sentencia, nos ha permitido, a través de un diagrama, explicitar el flujo de pensamiento de los alumnos al hacer uso de cada una de las estrategias. De este modo se ha hecho explícito el papel destacado del cálculo, en algunas estrategias, para tomar conciencia de la estructura de la sentencia, así como la importancia de otros elementos como el lugar y modo en que está centrada la atención del alumno al iniciar la resolución de la sentencia, la fluctuación de dicha atención a lo largo de su resolución, la carga cognitiva de la tarea para el alumno, sus conocimientos aritméticos y su modo de concebir los números, las expresiones y la sentencia.

Objetivo O2. Caracterizar el uso de pensamiento relacional que evidencian las producciones e intervenciones de dichos alumnos, identificando los elementos en los que los alumnos centran su atención cuando hacen uso de pensamiento relacional.

Tanto las estrategias detectadas como los perfiles de comportamiento identificados sirven para detallar y analizar las características del uso de pensamiento relacional puesto de manifiesto por los alumnos. Las estrategias permiten describir el flujo de pensamiento de los alumnos al abordar una sentencia y, en particular, el momento de dicho proceso en el que se hace uso de pensamiento relacional y el papel de éste. Los perfiles centran la atención en la capacidad de uso de pensamiento relacional, manifestada por cada alumno, distinguiéndose entre formas más o menos sofisticadas de hacer uso de pensamiento relacional y los elementos en los que se basa dicho uso, que son concretamente: mismidad o parecido entre términos, la presencia en la sentencia de algún hecho numérico conocido, conocimiento sobre el efecto de las operaciones de la estructura aditiva, relaciones numéricas entre términos de la sentencia y diferencias de magnitud entre términos.

Objetivo O3. Analizar y evaluar la comprensión del signo igual que muestran los alumnos participantes en el estudio al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numéricas.

El análisis de las respuestas de los alumnos ha permitido detectar cuatro significados del signo igual de los que los alumnos hacen uso al abordar la resolución de las igualdades y sentencias y la construcción de sentencias: *operador*, *expresión de una acción*, *equivalencia numérica y similitud numérica.* Este último, no habiendo sido identificado en estudios previos, se manifiesta como resultado del tipo de actividad promovida en el aula, del tipo de sentencias consideradas y de la falta de importancia que algunos alumnos otorgan a la estructura de la sentencia.

Los alumnos manifiestan aceptación de la existencia de multiplicidad de significados, haciendo uso del significado que, en cada caso, consideran adecuado.

Partiendo de la identificación del significado puesto de manifiesto, por cada alumno, en cada igualdad o sentencia, se distinguen tres niveles en la comprensión del signo igual manifestada: comprensión operacional, comprensión no estable y comprensión avanzada; que han permiten analizar la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos.

De este modo se ha cumplido el tercer objetivo de investigación propuesto.

Objetivo O4. Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a la comprensión del signo igual y el uso de pensamiento relacional que ponen de manifiesto.

Ambas evoluciones han sido analizadas: la evolución de la comprensión del signo igual a partir de la identificación de niveles de comprensión, y la evolución del uso (o manifestación) de pensamiento relacional mediante el estudio de los perfiles de comportamiento manifestados por los alumnos.

En particular, se ha apreciado la estabilidad de la comprensión del signo igual de 14 de los 26 alumnos y cierta inestabilidad puntual en la comprensión de los demás alumnos, la cual se ha manifestado en diferentes momentos, evidenciando variabilidad en la influencia, en el desarrollo de la comprensión del signo igual de los alumnos, de las intervenciones realizadas. Dicha estabilidad se hace especialmente manifiesta cuando los alumnos han de resolver sentencias o igualdades de resta.

Con respecto a la evolución del uso de pensamiento relacional, se aprecia que ésta es positiva a partir de la discusión de la sesión 3, detectándose cierto descenso en la manifestación de pensamiento relacional de algunos alumnos al debilitarse nuestra intervención. En particular, se observa la capacidad de los alumnos de utilizar pensamiento relacional en la resolución de las sentencias y la influencia de la valoración social de este tipo de manifestaciones. Destaca la dificultad de delimitar la capacidad de uso de pensamiento relacional de los alumnos o su tendencia a hacer uso de este tipo de pensamiento a partir del análisis de sus respuestas escritas, detectándose mayores evidencias en las entrevistas individuales realizadas.

10.3 Conclusiones teóricas

Detallamos en este apartado el grado y modo en que se ha dado cumplimiento a los objetivos O5, O6 y O7, relativos a aspectos teóricos sobre el pensamiento relacional.

Objetivo O5. Describir y caracterizar el pensamiento relacional en cualquier contexto, y en especial, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas.

A partir de la búsqueda bibliográfica de los términos pensamiento y relación realizada, en documentos de Educación Matemática, Matemáticas, Filosofía, Psicología, Lógica y Lengua, hemos definido el pensamiento relacional como la actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, detectar de manera espontánea relaciones entre ellos o buscarlas, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo. Éste puede consistir en resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados.

Una definición que, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, es compatible con el uso que Koehler, Carpenter y colaboradores, hacen de este término; autores cuyos trabajos han tenido una influencia destacada en el origen y motivación de esta investigación.

En este contexto, los objetos a analizar son las expresiones. El pensamiento relacional se encuentra, entonces, conectado con la parte del álgebra relativa al estudio y generalización de patrones y relaciones. Implica la consideración de expresiones desde un punto de vista estructural, como totalidades, centrando la atención en las relaciones que constituyen la estructura de la aritmética, e involucrando la exploración e identificación de patrones. En situaciones de cálculo, conlleva el uso de estrategias flexibles, muy relacionadas con el cálculo mental y con el uso del sentido numérico y sentido operacional.

Objetivo O6. Analizar la vinculación del pensamiento relacional, en el contexto de la aritmética, con otros constructos existentes en la literatura de Educación Matemática con los que esté conectado.

En el contexto de la aritmética y el algebra, se han identificado nueve términos que se encuentran conectados con el pensamiento relacional: pensamiento cuantitativo flexible, estrategias de cálculo flexible, cálculo mental, sentido numérico, sentido operacional, sentido simbólico, sentido estructural, pensamiento cuasivariable y meta-estrategias conceptúales. Dicha conexión ha sido analizada en el capítulo 4, donde se ha destacado la equivalencia de este tipo de pensamiento con las estrategias meta-conceptuales definidas por Hejny et al. (2006). En ambos casos la atención y acción del alumno se centra en la estructura de la situación o problema que se persigue abordar, considerándola como totalidad.

Los otros términos no tienen una relación tan directa. Algunos términos como el pensamiento cuasivariable o las estrategias de cálculo flexible son más específicos, refiriéndose a manifestaciones de pensamiento relacional propias de un contexto delimitado. Otros como el sentido numérico, el sentido operacional o el sentido estructural ayudan a destacar aspectos que se encuentran involucrados al hacer uso de pensamiento relacional, aunque se refieren a capacidades muy generales y complejas.

La identificación y consulta de estos términos ha ayudado a conectar el pensamiento relacional con la literatura existente en el área, a describir y comprender, en mayor profundidad, qué engloba el pensamiento relacional en el ámbito del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, y a la identificación de estudios empíricos sobre aspectos relativos al uso y desarrollo de pensamiento relacional. Damos, por tanto, por cumplido este objetivo.

10.4 Conclusiones relativas a la metodología

Detallamos en este apartado el grado y modo en que se ha dado cumplimiento a los objetivos O7, O8 y O9, relativos a la metodología de investigación.

Objetivo O7. Identificar los orígenes, la fundamentación y las principales características de la investigación de diseño, y más concretamente del tipo de experimento de enseñanza realizado.

La búsqueda bibliográfica realizada sobre la investigación de diseño, los experimentos de enseñanza y, en particular, los experimentos de enseñanza trasformativos y dirigidos por una conjetura, nos ha permitido cumplir este objetivo. Por una parte se destaca la influencia, en su origen y fundamentación, de las entrevistas clínicas, los experimentos de enseñanza rusos, la psicología de Piaget y el constructivismo radical y social; cuya relación con esta metodología ha sido detallada en el capítulo 7. Por otra, los antecedentes de la investigación de diseño se localizan en las ciencias artificiales (como la aeronáutica), habiendo sido posteriormente adaptada a la investigación educativa ante el reconocimiento de la complejidad intrínseca de los fenómenos propios de la enseñanza y aprendizaje de las ciencias y, en particular, de las matemáticas, y la necesidad de potenciar la relevancia e influencia de la investigación en la práctica.

Se han identificado las principales características de la investigación de diseño, la cual abarca muy diversos tipos de estudios respecto al contexto educativo en los que tiene lugar y a los agentes educativos involucrados.

Para profundizar en el conocimiento del diseño de investigación concreto utilizado, nos hemos centrado, posteriormente, en la descripción de los experimentos de enseñanza, los cuales se caracterizan, entre otros aspectos, por ser el investigador el que actúa de docente en el aula durante el desarrollo de la investigación. Por último, el trabajo de Confrey y Lachance (2000) nos ha permitido subrayar las características de los *experimentos de enseñanza trasformativos y dirigidos por una conjetura*.

Objetivo O8. Analizar la potencialidad y limitaciones de esta metodología.

La búsqueda bibliográfica realizada sobre la investigación de diseño nos ha permitido dar cumplimiento a este objetivo. No obstante, el carácter emergente de la misma condiciona el grado en que los puntos fuertes y limitaciones han sido identificados hasta el momento.

Los diferentes autores consultados así como los orígenes y fundamentos de esta metodología, señalan como una de sus principales fortalezas la disminución del distanciamiento existente entre la práctica educativa y los análisis teóricos, así como el ser promotora de la identificación y crecimiento de nuevas ideas y constructos, y de cuestiones a abordar en otro tipo de investigaciones.

Entre las limitaciones destacan la cantidad de datos que se generan, la dificultad de la comparación entre diseños, la falta de generalidad, la falta de control deliberada de muchas variables, y la dificultad de demostrar su calidad.

Objetivo O9. Identificar, a través de la puesta en práctica del diseño de investigación elegido, dificultades que emergen, propias de la metodología utilizada.

Este objetivo no ha sido abordado, hasta el momento, a lo largo de esta memoria. Para darle cumplimiento, recogemos aquí las principales dificultades y limitaciones que se han detectado en la puesta en práctica de esta metodología, proponiendo, además, algún modo de abordarlas.

Por una parte, destaca la necesidad de contar con varios investigadores debido a la gran cantidad de datos que se generan y a la importancia, que se le confiere, al contraste de perspectivas sobre el fenómeno en estudio y sobre el análisis de los datos (dirigido, en este último caso, a garantizar la calidad del análisis). Esta limitación puede paliarse (a) delimitando estrechamente el foco de la investigación y reduciendo, de este modo, los aspectos a considerar en la diversidad y cantidad de información recogida, y (b) realizándose, durante el proceso de análisis de los datos, frecuentes discusiones, con investigadores relacionados en diferente grado con la investigación, sobre el modo en que está siendo desarrollado dicho proceso y los resultados que se están obteniendo. Estos intercambios, además de contribuir y enriquecer el análisis de los datos y el desarrollo general del trabajo, ayudan a garantizar su calidad.

La reducción del foco de la investigación mencionada en el párrafo anterior (punto (a)) ayuda a abordar una de las limitaciones de esta metodología destacada por otros autores: que las argumentaciones y resultados procedan sólo de un bajo porcentaje de los datos.

En nuestro caso, el hecho de que sea un sólo investigador el que haya realizado la mayor parte del proceso y la extensión de la recogida de datos ha condicionado que se haya dado mayor presencia a la parte de investigación de este trabajo frente a la de diseño instruccional. Este hecho también ha dificultado el contraste de las visiones del observador y del investigador-docente que se recomienda; no obstante, la observación a posteriori de los videos de las intervenciones en el aula ha permitido abordarlo con cierta garantía.

Por otra parte, observamos que el carácter exploratorio de este tipo de estudios provoca que, a priori, puedan no conocerse con detalle todas las variables de la intervención en el aula, de importancia en relación al fenómeno en estudio. Algunos de ellos pueden apreciarse como relevantes al llevarse a cabo el estudio retrospectivo. Por este motivo, se sugiere la realización de una variada y completa recogida de datos, en particular la grabación en video de las intervenciones, lo que permitirá explorar, a posteriori, toda la actividad ocurrida en el aula e identificar nuevos elementos de interés. De igual forma, algunos de los datos recogidos pueden ser dejados en un segundo plano al realizar el análisis, al considerarse que no aportan información relevante.

Puesto que estos estudios constan de varias intervenciones en el aula, se hace necesario realizar un seguimiento, a lo largo del proceso de recogida de los datos, de la actividad matemática realizada por los alumnos entre las sesiones. Es necesario conocer qué contenidos se trabajan, para detectar posibles influencias a tener en cuenta en la interpretación de los datos. Ésta puede ser una fuente de debilidades para la investigación, dependiendo de la certeza con la que pueda conocerse en qué ha consistido la actividad matemática de los alumnos durante dicho periodo.

Otra limitación viene originada por la intervención de uno de los investigadores como docente en el aula. Esta doble función puede dar lugar a cierta tensión entre el papel de docente y el papel de investigador, que la persona ha de poner simultáneamente en juego. En este sentido, es necesario que los objetivos de cada intervención estén cuidadosamente limitados y precisados, y que el investigador-docente se atenga a ellos. Este hecho ocasiona que la experiencia docente previa del investigador-docente sea una influencia en la realización de las intervenciones en el aula.

Con respecto al análisis, señalar que el proceso de análisis retrospectivo es muy complejo, debido a (a) la gran cantidad de datos generados por este tipo de investigaciones y (b) que cada sesión ha de ser analizada de un modo diferente, aunque los objetivos y elementos de análisis sean los mismos. Se destaca, así mismo, la necesidad de llevar acabo una ruptura radical con el análisis previo realizado, para poder profundizar en el fenómeno en estudio. El análisis preliminar y continuo de los datos y el análisis retrospectivo son sustancialmente diferentes. Durante el primero, el cual ha de ser muy rápido, sólo se cuenta con una visión parcial del experimento y una versión preliminar de la conjetura de investigación. El análisis retrospectivo, en cambio, es más sosegado, se basa en la visión completa del experimento de enseñanza realizado y requiere profundizar en la comprensión de la situación en estudio. Por estos motivos, los resultados que se desprende de cada uno de estos análisis son significativamente diferentes, no sólo en su profundidad. De hecho, como se aprecia en este trabajo las clasificaciones de los alumnos que se hicieron durante el análisis preliminar de los datos no coinciden con las clasificaciones de los alumnos realizadas en el análisis retrospectivo.

Ésta es una de las dificultades más importante en el uso de esta metodología, según nuestra experiencia, distanciarse de los análisis realizados durante el proceso de recogida de datos así como de la conjetura inicial y de los fundamentos que subyacen al diseño de cada sesión, para realizar con rigurosidad y objetividad el análisis de la totalidad de los datos recogidos.

En este segundo análisis de los datos, es necesario, inicialmente, explorar la totalidad de los datos para identificar el camino conceptual que sigue el grupo así como los principales cambios y elementos que se aprecian. Es importante prestar atención a la introducción de nuevas estrategias, nuevas acciones o nuevas formas de lenguaje. Algunos casos extremos permiten ir identificando matices entre los comportamientos o respuestas de los alumnos. Las posibles interpretaciones para una respuesta dada permiten apreciar un abanico de posibilidades a profundizar contrastando con los demás datos. El proceso de análisis es una continua dialéctica entre los datos y las conjeturas que se van elaborando. Es importante cuestionarse de qué modo las tareas propuestas así como las intervenciones específicas de investigador-docente contribuyen a los cambios y desarrollos que se perciben. La exploración de los datos ayuda a ir apreciando cierta trayectoria, acudiendo continuamente a los datos para buscar evidencias de las conjeturas que se van elaborando así como evidencias que puedan refutarla.

Una última dificultad, relativa principalmente a la presentación y justificación de los resultados obtenidos, es delimitar la procedencia del conocimiento que va adquiriendo el investigador o investigadores, a lo largo de todo el proceso, debido a la continua dialéctica entre la teoría y la práctica, que se produce.

10.5 Limitaciones de la investigación

En este apartado indicamos algunos de los elementos que pueden considerarse limitaciones de este trabajo de investigación y que hemos tenido en cuenta en su desarrollo, los cuales se suman a las limitaciones y dificultades relativas a la metodología utilizada que han sido detalladas previamente.

En primer lugar, los resultados se refieren al grupo de alumnos con los que se trabajó en el aula. La elección de dicho grupo ha sido accidental, causada por la disponibilidad y facilidades dadas por el maestro para realizar el experimento de enseñanza en su aula. Si bien dicho grupo no puede considerarse representativo de todos los alumnos de tercero de Educación Primaria, si puede considerarse como una clase "normal" de este nivel.

Los métodos verbales son usados frecuentemente como herramienta de investigación siendo valorados en la investigación en campos como la Educación Matemática y la Psicología, pese a reconocerse en ellos ciertas limitaciones (Villegas y Castro, 2003). Una de ellas es que la información obtenida está limitada por la capacidad de los alumnos de expresar de manera escrita y verbal su pensamiento. En nuestro caso, también se ve afectada por la presencia de la investigadora y, ocasionalmente, la persona que realiza las grabaciones en video en el aula. El entorno impone inevitablemente ciertas restricciones que se han de intentar minimizar, con el objetivo de que los alumnos se sientan confortables y así se expresen con libertad, sin coacciones ni influencia de las expectativas del investigador.

Con la misma intención de atenuar estos efectos, la primera intervención en el aula tuvo como principal objetivo facilitar la familiarización de los alumnos con la investigadora-docente y viceversa, así como de los alumnos con la metodología de trabajo a seguir en nuestras sesiones de trabajo en el aula. Por su parte, la persona que realizó las grabaciones en video se dispuso siempre al final del aula, a las espaldas de los alumnos y, al realizar entrevistas individuales, se realizaron grabaciones en audio en lugar de en video. El maestro del aula estuvo siempre presente lo que facilitó la participación y trabajo de los alumnos. Fue inevitable, sin embargo, la influencia que la presencia de sus compañeros produjo en algunos de los alumnos cohibiendo sus explicaciones orales. En particular, observamos que los alumnos más tímidos o inseguros tendían a participar menos en las discusiones.

Con el objetivo de favorecer la validez de la información recogida y disminuir la influencia de estas limitaciones, además de las medidas ya mencionadas, se combinaron, en la recogida de datos, actividades individuales y de grupo y actividades orales y escritas.

La influencia de las intervenciones de la investigadora-docente en las producciones de los alumnos, aunque intentó ser minimizada, es uno de los factores considerados al realizar el análisis de los datos. En la presentación de dicho análisis en este informe se han detallado los casos en los que se identifica la influencia de las cuestiones o comentarios de la investigadora en las respuestas aportadas por los alumnos.

10.6 Aportaciones del trabajo

Este trabajo aporta información de interés para los investigadores en Educación Matemática y para los docentes de la Educación Primaria. En relación a un determinado contexto matemático, conocer el modo en que piensan los alumnos, los conocimientos y significados de los que parten y que utilizan, las estrategias que ponen en juego, el modo en que evoluciona su comprensión, y las dificultades que experimentan son cuestiones de gran interés dentro del área de Didáctica de la Matemática.

Por una parte, habiéndose analizado el estado previo de la cuestión abordada, nuestro trabajo supone una contribución original al conocimiento sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concretamente en relación al trabajo con igualdades y sentencias numéricas y a la integración del álgebra en el aprendizaje de la aritmética.

Por otra, esta información es de utilidad para los educadores, para poder entender mejor el pensamiento matemático de sus alumnos y tomar decisiones sobre el trabajo a llevar a cabo en el aula (Empson y Junk, 2004). La metodología de investigación utilizada hace que los resultados sean de gran aplicabilidad para la práctica, al haberse obtenido en una situación de enseñanza/aprendizaje contextualizada en la realidad habitual del aula.

Las distinciones y descripciones que aquí se han presentado, pueden promover la apreciación y desarrollo de conciencia de elementos que previamente pueden no haber sido apreciados o articulados de este modo. Este es, según Mason (pendiente de aceptación), uno de los primeros pasos en el desarrollo profesional de los docentes: extender su conciencia sobre aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Las investigaciones sobre modos de pensamiento o comprensión de los alumnos en relación a un concepto o idea matemática o sobre sus estrategias al abordar una situación, permiten adentrarse en el modo en que los alumnos estructuran su atención al abordar determinadas situaciones matemáticas y, en general, el modo en que dan sentido a las matemáticas. Estos estudios pueden ayudar a ver los objetos y actividad matemática desde los ojos de los alumnos y así poder dirigir la actividad matemática hacia nuevas formas de atención; hacia el desarrollo de la comprensión de los alumnos.

Estas investigaciones conducen, habitualmente, a apreciar y conocer una riqueza de posibilidades mayor de la que podía esperarse a priori sobre los modos de concebir, considerar o interpretar una situación matemática y actuar sobre ella.

Baroody y Coslick (1998), Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (2000) y Empson y Junk (2004) coinciden en señalar el papel del conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento matemático de los niños, en la mejora de la enseñanza de las matemáticas, al ayudar al profesorado a cambiar significativamente su práctica educativa y sus creencias, teniendo efectos positivos en el aprendizaje de sus alumnos.

10.7 Nuevas perspectivas y líneas de investigación abiertas

A partir del trabajo realizado, se identifican algunas cuestiones de interés a abordar en la investigación en el campo de Didáctica de la Matemática; algunas de las cuales han sido ya mencionadas en capítulos previos de esta memoria.

¿De qué modo se relacionan las estrategias identificadas en este trabajo con las que utilizan los alumnos en la resolución de igualdades abiertas? ¿Se encuentra la dependencia o independencia de la realización del cálculo, manifestada por los alumnos al hacer uso de pensamiento relacional, basada en modos diferentes de conocimiento de las relaciones aritméticas? ¿Cómo evolucionan las explicaciones (el lenguaje) de los alumnos conforme desarrollan su capacidad para utilizar pensamiento relacional? ¿Cuándo es apropiado dar importancia al rigor de las explicaciones de los alumnos sobre relaciones observadas? ¿Qué constituye, para los alumnos de Educación Primaria, una justificación de la veracidad de una sentencia aritmética?

¿Puede favorecerse la transferencia del uso de pensamiento relacional a otros contextos matemáticos? Y en su caso ¿de qué modo? ¿Cuál es el papel del pensamiento relacional dentro de otras sub-áreas de las matemáticas como la Geometría, la Estadística y la Probabilidad? ¿Qué capacidad de uso de pensamiento relacional manifiestan los alumnos en otros contextos matemáticos? ¿Qué contextos específicos de otras sub-áreas pueden ser de utilidad para promover el desarrollo, uso y manifestación de pensamiento relacional?

¿Constituyen la comprensión de sentencias numéricas de acción y no-acción, la correcta resolución de igualdades abiertas de acción y no-acción, y la construcción de sentencias numéricas verdaderas y falsas, tres etapas en el desarrollo de la comprensión del signo igual? ¿En qué orden? ¿El desarrollo del significado *similitud numérica* es consecuencia directa del tipo de intervención realizada en el aula o de la falta de importancia que otorgan los alumnos a la estructura de las sentencias? ¿Se confirma la conjetura de que, en el contexto de las igualdades y sentencias aritméticas, los alumnos desarrollan su comprensión del signo igual aumentando el número de significados que otorgan al signo igual en vez de reconociendo el significado del signo igual *equivalencia numérica* como significado global de este signo?

Adicionalmente, como se ha indicado en el capítulo 6, se identifican dos líneas de interés en las cuales profundizar el estudio del pensamiento relacional: el proceso de generalización de las propiedades aritméticas, una vez los alumnos han explicitado el uso de pensamiento relacional, y el uso del pensamiento relacional en contextos algebraicos, en especial en el trabajo con expresiones, igualdades y ecuaciones algebraicas.

Referencias

Abbagnano, N. (1974). *Diccionario de Filosofía* (2ª Edición). México: Fondo de Cultura Económica.

AERA (2004). Design-Based Research: Grounding a New Methodology. Descargado el 5 de Junio de 2006 de http://convention.allacademic.com/aera2004/AERA_papers/AERA_sess_1035_11160a.pdf.

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático.* Barcelona: Editorial Graó.

Almodóvar, J. A, García, F., Garín, M., Gómez, R., Rodríguez, M. y Uriondo, J. L. (2005). Matemáticas 4. Primaria. Madrid: Santillana.

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Giménez, J. y Torra, M. (1996). *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Editorial Graó.

Álvarez-Gayou, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología.* México: Paidós Educador.

Andrews, G. (1996, agosto). *Assessment of relational reasoning in children age 4 to 8 years.* Presentado en el encuentro bianual de la Internacional Society for the Study of Behavioural Development, Quebec, Canadá. Descargado el 9 de Septiembre 2005 de http://www.eric.ed.gov/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno= ED402073.

Anglada, C. (2000). *La evolución de la igualdad en escolares de 10 a 14 años de edad.* Trabajo de investigación tutelada no publicado, Dpto. de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga, Málaga.

Anguera, M. T. (1991). Proceso de Categorización. En M. T. Anguera (Ed.), *Metodología observacional en la investigación psicológica. Vol I.*

Fundamentación (1) (pp. 115-167). Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense–making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Arcavi, A. (1995). …Y en matemáticas, los que instruimos, ¿qué construimos? *Substratum*, 6, 2, 77-94.

Aristóteles (1998). *Metafísica.* Madrid: Editorial Gredos.

Artigue, M. (1984). *Contribution à l´étude de la reproductibilité des situations didactiques. Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques.* Thése de Doctorat d´Etat, Université Paris VII, Paris.

Ashlock, R. B. (1971). Teaching the basic facts: three classes of activities. *Arithmetic Teacher*, *18* (6), 359-364.

Banerjee, R. y Subramaniam, K. (2004). "Term" as a bridge concept between algebra and arithmetic. Actas de *epiSTEME -1 An international conference to review research on Science. Technology and Mathematics Education* (pp. 76-77). India: Homi Bhabha Centre for Science Education. Descargado el 2 de Junio de 2006 de http://www.hbcse.tifr.res.in/episteme1/conf_proc/abstracts/epi-abs.pdf.

Banerjee, R. y Subramaniam, K. (2005). Developing procedure and structure sense of arithmetic expressions. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds), *Proceedings of the 29th Conference of Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, (pp. 121-128). Melbourne: Department of Science and Mathematics Education, University of Melbourne.

Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14.

Baroody, A. J. (1987). Problem size and mentally retarded children's' judgement of commutativity. *American Journal of Mental Deficiency, 91,* 439-442.

Baroody, A. J. (1999). Children relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 17*(2), 137-176.

Baroody, A. J., Berent, R. y Packman, D. (1982). The use of mathematical structure by inner city students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 4*(2), 5-13.

Baroody, A. J. y Coslick, R. T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power. An Investigative Approach to K–8 Mathematics Instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J. y Gannon, K. E. (1984). The development of commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction, 1*, 321-339.

Baroody, A. J. y Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal, 84*(2), 199-212.

Baroody, A. J. y Ginsburg, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, N.J.: Laurence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., Ginsburg, H.P. y Waxman B. (1983). Children's' use of mathematical structure. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(3), 156-168.

Baroody, A. J., Wilkins, J. L. M. y Tiilikainen, S. (2003). The development of children's understanding of additive commutativity: from protoquantities concept to general concept? En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (pp. 161-187). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Bastable, V. y Schifter, D. (en prensa). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Descargado el 2 de Enero de 2004 de http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M, Erlwanger, S. y Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-15.

Bell, A. (1988). Algebra—Choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1 (pp. 147-153). Veszprém, Hungary: OOK.

Bennet, J. (1993). *Elementary Systematics: a tool for understanding wholes*. Santa Fe: Bennet Books.

Berger, J. (1973). *Ways of Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp.135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Booth, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School, 11*(3), 5-6.

Booth, L. R. (1989). A question of structure or a reaction to: "the early learning algebra: a structural perspective". En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4 (pp. 57-59). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Booth, L. R. (1999). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and others publications* (pp. 299-307). Reston, VA: NCTM.

Booth, S. (2004a). Learning and teaching for understanding mathematics. En M. Demlov y D. Lawson (Eds.), *Proceedings of the 12th European Society for Engineering Education Maths Working Group Seminar* (pp. 12-25). Vienna: University of Technology. Descargado el 3 de Octubre de 2006 de http://learn.lboro.ac.uk/mwg/sefi2004.pdf

Booth, S. (2004b). Engineering education and the pedagogy of awareness. En C. Baillie y I. Moore (Eds.), *Effective Learning and Teaching in engineering* (p. 9-23). London: Kogan Page. Descargado el 3 de Octubre de 2006 de http://www.pedagog.lu.se/personal/sb/publications.htm.

Boulton–Lewis, G.M., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H. y Wills, L. (2000). Pre–Algebra: a cognitive perspective. En A. Olivier y K. Newstead (Eds), *Proceedings of the 22nd International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 144-151). Stellenbosch, South Africa: Program Committee for PME22.

Bouvier, A. y George, M. (2000). *Diccionario de matemáticas* (2ª Edición). Madrid: Akal ediciones.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Briars, D. J. y Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, *1,* 245-296.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and function tables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.110-119). Melbourne: University of Melbourne.

Brizuela, B. M. y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 2 (pp. 137-144). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Brown, S. I. (1981). Sharon's 'Kye'. *Mathematics Teaching, 94,* 11-17.

Brugger, W. (1965). *Diccionario de Filosofía.* Barcelona: Editorial Herder.

Bruner, J. S. (1963). *The process of education.* New York: Random House.

Brush, L. R. (1978). Preschool children's knowledge of addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 44-54.

Bult, B. y Hobbs, D. (2001). *Léxico de Matemáticas.* Madrid: Ediciones Akal.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1), 113-148.

Byers, V. y Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching, 81*, 24-27.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations.* New York: Dover Publications.

Canobi, K. H., Reeve, R. A. y Pattison, P. E. (2002). Young children's understanding of addition concepts. *Educational Psychology, 22*(5), 513-532.

Carpenter, T. P. (1980). Heuristic strategies used to solve addition and subtraction problems. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 317-321). Berkeley: University of California.

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E. y Wilson, J. W. (1976). Notes form national assessment: Estimation. *Arithmetic Teacher*, *23*(4), 296-302.

Carpenter, T. P., Fennema E., Franke, M. L., Levi, L., y Empson, S. B. (2000, septiembre). *Cognitive Guided Instruction: A research-based Teacher Professional Development Program for elementary School Mathematics*. Research Report for the National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Madison: Universidad de Wisconsin-Madison.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.155-162). Melbourne: University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2005). *From children's Mathematics to Thinking Mathematically: Integrating Algebraic Reasoning with the Development of Basic Number Concepts and Skills.* Documento no publicado.

Carpenter, T. P. y Lehrer R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T. A. Romberg, (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: concepts and processes* (pp. 7-44). New York: Academic Press.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000, octubre). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en the *Twenty–second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,*Tucson, Arizona. Descargado el 5 de Noviembre de 2005 de http://www.earlyalgebra.terc.edu/OurPapers/Carraher%20et%20all%20PME%20NA%202000.pdf.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? En M. van der Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37* (2), 87-115.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ICE UB/HORSORI.

Castro E., Rico, L. y Castro E. (1987). *Números y Operaciones. Fundamentos para la aritmética escolar.* Madrid: Editorial Síntesis.

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), 361-371

Cauzinille–Marmeche, E., Mathieu, J. y Resnick, L. B. (1984, abril). Children's understanding of algebraic and arithmetic expressions. Presentado en el encuentro annual de la American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Cauzinille–Marmeche, E., Mathieu, J. y Resnick, L. B. (1987). L'Intégration de nouvelles connaissances: entre arithmétique et Algèbre. *European Journal of Psychology of Education*, *11*(1), 41-37.

Chaiklin, S. y Lesgold S. (1984). *Prealgebra students' knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions.* Technical report, Learning research and development center, University of Pittsburgh, Pennsylvania.

Chávez, C. y León, A. (Eds.) (2003). *La Biblia de las Matemáticas*. México: Editorial Letrarte.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 16-30.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (en prensa). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, D. Lesh y J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. y Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences, 10*, 113-164.

Cobb, P., Yackel, E., y Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for research in Mathematics Education,* Vol. 23, no.1, 2-33.

Collins, A. (1992). Towards a design science of education. En E. Scanlon y T. O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology* (pp. 15-22). Berlin: Springer-Verlag.

Collins, A. (1999). The changing infrastructure of education research. En E. Lagemann y L . Shulman (Eds), *Issues in education research* (pp. 289-298). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Collis, K. F. (1974, junio). Cognitive development and mathematics learning. Presentado en *Psychology of Mathematics Education Workshop*, Centre for Science Education, Chelsea College, London.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Confrey, J. y Lachance, A., (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). New Jersey: Lawrence Erlbaum associates.

Corsini, R. J. (1999). *The dictionary of psychology*. Philadelphia: Brunner/Mazel.

Cowan, R. (2003). Does it all up? Changes in children's knowledge of addition combinations, strategies, and principles. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (pp. 161-187). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Davis, R. B. (1964). *Discovery in mathematics: A text for teachers.* Palo Alto, CA: Addison-Wesley.

Davis, R. B. (1985). ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour, 4,* 195-208.

Davis, R. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* vol. 4 (pp. 266-274). Reston, VA: NCTM y Laurence Erlbaum Associates.

Davydov, V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, 8, 27-37.

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Dede, C. (2004). If design-based research is the answer, what is the question? A commentary on Collins, Joseph, and Bielaczyc; diSessa and Cobb; Fishman, Marx, Blumenthal, Krajcik, and Soloway in the JLS Special Issue on Design-Based Research. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 105-114.

Denmark, T., Barco, E. y Voran, J. (1976). *Final report: a teaching experiment on equality.* Tallahassee: Florida State University.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Ediciones Paidós.

Díaz, M. (1990). *Diccionario Básico de Matemáticas.* Madrid: Anaya.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1988). *Children learning mathematics: a teachers' guide to recent research.* England: CASSELL for The Schools Council Publications.

diSessa, A. A. y Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 77-103.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Utrecht, Utrecht. Descargado el 1 de Febrero de 2005 de http://www.library.uu.nl/digiarchief/dip/diss/2003–0925–101838/in houd.htm.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. V. Dormolen (Eds), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp.63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorsch, F. (1985). *Diccionario de Psicología.* Barcelona: Editorial Herder.

Doumas, L.A.A. y Hummel J.E. (2005). Approaches to modeling human mental representations: what works, what doesn't and why. En K .J. Holyoak y R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (pp.73-91). New York: Cambridge University Press.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Kluwer Academic Publishers.

Duffin, J. y Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonene (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4 (pp. 166-173). Lhati, Finland: University of Helsinki. Lhati Research and Training Centre.

Evens, H. y Houssart, J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: 'I know but I can't explain'. *Educational Researcher 46*(3), 269-282.

Ewbank, W. A. (1977). Mental arithmetic. A neglected topic? *Mathematics in School 6*(5), 28-31.

Falkner, K. P., Levi, L. y Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics,* 6, 232-236.

Farran, J. I. (2003). Relaciones. Consultado el 4 de Febrero de 2006 en http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Relaciones/marco_relaciones.htm

Feferman, S. (1989). *The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.

Fennel, F. y Rowan, T. (2001). Representation: An Important Process for Teaching and Learning Mathematics. *Teaching children mathematics*, *7*(5), 288-292.

Ferrater, J. (1988). *Diccionario de Filosofía.* Madrid: Alianza Editorial.

Ferrater, J. y Leblanc, H. (1967). *Lógica Matemática.* México: Fondo de Cultura Económica.

Ferrero, L., Gaztelu, I., Martin, P. y Martínez, L. (Ed.) (2001). *La tira de Colores. Matemáticas Andalucía 3. Segundo ciclo de Primaria.* Madrid: Anaya.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics, 9*(2), 19-25.

Foster, R. (1994). Counting on Success in Simple Arithmetic Tasks. En J. P. Ponte y J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 360-367). Lisbon: University of Lisbon.

Foxman, D. y Beishuizen, M. (1999). Untaught mental calculation methods used by 11-years-olds: some evidence from the assessment of performance unit survey in 1987. *Mathematics in School, 27,* 5-7.

Fregoso, A. (1977). *Los elementos del lenguaje de la matemática. Lógica y teoría de conjuntos.* México: Editorial Trillas.

Freiman, V. y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 415-422). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics,* 5, 391-412.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenológica didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados). Traducción, notas e introducción de L. Puig.* México D.F.: Cinvestav del IPN.

Frye, N. (1987). The symbol as a medium of exchange. En J. Leith (Ed.), *Symbols in Life and Art* (pp. 3-16). Montreal: McGill-Queen's University Press.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 1 (pp. 49-66). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Fujii, T. y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.258-264). Melbourne: University of Melbourne.

Fuson, K. C., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P.G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. y Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130-162.

Gallardo, A. y Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Reserches en Didactique des Mathémathiques, 9*(2), 155-188.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.* Tesis Doctoral no publicada, Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga, Málaga.

García, J. y Moreno, S. (1998). *Conceptos fundamentales de psicología.* Madrid: Alianza Editorial.

García, P. (1992). *Diccionario de Términos Matemáticos.* Valladolid: Editorial La Calesa.

Gattegno, C. (1971). *What we owe children.* New York: Avon books.

Gattegno, C. (1974). *The commom sense of teaching mathematics.* New York: Educational Solutions.

Gattegno, C. (1987). *The Science of Education: Part 1: Theoretical Considerations.* New York: Educational Solutions.

Gentner, D. y Loewenstein, J. (2002). Relational Language and Relational Thought. En E. Amsel y J. P. Byrnes (Ed.), *Language, Literacy, and Cognitive Development: The development and consequences of symbolic communication,* (pp. 87-120). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Descargado el 5 de Octubre de 2005 de http://www.psych.northwestern.edu/psych/people/faculty/gentner/newpdfpapers/GentnerLoewenstein02b.pdf.

Ginsburg, H. P. (1977). *Children's arithmetic.* New York: Van Nostrand.

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gómez, B. (1989). Cálculo Mental: Clasificación de estrategias. *Enseñanza de las ciencias. Número extra (III Congreso Internacional sobre la didáctica de las ciencias y de las matemáticas)*, Tomo 1, 287-288.

Gómez, B. (1995a). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 13*(3), 313-325.

Gómez, B. (1995b). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma,* 20, 61-68.

Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 4,* 17-29.

Greeno, J. G. (1982, marzo). *A Cognitive Learning Analysis of Algebra*. Presentado en the meeting of the American Educational Research Association, Boston, MA.

Gregorio, J. R. (2004). El cálculo en el primer ciclo de Primaria. *Sigma, 25,* 71-97.

Gray, E. M. y Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Groen, G. J. y Poll, M. (1973). Subtraction and the solution of open sentence problems. *Journal of Experimental Child Psychology, 16*, 292-302.

Grouws, D. A. (1972). Open sentences: some instructional considerations from research. *Arithmetic Teacher, 19*(7), 595-599.

Grouws, D. A. (1974). Solution methods used in solving addition and subtraction open sentences. *Arithmetic Teacher, 21*(3), 255-261.

Grouws, D. A. y Good, T. L. (1976). Factors associated with the third-and fourth–grade children's' performance in solving multiplication and division sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*(3), 155-170.

Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

Hall, R. D. G. (2002). An Analysis of Thought Processes during Simplification of an Algebraic Expression. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 15*(1). Descargado el 1 de Febrero de 2005 de http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome 15/r_hall_expressions.pdf.

Hejny, M. (2001). Creating Mathematical Structure. En J. Novotná (Eds), *Proceedings of the European Research in Mathematics Education II* (pp.14-24). Mariánské Lázně, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.

Hejny, M., Jirotkova, D. y Kratochvilova J. (2006). Early conceptual thinking. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 289-296). Prague, Czech Republic: PME 30.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3ª Edición). México: McGraw-Hill.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Hewitt, D. (1994). The Principle of Economy in the Learning and Teaching of Mathematics. Tesis doctoral. Centre for Mathematics Education, The Open

University, Milton Keynes. Descargado el 9 de Junio de 2006 de http://www.education.bham.ac.uk/staff/profiles/hewitt_d.htm.

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching, 163*, 19-29.

Hewitt, D. (2001). Arbitrary and Necessary: Part 3 Educating awareness. *For the Learning of Mathematics,* 21(2), 37-49.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). NY: Macmillan.

Hiebert, J., Carpenter T. P., Fennema, E., Fuson, K. F., Wearne, D., H., Murray, H., Olivier, A., y Human, P. (1997). *Making sense. Teaching and Learning mathematics with understanding.* Portsmouth: Heinemann.

Hoch, M. (2003, marzo). Structure sense. Presentado en the third Conference of the European Researchers in Mathematics Education, Bellaria, Italy. Descargado el 5 de Junio de 2006 de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_hoch_cerme3.pdf.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 3 (pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 3 (pp. 145-152). Melbourne: PME.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 3 (pp. 305-312). Praga: PME.

Honderich, T. (2001). *Enciclopedia Oxford de Filosofía.* Madrid: Editorial Tecnos.

Hope, J. (1989). Promoting Number Sense in School. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 12-16.

Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 6-11.

Huffersd-Ankles, K., Fuson, K. C., y Gamoran Sherin, M. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education,* 35, 81-116.

Irwin, K. C. (1996). Children's understanding of the principles of covariation and compensation in part–whole relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 25-40.

Jones, I. (2006). The equals sign and me. *Mathematics teaching incorporating micromath, 194*, 6-8.

Jones, I. y Pratt, D. (2005). Three utilities for the equal sign. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 3 (pp. 185-192). Melbourne: PME.

Junker, B. (1960). *Field work. An introduction to the social sciences.* Chicago: University of Chicago Press.

Kamii, C. (1992). *Reinventando la Aritmética II* (B. Jiménez, Trad.). Madrid: Visor. (Trabajo original publicado en 1989).

Kaput, J. (1978). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1995, octubre). *A research base supporting long term algebra reform?* Presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH.

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Descargado el 10 de Octubre de 2003 de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4.

Kelly, A. E. (2004). Design research in education: yes, but is it methodological? *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 115-128.

Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kenny, A. (1997). *Introducción a Frege.* Madrid: Ediciones Cátedra.

Kindt, M. (1980). Als een kat om de hete algebrij. *Wiskrant*, *5*(21), 155-157

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4 (pp. 33-59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates and NCTM.

Kieran, C. (1991). A procedural–structural perspective on Algebra Research. En F. Furinghetti (Ed), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 245-253). Assisi, Italy: PME Program Committee.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (A project of the NCTM)* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. y Chalouh, L. (1993). The transition from arithmetic to algebra. En T. D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 179-198). New York: Macmillan Publishing Company.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2005). Middle School Students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik [International Reviews on Mathematics Education], 37*(1), 68-76

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297-312.

Koehler, J. (2002). *Algebraic Reasoning in the Elementary Grades: Developing an Understanding of the Equal Sign as a Relational Symbol*. Tesis de master no publicada, Universidad de Wisconsin–Madison, Wisconsin.

Koehler J. (2004). *Learning to think relationally: thinking relationally to learn.* Tesis doctoral no publicada. Universidad of Wisconsin–Madison, Wisconsin.

Komorek, M. y Duit, R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of nonlinear systems. *International Journal of Science Education, 26*(5), 619-633. Descargado el 30 de Junio de 2006 de http://www.ipn.uni-kiel.de/abt_physik/nlphys /paper.pdf.

Lampert, M. (1989). Arithmetic as problem solving. *Arithmetic Teacher*, 36, 34- 36.

Larroyo, F. (1982). *Aristóteles. Tratados de Lógica (El organon).* México: Editorial Porrúa.

Lee, L. (en prensa). What is algebra? En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Descargado el 2 de Enero de 2004 de http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html.

Lee, L. y Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics, 20*(1), 41-45.

Lelong-Ferrand, J. y Arnaudiès, J. M. (1979). *Curso de matemáticas. Tomo I. Álgebra*. Barcelona: Editorial Reverté.

Lesh, R. A. y Kelly, A. E. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Lesh, R. A. y Kelly, A. E. (n.d.). *Design Experiments in Mathematics Education.* Descargado el 24 de Febrero de 2006 de http://gse.gmu.edu/research/de /Lesh_Design%20Exp%20in%20Math%20Ed%206.pdf.

Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999, Julio). *From Numerical Equivalence To Algebraic Equivalence. Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI).* Presentado en el V congreso anual de la Asociación de Educación Matemática de Sur África (AMESA), Puerto Elizabeth. Descargado el 15 de Febrero de 2005 de http://www.wcape.school.za/malati/Files/Structure992.pdf.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre–algebra. *Journal of Mathematical Behaviour, 14,* 113-120.

Linchevski, L. y Herscovics, D. (1994). Cognitives obstacles in pre-algebra. En J. P. Ponte y J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 176-183). Lisbon: University of Lisbon.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structural Sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

Linchevski, L. y Vinner, S. (1990). Embedded figures and the structures of algebraic expressions. En G. Booker, P. Cobb y T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 2 (pp. 85–92). Oaxtepec, Mexico: PME Program Committee.

Lindvall, C. M. e Ibarra, C. G. (1978). *An analysis of incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences*. Presentado en el encuentro anual de American Educational Research Association. Toronto, Notario.

Lindvall, C. M. e Ibarra, C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1), 50-62.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 151-175). Madrid: Editorial Síntesis.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

MacGregor, M. (1996). Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 9*, 65-69.

Mack, N. K., (1990). Learning Fractions with understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21, 16 – 32.

MacNeil, N. M. (2004, agosto). Don't teach me 2 + 2 equals 4: Knowledge of arithmetic operations hinders equation learning. Presentado en the 26th annual meeting of Cognitive Science Society, Chicago, Illinois.

MacNeil, M. N. y Alibali, M. W. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive Science*, *28*(3), 451-466.

Malara, N.A. (2003). Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an Early Algebra project. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 1 (pp. 33-48). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Marshall, S. P. (1989). Retrospective paper: number sense conference. En J. T. Sowder y B. P. Schappelle (Eds), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 40 -42). San Diego: San Diego State University Centre for Research in Mathematics and Science Education.

Marton, F. y Booth, S. (1996). The learner's experience of learning. En D. R. Olson y N. Torrance (Eds.), *The Handbook of Education and Human Development: New Models of Learning, Teaching and Schooling* (pp.534-564). Cambridge, MA: Blackwell Publishers.

Marton, F. y Booth, S. (1997). *Learning and Awareness.* Mahwak, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Mason, J. (1991). *Supporting primary mathematics: Algebra.* Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mason, J. (1996a). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996b). *Researching form the inside in mathematics education: locating and I-you relationship.* An expanded version of a plenary presentation to PME XVII (Lisbon, 1994). Milton Keynes: Centre for Mathematics Education, Open University.

Mason, J. (2003). On the Structure of Attention in the Learning of Mathematics. *Australian mathematics teacher, 59*(4), 17-25.

Mason, J. (2004, julio). Doing, Construing and Doing + Discussing, Learning: The Importance of the Structure of Attention. Presentado en the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark.

Mason, J. (2006, abril). Role and use of mental imagery in teaching mathematics. Seminario celebrado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Mason, J. (pendiente de aceptación). Research and practice in algebra: interwoven influences.

Mason, J., Graham, A., Gower, N. y Pimm, D. (1985). *Routes to / roots of algebra.* Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mason, J., Graham, A. y Johnston–Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: The Open University y Paul Chapman Publishing.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2004a). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans: Tarquin Publications y The Open University.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2004b). *Fundamental constructs in mathematics education.* London: RoutledgeFalmer y The Open University.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les estructures numériques à l' école primaire*. Paris: Ellipses.

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Paidós.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2*(5), 322-327.

Meavilla, V. (2001). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales.* Zaragoza: Prensas Universitárias de Zaragoza.

Mevarech, Z. R. y Yitschak, D. (1983). Students' misconceptions of the equivalence relationship. En Hershkowitz, Weizmann Institute of Science (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 313-318). Rehobot, Israel.

Miras, J. (1994). El área de las matemáticas: Enfoque y características. Construcción del conocimiento matemático. Aportación del área a los objetivos generales de etapa. Análisis de objetivos, contenidos y criterios de evaluación. El área de matemáticas en relación con otras áreas. Intervención Educativa. En J. A. García y P. García (Coord.), *Contenidos Educativos Generales en Infantil y Primaria* (pp. 457-478). Málaga: Ediciones Aljibe.

Mitchell, C. E. (1983). The non-conmutativity of subtraction. *School, Science and Mathematics, 83*(2), 133-139.

Molina, M. (2005). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de* *pensamiento relacional.* Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2005). Enriching Arithmetic Learning by Promoting Relational Thinking. *International Journal of Learning*, *12*(5), 265-270.

Moliner, M. (1998). *Diccionario del uso del español.* Madrid: Editorial Gredos.

Mondragón, G. L. (2003). La exploración del pensamiento Infantil. *Xictl. Revista Oficial de la Unidad 094 D.F. Centro de la Universidad Pedagógica Nacional de México 49.* Descargado el 1 de Marzo de 2006 de http://www.unidad094.upn.mx/ revista /49/exploracion.htm.

Moreno Armella, L. y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. *Educación Matemática*, *4*(2), 7- 15.

Morris, A. (1999). Developing concepts of mathematical structure: pre–arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(1), 44-72.

Morris, C. (1946). *Signs, language and behaviour*. New York: Prentice-Hall.

Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: the notion of "connected knowing". En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 3 (pp. 377-384). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Moya, J. (1998). *El pensamiento.* En A. Puente (Ed), Psicología Básica. Madrid: Ediciones Pirámide.

Myers, A. C. y Thornton, C. A. (1977). The Learning Disabled Child−Learning the Basic Facts. *Arithmetic Teacher, 25*(3), 46-50.

Myers, D. G. (1999). *Psicología.* Madrid: Editorial Medica Panamericana.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Nesher, P. (1980). The internal representation of open sentences in arithmetic. En R. Karplus (Ed), *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 271-278). Berkeley: University of California.

Nibbeling, W. H. (1981). A comparison of vertical and horizontal forms of open sentences relative to performance by first graders, some suggestions. *School, Science and Mathematics, 81*(7), 613-619.

Novotná, J., Stehlíková, N. y Hoch, M. (2006). Structure sense for University algebra. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 4 (pp. 249-256). Praga: PME.

O'Brien, T. C. (1974). New Goals for Mathematics Education. *Childhood education, 50*(4), 214-216.

O'Brien, T. C. (1989). Some thoughts on treasure keeping. *Kappan,* 70, 360-364.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Tenerife.

Pedro-Viejo, M. J., Marín, M., Lorenzo, J. M. y Molina, P. (1994). Matemáticas. Primaria 1. Madrid: Ediciones SM.

Perry, M. (1985, abril). *Children's strategies in interpreting symbolic equivalence.* Comunicación presentada en el encuentro bianual de la Society for Research in Child Development, Toronto, Canada.

Perry, M., Church, R. B. y Goldin–Meadow, S. (1988). Transitional knowledge in the acquisition of concepts. *Child Development, 3,* 359-400.

Piaget, J. (1984). *La representación del mundo en el niño*. (6ª Edición). Madrid: Ediciones Morata.

Piaget, J. y Beth, E. (1980). *Epistemología matemática y psicología.* Barcelona: Crítica.

Piccioto H. (1998). *Operation Sense, Tool–Based Pedagogy, Curricular Breadth: A Proposal.* Descargado el 20 de Diciembre de 2005 de http://www.picciotto.org /math–ed/early-math/early. html.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula.* (2ª Edición). Madrid: Ediciones Morata.

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 159-181.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School, 8*(3), 2-5.

Ponte, J. (1994). Mathematics teachers´ professional knowledge. En J. Ponte, y J. Mantos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1 (pp.195-210). Lisboa, Portugal: PME Program Committee.

Postigo, L. (1991). *Matemática Práctica. Enciclopedia temática Sopena.* Barcelona: Editorial Ramón Sopena.

Pramling, I. (1996). Understanding and empowering the child as a learner. En D. R. Olson y N. Torrance (Eds.), *The Handbook of Education and Human Development: New Models of Learning, Teaching and Schooling* (pp.565-592). Cambridge, MA: Blackwell Publishers.

Proyecto Sur (1997). *Construir las matemáticas. 2º ESO.* Granada: Proyecto Sur.

Putnam, R. T., deBettencourt, L. U. y Leinhardt, G. (1990). Understanding of derived-fact strategies in addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 7*(3), 245-285.

Radford, L. (2000). 'Signs and Meanings in students´ emergent algebraic thinking: a semiotic analysis'. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. y Grenier, M. (1996). On the dialectical relationships between symbols and algebraic ideas. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th international conference for the psychology of mathematics education*, Vol. 4 (pp. 179-186). Valencia: Dept. de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Rathmell, E. C. (1978). Using thinking strategies to teach the basic facts. En M. N. Suydam y R. E. Reys (Eds.), *Developing Computational Skills. 1978 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.13-38). Reston, VA: NCTM.

Real Academia Española (RAE) (1992). Diccionario de la Lengua Española. Madrid: Autor.

REAL DECRETO 115/2004, de 23 de enero. BOE núm. 33, 7 de Febrero de 2004, pp. 5359–5391.

REAL DECRETO 116/2004, de 23 de enero. BOE núm. 35, 10 de Febrero de 2004, pp. 5766–5773.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds), *Analysis de arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B., Bill, V. y Lesgold, S. (1992). Development of thinking abilities in arithmetic class. En A. Demetriou, M. Shayer y A. Efklides (Eds.), *Neo-piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education*. (pp. 210-230). London: Routledge.

Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J. y Wyatt, J. W. (1980). *Identification and characterization of computational estimation processes used by in-schools pupils and out-of-school adults.* Final Report, National Institute of Education, Grant No. 79-0088.

Rico, L. (1997). *Apuntes sobre fenomenología*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (1998). Los organizadores del Currículo de Matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.39-59). Barcelona: Horsori.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L. et al. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Editorial Horsori e Institut de Ciències de l'Educació.

Rico, L., Castro, E., Fernández, A., Fortuny, J. M., Valenzuela, J. y Valldara, J. (1990). Guía Didáctica. Matemáticas. 4º E.G.B. Salamanca: Editorial Algaida

Riley, M. S. y Greeno, J. G. (1978, noviembre). *Importance of semantic structure in the difficulty of arithmetic word problems*. Presentado en el encuentro anual de Midwestern Psychological Association, Chicago, IL.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 231-255). Madrid: Editorial Síntesis.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students´ Access to Significant Mathematical Ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 143-163). Mahwak, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Rombert, T. A. y Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. En E. Fennema y T. A. Rombert (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 3-17). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Romero, I. (2000). *Representación y comprensión en pensamiento numérico*. Trabajo presentado en el IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva.

Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización formal y modelización en álgebra. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds), *Investigación en educación matemática. Séptimo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rubenstein, R. N. y Thompson, D. R. (2001). Learning Mathematical Symbolism: Challenges and Instructional Strategies. *Mathematics Teacher, 94*(4), 265-271.

Ruesga, M. P. (2003). *Educación del razonamiento lógico matemático en Educación Infantil.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Barcelona, Barcelona.

Ruiz, L. (1991). *Una aproximación a las concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función.* Memoria de tercer ciclo no publicada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis Epistemológico y Didáctico.* Tesis Doctoral no publicada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

Sacristán, M. (1973). *Introducción a la lógica y al análisis formal.* Barcelona: Ariel.

Sáenz-Ludlow, A. y Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*(2), 153-187.

Santamaría, C. (1995). *Diccionario de Matemáticas de Primaria y Secundaria*. Madrid: Editorial Escuela Española.

Sawyer, R. K. (2006). The New Science of Learning. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 1-18). New York, NY: Cambridge University Press.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations. Early algebraic thinking in grades K–6. En L. V. Stiff y F. R. Curcio (Eds.)*, Developing mathematical reasoning in grades K–12* (pp. 62-81). NCTM Yearbook. Reston, VA: NCTM.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J. y Bastable, V. (en prensa). Early Algebra: What Does Understanding the Laws of Arithmetic Mean in the Elementary Grades? En

J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp. 127-134). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M. y Jones, W. (1998). *Solving algebra problems before Algebra Instruction.* National Science Foundation, Arlington, VA.

Schoenfeld, A. H. y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*, 420-427.

Seco, M., Andrés, O. y Ramos, J. (1999). *Diccionario del Español Actual*. Madrid: Aguilar.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Editorial Síntesis.

Seo, K. H. y Ginsburg, H. (2003). "You've got to carefully read the math sentence…": classroom context and children's interpretations of the equal sign. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (pp. 161-187). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Serra, T. (2004). Hablar de «mates» en clase. *Uno, Revista de Didáctica de las matemáticas,* 35, 23-38.

Serrano, J. A. (1979). *Pensamiento y concepto.* México: Editorial Trillas.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 191-228.

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L. y Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher, 32*(1), 25-28.

Shavelson, R. J. y Towne, L. (2002). *Scientific research in education.* Washington, DC: National Academy Press.

Shoecraft, P. (1989). Equals means is the same as. *Teaching children mathematics, 36*(8), 36-40

Shuard, H. y Rothery, A. (1988). *Children Reading Mathematics*. London: John Murray.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London: The Falmer Press.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-45.

Sisofo, E. (2000). Can the Instruction of the Davydov Curriculum develop American Children's Notion of the "=" symbol as a relational symbol rather than an operational "do something" symbol? Propuesta de tesis doctoral. Descargado el 19 de Abril de 2004 de http://ematusov.soe.udel.edu/educ820.00s/.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Slavin, R. E. (2003). *Educational Psychology* (7ª Edición). Boston, MA: Pearson Education.

Slavit, D. (1995, octubre). *Operational sense in first grade addition*. Presentado en *the seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Columbus, OH. Descargado el 10 de Mayo de 2005 de http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED389623.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Smith, J. C. (2006). Revisiting algebra in a number theoretical setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education* (pp. 249-283). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison. Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Sowder, J. (1992). Estimation and Number Sense. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). NY: Macmillan Publishing Company and NCTM.

Stallings, L. (2000). A Brief History of Algebraic Notation. *School, Science and Mathematics*, *100*(5), 230.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. y Ktorza, D. (1990). Algebra Students' Knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 112-121.

Subramaniam, K. (2004, Julio). Naming practices that support reasoning about and with expressions. Presentado en the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark.

Subramaniam, K. y Banerjee, R. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expressions. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 3 (pp. 121-128). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Sutherland, R. (en prensa). A dramatic shift of attention: From arithmetic to algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Descargado el 2 de Enero de 2004 de http://www.simcalc.umassd. edu/earlyalgebra/EABookChapters.html.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A., y Lins, R. (Eds.) (2001). *Perspectives on school algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Svenson, O. y Hedenborg, M. L. (1979). Strategies used by children when solving simple subtractions. *Acta psychologica*, 43, 1-13.

Tall, D. (2001). Reflections on Early Algebra. En M. van der Heuven-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 149-152). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray E. y Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 1-19.

Teppo, A. R. (2001). Unknowns or place holders? En M. van der Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 153-155). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Theis, L. (2005). L' apprentissage du signe =: un obstacle cognitive important. *For the Learning of Mathematics, 25*(3), 7-12.

Thiele, C. L. (1938). *The contribution of generalization to the learning of addition facts.* New York: Teachers College, Columbia University Bureau of Publications, 1938.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction, part 1. *Mathematics in School, 28*(5), 2-4.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction, part 2. *Mathematics in School, 29*(1), 24-26.

Thompson, P. W. (1979, marzo). *The Constructivistic Teaching Experiment in Mathematics Education Research.* Presentado en the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston, Massachusetts.

Thornton, C. A. (1978). Emphasizing thinking strategies in basic fact instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(3), 214-227.

Tododeiure. Diccionario Filosófico. Consultado el 4 de Noviembre de 2005 en http://tododeiure.atspace.com/filosofico.htm.

Trafton, P. R. (1978). Estimation and mental Arithmetic. Important components of computation. En M. N. Suydam y R. E. Reys (Eds.), *Developing Computational Skills. 1978 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* (pp. 196-213). Reston VA: NCTM.

Trafton, P. R. (1989). Reflections on the number sense conference. En J. T. Sowder y B. P. Schappelle (Eds), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 74-77). San Diego: San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas. Tomo I.* (4ª Edición) Madrid: Imp Garrayasaza.

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition form arithmetic to algebra.* Uºtrecht: CD–β Press y Center for

Science and Mathematics Education. Descargado el 9 de Septiembre 2005 de http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/full.pdf.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight.* Academic Press. New York.

Van Reeuwijk, M. (en prensa). A Dutch Perspective. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Descargado el 2 de Enero de 2004 de http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 31-41.

Vergnaud, G. (1984). Understanding Mathematics at the Secondary–School Level. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, Research y Practice in Mathematical Education* (pp. 27-45). Adelaide, South Australia: Shell Centre for Mathematics Education, University of Nottingham.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1989). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs : Obstacles et conflicts* (pp. 76-83). Montréal, Canada: Agence d'Arc.

Vergnaud, G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (3ª edición). México: Editorial Trillas.

Vergnaud, G., Cortes, A. y Favre–Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès des débutants faibles: problèmes épistemologiques et didactiques. En G. Vergnaud, G. Brousseau y M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisitions des connaissances scientifiques: Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 259-280). Sèvres, France, La Pensé Sauvage.

Villegas, J. L. y Castro, E. (2003). Pensamiento en voz alta en resolución de problemas. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *IX simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Investigación en Educación Matemática* (pp. 349-354). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.

Vinográdov, I. M. (1860). *Enciclopedia de las Matemáticas.* Tomos 3, 4 y 6. Madrid: Editorial MIR. Rubiños.

Von Kutschera, F. (1979). *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Editorial Gredos.

Vygostky, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Wagner, S., Rachlin, S. L. y Jensen, R.J. (1984). *Algebra learning project: Final report.* Athens: Department of Mathematics, University of Georgia.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding and the importance of operation sense. En M. Heuvel–Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 399-406). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Warren, E. (2003).Young children's understanding of equals: a longitudinal study. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp. 379-387). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 417-424). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity. Learners generating examples.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Weaver, J. F. (1957). Developing Flexibility of Thinking and Performance. *Arithmetic Teacher, 4*(4), 184-188.

Weaver, J. F. (1971a). The symmetric property of equality relation and young children's ability to solve open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 4*(1), 45-56.

Weaver, J. F. (1971b). Some factors associated with pupils' achievement when solving selected types of simple open sentences. *Arithmetic Teacher, 18*(7), 513-519.

Weaver, J. F. (1972). The Ability of First–, Second–, and Third–Grade Pupils to Identity Open Addition and Subtraction Sentences for Which No Solution Exists Within the Set of Whole Numbers. *School, Science and Mathematics, 72*(8), 679-691.

Wheeler, R. F. (1981). *Rethinking Mathematical Concepts.* Chichester: Ellis Horwood Limited.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (en prensa). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. Descargado el 10 de Mayo de http://www.ugr.es/~jgodino /funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf.

Wolters, M. A. (1991). The equal sign goes both ways. How mathematics instruction leads to the development of a common misconception. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 (pp. 348-355). Assisi, Italy: PME Program Committee.

Woods, S. S., Resnick, L. B. y Groen, G. J. (1975). An experimental test of five process models of subtraction. *Journal of Educational Psychology*, *67*(1), 17-21.

Zanocco, P., Baeza, P., León, I. y Riveros, M. (2006, Febrero). *Una experiencia de perfeccionamiento en educación matemática modalidad on line.* Seminario impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada.

Anexos

Anexo A:

Uso de los términos comprensión y significado y nuestra visión del aprendizaje y la enseñanza

Comprensión, significado, aprendizaje, enseñanza y atención

En este primer anexo precisamos las acepciones de los términos comprensión y significado que se utilizan en este trabajo. Seguidamente resumimos la visión del aprendizaje presentada por Marton y Booth (1997), que nos conduce a presentar la idea de la estructura de la atención, la cual es de utilidad para detallar, en el análisis de los datos, algunos de los aspectos del uso de pensamiento relacional que evidencian los alumnos.

A.1 Comprensión y significado

Reconociendo la existencia de diversas aproximaciones dadas a la noción de comprensión del conocimiento matemático, en este trabajo, así como ocurre en otros desarrollados dentro del grupo Pensamiento Numérico, adoptamos la perspectiva representacionalista tomando como referencia los trabajos de Hiebert y Carpenter (1992) y Carpenter y Lehrer (1999).

Aproximación representacionalista

Esta aproximación se basa en el supuesto de que el conocimiento se representa de forma interna siguiendo una estructura, que se va creando de forma gradual, al incorporarse nueva información o establecerse relaciones entre la información ya existente. En este supuesto, se dice que un concepto matemático se comprende cuando su representación mental forma parte de una red interna de representaciones; haciéndose mayor la comprensión conforme la solidez y el número de los vínculos son mayores. La comprensión crece a medida que las redes se hacen más extensas y mejor organizadas. Por tanto, la comprensión no es un proceso de todo o nada (Hiebert y Carpenter, 1992).

Comprender las matemáticas implica desarrollar una red, armoniosa y consistente, que incorpore informaciones, relaciones, errores, hipótesis, previsiones, inferencias, inconsistencias, huecos, sentimientos, reglas y generalizaciones (O'Brien, 1989, citado por Mousley, 2004).

El desarrollo de la comprensión vendrá favorecido por la construcción de relaciones entre los conceptos matemáticos, la extensión y aplicación del conocimiento matemático, la reflexión sobre experiencias, la articulación de lo que se sabe y la interiorización del conocimiento matemático (Carpenter y Lehrer, 1999).

Algunas de las formas en las que se reconoce el desarrollo de esta red interna son, por ejemplo, descubrir una conexión entre conocimiento nuevo y conocimiento previo, reorganizar el conocimiento existente, generalizar o extender cierto conocimiento, cuestionarse sobre una estructura matemática, utilizar la abstracción para crear una estructura nueva más abstracta, o encontrar conexiones entre diferentes estructuras internas de conocimiento (Hejny, 2001).

A partir de la realización de diversos estudios en el contexto de la aritmética y el álgebra, Hejny (2001) identifica cuatro formas en las que se construye estructura interna: espontáneamente, mediante generalización, mediante analogía y en el trabajo en la resolución de un problema.

La comprensión no es entendida aquí como un fenómeno estático sino como algo que emerge, se desarrolla y evoluciona mediante la experiencia que posibilita el enriquecimiento y refinamiento reflexivo del modelo mental original (Carpenter y Lehrer, 1999).

De este modo, la visión representacionalista aporta un marco útil para entender la comprensión en términos de la estructuración de las representaciones internas del individuo.

Significado

Recurrimos a Sierpinska (1994) para delimitar la acepción del término significado que vamos a utilizar en este trabajo. Sierpinska entiende el significado de un objeto matemático como una clase de comprensión, cierta forma de comprender dicho objeto. Por tanto, se necesita al menos alguna comprensión de un objeto para comenzar a tener un significado de él. Según Sierpinska (1990), el objeto de la comprensión y del significado es el mismo, pero la comprensión es una experiencia mental, algo interno al alumno, mientras que el significado es de naturaleza pública.

Observamos que esta noción de significado es similar a cierta acepción, puramente cognitiva[88], del término concepción. Según explica Artigue (1984), el término concepción se utiliza para establecer una distinción entre el objeto matemático que es único, y las significaciones variadas que le pueden ser asociadas por los alumnos. Entendiendo que, a lo largo de su aprendizaje, el alumno irá desarrollando numerosas concepciones de un mismo objeto matemático.

Esta noción, según afirma Artigue, responde a la necesidad de poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modelos de tratamiento que le son asociados, poner en evidencia su adaptación más o menos buena, en la resolución de diferentes tipos de problemas, así como ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica.

El término concepción ha sido y es utilizado como recurso explicativo del fenómeno del conocimiento. Según Ponte (1994), las concepciones son parte del conocimiento, son los marcos organizadores que subyacen a los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma en que afrontamos las tareas.

Ruiz (1991, 1993), quien profundiza en el modo en que este término ha sido utilizado por diversos autores en el campo de la Educación Matemática, utiliza este término para referir a los conocimientos de un alumno sobre un objeto, originados como consecuencia de los procesos de enseñanza–aprendizaje. Según Ruiz, la mayor parte de los autores que han abordado la noción de concepciones reconoce la estrecha relación de éstas con las situaciones en las que el objeto matemático se dota de sentido. De ese modo, señala que, aunque las concepciones siempre tienen un carácter global, en una investigación específica, sólo son accesibles aspectos parciales, por tanto, concepciones parciales.

Por su parte, Vergnaud (1982) considera la concepción como un estado cognitivo global del sujeto que da cuenta de su estado de conocimientos en relación a un concepto.

[88] Ruiz (1991, 1993), citando a Artigue (1984), hace observar la existencia de dos sentidos complementarios del término concepción: el punto de vista cognitivo (los conocimientos y competencias del sujeto en relación a un objeto matemático particular) y el punto de vista epistemológico, en especial al considerar la génesis histórica, donde para un mismo concepto se han sucedido una diversidad de puntos de vista sobre él mismo.

Evaluación de la comprensión

Partiendo de las ideas anteriores, entendemos la comprensión como un proceso dinámico, en el cual se va enriqueciendo y refinando la red interna de representaciones, y, a la vez, como un estado que responde a la situación cognitiva del sujeto, en un determinado momento, en relación a un objeto matemático en cuestión (Duffin y Simpson, 1997).

Ante la imposibilidad de acceder a las representaciones internas del alumno, la evaluación o valoración de la comprensión del alumno ha de realizarse a partir de los comportamientos observables de los sujetos (Castro et al., 1997; Hiebert y Carpenter, 1992, Romero, 2000). Al poner al alumno ante un conjunto de tareas, éste manifestará algunos aspectos de su comprensión. En este sentido se entiende que la comprensión es local, pudiéndose distinguir niveles o grados de comprensión, como señala Gallardo (2004), en función del alcance, diversidad, complejidad, seguridad, efectividad o disponibilidad que manifieste el alumno en la utilización de sus conocimientos y capacidades, al dar dicha respuesta.

En el proceso de aprendizaje, el alumno irá pasando por estados de conocimiento o modos de comprensión, diferentes, relativos a un mismo objeto matemático. Son situaciones cognitivas resultado de las experiencias previas del alumno con dicho objeto. Dichos modos de comprensión o significados, que irán evolucionando, conducirán, en ocasiones, a respuestas matemáticamente correctas y en otros casos no. Según esto, diremos que el estado de comprensión de un objeto por parte de alumno es más avanzado que otro cuando le permita abordar adecuadamente un mayor número de situaciones en las que aparezca dicho objeto matemático.

A.2 Aprendizaje

Nos distanciamos de los procesos internos, para considerar la visión del aprendizaje que describen Marton y Booth (1996, 1997) y Booth (2004a, 2004b), en la cual el conocimiento se considera como una relación entre la persona y el objeto o fenómeno. Esta perspectiva es denominada fenomenográfica[89].

[89] Marton y Booth (1996) definen la fenomenografía como el estudio empírico de las formas cualitativamente diferentes en las cuales la gente experimenta y comprende varios aspectos del mundo que le rodea. Esta visión, en el contexto del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, está

Marton y Booth[90] (1996) afirman que para entender el modo en que una persona actúa en el mundo, hay que conocer cómo lo ve. Así un texto no necesariamente es lo mismo para cada lector, o una sentencia numérica no necesariamente es lo mismo para todos los alumnos. En particular, una sentencia numérica puede ser considerada como un grupo de números y operaciones a realizar sobre ellos, la expresión de un cálculo realizado, la expresión de la mismidad de resultado de dos cadenas de operaciones o dos representaciones de un mismo número.

Desde esta perspectiva cambios en la forma de actuar de los alumnos pueden ser explicados en términos de cambios en la forma de experimentar el mundo.

Esta visión se centra en el aprendizaje considerándolo como una transformación en el modo en que se percibe el mundo; en la manera en que el alumno percibe y piensa; un cambio entre modos cualitativamente diferentes de experimentar algo. Esta transformación puede involucrar el aumento de las sensibilidades y desarrollo del conocimiento (o conciencia) de los alumnos así como el aumento de las opciones de acción a las que el alumno tiene acceso. En este proceso de transformación los alumnos desarrollan poderes para pensar matemáticamente, su capacidad y fluidez para usar técnicas específicas y el lenguaje, y su apreciación de cómo se relacionan las diferentes ideas (Booth, 2004b; Marton y Booth, 1997; Mason y Johnston-Wilder, 2004a).

Existen variaciones en los modos de comprender un concepto, lo cual depende de las diferencias en los modos de conceptualizar el total, las partes dentro del total y las relaciones entre esas partes. Al abordar una situación, al experimentar algo, es necesario discernirlo de un contexto, relacionarlo con dicho contexto y ser capaz de discernir sus partes, y relacionarlas unas con otras y con el todo. En un determinado momento una persona es consciente de todo, pero de diferentes partes o elementos de manera distinta: ciertos elementos de la realidad son enfatizados (en ellos se centra la atención) mientras que otros son dejados en un segundo plano.

relacionada con la idea de fenomenología de los conceptos, estructuras e ideas matemáticas. Ésta última se refiere a la descripción de dichos conceptos, estructuras o ideas mediante sus relaciones con los fenómenos para los que fueron creados (Rico, 1997).

[90] Estos autores utilizan el término experimentar de forma sinónima al de concebir o comprender.

Esta visión enfatiza la existencia de pluralidad de significados de un concepto, entendidos como estados de comprensión, en tanto que mantiene la visión de la multiplicidad de formas de considerar un objeto matemático. Cada persona tiene una manera de ver las cosas que está condicionada por su experiencia, su comprensión, su conocimiento; y esto ocurre en todos los ámbitos, en particular en las matemáticas.

Desde esta visión, según Marton y Booth (1997), el aprendizaje significa que

> *el aprendiz ha desarrollado una capacidad de experimentar cierto fenómeno cuando éste aparece en situaciones noveles de una forma particular (que va más allá de las otras maneras en las que era capaz de experimentar el fenómeno), lo que a su vez significa que la relación entre el aprendiz y el fenómeno ha cambiado* (p.142).

Esto implica que el alumno es capaz de discernir elementos del fenómeno que antes no apreciaba así como de simultánea ser consciente de otros elementos y características del fenómeno. Como resultado del aprendizaje, la persona es capaz de experimentar el fenómeno de formas más avanzadas y más complejas, cuando estos modos le son evocados por la situación.

> *El* [proceso de] *aprendizaje es visto como la evolución del individuo hacia nuevas formas de conceptualizar, comprender, ver o entender el fenómeno en estudio; llegando a ver nuevas características y a relacionarlas unas con otras y con el todo, así como con el mundo más amplio. Esto es esencialmente experimental en tanto que llegar a experimentar el fenómeno de formas cualitativamente nuevas es visto como la forma última de aprendizaje…* (Booth, 2004a, p.13).

Los elementos que se distinguen en una situación o fenómeno y las relaciones que son apreciadas entre ellos, van a alterar lo que se ve, cómo se ve y las opciones disponibles, definiendo el modo individual de experimentar un fenómeno (Marton y Booth, 1997).

Desde esta visión, el aprendizaje se considerada basado en la acción de hacer distinciones.

A.2.1 Hacer distinciones

Las facultades, aptitudes o poderes naturales[91] son términos utilizados en la literatura para hacer referencia a capacidades que las personas poseen desde su nacimiento y que les ayudan a dar sentido al mundo y a desarrollarse como individuos. De especial relevancia son aquellas capacidades que posibilitan el increíble proceso de aprendizaje que experimentan los niños desde su nacimiento.

Gattegno (1971), Skemp (1978), Hewitt (1994), Mason y Johnston-Wilder (2004a, 2004b) hacen referencia a algunas de estas capacidades insistiendo en la importancia que tiene que la enseñanza de las matemáticas impulse su uso en los alumnos, al abordar situaciones matemáticas en el aula, con el objetivo de que desarrollen un aprendizaje con comprensión.

La idea que subyace a estas afirmaciones es que la mente es un potencial a ser desarrollado, más que un recipiente a ser llenado, y que los niños son seres activos que de forma natural se cuestionan y construyen su propio conocimiento. Se considera que es más probable que se produzca aprendizaje con comprensión, cuando se provoca que los alumnos utilicen sus capacidades/poderes naturales.

Una de las capacidades distinguidas por Gattegno (1971), por su importancia en el aprendizaje, y en especial en el aprendizaje de las matemáticas, es la de hacer distinciones: "*enfatizar e ignorar*". "*Enfatizar e ignorar es el poder de la abstracción que como niños utilizamos durante todo el tiempo, espontáneamente y sin ser requerido aunque en sus futuros usos podemos aprender a solicitarlo"* (p. 11-12). Sin el proceso de enfatizar e ignorar no podríamos ver nada (Hewitt, 1994).

Todos los niños desde muy pequeños tienen la capacidad de hacer distinciones (ej., distinguen el sonido de la voz de su madre de otros sonidos). El enfatizar algunas características e ignorar otras, permite discernir semejanzas y diferencias y reconocer relaciones. De este modo, es cómo se da significado a lo que perciben nuestros sentidos.

[91] Los autores consultados utilizan principalmente el término "poderes", para referir a estas capacidades naturales que poseen todas las personas.

A menudo, el hacer distinciones crea tensión, lo cual es una forma de alteración que puede promover una mayor exploración de relaciones, propiedades,… con la intención de reintegrar los elementos distinguidos y apreciar la totalidad (Mason y Johnston-Wilder, 2004b).

Estas ideas también las recoge Pramling (1996) señalando que el modo en que los niños conceptualizan, experimentan, hacen distinciones, ven y comprenden el mundo que les rodea, es la base de sus capacidades y conocimiento.

A.2.2 Estructura de relevancia y dimensiones de variación

Marton y Booth (1997) hacen uso de dos constructos al explicar su visión del aprendizaje: la estructura de relevancia de una situación y la variación en una experiencia. La *estructura de relevancia* de una situación se refiere a un sentido de qué aspectos de la situación son más o menos relevantes, a la manera en que la situación es experimentada como un todo. Está ligada a la experiencia de la persona de lo que la situación requiere. Estos autores insisten en que la estructura de relevancia es la fuerza que guía el aprendizaje y que su mecanismo principal es la *variación.*

Este segundo constructo, la *variación*, hace referencia a ciertos cambios potenciales de la situación. "*Es a través del cambio como los aspectos son diferenciados dentro de la experiencia de un fenómeno*" (p. 145). Un cambio en la capacidad de una persona de experimentar un fenómeno, puede tener lugar sólo a través de un cambio en la manera en que se experimenta el fenómeno. Por lo tanto, es necesario que algo cambie o varíe para que se aprenda algo. Este cambio puede ocurrirle al alumno o puede serle facilitado, en otras palabras, puede ser espontáneo o inducido.

Para que el alumno aprenda a experimentar algo de una nueva manera, necesita darse cuenta no sólo de cierta variación en la situación, lo cual vendrá facilitado por la invariancia de otros aspectos, sino de las particulares dimensiones de variación, es decir, de los aspectos susceptibles de cambio. Booth (2004b) define las dimensiones de variación como las características de una clase particular de fenómenos que se puede considerar del modo en que vienen dadas, o de otro modo.

Existe diversidad de formas en las que las personas pueden experimentar las situaciones o fenómenos, dependiendo de los elementos que son discernidos y, simultáneamente, de en cuales se centra la atención. Al ser consciente o apreciar que algo es una determinada manera, estamos reconociendo una *dimensión de variación,* en tanto que apreciamos que podría ser de otra manera. Lo que se da por hecho no admite variación, en lo que se centra la atención es lo que sí la admite.

Una cierta forma de experimentar algo puede ser entendida en términos de las dimensiones de variación que son discernidas y de las relaciones apreciadas entre las diferentes dimensiones de variación.

Watson y Mason (2005) extienden la idea de las dimensiones de variación para reconocer que dentro de cualquier dimensión-de-variación-posible, diferentes personas pueden ser conscientes de diferentes opciones permisibles. Se refieren a ello como *rango de cambio permisible***.** Así, en el caso de la identidad algebraica $(x-1)(x+1)=x^2-1$, al considerarse que *x* puede tomar cualquier valor, puede estar pensándose en cualquier valor del conjunto de los números enteros, o de los números reales, o de los números complejos…, poniendo de manifiesto diferentes rangos de cambio permisible en dicha situación. Otra dimensión de variación de esta identidad puede ser el exponente 2, cuya apreciación conduciría a considerar la factorización de x^n-1, y de nuevo diferentes personas serán conscientes de diferentes rangos-de-variación permisibles para n.

Según Marton y Booth (1997) no es posible explicar, en términos generales, por qué una persona experimenta una determinada estructura de relevancia o una cierta forma de variación. Lo importante es saber que el alumno va a aprender a experimentar el fenómeno de otro modo, en la medida en que consigamos provocar dichos elementos de la experiencia del alumno de un cierto fenómeno.

A.2.3 Conocimiento y conciencia

La noción de conciencia es clave en la idea del aprendizaje presentada por Marton y Booth (1996, 1997). En las diferentes alusiones al término conciencia (awareness) realizadas por Gattegno (1987), Marton y Booth (1996, 1997), Mason (1996b), Corsini (1999), Hewitt (2001) y Mason y Johnston-Wilder, (2004b), se distinguen dos acepciones de este término: atención y conocimiento procedente de la experiencia; siendo, en ocasiones, difícil distinguir entre ambos. Este término es utilizado de forma amplia para hacer referencia a un concepto complejo que comprende poderes y sensibilidades concientes e inconscientes, así como al conocimiento como una relación dinámica entre la persona y la situación, no como una propiedad estática del sujeto.

El término conciencia, "awareness", es introducido por Gattegno (1987), afirmando que sólo la conciencia es educable y haciendo referencia a un tipo de conocimiento: a lo que la mente percibe y captura de la experiencia, lo cual puede ser aprovechado por el sujeto en un futuro.

Hewitt (2001), influenciado por el trabajo de Gattegno, distingue entre la conciencia que procede de los sentidos (una descripción de lo que se percibe), la conciencia que procede de un análisis de las percepciones que llegan a través de los sentidos y otro tipo de conciencia inconsciente.

Marton y Booth (1996, 1997) hacen uso de este término entendiéndolo como "*el mundo en el modo en que es experimentado por dicha persona*" (1997, p.109) o *"la totalidad de las experiencias simultáneas de una persona y su relación con el mundo"* (1996, p.538). Según el diccionario Tododeiure, este significado psicológico del término conciencia hace referencia al reflejo, en el Yo, de los fenómenos.

En un determinado momento una persona es consciente de muchas cosas, pero no de todas ellas de la misma forma. Por este motivo, Marton y Booth (1996) hacen observar la existencia de cierta estructura en la conciencia. Además, argumentan que actuamos según nuestra forma de comprender o nuestra conciencia del mundo que nos rodea.

En conexión con esta concepción del término conciencia, cabe señalar las siguientes definiciones: percatación o reconocimiento de algo exterior o interior (Ferrater, 1988); la totalidad de las experiencias de una persona en un determinado momento o el contenido de la mente visto como una corriente en continuo cambio constituida por la experiencia inmediata e incluyendo percepciones, sentimientos, sensaciones, imágenes e ideas (Corsini, 1999); lo que uno es concientemente o inconscientemente sensible a o la totalidad de pensamiento, imágenes, ideas, asociaciones, y temas y conceptos que vienen a la mente en dicho momento (Mason et al., 2005).

En este trabajo, y con la intención de diferenciar el término conciencia del de atención, que a continuación comentamos, consideramos la acepción que lo refiere como un tipo de conocimiento, como una relación dinámica entre la persona y la situación.

A.2.4 Estructura de la atención

En estrecha conexión con el término conciencia, o incluso de manera sinónima, se utiliza el término atención. Según describe Mason (2003), la atención es la totalidad de lo que he experimentado en un determinado momento, lo cual incluye aspectos de los que soy subliminalmente consciente. Según el diccionario de la Real Academia (1992), es la acción de atender, es decir, la acción de aplicar voluntariamente el entendimiento a un objeto espiritual o sensible o de tener en cuenta o en consideración algo.

Continuamente prestamos atención a algo, ya sea voluntaria (ej., al mirarnos al espejo) o involutariamente (ej., al oír un ruido); apreciamos objetos dispuestos al alcance de nuestros sentidos, sonidos, sucesos que ocurren a nuestro alrededor,… La atención puede ser unifocal o multifocal. El foco de la atención puede ser amplio y borroso o estrecho y nítido, puede ser unitario o múltiple. La atención puede estar focalizada en un dominio específico o puede estar cambiando, alternativamente, entre varios dominios. Puede producir una visión de túnel o puede despertar múltiples conexiones entre conceptos. En cierto momento puede estar centrada en la totalidad, en hacer distinciones, en reconocer relaciones entre aspectos distinguidos previamente, en percibir propiedades o en el razonamiento basado en la deducción a partir de definiciones (propiedades seleccionadas) y axiomas (Mason, 2004) [92].

La atención es cambiante, rápidamente, y la cantidad y el grado de atención son altamente personales y específicos del contexto. Por ejemplo, para alguna gente la

[92] Las observaciones realizadas sobre la estructura de la atención presentan semejanzas con los niveles de razonamiento de los Van Hiele (Mason y Johnston-Wilder, 2004a), en tanto que hacen distinciones en el modo en que los alumnos perciben los objetos matemáticos (los aspectos en los que centran su atención, los elementos que distinguen, el tipo de relaciones que se reconocen entre ellos), aunque en este caso no se establece ninguna jerarquización.

suma de fracciones requiere una atención considerable mientras que para otros requiere, a menudo, poca atención.

Bennet (1993, según cita Mason, 2003) utiliza el término estructura de la atención para hacer referencia a los diferentes aspectos a los que los alumnos están atendiendo en cada momento, distinguiendo entre:

- atención a la totalidad
- atención a distinciones (características y atributos)
- atención a relaciones entre partes o entre alguna parte y el todo, entre elementos, atributos o características discernidas
- atención a relaciones como propiedades que los objetos, como él que está siendo considerado, poseen, conduciendo a cierta generalización
- atención a propiedades como abstraídas, formalizadas y formuladas independientemente de ningún objeto particular, formando axiomas de los cuales pueden derivarse deducciones.

Prestar atención a algo requiere sensibilidad no sólo a nuestro alrededor sino también a las experiencias pasadas y la conciencia. Como señala Berger (1973), la manera en la que vemos las cosas está afectada por nuestro conocimiento y nuestras creencias. Por naturaleza las personas son selectivas sobre el modo en que perciben su entorno y dicha selección viene determinada por su conciencia en dicho momento.

Escritores antiguos y recientes han identificado la atención con la manifestación de la voluntad. No obstante, la atención, según es concebida por los autores aquí recogidos, no siempre es controlada, pero el hecho de que pueda serlo es lo que la hace crucial para el aprendizaje y, por lo tanto, para la enseñanza (Mason, 2003).

En la enseñanza, la estructura de la atención se hace especialmente importante ya que para alcanzar el objetivo que el docente se haya propuesto, para una determinada tarea, será esencial que los alumnos centren su atención en ciertos aspectos concretos. Es, por tanto, esencial tener en cuenta a qué están prestando atención los alumnos y cómo están prestando dicha atención, para evitar discordancias entre las formas de atención del docente y del alumno. El interés está en desarrollar estrategias para dirigir o centrar la atención de un modo que sea pertinente para el aprendizaje, y a la vez ser sensible a las necesidades de diferentes alumnos de centrarse en una forma de atención antes de proceder a la siguiente.

Uno de los factores que influye de forma destacada en el modo en que se actúa en una situación matemática es la carga cognitiva que las acciones a realizar requieren al sujeto, en tanto que condicionan la parte de atención que le queda libre para apreciar otros aspectos. En la experimentación de una situación o un fenómeno es necesario discernirlo de un contexto, relacionarlo con dicho contexto y ser capaz de discernir sus partes, y relacionarlas unas con otras y con el todo; algunos aspectos son enfatizados mientras que otros se mantienen en un segundo plano. Así ocurre, como señala Mason (2003), que en ocasiones que un alumno no ve lo que el docente ve, un factor a simplificar, una reagrupación, un factor común,… bien porque está cegado por la totalidad y no perciben detalles, porque se está centrando en detalles diferentes a los que el docente está considerando, porque no está interpretando la situación del mismo modo, porque falla en reconocer los aspectos de importancia…De este modo el fenómeno puede estar siendo experimentado de modo diferente por el docente y el alumno y, por lo tanto, la comunicación entre ellos serán complicada.

A.3 Visión de la enseñanza

Nuestro enfoque de las intervenciones a realizar en el aula durante la parte empírica de este experimento de enseñanza está condicionado por una visión constructivista del aprendizaje de las matemáticas. Consideramos la construcción de conocimientos, resultado de procesos cognitivos internos y privados y de las interacciones del individuo con el medio que le rodea (Arcavi, 1995), siendo esencial para promover una comprensión de las matemáticas la participación activa de los alumnos en actividades y experiencias que les ayuden a profundizar y conectar sus conocimientos (Romberg y Kaput, 1999).

La construcción del conocimiento tiene lugar a partir de nuestras percepciones y experiencias las cuales están a la vez mediadas por nuestro conocimiento previo. Como expresa Simon (1995), "c*uando lo que experimentamos difiere de lo esperado o pretendido, resulta un desequilibrio y nuestro proceso adaptativo (aprendizaje) se desencadena"* (p.115).

Aunque el constructivismo tiene potencial para informar cambios en la enseñanza de las matemáticas, no ofrece una visión particular de cómo deben enseñarse (Simon, 1995). No obstante, siguiendo una visión constructivista del aprendizaje, algunos investigadores en educación matemática señalan prácticas que pueden favorecer un aprendizaje con comprensión. Concretamente, hacemos una breve referencia al papel de la reflexión y la comunicación.

Comunicación

La comunicación engloba hablar, escuchar, escribir, observar, demostrar,…; significa participar en interacción social e intercambiar ideas y opiniones con otras personas. Esta interacción promueve el establecimiento de relaciones entre los conocimientos o ideas de una persona, favoreciendo su comprensión. La comunicación permite la confrontación de ideas, fomentando una reflexión más profunda sobre las ideas propias, para poder explicarlas más claramente y ser capaces de justificarlas (Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray et al., 1997).

Autores como Cobb, Yackel y Wood (1992), Moreno Armella y Waldegg (1992), Huffersd-Ankles, Fuson y Gamoran Sherin (2004), coinciden en destacar la importancia de la comunicación en la construcción de significados y la adquisición del aprendizaje. Negociando explícitamente las interpretaciones de los materiales o representaciones externas en consideración en el aula, cada alumno va desarrollando su comprensión de los conceptos de forma gradual partiendo de sus conocimientos y experiencias previas (Cobb et al., 1992). El intercambio de estrategias, ideas y conjeturas fomenta que los alumnos aprendan a evaluar su pensamiento matemático y el de los demás, lo que contribuye a su aprendizaje, y permite a los docentes conocer los conocimientos previos de los alumnos para basar en éstos futuros aprendizajes (Huffersd-Ankles et al., 2004; Lampert, 1989; Mack 1990; Serra, 2004).

Serra (2004) destaca el papel del maestro para ayudar y provocar dicha comunicación a través de la propuesta de actividades, materiales y la gestión de la propia conversación o discusión. En particular, las conversaciones o discusiones matemáticas permiten a los niños profundizar en las matemáticas subyacentes a las tareas propuestas. Los alumnos explicitan y verbalizan sus representaciones mentales y al escuchar a sus compañeros pueden encontrar nuevos recursos para completar sus propias representaciones, cambiarlas o mejorarlas.

Es importante observar la diferente forma en la que los alumnos consideran las afirmaciones u opiniones según éstas sean expresadas por sus compañeros o por el docente, como menciona Serra. La opinión de los compañeros es susceptible de ser discutida y analizada, en cambio, la opinión del docente tiende a ser aceptada sin cuestión, no siendo analizada de forma crítica, lo que va en contra de un aprendizaje con comprensión.

Otro aspecto a considerar, al abordar conversaciones o discusiones en el aula, es la siguiente implicación del contrato didáctico: cuanto más explícito es el docente sobre el tipo de comportamiento que desea que expliciten los alumnos, más probable es que los alumnos pongan de manifiesto este comportamiento sin que haya desarrollado la comprensión que supuestamente dicho comportamiento indica (Mason y Johnston-Wilder, 2004a).

Reflexión

La reflexión se señala como otro factor de importancia en la promoción de un aprendizaje con comprensión de las matemáticas, que puede, además, acelerarlo (Hiebert y otros, 1997; Mason y Johnston-Wilder, 2004a). Tiene lugar cuando una persona piensa conscientemente sobre sus experiencias, considerándolas y analizándolas desde varios puntos de vista. Este proceso facilita la construcción y el reconocimiento de relaciones entre ideas, hechos o procedimientos, así como la revisión de relaciones previamente establecidas.

En los procesos de comunicación y reflexión tienen un papel destacado las representaciones externas[93] así como las actividades mediante las cuales se produce la enseñanza y aprendizaje y las cuestiones e intervenciones del docente.

Las representaciones son fundamentales en la comprensión de las matemáticas de muy diversas formas: posibilitan la reflexión haciendo las ideas matemáticas más concretas, dan soporte y promueven la extensión del razonamiento ayudando a los alumnos a centrarse en determinadas características de la situación matemática, y ayudan a reconocer semejanzas y diferencias entre ideas matemáticas favoreciendo la comprensión, comunicación y demostración al facilitar el razonamiento matemático

[93] Adoptamos la definición de representación (externa) dada por Castro y Castro (1997): un conjunto de notaciones físico-visuales, gráficas o simbólicas, específicas para una noción matemática, que expresan los conceptos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes.

(Fennel, y Rowan, 2001; Rico, 1998). Además, el tipo y nivel de comprensión de posibles ideas matemática, está condicionado por el tipo de sistemas de símbolos que se consideran para representar dichas ideas matemáticas (Kaput, 1978).

Lo importante para promover un aprendizaje con comprensión es que éste sea el principal objetivo de la enseñanza y, por lo tanto, se posibilite continuamente a los alumnos el establecer conexiones, extender, articular y aplicar su conocimiento, reflexionar en sus experiencias, e interiorizar el conocimiento matemático (Carpenter y Lehrer, 1999).

Anexo B:

Hojas de trabajo de los alumnos

Hoja de trabajo de los alumnos en la actividad escrita de la sesión 1:

$8 + 4 = \square + 5$

$\square = 25 - 12$

$14 + \square = 13 + 4$

$12 + 7 = 7 + \square$

$13 - 7 = \square - 6$

$\square + 4 = 5 + 7$

Hoja de trabajo de los alumnos en la Parte I de la sesión 2:

Nombre: ____

Fecha: ________________________________

Completa cada igualdad con el número que la hace verdadera y explica debajo cómo la has resuelto.

$12 - 4 = 13 - \boxed{}$

____

____

____

$14 – 9 = \boxed{} – 10$

____

____

____

$9 – 4 = \boxed{} - 3$

____

____

____

$17 - \boxed{} = 18 – 8$

____

____

____

$\boxed{} - 6 = 15 - 7$

____

____

____

Hoja de trabajo de los alumnos en la Parte II de la sesión 2:

Nombre: ____

Fecha: ____________________________

1. Escribe tres igualdades que sean verdaderas en las que aparezcan sumas y restas:

____

____

____

2. Escribe tres igualdades verdaderas en las que aparezcan sumas y restas que sean más difíciles que las que has escrito antes:

____

____

____

¿Por qué piensas que estas igualdades son más difíciles?

____

____

____

3. Escribe tres igualdades falsas en las que aparezcan sumas y restas.

____

____

____

____

Hoja de trabajo de los alumnos en las sesiones 4 y 6 (Hoja 1)

Nombre: ____

Fecha: ____________________________

Indica si la igualdad es verdadera o falsa y explica por qué lo sabes. Cuando la igualdad sea falsa corrígela para que sea verdadera.

| 18 – 7 = 7 – 18 |

Es __________ porque ______________________________
____
____
Si la corregimos tenemos ______________________________

| 75 – 14 = 340 |

Es __________ porque ______________________________
____
____
Si la corregimos tenemos ______________________________

| 17 – 12 = 16 - 11 |

Es __________ porque ______________________________
____
____
Si la corregimos tenemos ______________________________

| 122 + 35 - 35 = 122 |

Es __________ porque ______________________________
____
____
Si la corregimos tenemos ______________________________

| 6 + 4 + 18 = 10 + 18 |

Es __________ porque ______________________________
____
____
Si la corregimos tenemos ______________________________

Hoja de trabajo de los alumnos en las sesiones 4 y 6 (Hoja 2)

Nombre: ____

Fecha: ______________________

75 + 23 = 23 + 75	Es ___________ porque ______________________________ ____ ____ Si la corregimos tenemos __________________________
7 + 15 = 8 + 15	Es ___________ porque ______________________________ ____ ____ Si la corregimos tenemos __________________________
53 + 41 = 54 + 40	Es ___________ porque ______________________________ ____ ____ Si la corregimos tenemos __________________________
16 + 14 - 14 = 36	Es ___________ porque ______________________________ ____ ____ Si la corregimos tenemos __________________________
257 - 34 = 257 – 30 - 4	Es ___________ porque ______________________________ ____ ____ Si la corregimos tenemos __________________________

Anexo C:

Trascripciones

Trascripción de la Sesión 1: 23 de Noviembre de 2004

I: Aquí tenéis una igualdad y un recuadro. Entonces en el recuadro, tenéis que poner el número que vosotros pensáis que tiene que ir ahí, para completar la igualdad. ¿Vale? Vosotros miráis cada una de las igualdades y vais a ver qué número tengo que escribir en el recuadro para que esto sea verdad. Y ponéis el número que vosotros penséis y luego ya veremos… pues…qué es lo que han pensado vuestros compañeros…y lo hacemos en la pizarra. Lo primero que tenéis que hacer es escribir el nombre arriba y la fecha de hoy… ¿Tenéis lápiz por ahí?
Algunos alumnos: Sí

(I va repartiendo las hojas a cada alumno)

I: Si queréis, los que lo tenéis podéis empezar, escribiendo el nombre, la fecha…
Un alumno: ¿Podemos empezar?
I: Si puedes empezar ya.
Maestro: Arriba el nombre ¿no?
I: Sí, el nombre primero y luego la fecha y ya está. Y ya pues empezáis a hacer las igualdades.
Maestro: Pensadlas bien, eh, pensadlas bien.

(Mientras los alumnos resuelven individualmente las igualdades por escrito I se acerca a algunos alumnos y les pregunta sobre cómo están resolviendo las igualdades).

I: ¿Me puedes explicar cómo has sacado ese siete? ($8 + 4 = \square + 5$)
MAG: Porque ocho más cuatro son doce y cinco más siete son doce.
I: Ah muy bien, muy bien.

I: A ver ¿ya has acabado tú? *(dirigiéndose a un alumno que está distraído)* No has acabado.
Maestro: Dale un repaso. El que acaba le da un repaso ¿no? por si acaso.

I: ¿Por donde vas? Ahora ¿qué estas haciendo? ¿Éste? ¿Me puedes decir cómo has hecho éste? ($12 + 7 = 7 + \square$ con respuesta 11).
MB: He sumado doce más siete, y el resultado este te tiene que dar lo mismo que esto ($7 + \square$).
I: Ah, vale.

I: ¿Me quieres explicar cómo has hecho éste de aquí?...cómo has hecho éste ($8 + 4 = \square + 5$). Explícamelo ¿Cómo has sacado ese siete?
BI: No lo se
I: ¿No lo sabes? ¿De donde ha salido? ¿Has hecho alguna cuenta? Aquí veo que has hecho una cuenta. ¿No?
BI: Umm… ¿Qué?
I: ¿Cómo has hecho éste?
BI: …
I: ¿No te acuerdas? ¿No?
BI: …
I: ¿Y éste te acuerdas de cómo lo has hecho?

BI: …
I: ¿Qué estas pensando?
BI: No se
I: ¿No te acuerdas? Bueno, no pasa nada. Tú sigue haciéndolo.

I: ¿Me puedes decir cómo has hecho éste de aquí? (12 + 7 = 7 + ☐)
EV: Pues primero he sumado doce más siete, he visto lo que me daba, y he sumado siete para que me diera eso.
I: Ah vale, ¿Y éste de aquí (14 + ☐ = 13 + 4)? ¿Cómo lo has hecho?
EV: He sumado trece más cuatro, lo mismo que he hecho antes.
I: Ah, y estas haciendo las cuentas aquí ¿no?
EV: Sí
I: Y estas haciendo las cuentas aquí ¿no? ¿Esas son las cuentas?
EV: Sí
I: Muy bien.
(EV efectúa las operaciones escribiéndolas verticalmente en una hoja a parte y utilizando los algoritmos de suma y resta)

(I va recogiendo las hojas de los alumnos que han acabado)

I: ¡Quién acabe me lo puede dar si quiere y lo voy recogiendo! Cuando lo repaséis… Los demás seguid haciéndolo que no hay prisa. Ahora lo vamos a ver en la pizarra. ¿Tú has acabado también? Los que hayáis acabado callaos un poquito para que así los demás puedan pensar. Si hacemos mucho ruido los demás no pueden pensar… Vamos a esperar un poco más a que acabe todo el mundo y ahora lo vemos en la pizarra ¿vale?
Si ya no queréis escribir más, si os habéis cansado me lo dais y ya está, y ahora lo vemos en la pizarra.

I: Vamos a recogerlos ya y los vemos en la pizarra. Los que no lo hayáis acabado no pasa nada... Ahora lo vamos a hacer no pasa nada si no lo habéis acabado… ¿Hay alguien más que lo tenga por ahí? No ¿no?

Unos 9 o 10 minutos después de repartir las hojas, una vez resueltas las igualdades de manera individual y recogidas las hojas de trabajo de todos alumnos, se comienza la discusión en la pizarra de las igualdades. Primeramente se considera la igualdad 10 + ☐ = 15 para dejar ver a los alumnos en qué consiste la discusión.

I: Bueno a ver, ahora quiero que me contéis cómo lo habéis hecho. ¿Vale? Vamos a empezar por uno que no estaba aquí para que me expliquéis. A ver ¿Cómo haríais… esta igualdad?

(I escribe la igualdad 10 + ☐ = 15)

I: ¿Qué número pondríais en el recuadro?
Algunos alumnos: Cinco, cinco
I: Bueno, os voy a ir llamando, entonces levantáis la mano, vale, y luego me lo explicáis. Tú dices que es cinco. Todo el mundo…A ver que levante la mano quien piense que es cinco. *(Casi toda la clase levanta la mano)* ¿Hay alguien que piense

que es otro número? (Nadie levanta la mano) Y ¿quién explica por qué es cinco? A ver tú explícamelo, ¿Por qué crees que es cinco?
VS: Porque diez más cinco son cinco.
I: Muy bien. A ver tú ¿Por qué?
MAG: Por lo mismo
I: ¿Por lo mismo, no? Es muy fácil. Vale vamos a hacer uno de los que hay aquí.

(I escribe la igualdad 8 + 4 = □+ 5)

I: Ocho más cuatro… igual a algo más…cinco. A ver ¿qué número habéis puesto ahí? ¿Alguien se acuerda? A ver tú.
CL: Un siete
I: Un siete ¿por qué has puesto un siete?
CL: Porque ocho más cuatro son doce, y siete más cinco da doce también.
I: Muy bien, muy bien ¿todo el mundo lo ha hecho así?
La clase: ¡sí!

(I escribe la igualdad 14 + □ = 13 + 4)

I: Vale, vamos a ver… ésta. Catorce más algo es igual a…trece más cuatro. A ver ¿quién me puede decir qué pondríais ahí? ¿Tú?
MA: Catorce por tres
I: ¿Catorce por tres pondrías aquí? ¿Por qué?... ¿Eso es lo qué has puesto ahí? Yo no te he visto qué hayas puesto eso aquí. Tú me estas engañando. Aquí nadie ha puesto… habéis puesto otra cosa. A ver ¿quién me puede decir qué ha puesto? ¿Tú?
NM: Un siete
I: Un siete ¿Por qué? ¿Por qué has puesto un siete?
NM: ….
I: A ver otra… *(Pide la palabra a otro alumno)*
MP: Un cinco
I: Un cinco crees tú ¿Por qué?
MP: Porque… trece más cuatro son…
(Algunos alumnos intentan contestar)
I: Esperaros un momento que lo está explicando…Tú has hecho esto, trece más cuatro ¿verdad?… a ver ¿esto cuanto nos da? ¿Trece más cuatro? *(dirigiéndose a la clase)*
Algunos alumnos: Diecisiete
I: Diecisiete, vale. Entonces ¿qué número hay que poner aquí?
Algunos alumnos: Tres
I: ¿Por qué?
Algunos alumnos: Porque catorce más tres dan diecisiete
I: Muy bien. Entonces vosotros habéis hecho primero esta cuenta y después habéis visto qué número tenéis que poner en el recuadro ¿No?
Algunos alumnos: Sí.

(I escribe la igualdad 12 + 7 = 7 + □)

I: Y éste. ¿Quién me lo puede decir? A ver tú
MT: Siete más doce

I: ¿aquí va un doce? ¿Cómo lo has hecho tan rápido? *(Algunos alumnos intenta contestar).* Esperaros un momento que se lo he preguntado a ella. ¿Cómo lo has hecho tan rápido?
MT: Porque es el mismo número
I: ¿Es el mismo número? Ah, entonces, ¿qué es lo que ha pasado?
Algunos alumnos: Lo han puesto al revés
MT: Han cambiado los números de orden
I: Ah, muy bien. Has sido muy rápida, porque así no has tenido que hacer las cuentas ¿Alguien lo ha hecho de otra forma? … Se puede hacer de otra forma también.
FM: Sumando
I: Sumando, ¿no? ¿Cómo sería sumando?
FM: Doce más siete
I: Doce más siete…
FM: Y siete más doce
Maestro: son.
I: Doce más siete son siete más doce. Podías haber sumado aquí que esto es diecinueve y ver ¿a ver qué tengo que poner aquí? *(señalando el recuadro).* También se podría haber hecho…a ver éste…
Maestro: Pero MT ha usado la propiedad conmutativa.
I: Claro, MT se ha dado cuenta rápidamente y no ha tenido que hacer las cuentas. Si uno se da cuenta pues se ahorra los cálculos. Es lo bueno que tiene.

(I escribe la igualdad 13 – 7 = ☐ – 6)

I: A ver tú. ¿Qué pondríamos ahí?
JM: Doce
I: Doce ¿Por qué?
JM: Porque… trece menos siete son seis, y doce menos seis dan seis.
I: Muy bien ¿Alguien lo ha hecho de otra forma o…? A ver tú.
DL: Yo he puesto cero
I: ¿Tú has puesto cero? ¿Por qué?
DL: Porque doce son seis, doce menos siete son seis y seis menos cero son seis.
I: Claro ¿tú te has llevado esto para acá? No, pero es que hay que dejarlo ahí porque si está ahí. Tú lo que has hecho, me has dicho, trece menos siete dices que son seis ¿no?
DL: Sí
I: Y le has quitado otro seis y ¿por eso te ha salido cero? ¿Es eso lo que has hecho?
DL: No
I: Bueno… ¿Alguien lo ha hecho de otra forma? Ya está. Vamos…

(I escribe la igualdad ☐ = 25 – 12)

I: ¿Y éste? ¿Qué habéis hecho en éste? Éste es un poco… de otra forma ¿A ver quién me puede decir que ha escrito ahí?
FM: Trece
I: ¿Por qué has puesto trece?
FM: Porque veinticinco menos doce son trece.
I: Muy bien ¿Todo el mundo ha hecho eso o alguien ha pensado otra cosa?
MT: Porque desde doce a veinticinco van trece

I: También, claro puedes pensar cuantos van de aquí a aquí. Esa es otra forma de hacer la resta. Muy bien.

(I escribe la igualdad $\square + 4 = 5 + 7$*)*

I: Y nos queda sólo uno. Éste. A ver ¿Quién me puede decir qué número tenemos que poner en el recuadro? A ver tú
MA: Un ocho
I: ¿Un ocho? ¿Y cómo sabes que es un ocho?
MA: Porque cinco más siete son doce y cuatro más ocho son doce
I: Muy bien ¿alguien lo ha pensado de otra forma? ¿Tú qué has pensado?
FM: Yo he puesto el ocho, pero… yo lo he puesto porque he visto que ahí está cambiado *(señala a la igualdad previa* $8 + 4 = 5 + 7$ *que aparece resuelta en la pizarra)*
I: Anda mira, te has fijado en la otra, y claro,…hay lo mismo pero lo hemos cambiado de orden Muy bien ¿Alguien ha pensado otra cosa? … ya está ¿no? Pues ya hemos hecho todos. Lo habéis hecho muy bien.

Trascripción de la Sesión 2: 24 de Enero de 2005

I: Cuando escribáis vuestro nombre... y la fecha, empezamos. Bueno, os he dado dos hojas... Vamos a esperar un poquito a que acaben vuestros compañeros...
Varios alumnos: Ya está.
I: ¿Ya está? Mira, os he dado dos hojas. Hay una que tiene las actividades que vamos a hacer ¿vale? y la otra es sólo, para que, si os hace falta, aquí hagáis cuentas. Ésta es sólo por si os hace falta una hoja para hacer cuentas a parte. Pero, si no os hace falta pues no le hagáis caso. La primera hoja es donde están las actividades que vamos a hacer. Vienen varias igualdades, y vuestro trabajo, lo que tenéis que hacer, es completar cada una de las igualdades con el número que vosotros creéis que tiene que ir en esa igualdad ¿vale? para que sea verdadera. ¿Qué quieres FM?
FM: Seño ¿Y esas rayas?
I: Ahora lo explico. Las rayas de abajo son para que me expliquéis a mí cómo la habéis hecho. Si habéis hecho alguna cuenta pues me explicáis, he hecho esta cuenta, y la escribís ahí, o si lo habéis hecho en la cabeza pues me explicáis cómo lo habéis pensado. ¿Vale? Para eso son esos renglones, para que vosotros me expliquéis a mí cómo habéis hecho….cómo habéis pensado esa igualdad, como vosotros podáis. ¿Vale? pues podéis empezar cuando queráis. Os vamos a dejar unos minutos y luego las vemos todos juntos en la pizarra, ¿vale? para ver qué ha escrito cada uno.

(Unos minutos después cuando todos los alumnos habían acabado)

I: Vamos a ver cómo habéis hecho el primer ejercicio. Silencio. Mirad a la pizarra. La primera igualdad que teníamos...

(I acaba de recoger las hojas de actividades que aun tenían un par de alumnos)

I: ¡Silencio! Ésta era la primera igualdad que teníamos en la hoja.

(I escribe en la pizarra, por error, la igualdad completa 12 – 4 = 13 – 5)

I: A ver que levante la mano quien pueda decirme qué número hay que colocar en este recuadro. RB, ¿Qué número?
RB: Un ocho
I: Un ocho. ¡Uy!, perdona, ¡que he puesto un cinco!

(I modifica la igualdad 12 – 4 = 13 – 5 escribiendo un recuadro en vez del 5)

I: EF cree que hay que poner un cinco. He copiado la respuesta de EF. EF dice que es un cinco. ¿No? A ver EF explícanos por qué, que ya que he copiado tu respuesta...
EF: Doce menos cuatro...doce menos cuatro son ocho, y trece menos cinco... son ocho
I: Vale, muy bien. ¿Quién más quiere decirnos que ha puesto en el recuadro o explicárnoslo? BI, ¿Cómo lo has hecho tú? ¡Sentaros! BI ¿Qué número has puesto tú en el recuadro?
BI: Un uno
I: ¿Un uno? ¿Y por qué has puesto un uno?

(Murmullo de la clase)

I: ¡Ssshhh! ¡Callaros!
Una alumna: Está mal
I: ¿Y por qué has puesto un uno?

(Risas de alumnos)

I: No os riáis porque ella nos está explicando cómo lo ha hecho, vosotros no me lo habéis querido explicar. *(Risas de alumnos)*¿Cómo lo has hecho BI? ¿No te acuerdas? Bueno no pasa nada. *(Risas de alumnos)* No os riáis. A ver ¿CA cómo lo has hecho tú? ¿Tú qué número has puesto?
CA: Un cinco.
I: Un cinco ¿Y por qué has puesto un cinco?
CA: Porque doce menos cuatro son ocho,
I: Si
CA: y trece menos cinco son ocho.
I: Vale. Entonces ¿Qué levante la mano quien ha puesto un cinco en el recuadro?
Un alumno: Yo ya no me acuerdo.
I: ¿No os acordáis? Bueno luego lo miraré a ver. Entonces la mayoría de vosotros pensáis que es un cinco. Vamos a ver otra a ver qué habéis puesto.

(I escribe en la pizarra la igualdad 14 – 9 = □ – 10)

I: Ésta era otra de las igualdades que había escrita. ¿Quién se acuerda o quién me puede decir qué pondría en ese recuadro? A ver, ¿FM?... ¿Te acuerdas?
FM: ... Un quince.
I: Un quince has puesto tú ahí ¿Por qué has puesto un quince?
FM: Creo que sí.
I: ¿Crees que sí? ¿Por qué? ¿Te acuerdas...? ¿Sabrías explicarnos cómo lo has calculado? ¡Shhh! Un momento. Sino ahora después nos lo explicas.

FM: Sí.
I: ¿Sí te acuerdas? Quince es. ¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?
FM: Catorce menos nueve son cinco y quince menos diez son cinco.
I: Ah, muy bien. Y tú JQ ¿qué has puesto?
JQ: Un quince
I: ¿Quince también? ¿Por qué?
JQ: Porque catorce menos nueve son cinco y quince menos diez son cinco.
I: Vale. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? A ver tú ¿cómo te llamas que no veo tu cartel?
FB: FB
I: FB ¿Qué has puesto tú en el recuadro?
FB: Un cinco
I: ¿Un cinco? ¿Por qué?... ¿Cómo lo has calculado el cinco? ¿Te acuerdas? ¿No te acuerdas? Bueno, pues entonces si no te acuerdas no sabemos cómo lo has pensado.
I: A ver CA ¿tú qué has escrito?
CA: Un cinco
I: Un cinco ¿Por qué? ¿Cómo lo has pensado?
CA: Porque cuatro menos nueve son cinco y, cinco menos diez son cinco.
I: Ah, vale entonces tenemos…hay gente que piensa que es un cinco…
Un alumno: ¡No!
I: Espera vamos a hablar…Vamos a pensar en eso. Algunos de vuestros compañeros dicen que tenemos que poner un cinco y otros dicen que es un quince. ¿Vale? Vamos a votar a ver quien…cual creéis que es la respuesta…el número que hay que poner en esa igualdad. Esto sería si ponemos un cinco, tendríamos catorce menos nueve igual a cinco menos diez. ¿Vale? Y en el otro…Y si ponemos un quince lo que tenemos sería...esta igualdad, catorce menos nueve igual a quince menos diez.

(A la vez que lo dice I escribe en la pizarra ambas igualdades)

I: Bueno, a ver, Que levanten la mano todos los que piensen que esta igualdad es verdadera. Vamos a votar. ¿Vale? ¿Quién piensa que ésta es verdad? Uno, dos,…
MA: Yo no
I: Tres, y cuatro. ¡Carlos sí! Uno, dos, tres, cuatro. Cuatro personas piensan que es verdadera. ¿Quién piensa que es falsa? A ver que levante la mano. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, y quince. Tú no tienes la mano levantada ¿no? Quince. Pues parece…más gente piensa que es falsa que es verdadera. A ver ésta ¿quién piensa que es verdadera? Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, y catorce… ¿Quién piensa que es falsa, la última? Una, dos, ¿tienes la mano levantada o no? ¿Sí? tres, cuatro, y cinco. Levantad la mano bien alto para que la pueda ver ¿Vale? Dos, tres, cuatro y cinco… Bueno, pues en este caso ha salido que más personas piensan que es falsa. Y es verdad, es falsa, ¿quién me puede explicar por qué es falsa? A ver ¿Cómo te llamas tú? MT ¿No?
MT: Porque a cinco no le puedes quitar diez.
I: Es verdad. Esta resta no la puedes hacer. Porque aquí sí tenemos el número más grande, catorce menos nueve y nos da cinco, pero aquí esta cuenta no podemos hacerla, tendría que estar al revés. Si estuviera al revés sí sería verdad. Ahora sí que es verdad porque tenemos catorce menos nueve igual a diez menos cinco y podemos hacer las dos restas y las dos restas valen lo mismo. ¿Vale? ¿Os dais cuenta? Antes, como bien ha dicho MT, teníamos esta resta, y esta resta no se puede hacer. Y esta

igualdad de aquí abajo ha salido que es verdadera. Hay más personas que piensan que es verdadera que es falsa. Y es verdad, es verdadera. ¿Quién me puede explicar por qué es verdadera? A ver JQ. ¿Por qué?
JQ: Porque a quince si le puedes quitar diez
I: Vale, eso es verdad. Y aparte tienen que ser iguales los dos lados. ¿Son iguales los dos lados?
Algunos alumnos: Sí
I: ¿Este lado es igual que éste?
Algunos alumnos: Sí
I: ¿Cuánto vale esta parte de aquí?
Algunos alumnos: Cinco
I: ¿Y esta parte de aquí?
Algunos alumnos: Cinco
I: Muy bien. Entonces al final lo que teníamos que poner era un quince, que era ésta. Vamos a hacer otra, igualdad.

(I escribe en la pizarra la siguiente igualdad 9 – 4 = □ – 3)

I: Nueve menos cuatro igual a... algo menos tres. A ver pensadla un poco y ahora me decid. Que levante la mano quien quiera explicarme qué número quiere poner en el recuadro. Pensadlo un poquito.
Un alumno: Yo no, ¡eh!
I: ¿Tú no quieres pensarlo? ¿A ver CL?
CL: Porque…
I: ¿Qué número pones?
CL: Un ocho
I: Un ocho. ¿Por qué pondrías un ocho?
CL: Porque nueve menos cinco son ocho
Algunos alumnos: ¡Menos cuatro!
CL: Nueve menos cuatro son cinco, y ocho menos tres son cinco.
I: Vale, muy bien. ¿Alguien más me quiere decir cómo lo ha hecho o qué ha puesto?
RB: Yo.
I: ¿Qué has puesto….? ¿Tú me lo quieres decir? ¿RB? ¿Qué has puesto?
RB: Un ocho
I: ¿Un ocho? ¿Por qué?
RB: No se.
I: ¿No lo sabes?
RB: No sé explicarlo.
I: ¿No sabes como explicarlo? ¿MP?
MP: Un ocho
I: ¿Tú otro ocho? ¿Por qué?
MP: No se explicarlo
I: ¿No sabes explicarlo tampoco? ¿Alguien sabe explicarme que es lo que ha pensado? ¿MT?
MT: Porque nueve menos cuatro son cinco y a tres le he sumado un cinco.
I: Vale, Entonces lo has hecho igual que CL?, ¿no? Más o menos. Tú lo has pensado… más o menos igual y a las dos os sale un ocho. ¿Quieres decir algo EF?
EF: Sí
I: ¿Qué?
EF: Como he hecho yo…

I: ¿Tú cómo lo has hecho?
EF: He restado nueve menos cuatro que son cinco y luego desde cinco, a cinco le he sumado tres, y me dan ocho.
I: Muy bien. Lo habéis hecho, EF y MT lo habéis hecho más o menos igual. ¿Vale? Vamos a hacer ésta que alguno de vosotros no sabíais cómo hacerla. A ver si ahora sabemos cómo.

(I escribe en la pizarra la igualdad 17 – □ = 18 – 8)

I: A ver que levante la mano quien quiera decirme qué número hay que poner en el recuadro. A ver ¿MA? ¿Cómo lo has…? ¿Qué número has puesto tú?
MA: Nueve
I: ¿Un nueve? ¿Por qué has puesto nueve?
MA: Porque dieciocho, si le quito ocho, dan diez.
I: Muy bien, eso da diez.
MA: Y si a diecinueve si le quito nueve...a diecisiete si le quito nueve dan diez.
I: Vamos a ver si eso es verdad, cuenta a ver, a diecisiete quítale nueve. Creo que te has equivocado. ¿Cuánto te sale, si a diecisiete….?
MA: Siete
I: ¿Sí? a ver. Piénsalo. Si a diecisiete le quitas nueve te sale ocho. Pero… él tiene razón si ha dieciocho le quitas ocho da diez, lo único es que se ha equivocado al hacer la otra cuenta. A ver JQ ¿tú cómo lo has hecho?
JQ: Un siete.
I: Tú has puesto un siete ¿por qué?
JQ: Porque diecisiete menos siete dan diez y dieciocho menos ocho dan diez.
I: Muy bien ¿Alguien…? A ver ¿Tú cómo te llamas?
MR: MR
I: ¿MR?
MR: Siete
I: Tú has puesto siete también como JQ ¿Por qué?... ¿No te acuerdas por qué? ¿A ver FM?
FM: Lo mismo.
I: ¿Lo mismo? Tú has puesto un siete y ¿Por qué? ¿Cómo lo has pensado?
FM: Lo mismo.
I: ¿Lo mismo que JQ? ¿Y tú MT?
MT: Yo he puesto un siete porque dieciocho menos ocho son diez y desde diez hasta diecisiete van siete.
I: Muy bien. Ella lo ha pensado al revés, contando cuantas van de diez hasta diecisiete ¿no? ¿Tú quieres decirme algo VS? ¿Me dices cómo la has hecho tú?
VS: Un siete
I: Tú has puesto un siete
VS: Porque dieciocho menos ocho son diez y diecisiete menos siete son diez.
I: Vale, entonces tú lo has hecho también como JQ y FM. Vamos a hacer el último.

(I escribe en la pizarra la igualdad □ – 6 = 15 – 7)

I: Éste era algo menos seis tiene que ser igual que… quince menos siete. Pensadla a ver quién me lo puede decir. Venga a ver si alguien que no ha dicho todavía ninguna respuesta me lo puede decir. A ver…MT y FM ya lo saben. ¿Alguien más sabe

qué…qué tendríamos que poner en el recuadro? ¿Se acuerda? ¿No os acordáis de cómo lo habéis hecho antes?
Una alumna: CA
I: ¿CA también se acuerda? CA. Ya tenemos cuatro, JQ, FM, CA y MT ¿VS también lo sabe ya? ¿Sí? y MA ¿no? Bueno a ver, ¿quién me lo dice? CA dímelo. Tú ahora después *(dirigiéndose a FM)* CA ¿Cómo lo has hecho tú? ¿Qué número has puesto?
CA: Trece
I: ¿Trece?
CA: Sí
I: ¿Por qué?
CA: Porque trece menos seis son ocho y quince menos siete son ocho.
I: Vale. Muy bien. ¿Quién más…? FM venga dímelo ahora.
FM: Catorce
I: ¿Tú has puesto catorce? ¿Por qué?
FM: Porque catorce menos seis son ocho
I: ¿Son cuanto?
FM: Son ocho
I: A ver, catorce menos seis son ocho y…
FM: Quince menos siete son ocho.
I: Entonces o FM o CA se ha equivocado. Porque catorce menos seis….quince menos siete ¿Estamos de acuerdo todos en que es ocho?
Algunos alumnos: Sí
I: ¿Sí? Entonces qué número tenemos que poner aquí para que esto sea ocho, para que al quitarle seis nos de ocho. Levantad la mano quien sepa el número que al quitarle seis nos da ocho. A ver ¿JM? ¿Qué número hay que poner?
JM: Trece
I: ¿Un trece? ¿Seguro? Vamos a…Yo creo que es catorce. Es catorce porque…, es que hay que hacer la cuenta despacio. Si a seis le sumamos ocho, nos sale catorce, ¿no? ¿Vale? Bueno, ya vamos a dejar estas igualdades y vamos a hacer otra, otra actividad.
….En estos papeles lo que había era unas igualdades que yo he hecho, entonces ahora lo que quiero es que seáis vosotros los que os inventéis las igualdades, para que las hagamos otro día. Pero ahora sois vosotros los que os las tenéis que inventar. Imaginaos que se las vamos a dar a otro compañero. Entonces, podéis hacer ahora las igualdades que vosotros queráis. Primero, poned el nombre y la fecha, ¿vale? como antes, y ahora os explico que es lo que hay que hacer.

(I reparte las hojas de trabajo a cada alumno)

I: Venga escribir el nombre y la fecha, y ahora os explico que es lo que hay que hacer.
Un alumno: Yo ya se que es lo que hay que hacer
I: ¿Ya sabes lo que hay que hacer? Muy bien, entonces ya puedes empezar…escribid primero el nombre y la fecha, ya sabéis que es veinticuatro de Enero.
Maestro: Siéntate, a hacerlo eso. Este también lo hace.
I: Venga a ver si te gusta esto, MA. a ver si trabajas ahora… Lo primero que tenéis que hacer es escribir tres igualdades que sean verdaderas, en las que aparezcan sumas y restas. Entonces lo que tenéis que poner son sumas y restas y los números que vosotros queráis. Antes, teníamos igualdades…
Un alumno: de restas

I: Antes eran todas de restas, pero ahora podéis poner sumas y restas, ¿vale? cada uno lo que prefiera, o podéis mezclarlas, poner juntas sumas y restas.
(I escribe en la pizarra la sentencia 12 – 4 = 13 – □)

I: En estas igualdades había un hueco, y teníais que rellenarlo. Aquí hemos visto que la respuesta era cinco. *(I reemplaza el recuadro por un cinco).* Ahora tenéis que escribir igualdades que estén enteras, que no tengan ningún hueco. Una igualdad como ésta, que ya tiene todos los números y los signos. ¿Vale? Entonces, en el primer… ejercicio, tenéis que escribir tres igualdades así, que sean verdad. Bueno, cada uno como quiera, éstas son como las del ejercicio de antes, pero cada uno las puede escribir como quiera, con sumas y con restas. Después hay que escribir tres igualdades que sean más difíciles que las otras. Que vosotros penséis que son más difíciles, como vosotros queráis, pero que creáis que, si se las damos a un compañero vuestro, le va a parecer más difíciles. Y debajo pone que expliquéis porque pensáis que estas igualdades son más difíciles… ¿vale? Sino luego me podéis preguntar, si tenéis alguna duda. Y al final, lo que pone es que escribáis tres igualdades pero que sean falsas. Imaginaos que queremos engañar a alguien, y entonces, pues lo que pondríamos aquí sería otro número que no sea verdad, por ejemplo, si ponemos aquí un diez, pues esto ya es mentira ¿no? Estas dos cosas ya no son iguales. Pues esa sería falsa. Entonces las primeras que tenéis que escribir son verdaderas, y en el ejercicio tres, hay que escribir algunas que sean falsas. Empezar y si no sabéis lo que hacer, pues levantáis la mano y yo os lo explico a cada uno.

(Una vez la mayoría de los alumnos han resuelto toda la actividad se recogen las hojas de trabajo. I escribe entonces en la pizarra algunas de las sentencias construidas por los alumnos para proceder a su discusión. Escribe las siguientes sentencias $15-15=0-0$, $10+120=100+20$, $11+11=11+11$, $1000+100=0$, $10+4=10+4$).

I: Voy a copiar algunas igualdades en la pizarra y las voy a elegir de las que vosotros habéis hecho**.** Me tenéis que decir si son verdad o no ¿Vale?…. A ver ¿quién me dice la primera si es verdadera o falsa? Esa la ha escrito uno de vuestros compañeros ¡eh!
Un alumno: ¡Falsa!
I: Levantad la mano. A ver Tú eres MA, ¿no?
MA: Si
I: ¿Esa es verdadera o falsa?
MA: Verdadera
I: A ver CA ¿tú que piensas?
CA: Verdadera
I: ¿Y tú, FB?
FB: Verdadera
I: Verdadera ¿VS?
VS: Verdadera
I: ¿Y quién me explica porque es verdadera? ¿EF?
EF: Porque cero menos cero son cero, y quince menos quince, son cero
I: Vale ¿Os parece fácil o difícil?
La clase: Fácil
I: Entonces… ésta es una forma de escribir una igualdad verdadera. Y la segunda, ¿verdadera o falsa?
La clase: Falsa

I: Levantad la mano, y yo pregunto ¿MB?
MB: Falsa
I: ¿Falsa? ¿Por qué?
Una alumna: ¿Quién lo ha hecho?
MB: Porque… porque no da el mismo resultado en los dos lados
I: Ah, muy bien, ¿y tú? MP ¿Qué piensas?
MP: que…que
(Se oyen risas de algunos alumnos)
I: ¿No lo sabes? Bueno, ¿y tu FM?
FM: Porque diez más ciento veinte son ciento treinta y si…cien más veinte son ciento veinte.
I: Muy bien ¿Alguien lo ha pensado de otra forma, por qué es falsa?
Un alumno: Yo si
I: ¿Quién? ¡Que levante la mano quien lo haya pensado de otra forma y quiera explicarlo!
MA: Porque no puede sumar veinte más cien
I: ¿No puede sumar veinte más cien? ¿Por qué no?
Algunos alumnos: Si se puede
MA: No me acuerdo
I: ¿No te acuerdas? Callaros.
Una alumna: ¿Quién lo ha hecho?
I: Tiene razón MA, esta parte de aquí no puede sumar veinte más cien. ¿Quién me puede decir por qué?...A ver la tercera igualdad, ¿ésta es verdadera? ¡Qué levante la mano quien piense que es verdadera!
Un alumno: Todos
I: ¡Qué levante la mano quien piense que es falsa! ¿Nadie piensa que es falsa? *(nadie levanta la mano)* ¡Que levante la mano quien quiera decirme porque piensa que es verdadera¡ A ver VS ¿Por qué crees que es verdad?
VS: porque once más once son veintidós y once más once son veintidós
I: ¿y hace falta hacer las cuentas para saber que es verdadera?
Un alumno: no
I: Podemos mirar y darnos cuenta de que las dos partes son iguales ¿no? Y la última ¿es verdadera o falsa? ¡Levantad la mano los que penséis que es verdadera!... ¿Verdadera?... ¡Que levanten la mano los que piensen que es falsa! A ver CH, ¿Por qué piensas que es falsa?
CH: Porque mil más mil son dos mil
I: No puede ser cero, claro. Vamos a ver una más y ya está. Ésta de aquí, ¿es verdadera o es falsa? ¡Qué levante la mano quien piense que es verdadera!... ¡Qué levante la mano quien piense que es falsa! ¿Quién me quiere explicar porque piensa que esta igualdad es verdadera o falsa?
FB: Verdadera
I: Porque diez más cuatro seria catorce y diez más cuatro seria catorce. Porque son iguales.
CH: Porque los dos son lo mismo
I: Vale bueno lo vamos a dejar por hoy porque ahora tenéis clase de lengua.

Trascripción de la Sesión 3: 3 de Febrero de 2005

I: Sacad una libreta o un papel por si queréis escribir algo… No me lo vais a tener que dar, pero por si os hace falta escribir algo para que tengáis algún sitio donde escribir, ¿vale? Sacad algún papel, da igual, o si alguien no tiene le puedo dar un folio.

Maestro: La libreta de mate. La libreta de mate.

(I coge algunos folios para repartir a los alumnos)

I: Es para vosotros, no me lo tenéis que dar… Toma, ¿quién quiere un folio?

Algunos alumnos: yo,…yo quiero un folio. Maestra, yo quiero un folio. Yo también.

I: Voy. ¡Levantad la mano!, ¡no chilléis!…. ¿Todos tenéis un papel?... Bueno, ya estamos todos listos... Bueno, hoy no os voy a dar ninguna hoja para que hagáis los ejercicios, sino que los vamos a hacer todos juntos en la pizarra, ¿vale? Así que, él que… sepa… él que quiera contestar o explicarnos qué cree que…que hay que hacer, pues que levante la mano. Vamos a ver unas igualdades y vosotros me tenéis que decir si son verdaderas o falsas, ¿vale?

(I escribe en la pizarra la igualdad 13 – 5 + 5 = 13)

I: No hace falta que las copiéis. Sólo si os hace falta hacer alguna cuenta pues… para eso es el papel. Pero no hace falta que las copiéis. A ver, que levante la mano quien sepa decirme si esta igualdad es verdadera o falsa.

Algunos alumnos: Verdadera
I: Levanta la mano ¿vale? CH, ¿qué crees que es?
CH: Falsa.
I: ¿Falsa? ¿Por qué crees que es falsa?
CH: Porque trece menos cinc…, trece menos cinco son… ocho,… ocho, y cinco… Está bien.
I: ¿Te sale bien? Entonces has hecho trece menos cinco te sale ocho, ocho más cinco sale trece ¿no? Entonces CH piensa que es verdadera. A ver ¿otra persona que lo haya hecho de otra forma? ¿Tú lo has hecho de otra forma? *(dirigiéndose a un alumno que tiene la mano levantada)*
FM: *(gesto de negación)*
I: ¿Lo has hecho igual que ella? ¿Alguien lo ha hecho de otra forma? ¿Lo ha pensado…?
NM: Yo igual que CH
I: ¿Tú igual que CH, NM? ¿A alguien se le ocurre otra forma de hacerlo, sin hacer todas las cuentas?
Algunos alumnos: No
I: ¿FM?
FM: No
I: ¿No?
FM: Ah, si, si,…
I: ¿Cómo?

FM: Cinco más cinco son diez…
I: No, pero éste está restando,…ten cuidado. A ver Rubén
RB: Trece más cinco… trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho *(cuenta con los dedos)* son dieciocho y luego le quito cinco.
I: ¡Ah! muy bien. Rubén tiene razón. Primero puede sumar el trece y el cinco, y luego restarle cinco. Eso es lo que tú has hecho ¿verdad?
RB: Sí
I: Esa es otra forma de hacerlo y ver que está… bien. ¿A alguien se le ocurre otra forma diferente?
Un alumno: No
I: ¿No? Bueno vamos a ver esta… igualdad.

(I escribe en la pizarra la igualdad 7 + 7 + 9 = 14 + 9)

Un alumno: ¿Las copiamos maestra?
I: No, no hace falta. El papel es sólo por si tú quieres hacer alguna operación o escribir algo. A ver esta igualdad. Miradla a ver qué os parece, si es verdadera o falsa. Y cuando lo sepáis levantad la mano. Pensadla un poquillo… FM ya lo sabe… A ver FB, ¿tú qué piensas?
FB: Falsa
I: Tú piensas que es falsa ¿Por qué?
FB: Porque siete más siete….
I: Si
(Risas de otros alumnos)
I: Está contando, vamos a dejarle que piense.
FB: Son catorce y más siete….
I: Esto es un nueve… Siete más siete son catorce, tienes razón.
FB: …Y el otro siete son veintiuno.
I: Es que esto es un nueve, esto no es un siete, es un nueve. ¿Vale? A ver CL, ¿tú qué piensas?
CL: Verdadera
I: ¿Por qué crees que es verdadera?
CL: Porque….porque nueve más siete son dieciséis, más siete, veintitrés, y… catorce más nueve dan veintitrés.
I: Muy bien. Tú has hecho las operaciones de este lado, y del otro, y has visto que las dos dan veintitrés. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma?... ¿A ver CH?
CH: He sumado siete más siete, que dan catorce, y más nueve que dan veintitrés. Y después, he visto que son catorce más nueve y son veintitrés.
I: Vale. Entonces… lo que había hecho CL es hacer la operación, primero nueve más siete y luego siete, tú la has empezado por esta parte, ¿no? la operación. Muy bien, también es otra forma de ver que es correcto. RB ¿tú lo has pensado de otra forma?
RB: Si, Catorce más nueve me dan veintitrés. Y en el otro, siete más siete me dan catorce y más nueve, veintitrés.
I: Muy Bien. Él lo ha hecho empezando por el lado derecho, ¿no? ¿Y a alguien se le ocurre una forma de hacerlo sin hacer todas todas las cuentas? Mirad la igualdad. A ver, ¿Se os ocurre alguna forma de hacerlo que no haya que hacer todas las operaciones? ¿CL?
CL: Sumando siete más siete….
I: Sí… ¿qué estas pensando? Dínoslo….Tú dices sumando siete más siete, ¿no? entonces tienes catorce

CL: Sumando siete más siete que dan catorce, lo mismo que ahí, nueve lo mismo que ahí también.
I: ¡Ah! Claro, entonces tú te has dado cuenta de que esta suma te da lo mismo que aquí, ¿No? ¿Eso es lo que estás diciendo, no? ¿Habéis visto lo que dice CL? CL dice que si sumas estos dos números ya tienes el otro lado, catorce más nueve.
FM: Eso iba a decir yo.
I: Ah, mira pues muy bien. Esa es otra forma. Ya tenemos muchas formas de hacerlo diferentes. Vamos a ver otra igualdad.

(I escribe en la pizarra la igualdad 10 + 4 = 4 + 10)

I: A ver, que levante la mano quien me pueda decir si esta igualdad piensa que es verdadera o falsa. A ver JQ ¿tú qué crees?
JQ: Verdadera.
I: ¿Por qué piensas que es verdadera?
JQ: Porque diez más cuatro son catorce y cuatro más diez son catorce, sólo que las has puesto al revés.
Algunos alumnos: Lo has puesto al revés.
I: Ah, lo he puesto al revés, he cambiado el orden. ¿Estáis todos de acuerdo?
La clase: Sí.
I: Entonces…. no habría….JQ ha hecho la operación pero te has dado cuenta también que lo único que han hecho es cambiar el orden ¿no? No hacia falta. Vamos a ver ésta. Levantad la mano cuando sepáis si es verdadera o falsa.

(I escribe en la pizarra la igualdad 10 – 7 = 10 – 4)

I: A ver por aquí, ¿JM, tú qué piensas?
JM: Falsa
I: ¿Por qué piensas que es falsa?
JM: Porque diez menos siete son… tres y diez menos cuatro son… seis
I: Son seis muy bien. Entonces los dos lados no son iguales ¿no? muy bien. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma que ésta es falsa? ¿No? ¿Tú lo has pensado de otra forma, MB?
MB: Sí, porque yo me he fijado en 10 – 7 y me he fijado en 10 – 4 y no son los mismos números.
I: Ah, claro, si éste fuera un siete, por ejemplo, sería los mismos números, ¿no? Y ¿quien me puede decir una forma de corregirla para que esté bien? Para que al escribirlo de otra forma, cambiando algunos números, para que sea verdadera.
FM: Diez menos siete igual a diez menos siete.
I: Vale. Esa es una forma, muy bien. Esa es una forma de cambiarla y que sea ¿verdad? alguien se le ocurre otra forma distinta? ¿EF?
EF: A diez... quito el siete y pongo un cuatro y me sale lo mismo.
I: Ah muy bien, en lugar de cambiar el siete cambiamos el cuatro. ¿No? Muy bien. ¿A alguien se le ocurre alguna otra forma? ¿FB?
FB: Diez...diez...diez... más... seis
I: Si, diez más seis…
FB: Más... diez más uno
I: ¿Qué pongo? ¿Diez más uno?
FB: Diez más uno.

I: Y tendríamos que sumarle algo más, ¿no?, para que sean iguales ¿A ver quién me sabe decir que número más habría que ponerle? ¿VS?
VS: Un cinco
I: Un cinco, y ya tendríamos otra igualdad. Ahora después me dices tú tu respuesta. Vamos a hacer otra igualdad. A ver ésta que tiene los números un poco más grandes.

(I escribe en la pizarra la igualdad 51 + 51 = 50 + 52)

I: A ver, que levante la mano quien sepa decirme si es verdadera o falsa. A ver BI.
BI: Verdadera.
I: Tú crees que es verdadera ¿Por qué? ¿Cómo lo sabes tan rápido con esos números tan grandes que hay? ¿No sabrías…? ¿No sabes explicarlo? Pues dile tú a alguien que nos lo explique. ¿A quien quieres elegir para que nos lo explique lo que ha pensado?
BI: CL
CL: Porque… porque cincuenta y uno más cincuenta y uno dan ciento dos, y cincuenta más cincuenta y dos también dan ciento dos.
I: Muy bien, CL ha hecho las dos operaciones y ha visto que dan lo mismo. Da ciento dos en este lado y ciento dos en este lado ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? ¿A ver RB?
RB: Sumo cincuenta más cincuenta y dos, me da ciento dos y luego le sumo cincuenta y uno más cincuenta y uno y me da ciento dos.
I: Vale. RB lo que ha hecho es sumar primero el lado derecho y luego el lado izquierdo ¿no? Vale ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? ¿Alguien? FM ¿tú lo has pensado de otra forma?
FM: Sí
I: ¿Cómo?
FM: Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno si le quitas cincuenta le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos.
I: Ah, eso es muy interesante. Tú lo que has dicho es que le puedes quitar uno aquí y sumárselo al otro, ¿no? ¿Eso es lo que has dicho?
FM: Y te da ahí, ciento…cincuenta más cincuenta y dos.
I: Ah, ¿habéis visto? Lo que dice FM es que si le quitamos el uno al primer cincuenta y uno nos sale cincuenta, y si se lo damos al otro nos da cincuenta y dos. ¿Vale? Vamos a ver otra igualdad. Voy a borrar porque nos estamos quedando sin sitio.
Maestro: Esa es la propiedad distributiva

(I escribe en la pizarra la igualdad 78 – 16 = 78 – 10 – 6)

I: A ver, setenta y ocho menos dieciséis…. A ver, que levante la mano quien sepa si es verdadera o falsa esta igualdad. A ver RL dímelo. ¿Tú qué crees que es?
RL: Falsa
I: ¿Por qué crees que es falsa?
RL: …No se explicarlo.
I: ¿No sabes explicarlo? ¿Quieres decirle a alguien que nos lo explique? Dile a alguien que nos lo explique, a ver.
RL: JQ
I: JQ explícanoslo tú. ¿Tú qué piensas que es verdadera o falsa?

JQ: Verdadera, porque setent… falsa, porque setenta y ocho menos dieciséis son sesenta y dos, y setenta y ocho menos diez son sesenta y…sesenta y ocho, y seis, sesenta y dos.
I: Ah, entonces te da lo mismo ¿no? Me has dicho que esto te da sesenta y dos y eso también.
JQ: Es verdadera
I: Entonces es verdadera, ¿no? Pero muy bien. A ver RT ¿tú qué piensas?
RT: Que es verdadera
I: ¿Por qué piensas que es verdadera?
RT: Porque setenta y ocho menos dieciséis da sesenta y dos, y setenta y ocho menos diez, menos seis, da sesenta y dos.
I: Vale, entonces tú lo has pensado igual que JQ. Has hecho las operaciones de las dos partes y has visto que te da sesenta y dos. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? A ver MP que tú todavía no nos has dicho nada
MP: Verdadera.
I: Tú piensas que es verdadera. Y ¿cómo lo has pensado tú?... ¿No sabes decirnos? ¿Pues a ver CH?
CH: Setenta y ocho menos dieciséis dan sesenta y dos, y después a diez le he sumado seis y el resultado sale dieciséis y me ha salido lo mismo.
I: Has hecho las operaciones también aquí pero primero has sumado estos dos ¿no? Vale. ¿Alguien lo ha hecho de otra forma distinta que nos lo quiera contar? RB ¿Tú lo has hecho diferente?
RB: Setenta y ocho menos diez menos seis dan sesenta y dos y setenta y ocho menos dieciséis nos da sesenta y dos.
I: Vale, a ti te gusta siempre hacer primero la del lado derecho ¿no?
JM: ¿Te vas a tirar aquí hasta las doce?
I: No.
Algunos alumnos: ¡Vaya!
I: ¿A alguien se le ocurre otra forma distinta? ¿No? Bueno vamos a ver otra… a ver si ésta es verdadera o falsa.

(I escribe en la pizarra la igualdad 0 + 325 = 326)

I: Que levante la mano, a ver, quien sepa si esta igualdad es verdadera o falsa. A ver… CA ¿tú qué piensas?
CA: Que es falsa.
I: ¿Por qué?
CA: Porque trescientos veinticinco más cero son trescientos veinticinco, y trescientos veintiséis no es nada…
I: No puede ser esto. ¿No? tiene que ser trescientos treinta y cinco. Muy bien. Entonces si queremos cambiarla para que sea verdad. ¿Qué tendríamos que hacer? ¿CA? ¿Qué pondríamos en este lado?
CA: Trescientos veinticinco
I: ¿Así estaría bien? ¿No? Porque ya es correcto. A ver FM ¿qué dices?
FM: Más cero, puedes poner.
I: Puedes poner más cero. Sí, otra forma sería sumarle cero. Si, hay muchas formas de cambiarla. Vamos a ver otra ¿vale? que ésta era muy fácil. A ver ésta, que ésta también es facililla.

(I escribe en la pizarra la igualdad 24 – 24 = 0)

I: A ver ¿quién me dice si ésta es verdadera o falsa? CY, a ver que tú no has hablado todavía.
CY: Falsa
I: ¿Tú crees que es falsa? ¿Por qué?
CY: No, no, verdadera
I: Crees que es verdadera ¿Por qué?
CY: Porque veinticuatro menos veinticuatro dan cero.
I: Entonces si es verdad ¿no? Sale cero. ¿A ver VS tú qué piensas?
VS: Qué es verdadera,
I: ¿Por qué?
VS: Porque… porque veinticuatro menos veinticuatro dan cero.
I: Dan cero. Bueno a ver…Todo el mundo parece que está…tiene muchas ideas sobre ésta. MR ¿tú qué piensas?
MR: Que veinticuatro le quitas veinticuatro, verdadera, porque a veinticuatro le quitas veinticuatro te dan cero.
I: Porque le estas quitando al veinticuatro otra vez los mismos veinticuatro ¿No? ¿Todo el mundo lo ha pensado así?
Algunos alumnos: ¡Sí!
I: Bueno vamos a ver otra, a ver… que parece que tenéis muchas ideas.

(I escribe en la pizarra la igualdad 7 = 12)

I: A ver ésta ¿es verdadera o falsa? Levantad la mano… si pensáis que es verdadera o falsa. ¿RL?
RL: Falsa
I: ¿Por qué crees que es falsa?
RL: Porque siete más… ¿No hay un más? ¿No? Siete más…
I: ¿Por qué?
RL: Porque doce menos…
I: Ahí pone siete igual a doce, no se si se ve bien, esto son dos rectas iguales. Siete igual a doce. Y tienes razón es falsa, esto es mentira. ¿A ver quién nos puede explicar por qué es mentira? ¿JM?
JM: Porque siete no son doce.
I: ¿Siete no son doce? Claro. No es lo mismo ¿no? No es el mismo número. A ver JQ dinos una forma de corregirla. ¿Cómo podrías ponerla?
JQ: Porque siete más cero son siete y no puede dar doce.
I: Entonces ¿cómo sería una forma de escribirla que esté bien?
JQ: Siete más cinco.
I: Ésta sería una forma que estaría bien ¿Otra? ¿A alguien se le ocurre otra forma de escribirla que esté bien? A ver, ¿MR? ¿No se te ocurre otra forma? A ver FM, otra forma.
FM: Siete igual a siete
I: Siete igual a siete, muy bien. Esa es otra forma. A ver DL, otra forma
DL: Cinco más siete son doce.
I: Muy bien, esa es igual que ésta pero cambiando el orden de los números. Muy bien, esa también está bien. A ver RT, tú. ¿Otra forma de… escribirla?
RT: Doce igual a doce.
I: Doce igual a doce, también. Muy Bien. Se os ocurren muchas formas distintas. A ver, CH, ésta es la última para esta igualdad.

CH: Dieciséis menos dos…
I: ¿Dieciséis menos qué?
CH: Menos dos
I: Igual a….
CH: Doce.
I: Vale, bueno, ésta ya es más diferente ¿no? porque ya has cambiado todos los números. Vamos a hacer la siguiente, venga, que para ésta se ve que tenéis muchas ideas.

(I escribe en la pizarra la igualdad 15 – 6 = 6 – 15)

I: A ver ¿qué pensáis? si ésta es verdadera o falsa. Pensadla un poco a ver… Vamos a… A ver EF ¿Tú qué piensas?
EF: Que es verdadera.
I: ¿Por qué?
EF: Porque sólo lo que han hecho es cambiar el orden.
I: ¿Y es verdad? Aunque… Piénsalo… pero tenemos la resta. Eso es verdad cuando tenemos la suma. Pero cuando tenemos la resta es distinto. A ver FM, ¿tú qué piensas?
FM: Falsa
I: ¿Por qué?
FM: Porque quince menos seis son once y a seis no le puedes quitar quince.
I: Claro, ésta resta no la podemos hacer ¿no? Entonces FM tiene razón, es falsa. A ver, ¿alguien nos quiere decir…? A ver FB ¿tú qué piensas?
FB: Que…se me ha olvidado.
I: Ah, se te ha olvidado, no pasa nada. Pero es muy importante lo que había dicho EF, ella se ha dado cuenta de que habían cambiado los números de orden. Y eso con la suma no pasa nada, es lo mismo sumar primero uno que sumar primero el otro, pero en la resta no se puede, como ha explicado FM. ¿Vale? ¿Qué quieres? ¿Tú qué piensas MP?
MP: A quince le quitas seis y te sale nueve y a quince le quitas seis y te da nueve
I: Entonces, ¿tú piensas que es verdadera?... ¿O no?
MP: No
I: Es verdad que si tú haces quince menos seis es nueve pero como está escrito en este orden no se puede hacer. Porque este número es más pequeño que éste. Claro. Vamos a ver la siguiente.

(I escribe en la pizarra la igualdad 37 + 22 = 300)

I: A ver, si pensáis si es verdadera o falsa. Mirad a ver qué os parece… ¿CL tú qué piensas?
CL: Que es falsa
I: ¿Por qué crees que es falsa?
CL: Porque treinta y siete más veintidós dan cincuenta y nueve, y no dan trescientos.
I: Y no dan trescientos ¿no? Muy bien. ¿Alguien? Tú estas de acuerdo ¿no? CA. Es falsa. Te da cincuenta y nueve también. ¿Alguien nos lo puede explicar de otra forma? A ver JM ¿tú qué piensas de esa igualdad?
JM: Que es falsa.
I: ¿Por qué?

JM: Porque… porque treinta y siete más, porque treinta y siete más veintidós,… porque treinta y siete más veintidós no te dan trescientos porque trescientos es un número más mayor.
I: Ah, es verdad lo que tú has dicho. Tú has visto que trescientos es un número mucho más mayor que esta suma ¿no? No puede ser que eso salga algo tan grande. Mira, pues JM no ha tenido que hacer la operación, se ha dado cuenta de que estos dos números no pueden sumar un número tan grande. ¿Tú también te has dado cuenta FM? Muy bien JQ ¿tú qué piensas?
JQ: Porque yo he sumado dos más siete
I: Sí
JQ: Que dan nueve, dos más tres que dan cinco y no da trescientos.
I: Muy bien. Has comprobado que esta suma no da trescientos. A ver tú, ¿MR?
MR: Falsa.
I: Tú crees que es falsa también. ¿Y qué? ¿Cómo lo has pensado tú?**…**
MR: *(gesto de negación)*
I: ¿Y nos podías decir una forma de cambiarla para que sea verdadera? ¿Se te ocurre alguna?
MR: Ah, sí.
I: ¿Sí? ¿Cómo?
MR: Trescientos igual a trescientos.
I: Ah, trescientos igual a trescientos, muy bien.
Algunos alumnos: ¡Me lo has quitado!
I: Si cambiamos el lado izquierdo por un trescientos ya sería verdadera. ¿No? ¿A ver DL tú tienes una idea, para cambiarla?
DL: Era esa.
I: ¿Era esa? ya te la han quitado. ¡Vaya! ¿FM?
FM: Cincuenta y nueve igual a cincuenta y nueve.
I: Pero a ver dejando ésta más o menos, no cambiándola mucho. Que se parezca un poco a la que tenemos. ¿A ver FB?
FB: Doscientos más cincuenta dan trescientos.
I: ¿Doscientos más cincuenta….? Yo creo que tienes que sumar un poquillo más. Para que te de trescientos hay que sumar un poco más. ¿RT? ¿RT cuantos hay que sumar?
RT: Cien.
I: Cien ¿no? Muy bien. Eso sería otra forma. ¿CL a ti se te ocurre otra forma?
CL: Veintisiete más veintidós
I: Sí
CL: Es igual a trescient… a…
I: Sshhh, está pensando.
CL: A doscientos cuarenta y uno
I: ¡Uy! ¡Qué cuenta más difícil! Doscientos cuarenta y uno…
CL: Más cincuenta y nueve.
I: Ah, tú lo que has escrito… el trescientos lo has puesto en dos sumas. Ah, pero eso es interesante. Vamos a ver. Ella lo que ha escrito es, el trescientos lo ha escrito como una suma ¿es eso lo que has hecho CL?
CL: *(gesto afirmación)*
I: Sí ¿no? Has visto dos números que suman trescientos. Entonces nosotros sabemos que ésta es falsa. ¿Ésta será verdadera o será falsa?
Algunos alumnos: Falsa.
I: Falsa ¿no? ¿Por qué lo sabes, DL, tan rápido? ¿Cómo lo sabes?

DL: Porque es la misma que arriba.
I: Claro, es la misma que ésta sólo que la hemos descompuesto, pero mira así hemos obtenido otra diferente. Vamos a ver otra distinta.

(I escribe en la pizarra la igualdad 78 – 45 = 77 – 44)

I: A ver ésta de aquí. Ésta tiene los números un poco más grandes. A ver miradla, a ver que os parece si creéis que es verdadera o falsa. Miradla un poco, ¿CY tú ya lo sabes? ¿Qué piensas tú?
CY: Que es falsa.
I: ¿Por qué?... ¿No lo sabes? No te han gustado los números ¿no? ¿Tú lo sabes ya FM?
FM: Verdadera
I: Tú crees que es verdadera ¿Por qué?
FM: Porque setenta y ocho menos cuarenta y cinco dan treinta y tres y setenta y siete menos cuarenta y cuatro dan treinta y tres.
I: Ah, entonces tú has hecho las dos operaciones y las dos salen treinta y tres ¿no? Por eso es verdadera ¿no? Muy bien. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? ¿CH?
CH: Porque me he dado cuenta que setenta y ocho es mayor que setenta y siete, y que cuarenta y cinco es mayor que cuarenta y cuatro, y cómo sé que da lo mismo, y entonces he restado setenta y ocho menos cuarenta y cinco y como me ha dado lo mismo, he creído que me iba a dar lo mismo.
I: Entonces tú has hecho esta cuenta, eso…a ver que nos expliques un poco mejor lo que tú has hecho. Tú has hecho esta cuenta ¿no?
CH: Sí.
I: Y tú te has dado cuenta de que este número de aquí es más grande que éste y que éste de aquí es más grande que éste. ¿Y te has dado cuenta cómo de grande es? Es el siguiente ¿no? Es uno más nada más.
CH: Sí.
I: ¿De eso te has dado cuenta?... ¿Qué?
CH: Que sí, que si.
I: ¿Tú habías dicho algo FM? Es que he oído a alguien decir algo…y no se. Entonces ¿has tenido que hacer esta cuenta? No has tenido que hacer esta cuenta de aquí. ¿Verdad?
CH: No
I: Muy bien. A ver CL ¿Tú qué has pensado?
CL: Que setenta ocho menos cuarenta y cinco son treinta y tres y setenta y siete menos cuarenta y cuatro dan treinta y tres.
I: Entonces lo has hecho igual que FM. Has calculado las dos operaciones y te da treinta y tres. ¿Tú lo has pensado de otra forma DL? ¿Cómo?
DL: Cuarenta y cuatro menos setenta y siete dan treinta y tres
I: Setenta y siete menos cuarenta y cuatro da treinta y tres. Eso es verdad porque nos lo ha dicho FM antes.
DL: Sí. Y luego setenta y ocho menos cuarenta y cinco también dan treinta y tres.
I: Entonces tú lo has hecho igual pero empezando por la derecha. Primero has hecho la de la derecha y luego la de izquierda. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? No ¿no? Vale. Vamos a ver otra, a ver qué os parece ésta.

(I escribe en la pizarra la igualdad 62 – 13 + 13 = 65)

I: ¿Qué pensáis de ésta? ¿Qué es verdadera o falsa? Miradla a ver…qué os parece… JM ya lo sabe. A ver vamos a espera un poquillo más para que lo piense todo el mundo, que ésta tiene números más grandes. Miradla a ver qué os parece. JM ¿Tú qué crees?
JM: Falsa
I: ¿Por qué?
JM: Porque sesenta y dos menos trece son… *(Cuenta con los dedos)*
I: ¿Pero tú has hecho todas las cuentas, antes?
JM: No.
I: Entonces cuéntame cómo lo has sabido tan rápido. Porque yo te he visto que has levantado la mano muy pronto. ¿Cómo has sabido que era falsa sin hacer las cuentas?
JM: Porque trece más trece son… veintiséis
I: Sí
JM: Menos sesenta y dos…
I: Pero tú me has dicho antes que tú no has hecho todas las cuentas, tú has sabido que era falsa mirándola nada más.
JM: Sí
I: De golpe.
JM: Si
I: ¿Cómo? ¿Sabes explicarnos por qué?
JM: *(gesto de negación con la cabeza)*
I: ¿O es muy difícil de explicar? Es que eso es muy difícil de explicar. Bueno JQ tú explícame**.**
JQ: Porque sesenta y dos menos trece son… cincuenta y una, más… más trece…sesent...sesenta y dos.
I: Ah, y no da sesenta y cinco ¿no? Tú has visto que esta parte de aquí da sesenta y dos. Y es verdad, esta parte de aquí da sesenta y dos, pero no es lo mismo que esto. Entonces es de falsa. RT ¿tú lo has pensado de otra forma? ¿O lo has pensado igual que JQ?
RT: Igual que JQ
I: Igual que JQ. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma o todos lo habéis pensado como JQ?
Algunos alumnos: Como JQ. Igual que JQ
I: ¿Igual que JQ? Y miradla a ver si se os ocurre alguna forma de saberlo sin hacer las cuentas. JM lo sabia mirándola y sin hacer las cuentas. ¿A alguien se le ocurre por qué? ¿FM?
FM: Trece más trece veintiséis,… menos…y sesenta y dos menos veintiséis…
I: No es igual a sesenta y cinco ¿no? No es igual. Vale. Vamos a ver la siguiente.

(I escribe en la pizarra la igualdad 24 – 15 = 24 – 10 – 5)

I: A ver, miramos ésta a ver qué os parece ¿verdadera o falsa? Vamos a ver. Veo unas cuantas manos levantadas. Vamos a esperar un poquillo más a que lo piensen. CT ya lo sabe pero… ¿me vas a explicar cómo lo has hecho? A ver ¿MB tú lo sabes ya? ¡No! me he confundido CH ¿Cómo? ¿Lo has pensado? ¿Tú qué crees, qué es verdadera o falsa?
CH: Verdadera
I: ¿Por qué?
CH: Porque veinticuatro menos quince dan…umm…ocho.
I: ¿Te sale ocho? Yo creo que… son nueve.

CH: Son nueve, nueve.
I: Se te ha escapado uno.
CH: Y veinticuatro menos diez menos cinco dan nueve.
I: Muy bien, las dos partes te dan nueve ¿verdad? FM ¿tú lo has pensado de otra forma?
FM: Sí, porque es que tú has hecho diez menos cinco, y si eso lo juntas te dan quince.
I: Claro, tú has visto que aquí tenemos un diez restando y un cinco restando ¿no? y tú te has dado cuenta que eso es lo mismo que quitarle quince de golpe. Así no tienes que hacer las cuentas. Muy bien, da lo mismo, claro, porque veinticuatro es el mismo número y luego…, muy bien, así te has evitado el trabajo. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? ¿JM?
JM: Veinticuatro más veinticuatro y luego lo que ha dicho FM.
I: Tú has visto los dos veinticuatro iguales y luego has visto lo que ha dicho FM. Muy bien. ¿FB tú qué has pensado?
FB: Veinticuatro menos…. veinticuatro más veinticuatro, menos quince y menos quince. Eso es lo que he hecho yo.
I: Ah, ¿Lo que ha dicho JM? ¿No? Ha sido JM ¿no? Sí. Que los dos tienen veinticuatro y los dos tienen quince. ¿RT lo has pensado así tú también o lo has pensado de otra forma?
RT: Le he restado veinticuatro menos quince y me han dado veintinueve…
Un alumno: Lo has sumado.
I: ¿Lo has sumado? ¡Shhh! Déjala que lo piense.
RT: He restado veinticuatro y quince y me ha dado veintinueve, y veinticuatro menos diez y menos cinco me han dado veintinueve.
I: Los dos lados dan lo mismo pero fíjate porque éste da nueve… Te habrás equivocado en la cuenta. Pero tienes razón los dos lados dan lo mismo, pero aquí da nueve y aquí da nueve. Revisa la cuenta a ver ¿Vale? Vamos a ver el siguiente y ahora me dices en el siguiente lo que tú piensas ¿Vale? *(Dirigiéndose a un alumno con la mano levantada).* Es que tenéis muchas ideas y sino no nos da tiempo a hacerlos todos. A ver, éste es muy fácil.

(I escribe en la pizarra la igualdad 125 – 0 = 125)

I: A ver. Pensad a ver qué os parece ¿Qué os parece? CA ya lo sabe. CA ¿qué piensas?
CA: Que es verdadera.
I: ¿Cómo lo sabes, tan rápido?
CA: Porque ciento veinticinco menos cero dan ciento veinticinco.
I: Muy bien, eso lo sabes sin hacer ninguna cuenta. ¿No? ¿CT tú también lo sabías?
CT: Sí.
I: ¿Por qué? ¿Por lo mismo que ha explicado CA? Claro, ésta era muy fácil ¿no? DL ¿tú lo has pensado igual también?
DL: (*Asiente)*
I: Vale. Ésta es que todo el mundo lo habrá hecho igual o ¿Alguien lo ha hecho de otra forma? CL ¿tú lo has hecho de otra forma? ¿Cómo lo has pensado?
CL: Porque ciento veinticinco menos ciento veinticinco dan cero
I: Pero tú lo has cambiado el orden… A ver ¿FM tú que has pensado?
FM: Yo he pensado que, si quitas el cero, como el cero no es nada, pues te quedan los dos ciento veinticinco. Ciento veinticinco igual a ciento veinticinco.

I: Claro, tú has visto que el cero como nunca hace nada, ¿verdad? si lo sumas o lo restas da lo mismo. Tienes razón. Es como no…como hacerle cosquillas, vamos…, al número ¿no?

(I escribe en la pizarra la igualdad 93 = 93)

I: A ver ésta de aquí. ¿Ésta es verdadera o falsa? A ver, FB ¿tú que piensas?
FB: Verdadera.
I: ¿Por qué?
FB: Porque noventa y tres, da noventa y tres. Porque no te llevas nada.
I: Claro, es lo mismo. Y EF ¿tú cómo lo has pensado?
EF: Lo mismo.
I: ¿Lo mismo? Vale, vamos a ver otra que tengáis que explicarme un poco más.

(I escribe en la pizarra la igualdad 19 – 3 = 18 – 2)

I: A ver. Mirad a ver ésta que os parece, si es verdadera o falsa.
MG: Falsa.
I: ¿Ya lo sabes MG?
Maestro: ¡No lo ha mirado si quiera!
I: Pues entonces,…mírala a ver. CH ya lo sabe, EV también. EV, a ver que hoy no has hablado todavía. ¿Lo sabes ya? ¿No?
EV: Se me ha olvidado
I: ¿Se te ha olvidado? No pasa nada, piénsalo. VS ¿tú nos lo quieres explicar? ¿Cómo…? ¿Tú qué piensas?
VS: Verdadera
I: ¿Por qué?
VS: Porque diecinueve menos tres
I: Sí.
VS: Dan dieci…dieci…séis
I: ¿Dieciséis?
VS: Y dieciocho menos dos dan dieciséis.
I: Muy bien, las dos partes te han dado dieciséis. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? CL ¿tú lo has pensado de otra forma o igual? ¿Igual?
CL: Igual.
I: RT ¿lo has pensado de otra forma?
RT: Igual.
I: Igual, Muy bien. ¿FM? ¿Igual también?
FM: *(gesto de negación)*
I: ¿No? ¿Cómo lo has pensado?
FM: Es que como dos es menor que tres
I: Sí
FM: Pues es más fácil restarlo, entonces he restado dieciocho menos dos, que es más fácil, y dan dieciséis, y el otro diecinueve menos tres dan dieciséis.
I: Tú has empezado entonces por la resta más fácil, dices ¿no? Claro la que has hecho primero te da dieciséis y luego has hecho la otra y te da dieciséis. Muy bien. MP ¿tú lo has pensado de otra forma?
MP: Verdadera.
I: Tú has pensado que es verdadera también ¿no?

MP: Verdadera porque diecinueve menos tres dan dieciséis y dieciocho menos dos me dan dieciséis.
I: Muy bien, lo has hecho también igual. ¿Tú lo has hecho de otra forma RB o igual?
RB: Dieciocho menos dos dieciséis y diecinueve menos… *(Entre risas).*
I: Entonces tú lo has hecho igual que FM. Eso ya nos lo han dicho antes. Vamos a ver ésta.

(I escribe en la pizarra la igualdad 27 – 14 + 14 = 26)

I: A ver ésta que pensáis, si es verdadera o falsa. Miradla a ver. Miradla. JQ ya lo sabe. ¡Que rápido JQ! ¿Cómo los sabes tan rápido?
JQ: Porque, veintisiete menos catorce…
I: Sí,…. No, pero no has hecho las cuentas antes, tú dime, explícame cómo lo has sabido tan rápido. ¿Tú que piensas? ¿Que es verdadera o que es falsa?
JQ: Falsa
I: Falsa ¿Y cómo lo sabes tan rápido?
JQ: Porque catorce más catorce…
I: Sí
JQ: Son veintiocho, menos veintisiete…
I: Sí
JQ: No… no puede dar veintiséis.
I: Ah, vale, pero una cosa que tenéis que tener cuidado es, éste está restando y éste está sumando ¿vale? Eso es importante, porque uno está restando y otro está sumando. A ver CH ¿tú que has pensado?
CH: Que veintisiete menos catorce dan… trece.
I: Trece.
CH: Y, más catorce, los recupero, es como había recuperado catorce y me dan veintiséis.
I: Ah, entonces…es interesante lo que has dicho. Es como si… recuperas otra vez lo que le has quitado ¿no? ¿Y qué te da entonces veintiséis, o te da veintisiete, como al principio?
CH: Me dan… me dan veintiséis.
I: ¿Veintiséis? Yo creo que da, que da veintisiete, yo creo que es falsa. Porque tú me has dicho…, está bien lo que me has dicho. Tú me has dicho veintisiete menos catorce igual a trece. Y ahora, recuperas los catorce que le has quitado.
CH: Sí
I: Entonces te tiene que salir igual que al principio ¿No?
CH: Sí
I: Además si sumas trece más catorce, te sale veintisiete. FB ¿tú que has pensado?
FB: Que es verdadera
I: ¿Por qué?
FB: Porque veintisiete menos catorce me dan doce, y doce más catorce me dan veintiséis.
I: Pues fíjate a ver, porque esto creo que no da doce. Porque antes nos ha dicho CH que da trece. Mira a ver la cuenta ésta. CH nos ha dicho que esta cuenta da trece. Repásala a ver. Y si estás de acuerdo o no…, mírala, y ahora me dices si te sale doce o te sale trece ¿vale? FM ¿tú que piensas?
FM: Yo es que he sumado catorce más catorce, como da veintisiete, ya lo tengo ahí el veintisiete, y no puede dar veintiséis que está ahí.
I: ¿Tú has sumado estos dos, dices?

FM: Y me da veintisiete, y como ya está ahí el veintisiete pues no pueden ser veintiséis.
I: No puede ser veintiséis. Vale, pero catorce más catorce… Tenéis que tener cuidado porque este catorce está restando y éste está sumando ¿vale? Entonces no es lo mismo. A ver ¿tú que piensas MR?
MR: Falsa
I: Muy bien. ¿Por qué?...
MR: *(gesto negación)*
I: ¿No lo sabes? ¿Tú que has pensado MP?
MP: Falso
I: ¿Por qué es falso? ¿No sabes explicárnoslo?
MP: *(gesto negación)*
I: VS ¿Tú sabes explicarnos lo que piensas?
VS: Falso
I: ¿Por qué?
VS: Porque veintisiete menos catorce dan…dan trece
I: Sí
VS: …y trece más catorce dan veinticinco.
I: Trece más catorce…a ver, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete (*contando con los dedos*). Veintisiete, ¿no? Sale veintisiete. Entonces es verdad, es falsa, porque no nos sale veintiséis. ¿FB has hecho ya la cuenta?
FB: Sí
I: Y ¿qué te sale veintisiete menos catorce?
FB: Veintisiete menos catorce me dan trece
I: Muy bien
FB: Y trece más catorce me dan veintisiete.
I: Muy bien. Te sale igual que a VS, te sale veintisiete y has visto que no es lo mismo que veintiséis. Muy bien, vamos a ver el siguiente.

(I escribe en la pizarra la igualdad 231 + 48 = 231 + 40 + 8)

I: A ver ésta que tiene unos números muy grandes, a ver si alguien sabe decirme si es verdadera o falsa, sin hacer las operaciones. Vamos a ver que me falta sitio (*I borra la pizarra*)… A ver, miradla, a ver si alguien sabe decirme si es verdadera o falsa sin hacer ninguna cuenta. A ver, a ver, EF ¿Tú qué piensas?
EF: Que sale…Es verdadera, porque sale lo mismo. A cuarenta y ocho le pongo un ocho…, a cuarenta le pongo un ocho y me sale lo mismo.
I: Ah, muy bien. EF ha visto que si a cuarenta le pones el ocho ya te sale esto de aquí, ¿no? y ya tenemos la misma suma en los dos lados. Muy bien ¿Quién más lo ha pensado así? ¿Alguien más lo ha pensado como EF? CL ¿tú lo has pensado así o lo has pensado de otra forma?
CL: No, lo he pensado de otra forma.
I: ¿Cómo lo has pensado?
CL: Porque doscientos treinta y uno más cuarenta y ocho dan doscientos setenta y nueve, y doscientos treinta y uno más cuarenta, dan doscientos setenta y uno, más ocho, doscientos setenta y nueve.
I: Muy bien. CL ha hecho todas las operaciones y ha visto que los dos son iguales. Pero tenéis que fijaros porque, como ha dicho EF, no tenemos que hacer todas las

cuentas, podemos ahorrárnoslas. Tú te has dado cuenta ¿verdad RB? Que como este número de aquí y éste es lo mismo, no hay que hacer todas las cuentas. Eso es muy importante porque así nos ahorramos mucho trabajo.

(I escribe en la pizarra la igualdad 7 + 3 = 10 + 3)

I: ¿Y ésta de aquí? Ésta que tiene unos números más pequeños… que no asustan tanto. Esa de ahí, a ver si es verdadera o falsa. FM ya lo sabe y JM también. Miradla a ver que os parece… Mirad a ver que os parece si esa es verdadera o falsa. CA ¿tú lo sabes ya?
CA: Falsa
I: ¿Por qué?
CA: Porque siete más tres son… diez, y diez más tres son trece.
I: Muy bien, las dos partes no dan lo mismo ¿verdad? Este lado te ha dado diez, siete más tres, y éste te ha salido trece. Muy bien ¿Alguien lo ha pensado de otra forma? … que me lo pueda explicar. A ver RB. ¿Qué has pensado?
RB: He sumado diez más tres y me dan trece…no…
I: Sí
RB: Me dan trece, y luego siete más tres me dan diez.
I: Muy bien, lo has hecho igual que CA pero al revés ¿no?, como siempre te gusta empezar por la derecha, pues primero la cuenta de la derecha. (*Risas de algunos alumnos incluido RB*). A ver ¿MP tú que has pensado?
MP: Que… he sumado siete más tres y me han dado, diez, y diez más tres, trece.
I: Muy bien. Tú lo has hecho igual que CA, que este lado le ha dado trece y éste le ha dado trece. ¿MR tú lo has pensado de otra forma o lo has pensado igual?
MR: Falso.
I: Tú has pensado que es falso también. ¿Y cómo lo has pensado? ¿No te acuerdas?
MR: *(gesto de negación)*
I: Bueno ya nos han dicho muchas formas distintas ¿Alguien lo ha pensado de otra forma distinta? ¿CH tú tienes otra forma diferente? ¿Cómo?
CH: Que siete más tres son… diez
I: Sí.
CH: Y a diez le quito…a diez le he quitado el cero y le he puesto el tres, y me ha salido trece. Y no es igual.
I: Ah, no es igual, porque le has puesto las unidades, como si dijéramos. Claro. ¿FB tú lo has pensado de otra forma?
FB: Me lo ha quitado.
I: Ah, te lo ha quitado. CA, tú ya nos lo has contado ¿no? O ¿tienes algo más que decirnos?
CA: Otra forma.
I: ¿Otra forma? A ver ¿Cómo?
CA: Falsa.
I: Sí. ¿Cómo lo has pensado?
CA: Diez más siete dan diecisiete y tres más tres dan seis.
I: Ah, vale. Pero esa sería ésta ¿verdad? Tú lo que me estas diciendo es otra igualdad. Sería… Tú lo que has hecho es esta igualdad ¿no?, diez más siete *(I escribe en la pizarra la igualdad 10 + 7 = 3 + 3)*. Esa sería falsa también, pero ahora la que estamos viendo es ésta de aquí. ¿Vale? ¿Alguien lo ha pensado de otra forma o ya tenemos todas las formas posibles? ¿Tú lo has pensado de otra forma? ¿Tú eras RL verdad?

RL: Diez más tres son trece, y siete más tres son diez.
I: Vale. Entonces tú lo has pensado igual que RB**.** Muy bien. Ya nos estamos repitiendo así que vamos a ver… *(Risas de los alumnos*)…. A ver ésta de aquí.

(I escribe en la pizarra la igualdad 100 + 94 – 94 = 100 en vez de 100 – 94 + 94 = 100. Al haber observado la dificultad que encontraban los alumnos con las igualdades de la forma a – b + b = c se cambió el orden de las operaciones de suma y resta)

I: ¿Ésta de aquí que os parece? Cien más cuarenta y nueve, menos cuarenta y nueve igual a cien. A ver DL ¿tú ya lo sabes? ¿Tú qué piensas?
DL: Porque cien más noventa y cuatro me dan ciento noventa y cuatro, y es lo mismo que si le quitas noventa y cuatro, te da cien.
I: Entonces tú piensas que es verdadera. Porque te sale ciento noventa y cuatro y le quitas noventa y cuatro y te da cien. ¿FM, tú qué has pensado?
FM: He restado noventa y cuatro menos noventa y cuatro y me da cero, cien.
I: Muy bien, tú te has dado cuenta de que esto es cero ¿no? Muy bien. Esa es otra forma de hacerlo. Muy rápida. RT ¿tú qué has pensado?
RT: Yo he pensado… quitarle noventa y cuatro a cien…
I: Primero haces esta cuenta ¿cien menos noventa y cuatro? ¿Es lo que me estás diciendo o qué me estás diciendo?
RT: Quitarle a cien
I: ¿Este cien de aquí?
RT: Menos noventa y cuatro
I: Menos noventa y cuatro ¿no? Vale. Vamos a ver. ¿Quién lo ha pensado de otra forma? ¿Tú lo has pensado de otra forma más? Vamos a ver alguien que no haya hablado…. ¿MP, tú cómo lo has pensado?
MP: Falsa
I: ¿Tú piensas que es falsa? ¿Por qué?
MP: *(gesto de negación)*
I: ¿No sabes por qué? DL antes nos ha dicho que es verdadera. ¿MR tú que piensas?
MR: Verdadera
I: Tú estás de acuerdo con DL entonces. ¿Por qué?
MR: Porque cien más noventa y cuatro, luego le quitas noventa y cuatro y te sale cien.
I: Te sale cien. Es lo mismo que nos ha dicho DL, le estas sumando el noventa y cuatro y se lo estás quitando ¿no? Además es como ha dicho FM es que esto de aquí es cero, entonces, pues, no tenemos que hacer ninguna cuenta. Es como sumarle cero ¿no? Vale, FB ¿tú lo has pensado de otra forma?
FB: Cien le quito cien me da cero, y noventa y…noventa y cuatro más noventa y cuatro me dan cien.
I: Si tenemos…a cien le sumamos noventa y cuatro y le quitamos noventa y cuatro nos sale, porque le estamos sumando y le estamos quitando el noventa y cuatro. ¿Te has dado cuenta de lo que nos ha dicho FM? El nos ha dicho, como le estamos sumando un número y luego se lo estamos quitando, pues es como si no estuviéramos haciendo nada, aquí tenemos cero, y por eso nos sale lo mismo, tenemos lo mismo al principio que al final ¿Vale?

(I escribe en la pizarra la igualdad 13 + 11 = 12 + 12)

I: A ver, ésta de aquí. Mirad a ver que pensáis. Es trece más once igual a doce más doce. Esa la escribisteis uno de vosotros el último día, en vuestras hojas. Esa la escribió uno de vosotros A ver que pensáis, si es verdadera o falsa. JM ¿tú que piensas?
JM: Falsa.
I: Tú dices que es falsa. ¿Por qué?
JM: Porque trece más once son veinticuatro
I: ¿Sí? ¿Y el otro lado?
JM: Son veinticuatro.
I: Entonces te sale los dos lados igual ¿no? Entonces es verdadera.
JM: Sí
I: Muy bien. Tú has hecho las operaciones de los dos lados y has visto que las dos te dan veinticuatro. RL, ¿tú qué lo que has pensado?
RL: Yo he pensado once más doce que me da veinte… tres
I: Tú has sumado ¿el qué? ¿Doce más?
RL: Doce más once
I: ¿Éste con éste? Pero tienes que tener cuidado porque el signo igual está en medio, entonces por un lado están estos números y por otro lado están estos
RL: He sumado doce más doce, veintidós
I: Sí, veinte…. a ver te sale, doce, cuéntalo a ver cuánto te sale
RL: …Veinticuatro
I: Muy bien, como nos ha dicho antes JM, eso sale veinticuatro. Y este lado de aquí, ¿cuánto sale?
RL: Y a trece le quitas, le sumas once
I: Sí
RL: Que me dan…. veinticuatro
I: Muy bien, es lo que nos ha dicho antes JM ¿No? Las dos partes te dan veinticuatro. Muy bien, ¿alguien lo ha pensado de otra forma, que no haya hecho todas las cuentas?... CH, ¿tú cómo lo has pensado?
CH: He pensado que a trece le puedo quitar una y te quedan doce y ese uno se lo he puesto al once y me sale doce más doce igual a doce más doce.
I: Ah, muy bien, es como algo que nos ha contado antes FM en otra igualdad. Creo que ha sido él. Si le quitas uno de aquí y se lo pones a éste, te sale esta parte de aquí ¿verdad? ¿Os habéis fijado en lo que dice CH? Este número de aquí si le quitamos una nos sale doce y se la damos la una a éste y así tenemos la suma igual, ¿vale? ¿Tú te habías dado cuenta de eso FM? FB, ¿tú cómo lo has pensado?
FB: Doce más doce me dan veinticuatro y trece más once me dan veinticuatro
I: Vale, entonces lo has pensado igual que RL y JM ¿verdad?, muy bien, ¿alguien lo ha pensado de otra forma…? FM, ¿tú lo has pensado de otra forma?
FM: Sí, como un día tiene 24 horas y la mitad es doce, pues doce más doce veinticuatro**.** *(Risas de los alumnos)*
I: Vale, eso es otra forma de saber que esta suma es veinticuatro, eso si es verdad, RB, ¿tú qué has pensado?
RB: Doce más doce me dan veinticuatro y trece más once me dan veinticuatro. *(Risas de los alumnos)*
I: Muy bien, tú has hecho la operación de la izquierda primero, la de la derecha primero y luego la de la izquierda. MP, ¿tú has pensado otra cosa?
MP: He sumado trece más once y me dan veinticuatro, y doce más doce y me dan veinticuatro

I: Vale, las dos operaciones de los dos lados, te han dado lo mismo, veinticuatro, Pero ¿te has fijado en lo que nos ha explicado antes CH? si le quitamos una a éste y se la damos a éste, tenemos los mismos números, y así no habría que hacer todas las cuentas. Sería otra forma más rápida. Las dos formas están bien, son dos formas distintas de hacerlo, una es sin hacer las cuentas, que es un poco más rápida, y la otra, haciendo las cuentas que es un poco…. Bueno, necesitas un papel. Necesitas un papel para hacer las cuentas aparte. ¿Tú quieres decirnos algo DL?
DL: Al doce le quitas un uno y se lo pones al otro doce y te da la de allí.
I: Ah! Es parecido a lo que dice CH, pero es distinto. Él ha empezado por aquí. Si le quitas a este doce un uno y se lo das a éste, te sale lo de esta parte. Muy bien, eso es otra forma de pensarlo. Lo que ha dicho CH, pero al revés, empezando por el lado derecho. Vamos a pensar en otra igualdad

(I escribe en la pizarra la igualdad 100 – 100 = 1)

I: A ver ésta que es de las facilillas. A ver si alguien de los que no se ha animado a hablar todavía me dice si esta igualdad es verdadera o falsa. Alguno de los más silenciosos. EV tú estas muy silenciosa hoy. Me puedes decir eso, si es verdadera o falsa.
EV: Falsa
I: ¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?
EV: Porque cien menos cien son cero, no uno.
I: No uno, entonces esto, está mal. Habría que cambiar el uno por un cero ¿No?
EV: Sí
I: ¿Y a alguien se le ocurre alguna forma de cambiarla para tener una igualdad que sea verdad? Ésta es una forma como ha dicho EV. Otra forma CL.
CL: Poniendo cien menos cien más uno, igual a uno
I: Muy bien, sumándole uno que te hace falta ¿no? Pues esa sería otra forma. A alguien se le ocurre una forma. ¿MR?
MR: Pues cien igual a cien
I: Muy bien, otra forma. Ésta es muy fácil pero a mucha gente no se le ocurre porque como no tiene operaciones se creen que eso es muy raro. A ver JM, ¿tú qué piensas?
JM: Cien menos cero… igual….
I: Cien menos cero ¿Cuánto es?
JM: Cien menos cero menos cien, igual a cero
I: Ah vale, tú lo que has hecho es meterle un cero en medio y has puesto el resultado a la derecha ¿no? Eso está bien, y este cero de aquí pues no hace nada porque como es quitar cero….
FM: Yo se una
I: ¿Tú sabes una FM? A ver FM dime una
FM: Cien más cero igual a cien.
I: Cien más cero igual a cien. Cien más cero igual a cien. Muy bien, a ver ¿a quien se le ocurre una forma que sea cambiando este número de aquí? *(I señala al segundo 100 de la igualdad).* Una forma que sea dejando el cien y el uno pero cambiando el cien. ¿Qué número habría que poner ahí? A ver MR, dímelo.
MR: Cero igual a cero
I: Sí, ésta es otra forma, sí, pero yo estoy pidiendo ahora como podríamos escribir esta igualdad cambiando este cien por otro número. DL ¿tú lo sabes? ¿Cómo?
DL: Noventa y nueve
I: ¿Dónde pongo el noventa y nueve?

DL: Ahí, noventa y nueve más uno igual a cien
I: Esa está bien. Muy bien. A ver, Pero si yo quiero escribir cien menos algo igual a uno. ¿Qué número tengo que escribir ahí? ¿CH?
CH: Noventa y nueve.
I: Noventa y nueve, muy bien. Esa sería una forma cambiando sólo ese número, ¿vale? ¿Y si quiero cambiar un número al principio? Un número menos cien igual a uno. A ver ¿CL?
CL:…
I: Si a un número le quito cien y me sale uno, ¿qué número será?... Esto es un poco complicado porque tenemos un número muy grande aquí ¿Será más grande que el cien o más chico? A ver ¿CL?
CL: Más grande
I: Más grande que cien. Porque si le quitas cien te da uno, y tiene que ser una unidad más grande que cien. FM ya lo sabe. ¿Cuál es?
FM: Ciento uno menos cien igual a uno
I: Muy bien, ciento uno menos cien igual a uno. Vamos a ver otra igualdad. A ver ésta qué os parece.

(I escribe en la pizarra la igualdad 72 = 56 – 14)

I: Mirad a ver esto si os parece verdadero o falso. FM ya lo sabe y DL también. RB ha dicho algo pero no ha levantado la mano. CL también lo sabe. A ver ¿JQ tú ya lo sabes? ¿Qué piensas?
JQ: Verdadera.
I: Ésta de aquí. Ah! Tú estabas mirando ésta ¿verdad? *(I señala una de las igualdades discutida previamente que aun sigue escrita en la pizarra)* Ah no entonces vamos a dejarte tiempo para que lo pienses. A ver qué pensáis de ésta. ¿CH?
CH: Que setenta y dos no es igual a cincuenta y seis menos catorce porque cincuenta y seis menos catorce es un número más chico que setenta y dos.
I: Ah! Esto va a ser un número más chico que setenta y dos. ¿Cómo lo sabes? Es verdad.
CH: Porque cincuenta y seis es más chico que setenta y dos y si le restamos catorce, me da un número más chico que cincuenta y seis.
I: Claro muy bien, CH ha visto como cincuenta y seis es más chico que setenta y dos, si le quito catorce va a ser más chico todavía, entonces no nos puede salir setenta y dos. Vale, eso está bien, por eso sabemos que es falsa ¿CL tú lo has pensado de otra forma?
CL: Sí
I: ¿Cómo?
CL: Porque cincuenta y seis menos catorce son treinta y no son setenta y dos
I: Bueno son… treinta, treinta no son, son… cuarenta y algo, esto de aquí… ¿Cuando nos da esto de aquí? ¿RT? ¿Lo sabes? ¿Cuánto es?
RT: Cuarenta y dos
I: Cuarenta y dos ¿no? Entonces no puede ser igual que esto de aquí. No es setenta y dos MP ¿tú como lo has pensado?
MP: No se explicarlo
I: ¿No sabes explicarlo? Bueno, vamos a ver, vamos a hacer las dos últimas igualdades, que ya nos tenemos que ir, que tenéis clase de lengua.

(I escribe en la pizarra la igualdad 18 + 3 – 4 = 17)

I: A ver ésta a ver a quien se le ocurre si es verdadera o falsa. Miradla a ver. Tenemos dieciocho, le sumamos tres, le restamos cuatro y nos sale diecisiete. FM, ya lo sabe y FB también. JM también. CL y CH también. Vamos a ver. Mirad a la pizarra que es donde está la igualdad. A ver JM ¿tú qué piensas?
JM: Falsa
I: ¿Por qué piensas que es falsa?
JM: Porque dieciocho más tres son veintiuna.
I: Veintiuna, muy bien.
JM: Y menos cuatro son…
I: ¿Cuántos?
JM: Diecisiete
I: Te sale diecisiete ¿entonces es verdadera no? Muy bien, JM acaba de hacer todas las cuentas de esta parte del lado izquierdo y le sale diecisiete. Entonces es verdadera. ¿CH tú como lo has pensado? ¿Lo has pensado igual?
CH: He sumado dieciocho más tres y después, a veintiuna, le he restado cuatro
I: Vale entonces lo has pensado igual que JM. Muy bien, ¿alguien lo ha pensado de otra forma distinta? CL, ¿lo has pensado de una forma distinta? ¿Cómo?
CL: Dieciocho más tres son veintiuno y diecisiete más cuatro son veintiuno
I: ¡Ah! Entonces, en lugar de restárselo se lo has sumado a la otra parte. Vale la última respuesta que ya nos tenemos que ir. A ver, ¿RB?, ¿Tú cómo lo has pensado?
RB: Diecisiete y cuatro me dan veintiuna, y dieciocho más tres me dan veintiuna.
I: Muy bien entonces la has pensado igual que CL. Muy bien, bueno pues ya lo vamos a dejar porque tenéis clase de lengua y se nos ha hecho un poco tarde.

Trascripción entrevistas: Sesión 5

1. CH
11 – 6 = 10 – 5
19 – 13 = 9 – 3
125 – 125 = 14
23 + 0 = 23

I: Hola
CH: Hola
I: Mira, esto es para grabar lo que digamos porque como yo no tengo tiempo para ir copiándolo todo, así luego me acuerdo de lo tú que has dicho ¿vale? Mira esto es para ti, aquí puedes poner tú nombre, al principio ¿vale? Este lápiz y esta goma son para ti, por si te hace falta.
(CH escribe su nombre)
I: Yo te voy a ir escribiendo unas igualdades, como los otros días, las que hicimos en clase, entonces quiero que tú me digáis si es verdadera o falsa. ¿Vale?... A ver,…la primera.

11 – 6 = 10 – 5
I: Toma, tú que crees, ¿que ésta es verdadera o falsa?

CH: Verdadera
I: ¿Por qué?
CH: Porque si a once le quitas seis son... cinco, y si a diez le quitas cinco, cinco.
I: Muy bien. ¿Y sabrías decírmelo también de otra forma que es verdadera?
CH: ¿El qué?
I: ¿Podrías explicármelo también de otra forma porque es verdadera? sin hacer las cuentas.
CH: Porque... si once es mayor que diez y le quitas uno más que cinco, te sale igual.
I: Ah, muy bien. Eso es. Muy bien. Vamos a hacer la siguiente.

19 – 13 = 9 – 3
I: ¿Ésta qué crees que es, verdadera o falsa?
CH: Seis,...ocho, nueve (contando) eh...
I: Si te hace falta escribir algo, lo que sea, puedes escribir, eh
CH: No, si...Verdadera.
I: ¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?
CH: Porque diecinueve menos tres son, trece, son... *(Cuenta en voz baja)* seis, y nueve menos tres son, seis
I: Muy bien. Entonces has hecho las operaciones de este lado y las del otro, y has visto que te da seis ¿no?
CH: Sí
I: Muy bien ¿Se te ocurre otra forma también de saber que es verdadera?
CH: Porque...porque... a... si a diecinueve le quitamos trece es igual que como si le quitáramos los unos
I: Ah, claro, como si le quitáramos los unos estos de aquí ¿no? Muy bien. Eso es. Muy bien. Vamos a ver ésta...

125 – 125 = 14
I: A ver, ¿ésta cómo crees que es, verdadera o falsa?
CH: Falsa
I: Muy bien ¿cómo lo sabes?
CH: Porque ciento veinticinco, si le quitamos ciento veinticinco, son cero
I: ¿Cómo lo sabes tan rápido?
CH: Porque ciento veinticinco, si si si se le quita todos los números...
I: No te queda nada, ¿no?
CH: No
I: Claro, muy bien. Muy bien. A ver vamos a hacer la última ya.

23 + 0 = 23
I: Y ésta ¿cómo crees que es, verdadera o falsa?
CH: Verdadera
I: ¿Por qué?
CH: Porque veintitrés más cero igual a veintitrés, porque si a veintitrés no le sumamos nada es veintitrés.
I: Muy bien, pues ya está, ya hemos acabado. Muchas gracias CH.

2. JM

$9 + 4 – 4 = 9$
$20 – 12 = 20 – 10 – 2$
$11 + 7 = 10 + 8$
$11 – 6 = 10 – 5$
$19 – 13 = 9 – 3$

I: Hola, mira, esto que tenemos aquí es para grabar lo que tú me digas, para que yo no tenga que ir copiando. ¿Vale?
JM: Vale
I: Mira, yo te voy a dar una hoja, en esta hoja… es para que escribas tú. Aquí te voy a ir escribiendo unas cuantas igualdades para que las hagamos como los otros días, ¿vale? y tú pon aquí tú nombre y luego ya puedes escribir lo que te haga falta en ese sitio. Ese lápiz es para ti.
JM: Vale.
I: Muy bien, pues te voy a escribir la primera igualdad.

JM: ¿Y aquí tengo que poner si es falso o verdadero?
I: No, sólo me lo tienes que decir ¿vale? tú la piensas, y si te hace escribir algo lo puedes escribir y me lo dices a mí, si crees que es verdadera o es falsa.

9 + 4 – 4 = 9
JM: Es verdadera
I: ¿Cómo lo sabes?
JM: Porque nueve más cuatro son trece, y trece menos cuatro son nueve.
I: Muy bien, es verdad ¿y sabrías decírmelo de otra forma, por que es verdadera? Sin hacer las cuentas
JM: Porque si aquí a éste, umm... pueden ser los mismos, éstos que éstos
I: ¿Cómo? ¿Qué quieres decir?
JM: Que pueden ser, que éstos son los mismos y al ser los mismos es verdadera
I: Porque son estos números los mismos...
JM: Que los otros
I: Los que se repiten. Muy bien, vamos a ver otra.

20 – 12 = 20 – 10 – 2
I: A ver ésta de aquí, a ver si crees que es verdadera o es falsa.
JM: Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes?
JM: Porque aquí puede ser lo mismo, diez más dos que son doce ahí, y veinte, veinte
I: Ah, te das cuenta, claro, de que este doce es lo mismo que este diez y este dos juntos.
JM: Umm (asiente)
I: Muy bien muy bien, así no has tenido que hacer las cuentas. Vamos a ver otra.

11 + 7 = 10 + 8
I: A ver, ésta de aquí, a ver si crees que es verdadera o falsa
JM: Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes?

JM: Porque siete más una son ocho, y diez más ocho son dieciocho, y aquí da dieciocho
I: Ah, muy bien. Tú has sumado este siete más el uno y has visto que eso es dieciocho Muy bien ¿y se te ocurre otra forma de hacerlo?
JM:… No
I: ¿No?
JM: O al revés, serían éstos primeros y éstos segundos
I: Muy bien, se puede empezar por un lado o por el otro, ¿no? Da igual, las dos formas son correctas. Vamos a ver ésta de aquí.

11 – 6 = 10 – 5
I: A ver si crees que es verdadera o falsa
JM: Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes?
JM: Porque diez menos cinco son cinco, y once menos seis son cinco
I: Son cinco, los dos son lo mismo. Muy bien. ¿Se te curre alguna otra forma de saber que es verdadera?
JM: Sí, umm el seis, como seis más seis... seis más cinco son once, pues se puede... no tienes que hacer la cuenta ni nada al decir eso
I: Ah, Vale, muy bien. Vale. Vamos a hacer otra...a ver

19 – 13 = 9 – 3
I: A ver, ésta es ya la última. A ver que te parece, si es verdadera o falsa
JM: Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes?
JM: Porque nueve menos tres son seis, y una menos una son cero, entonces, nueve le quitamos tres y me da seis
I: Ah, muy bien. Esa es una buena forma de hacer las cuentas porque así te quitas primero las decenas y luego haces la otra cuenta. Muy bien ¿se te ocurre alguna otra forma de hacerlo, mirando los números de los dos lados?
JM: Poniéndolo al revés, empezando por los más chicos y terminando por los más grandes
I: Empezando por nueve menos tres ¿no? y luego haciendo diecinueve menos trece. Y alguna otra forma... ¿No se te ocurre?
JM: No
I: Muy bien JM. Muchas gracias.
JM: De nada.

3. EF
11 – 6 = 10 – 5
19 – 13 = 9 – 3
125 – 125 = 14
23 + 0 = 23

I: Hola EF., mira esta hoja es para ti. ¿Vale? Aquí pon tú nombre. Y luego yo te voy a ir escribiendo igualdades, como los otros días hemos hecho en clase y quiero que tú me digas si es verdadera o si es falsa, ¿vale? Si te hace falta escribir algo puedes utilizar el espacio que tienes…

(EF escribe su nombre)

I: Muy bien, vamos a ver. Te voy a poner la primera

11 – 6 = 10 – 5
I: Vamos a ver, ¿ésta crees que es verdadera o falsa?
EF: Verdadera.
I: ¿Cómo lo sabes?
EF: Porque a diez le quitas cinco y a once le quitas seis, aquí le quitas el uno y le pones un cero y a este seis le quitas también un uno, y te sale el mismo número.
I: Muy bien, muy bien. Vamos a ver otra.

19 – 13 = 9 – 3
EF: Diecinueve menos trece...
I: ¿Crees que es verdadera o falsa?
EF: Verdadera.
I: ¿Cómo lo sabes?
EF: Porque a diecinueve le quitas trece ¿no?, te dan seis, y a nueve le quitas tres, son seis.
I: Muy bien, y los dos lados...
EF: Te sale el mismo resultado.
I: Tienen el mismo resultado. Muy bien, Y ¿se te ocurre alguna otra forma de hacerlo que no tengas que hacer las operaciones?
EF: Sí, aquí nueve… menos tres y te sale... poner aquí... poner estos dos números igual aquí.
I: Entonces, tú lo que dices ¿qué es? ¿Cambiar estos números de aquí?
EF: Si quitarle estos unos
I: Esos unos ¿Y sería lo mismo? A ver
EF: Sí, porque tienes los mismos números
I: Ah, muy bien, vale. Entonces, cuando tú tienes aquí nueve menos tres y aquí nueve menos tres
EF: Es igual
I: Es igual porque tienes los mismo números. Vale. Vamos a ver… esta igualdad

125 – 125 = 13
I: A ver, ¿ésta crees que es verdadera o falsa?
EF: Ciento veinticinco igual a trece… Falsa
I: ¿Cómo lo sabes?
EF: Falsa, porque a ciento veinticinco le quitas ciento veinticinco son cero, no trece
I: ¿Cómo sabes que es cero?
EF: Porque aquí son los mismos números y si le quitas los mismos números son cero, aquí no te puede dar trece
I: Muy bien, Muy bien.

23 + 0 = 23
I: A ver, ¿y esa?
EF: Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes?
EF: Porque a veintitrés no le puedes sumar cero, si le quitas ese cero son los mismos números.
I: Muy bien, muy bien. Pues ya está.

4. MR

9 + 4 – 4 = 9
8 + 6 = 4 + 4 + 6
20 – 12 = 20 – 10 – 2
11 + 7 = 10 + 8
11 – 6 = 10 – 5
10 + 7 – 7 = 12

I: Hola MR. Mira esta hoja es para ti. ¿Vale? Entonces, aquí es para que pongas tú nombre.
MR: Vale
I: Muy bien, Yo te voy a ir escribiendo igualdades, como las que hicimos el otro día, y quiero que tú me digas si es verdadera o falsa ¿vale? Entonces te voy a escribir la primera…
MR: Vale
I: Si te hace falta escribir algo, pues puedes usar el espacio que tienes ahí.

9 + 4 – 4 = 9
I: A ver ¿Tú que crees, que ésta es verdadera o falsa?
MR: Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes?
MR: Porque hay cuatro y nueve y aquí es igual que cuatro y nueve, ¡No!, falsa, falsa, porque esto es un igual y esto es un menos
I: A ver, ¿me lo puedes explicar?
MR: Nueve, diez, once, doce, trece, le quitas cuatro…Sí, es verdadera
I: Es verdadera ¿Cómo lo has sabido? ¿Cómo lo has...?
MR: Porque… nueve más cuatro son... *(cuenta)*
I: Tú has contado con los dedos ¿no?
MR: Trece
I: Tú has contado que son trece
MR: Nueve más cuatro son trece, y menos cuatro pues son nueve
I: Claro, pero yo he visto que tú no has hecho la cuenta, le has sumado… a nueve le has sumado cuatro y luego le has quitado los cuatro de golpe.
MR: Sí
I: Entonces te has dado cuenta de que le has quitado lo mismo que le habías sumado
MR: Sí, entonces si le quito el cuatro queda otra vez nueve.
I: Muy bien, muy bien.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver que crees que es ésta ¿verdadera o falsa?
MR: Falsa
I: ¿Cómo lo sabes?
MR: Porque ocho más... más… ocho más... más seis son...catorce
I: Muy bien
MR: Y...catorce... igual a cuatro más cuatro son...ocho, y más seis... son catorce
I: Vale, entonces esto te ha salido catorce ¿no?
MR: Sí
I: ¿Y esto?, también te ha salido catorce
MR: Sí, entonces es verdadera

I: Es verdadera, Muy bien. Muy bien. Porque en los dos resultados te ha salido lo mismo. Vale. Y ¿se te ocurre alguna otra forma, mirándola, de saber que es verdadera,… mirando los números?
MR: Sí, seis más cuatro... seis más cuatro...diez
I: Muy bien
MR: Y cuatro...catorce, y seis más ocho, catorce
I: Entonces otra forma sería empezando la cuenta por este lado, Vale y ¿te ocurre alguna forma de hacerlo sin hacer las operaciones, mirando a los dos lados?
MR: Esto es catorce y estos tres, catorce
I: Vale, muy bien. Vamos a hacer otra. Muy bien.

20 – 12 = 20 – 10 – 2
I: Vamos a ver ésta, a ver si te parece que es verdadera o falsa
MR: Veinte menos doce veinte...no, veinte…veinte menos doce, veinte,...veinte menos doce son...eh…son…
I: Si te hace falta escribirlo, lo puedes escribir. Es más fácil ¿no? para hacer la operación ¿no?
MR: Sí,… menos doce, dos...,no espera, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez, diez. Son…ocho
I: Muy bien
MR: Ocho, me llevo una, dos a dos cero, ocho
I: Muy bien, te sale ocho esa parte de aquí
MR: Ocho, igual a veinte menos diez, veinte menos diez...veinte menos diez...veinte menos diez...cero, uno hasta dos, hasta...uno
I: Muy bien, eso es.
MR: Diez, entonces salen diez,… y menos dos, diez menos dos pues son...ocho
I: Muy bien
MR: Entonces… aquí me han salido...
I: Lo tienes ahí
MR: Ocho, Bien.
I: Verdadera ¿no? Sale en los dos lados igual. Muy bien
MR: Estas tres son verdaderas
I: Sí, por ahora las tres son verdaderas. Y mira a ver ésta, si miramos los números de los dos lados ¿se te ocurre alguna forma de saber que es verdadera?
MR: Al revés
I: Al revés, ¿empezando por aquí, por la izquierda, y luego haciendo la derecha?
MR: Sí.
I: Y si nos fijamos en los números que hay en los dos lados ¿se te ocurre otra manera más de resolverla?
MR: Si veinte y veinte son…es lo mismo, y diez y doce no son lo mismo pero da casi todo, casi…eso da ocho y esto da ocho.
I: Muy bien, muy bien. Esa ha sido más difícil ¿verdad?
MR: Sí.
I: Vamos a hacer otra, que tenga menos números.

11 + 7 = 10 + 8
I: A ver éste si crees que es verdadera o falsa
MR: Once y siete, dieciocho.
I: Muy bien.
MR: Igual a diez... *(Contando en voz baja)* dieciocho. Es igual, es verdadera.

I: Es verdadera también, otra vez. Muy bien, porque los dos lados te han dado dieciocho. Y ¿se te ocurre otra forma de hacerla, mirando la igualdad?
MR: Al revés.
I: Al revés es empezando por la derecha y luego la izquierda ¿no? Muy bien. ¿Y se te ocurre alguna otra forma más mirando los números que hay en los dos lados?
MR: Once y diez y siete y ocho. Que siete y ocho, éste es mayor que éste, es uno mayor que éste y éste es uno menor que éste.
I: Anda, mira entonces puedes saber que los dos lados son iguales ¿no?
MR: Eh
I: Por eso.
MR: Ahora cuatro.
I: Ya llevas cuatro verdaderas. Vamos a hacer la última ¿vale?
MR: ¿Y la otra no?
I: Bueno, sí venga, si quieres hacemos la otra también, si no estas cansada.
MR: No.

11 – 6 = 10 – 5
I: A ver esa igualdad ¿crees que es verdadera o falsa?
MR: Es igual que esto pero… siete
I: Pero ahora está restando ¿no?
MR: Ah, es verdad.
I: Mira, éste restando y éste restando
MR: Once,…..seis, siete, ocho, nueve, diez, once, y doce, seis, seis… y una,…me llevo una, una y una cero, seis
I: ¿Éste te ha salido seis? ¿Y esta parte de aquí qué te sale?
MR: Diez menos cinco, cinco
I: Entonces ésta te ha salido cinco y ésta te ha salido…
MR: Mal
I: Ésta es falsa
MR: Falsa
I: Mira a ver, repasa esa cuenta que no se si te has equivocado.
MR: Seis,… seis, siete, ocho, nueve, diez, once...once...cinco...cinco
I: ¿Cinco?...
MR: Cinco
I: Entonces, te sale en este lado cinco y en ese cinco. ¿Entonces es verdadera otra vez?
MR: Sí
I: Muy bien
MR: Joder
I: Todas verdaderas. Si es que…
MR: Ésta también era verdadera.
I: Y mira a ver ¿se te ocurre alguna otra forma de hacerlo mirando los números?
MR: Al revés. Y que esto es…es uno menos que éste y éste es uno más que éste, uno más que éste y ésta uno más que éste.
I: Ah, ¿Y con eso tú sabes que es verdadera? Porque éste es uno más y esto uno menos.
MR: Sí
I: Ah, vale. Y vamos a hacer ya la última.
MR: Vale

I: Y vamos a ver ya la última
MR: Me ha gustado
I: ¿Te ha gustado?
MR: Sí
I: Me alegro mucho.

10 + 7 – 7 = 12
I: A ver ésta, si crees que es verdadera o falsa
MR: Diez más siete...diez… es falsa
I: Es falsa ¿cómo lo sabes? Muy bien
MR: Porque diez más…más siete son cator… no, son…once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, son diecisiete, menos siete, diez,
I: Muy bien. Entonces tiene…
MR: Entonces es falsa
I: Que ser un diez ¿no?
MR: Ésta también es falsa
I: No era verdadera. Ésta es la única que ha sido falsa. Tú lo que has hecho entonces es sumar diez más siete y te sale diecisiete, y luego le has quitado siete
MR: Sí, y al revés, y al revés se sabe también que es falsa.
I: Muy bien. ¿Y se te ocurre otra forma de explicarme porque esto de aquí da diez?
MR: Porque diez y doce… nooo, no es lo mismo. Y siete menos siete… se quita el siete los dos. Se quitan los sietes.
I: Muy bien, porque se lo estas sumando y se lo estas quitando.
MR: Umm
I: Pues muy bien, pues ya hemos acabado. Muchas gracias

5. NM

9 + 4 – 4 = 9
10 – 7 = 100
8 + 6 = 4 + 4 + 6
125 – 125 = 14
9 – 9 = 3
8 + 0 = 8
11 + 7 = 10 + 8

I: Hola NM., mira esta hoja es para ti. ¿Vale? Entonces aquí tienes que poner tú nombre. Y aquí voy a ir escribiéndote igualdades como hicimos los otros días en la pizarra, para que me digas si son verdaderas o son falsas. ¿Vale? Pon tú nombre y ahora empezamos.

(NM escribe su nombre)

I: Muy bien, te voy a poner la primera.

9 + 4 – 4 = 9
I: A ver esta igualdad, si crees que es verdadera o falsa. Si necesitas escribir algo puedes escribir ahí.
NM: Verdadera

I: Muy bien, ¿Cómo lo sabes?... ¿Cómo lo has sabido? Has hecho las operaciones con los dedos ¿no?
NM: Sí
I: ¿Y que has hecho? Has sumado nueve más cuatro ¿no?
NM: Sí, que me da trece,
I: Muy bien
NM: Y luego le quito cuatro que me da, nueve
I: Muy bien, entonces has visto que estas operaciones de aquí dan nueve, ¿no? que es lo mismo que hay en el otro lado. Muy bien. ¿Y se te ocurre mirándola alguna otra forma de saber que es verdadera?, sin tener que hacer las cuentas
NM: No
I: ¿No? No se te ocurre. Vamos a hacer otra. Lo has hecho muy bien, porque para que sea verdadera, como tú has hecho, tienen que ser los dos resultados, de los dos lados, lo mismo, ¿no?

10 – 7 = 100
I: A ver ésta de aquí, vamos a ver si te parece que es verdadera o falsa
NM: Diez menos siete...Falsa
I: ¿Cómo lo sabes? Muy bien es falsa.
NM: Porque diez menos siete te da...siete..., tres
I: Muy bien, y eso no es cien ¿no? Eso no es lo mismo. Entonces habría que poner aquí un tres ¿no? Muy bien ¿Y sabrías que es falsa sin hacer las operaciones?... Tú a simple vista, si miras esto ¿sabrías que es falsa?
NM: Sí
I: ¿Cómo lo sabrías? ¿Por qué?
NM: Porque si a diez le quitas siete te da… tres, y como no te da cien, la veo que… no es cien.
I: Claro, tú ves que esta cuenta de aquí no es cien,
NM: Sí
I: ¿Y tú que crees? que esto de aquí, sin hacer la cuenta ¿crees que va ser más chico que cien o más grande?
NM: Más chico,
I: ¿Cómo lo sabes?
NM: Porque tres es más chico que cien
I: Porque ya sabes que esto da tres y entonces es más chico que cien. Muy bien. Vamos a hacer otra.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver, ésta, si crees que es verdadera o falsa
NM: Ocho más seis…ocho más seis nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince y dieciséis. Ocho más seis me da dieciséis, y cuatro más cuatro...me da ocho, más seis...me da otro dieciséis
I: Entonces te da los dos lados dieciséis ¿No? ¿Y por eso qué es? ¿Verdadera o falsa?
NM: Son… iguales
I: Son los dos iguales, entonces es verdadera. Muy bien. Eso está bien. ¿Y sabrías, mirando la igualdad, que es verdadera? Sin hacer todas las operaciones.
NM: No
I: Es muy difícil, tienes que hacer las cuentas para verlo ¿no?
NM: Sí

I: Vale, por que ésta tiene más números ¿no? ¿A ti te parece que es más difícil cuando tienes más números que cuando tiene menos? ¿O no?
NM: Cuando tienes más
I: ¿Cuando tiene más es más difícil? Vale ¿Por qué?
NM: Porque no me gusta hacerlo con más
I: Porque tienes que hacer más operaciones, no te gusta hacer más operaciones
NM: Operaciones sí, pero es que con muchos números no
I: Ah, bueno. Prefieres que sea una más cortita ¿no?
NM: Sí

125 – 125 = 14
I: A ver, ésta, si crees que es verdadera o falsa
NM: Ciento veinticinco menos ciento veinticinco... a ciento veinticinco le quito ciento veinticinco…
I: Si te hace falta escribir algo puedes escribirlo... ¿Tú que crees que va a dar esto, ciento veinticinco menos ciento veinticinco?
NM: Ciento veinticinco... *(cuenta en voz baja)…*
I: Ésta es más difícil porque tiene los números más grandes. ¿Es muy difícil? Y si haces la cuenta a parte ¿es más fácil o no?
NM: ¿Qué?
I: ¿Esta cuenta quieres hacerla a parte o no, es demasiado difícil?
NM: A parte
I: Pues hazla a parte si quieres. Tú lo que quieres hacer es restar estos dos ¿verdad? Para eso te he dado el lápiz, por si quieres, puedes hacer las operaciones que te hagan falta
NM: Cinco menos cinco, cero…no me llevo ninguna, dos menos dos cero, y una menos una cero. Falsa.
I: Muy bien, da cero mira. Entonces esto da cero y esto no es igual que catorce. Muy bien, así ha sido mucho más fácil hacer la cuenta que con la cabeza, es que esos son números muy grandes. ¿Y tú sabrías que esto menos esto da cero sin hacer la cuenta?
NM: Sí
I: ¿Por qué?
NM: Por que a dos… a uno es igual, a uno le quitas dos es cero, y a dos le quitas uno da uno, es casi igual
I: ¿Es casi igual? Ah. Vale. Vamos a ver otra…
NM: Me quedan sólo dos
I: Te quedan sólo dos

9 – 9 = 3
I: ¿Ésta cómo crees que es, verdadera o falsa?
NM: Falsa
I: ¿Cómo lo sabes, tan rápido?
NM: Porque a nueve le quitas nueve y te da cero
I: Ah, entonces ya no has tenido que hacer la cuenta. Muy bien. Y ¿cómo sabes que nueve menos nueve es cero?
NM: Porque a nueve le quitas nueve te da… cero *(lo hace con los dedos)*
I: Se te van todos ¿no? Te quitas todos los dedos. Muy bien. Esa ha sido más fácil

8 + 0 = 8
I: Vamos a ver ésta, a ver si te parece que es verdadera o falsa

NM: Ocho más cero...Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes?
NM: Porque ocho más cero te da ocho
I: Muy bien, por eso es verdadera. Muy bien. Y aunque no te queda espacio, te voy a poner una, ¿vale? a ver si crees que es verdadera o falsa.

11 + 7 = 10 + 8
NM: Ésta es más difícil
I: Ésta tiene más números pero es sólo para ver si piensas que es verdadera o falsa
NM: Once más siete, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, diecisiete. Dieciocho te da.
I: Muy bien.
NM: Igual, ahora…Diez más ocho, diecisiete, no, ¿cuánto he dicho?
I: Tú has dicho dieciocho aquí
NM: Dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho. A mi me da veintiocho sumando... diez más...no, ahora me he hecho un lío,
I: Tranquila no pasa nada.
NM: Dieciocho…
I: Tú has hecho once más siete y te ha dado dieciocho
NM: Dieciocho. Ahora más diez, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho,...ahora más ocho, veintiocho, veintinueve, treinta, treinta y uno, treinta y dos, treinta y tres, treinta y cuatro, treinta y cinco y treinta y seis, me da
I: Entonces lo que has hecho es sumar todos los números juntos ¿no? y te da treinta y seis Vale ¿y eso te dice si es verdadera o falsa?
NM: A mi me dice que es falsa
I: ¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?
NM: Porque si once más siete te da dieciocho, no te da diez
I: Ah vale, tú dices que once más siete no da diez de aquí ¿Y este ocho de aquí? ¿Crees que hay que sumárselo al diez? ¿O no hay que sumárselo? ¿No? ¿Qué harías con él? ¿Lo dejarías ahí?
NM: Sí
I: Vale, pues muy bien. Ya hemos acabado muchas gracias. Has trabajado mucho.

6. MP

9 + 4 – 4 = 9
8 + 6 = 4 + 4 + 6
20 – 12 = 20 – 10 – 2
4 + 5 = 300
26 – 8 = 100
11 + 7 = 10 + 8

I: Hola MP. Mira, esta hoja es para ti, ¿vale? Entonces aquí me tienes que poner tú nombre, y aquí te voy a ir poniendo yo igualdades, para que tú las resuelvas. Como ¿te acuerdas lo que hacíamos en la pizarra, que poníamos igualdades y veíamos si eran verdaderas o falsas? Pues eso es lo que vamos a hacer. ¿Vale? Pon tú nombre primero…

I: Vale. Entonces si te hace falta escribir algo, pues tú puedes escribir por aquí para hacer alguna operación.

9 + 4 – 4 = 9
I: A ver si crees que esta igualdad es verdadera o es falsa
MP: Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes? Muy bien
MP: Porque nueve y cuatro son trece, y cuatro menos cuatro...pues…
I: ¿Tú cómo lo has sabido que es verdadera?
MP: Porque le he sumado nueve y cuatro, y he sabido que son trece…
I: Muy bien
MP: Y he sumado nueve más cuatro, y me da trece
I: Tú has sumado este nueve ¿no? con este cuatro y sabes que esto de aquí da trece, y luego ¿Que has hecho con este cuatro de aquí?
MP: Sumarlo con…con este nueve
I: Ah, lo has sumado con el otro lado y te da trece también por eso sabes que son iguales ¿habría otra forma de saber que es verdadera? ¿Otra forma de hacerlo? Porque hay muchas
MP: Sí
I: ¿Cómo?
MP: Pues al revés
I: ¿Cómo sería al revés?
MP: A nueve le sumas cuatro y a cuatro le sumas nueve
I: Muy bien, esa es otra forma de hacerlo. Es verdad. Muy bien. Y mirando, aquí, este lado de aquí mirándolo, si te fijas nueve más cuatro menos cuatro. ¿Tú sabes cuánto da este lado de aquí, esas operaciones, sin hacerlas? Así mirándolo ¿cuánto crees que va a dar?
MP: Eh…nueve
I: Muy bien, da nueve ¿que has hecho? ¿Has sumado…?
MP: Que he sumado nueve más cuatro y le he quitado cuatro.
I: Muy bien, y te ha salido nueve, Y esas cuentas que has hecho ¿las has pensado en la cabeza?
MP: Sí
I: Muy bien.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver, esta otra igualdad, a ver si crees que es verdadera o es falsa
MP: Falsa
I: ¿Por que crees que es falsa?
MP: Porque a ocho le quitas seis y te da…a ocho le sumas seis y te da… catorce y cuatro más cuatro son ocho, y… más seis… catorce.
I: Muy bien, entonces has visto que esta parte de aquí, te da catorce, y ésta también, por eso es verdadera ¿No? Sería verdadera. Tú me has dicho que sería falsa pero… ¿que sería, verdadera o falsa? Si esto te da catorce y esto te da catorce
MP: Verdadera
I: Muy bien, has hecho las cuentas y te has dado cuenta de que los dos son iguales. ¿Y mirando los dos lados, se te ocurre otra forma de ver que es verdadera?
MP: Ocho sumo cuatro y me da…
I: ¿A este ocho le sumas este cuatro?
MP: No, los dos cuatros

I: Ah, sumas estos dos cuatros de aquí
MP: Ocho y ocho… dieciséis, y ahora, sumas los dos seis…
I: Ah, tú estas sumando este…cuatro más cuatro son ocho y se lo has sumado al otro ocho, y este seis lo has sumado con el otro seis,
MP: Doce
I: vale. Pues, muy bien. Vamos a hacer otra, ¿vale?

20 – 12 = 20 – 10 – 2
I: A ver si ésta te parece que es verdadera, o es falsa… Has hecho la resta ¿no? Has escrito veinte menos doce… ¿y te sale doce?
MP: Doce y veinte menos diez y dos…me dan dos y una, doce. Y es verdadera
I: Muy bien, has hecho las operaciones de las dos partes y has visto que te dan el mismo resultado ¿no? y mirándolo aquí ¿tú sabrías que es verdadera, sin hacer las operaciones? Mirando los números que hay
MP: Sí, a doce le quitas dos y te da…diez, y a veinte y a veinte le quitas veinte, cero, y el diez se queda….
I: Se queda….mira, aquí tenemos veinte ¿no? y aquí tenemos otro veinte, y este doce. Y aquí tenemos diez y dos.
MP: Resto doce… menos diez y dos, me da…cero
I: Muy bien. Entonces tú has visto que a doce, si le quitas diez y le quitas dos te da cero
MP: Y a veinte… le quitas veinte, también da cero
I: Claro ¿y sabes por qué es eso? Porque como este número y este número son iguales si a uno le quitas el otro…
MP: Pues entonces da cero
I: Y este número de aquí si le quitas diez y le quitas dos te da también cero, que es lo que has visto tú ahí.
MP: Sí
I: Muy bien. Vamos a hacer otra igualdad.

26 – 8 = 100
I: A ver si tú crees que es verdadera o falsa…
(MP calcula mediante el algoritmo de la resta)
I: A ver, vamos a repasar la cuenta…le has quitado… de ocho a seis… te llevas una ¿no? y dos menos una,… Muy bien. Ahora está bien, ¿vale? ahora te sale veintiséis menos ocho, te sale dieciocho. Entonces esto de aquí te sale dieciocho.
MP: O sea es mentira
I: Muy bien, es falsa. Muy bien
MP: Es falsa.
I: Porque no da cien ¿verdad? Muy bien, muy bien. ¿Y sabrías que esto va a ser mentira sin hacer las operaciones? Si tú lo miras ¿tú creerías que va a ser mentira o necesitas hacer las cuentas para saberlo?
MP: …Cuentas
I: Las cuentas ¿no?
MP: Sin cuentas
I: Ah ¿Sin cuentas sabrías hacerlo? ¿Por que?
MP: Porque a veintiséis le quitas ocho y te dan dieciocho, y a ocho le quitas veintiséis y te dan dieciocho.
I: Ah, bueno. Mira y te voy a poner otra a ver que te parece.

4 + 5 = 300
I: ¿Esa que crees que es, verdadera o falsa?
MP: Nueve. Es falsa
I: Muy bien, es falsa
MP: Porque me da nueve y no trescientos.
I: No trescientos. ¿Y tú que piensas? sin hacer las cuentas ¿qué crees que este número va a ser más grande que trescientos o más chico?
MP: Más chico
I: Muy bien ¿Cómo los sabes?
MP: Porque trescientos es más alto que… del ocho, si fuera ochocientos si
I: Ah, pero así este número no puede ser. Vamos a hacer ya la última y ya te puedes ir. ¿Te gustan estos ejercicios? ¿O no?
MP: Más o menos
I: Hay algunas más fáciles y otros más difíciles ¿verdad?

11 + 7 = 10 + 8
I: A ver éste, ¿que te parece? ¿Que es verdadero o falso?
MP: Once más siete me dan dieciocho
I: Muy bien
MP: Dieciocho, y diez más ocho…me dan dieciocho, verdadera
I: Muy bien, muy bien, porque los dos lados te han dado el mismo resultado ¿y mirándola se te ocurre otra forma de saber que es verdadera?
MP: Sí,…bueno no
I: ¿No? Ésta es que tiene muchos números ¿no? Bueno, pues ya hemos acabado. Pues ya está. Muchas gracias.

7. BR

7 + 5 = 5 + 7
9 + 4 – 4 = 9
10 – 7 = 100
4 + 6 = 300
8 + 6 = 4 + 4 + 6
9 – 9 = 3
8 + 0 = 8
5 + 5 = 5 + 5

I: Hola. Mira, esta hoja es para ti ¿vale? Entonces aquí pones tú nombre y yo te voy a ir escribiendo igualdades, como las que hicimos el otro día en la pizarra ¿te acuerdas? Que hemos hecho estos días y tú me tienes que decir si es verdadera o es falsa. Si necesitas hacer algunas cuentas, este lápiz es para ti, y puedes hacer cuentas aquí, en el espacio que tienes. ¿Vale? Pon tú nombre y ahora empezamos.

(BR escribe su nombre)

I: Muy bien. A ver.

7 + 5 = 5 + 7
I: A ver, ésta ¿qué crees? ¿Qué es verdadera o falsa?
BR: Falsa
I: ¿Falsa? ¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?

BR: Porque siete más cinco son doce, y cinco y siete son…son diecinueve
I: ¿Son diecinueve, te sale? A ver ¿cómo lo has hecho? con los dedos ¿no? Has hecho cinco…Hazlo delante mía, para que vea como lo haces
BR: Siete más cinco, ocho, nueve, diez, once, doce.
I: Esto te sale doce, muy bien y este lado de aquí ¿cómo lo haces?
BR: Cinco más siete, doce, trece…
I: No, es cinco más siete ¿no? ¿Ésta es la cuenta que estas haciendo ahora? ¿O no?
BR: Cinco más siete… diez
I: ¿Diez crees que es? ¿Cómo lo has hecho?
BR: Porque cinco y siete son diez
I: ¿Lo has hecho en la cabeza, pensándolo? Vamos a hacerlo ahora con los dedos. ¿Vale? Si tenemos cinco y le sumamos siete. Entonces sería seis, siete, ocho, nueve, diez, once, y doce. Entonces, a mi me sale que da doce. Hazlo tú con los dedos a ver cuanto te sale.
BR: Cinco y siete, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once y doce.
I: Te sale doce ¿no? Vale. Es que si usamos los dedos no nos equivocamos. Entonces vemos esto de aquí te ha salido doce y esto de aquí también te ha salido doce antes, y ¿Entonces que crees? ¿Qué es verdadera o falsa?
BR: Verdadera,
I: Verdadera. Muy bien. Porque los dos lados son lo mismo. Vale. Y si la miras, sin hacer las cuentas, ¿tú sabrías que es verdadera?
BR: No
I: No, ¿no? Hace falta hacer las cuentas ¿no? Muy bien, vale. Vamos a hacer otra.

$9 + 4 – 4 = 9$
I: Vamos a ver ésta de aquí ¿crees que es verdadera o que es falsa?
BR: Falsa
I: Falsa ¿Por qué?
BR: Porque nueve y… más cuatro son….
I: ¿Cuánto te sale, nueve y cuatro?
BR: Ocho
I: ¿Ocho te sale? A ver, cuéntalo. Nueve,…
BR: Nueve más cuatro, nueve, diez, once, doce, y trece. Trece.
I: Ah, trece, muy bien, esto te sale trece. Muy bien. ¿Y ahora que cuenta has hecho?
BR: Ahora he hecho cuatro menos cuatro
I: ¿Y qué te sale?
BR: Cero
I: Y entonces esto, cuatro menos cuatro te sale cero, vale. Entonces ¿qué sabes? ¿Qué es verdadera o falsa?
BR: Falsa
I: ¿Por qué?... ¿Es muy difícil de explicar? A ver, explicarme tú que cuentas has hecho para saber que es falsa.
BR: He hecho nueve más cuatro son… *(cuenta en voz baja)*…trece y después he hecho cuatro menos cuatro son cero
I: Vale, Y entonces ¿por qué sabes que es falsa? *(No hay respuesta)* Es muy difícil ¿no? de explicar. Mira, esta igualdad, lo que estamos haciendo, es, tenemos un nueve, ¿no? le sumamos cuatro y luego le restamos cuatro. Entonces lo que tenemos que hacer es primero, a nueve le sumas cuatro, y luego le quitas cuatro… Entonces esta parte de aquí ¿cuánto da?...Entonces nueve más cuatro te sale…
BR: Trece

I: Y ahora a trece, si le quitamos cuatro, ¿qué nos sale?
BR: Trece…nueve.
I: Nueve, muy bien. Entonces esta parte de aquí nos ha salido nueve, ¿no? y aquí tenemos un nueve también…
BR: Verdadera
I: Entonces es verdadera, sí. Es que nos estábamos liando un poquillo. Pero si hacemos estas cuentas de aquí nos sale un nueve, y entonces como eso es lo que pone ahí, está bien, es correcta, es verdadera. ¿Y mira, mirando esto de aquí, tú sabrías que da nueve, sin hacer las cuentas o hace falta hacer las cuentas?
BR: Hace falta hacer las cuentas
I: Hace falta hacer las cuentas ¿no? Hace falta primero sumar el cuatro y luego restarlo ¿no? No se sabe lo que va a dar. Y mira, tú me has dicho antes que esto de aquí, cuatro menos cuatro da cero. ¿No? Entonces si esto da cero y tienes nueve más esto ¿sabes que va a dar nueve? ¿O no?
BR: No
I: Bueno, vale. Vamos a hacer otra igualdad a ver que te parece.

10 – 7 = 100
I: A ver, ¿ésta qué crees que es, verdadera o falsa?
BR: Falsa
I: Muy bien, ¿Cómo lo sabes?
BR: Porque siete menos sei……diez menos siete son….porque diez menos siete son seis
I: Y no son cien, ¿no? eso está mal. Muy bien. ¿Y tú sabrías mirando esto que va a ser falsa, o hace falta hacer las cuentas?
BR: Hace falta hacer las cuentas
I: Hace falta hacer las cuentas. Si tú miras diez menos siete… ¿qué crees que debería estar en este lado? ¿Un número chico o grande?
BR: Chico
I: ¿Chico? Y entonces este número ¿Cómo crees que es? ¿Grande o chico?
BR: Grande
I: Grande. Entonces por eso podrías saber que es falsa ¿no? porque si esto va a ser un número chico y esto es grande, no puede ser. Muy bien, vamos a ver esta igualdad.

4 + 6 = 300
I: A ver ¿Ésta que crees que es verdadera o falsa? Esa de ahí. Mírala y dime a ver lo que piensas.
BR: Falsa
I: ¿Por qué? Muy bien. Es falsa.
BR: Porque cuatro más seis son diez
I: Y no son trescientos. ¿No?
BR: No
I: Muy bien. Y tú mirando esto ¿sabrías decirme que es falsa, sin hacer la operación?
BR: Sí
I: ¿Por qué? Muy bien.
BR: Porque de sumar sé más…menos
I: ¿Por qué? ¿Por qué? No te he oído.
BR: Porque de sumar sé más de que menos.
I: ¿Qué? Es que no te he oído porque está hablando tú profe. ¿Qué es lo que has dicho?

BR: Que yo se más sumar que de restar, por eso se.
I: Ah, tú sabes mejor sumar que restar, por eso, ah mira que bien. ¿Y tú sabes, esto de aquí, si puede ser igual a trescientos sin hacer la suma? Podrías saber… pues va a ser un número muy diferente, va a ser más chico, va a ser más grande. ¿Cómo crees que va a ser esto?
BR: Chico
I: ¿Cómo los sabes? Muy bien, es verdad esto va a ser chico… Y éste de aquí ¿cómo es? ¿Chico o grande?
BR: Grande
I: Entonces por eso podrías saber que no es verdad. No, porque éste es chico y esto es grande. Muy bien. Vamos a hacer otra que hay aquí preparada.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver ésta de aquí, ¿cómo crees que es, verdadera o falsa?... Has hecho esta operación ¿no? Ocho más seis ¿y qué te ha salido?
BR: Catorce
I: Muy bien
BR: Y aquí me da ocho….y aquí me da catorce y aquí también
I: Muy bien ¿entonces que sabemos? ¿Qué es verdadera o qué es falsa?
BR: Verdadera
I: Verdadera. Muy bien ¿Por qué? porque este lado da catorce y aquel también ¿no? Muy bien. Y si miramos la igualdad ¿tú sabrías que es verdadera?
BR: No
I: No ¿por qué no? Te hace falta hacer las cuentas para saber cuanto da cada uno ¿no? Y esto de aquí ¿Cuánto sería? Cuatro más cuatro ¿Eso tú sabes cuánto da?
BR: Ocho
I: Ocho, muy bien. Entonces lo que tienes aquí es que esto da ocho. Tienes ocho más seis y aquí también tienes ocho más seis ¿Entonces qué es lo que pasa? ¿Que tenemos en los dos lados?
BR: Ocho más seis
I: En los dos lados tenemos ocho más seis. ¿No? Entonces… ¿sabrías que es verdadera?
BR: No
I: ¿No? Bueno, vamos a ver…una igualdad.

9 – 9 = 3
I: A ver esta igualdad ¿qué crees que es verdadera o falsa?
BR: …Cero, falsa
I: Falsa. Muy bien ¿Cómo lo sabes?
BR: Porque nueve menos nueve son cero.
I: Has hecho la cuenta ¿no? y te ha salido cero. Muy bien.
BR: No, es que esa me la se de memoria.
I: ¿Te la sabes de memoria? ¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?
BR: Porque… mi madre me ha enseñado
I: Ah, te ha enseñado que nueve menos nueve da cero. Y cinco menos cinco, por ejemplo, ¿también te lo sabes de memoria? ¿Cuánto da?
BR: Cero
I: Ah, muy bien. Entonces ¿Cuales son los que te sabes de memoria? ¿Los que son así…?
BR: Así y así

I: Así ¿los que son dos números nada más? ¿O cómo?
BR: Así y así
I: Ah, los de cuatro más seis y los de nueve menos nueve. Los que son así parecidos. Vale. Y entonces tú sabes que nueve menos nueve da cero y no es tres. Muy bien. Vamos a hacer otra.

8 + 0 = 8
I: Éste de aquí ¿qué crees que es? ¿Verdadero o falso?
BR: Verdadera
I: Muy bien, ¿cómo lo sabes?
BR: Porque ocho menos cero son ocho
I: Bueno, esto es un más, no se si se ve bien ¿ocho más cero?
BR: Ocho
I: ¿Cómo lo sabes, eso? ¿Esa la has hecho o te la sabes también de memoria?
BR: Me la sé de memoria
I: ¿Por qué?
BR: Porque eso me ha enseñado mi padre que ocho menos cero es cero,..., ocho
I: Ocho, vale, muy bien. Te voy a poner uno…a ver.

5 + 5 = 5 + 5
I: Éste ya es el último y ya te puedes ir ¿vale? ¿Éste que crees que es, verdadero o falso?
BR: Verdadera
I: Muy bien ¿Cómo lo sabes?
BR: Porque cinco más cinco son diez y cinco más cinco son diez
I: Muy bien, y te da los dos el mismo resultado ¿no? ¿Y sabrías hacerlo sin hacer las operaciones? ¿Sabrías que es verdadera?
BR: Sí
I: ¿Sí? ¿Por qué?... ¿No sabes decírmelo? ¿Cómo sabes que es verdadera, sin tener que sumar?
BR: Porque cinco más cinco son diez
I: Porque cinco más cinco son diez y aquí también son diez ¿No? vale. ¿Y has visto que en los dos lados hay los mismos números? Entonces ¿hace falta hacer la cuenta para saber que es verdadera?
BR: *(negación)*
I: No ¿no? Porque hay los mismos números. Vale, pues muchas gracias.

8. RB

13 + 5 = 5 + 13
9 + 4 – 4 = 9
26 – 8 = 100
8 + 6 = 4 + 4 + 6
125 – 125 = 14
35 – 35 = 14
23 + 0 = 23
11 + 7 = 10 + 8

I: Hola RB. Mira, esta hoja es para ti, para que escribas. ¿Vale?
RB: Sí

I: Entonces aquí tienes que poner tú nombre. Y aquí yo te voy a ir escribiendo igualdades para que tú me digas si son verdaderas o son falsas ¿vale?

(RB escribe su nombre)

I: Muy bien, si te hace falta escribir algo puedes escribir en los lados. ¿Vale? Te voy a escribir la primera.

13 + 5 = 5 + 13
I: A ver ¿ésta que te parece, que es verdadera o falsa?
RB: Verdadera
I: Muy bien ¿Cómo lo sabes?
RB: Porque es lo mismo, sólo que del revés
I: Ah, le han dado la vuelta a los números y ya está.
RB: Sí
I: ¿Entonces no te ha hecho falta hacer las operaciones?
RB: No
I: Muy bien, vamos a hacer otra.

9 + 4 – 4 = 9
I: A ver ésta de aquí, ¿qué crees que es, verdadera o falsa?
RB: Falsa,
I: ¿Por qué?
RB: A no, no, no a ver,… porque se pasa de número
I: ¿Cómo que se pasa de número? Explícame eso que no…
RB: Porque cuatro más… nueve más cuatro son… trece, más otros cuatro, menos cuatro…es verdadera.
I: Ah, es verdadera, ah. Al principio tú creías que esto te salía más grande ¿no? pero te has dado cuenta de que es verdadera ¿Qué es lo que has hecho? ¿Has sumado nueve más cuatro y luego le has quitado cuatro?
RB: Sí
I: Muy bien. Y ¿sabrías que es verdadera sin hacer las cuentas, mirándola? ¿Habría otra forma de saber que es verdadera?
RB: Del revés
I: ¿Cómo? ¿Del revés cómo sería?
RB: Pues cuatro más cuatro…och…, cuatro más cuatro, ocho, y le resto nueve.
I: Ah, sería empezando por otra parte, ¿no? en lugar de empezar por el principio, empezando por aquí. Vale. Y si te fijas aquí, tienes nueve, luego le sumas cuatro y luego le restas cuatro. ¿Tú mirando esto de aquí sabrías cuanto te va a dar, sin hacer las operaciones?
RB: Umm
I: Nueve más cuatro menos cuatro
RB: Nueve
I: ¿Cómo lo sabes?
RB: Mirándolo aquí
I: ¿Por qué?
RB: Porque me salen doce y le quito cuatro.
I: Ah, vale. Entonces tú has hecho primero la suma y luego la resta ¿no? Vale

26 – 8 = 100
I: A ver ésta de aquí ¿si crees que es verdadera o falsa?
RB: Falsa
I: Muy bien ¿Por qué? ¿Cómo sabes que es falsa?
RB: Porque si fuese… es veintiséis menos ocho y es igual a cien y entonces como es menos, es quitar, y tiene que ser hasta cien.
I: …Entonces, tú sabes que esto, al quitarle ocho no sale cien… ¿no?
RB: No
I: Muy bien. ¿Y cómo sabes que esto no sale cien?
RB: Porque el cien es mayor que…que ese.
I: Que esto de aquí.
RB: Sí, que la resta esa
I: Ah, muy bien, muy bien.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver esta igualdad, si crees que es verdadera o es falsa
RB: Verdadera
I: Muy bien, ¿cómo lo sabes?
RB: Porque ocho más seis son…ocho, nueve, diez, once, doce, trece,…son catorce.
I: Muy bien.
RB: Y cuatro más cuatro son ocho, más seis son catorce también.
I: Muy bien, entonces los dos lados te dan catorce ¿No? ¿Y… sabrías que es verdadera sin hacer todas todas las operaciones? Fijándote en los números.
RB: Sí
I: ¿Por qué?
RB: Porque sumaría cuatro más cuatro que son ocho, y luego más seis, catorce.
I: Muy bien, entonces harías esta cuenta de aquí y te daría catorce. ¿No?
RB: Sí
I: Vale. Y tú has visto, el seis y el seis está en las dos partes. Y sabiendo que el seis está en las dos partes ¿sabrías que es verdad?
RB: Sí
I: ¿Por qué?
RB: Porque dan lo mismo.
I: Dan lo mismo en los dos lados ¿no? Te ha dado catorce en los dos lados. Muy bien... vamos a ver ésta de aquí

125 – 125 = 14
I: Ésta ¿qué crees que es? ¿Verdadera o falsa?
RB: Falsa.
I: Muy bien. ¿Cómo sabes que es falsa?
RB: Porque le… le resto esto y esto, esto ¿no? Pues me dan… en total me dan cero
I: Muy bien, esto da cero y no sale catorce ¿no?
RB: No.
I: Muy bien. Y ¿cómo has hecho esta cuenta?
RB: Restando.
I: En la cabeza, ¿la has pensado?
RB: Sí.
I: ¿Y has sabido que te da cero?
RB: Sí.
I: Y ¿cómo lo has pensado?

RB: Restándolo y me da cero
I: Vale.

35 – 35 = 14
I: Y si yo te pongo… por ejemplo… ésta, ¿sabrías si es verdadera o falsa?
RB: Falsa
I: Muy bien, ¿Por qué?
RB: Restando cinco y cinco, son cero, y tres y tres son cero.
I: Entonces esto de aquí da cero, y esto…y no es catorce ¿no?
RB: Sí.
I: Mira, y si te fijas, en las dos ha pasado lo mismo, este lado de aquí da cero y en el otro… era catorce, y son falsas. Entonces tú para saber que esto es cero, lo que has hecho es quitar cinco menos cinco y tres menos tres. Y mirándolo de golpe ¿tú sabrías que es cero?
RB: Sí
I: ¿Por qué?
RB: Porque cinco y cinco son cero y tres y tres son cero.
I: Muy bien. Porque has visto que le quitas primero las unidades y luego las decenas. ¿No? Muy bien, muy bien… Vamos a hacer otra.

23 + 0 = 23
I: Vamos a hacer otra. A ver que te parece, si es verdadera o falsa, ésta de aquí.
RB: Verdadera
I: Muy bien ¿Cómo lo sabes?
RB: Porque veintitrés más cero…Como el cero no es nada y veintitrés es veintitrés, igual a veintitrés.
I: Claro, como el cero no es nada, pues se queda igual ¿no?
RB: Sí
I: Muy bien, muy bien. Ahora te voy a poner una, y es ya la última. A ver si piensas que es verdadera o es falsa.

11 + 7 = 10 + 8
I: A ver esa de ahí, ¿crees que es verdadera o es falsa?
RB: Verdadera.
I: Muy bien, ¿Cómo lo sabes?
RB: Porque diez más och…diez más ocho son dieciocho y once más siete son dieciocho.
I: Muy bien, has visto que los dos… el lado derecho y el lado izquierdo te dan dieciocho. ¿No?
RB: Sí
I: Muy bien. Y si lo miras ¿tú sabrías que es verdadera, sin hacer las operaciones?
RB: Sí.
I: ¿Por qué?
RB: Porque... si fuese diez pues…si fuese diez más siete fuesen diecisiete y como son once más siete son dieciocho.
I: Ah, porque tiene uno más, y entonces son dieciocho. ¿No? Vale, muy bien. Pues entonces ya está, ya hemos acabado, lo has hecho muy bien.

9. DL

13 + 5 = 5 + 13
26 – 8= 100
8 + 6 = 4 + 4 + 6
11 + 7 = 10 + 8
11 – 6 = 10 – 5
19 – 13 = 9 – 3

I: Hola DL.
DL: Hola.
I: Mira esta hoja es para ti, ¿vale? aquí tienes que poner tú nombre. Y aquí te voy a ir escribiendo yo igualdades y tú me tienes que decir si es verdadera o es falsa. Aquí puedes escribir si te hace falta, algunas operaciones o lo que tú quieras.

(DL escribe su nombre)

I: Muy bien, te voy a escribir la primera igualdad.

13 + 5 = 5 + 13
I: A ver ¿Ésta cómo que crees que es, verdadera o falsa?
DL: Verdadera.
I: ¿Cómo lo sabes?
DL: Porque es lo mismo, sólo que cambiado.
I: Ah, entonces no has tenido que hacer las operaciones. Muy bien, has sido muy rápido. Vamos a ver otra.

26 – 8 = 100
I: A ver, ésta de aquí, ¿crees que es verdadera o falsa?
DL: Falsa.
I: Muy bien ¿Cómo lo sabes?
DL: Porque…esto… porque veintiséis menos ocho no te da cien.
I: ¿Cómo lo sabes?... Eso es verdad, muy bien.
DL: Porque sino tendría que ser pues…sumando.
I: Ah, porque restando te va a salir… te va a salir otra cosa ¿Que te va a salir más chico que cien o más grande?
DL: Más chico.
I: Entonces sabes que no va a ser cien. Muy bien,… muy bien. Vamos a ver otra.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver ésta de aquí, si crees que es verdadera o falsa.
DL: Verdadera.
I: Muy bien ¿Cómo lo sabes?
DL: Porque cuatro más cuatro son ocho, y es lo mismo que ocho más seis y que cuatro, que ocho más seis.
I: Claro te has dado cuenta, que aquí te sale ocho y ya tienes lo mismo que en el otro lado. Muy bien, muy bien, que rápido eres.
11 + 7 = 10 + 8
I: Vamos a ver ésta. A ver ésta de aquí, si te parece que es verdadera o falsa.

DL: Verdadera
I: Muy bien, ¿Cómo lo sabes?
DL: Porque una más siete son ocho, es lo mismo que diez más ocho.
I: Ah, mira te has dado cuenta, si le sumas el uno al siete, tienes ocho, y tienes lo mismo que en el otro lado. Muy bien, vamos a ver otra.

11 – 6 = 10 – 5
I: A ver, ¿esa crees que es verdadera o falsa?
DL: Verdadera
I: ¿Cómo lo sabes? …Muy bien, es verdad, es verdadera.
DL: Porque uno menos seis son cinco, no,…
I: Vete para allá que lo estás poniendo nervioso. Ah ver, once menos seis igual a diez menos cinco. Tú no le hagas caso que… el que tienes que contestar eres tú. Es verdadera me has dicho, ¿no? Es verdad, es verdadera ¿cómo lo has sabido?
DL: Porque es lo mismo, sólo que aquí añadiéndole uno y aquí es lo mismo, y uno más.
I: Ah Entonces le han puesto a éste uno más y a éste uno más, ¿no?
DL: Sino, si aquí pusiera cinco, pues era falsa.
I: Muy bien, muy bien. Vamos a ver otra.

19 – 13 = 9 – 3
I: A ver ésta ¿qué es? ¿Verdadera o falsa?
DL: Falsa
I: ¿Falsa? A ver vamos a repasar esta cuenta. Lo que has hecho es quitarle, al nueve le has quitado tres y te sale seis, eso está bien, pero luego si a uno le quitas uno…No pasa nada…
DL: Seis
I: Entonces te sale seis esa operación.
DL: Entonces es verdadera.
I: Muy bien, es verdadera. ¿Ésta la has hecho en la cabeza? Nueve menos tres sabes que es seis. Y ¿se te ocurre otra forma de saber que es verdadera mirando los números? Sin hacer las cuentas ¿Crees que se podría saber que es verdadera?... ¿No? En ésta hay que hacer las operaciones ¿no? para saberlo. Pues muy bien DL, ya hemos acabado.

10. FM

11 + 24 = 10 + 25
11 – 6 = 10 – 5
19 – 13 = 9 – 3
125 – 125 = 14
23 + 0 = 23
8 + 4 = 9 + 5
7 + 5 = 10 + 6

I: Hola FM. Mira, esta hoja es para ti. ¿Vale? Aquí tienes que poner tú nombre, y aquí te voy a ir escribiendo igualdades y tú me tienes que decir si son verdaderas o son falsas. ¿Vale? Si te hace falta escribir algo puedes escribir alrededor, en el espacio.

(FM escribe su nombre)
I: Vamos a empezar.

11 + 24 = 10 + 25
I: A ver ésta de aquí, si crees que es verdadera o falsa.
FM: Verdadera.
I: ¿Por qué es verdadera?
FM: Porque once si le quitas uno le quedan diez y veinticuatro si le pones una es veinticinco.
I: Muy bien. Vamos a ver ésta de aquí.

11 – 6 = 10 – 5
I: A ver ésta, si crees que es verdadera o falsa
FM: Verdadera.
I: ¿Cómo los sabes?
FM: Igual que la otra.
I: ¿Por qué?
FM: Porque once menos seis, es igual a diez menos cinco, porque si le quitas… una… once si le quitas una quedan diez, y seis si le quitas una quedan cinco.
I: Muy bien. Eso está bien, vamos a ver ésta de aquí.

19 – 13 = 9 – 3
I: A ver esa ¿crees que es verdadera o falsa?
FM: Verdadera.
I: ¿Cómo lo sabes?
FM: Porque si tú le pones aquí un uno y aquí otro uno, da lo mismo que aquí.
I: Sale lo mismo. Entonces lo que hemos hecho es quitarle los unos esos que tú dices y ¿sabes que va a salir el mismo resultado al quitarle los unos?
FM: Sí.
I: Muy bien. Vamos a ver ésta de aquí.

125 – 125 = 14
I: A ver, ¿Ésta crees que va a ser verdadera o falsa?
FM: Falsa.
I: ¿Cómo lo sabes, tan rápido?
FM: Porque ciento veinticinco menos ciento veinticinco da cero.
I: ¿Cómo sabes que da cero?
FM: Porque si le restas lo mismo no da catorce, da cero
I: Da cero. Muy bien. No te ha hecho falta hacer la operación, esa te la sabes, muy bien.

23 + 0 = 23
I: Y ésta de aquí ¿crees que es verdadera o falsa?
FM: Verdadera (entre risas)
I: Te hace gracia ¿por que?
FM: Porque veintitrés más cero da veintitrés.
I: Esto lo sabes… es muy fácil ¿no? ¿Por que? ¿Cómo lo sabes?
FM: Porque no le sumas a veintitrés nada.
I: No le has sumado nada, entonces te sale lo mismo ¿no? Muy bien.

FM: ¿Eso para que es?
I: A ver…Eso es para grabar lo que estas diciendo, así no tengo que estar copiando yo todo lo que dices, y luego lo puedo oír y acordarme de cómo lo has explicado.

8 + 4 = 9 + 5
I: Ésta ¿crees que es verdadera o es falsa?
FM: Verdadera
I: ¿Por que crees que es verdadera?
FM: Porque ocho menos cuatro son cuatro y nueve menos cinco son ci…
I: No, pero están sumando, no están restando.
FM: Ah, vale.
I: Ten cuidado… Eso es verdad si estuvieran restando es verdadera. Sumando ¿Es verdadera o falsa?
FM: …Falsa
I: Falsa, muy bien ¿Cómo lo sabes?
FM: Porque ocho menos cuatro…
I: Que operaciones… has hecho alguna operación ¿verdad? para saber que es falsa. Muy bien ¿Qué operación has hecho? ¿Has sumado estos dos?
FM: Sí, y después esos dos.
I: ¿Y que te ha salido esta suma de aquí?
FM: Trece.
I: ¿Trece? ¿Y ésta de aquí?
FM: Catorce.
I: Y no te daba lo mismo ¿no? Muy bien. Y si miras las dos igualdades ¿sabrías que es falsa?…si miras los dos números No ¿no? ¿Hace falta hacer las operaciones para saberlo? Mira si te fijas éste es uno más chico que éste, y éste es uno más chico que éste, entonces estos dos números son más chicos que estos dos de aquí. Entonces esta suma que va a ser ¿más chica que ésta o más grande?
FM: Más chica
I: Más chica ¿no? Porque los dos números son más chicos. Entonces así podrías saber que es falsa ¿no? A ver, Te voy a poner una a ver si sabes decirme si es falsa o es verdadera.

7 + 5 = 10 + 6
I: A ver ¿ésta crees que es verdadera o falsa?
FM: Falsa
I: Muy bien ¿Cómo lo sabes?
FM: Porque siete menos cinco es menos… es mucho menos que diez más seis
I: Siete más cinco sabes que va a ser más chico que diez más seis ¿no? ¿Cómo lo sabes? Eso es verdad.
FM: Por que siete más cinco va a dar menos que diez más seis.
I: Lo sabes mirando los números, lo sabes ya que va a ser más chico. Vale, pues ya está. Muy bien.

11. FB

9 + 4 – 4 = 9
10 – 7 = 100
8 + 6 = 4 + 4 + 6
9 – 9 = 3
8 + 0 = 8
11 + 7 = 10 + 8
20 – 12 = 20 – 10 – 2

I: Hola FB. Mira esta hoja, es para que tú hagas los ejercicios que yo te voy a ir escribiendo. ¿Vale? Yo te voy a ir poniendo unas igualdades y yo quiero que tú me digas si es verdadera o es falsa. Y aquí puedes poner tú nombre, y luego si te hace falta escribir algo, pues lo puedes escribirlo por aquí.
FB: ¿También pongo los apellidos?
I: No, no hace falta. Sólo con tú nombre...Muy bien, vamos a empezar. Te voy a poner…

9 + 4 – 4 = 9
I: A ver, ¿ésta crees que es verdadera o falsa?...Esto es un más y eso es un menos.
FB: Verdadera.
I: Muy bien, ¿cómo lo sabes?
FB: Porque… nueve más cuatro son trece, y si le quito cuatro son nueve.
I: Muy bien, ¿Y cómo sabes que trece menos cuatro son nueve otra vez?
FB: Porque como hay cuatro y cuatro lo podemos quitar.
I: Ah, muy bien si lo has sumado y luego se lo has quitado, se lo puedes quitar. Muy bien, muy bien. Vamos a hacer otra.

10 – 7 = 100
I: A ver ésta, si crees que es verdadera o falsa.
FB: Falsa.
I: Muy bien, ¿cómo lo sabes?
FB: Porque diez menos siete… son tres, y no me da cien.
I: Muy bien, no te sale… lo que pone ahí ¿Y tú sabrías que es falsa sin hacer esta cuenta de aquí?
FB: ¿Qué?
I: ¿Tú sabrías que va a ser falsa sin hacer diez menos siete? ¿Lo sabrías ya? ¿O te hace falta hacer la operación para saberlo?
FB: No se.
I: ¿No lo sabes? A ver, Tú si miras esto de aquí ¿Crees que esto va a dar cien o no?
FB: No.
I: Muy bien, ¿Cómo sabes que eso no va a dar cien?
FB: Porque diez le quitas siete entonces serían...a ver… son cua…tres.
I: Muy bien. Entonces esto de aquí sabes que son tres y no son cien. Y si tú miras esto ¿tú sabes si va a ser un número chico o grande? Esto diez menos siete. ¿Tú que crees que va a ser chico o grande?
FB: Chico.
I: ¿Cómo sabes que va a ser chico?
FB: Porque diez menos siete son tres y cien es más mayor.
I: Es más mayor, cien es más grande. Vale. Muy bien, vamos a ver otra.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver ésta de aquí si te parece que es verdadera o falsa.
FB: Sí.
I: ¿Es verdadera?
FB: Sí.
I: ¿Cómo lo sabes? Muy bien.
FB: Porque ocho más seis son catorce y cuatro más cuatro y más seis son catorce.
I: Muy bien has hecho esta operación de aquí, has visto que da catorce y ésta también. ¿No? Vale, ¿Y tú sabrías que va a ser verdadera mirando los dos…la igualdad?, sin hacer todas las operaciones ¿o hace falta hacerlas todas?... Tú mírala, a ver si tú crees que va a ser verdadera sin hacer todas las operaciones.
FB: Es verdadera. Porque es que dan lo mismo, las dos.
I: Dan lo mismo los dos lados. Muy bien, mira y si te fijas aquí tienes cuatro más cuatro. ¿No? ¿Eso cuánto es, cuatro más cuatro?
FB: Ocho.
I: Ocho, Muy bien. Entonces aquí tienes ocho más seis y aquí también tienes ocho más seis. Entonces ¿eso te dice que va a ser verdadera o no? ¿O hay que hacer la operación?
FB: Eso me dice que es verdadera porque aquí hay ocho y aquí hay seis.
I: Muy bien. Entonces no habría que hacer la cuenta. Vale. Vamos a ver otro ejemplo.

9 – 9 = 3
I: Esta igualdad de aquí, a ver si crees que es verdadera o falsa.
FB: Falsa.
I: Muy bien ¿Cómo lo sabes?
FB: Porque nueve menos nueve son cero y no es tres.
I: No es tres, vale. Y tú ¿cómo sabes que nueve menos nueve son cero?
FB: Porque si nueve le quitas nueve son cero.
I: Vale, y si a cinco le quitas cinco ¿Cuánto te da?
FB: Cero.
I: Cero ¿también? ¿Y si a siete le quitas siete?
FB: Cero.
I: ¿También? ¿Y cómo lo sabes, que todos esos dan cero?
FB: Porque si seis le quitas cero, que diga, si seis le quitas seis son cero *(lo representa usando los dedos)*
I: Claro. Se te van todos los dedos de pronto. ¿No? Muy bien, muy bien. Vamos a ver ésta de aquí.

8 + 0 = 8
I: A ver, ¿Ésta crees que es verdadera o es falsa?
FB: Verdadera
I: Muy bien, ¿Cómo los sabes?
FB: Porque ocho más cero, porque el cero, no hay que sumarle nada y ocho igual a ocho
I: Ah, muy bien. Claro, sumarle cero es no sumarle nada. Muy bien, muy bien. Vamos a ver otra igualdad.

11 + 7 = 10 + 8
I: A ver ésta de aquí, si tú crees que es verdadera o falsa.

FB: *(cuenta en voz baja)…* Da igual.
I: ¿Da igual? ¿Cómo lo sabes?
FB: Porque once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete y dieciocho, dan dieciocho, y diez más ocho dan dieciocho.
I: Muy bien. Entonces tú has visto que el lado, once más siete da dieciocho y diez más ocho da también dieciocho. Y tú mirando la igualdad ¿sabrías decirme que es verdadera de otra forma? ¿Sabrías otra forma de saber que es verdadera?
FB: *(asiente)*
I: ¿Cómo?
FB: Pues pongo un nueve,… espera,
I: Sí, tú tranquilo. Si te hace falta puedes escribir.
FB: Nueve más nueve.
I: Nueve más nueve, sería otra forma. Sería otro dieciocho. Muy bien, muy bien. Entonces se podría poner también aquí nueve más nueve.
FB: Y también cero más dieciocho
I: Muy bien. Ese es más fácil de hacer ¿verdad? Y si miramos aquí en los dos lados. Este número de aquí once y diez, éste es más grande ¿no? y este ocho es más grande que éste. Mirando los números así ¿habría forma de saber si es verdadera o falsa? ¿O hay que hacer las operaciones?
FB: Sí, porque once es igual que ocho y diez es igual que siete entonces… ¿o no?
I: No lo se, no se… es que…explícamelo…es que no lo…cada uno…hay muchas formas de hacerlo, entonces…
FB: Que once es igual que ocho porque son más mayores y siete y diez son menores.
I: Ah, ya te entiendo. Claro. El diez es más chico que el once ¿no? y el siete es más chico también pero más chico que el ocho. Muy bien. Vamos a ver otra y ya acabamos. Vamos a ver, aquí está.

20 – 12 = 20 – 10 – 2
I: A ver ésta de aquí, si crees que va a ser verdadera o falsa.
FB: *(cuenta en voz baja)…*Falsa
I: ¿Cómo sabes que es falsa?
FB: Porque veinte…ah no, lo he hecho mal, es que creía que esto era una suma.
I: Ah, bueno, no pasa nada. Entonces veinte menos doce,… ahí tienes, y aquí tienes veinte menos diez menos dos. Mira a ver, tú tranquilo que no hay prisa. Para saber si…
FB: ¿Puedo hacer aquí las cuentas?
I: Claro, claro. Para eso tienes el lápiz, puedes hacer las operaciones que te hagan falta.
FB: No.
I: Mira a ver,… de cero a dos te llevas una ¿no? Entonces si te llevas una ¿cuánto te sale?
FB: Ah, dos, es verdadera.
I: ¿Qué te sale dos menos…?
FB: Veintiocho.
I: Vamos a repasar la cuenta. Tú lo que has hecho aquí… es…
FB: Dos hasta diez.
I: Hasta diez ¿no? y te sale ocho y te llevas una. ¿No?
FB: Umm
I: Y ese uno…
FB: Se convierte.

I: Se lo pondríamos aquí ¿no? O ¿Cómo…? ¿Dónde se lo pones?
FB: El dos
I: ¿A este dos?
FB: Sí
I: Entonces ¿haces tres menos uno dos? ¿Eso es lo que has hecho?
FB: *(Asiente)*
I: Vale. Entonces si hacemos veinte menos doce… Vamos a hacerlo de otra forma,… vamos a hacerlo con…con los dedos. Tenemos veinte, ¿vale? y vamos a quitarle doce. Yo te dejo mis manos si te hace falta porque son muchos números.
FB: Veinte
I: Le tienes que quitar doce.
FB: Veinte,… diecinueve, dieciocho, diecisiete, dieciséis, quince, catorce, trece, once,… diez, diez, nueve, nueve, y ocho.
I: Ocho. Entonces esto de aquí sale ocho ¿vale?
FB: Sí.
I: Es que al hacer la cuenta ahí te has equivocado. Entonces, esto sale ocho. ¿Vale? Y esta parte de aquí ¿Cuánto crees que sale?
FB: *(cuenta en voz baja)* Es verdadera
I: Muy bien, esto también te ha salido ocho ¿no? Has hecho esta operación ¿y tú sabrías que es verdadera, mirando la igualdad, sin hacer todas las operaciones? ¿Tú crees que se puede? ¿O hace falta hacer las cuentas? Mira a ver, porque los números que tienes en la igualdad…a ver.
FB: Lo podemos hacer del revés. Éste aquí y éste aquí.
I: Ah, esa sería otra forma de hacerlo, muy bien, eso es verdad. Mira fíjate, aquí tenemos un veinte y aquí también tenemos un veinte, pero aquí le quitamos doce y aquí lo que hacemos es quitarle diez y quitarle dos ¿Tú crees que es lo mismo quitar doce que quitar diez y quitar dos, o no?
FB: No sé.
I: ¿No lo sabes? Mira, aquí le quitamos doce, ¿no? veinte menos doce. Esto antes has visto que da doce ¿no?
FB: No se puede poner aquí.
I: ¿El que no se puede poner aquí?
FB: El doce no se puede poner en el diez.
I: Claro porque entonces no te…no sale el resultado,
FB: Sale nuev…diez.
I: Muy bien, ya está, ya hemos acabado.

12. EV

9 + 4 – 4 = 9
10 – 7 = 100
8 + 6 = 4 + 4 + 6
9 – 9 = 3
8 + 0 = 8
11 + 7 = 10 + 8

I: Hola EV, mira, vamos a hacer unas algunas actividades. Vamos a ir escribiendo unas igualdades…Te voy a ir escribiendo yo unas igualdades y yo quiero que tú me digas si son verdaderas o son falsas. ¿Vale?
EV: Vale

I: Aquí pon tú nombre. Y aquí al lado puedes ir escribiendo lo que te haga falta. Si te hace falta hacer una operación o algo, pues tú la escribes. Vamos a ver.

9 + 4 – 4 = 9
I: A ver, ¿ésta crees que es verdadera o falsa?
EV: Falsa.
I: Falsa ¿Por qué? ¿Cómo sabes que es falsa?
EV: Porque nueve más cuatro son trece, y cuatro menos cuatro son cero.
I: Ah, vale. Entonces tú has visto que esto, cuatro menos cuatro son cero ¿no?
EV: Sí.
I: Mira, entonces si miramos sólo esta parte, y tú sabes que cuatro menos cuatro son cero. Entonces nueve más cuatro menos cuatro ¿Cuánto crees que va a dar, esto de aquí?
EV: Diecisiete.
I: ¿Esto de aquí te sale diecisiete? ¿Cómo lo has calculado? Me lo puedes decir. ¿Qué has…?
EV: Pues nueve más cuatro… *(cuenta en voz baja)* ¿Más cuatro o menos cuatro?
I: Primero le sumas cuatro y luego le restas cuatro. Es nueve más cuatro ¿Cuánto te sale nueve más cuatro?
EV: Trece
I: ¿Y luego?
EV: Nueve.
I: Nueve. Ah, entonces esto de aquí te sale nueve. ¿No? Entonces si sería verdadera.
EV: Sí.
I: ¿Y tú mirando esto sabrías que va a dar nueve sin hacer las cuentas?... o ¿crees que hay que hacer las cuentas para darse cuenta?
EV: Hacer las cuentas
I: Hacen falta hacer las cuentas ¿no? Vale. Vamos a hacer ahora otra.

10 – 7 = 100
I: A ver ésta si crees que es verdadera o falsa. Esta igualdad.
EV: Falsa.
I: Muy bien ¿Cómo los sabes?
EV: Porque diez menos siete no son cien.
I: Muy bien, es verdad. ¿Cómo sabes que no son cien?
EV: Porque cien es más que diez
I: Muy bien, muy bien. Esa es una forma muy rápida de hacerlo.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver, ésta ¿crees que es verdadera o falsa?
EV: Verdadera.
I: Muy bien ¿Cómo lo sabes?
EV: Porque ocho más seis son catorce,
I: Sí
EV: Y cuatro más cuatro más seis son catorce.
I: También son catorce. Muy bien, entonces has visto que te da el mismo resultado en los dos lados. ¿No?
EV: Sí

I: ¿Vale? Muy bien. ¿Y tú sabrías que ésta va a ser verdadera, de otra forma? ¿Habría otra forma de hacerlo? Mirando la igualdad ¿habría alguna otra forma que no haya que hacer todas las cuentas?
EV: No
I: ¿No? Mira, aquí, cuatro más cuatro ¿Cuánto es?
EV: Ocho
I: Ocho. Entonces tú sabes que esto de aquí es ocho, ¿eso te ayuda para ver que es verdadera? El saber que esta parte es ocho.
EV: Sí
I: ¿Por qué?
EV: Es que no lo sé explicar.
I: ¿No lo sabes explicar? A ver tú sabes que esto de aquí es ocho ¿no?
EV: Sí
I: Entonces para ver que es verdadera ¿haría falta hacer las cuentas y sumarle seis? ¿O hay alguna forma de saber que es verdadera, mirando el otro lado?
EV: Con las cuentas
I: Con las cuentas. ¿No? Vale. Entonces haciendo las cuentas te das cuenta de que son catorce las dos y ya está. Muy bien.

9 – 9 = 3
I: Vamos a ver ésta de aquí, a ver si te parece que es verdadera o es falsa. Ésta.
EV: Falsa.
I: Muy bien, ¿Cómo sabes que es falsa?
EV: Porque nueve menos nueve son cero.
I: ¿Y cómo sabes que son cero?
EV: Porque a nueve le quitas nueve.
I: Eso no…eso se sabe ¿no? ¿Y si a cinco le quitas cinco?
EV: Cero
I: Cero también. Y ¿Tú sabrías explicarme por qué sabes que eso es verdad?, que eso es cero.
EV: No
I: No, es muy difícil ¿no? Es algo que ya lo sabes tan bien, que ya no sabes explicarlo. Muy bien.

8 + 0 = 8
I: Y esta igualdad ¿crees que es verdadera o falsa?
EV: Verdadera.
I: Muy bien, ¿Cómo lo sabes?
EV: Porque ocho más cero son ocho…
I: Entonces es lo que dice ahí ¿no?
EV: Sí
I: Y tú ¿cómo sabes que ocho más cero son ocho?
EV: Porque a cero no le tienes que sumar nada…
I: Ah
EV: No a ocho
I: Sí, a ocho no le tienes que sumar nada ¿no? ¿Es eso lo que dices?
EV: Sí
I: Muy bien, muy bien. Vamos a hacer otra igualdad

11 + 7 = 10 + 8
I: A ver esta igualdad si tú crees que es verdadera o falsa.
EV: Falsa
I: Muy bien ¿cómo sabes que es falsa?
EV: Porque once más siete son diecinueve, y diez más ocho son dieciocho.
I: Éste te da dieciocho. A ver repasa esta cuenta de aquí a ver lo que te da, once más siete.
EV: Diecinueve.
I: ¿Diecinueve, si? ¿A ver cómo lo estas haciendo? ¿Qué haces?
EV: *(cuenta en voz baja)* Verdadera.
I: Ah, es verdadera, ¿no? ahora si te ha dado dieciocho ¿y mirándola se te ocurre alguna forma de saber que es verdadera o crees que hay que hacer las operaciones?
EV: Las operaciones.
I: ¿Sí? ¿Hay que hacerlo? Porque mira, si te das cuenta, este número de aquí es como el diez pero uno más grande, ¿no?
EV: Sí
I: Y éste de aquí es uno más chico que el ocho ¿tú crees que eso nos ayuda para saberlo?
EV: Sí.
I: Entonces ¿Podríamos saber que es verdadera… así?
EV: Sí.
I: ¿Cómo me lo explicarías tú?
EV: Pues, no sé.
I: Es muy difícil ¿no? Mira, si te fijas como ésta es uno más grande que ésta. Si tú este uno lo pasas aquí, te queda aquí diez y aquí te queda ocho, te queda lo de ese lado. ¿Te has dado cuenta? Eso es una cosa que explicó FM un día en la pizarra. Y es que, si el uno lo llevas aquí a este siete, aquí ya te queda diez y aquí te queda ocho, te queda lo mismo que en el otro lado. Vale. Muy bien. Pues ya está.

13. CL

9 + 4 – 4 = 9
8 + 6 = 4 + 4 + 6
20 – 12 = 20 – 10 – 2
125 – 125 = 13
23 + 0 = 23
11 + 7 = 10 + 8

I: Hola CL. Mira, esta hoja es para ti .Yo te voy a ir escribiendo unas cuantas igualdades ¿vale? y yo quiero que tú me digas si son verdaderas o son falsas. ¿Vale? Pon aquí tú nombre y ahora ya empezamos.

(CL escribe su nombre)

I: Si necesitas escribir algo puedes escribir también tú en esta hoja. ¿Vale? Vamos a empezar.

9 + 4 – 4 = 9
I: A ver tú si tú crees que esta igualdad es verdadera o falsa.
CL: Verdadera.

I: Muy bien. ¿Cómo lo sabes?
CL: Porque nueve más cuatro son trece, menos cuatro son nueve.
I: Muy bien. Entonces te da nueve, que es justo lo que pone ahí. Y ¿habría alguna forma de saber que es verdadera sin hacer todas las operaciones?
CL: No.
I: ¿No? No hay ninguna forma de saber va a ser verdadera, pero sin hacerlo. A ver si tú miras esta parte de aquí ¿cuánto crees que va a dar eso?
CL: Nueve
I: ¿Qué es lo que has hecho? Has sumado cuatro y luego se lo has restado ¿no? Vale, muy bien, muy bien. Es justo entonces lo que viene ahí. Vale. Vamos a ver otra igualdad.

8 + 6 = 4 + 4 + 6
I: A ver ésta si crees que es verdadera o falsa.
CL: Verdadera.
I: Muy bien ¿cómo sabes que es verdadera?
CL: Porque ocho más seis son catorce y cuatro más cuatro ocho, más seis catorce.
I: Muy bien, entonces has visto que ésta parte de aquí es catorce y esa también. Y mirando la igualdad ¿podríamos saber que es verdadera haciéndolo de otra forma?... ¿Se te ocurre alguna forma distinta?
CL: *(negación)*
I: ¿No? ¿No se te ocurre? Pues hay muchas formas de hacer las igual… de saber que es verdadera. Por ejemplo si sumamos cuatro más cuatro ¿cuánto nos da?
CL: Ocho
I: Ocho, muy bien. ¿Y eso te sirve para saber que es verdadera? Saber que esto de aquí da ocho…
CL: *(Asiente)*
I: ¿Cómo te sirve?... Sabemos cuatro más cuatro son ocho. Entonces para ver si esta parte de aquí es igual que esta parte de aquí,… sabiendo que esto es ocho… ¿Qué podemos hacer? ¿Hace falta hacer las cuentas o tú crees que se puede saber de otra forma?
CL: Nada más que sumando esto y pones aquí un ocho, ya sería lo mismo.
I: Ah, esto de aquí si lo sumas sería un ocho ¿no? Y ¿por que dices que sería lo mismo?
CL: Porque si aquí ponemos un ocho, sería ocho más seis lo mismo que aquí, ocho más seis.
I: Ocho más seis. Muy bien. Entonces, si te das cuenta, fijándose en esto de aquí esto de aquí es ocho, no hace falta hacer todas las cuentas. Es lo que tú me acabas de decir. Porque ya tendrías lo mismo en las dos partes. Vamos a hacer otra igualdad.

20 – 12 = 20 – 10 – 2
I: A ver ésta de aquí si tú crees que es verdadera o falsa.
CL: ¿Puedo hacer aquí una cuenta?
I: Claro, lo que te haga falta.
CL: Verdadera.
I: Muy bien ¿cómo lo sabes? Ésta no la has tenido… ¿ésta la has hecho en la cabeza, esta operación? Entonces que ésta te ha salido ocho y esta operación también te ha salido ocho.
CL: Sí.

I: ¿Y mirando la igualdad sabrías de otra forma que es verdadera? ¿Habría otra forma de saberlo?
CL: *(Asiente)*
I: ¿Cómo?
CL: Sumando doce más cuatro y…y después… como nos da doce, restándolo menos veinte.
I: A ver ¿tú que me has dicho? ¿Sumando éste y éste? ¿Eso es lo que me has dicho? Entonces si sumas éste y éste tenemos doce ¿Y ahora que hacemos?
CL: Que es igual a veinte menos doce
I: Ah, muy bien, es parecida a ésta de aquí, ¿no? cuando hacemos esta suma ya tenemos los mismos números. Muy bien... Vamos a ver ahora otra igualdad.

125 – 125 = 13
I: A ver ésta ¿que te parece que es, verdadera o falsa?
CL: Falsa
I: ¿Por qué? Muy bien. ¿Cómo lo sabes?
CL: Porque ciento veinticinco menos ciento veinticinco son cero.
I: Muy bien, entonces no es trece. Claro. ¿Y cómo sabes que esto va a dar cero?
CL: Porque son los mismos números.
I: Ah, y entonces al restarlo sale cero.

23 + 0 = 23
I: Vamos a ver y si tenemos ésta ¿qué crees que es, verdadera o falsa?
CL: Verdadera.
I: Muy bien. ¿Cómo lo sabes?
CL: Porque veintitrés más cero son cero, son veintitrés.
I: ¿Cómo lo sabes?
CL: Porque…porque cero no es nada
I: Ah, muy bien. Claro. Entonces al sumarle se queda igual, como no es nada. Muy bien.

11 + 7 = 10 + 8
I: A ver tenemos tiempo para una más, creo. Vamos a ver. Ésta ya es la última porque ya nos tenemos que ir. A ver si crees que es verdadera o falsa, esta igualdad.
CL: Verdadera.
I: Muy bien ¿cómo lo sabes?
CL: Porque once, más siete son dieciocho, y diez más ocho, diez más ocho son dieciocho.
I: Muy bien, entonces los dos lados dan lo mismo, dan dieciocho. Muy bien. Y ¿se te ocurre otra forma también de saber que es verdadera?
CL: Sí.
I: ¿Cómo?
CL: Restándole a once una y se la añadimos al siete.
I: Muy bien.
CL: Y sería ocho y aquí diez.
I: Muy bien. Eso es. Muy bien. Pues ya está CL. Ya hemos acabado.

Anexo D:

Tablas con las respuestas de los alumnos

Nota: Estas tablas recogen las respuestas dadas por los alumnos, manteniéndose las faltas ortográficas.

Tabla D-1: Respuestas de los alumnos a la actividad escrita de la sesión 1

Igualdades / Alumnos	8 + 4 = □ + 5	□= 25-12	14 + □ = 13 + 4	12 + 7 = 7 +□	13 – 7 = □ - 6	□ + 4 = 5 + 7
FB	**7**	**13**	4	**12**	0	**8**
EV	**7**	NR	**3**	**12**	0 (borrado)	**8**
BI	**7**	**13**	**3**	**12**	11	NR
CY	12	**13**	**3**	14	15	6
VS	**7**	14	**3**	**12**	**12**	**8**
MP	**7**	NR	**3**	21	0 (borrado)	**8**
BR	**7**	**13**	**3**	24	0	**8**
MG	11	10	17	26	13	15
JA	**7**	**13**	**3**	14	15	6
NM	**7**	**13**	**3**	**12**	6	**8**
JQ	**7**	**13**	**3**	**12**	**12**	**8**
MR	**7**	**13**	**3**	**12**	0	**8**
EF	**7**	**13**	**3**	**12**	**12**	**8**
CH	**7**	**13**	**3**	**12**	11	**8**
MB	**7**	**13**	**3**	11	**12**	**8**
DL	**7**	**13** *(aplica el*	**3**	**12**	0 *(aplica el algoritmo*	**8**

		algoritmo de la resta)			*a 13 – 7)*	
JM	**7**	**13**	**3**	**12**	**12**	**8**
RT	12	**13**	19	19	16	12
CL	**7**	**13**	**3**	**12**	0	**8**
CA	17	15	17	10	**12**	10
MT	**7**	**13**	**3**	**12**	**12**	**8**
RB	**7**	**13**	**3**	**12**	6	**8**
FM	**7**	**13**	**3**	**12**	**12**	**8**
MA	**7**	**13**	**3**	**12**	**12**	**8**
MAG	**7**	**13**	2	**12**	**12** *(aplica el algoritmo a 13 – 7)*	**8**
RL	**7**	**13**	**3**	11	**12** *(aplica el algoritmo a 13 – 7)*	**8**

En negrita se señalan las respuestas correctas. Se sombrean en amarillo las respuestas incorrectas. **N = 26**
En cursiva se comentan las anotaciones realizadas aparte.

Tabla D-2: Respuestas de los alumnos a la actividad escrita de la primera parte de la sesión 2:

	12 – 4 = 13 - □	**14 – 9 = □- 10**	**9 – 4 = □ - 3**	**17 - □ = 18 – 8**	**□ - 6 = 15 – 7**
EF	**5** He restado doce menos cuatro y me ha salido ocho y entonces a trece he ido contando hasta ocho y me ha dado cinco	**15** he restado a catorce nueve y luego me ha salido seis he ido contando seis más diez y me ha salido quince	**8** a nueve le he quitado cuatro y me ha salido cinco entonces e contado desde cinco mas tres y me ha salido ocho	8 he restado dieciocho menos ocho y me ha salido diez entonces he restado diecisiete menos diez y van ocho.	15 He restado quince menos siete y me ha salido nueve más seis y me ha salido quince
FB	NR	5 ha 9 le quitado 5	1 ha 4 le quitado a 1	1 ha diecisiete le sumado uno	NR
VS	**5** lo he hecho pensando cuánto es	5 lo he hecho pensando	**8** lo he hecho pensando	**7** lo he hecho pensando	18 lo he hecho pensando
MT	**5** a 12 le he restado 4 y después de 8 que es el resultado he contado hasta trece	**15** a 14 le he quitado 9	**8** a 9 le he quitado cinco	**7** a 18 le he quitado ocho y me ha dado diez y para que me de diez en la otra cuenta le he restado a 17, 7	**14** a 15 le he restado 7 y me ha dado 8 y para que en la otra cuenta me de 8 le he sumado 6 y me ha dado 14
JM	**5** porque si 12 menos 4 es 8 13 menos 5 son 8	5 porque si 14 menos 9 son 5 menos 10 me da 5	**8** porque si 9 menos 4 son 5 pues 8 menos 3 son 5	**7** si 18 menos 8 son 10 17 menos 7 son 10	13 porque si 15 menos 7 son 8 13 menos 6 son 8
MÁG	9 porque si a trece le resto nueve dan 4	11 porque para que me de nueve tengo que resta 11 a 10 y me da 9	7 si a 7 – 3 me dan 4	9 si a 17 le resto 9 salen 8	13 si a 13 – 6 dan 7
MA	**5**	19	**8**	8	**14**
RB	8 resultado 8	**15** resultado 15	**8**	**7**	**14**
CA	3 he pensado 12 – 4 son 10 y he restado 13 – 3 y me da 10	5 he pensado 14 – 9 son 5 y he restado 5 - 10	**8** he pensado que 9 – 4 son 5 y he restado 8 – 3 igual a cinco pero lo he hecho pensando	9 he pensado 17 – 9 = 8 y 18 – 8 son 8	13 he pensado 13 – 6 son 8 y 15 – 7 son ocho (a parte prueba 11 – 6 = 7)

	12 – 4 = 13 - □	**14 – 9 = □- 10**	**9 – 4 = □ - 3**	**17 - □ = 18 – 8**	**□ - 6 = 15 – 7**
NM	**5** 12 – 4 = 13 – 5	04 14 – 9 = 04 - 10	13 9 – 4 = 13	**7** 17 – 7 = 18 – 8	NR
BI	01 Esta es la cuenta que hecho 12 – 4 = 13 - 01	**15** Esta es la cuenta que hecho 14 – 9 = 15 – 10	5 Esta es la cuenta que hecho	NR	NR
BR	01 he restado doce – cuatro y – trece 12 – 4 – 13 = 01	**15**	5 he hecho nueve – cuatro 9-4=5	NR	NR
MB	4 he restado 12 menos 4 y lo que me de me tiene que dar lo mismo al otro	14 he restado 14 menos 9 y el resultado tiene que ser igual al otro	**8** he restado 9 menos 4 y el resultado tiene que ser igual al otro	11 me he fijado en la de 18 menos 8 me da diez y en la otra también	6 me he fijado en una cuenta la del lado y la hice
CL	**5** Hemos restado doce menos cuatro son ocho. He restado trece menos cinco y también me da ocho	5 He restado catorce menos nueve y me da cinco. Luego he restado diez menos cinco y me da el mismo resultado que catorce menos nueve	**8**	**7**	NR
EV	**5** he restado 12 – 4 me ha dado el resultado, después he restado 13 – 5 para que me diera el resultado de la cuenta anterior	**15** he restado 14- 9 luego me ha dado el resultado he vuelto a restar 15 – 10 para que me diera el resultado de la cuenta anterior	**8** he restado 9-4 me ha dado el resultado después he restado 8-3 para que me diera el resultado de la cuenta anterior	**7** He restado 18-8 después me ha dado el resultado he restado 17-7 para que me diera el resultado de la cuenta anterior	**14** He restado 15-7 después me ha dado el resultado y he restado 14-6 para que me diera el resultado de la cuenta anterior
MP	9 porque a 12 le quitas cuatro te da 9 y si a trece le quitas 9 son 9	NR	**8** porque a 9 le quitas 4 son 5 y para que te de 5 a ocho le quitas 3 son 5	NR	NR
MR	11 he restado 12 – 4 y luego he restado 4 – 12 entonces han salido 11	5 he restado 14 – 9 entonces me ha salido 5	5 he restado 9 – 4 y me ha salido 5	**7** como 18 luego hay un 8 pues me ha salido 8	8

	12 – 4 = 13 - □	**14 – 9 = □- 10**	**9 – 4 = □ - 3**	**17 - □ = 18 – 8**	**□ - 6 = 15 – 7**
JQ	**5** por que 12 – 4 son 8 y 13 – 5 son 8	**15** por que 14 – 9 son 5 y 15 – 10 son 5	**8** porque 9 – 4 son 5 y 8 – 3 son 5	**7** porque 17 – 7 son 10 y 18 – 8 son 10	**14** porque 15 – 6 son 9 y 15 – 7 son 8
CH	**5** he hecho esta cuenta 13-5 porque la igual que 12-4 será 13-5	25 he hecho 25-10 porque es muy fácil	**8** he utilizado mi mente para hacerla porque 9-4+ 8-3 y da lo mismo	**7** he hecho 17-9 para que me salga lo mismo	**14** he utilizado la mente
FM	**5** porque 12- 4 son 8 y 13-5 son 8	**15** porque 14-9 son 5 y 15-10 son 5	**8** porque 9-4 son 5 y 8-3=5	**7** porque 18-8 son 10 y 17-7 son 10	**14** 15-7 son 8 y 14-6 son 8
CY	3 con una resta	5 sin clasificar con la cabeza y restando	**8** con la cabeza y restando	9 con las manos	NR

En negrita se señalan las respuestas correctas, en azul las respuestas que parecen proceder de un error de cálculo. **N=21**
NR= no responde

Tabla D-3: Respuestas de los alumnos a la segunda actividad de la sesión 2

	Verdaderas	Verdaderas más difíciles	Explicación	Falsas
EF	10 + 10 = 30 – 10 4 + 3 = 10 – 3 40 – 10 = 20 + 10 50 + 40 = 100 –10 10 + 20 = 40-10	400 – 300 = 500–400 1.000 + 3.000 = 5.000 – 1.000 $9_1$000.000- $1_1$000.000 =$7_1$000.000 + $1_1$000.000	Porque las otras eran solo de 10 en 10 y estos son de 100 de 1000 y de 1_1 000000.	$1_1$000.000 + $1_1$000.000 = $4_1$000.000 + $4_1$000.000 20 + 10 = 300 - 100 1.000 – 1.000 =3.000 + 4.000 100 – 100 = 200 + 200 8.000 + 8.000 = 4.000 – 4.000
FB	5 – 5 = 0 10 + 20 = 30 100 + 1000= 1100	1000 – 1000 = 0 10 + 100 = 1020	Porque cien mil son muchos niños y números y diez es poco pero con 100 es mulso.	1000 + 1000 = 1 0 – 0 = 1000 0 + 10 = 1000 10 + 10 = 0 0 – 0 = 1000 1000 + 1000 = 0 1000 – 1000 = 1
VS	12 – 6 = 10 – 4 7 + 7 = 20 – 6 18 + 20 = 30 + 8	17 – 2 = 12 + 2 19 – 6 = 7 + 6 32 – 10 = 12 + 10	Porque son números mayores	16 – 13 = 12 + 14 19 + 16 = 20 – 3 17 – 6 = 20 + 1
MT	15 – 3 = 8 + 4 8 + 3 = 13 – 2 4 + 10 = 24 – 10 33 – 4 = 28 – 7 32 + 4 = 38 – 2 43 + 8 = 59 - 8	43 – 24 = 23 – 4 88 – 44 = 94 – 50 33 – 22 = 20 – 9 1.000.000 + 100 = 2.000.000 – 900	Porque los números son más grandes	58 – 43 = 48 – 3 36 + 48 = 48 – 22 45 – 32 = 32 – 80 38 – 33 = 33 – 31 49 – 58 = 22 – 11 48 – 30 = 30 - 10
JM	12 + 13 = 17 + 8 15 – 5 = 5 + 5 15 – 8 = 10 - 7	23 + 20 = 50 -	Porque le tienes que poner números mas grandes	
MAG	13 – 2 = 15 – 4 17 – 5 = 7 + 5 15 + 9 = 26 - 2	19 – 13 = 9 – 3 9 + 8 = 25 – 8 14 – 3 = 6 + 5	Porque la resta y sumas son más difíciles	18 + 5 = 20 + 8 15 – 2 = 9 + 6 8 – 5 = 5 – 1
MA	12 – 4 = 13 – 5 15 – 15 = 0 – 0 11 + 11 = 11 + 11			10 + 5 – 10 = 50 12 + 10 – 18 = 23 18 + 9 – 6 = 34
RB	12 – 4 = 13 – 5 13 – 12 =			12 - 4 = 13 – 10 4 – 12 = 10 - 13
CA	14 – 1 = 12 + 1 = 13 14 + 5 = 19 18 + 1 19 + 1 = 20 21 - 1	25 – 9 = 16 15 + 1 40 – 9 = 31 21 + 10 50 – 7 = 43 33 + 10	Porque son de 25, 40 y 50.	30 + 1 son 29 y 29 – 80 99 40 – 30 80 y 80 – 1 = 0 20 + 10 0 y 0 + 30 80
NM	12 + 13 = 15 15 – 5 = 10 14 + 6 = 20	18 + 9 = 117 19 + 10 = 20 17 – 5 = 42	Porque le tienes	
BI	8 + 5 = 13 1 + 4 = 5 12 – 4 = 13 – 10	20 – 49 = 21 100 + 14 = 114 15 – 23 = 12		12 – 4 = 13 – 5 14 – 5 = 8 - 10 9 + 16 = 40 -10 19 + 26 = 5 + 20
BR	16 + 8 = 24 9 – 7 = 2 15 + 4 = 19	20 + 8 = 28 21 + 8 = 29 2 - 1 = 3		12- 4 = 9 16 – 3 = 4 15 – 5 = 8 14 - 4 = 1

	Verdaderas	Verdaderas más difíciles	Explicación	Falsas
MB	10 + 120 = 20 + 100 12 – 10 = 4 - 2 40 + 90 = 40 + 80	1.000 + 2.000 = 1.000 + 2.000 400 – 200 = 300 – 100 15 – 10 = 10 - 15	Por que yo he hecho más y menos cantidades	40 – 10 = 40 – 50 12 – 14= 14 – 10 15 – 1 = 15 - 20
CL	12 + 4 = 8 + 8 15 – 15 = 0 – 0 7 + 7 = 20 – 4	25 – 5 = 18 + 2 2 – 1 = 20 – 19 21 – 8 = 10 + 3	Porque los números son más difíciles	10 + 9 = 30 – 8 17 – 2 = 1 + 5 27 + 7 = 5 + 2
EV	13 + 4 = 14 – <u>5</u> 9 – 2 = 5 + <u>2</u> 14 – 8 = 2 + <u>4</u>	98 – 10 = 72 + <u>16</u> 20 – 10 = 14 – <u>4</u> 38 – 10 = 10 + <u>18</u>	Porque la decena es más grande	33 – 4 = 14 + <u>2</u> 29 – 10 = 14 + <u>3</u> 69 – 5 = 14 + <u>6</u> 80 – 4 = 14 + <u>5</u>
MP	12 + 4 = 13 + 3 9 – 2 = 13 – 6 13 + 9 = 13 + 9	11 + 11 = 11 + 11 19 – 9 = 19 – 9 13 + 11 = 12 + 12	Por que si le pones números difíciles es mejor y más difícil	13 + 8 = 17 + 12 14 + 8 = 22 + 8 7- 8 = 12 – 13 7 - 9 – 8 = 13
MR	12 – 4 = 13 + 5 4 + 12 = 13 – 5 5 + 13 = 4 – 12	18 -8 = 17 – 7 8 – 18 = 17 – 7 17 – 7 = 18 – 8	Porque no la se muy bien	12 – 4 = 13 – 10 18 – 8 = 17 – 14 17 – 7 = 18 – 13
JQ	13 – 4 = 5 + 3 = <u>8</u> 11 – 7 = 2 + 2 = <u>4</u> 18 – 5 = 8 + 5 = <u>13</u>	24 – 9 = 19 – 4 = <u>15</u> 21 - 6 = 11 + 4 = <u>15</u> 28 – 7 = 26 – 5 = <u>21</u>	Porque va aumentando el número y el nivel	24 – 8 = 10 + 2 = 12 21 – 4 = 12 + 3 = 15 19 – 2 = 14 + 2 = 16
CH	5 + 3 = 4 + 4 2 + 2 = 1 + 3 10 – 5 = 15 – 10 10 + 4 = 4 + 10 5 + 3 = 6 + 2	10 + 8 = 20 – 2 20 + 30 = 30 + 20 18 + 60 = 98 – 20 24 – 5 = 15 + 4	Porque los números son más grandes	18 + 6 = 30 – 4 5 + 3 = 90 – 40 4 + 6 = 204 + 6
FM	13 – 4 = 5 + 4 15 – 6 = 2 + 7 17 – 5 = 10 + 2	21 – 18 = 1 + 2 32 – 24 = 5 + 3 44 – 23 = 14 + 7	Porque los números que e puesto son más altos	13 – 10 = 1 + 4 16 – 4 = 10 + 3 20 – 6 = 12 + 4
CY	12 – 4 = 13 + 5 5 + 5 = 10 – 5 8 – 1 = 1 + 8	11 – 2 = 12 + 2 2 + 11 = 11 – 2 9 + 11 = 11 – 9	Porque tienen más números	12 – 4 = 13 – 10 12 – 5 = 5 – 12 6 + 5 = 5 – 6 16 + 5 = 5 – 16 5 + 16 = 6 - 16

En rojo se señalan las sentencias incorrectas. Se subrayan algunos números que los alumnos escribieron dentro de un recuadro.

Tabla D-4: Respuestas de los alumnos a la actividad escrita de la sesión 4 (Hoja 1)

	18 – 7 = 7 – 18	**75 – 14 = 340**	**17 – 12 = 16 – 11**	**122 + 35 – 35 = 122**	**6 + 4 + 18 = 10 + 18**
FB	Verdadera porque dieciocho menos 7 y el otro es lo mismo y si es lo mismo da igual	Falsa porque setenta cinco menos 14 no da trescientos cuarenta C: 300 + 40 = 340 (calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 51)	Verdadera (escribe verticalmente 17, 12, 16 y 11 con un signo menos pero no opera)	Verdadera porque 122 más treinta cinco menos treinta cinco me da veintidós (calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 – 35 = 192)	Verdadera porque 6 más cuatro más dieciocho dan 28 y 10 más dieciséis dan 28 (calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28)
FM	Falsa porque 18 – 7 son 11 y a 7 no le puedes quitar 18 C: que poner 18 – 7	Falsa porque 75–14 da mucho menos que 340 C: que poner 61 en la igualdad	Verdadera porque 17 – 12=5 y 16 – 11= 5	Verdadera porque como si te pones vida y te la quitas y da lo mismo (calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)	Verdadera porque 6 + 4 =10 y + 18 = 10 + 18
RB	Verdadera porque en cada da el mismo resultado C: las dos dan 11 (calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 11)	Falsa porque no da lo mismo C: en uno da 60 y en el otro 340 (calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 60)	Verdadera porque da lo mismo C: 5 = 5 (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Falsa porque no da lo mismo C: 155 y en otro 112 (calcula mediante el algoritmo de la resta 122 – 35 = 113 y mediante el de la suma 122 + 35 = 157)	Falsa porque no da lo mismo C: 28 y en otra 18
MAG	Verdadera porque los dos números son iguales	Falsa porque 75 y 14 no es 340 C: 61	Verdadera porque dan lo mismo	Falsa porque 122+35–35 es 123 C:123	Verdadera porque da lo mismo
RL	Verdadera porque siete es igual a siete y dieciocho es igual a dieciocho C: igual	Falsa porque setenta y cinco menos catorce no es igual que trescientos cuarenta (calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61 y 340 + 14 = 354)	Verdadera porque he hecho una cuenta y otra cuenta y me ha salido lo mismo C: igual (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 – 05 = 05)	Verdadera porque ciento veintidós es igual a ciento veintidós y treinta y cinco es igual a treinta y cinco. (calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157 y mediante el de la resta 122 – 35 =197)	Verdadera porque diez más ocho son veintidós y dieciocho más diez es veintidós C: igual (calcula mediante el algoritmo de la suma 10 + 18 = 22 y 10 +18 = 28)
MA	Falsa porque 8 menos 7 son 18 C:18	Falsa porque 75 menos 14 no son 340 C:61	Falsa porque 17 menos doce no son 16 – ni 11 C: 5	Falsa porque 122 + 35 –35 = no son 122 C: 12 22	Falsa porque 6+4+18 = no es igual a 10 y 18 C: 28

	18 – 7 = 7 – 18	75 – 14 = 340	17 – 12 = 16 – 11	122 + 35 – 35 = 122	6 + 4 + 18 = 10 + 18
CA	Verdadera porque 18 – 7 son 11 y 7 – 18 son 11	Falsa porque 75 – 14 son 61 no 340 C: 300 + 40 = 340	Verdadera porque 17 – 12 son 5 y 16 – 11 son 5	Verdadera porque 122 + 35 pero si le 35 a 122 dan 122	Verdadera porque 6 + 4 + 18 son 28 y 10 + 18 son 28
CL	Verdadera porque los números son iguales pero están puestos de otra forma	Falsa porque 75 menos 14 son 61 y no da 340 C: 350–10=340 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	Verdadera porque 17 menos 12 son 5 y 16 menos 11 son 5 (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque 122 más 35 menos 35 son 122	Verdadera porque 6 más 4 más 18 son 28 y 10 más 18 son 28
MT	Falsa porque a siete no le podemos quitar más de 9 C: 18 – 7 = 9 + 2	Falsa porque no puede dar 340 C: 75 – 14 = 61	Verdadera porque 17 – 12 son 5 y 16 menos 11 son 5	Verdadera porque 122 + 35 son 157 menos 35 son 122	Verdadera porque 6 + 4 son 10 + 18 son 28 10 + 28 = 28
JM	Verdadera porque 18 – 7 es = 7 – 18 es lo mismo C: lo mismo	Falsa porque 75–14 no puede dar 340 C: una falsa	Verdadera porque 17 – 12 es = que 16 – 11 C: lo mismo	Falsa porque 122 + 35 = 175 175 – 35 = 140 por eso no da 122 C: una falsa (calcula mediante el algoritmo de la resta 175 – 35= 140)	Verdadera porque 6 + 4 = 10 + 18 = 10 + 18 es lo mismo en las dos cuentas C: lo mismo
DL	Falsa porque 7–18 no se puede restar C: 18–7 seria	Falsa porque 75–14 es 61 y no es 340 C: 61	Verdadera porque 17–12 es 5 y 16–11 es 5 (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque es si le das el número y luego lo recuperas	Verdadera porque 6+4+18 son 28 y 10 +18 es 28
MB	Falsa porque no son los mismos resultados uno da 17 y el otro da 19 C: en la segunda cuenta cambio el 18 por el 7	Falsa porque no da los mismos resultados C: sacaría el 340 y pondría el 75 – 14	Verdadera porque aunque estén los números estén cambiados da el mismo resultado	Verdadera porque los números y las cantidades son iguales	Verdadera porque da el mismo resultado
EF	Falsa porque a 7 no le puedes quitar 18 porque es un número mayor C: 18–7=18–7	Falsa porque 75 menos 14 son menos, no le puede salir un número mayor C: 340=340	Verdadera porque te sale lo mismo (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque si a 122 le sumas 35 y luego se los quitas le sale 122	Verdadera porque sumas 6 más 4 le da 10 pues igual que el otro número

	18 – 7 = 7 – 18	75 – 14 = 340	17 – 12 = 16 – 11	122 + 35 – 35 = 122	6 + 4 + 18 = 10 + 18
CH	Falsa porque a 18–7 se le puede restar pero a 7–18 no se puede restar C: 18–7=18–7=11	Falsa porque 75 – 14 son 61 y además si a 75 le restamos más no puede salir 340 C: 75–14=61	Verdadera porque 17–12 son 05 16–11 es 05 y además a 17 como , si le quitamos 2 y nos da el resultado C: 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05 (borrado) (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque 122 + 35 – 35 = 122 porque si a 122 le ponemos 35 y se lo quitamos es como si no hubiera sumado nada	Verdadera porque 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28 y se puede sumar 6 + 4 y después 10 + 18 que es 28.
MR	Verdadera porque 18 – 7 = 7 – 18 es igual	Falsa porque 75–14 no dan 340 C: 75 – 14 = 14 – 75	Falsa porque 17–12 no dan 16 – 11 C: 17=17	Verdadera porque da lo mismo	Falsa porque no esta bien hecho C: 18 = 18
JQ	Falsa porque a 7 no le puedes quitar 18 C: 11	Falsa porque 75–14 son 61 y no son 340 C: 61	Verdadera porque 17–12 son 05 y 16–11 son 05 C: 05	Verdadera porque 122 + 35 son 157 menos 35 son 122 C:122	Verdadera porque 6 + 4 son 10 y 18 son 28 y 10+18 son 28 C: 28
NM	Verdadera porque 18–7=7–11 es once C: onces	Falsa porque 75 – 14 es sesenta y una (escribe en vertical 75 + 14 = 61) C: 61	Falsa porque 17 – 12 es cinco C: 05	No la entiendo	Falsa porque 6 + 4 + 18 es veinte C: 20
JA	Verdadera				
MG	Verdadera porque dieciocho menos siete y siete menos dieciocho dan lo mismo	Falsa porque setenta y cinco menos catorce dan noventa y uno (calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 91)	Verdadera porque diecisiete menos doce dan noventa y dieciséis menos once dan lo mismo (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 90 y 16 – 11 = 90)	Verdadera porque ciento veintidós más treinta y cinco y treinta y cinco menos treinta y cinco dan lo mismo	Falsa porque seis más cuatro dan diez y cuatro más dieciocho dan diez más dieciocho dan el mismo resultado (calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 =10)
BR	Falsa porque 18 – 7 = 11 y 7 – 18 = 19 (calcula mediante el algoritmo de la resta 7 – 18 = 19 y 18 – 7 = 11)	Falsa porque 75 – 14 = 61 y 14 – 75 = 49 no 340 (calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61 y 14 – 75 = 49)	Falsa porque 16 – 12 = 05 (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05)	Verdadera porque 122 + 35 = 197 y da la resta lo mismo (calcula mediante algoritmos 122 + 35 = 197 y 122 – 35 = 96)	Verdadera porque 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28. (calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 = 28 y 10 + 18 = 28)

	18 – 7 = 7 – 18	**75 – 14 = 340**	**17 – 12 = 16 – 11**	**122 + 35 – 35 = 122**	**6 + 4 + 18 = 10 + 18**
MP	Verdadera porque los dos son iguales C: iguales (calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 01)	Falsa porque me da 72 y ahí da 340 C: 72 (calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 62)	Falsa porque me da 5 y en la otra también 5 C: igual 5 (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05	Verdadera porque los dos son iguales C: iguales (calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 + 35 = 192 y 122 + 35 = 157)	Falsa porque me da 29 y en la otra 18 C: falsa (calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 = 29 y 18 + 10 = 28)
VS	Falsa porque a 18 le puedes quitar 7 ya a 7 no le puedes quitar 18	Falsa porque 74 menos 14 es 51	Verdadera porque 17 menos 12 da 5 y 16 menos 11 da 5	Verdadera porque 122 más 35 da 157 y si a 157 le restamos 35 nos 122	Verdadera porque 6 más 4 más 18 da 28 y 10 más 18 da 28.
CY	Falsa porque a 18 menos 7 menos 18 no da 18 C: los resultados iguales	Falsa porque 75 menos 14 no da 340 C: los resultados iguales	Falsa porque 17 menos 12 menos 16 – 11 no es verdadera C: los tenemos iguales	Falsa porque 122 más 35 menos 35 no da 122 C: los resultados iguales	Verdadera porque 6 más 4 más 18 da 10 más 18 C: los resultados iguales
BI	Verdadera porque 18 – 7 = 25 y 7 – 18 = 25	Falsa porque 7 – 14 = 61 C: 15 + 21 = 36 (calcula mediante el algoritmo de la resta 75– 14 = 61)	Verdadera porque 17 –12 = 05 y 16 –11 = 05 (calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque 122 + 35 – 35 = 122 (calcula mediante el algoritmo de la resta 122 + 35 – 35 = 122)	Falsa porque 6 + 4 + 18 = 118 C: 46 + 60 = 106 (calcula mediante el algoritmo de la suma 46 + 60 = 106 y 6 + 4 + 18 = 118)
EV	Verdadera porque 18 – 7 es igual a 7 – 18	Falsa porque 75 – 14 no son 340 C: 31	Verdadera porque en las 2 igualdades dan lo mismo	Verdadera porque 122 + 35 – 35 son 122	Falsa porque en las 2 no nos dan lo mismo C: 28

En rojo se comentan las anotaciones aparte de cada alumno para cada sentencia. **N= 25**
"C:" va seguido de la corrección propuesta, si la hay.

Tabla D-5: Respuestas de los alumnos a la actividad escrita de la sesión 4 (Hoja 2)

	75 + 23 = 23 + 75	**7 + 15 = 8 + 15**	**53 + 41 = 54 + 40**	**16 + 14 – 14 = 36**	**257 – 34 = 257 – 30 – 4**
FB	Verdadera porque son iguales y entonces dan lo mismo	Falsa porque siete y quince dan 22 y ocho más quince dan 23 C: 7 15 + 157 = 22 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 8 + 15 = 23 y 7 + 15 = 22)	Falsa porque 53 más 41 dan 98 y 54 más cuarenta dan 94 C: 53 + 41= 41 + 53 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 57 + 41 = 98 y 54 + 40= 94)	(explicó que no la entendía)	Falsa porque 257 menos 30 menos y no dan 222 C: 257 – 34 = 257 – 34 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 222)
FM	Verdadera porque 75 + 23 = 23 + 75 porque es lo mismo solo que cambia el orden	Falsa porque 7 no es = a 8 pero 15=15 si entonces no son los mismos números C: que hacer 7 + 15 = 7 + 15	Falsa porque 53 no es igual a 54 y 41 no da lo mismo que 40 C: que hacer 53 + 41=53 + 41	Falsa porque es como si me pongo vida y la pierdo y me da lo mismo de antes C: 16 + 14 = 30 (calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30)	Verdadera porque es la misma solo han puesto más números para restar
RB	Iguales da lo mismo C: 98 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 = 98)	Falsa porque no da lo mismo C: 22–23	Falsa porque no da lo mismo C: 93 94	Falsa porque no da lo mismo C: 30, 16	Verdadera porque da lo mismo C: 223, 223 (calcula mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 223 y 257 – 30 –4 = 223)
MAG	Verdadera porque los dos números son iguales	Falsa porque no da lo mismo C: en la primera 28 y en la segunda 23	Verdadera porque los dos resultados son lo mismo	Falsa porque no da lo mismo C:16	Verdadera porque da lo mismo
RL	Verdadera porque setenta y cinco es igual a setenta y cinco y veintitrés y veintitrés es igual C: igual	Falsa porque quince más ocho son veintidós y quince más siete son veintidós	Verdadera porque cincuenta y cuatro más cuarenta es igual a noventa y cuatro y cincuenta y tres más cuarenta y uno es igual C: igual (calcula mediante el algoritmo de la suma 54 + 40 = 94 y 53 + 41 = 94)	Falsa porque treinta y seis menos catorce son veintiuno y dieciséis más catorce es igual a treinta (calcula mediante el algoritmo de la resta 36 – 14 = 21 y 16 + 14 = 30)	Verdadera porque doscientos cincuenta y siete es igual a treinta y cuatro y doscientos cincuenta y cuatro es igual a treinta y cuatro C: igual

	75 + 23 = 23 + 75	**7 + 15 = 8 + 15**	**53 + 41 = 54 + 40**	**16 + 14 – 14 = 36**	**257 – 34 = 257 – 30 – 4**
MA	Falsa porque 75 + 23 no es 75 ni 23 C: 9	Falsa porque 7 + 15 = no es 8 ni 15 C: 25	Falsa porque 53 + 41 no es 54 ni 40 C:94	Verdadera porque 16 + 14 – 24 =36 C: 36	Verdadera porque 257 – 34 =257–30–40 C: 4
CA	Verdadera porque 75 + 23 son 98 y 23 + 75 son 98	Falsa porque 7 + 15 son 22 y 8 + 15 son 23 C: 8+15 = 8+15 (calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22)	Verdadera porque 53 + 41 son 94 y 54 + 40 son 94	Falsa porque 16 + 14 son 30 y 30 + 14 son 54 C: 50 + 4 (calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30)	Verdadera porque 275–34 son 223 y 257 – 30 – 4 son 223 (calcula mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 223 y)
CL	Verdadera porque 75 más 23son 98 y 23 más 75 son 98	Falsa porque 7 más 15 son 22 y 8 más 15 son 23 C: 7 + 15=15+7	Verdadera porque 53 más 41 son 94 y 54 más 40 son 94	Falsa porque 16 más 14 menos 14 son 16 y no son 36 C: 16+14+6=36	Verdadera porque 257–34 son 241 y 257 menos 30 menos 4 son 241 (calcula mediante el algoritmo de la resta 275 – 34 = 241)
MT	Verdadera porque son los mismos números que hay en una cuenta y en otra	Falsa porque son un número igual en cada cuenta y los otros dos diferentes C: 7 + 15 = 15 + 7	Verdadera porque 53 + 41 son 94 y 54 más 40 son 94	Falsa porque el que le sumas y el que el restas son iguales da el número al que le hemos sumado o restado C: 16 + 14 – 14 = 16	Verdadera porque 257 menos 34 son 223 y 257 – 30 – 4 son 223
JM	Verdadera porque 75 + 23 es lo mismo que 23 + 75 C: lo mismo	Falsa porque 7 + 15 son 22 y 8 + 15 son 23 C: diferente	Verdadera porque 53 + 41 son 91 y 54 + 40 son 94 C: igual	Falsa porque 16 + 14 son 30 – 14 son 20 C: diferente	Verdadera porque 257 –34 son 223 y 257 – 30 – 4 son 223 C: iguales
DL	Verdadera porque 75 + 23 es 98 y 23 + 75 es 98	Falsa porque 7 + 15 es 22 y 8 + 15 es 23 C: 7 + 15 seria	Falsa porque 53 + 41 es 93 y 54 + 40 es 84 C: 53+ 41 seria	Falsa porque 16 + 14 es 30 y 30 – 14 es 16	
MB	Verdadera porque son los mismos resultados	Falsa porque no da el resultado en los dos C: el 7 lo cambio por un 8	Verdadera porque dan los mismos resultados (escribe 94 bajo cada miembro de la igualdad)	Falsa porque no da el mismo resultado C: sacaría – 14	Falsa porque no da el resultado C: pondría + 4
EF	Verdadera porque son los mismos números solo cambiados de orden	Falsa porque no te sale lo mismo y a parte que siete es más pequeño C: 7 + 15 = 7 + 15 (calcula mediante el algoritmo de la suma 7 + 15 = 22 y 8 + 15 = 23)	Verdadera porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40 te da lo mismo (calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94)	Falsa porque a 16 le sumas 14 y luego se los quitas son 16 no 36 C: 16 + 14 – 14 = 16	Verdadera porque a 30 le sumas 4te da 34 y son los mismos números

	75 + 23 = 23 + 75	**7 + 15 = 8 + 15**	**53 + 41 = 54 + 40**	**16 + 14 – 14 = 36**	**257 – 34 = 257 – 30 – 4**
CH	Verdadera porque 75 + 23 son 98 y 23 + 75 son 98 es como si a los números le hubieran dado la vuelta (calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 = 98)	Falsa porque 7 + 15 son 22 pero 8 + 15 son 23 porque a 7 le han puesto una más C: 7 + 15 = 7 + 15 (calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22)	Verdadera porque 53 + 41 son 94 y 54 + 40 son 94 es como si a los números le pusieran uno y le quitaran. (calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94)	Falsa porque 16 + 14 – 14 son 16 porque le quitamos y le ponemos a los números C: 16 + 14 + 6 = 36 (calcula mediante el algoritmo de la suma 14 + 14 = 28, 28 + 16 = 44 y 16 + 14 = 30)	Verdadera porque a 254 es como si le hubieran quitado y la hubieran puesto a parte.
MR	Verdadera porque da lo mismo	Falsa porque un número está cambiado C: 7 + 15 – 15 + 7	Falsa porque no da bien C: 41=41	Falsa porque ha salido mal C: 16 – 14 = 14 – 16	Falsa (borrado)
JQ	Verdadera porque es igual solo que cambiándole el número de sitio C: 98	Falsa porque 7 + 15 son 22 y 8+15 son 23 C: que poner un ocho	Verdadera porque 53 + 41 son 94 y 54 + 40 son 94 C: 94	Falsa porque 16 + 14 son 30 y menos 14 son 16 no 36 C: que sumar 16 + 18 (calcula mediante el algoritmo de la suma 28 + 16 = 44)	Verdadera porque 257–34 son 223 y 257 –30–4 son 223 C: 223
NM	Verdadera porque es igual solo que aumentándolo el número de sitio C: 98	Falsa porque 7 + 15 son 22 y 8 + 15 son 23	NR	NR	NR
MG	Verdadera porque setenta y cinco más veintitrés dan noventa y nueve y veintitrés más setenta y cinco es el mismo resultado (calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 = 99)	Falsa porque siete y cinco dan diez y ocho más quince dan el resultado	Verdadera porque cincuenta y cuatro más cuarenta dan cincuenta y dos	Falsa porque dieciséis más catorce menos catorce igual treinta y seis	Verdadera porque doscientos cincuenta y siete dan el mismo resultado.

	75 + 23 = 23 + 75	**7 + 15 = 8 + 15**	**53 + 41 = 54 + 40**	**16 + 14 – 14 = 36**	**257 – 34 = 257 – 30 – 4**
MP	Verdadera porque es igual C: es igual (comienza a escribir verticalmente 75 + 23)	Falsa porque es casi igual pero no es igual C: falsa (calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22)	Verdadera porque me da 94 y en la otra 94 o sea que es igual C: iguales (calcula mediante el algoritmo de la suma 54 + 40 = 94 y 53 + 41 = 94)	Falsa porque me da 30 y en la otra 78 C: falsa (calcula mediante el algoritmo de la resta 14 – 36= 78 y 16 + 14 = 30)	Falsa porque me da 23 y en la otra 30 C: falsa (calcula mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 024 y 257 – 30 – 4 = 023)
VS	Falsa porque 75 más 23 da 98 y a 23 no le puedes sumar 75	Falsa porque 7 + 15 da 22 y a 8 no le puedes sumar 15	Verdadera porque 53 + 21 da 92 y 54 + 40 da 94	Falsa porque 16 + 14 da 30 y 30 menos 14 da 26	Verdadera porque 257 menos 34 da 223 y 257 menos 30 menos 4 da 223
CY	Verdadera porque 75 más 23 da 23 más 75 C: los resultados iguales	Verdadera porque 7 más 15 da 18 más 15 C: los resultados iguales	Verdadera porque 53 + 41 da 54 más 40 C: los resultados iguales	Verdadera porque 16 + 14 menos 14 da 36 C: los resultados iguales	Verdadera porque 253–34 da 257 menos 30 mes 4 C: los resultados iguales
EV	Verdadera porque en la primera igualdad da 98 y en la segunda, solo que están al revés	Falsa porque en las 2 igualdades da lo mismo C: 22	Verdadera porque las dos igualdades dan lo	Verdadera porque es correcta	Verdadera porque en las 2 da lo mismo

En rojo se comentan las anotaciones aparte de cada alumno para cada sentencia. **N= 25**

"C:" va seguido de la corrección propuesta, si la hay.

Tabla D-6: Respuestas de los alumnos a la actividad escrita de la sesión 6 (Hoja 1)

	18 – 7 = 7 – 18	**75 – 14 = 340**	**17 – 12 = 16 – 11**	**122 + 35 - 35 = 122**	**6 + 4 + 18 = 10 + 18**
FB	Verdadera porque dieciocho menos siete es lo mismo a siete menos dieciocho	Falsa porque 75 menos 14 es igual a 64 C: 75-14=61 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	Verdadera porque 17 menos 12 es igual a 16 menos 11, da las dos lo mismo. (Calcula mediante el algoritmo de la resta 16 – 11 = 95 y 17 -12 = 95)	Falsa porque 122 más 35 más 35 no da 122. C: 122+35+35= 192 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 + 35 = 192)	Verdadera porque 6 más 4 mas 18 es igual que 10 más 18 porque dan los dos (Calcula mediante el algoritmo de la suma 10 + 18 = 28 y 6 + 4 + 18 = 28)
FM	Falsa porque 7 -18 no se puede restar C: 18-7=18-7	Falsa porque si restamos 75-14 da un número más bajo que 340. C: 75-14=61 (Calcula mediante el algoritmo resta 75 – 14 = 61)	Verdadera porque 17-12=16-11	Verdadera porque 122+35=157 pero si le quita otra vez 35 da lo mismo (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)	Verdadera porque 6+4=10+18=10+18
RB	Verdadera porque lo he restado y me ha salido 11 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 11)	Falsa porque no me da 340 C: 40 + 300 = 340 (Calcula mediante el algoritmo de la resta y de la suma 75 – 14 = 61 y 40 + 300 = 340)	Verdadera porque en las dos me da lo mismo (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque el resultado es el mismo	Verdadera porque es lo mismo solo que han puesto otros números.
MAG	Verdadera porque 18 menos siete es once y siete menos 18 es once (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 11y escribe 7 – 18 en vertical pero no opera)	Falsa porque setenta y cinco menos catorce es seiscientos ochenta y uno C: 14 - 75 = 340 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 681)	Verdadera porque en las dos cuentas da lo mismo y diecisiete menos doce es (Calcula mediante algoritmos)	Verdadera porque en la cuenta da ciento veinte y dos (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157 y mediante el de la resta 157 – 35 = 122)	Verdadera porque en las cuentas da lo mismo seis + 4+18=28 y 10+ 18= 28 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 18 + 6 + 4 = 28)
RL	Verdadera porque siete - 18 da lo mismo que 18-7	Falsa porque 75-14 me da 300 y después le he restado y me ha dado 75 y después he hecho una suma y me ha dado 1050 (Calcula mediante algoritmos 75 – 14 = 300, 300 + 75 = 2050, 75 – 14 = 31 y 31 + 64= 671)	Falsa porque 17-12 =15 y 16-11 me da 5 C: 17-12 es igual que 17-12 (Calcula mediante algoritmos 16 – 11 = 05 , 15 – 12= 053, y 17 – 12 = 075)	Verdadera porque 35-35 =122 35+35 me 122	Verdadera porque 6+4=10+18 =10+18 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 = 10)

	18 – 7 = 7 – 18	**75 – 14 = 340**	**17 – 12 = 16 – 11**	**122 + 35 - 35 = 122**	**6 + 4 + 18 = 10 + 18**
MA	Falsa porque 18-7 no son 7 C: 18-7 es 18	Falsa porque 75 -14 no son 340 C: 75-14 =340	Verdadera porque 17-12 son 15 C: 17-12 son 15 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 16 – 11 = 15)	Falsa porque 122 +35 no son 122 C: 122+35=137 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35= 137)	Verdadera porque 6 +4+18 son 28 no 18 C: 6+4+18= 28 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 = 28)
CA	Verdadera porque el 7 y el 7 son iguales y el 18 y el 18 son iguales	Falsa porque 75 y el 15 no son iguales C: 100+240=340 (Calcula mediante algoritmos 75 – 14 = 61 y 75 + 15 = 90 100 + 240 = 340)	Falsa porque 17-12 no son 16-11 no son 16 C: 10+1 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05)	Verdadera	Verdadera
CL	Falsa porque 18 - 7 son 11 y 7 - 18 son 19 C: 18 – 7 = 18 - 7 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 =11 y 7 – 18 = 19)	Falsa porque 75-14 son 61 y no son 340 C: 354 – 14 = 340 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61 y 354 – 14 = 340)	Verdadera porque 17-12 son 05 y 16-11 son 05 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque 122+35-35 son 122 (Calcula mediante los algoritmos 122 + 35 = 157 y 157 – 35 = 122)	Verdadera porque 6+14+18 son 28 y 10 + 18 son 28 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 18 + 6 + 4 = 28 y 10 + 18 = 28)
MT	Falsa porque a siete no se le puede restar dieciocho C: 18-7 =18-7	Falsa porque si a 75 le restas 14 no puede dar más que 75 C: 75+265 =340 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 340 – 75 = 265)	Verdadera porque si a 17 le restas 12 da 5 y si a 16 le restas 11 da 5	Verdadera porque si a 122 le sumas 35 y luego le restas 35 da 122	Verdadera porque 6 más 4 son igual a 10 más 18 es igual a 10 más 18.
JM	Verdadera porque dieciocho menos siete y siete menos dieciocho es lo mismo	Falsa porque 75-14 no puede dar 340 C: 340-75=14	Verdadera porque 17-12 es =5 y 16-11 es igual a 5	Verdadera porque 122+35-35 es igual a 122	Verdadera porque 6+ 4 es igual a 10 +18 que 10 +18
DL	Falsa porque no se puede restar 7-18 C: 18-7	Falsa porque 75-14 es 60 y no 340 C: 240+100=340 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 74 – 14 = 60 y de la suma 75 + 14 = 89)	Verdadera porque 17-12 es 5 y 16-11 es 5 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque 122+35 es 157 y -35 te da 122 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)	Verdadera porque 6+4 son 10+18 son 28 es igual que 10+18 que son 28

	18 – 7 = 7 – 18	75 – 14 = 340	17 – 12 = 16 – 11	122 + 35 - 35 = 122	6 + 4 + 18 = 10 + 18
MB	Verdadera porque los dos números dan el mismo resultado aunque se cambien los números	Falsa porque 75-18=61 pero 74-14=340 no es verdadero C: 75-14=61	Verdadera porque 17-12 =05 y 16-11=05 y no hay dificultad.	Verdadera porque 122+35-35 =122 y no hay ningún problema	Verdadera porque los números son diferentes pero el resultado es igual.
EF	Falsa porque a 7 no le puedes quitar 18 C: 18-7=18-7	Falsa porque si hace una resta el resultado no te puede dar mayor C: 75-14=61	Verdadera porque te da lo mismo en las dos restas (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque si a 122 le sumas 3 y luego se la quitas te da 122	Verdadera porque sumando 6+4 te da 10 y es lo mismo que pone en el otro lado.
CH	Falsa porque en la resta no se puede restar cambiando el orden. C: 18-7 =18-7	Falsa porque a 75 se le resta un número menor y el resultado no puede salir mas grande C: 75-14=61 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	Verdadera porque a 17 le restamos 12 y nos da 5 y a un número menor que el diecisiete le restamos un número menor que el 12 nos da lo mismo (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque si a 122 le sumamos 35 y luego lo quitamos nos da el mismo resultado	Verdadera porque 6+4 es 10 más 18 son veintiocho y en la otra resultado es 10+18 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 18 + 14 = 32)
MR	Falsa porque no se puede restar con el menor y debajo el mayor C:18-7 = 11 (Calcula mediante el algoritmo 18 – 7 =11)	Falsa porque 75-14 no son 340 C: 75-14=61 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	Verdadera porque da lo mismo C: 17 – 12 = 17 – 12 borrado (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque da lo mismo	Verdadera porque da lo mismo (Calcula mediante el algoritmo de la suma 10 + 18 = 28 y 18 + 6 = 24)
JQ	Falsa porque a siete no se le puede restar dieciocho C: 18-7	Falsa porque setenta y cinco menos catorce no son trescientos cuarenta C: 75-14=61	Verdadera porque diecisiete menos doce son 5 y dieciséis menos once son 5	Verdadera porque ciento veintidós mas treinta y cinco son 175 y le restas treinta y cinco son 122	Verdadera porque seis más cuatro más dieciocho son 28 y diez más dieciocho son 28
NM	Falsa porque me da 41 C: 14-8=26-15 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 41 y 14 – 8 = 26 y 26 – 15 = 11)	Falsa porque me da 81 C:74-10=64 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 81 y 74 – 10 = 64)	Falsa porque me da 05 C: 11-05=16 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 11 – 05 = 16 y 17 – 12 = 05)	Verdadera porque me da (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157 y 157 – 35 = 122)	Falsa porque me da 31 C:7+5+11=831 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 18 + 6 + 7 = 31 y 71 + 7 + 5 = 83)
JA	NR	NR	NR	NR	NR

	18 – 7 = 7 – 18	**75 – 14 = 340**	**17 – 12 = 16 – 11**	**122 + 35 - 35 = 122**	**6 + 4 + 18 = 10 + 18**
MG	Falsa porque dieciocho menos siete y siete dan cero C: dieciocho menos siete dan once (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 11 y 18 – 7 – 7 – 18 = 00)	Falsa porque setenta y cinco menos catorce da sesenta y uno C: dan sesenta y uno (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	Verdadera porque diecisiete menos doce igual dieciséis menos once dan cinco (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 - 16 – 11 = 05)	Verdadera porque ciento veintidós más treinta y cinco menos treinta y cinco dan 210 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 – 35 = 210)	Verdadera porque seis más cuatro mas dieciocho igual más dieciocho dan treinta y cuatro (Calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 + 18 + 10 + 18 = 34)
BR	Falsa porque no da el mismo resultado C: 19-20=99 (Calcula mediante algoritmo resta 18 – 7 = 11, 7 – 18 = 19 y 19 – 20 = 99)	Falsa porque he sumado y no da 340 C: 75+14=89 (Calcula mediante algoritmos resta y suma 75 – 14 = 81, 75 + 24 = 89)	Verdadera porque he restado 17 y 12 y después he restado 16 -11	Verdadera porque he sumado 122+35 y después el resultado que me de he restado 122-157 (Calcula mediante algoritmos suma y resta 122 + 35 = 157 y 157 – 35 = 122)	Falsa porque he sumado 6 +4 y el resultado lo he sumado con 10 +18 C:4+6=10 (Calcula mediante algoritmo suma 6 + 4 + 18 = 118, 118 + 10 + 18 = 146 y 4 + 6 = 10)
MP	Verdadera porque son iguales (Calcula mediante algoritmo resta 18 – 7 = 11 y 7 – 18 = 20)	Falsa porque no es correcta está mal C: 75-14=61 (Calcula mediante algoritmo resta 75 – 14 = 61)	Verdadera porque son iguales las dos dan lo mismo (Calcula mediante algoritmo resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque no hay equivocación (Calcula mediante algoritmo vertical 122 + 35 – 35 = 122)	Falsa porque no da lo mismo C: 6+4+18=118 (Calcula mediante algoritmo suma 6 + 4 + 18 = 118, 18 + 6 + 4 = 118, 18 + 10 = 28, 10 + 18 = 28)
VS	Verdadera porque da el mismo resultado (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 01 y 7 – 18 = 09)	Falsa porque no da el mismo resultado C:980-340=640 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 14 + 340 = 429 y con el de la resta 980 – 340 =540 y 14 – 75 =30)	Verdadera porque da el mismo resultado (Calcula mediante el algoritmo resta 16 – 11 = 05)	Falsa porque no da el mismo resultado C: 122+35-35 =192 (Calcula mediante algoritmos de suma y resta 122 + 35 = 157 y 157 – 35 = 192)	Verdadera porque da el mismo resultado (hay cuentas borradas)
CY	Verdadera porque 18-7 es = 7-18 y te da el mismo resultado	Falsa porque 75-14 no es 340 es 61 C: 75-14=61 y ahí pone 340 (Calcula mediante el algoritmo 75 – 14 = 61)	Falsa porque 17-12 no es igual a 16-11 sería 11-16 y después 16-11 C: 17-12 y después 12-17	Verdadera porque 122+35 =157 y luego 157-35 da 122 (Calcula mediante el algoritmo vertical 122 + 35 = 157 y 157 + 35 = 122)	Falsa porque sería 6+4 y luego 4+6 C: 6+4=4+6 y ahí pone 10+18

	18 – 7 = 7 – 18	75 – 14 = 340	17 – 12 = 16 – 11	122 + 35 - 35 = 122	6 + 4 + 18 = 10 + 18
BI	Falsa porque yo he hecho la cuenta y no me ha salido lo mismo (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 11 y 11 – 18 = 03)	Falsa porque no me sale igual, el mismo resultado (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	Verdadera porque yo he hecho la cuenta, he hecho 17-12=05 y he hecho 16-11 =05 por eso es verdadera (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Verdadera porque he sumado 122+35=157 (Calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)	Verdadera porque me ha salido igual el resultado (Calcula mediante el algoritmo de la suma 6 + 4 = 10 19 + 18 = 28, 10 + 18 = 28)
RT	Incorrecta porque en la resta los números mayores se ponen primero y una resta solo puede tener dos restantes C: 18-7=11 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 11)	Incorrecta porque el resultado no es correcto C: 75-14=61 (Calcula mediante el algoritmo de la resta 75 – 14 = 61)	Correcto porque las dos restas dan lo mismo (Calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 = 05)	Correcta porque 122 más 35 me da 157 y restarlo con 35 y me da 122 que es el principiante de la prueba que es lo que me tiene que salir. (Calcula mediante el algoritmo vertical 122 + 35 = 157 y 157 – 35 = 122)	Correcta porque las dos sumas dan lo mismo que es lo que tiene que pasar.

En rojo se comentan las anotaciones aparte de cada alumno para cada sentencia. **N= 25**

"C:" va seguido de la corrección propuesta, si la hay.

NR= No responde

Tabla D-7: Respuestas de los alumnos a la actividad escrita de la sesión 6 (Hoja 2)

	75 + 23 = 23 + 75	**7 + 15 = 8 + 15**	**53 + 41 = 54 + 40**	**16 + 14 - 14 = 36**	**257 - 34 = 257 – 30 – 4**
FB	Verdadero porque da lo mismo	Verdadero porque la cuenta es la misma y da lo mismo	Verdadero porque da lo mismo Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 54 + 40 = 94 y 53 + 44 = 94	Falsa porque 16 más 14 menos 14 da 56 C:16+14-14=56 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 60 y 60 – 14 = 56	Verdadero porque da lo mismo resultado.
FM	Verdadera porque 75 + 23 = 23 + 75	Falsa porque 7 + 15 no es = 8+15 C: 7+15 =15+7	Verdadera porque 53 + 41=54 + 40 es lo mismo sólo quitando un número a uno y sumando al otro Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94	Falsa porque 16+14 dan 30 y como le restan 14 no puede dar 36 C: 16 + 14 + 6 = 36 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30 y 30 – 14 = 16	Verdadera porque 257-34=257-30 – 4 le quitan el 4 y lo dejan suelto
RB	Verdadera porque da lo mismo solo están en otro orden	Falsa porque no da lo mismo C: 17+15=15+7 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 7 + 15 = 22 y 8 + 15 = 13	Verdadera porque da lo mismo solo con lo mismo Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94	Falsa porque no da lo mismo C: 30+6= 36 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30, 30 – 14 = 26 y 30 + 6 = 36.	Verdadera porque da lo mismo Aparte calcula mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 223
MAG	Verdadera porque en las dos da noventa y ocho	Falsa porque en una da veintidós y en otra veintitrés C: 7+15=15+7 Escribe aparte, en horizontal, 7 + 15 = 22 y 8 + 15 = 23	Verdadera porque en las dos da noventa y cuatro Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94	Falsa porque da doscientos seis C: 16+14+6=36 Aparte calcula mediante los algoritmos 16 + 14 = 30 y 30 – 14= 06 y 06 + 20 = 206	Verdadera porque en las dos da igual.
RL	Verdadera porque 75+23 =23+75 me da lo mismo	Falsa porque 7+15 = me da 92 y 8 +15 me da 23 C: 7+15= 7+15=92 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 92 y 8 + 15 = 23	Falsa porque 53+41 no me da lo mismo que 54+40 C: 54+41 =54+41=	Falsa porque 16 +14 -14 = 36 no me da lo mismo C: 14+16=14+16	Falsa porque 257 – 34 = 257 -30 -4 no me da lo mismo C: 257-34 =257=34

	75 + 23 = 23 + 75	7 + 15 = 8 + 15	53 + 41 = 54 + 40	16 + 14 - 14 = 36	257 - 34 = 257 – 30 – 4
MA	Falsa porque 75+23 no son 75 C: 75+23=98 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 = 98	Verdadera porque 7+18 son 15 C: 7 + 15 = 8 + 15 =18	Falsa porque 53 + 41 no son 40 C: 53+41 =49	Falsa porque 16+14 no son 36 C: 16+14-14=36 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30	Verdadera porque 257-34 son 4 C: 257-30= 4
CA	Verdadera porque 77 + 23 es igual que 23 + 75	Falsa porque 7+15 no es = a 8+15 C: 7+15=15+7	Falsa porque 53 + 41 no es igual a 54 + 40 C: 40+54=54+40	Falsa porque 16 +14 = es igual a 30-14 son 24 C: 30+6 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30 y 30 – 14 = 24	Verdadera porque 257-34 =257-30-4
CL	Verdadera porque 75+23 son 91 y 23 + 75 son 28 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 = 28 y 23 + 75 = 98	Falsa porque 7+15 son 22 y 8 +15 son 23 C: 7+15 =8+16 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 7 + 15 = 22 y 8 + 15 = 23	Verdadera porque 53+41 son 94 y 54 +40 son 94 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94	Falsa porque 16 +14-14 son 16 no son 36 C: 16+14-14 =16 Aparte calcula mediante los algoritmo 16 + 14 = 30, 30 – 14 = 16 y 16 + 14 = 30 y 30 – 05 = 5	Verdadera porque 257 -34 son 223 es igual 257-30-4 son 223 Aparte calcula mediante el algoritmo de la resta 257 – 30 = 227, 227 – 4 = 223 y 257 – 34 = 223
MT	Verdadera porque son los mismos números y nada más han cambiado una posición	Falsa porque 7 +15 son igual a 22 y 8 + 15 es igual a 23 C: 7 +15= 8+14 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22	Verdadera porque 53 más 41 son 94 y 54 más 40 son 94 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94	Falsa porque 16 más 14 son 30 y 30 menos catorce son 16 no son 36 C: 16+14-14=16 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 16 + 14 = 30	Verdadera porque 257 más 34 es igual a 223 y 257 + 30 -4 es igual a 223 Aparte calcula mediante el algoritmo de la resta 257 -34 = 223 y 257 – 30 – 4 = 223
JM	Verdadera porque 75+23 es igual que 23+75	Falsa porque 7+15 es menor que 8+15 C: 8+15=15+8	Falsa porque 53+41 es mayor que 54 + 40 C: 54 + 40 = 40 + 54	Falsa porque 16+14-14 no puede dar 36 C: 14+22 =22+14 Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma y borra 16 + 14 + 14 = 44 y 36 – 14 = 22	Verdadera porque 257 -34 es igual a 257-30-4
DL	Verdadera porque 75+23 es igual que 23+75	Falsa porque 7+15 es 22 y 8 +15 es 23 C: 15+7	Verdadera porque 53+41 es lo mismo que 54+40	Falsa porque 16+14-14 son 16 y no 36 C: 16+14+6=36	Verdadera porque si sumas 30+4 te da 34 y es igual que 257-34

	75 + 23 = 23 + 75	7 + 15 = 8 + 15	53 + 41 = 54 + 40	16 + 14 - 14 = 36	257 - 34 = 257 – 30 – 4
MB	Verdadera porque 75+23=98 y 23+75 =98 son iguales	Falsa porque no dan el mismo resultado C: 7+15=12	Verdadera porque 53+41 =94 y 54+40 =94 y es igual	Falsa porque el resultado no es igual	Falsa porque no da el mismo resultado.
EF	Verdadera porque te da el mismo resultado	Falsa porque no te da el mismo resultado C: 7+15 =7+15	Verdadera porque te da lo mismo solo que en la segunda suma 41 le quitan el 1 y se lo ponen al 53	Falsa porque a 16 le suma 14 y luego se lo quitan no te puede dar 36 C: 16+14-14=16	Falsa porque en vez de restarle 34 le restan 30 y el cuatro va aparte C: 257-34=257-34 Calcula aparte mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 1223, 257 – 30 = 227 y 227 – 4 = 223
CH	Verdadera porque en la suma no importa cambiar el orden.	Falsa porque 7+15 es 22 y 8+15 son 23 C: 7+15=7+15	Verdadera porque 53+21 le pones en el 3 un 1 y te da 54 y a cuarenta le quitas 1 y te quedan 41	Falsa porque a 16 le sumas 14 y se las quitas no te puede dar 36 C: 16+14-14=16	Verdadera porque en 257-30-4 si al treinta le pones el 4 te da treinta y cuatro.
MR	Verdadera porque tanto la una como la otra da el mismo resultado	Falsa porque una da más que la otra. C: 7+15=7+15	Verdadera porque el resultado es el mismo Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94	Falsa porque no sale lo que pone ahí Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 14 + 14 = 28, 16 + 14 = 30 y 30 – 14 = 16	Verdadera porque da lo mismo Calcula aparte mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 223
JQ	Verdadera porque 75 más 23 son 98 y 23 más 75 son 98	Falsa porque 7 más 15 son 22 y 8 más 15 son 23	Verdadera porque 53 más 41 son 94 y 54 más 40 son 94	Falsa porque 16 más 14 son 30 menos 14 son 16	Verdadera porque 257 menos 34 son 223 y257 – 30 son 220 (borra la explicación)
MG	Verdadera porque setenta y cinco más 23 igual veintitrés mas setenta y cinco dan ciento noventa y uno Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 75 + 23 + 23 + 75 = 191	Verdadera porque siete mas quince igual ocho mas quince dan treinta Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 + 8 + 15 = 30	Falsa porque cincuenta y tres mas cuarenta y uno igual cincuenta y cuatro mas cuarenta dan setenta y ocho C: dan setenta y ocho Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 53 + 41 + 54 + 40 = 78	Verdadera porque dieciséis mas catorce menos catorce dan veintiuno Calcula aparte mediante algoritmos verticales (ver hoja) y obtiene como resultado 21	Falsa porque dan veintiuno Calcula aparte mediante algoritmos verticales (ver hoja) y obtiene como resultado 44

	75 + 23 = 23 + 75	7 + 15 = 8 + 15	53 + 41 = 54 + 40	16 + 14 - 14 = 36	257 - 34 = 257 – 30 – 4
MP	Verdadera porque da lo mismo Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 75 + 23= 98 y 23 + 75 = 98	Falsa porque no da eso C: 7+15=22 Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22 y 15 + 8 = 23	Verdadera porque da lo mismo las dos cuentas Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 53 + 41= 94 y 54 + 40 = 94	Falsa porque no da eso C: 16+14-14=16 Calcula aparte mediante el algoritmo vertical 16 + 14 – 14 = 16	Verdadera porque son iguales Calcula aparte mediante el algoritmo de la resta 257 – 34 = 223 y 257 – 30 – 4 = 223
VS	Verdadera porque da el mismo resultado Calcula aparte mediante algoritmo suma 75 + 23 = 98 y 23 + 75 = 98	Falsa porque no da el mismo resultado C: 7+15=22 7+15=22 Calcula aparte mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22 y 15 + 8 = 23	Verdadera porque da el mismo resultado Calcula aparte mediante algoritmo suma 53 + 41 = 94 y 54 + 40 = 94	Falsa porque no da el mismo resultado C: 16+14-14=16 Calcula aparte mediante el algoritmo suma 16 + 14 = 30 y 30 – 14 = 16	Falsa porque no da el mismo resultado C: 257-34=223 Calcula aparte mediante algoritmo resta 257 – 34 = 223
CY	Verdadera porque 75 + 23 = 23 + 75	Falsa porque 7+15 =15+7 C: porque 7+15 sería igual a 15+7	Falsa porque 53+41 =40+53 C: porque 53+41 sería igual a 41+53	Falsa porque 16+14 da 30 y 30-14 da 16 C: porque 16+14 sería igual a 14+16 Calcula aparte mediante el algoritmo vertical 16 + 14 = 30 y 30 – 14 = 16	Falsa porque 257-34 no es igual a 257-30-4 C: porque 257-34=257-30-4 y han puesto un 30

En rojo se comentan las anotaciones aparte de cada alumno para cada sentencia. **N= 25**
"C:" va seguido de la corrección propuesta, si la hay.

Anexo E:

Tablas del análisis de los datos

Tabla E-1: Clasificación de los comportamientos de los alumnos en la sesión 3 para determinar su perfil de comportamiento

Tipos de comportamientos			Alumnos								
No clasificable			**NM, MA, BI, BR**								
Operacional (ninguna evidencia de PR)			**RB**	**RL**	**RT**	**MP**					
PR básico: aplicación directa de una ley o hecho numérico			**CA**	**EV**	**VS**	**CY**					
	Cero neutro		X								
	a –a = 0			X	¿X[94]?	X					
PR sólo en situaciones de mismidad			**MB**								
	Conmutativas										
	No conmutativas		X								
PR basado en			**FM**	**CH**	**EF**	**JQ**	**DL**	**JM**	**CL**	**MR**	**FB**
	Restricción dominio de definición		X								
	Cero neutro		X								
	a –a =0		X						X	X	
	mismidad	Conmutativas			X	X					
		No conmutativas									
	Mismidad y hechos numéricos		X	¿X?	X			¿X^2?	X		
	Mismidad y efecto operación		X	X			¿X?			¿X^2?	¿X[95]?
	Magnitud y efecto operaciones		X	X		X		X			
	Relaciones numéricas y mismidad ó relaciones numéricas y efecto de las operaciones		X	X			X				

Tabla E-2: Identificación de los perfiles de comportamiento manifestados por los alumnos en la sesión 3

S3	**No-PR**		**Simple-PR**		**Mismidad-PR**		**PR-puntual**		**PR-variado**		**PR-máximo**	
N=22	[4,6]		[3,5]		[1,1]		[1,5]		[4,6]		[0,0]	
(4)	RB, RL, RT, MP	VS, FB	CA, EV, CY	VS, MR	MB		CL	JM ,MR ,FB, DL	FM, CH, EF, JQ	DL, JM		

Tabla E-3: Clasificación de los comportamientos de los alumnos en la sesión 4 para determinar su perfil de comportamiento

94 No está claro si la alumna está repitiendo la explicación dada por uno de sus compañeros o realmente ha apreciado en la sentencia una particularización de la propiedad $a - a = 0$.

95 No se sabe si el alumno reconoce realmente la relación que expresa o sólo repite la explicación previa de otro compañero.

Tipos de comportamientos			**Alumnos**											
No clasificable			**CY**	**MG**	**JA**									
Operacional (ninguna evidencia de PR)			**BR**	**BI**	**RB**									
PR básico: aplicación directa de una ley o hecho numérico (dominio)			**VS**											
PR sólo en situaciones de mismidad			**NM**	**MAG**	**CL**	**EV**	**MP**	**MB**						
	Conmutativas		X	X	X	X	X							
	No conmutativas						X	X						
PR basado en			**FM**	**MT**	**JM**	**DL**	**EF**	**CH**	**JQ**	**CA**	**MR**	**FB**	**MA**	**RL**
	Dominio		X	X		X	X	X	X					
	mismidad	Conmutativas	X	X	¿X?		X	X	X		¿X?	X		X
		No conmutativas	X	X							X			X
	Mismidad y hechos numéricos (c/d)		X		X		X	X		¿X?			¿X?	¿X?
	Mismidad y efecto operación (+/-)		X	X		X	X	X						
	Magnitud y efecto operaciones (Mg)		¿X?	X	X		X	X			¿X?			
	Relaciones numéricas y mismidad (Cp)				¿X?		X	X						

Tabla E-4: Identificación de los perfiles de comportamiento manifestados por los alumnos en la sesión 4

	No-PR		**Simple-PR**		**Mismidad-PR**		**PR-puntual**		**PR-variado**		**PR-máximo**	
S4	[3,5]		[1,1]		[8,10]		[1,3]		[3,5]		[2,2]	
N=25 (3)	BR, BI, RB	CA, MA	VS		NM, MAG, CL, EV, MP, MB, JQ, FB	RL, MR	DL	CA, MA	FM, MT, JM	MR,RL	EF, CH	

Tabla E-5: Clasificación de los comportamientos de los alumnos en la sesión 6 para determinar su perfil de comportamiento

Tipos de comportamientos			**Alumnos**													
No clasificable			**JA, EV**													
Operacional (ninguna evidencia de PR)			**MAG**	**CL**	**NM**	**MG**	**BR**	**BI**	**VS**							
PR básico: aplicación directa de una ley o hecho numérico (dominio)			**JQ**	**RT**												
PR sólo en situaciones de mismidad			**CY**													
	Conmutativas		X													
	No conmutativas		X													
PR basado en			**FM**	**RL**	**MT**	**JM**	**DL**	**EF**	**CH**	**RB**	**MA**	**MB**	**MR**	**CA**	**MP**	**FB**
	Dominio		X		X		X	X	X				X			
	mismidad	Conmutativas	¿X?	¿X?	X	¿X?	¿X?	¿X?	X	X		¿X?		X	¿X?	¿X?
		No conmutativas	X	X										X		¿X?
	Mismidad y hechos numéricos		X	X	X	X	X	X	X	¿X?			¿X?	¿X?		
	Mismidad y efecto operación		X		¿X?			X	X							
	Magnitud y efecto operaciones		¿X?		X	X		X	X		¿X?		¿X?			
	Relaciones numéricas y mismidad		X					X	X							

Tabla E-6: Identificación de los perfiles de comportamiento manifestados por los alumnos en la sesión 6

	No-PR		**Simple-PR**		**Mismidad-PR**		**PR-puntual**		**PR-variado**		**PR-máximo**	
S6	[7,11]		[2,4]		[1,5]		[0,1]		[3,9]		[1,3]	
N=24 (0)	MAG, CL, NM, MG, BR, BI, VS	MA, MB, MP, FB	JQ, RT	MR, MA	CY	RB, MB, CA, MP, FB		DL	RL, MT, JM,	FM, DL, EF, RB, MR, CA	CH	FM, EF

Anexo F:

Análisis, por sesión, de la comprensión del signo igual

Análisis de la comprensión del signo igual y las dificultades encontradas en cada sesión

En este apartado se recoge el análisis de la comprensión del signo igual de los alumnos, considerando cada intervención en el aula de forma independiente y utilizándose los criterios presentados en el capítulo 9 (Parte II). Además, se detallan los casos en los que los alumnos manifiestan el significado del signo igual *similitud numérica* y se describen las dificultades que encuentran en la resolución de las diferentes tareas[96].

F.1 Sesión 1. Comprensión y dificultades iniciales

Durante esta primera sesión, los alumnos (N=26) resuelven de manera individual una actividad escrita, de lápiz y papel, compuesta por una colección de seis igualdades abiertas (Ver hoja del alumno en Anexo B y descripción del diseño de la tarea en el capítulo 8). Posteriormente, de forma voluntaria, explican sus respuestas en una discusión con todo el grupo.

Las respuestas a la actividad escrita de esta sesión (ver anexo D) permiten observar que 19 de los 26 alumnos resuelven correctamente la mayoría[97] de las igualdades consideradas, mostrando de esta forma una comprensión avanzada del signo igual. Estos 19 alumnos muestran reconocer que tienen que considerar todos los términos de la igualdad, a diferencia de los alumnos de otros estudios. Ninguno de estos alumnos muestra dificultades en la resolución de la igualdad de acción $\square = 25 - 12$, debidas a su forma menos convencional.

Otra alumna, MP, da muestras de una comprensión avanzada del signo igual en la mayoría de las igualdades. Concretamente utiliza el significado *equivalencia numérica* en tres igualdades de no-acción y da muestras del uso de un significado operacional del signo igual en la igualdad $12 + 7 = 7 + \square$. Esta alumna no resuelve ninguna de las igualdades de resta lo cual puede ser debido a un menor domino de esta operación.

[96] Se recuerda que, como se ha detallado en el capítulo 9, aunque aquí los ejemplos se porpongan de forma aislada, las respuestas de los alumnos han sido interpretadas teniendose en cuenta la totalidad de respuestas de la sesion de cada alumno.

[97] A lo sumo no utilizan el significado del signo igual *equivalencia numérica* en una de las igualdades de no-acción consideradas.

Por otra parte, JA muestra el significado *equivalencia numérica* en al menos tres igualdades siendo dudoso el origen de sus otras respuestas (14 en $12 + 7 = 7 + \square$; 15 en $13 – 7 = \square – 6$; 6 en $\square + 4 = 5 + 7$), las cuales pueden ser debidas a errores de cálculo. En este caso no se puede precisar si su comprensión del signo igual es realmente avanzada (ver apartado 9.11).

Los otros cinco alumnos (BR, MG, RT, CA y CY) muestran menor fluidez en el cálculo, detectándose errores de cálculo en algunas de sus respuestas. Sólo dos de ellos (CY y CA) responden correctamente a alguna de las igualdades de no–acción.

RT y MG muestran una comprensión operacional del signo igual al poner de manifiesto el uso del significado del signo igual *expresión de una acción*, dando respuestas resultado de operar juntos todos los términos o de ignorar uno de los términos de la igualdad y resolver una igualdad de tres términos (en unos casos de la forma $c = a \pm b$ y en otros de la forma $a \pm b = c$). Por ejemplo, MG da 17 como respuesta a la igualdad $14 + \square = 13 + 4$, resultado de operar el miembro derecho de la igualdad, y 11 a la igualdad $8 + 4 = \square + 5$, resultado de operar el miembro izquierdo, salvo un error de cálculo.

Otros dos alumnos (CA y BR) muestran una comprensión no estable del signo igual. CA muestra el significado del signo igual *expresión de una acción* en al menos dos igualdades (dando como respuesta 17 a las igualdades $8 + 4 = \square + 5$ y $14+ \square=13+4$) y el significado *equivalencia numérica* en al menos una igualdad (dando como respuesta 12 en $13 – 7 = \square – 6$). Sus otras respuestas a igualdades de no–acción parecen ser debidas a posibles errores de cálculo utilizando el significado del signo igual *equivalencia numérica* (10 en las igualdades $12 + 7 = 7 + \square$ y $\square + 4 = 5 + 7$).

En el caso de BR, se identifica el uso del significado *equivalencia numérica* en cuatro de las igualdades y el uso del significado *operador* en la igualdad $12+7=7+ \square$ en la cual opera conjuntamente todos los términos. Además, esta alumna da como respuesta 0 a la igualdad $13 – 7 = \square - 6$. El origen de este resultado se discute más adelante.

En el caso de CY no es posible identificar su comprensión del signo igual. Es un caso dudoso ya que resuelve una igualdad de no–acción correctamente ($14 + \square = 13 + 4$) y da muestras del significado del signo igual *expresión de una acción* en otra igualdad (dando como respuesta 12 a la igualdad 8 + 4 = □ + 5), pero en las tres últimas igualdades de no–acción da respuestas que parece haber copiado de su compañero JA (Ver en la Tabla F-7 el resumen de la comprensión puesta de manifiesto por cada alumno).

Tabla F-7: Relación entre aspectos sintácticos y semánticas de la actuación de los alumnos en la resolución de las igualdades abiertas de la sesión 1. **N= 26.**

Comprensión del SI	**Significado del signo igual**			**Altera disposición**				**Ignora algún término**	
				Miembro		**Totalidad**			
Avanzada	E	20 + ¿1[1]?		1 + ¿3[2]?	DL	1	MP	2	RB, NM
No estable	A/E	1	CA			1	CA	1	CA
	O/E	1	BR						
Operacional	A	2	RT, MG			1	MG	2	RT, MG
	O								
No se puede precisar		1	CY					1	CY

En cada caso la primera columna indica el número de alumnos y la segunda las siglas que identifican a dichos alumnos. En el caso de la comprensión avanzada no se indican las siglas para favorecer la brevedad de la tabla.
[1] Estos dos alumnos son JA y MP cuyas respuestas han sido comentadas previamente.
[2] Estos son los tres alumnos que, junto a DL, responden 0 en la igualdad 13 – 7 = □ – 6.

Dificultades

Sin considerar los errores de cálculo[98], las dificultades que manifiestan los alumnos que muestran una comprensión avanzada del signo igual se refieren a un uso puntual del significado *operador* del signo igual en alguna de las igualdades de no-acción[99] y a dificultades en la igualdad de resta 13 – 7 = □ – 6.

El uso puntual del significado *operador* del signo igual, por parte de tres de estos alumnos (RB, MP y NM), nos conduce a conjeturar que, aun cuando los alumnos han desarrollado el significado del signo igual *equivalencia numérica*, si éste no ha sido consolidado, vuelven a hacer uso de una interpretación operacional de este signo al intentar resolver sentencias en las que encuentran cierta dificultad, llegando a ignorar alguno de los términos de la igualdad. Dos de estos alumnos responden 6 en la igualdad 13 – 7 = □ – 6, operando el miembro izquierdo e ignorando el 6 que

[98] Se identifican como posibles errores de cálculo aquellas respuestas que difieren de la respuesta correcta en menos de dos unidades y no son susceptibles de pertenecer a otra categoría de respuesta (respuesta correcta, problema resta, operar juntos todos los términos de la sentencia, combinar dos términos, o ignorar uno de los términos de la sentencia y resolver la sentencia resultante).
[99] En el apartado 9.10 se ha detallado el modo en que se manifiesta el uso del significado operador en igualdades de no-acción.

aparece en el miembro derecho de la igualdad. La otra alumna opera conjuntamente todos los términos de la igualdad 12 + 7 = 7 + □.

En la igualdad de no–acción de resta, 13 – 7 = □ – 6, cuatro de estos alumnos (FB, DL, CL y MR) dan como respuesta cero. Dicha respuesta puede tener tres orígenes diferentes: (a) puede ser resultado de operar conjuntamente todos los términos ($13-7-6=0$), en cuyo caso es debida a un uso puntual del significado *operador* del signo igual; (b) puede proceder de la suposición de que la operación 0 – 6 tiene sentido en el conjunto de los números naturales y su resultado es 6, y (c) puede deberse a una alteración del orden de los términos que componen el miembro derecho de la igualdad (considerar la igualdad como 13 – 7 = 6 – □, en vez de 13 – 7 = □ – 6), lo que equivale a la lectura del miembro derecho de derecha a izquierda en vez de izquierda a derecha. Este último caso se muestra en la intervención de DL recogida en el siguiente extracto de la discusión con toda la clase:

> **I:** *¿Qué pondríamos ahí?*
> **JM***: Doce*
> **I:** *Doce ¿Por qué?*
> **JM:** *Porque… trece menos siete son seis, y doce menos seis dan seis.*
> **I:** *Muy bien ¿Alguien lo ha hecho de otra forma o…? A ver tú.*
> **DL:** *Yo he puesto cero*
> **I:** *¿Tú has puesto cero? ¿Por qué?*
> **DL:** *Porque doce son seis, doce menos siete son seis y seis menos cero son seis.*

Dos alumnas (EV y MP) no dan respuesta a las dos igualdades de resta. Inicialmente responden 0 en la igualdad 13 – 7 = □ – 6 y posteriormente borran su respuesta. Considerando sus otras respuestas, y teniendo en cuenta nuestra observación de su resolución de la igualdad, conjeturamos que estas dificultades son consecuencia de un menor dominio de la operación resta.

Aspectos sintácticos

En el caso de los alumnos que dan la respuesta 0 a la igualdad 13 – 7 = □ – 6, con la excepción de DL que explica su respuesta durante la discusión, no se puede precisar la procedencia exacta de su respuesta. Habrán alterado la totalidad de la igualdad si han operado conjuntamente todos los términos y habrán alterado únicamente el miembro derecho si procedieron de forma similar a como hace DL.

Tres alumnos (CA, MG y MP) (ver Tabla F-7) alteran la disposición de la totalidad de la igualdad al operar conjuntamente todos los términos de una de las igualdades haciendo uso del significado del signo igual *operador*.

De los alumnos que muestran una comprensión avanzada del signo igual, dos de los tres que manifiestan puntualmente una comprensión operacional del signo igual (RB, y NM) ignoran alguno de los términos al dar respuesta a las igualdades. Otros cuatro alumnos (MG, RT, CA y CY) ignoran uno de los términos, de las distintas posiciones dentro de la igualdad, al aplicar un significado operacional del signo igual.

Resultados de la discusión con toda la clase.

La posterior discusión no aporta información adicional relativa a la comprensión de las igualdades. Los alumnos que intervienen son todos pertenecientes al grupo de los alumnos que muestran en la actividad escrita una comprensión avanzada del signo igual.

En las ocasiones en las que intervienen verbalmente los alumnos, explicitan una común interpretación de las igualdades como expresiones en las que ambos miembros han de dar el mismo resultado. Tienden a proceder de forma semejante, operando primero el miembro completo y hallando, posteriormente, la cantidad que permite completar la igualdad de tres términos obtenida.

Se detecta la dificultad, por parte de los alumnos, de recordar la respuesta calculada previamente durante el periodo de trabajo individual, debido a que no tienen sus hojas de trabajo delante. Esto condiciona la participación de los alumnos y puede ser la causa de que dos alumnas no expliquen su respuesta, ya que se esfuerzan por recordar la respuesta dada, en vez de averiguarla de nuevo.

Discusión de los resultados y Conclusiones de la Sesión 1

Los resultados de la primera sesión confirman parte de nuestra conjetura pues permiten observar que, en general, la mayoría de los alumnos son capaces de comprender el significado del signo igual denominado *equivalencia numérica* y de desarrollar una comprensión avanzada del signo igual. Los alumnos han desarrollado su comprensión del signo igual a partir de la enseñanza recibida previamente a nuestra intervención.

Esta intervención previa puede justificar la tendencia frecuente entre los alumnos a proceder directamente a operar el miembro completo de la igualdad y, posteriormente, hallar el término desconocido, sin pararse a cuestionarse sobre el modo de abordar las actividades en cuestión. Esta observación muestra, en particular, que el tipo de igualdades consideradas no eran desconocidas para, al menos, la mayoría de los alumnos.

Los resultados de esta primera sesión contrastan con los de otros estudios en los que la mayoría de los alumnos manifiesta una comprensión operacional del signo igual, o al menos una tendencia a interpretar este signo operacionalmente, incluso habiendo recibido formación al respecto. No obstante, las dificultades que se observan (ej., alteración de la disposición de los términos, operar juntos todos los términos de la sentencia o ignorar uno de los términos de la sentencia y resolver la sentencia resultante) son análogas a las reportadas en otros estudios. Se observa que los alumnos, aún habiendo manifestado comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica, tienden a interpretar dicho signo de forma operacional al abordar igualdades que les resultan más difíciles, en particular, en las igualdades de resta. En un caso, un alumno modifica la operación involucrada en la igualdad para poder interpretar operacionalmente el signo igual.

Algunos alumnos no muestran comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica, salvo de manera puntual, procediendo de distinto modo en cada igualdad. En unos casos operan conjuntamente todos los términos de la sentencia y, en otros, ignoran uno de los términos y resuelven una igualdad de tres términos. Estos alumnos también manifiestan menor fluidez en el cálculo.

Cabe destacar la aceptación de los alumnos de la igualdad $\square = 25 - 12$, en la cual no mostraron ningún tipo de dificultad o rechazo debido a la posición de la operación en el miembro derecho de la igualdad y del resultado en el miembro izquierdo.

Las dificultades detectadas en la igualdad de resta nos permiten sugerir la posibilidad de que los alumnos no estén considerando el miembro derecho de la igualdad de izquierda a derecha, o no estén dando importancia al orden de los términos. Este modo de proceder no conduce a error en igualdades de suma, pero sí en igualdades de resta, si los alumnos no asocian adecuadamente cada signo al término al que afecta. En el caso de dicha igualdad de resta, el miembro derecho, □ – 6, es interpretado por algunos alumnos como 6 – □.

A raíz de esta dificultad resaltamos la necesidad de que los alumnos conozcan que en las igualdades y sentencias numéricas está involucrada una convención propia del simbolismo aritmético: cada miembro, al estar constituido por una expresión aritmética, ha de ser leído e interpretado de izquierda a derecha.

En relación con los aspectos sintácticos relativos a la resolución de las igualdades, se observa que la alteración de los términos en la totalidad de la sentencia, así como el ignorar uno de los términos, se produce siempre en casos en los que se está haciendo uso de un significado operacional del signo igual. La alteración de los términos en uno de los miembros se detecta en la igualdad de no–acción de resta.

F.2 Sesión 2. Resolución y construcción de igualdades y sentencias

Durante la segunda sesión, los alumnos (N= 21) resuelven de manera individual dos actividades escritas de lápiz y papel, de las cuales se realiza, posteriormente, una discusión con todo el grupo. La primera actividad está compuesta por una colección de cinco igualdades abiertas de resta. La segunda consiste en la construcción, por parte de los alumnos, de sentencias verdaderas y falsas de suma y resta (Ver hojas del alumno en Anexo B y descripción del diseño de las tareas en el capítulo 8).

F.2.1 Parte I. Resolución de igualdades abiertas de resta

En la primera parte de esta segunda sesión los alumnos manifiestan más dificultades en la resolución de las igualdades que en la sesión anterior y un menor número de alumnos muestra el significado del signo igual *equivalencia numérica*. De los 21 alumnos que participan en esta sesión, catorce[100] dan evidencias de una comprensión avanzada del signo igual. Algunos ejemplos de respuestas que evidencian una comprensión avanzada del signo igual son los siguientes:

[100] Una de las alumnas (MP) responde únicamente a dos de las igualdades mostrando en ambas el significado del signo igual equivalencia numérica, no obstante entendemos que la alumna muestra comprensión del signo igual como expresión de equivalencia.

- [12 – 4 = 13 - □] MT explica su respuesta 5 escribiendo "*a 12 le he restado 4 y después de 8 que es el resultado he contado hasta trece*"
- [17 - □ = 18 – 8] JM explica su respuestas 7 escribiendo "*si 18 menos 8 son 10 17 menos 7 son 10*"
- [9 – 4 = □ - 3] MB explica su respuesta 8 como sigue "*he restado 9 menos 4 y el resultado tiene que ser igual al otro*"

Dos alumnas (NM y BR) manifiestan una comprensión no estable del signo igual NM evidencia el uso del significado *equivalencia numérica* en dos de las igualdades, 17 – □ = 18 – 8 y 12 – 4 = 13 – □, y el significado *operador* en otras dos, 14 – 9 = □ – 10 y 9 – 4 = □ – 3, dando como respuestas 04 (resta de 14 y 0) y 13 (suma de 9 y 4) respectivamente. Además, no da respuesta a la última igualdad (□ - 6 = 15 – 7).

BR manifiesta el significado *operador* del signo igual en dos de las igualdades operando conjuntamente todos los términos en la igualdad 12 – 4 = 13 – □ (ver Figura F-1), y resolviendo la igualdad de tres términos resultante al ignorar el 3 en la igualdad 9 – 4 = □ – 3. Además, resuelve correctamente una de las igualdades (14 – 9 = □ - 10) y no da respuesta a las dos restantes.

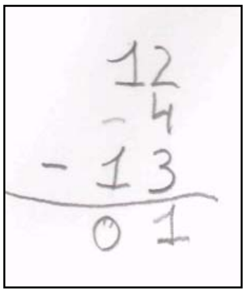


Figura F-1: Anotaciones de BR en la hoja de cálculos aparte en relación con la igualdad 12 – 4 = 13 - □.

FB, MR y MAG manifiestan los significados *operador* o *expresión de una acción* en la resolución de las igualdades propuestas. FB procede de manera diferente en las tres igualdades a las que da respuesta: ignora el término más a la derecha del signo igual en las igualdades 14 – 9 = □ – 10 y 17 – □ = 18 – 8 (cambiando en esta segunda igualdad la operación resta por la suma) e ignora el término más a la izquierda en la igualdad 9 – 4 = □ – 3, pese a tener la misma estructura que una de las anteriores. Al utilizar el significado *operador* del signo igual, FB modifica la operación involucrada o altera la disposición de los términos (ver Figura F-2).

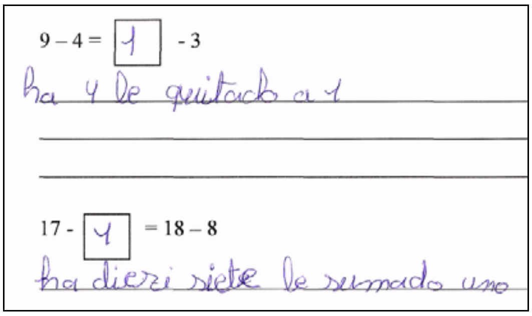


Figura F-2: Extractos de las respuestas de FB a las igualdades de la sesión 2.

MR manifiesta el significado del signo igual *expresión de una acción* en cuatro de las cinco igualdades, ignorando un término diferente en cada caso, optando siempre por resolver una igualdad de acción de tres términos en la que la cantidad desconocida se encuentra en el miembro formado por un sólo término. Sin embargo, resuelve correctamente la igualdad 17 – □ = 18 – 8, habiendo observado cierto paralelismo en la estructura de ambos miembros de la sentencia. La explicación dada es "*como 18 luego hay un 8, pues me ha salido".* Esta explicación sugiere que la alumna acepta un significado no operacional del signo igual en esta sentencia al detectar cierto parecido entre las expresiones a ambos lados, dando la primera evidencia del significado del signo igual que hemos denominado *similitud numérica*.

En la igualdad 12 – 4 = 13 – □, MR explica su respuesta 11 de la siguiente forma: "*he restado 12 – 4 y luego he restado 4 – 12 entonces han salido 11".* Observamos en esta explicación que MR interpreta operacionalmente el signo igual ignorando el término del miembro derecho (13) y, además, acepta la consideración del miembro izquierdo de la igualdad tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, no dando importancia al orden de los términos y aceptando la resta de números naturales con el minuendo menor que el substraendo. Al considerar ambas disposiciones de los términos 12 y 4, no está respectando las convenciones que regulan la interpretación de las igualdades, o considerándolo de otro modo, está aceptando la lectura e interpretación de la igualdad en ambos sentidos.

MAG ignora en todas las igualdades uno de los términos del miembro que aparece completo (es decir, el miembro que no incluye el recuadro), dando respuesta a una igualdad de tres términos de la forma c = a – □ , c = □ – b y a – □ = c (ver en Tabla F-8 el resumen de la comprensión puesta de manifiesto por cada alumno).

Tabla F-8: Clasificación de los alumnos en función de aspectos sintácticos y semánticos de su actuación en la resolución de las igualdades abiertas de la sesión 2. N=21.

Comprensión del SI	**Significado del SI**			**Altera disposición**				**Ignora algún término**	
				Miembro		**Totalidad**			
Avanzada	E	14		1 + ¿1[1]?	CL, VS	1	JM	3	MA, MB, RB
No estable	A/E								
	O/E	2	NM, BR			1 + ¿1[2]?	BR, NM[2]	2	NM, BR
Operacional	A	2	MAG, MR[3]	1	MR			2	MAG, MR
	O	1	FB			1	FB	1	FB
No se puede precisar		2	BI, CY				CY[4]	¿1[4]?	CY[4]

En cada caso la primera columna indica el número de alumnos y la segunda las siglas que identifican a dichos alumnos. En el caso de la comprensión avanzada no se indican las siglas para favorecer la brevedad de la tabla.

[1] VS no explica su respuesta 5 a la igualdad 14 – 9 = ☐ – 10 por lo que no es posible determinar si altera o no los términos del miembro derecho para obtener dicha respuesta.

[2] No se puede precisar si la respuesta 04 de NM a la igualdad 14 – 9 = ☐ – 10 procede de haber operado 14 – 10, y por tanto alterar la totalidad de la sentencia e ignora uno de los términos, o procede de operar, de algún modo, todos los términos.

[3] MR muestra además el significado similitud numérica

[4] No se puede precisar si la respuesta (5) de CY a la igualdad 14 – 9 = ☐ – 10 es resultado de operar el miembro derecho de la igualdad, en cuyo caso CY está ignorando el término 10, o procede de restar 10 y el valor numérico del miembro izquierdo.

La comprensión de BI y CY no se puede precisar, en el primer caso porque copia las respuestas de otra alumna y en el segundo por la falta de detalle de las explicaciones dadas.

CY evidencia el uso del significado *equivalencia numérica* en dos de las igualdades y el significado *operador* en otra de ellas, operando conjuntamente todos los términos (ver Figura F-3). En la igualdad 14 – 9 = ☐ - 10 esta alumna da 5 como respuesta, pudiendo ser resultado de operar el miembro izquierdo de la igualdad, del uso del significado del signo igual *equivalencia numérica* considerando que 5 – 10 da 5, o de la lectura inversa (de derecha a izquierda) del miembro derecho de la igualdad. La explicación de CY que acompaña esta respuesta no permite identificar su origen ("*con la cabeza y restando").*

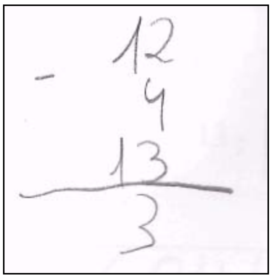


Figura F-3: Anotaciones de CY en la hoja de cálculos aparte en relación con la igualdad 12 – 4 = 13 - ☐.

Otras dificultades

Previamente han sido comentadas las dificultades que manifiestan alumnos particulares. Ahora se presta atención a las dificultades que manifiestan los alumnos que ponen de manifiesto el significado del signo igual *equivalencia numérica*. Aparte de errores de cálculo ocasionales, las dificultades se deben al uso puntual de uno de los significados operacionales del signo igual por parte de cuatro alumnos (JM, RB, MA y MB) y a dificultades de otros tres alumnos (VS, CA y CL) en la igualdad 14 – 9 = □ – 10. Estos alumnos dan como respuesta a esta igualdad el número 5. CA explica "*he pensado 14 – 9 son 5 y he restado 5 – 10*", aplicando una supuesta conmutatividad de la resta al suponer que 5 – 10 es 5 y no reconociendo la imposibilidad de dar sentido a dicha operación en el conjunto de los números naturales. La otra alumna (CL), en cambio, considera el miembro derecho de la igualdad de derecha a izquierda operando 10 – 5 según evidencia en su explicación "*he restado catorce menos nueve y me da cinco. Luego he restado diez menos cinco y me da el mismo resultado que catorce menos nueve".* VS no explica su respuesta.

Las manifestaciones puntuales de comprensión operacional del signo igual se producen en las igualdades 12 – 4 = 13 – □, 14 – 9 = □ – 10 y □ – 6 = 15 – 7 donde los alumnos dan como respuesta 8 (sin explicación) para la primera igualdad, 19 (sin explicación) y 5 ("*5 porque si 14 menos 9 son 5 menos 10 me da 5")* para la segunda, y 6 ("*6 me he fijado en una cuenta la del lado y la hice*") para la tercera. Estas igualdades no presentan una estructura común, lo que sugiere que responden a dificultades individuales de los alumnos que les conducen a aplicar un significado del signo igual diferente en una de las igualdades.

Aspectos sintácticos

La mayoría de los alumnos que manifiestan una comprensión avanzada del signo igual involucran todos los términos de la igualdad en sus respuestas, con la excepción de tres de los alumnos (MA, MB, y RB) que manifiestan puntualmente un significado operacional del signo igual. Los demás alumnos ignoran algún término de la igualdad al hacer uso de un significado operacional del signo igual. Cada uno de estos alumnos ignora uno u otro término; en unos casos el miembro más a la izquierda del signo igual, en otros el más a la derecha. Un alumno ignora siempre un término del miembro que aparece completo; otro, en cambio, el término conocido del miembro que incluye el recuadro a completar.

Respecto a la alteración de la disposición de los términos de las igualdades, se observa que al menos dos alumnos alteran el orden de un miembro en alguna de las sentencias. En el caso de CL, la alteración se produce en el miembro derecho de la igualdad 14 – 9 = ☐ – 10, él cual interpreta como 10 – ☐. Por su parte, MR altera los términos del miembro derecho de la igualdad 12 – 4 = 13 – ☐ al considerar la operación 4 – 12, como se ha comentado previamente.

La alteración de la totalidad de la igualdad se produce en seis ocasiones, todas ellas asociadas al uso de un significado operacional del signo igual. En la mayoría de los casos corresponden a situaciones en las que los alumnos operan conjuntamente todos los términos de la sentencia, con la salvedad de FB que combina los términos de forma particular en 9 – 4 = ☐ – 3 dando como respuesta 1, resultado de restar 4 – 3.

Discusión

En la discusión participan catorce de los veintiún alumnos (EF, CA, FM, JQ, FB, MT CL, RB, MA, JM, MR, MP, VS y BI), aunque seis de ellos (FB, RB, JM, MR, MP y BI) no dan explicación para su respuesta. Durante esta discusión las explicaciones hacen explícita una comprensión avanzada del signo igual. Las respuestas aisladas aportadas procedentes del uso de un significado operacional, no llegan a ser explicadas, impidiendo la discusión al respecto. Por lo tanto, la discusión permite confirmar la comprensión del signo igual evidenciada en la actividad escrita por aquellos alumnos que explican su respuesta pero no favorece la discusión de la aplicación del significado *operador* a sentencias de no-acción.

Las dificultades que se hacen manifiestas durante esta discusión tienen lugar en la resolución de la igualdad 14 – 9 = ☐ – 10 en la que se proponen dos respuestas diferentes, 5 y 15, defendidas cada una de ellas por un grupo de alumnos. En esta discusión, cuatro alumnos apoyan la respuesta 5, resultado de operar 5 – 10. Otros 15 alumnos consideran falsa la sentencia resultante de dicha respuesta (14 – 9 = 5 – 10) y defienden la respuesta 15. La discusión de esta igualdad se resuelve por mayoría de opinión, siendo justificada la respuesta por una alumna (MT): "*a cinco no le puedes quitar diez*".

F.2.2 Parte II. Construcción de sentencias verdaderas y falsas

Durante la segunda parte de la sesión 2, los alumnos construyen sentencias verdaderas y falsas (Ver hoja de trabajo en el Anexo B y descripción del diseño de las tareas en el capítulo 8). Todas las sentencias construidas involucran únicamente las operaciones de suma y resta como se les indicó, siendo la mayoría de ellas de la forma a ± b = c ± d (Ver Figura F-4).

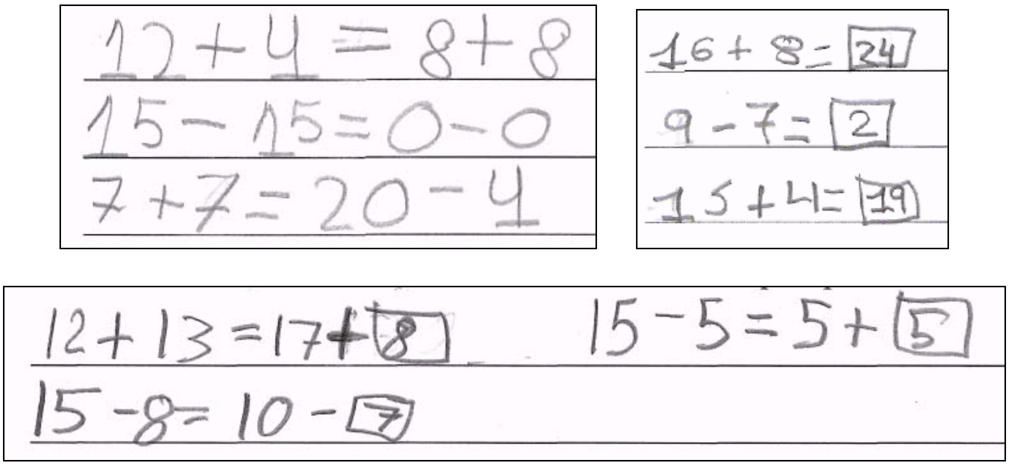


Figura F-4: Ejemplos de sentencias verdaderas escritas por los alumnos durante la sesión 2

Las demás sentencias construidas son de la forma a ± b = c, a ± b ± c = d y a ± b = c ± d = e. Concretamente tres alumnos (MA, JQ y CA) escriben algunas sentencias de la forma a ± b ± c = d (ver Figura F-6) y dos alumnos (JQ, CA) sentencias de la forma a ± b = c ± d = e (ver Figura F-5). Ningún alumno escribe sentencias de acción con las operaciones en el miembro derecho (ej., c = a ± b).

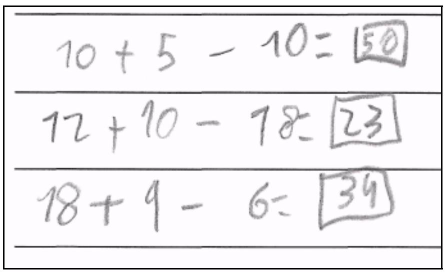


Figura F-6: Sentencias falsas construidas por MA en la sesión 2

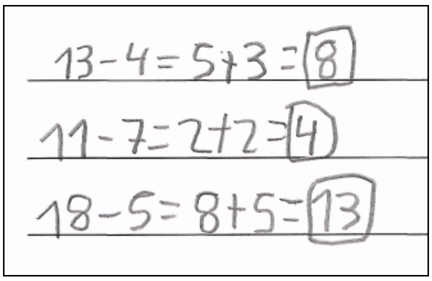


Figura F-5: Sentencias verdaderas construidas por JQ en la sesión 2

En relación a la comprensión del signo igual de los alumnos, los resultados de esta actividad confirman la comprensión avanzada del signo igual para catorce de los veintiún alumnos que evidencian esta comprensión en la primera parte de esta sesión (FM, MAG, MA, CA, CL, MT, JM, MB, EF, CH, JQ, MP, VS, y EV), al haber sido construido, sin dificultad, sentencias de no–acción verdaderas y falsas.

MAG muestra un avance en su comprensión del signo igual al construir correctamente sentencias de no-acción (ej., $13-2=15-4$, $17-5=7+5$, $15+9=26-2$) pese a haber manifestado en la actividad escrita previa una comprensión operacional del signo igual. Este avance parece haber sido favorecido por la discusión con toda la clase de la resolución de la actividad escrita previa, en la cual él no participa limitándose a escuchar a sus compañeros.

De los siete alumnos restantes (FB, NM, BR, BI, RB, MR y CY), tres (FB, NM y BR) sólo construyen sentencias de acción, concretamente de la forma a ± b = c, lo cual concuerda con la limitada comprensión del signo igual mostrada en la actividad previa de esta sesión.

Otras dos alumnas MR y CY construyen sentencias que evidencian el significado del signo igual *similitud numérica,* al proponer como verdaderas sentencias que contienen los mismos términos en ambos miembros aunque relacionados mediante diferentes signos operacionales (ej., 2 + 11 = 11 – 2) y otras con miembros de estructura similar (ej., 17 – 7 = 18 – 8) (Ver Figura F-7 y Figura F-8). En una de sus construcciones ($5+5=10-5$), CY da muestras del uso del significado del signo igual *operador* en una sentencia de cuatro términos.

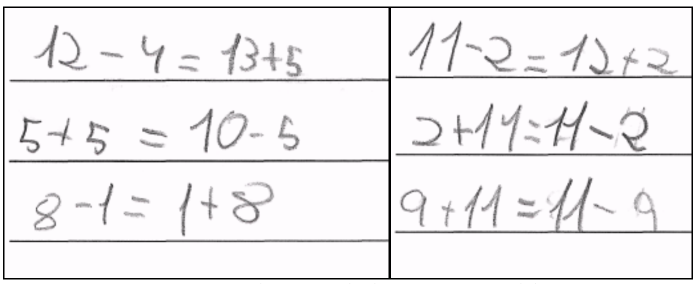
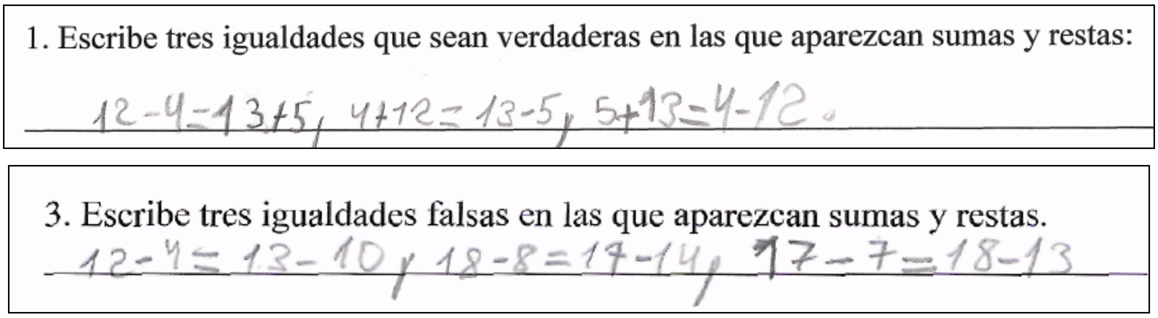

12 - 4 = 13+5	11-2 = 12+2
5+5 = 10-5	2+11=11-2
8-1 = 1+8	9+11 = 11-9

Figura F-7: Sentencias verdaderas construidas por CY durante la sesión 2

MR escribe, además, sentencias verdaderas derivadas de las propuestas como ejemplo en la pizarra, basadas en la suposición de que la posición relativa de los términos o de éstos respecto del signo igual no afecta a la veracidad o falsedad de la sentencia (Ver Figura F-8). Al construir sentencias falsas su estrategia consiste en reemplazar uno de los términos en las sentencias verdaderas que construye previamente. Se observa, además, que la primera sentencia verdadera que construyen MR y CY corresponde a la sentencia propuesta como ejemplo habiendo reemplazado un signo operacional de resta por uno de suma. En ambos casos desconocemos si dicha modificación es voluntaria o se debe a un error al copiar de la pizarra.


1. Escribe tres igualdades que sean verdaderas en las que aparezcan sumas y restas:
12-4=13+5, 4+12=13-5, 5+13=4-12.

3. Escribe tres igualdades falsas en las que aparezcan sumas y restas.
12-4=13-10, 18-8=17-14, 17-7=18-13

Figura F-8: Sentencias verdaderas y falsas construidas por MR en la sesión 2

BI construye sentencias de no-acción únicamente para las sentencias falsas (ver Figura F-9), no siendo posible precisar el significado del signo igual del que está haciendo uso en esas sentencias de cuatro términos.

El otro alumno que participa en esta sesión, RB, muestra dificultades en el uso del signo igual en igualdades de no–acción pese a haber manifestado una comprensión avanzada del signo igual en la actividad escrita anterior. RB no construye ninguna sentencia verdadera y propone como sentencia falsa 4 – 12 = 10 – 13, una modificación de la sentencia falsa puesta como ejemplo al inicio de la actividad (12 – 4 = 13 – 10). Esta construcción puede consistir en un intento de dar una respuesta, al no saber hacer un uso activo del significado del signo igual *equivalencia numérica.*

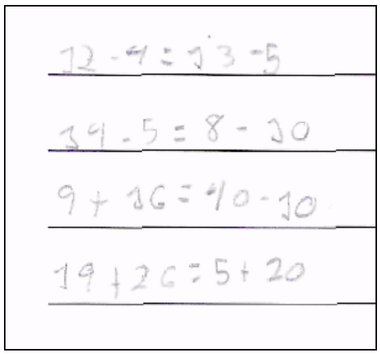


Figura F-9: Sentencias falsas construidas por BI

Otras dificultades.

Uno de los alumnos que da muestras de una comprensión avanzada del signo igual en la construcción de sentencias (CA), construye varias sentencias incompletas de tres miembros de la forma a ± b = e c ± d (Ver Figura F-10. En la construcción de las igualdades falsas sustituye dicho espacio por el uso de la palabra "son" (ver Figura F-11).

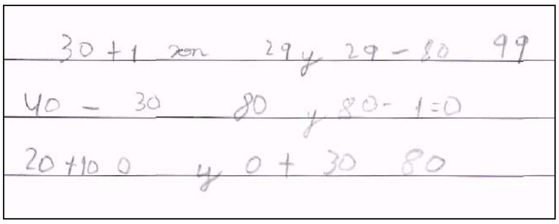


Figura F-11: Igualdades falsas escritas por CA.

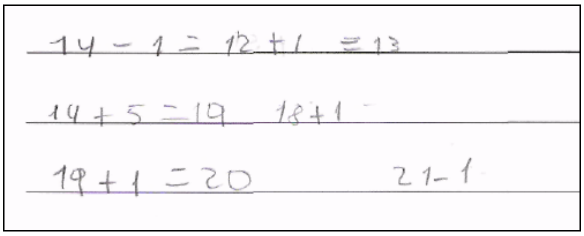


Figura F-10: Igualdades verdaderas escritas por CA.

Las sentencias construidas por CA hacen manifiesta su necesidad de expresar en la sentencia el valor numérico de los miembros, es decir, su no aceptación de la falta de clausura. Pese a no mostrar dificultad en obtener dos expresiones que tengan un mismo valor numérico, no reconoce la posibilidad de unir ambas expresiones con un igual. Las estructura operacional de las igualdades que construye en el proceso de obtener expresiones con igual valor numérico, parecen dificultarle la combinación de dichas expresiones de un modo similar a como hace en la primera sentencia que propone $14-1=12+1=13$. Además, al no querer escribir el signo igual en el segundo tramo de la sentencia y en su lugar dejar un espacio en blanco, muestra resistencia a aceptar sentencias en las que el "resultado" aparece en mitad y no a la derecha (Ver en la Tabla F-9 el resumen de la comprensión puesta de manifiesto por cada alumno).

Tabla F-9: Clasificación de los alumnos en función de aspectos sintácticos y semánticos de su actuación en la construcción de sentencias numéricas en la sesión 2.

Comprensión del SI	Significado del signo igual				
		Parte I		Parte II	
Avanzada	E	14		14	
No estable	A/E	0			
	O/E	0			
Operacional	A	0			
	O	4	FB, CY, NM, BR	3	FB, NM, BR
No se puede precisar		3	BI, RB, MR[1]	2	BI, RB

En cada caso la primera columna indica el número de alumnos y la segunda las siglas que identifican a dichos alumnos. En el caso de la comprensión avanzada no se indican las siglas para favorecer la brevedad de la tabla.

[1]MR muestra además el significado similitud numérica

N=21

Discusiones de los resultados y Conclusiones de la Sesión 2.

En esta sesión un menor número de alumnos muestra una comprensión avanzada del signo igual, siendo las dificultades que evidencian semejantes a las detectadas en sesión 1: un uso puntual de un significado operacional del signo igual y dificultades con una igualdad de la forma $a - b = \square - d$. Se manifiestan dificultades en la igualdad $14 - 9 = \square - 10$, aunque no lo hacen en la igualdad de estructura semejante $9 - 4 = \square - 3$, ni en ninguna otra de las igualdades propuestas en las que va variando la posición de la cantidad a averiguar. Conjeturamos que estas dificultades son debidas a que, en dicha igualdad, el valor numérico del miembro que aparece completo ($14 - 9$) es menor que el término conocido del otro miembro. Por este motivo, puede presentarse a los alumnos la ambigüedad de cómo interpretar el miembro derecho, es decir, de sí el problema a resolver es $5 = \square - 10$ ó $10 - \square = 5$. En otras igualdades no existe dicha opción. Por lo tanto, esta dificultad muestra un cierto desconocimiento o confusión de los alumnos sobre las convenciones que regulan la interpretación de las igualdades.

En otros casos, los alumnos no hacen una lectura inversa de la igualdad sino que suponen que, dentro del conjunto de los números naturales, las restas en las que el minuendo es menor que el substraendo tienen el mismo valor numérico que su opuesta (ej., $5 - 10 = 5$).

Se observa también que, al hacer uso de una comprensión operacional del signo igual, los alumnos aplican los algoritmos estándares de formas inusuales en el intento de obtener un valor numérico resultado de operar conjuntamente todos los términos.

En esta sesión se identifica la primera manifestación del significado del signo igual *similitud numérica*. Una alumna acepta el uso del signo igual entre expresiones en las que detecta cierto parecido, concretamente cierta similitud de estructura, aunque no muestra una comprensión avanzada del signo igual.

Este significado también se pone de manifiesto en la actividad de construcción de sentencias verdaderas y falsas. Dos alumnas proponen como verdaderas sentencias que incluyen en ambos miembros términos iguales aunque relacionados por diferentes signos operacionales o sentencias que incluyen expresiones de estructura similar. En el primer caso los alumnos muestran no dar importancia a los signos operacionales involucrados en la sentencia, ni a la disposición de los términos respecto de éstos, únicamente a los números.

No obstante, en general, los alumnos que ponen de manifiesto,en la primera parte de la sesión, una comprensión avanzada del signo igual, construyen con éxito sentencias de no-acción verdaderas y falsas, haciendo, de este modo, un uso activo de este signo.

Esta actividad sirve para hacer explícita cierta dificultad de un alumno con la aceptación de la falta de clausura de este tipo de sentencias, pese a no mostrar dificultad en obtener dos expresiones que tengan un mismo valor numérico y reconocer que estas expresiones han de componer la sentencia. Probablemente, este alumno se beneficiaría de la consideración de sentencias de diferentes formas que incluyan el valor numérico de ambos miembros en la sentencia tales como $12 + 3 = 15 = 14 + 1$ ó $7 + 7 = 6 + 8 = 14$. Las dificultades de este alumno parecen provenir de la falta de familiaridad con sentencias no convencionales. Otro par de alumnos aplica la asunción de que el orden de los términos no influye en el carácter de veracidad o falsedad de una sentencia.

F.3 Sesión 3. Discusión de sentencias verdaderas y falsas

Durante esta sesión se realiza una discusión con toda la clase en la que se les pide a los alumnos que expliquen, de distintas formas, si ciertas sentencias son verdaderas o falsas y por qué, cuestionándoles directamente en algunos casos por formas de resolver la sentencia sin hacer todas "las cuentas". También se piden correcciones para las sentencias falsas (Ver hoja del alumno en Anexo B y descripción del diseño de la tarea en el capítulo 8).

Todos los alumnos (N = 22), salvo BR, participan en algún momento en la discusión, unos más activamente que otros (ver tabla de participaciones por alumno en Anexo D). La mayoría, justifica de algún modo sus respuestas sobre la veracidad o falsedad de las sentencias, salvo en algunos casos en los que dicen no saber cómo explicarlo.

Durante esta discusión, catorce alumnos (CA, CH, CL, DL, EF, FM, FB, JM, JQ, MP, RB, RL, RT y VS) dan muestras de una comprensión avanzada del signo igual mediante sus explicaciones y/o sus correcciones a las sentencias falsas. Algunas de las explicaciones que evidencian esta comprensión son las siguientes: "[13 + 11 = 12 + 12 es verdadera porque] *Doce más doce me dan veinticuatro y trece más once me dan veinticuatro"* (FB), "[13 + 11 = 12 + 12 es verdadera porque] *Al doce le quitas un uno y se lo pones al otro doce y te da la de allí"* (DL), "[7 + 7 + 9 = 14 + 9] *He sumado siete más siete, que dan catorce, y más nueve que dan veintitrés. Y después, he visto que son catorce más nueve y son veintitrés"* (CH).

Es destacable observar el uso que CA hace del significado del signo igual *equivalencia numérica,* dando las siguientes dos explicaciones sobre la falsedad de la sentencia 7 + 3 = 10 + 3: *"Falsa [...] Porque siete más tres son... diez, y diez más tres son trece", "Diez más siete dan diecisiete y tres más tres dan seis*". Aunque CA interpreta el signo igual como la expresión de una mismidad de valores numéricos (equivalencia numérica), considera que dichos valores pueden corresponder al resultado de operar conjuntamente dos pares de términos cualesquiera de la sentencia, no necesariamente del mismo miembro. En las sentencias de acción la comprensión de este alumno es avanzada, y se observa que no altera, en ningún otro caso, la disposición de los términos en la sentencia.

Entendemos que este alumno posee una comprensión avanzada del signo igual e interpretamos dicha segunda explicación como consecuencia de la necesidad de dar una explicación diferente a la anterior. No obstante, dicha explicación muestra una excesiva flexibilidad, por parte del alumno, en la interpretación de la estructura de las sentencias.

Es destacable el caso de MB, quien sólo participa en una de las sentencias (10 – 7 = 10 – 4), no pudiéndose precisar si el significado manifestado es el de *equivalencia numérica* o de *similitud numérica*. Su explicación en dicha sentencia es **"***Sí, porque yo me he fijado en 10 – 7 y me he fijado en 10 – 4 y no son los mismos números".*

La comprensión de los demás alumnos no ha podido ser identificada por falta de información debido a que no dan explicación a sus respuestas a sentencias de no–acción (BI, MR, MA, CY) ó únicamente participan en sentencias de acción (EV, NM). Por ejemplo BI y MR participan en la discusión de una única sentencia, 51 + 51 = 50 + 52 y 7 + 3 = 10 + 3 respectivamente, pero no explican su respuesta. En sus intervenciones en esta discusión MR, EV, NM y CY muestran una comprensión avanzada de las sentencias de acción.

Dificultades

A continuación, comentamos las dificultades detectadas en la resolución de los distintos tipos de sentencias.

<u>Sentencias de la forma a – b + b = c.</u> En la sentencia 13 – 5 + 5 = 13 observamos una dificultad que posteriormente se manifiesta en las demás sentencias de la forma $a - b + b = c$, motivada por la disposición de los signos operacionales. Al intentar justificar la veracidad o falsedad de estas sentencias calculando las operaciones del miembro izquierdo de la sentencia en un orden diferente al de izquierda a derecha, dos alumnos confunden o consideran equivalentes las expresiones a – b + b y a – (b + b). Concretamente FM explica en la sentencia 62 – 13 + 13 = 65: *"trece más trece veintiséis,… menos…y sesenta y dos menos veintiséis…";* y en la sentencia 27 – 14 + 14 = 26 dice: *"Yo es que he sumado catorce más catorce, como da veintisiete, ya lo tengo ahí el veintisiete, y no puede dar veintiséis que está ahí".* Este mismo alumno procede de modo similar en la sentencia 13 – 5 + 5 = 13 ("*Cinco más*

cinco son diez…”). Otro alumno (JQ) explica en la sentencia 27 – 14 + 14 = 26 “*Porque, veintisiete menos catorce…* […] *Falsa* […] *Porque catorce más catorce…* […] *son veintiocho, menos veintisiete…* […] *No… no puede dar veintiséis”*.

Esta dificultad sólo se hace manifiesta cuando los alumnos utilizan estrategias de cálculo para la resolución de la sentencia.

Debido a esta dificultad, decidimos invertir el orden de las operaciones en la última sentencia de esta forma, 100 – 94 + 94 = 100, considerando en su lugar la sentencia 100 + 94 – 94 = 100. En ésta los alumnos no encuentran ninguna dificultad al justificar la veracidad de la sentencia, realizando los cálculos en diferentes ordenes: *“Porque cien más noventa y cuatro me dan ciento noventa y cuatro, y es lo mismo que si le quitas noventa y cuatro, te da cien”* (DL), *“Porque cien más noventa y cuatro, luego le quitas noventa y cuatro y te sale cien”* (MR), *“He restado noventa y cuatro menos noventa y cuatro y me da cero, cien”* (FM). La diferencia de este sentencia con las de la forma a – b + b = c es que en este caso se verifica la equivalencia a + b – b = a + (b – b) y, por tanto, el realizar las operaciones en uno u otro orden no afecta al resultado.

Observamos que en las sentencias *24 – 15 = 24 – 10 – 5* *y* *78 – 16 = 78 – 10 – 6* no se manifiesta ninguna dificultad en relación con la agrupación de los términos para el cálculo de las operaciones, aunque algunos alumnos realizan dicho cálculo en diferentes ordenes haciendo uso de la equivalencia 24 – 10 – 5 = 24 – (10 + 5). En este caso ningún alumno consideró la expresión de la forma a – b – c equivalente a a – (b – c).

<u>Sentencias de la forma a = a.</u> En la discusión de la sentencia 7 = 12 observamos cierta confusión por parte de RL ante la ausencia de signo operacional:

> **I:** *A ver ésta ¿es verdadera o falsa? Levantad la mano… si pensáis que es verdadera o falsa. ¿RL?*
> **RL:** *Falsa*
> **I:** *¿Por qué crees que es falsa?*
> **RL:** *Porque siete más… ¿No hay un más? ¿No? Siete más…*
> **I:** *¿Por qué?*
> **RL:** *Porque doce menos…*
> **I:** *Ahí pone siete igual a doce, no se si se ve bien, esto son dos rectas iguales. Siete igual a doce. Y tienes razón es falsa, esto es mentira.*

Salvo este caso, los alumnos no encuentran dificultades en la resolución de este tipo de sentencias de la forma a = a, aunque en algunas de sus explicaciones utilizan expresiones verbales operacionales pese a la ausencia de símbolo operacional en la sentencia. Así se observa en las siguientes explicaciones: ***“****Porque siete más cero son siete y no puede dar doce”* (JQ), *“Porque noventa y tres, da noventa y tres. Porque no te llevas nada”* (FB).

Cuatro alumnos dan muestras de su aceptación y comprensión de este tipo de sentencias proponiendo sentencias de la forma a = a en las correcciones de las sentencias 100 – 1000 = 1, 37 + 22 = 300 y 7 = 12.

<u>Sentencias de la forma a – b = b – a.</u> Otra dificultad observada es la aplicación de una supuesta conmutatividad de la resta, por parte de al menos un par de alumnas. En la sentencia 15 – 6 = 6 – 15 una alumna (EF) explica *“Es verdadera. [...] Porque sólo lo que han hecho es cambiar el orden”*. En la misma sentencia MP dice operar 6 – 15 obteniendo como respuesta 9. Esta alumna no da importancia al orden de los términos en la resta, dándole el mismo valor numérico que a su opuesta (Ver en la Tabla F-10 el resumen de la comprensión puesta de manifiesto por cada alumno).

Tabla F-10: Clasificación de los alumnos en función de aspectos sintácticos y semánticos de su actuación en la resolución de las sentencias numéricas de la sesión 3. **N=22.**

Comprensión del SI	**Significado del signo igual**			**Altera disposición**				**Ignora algún término**	
				Miembro		**Totalidad**			
Avanzada	E	14 + ¿1[1]?				5	FB, CA, RL, CL, RB		
No estable	A/E ó O/E								
Operacional	O ó A								
No se puede precisar	Faltan datos	6	MR, NM, CY, EV BI MA						
	NR	1	BR						

En cada caso la primera columna indica el número de alumnos y la segunda las siglas que identifican a dichos alumnos. En el caso de la comprensión avanzada no se indican las siglas para favorecer la brevedad de la tabla.
[1]Esta alumna es MB.

Aspectos sintácticos

Además de las dificultades anteriormente comentadas y de algunos errores de cálculo ocasionales, una dificultad observada en cinco alumnos es la alteración de la disposición de la totalidad de la sentencia. Concretamente las explicaciones dadas por dos de los alumnos son: *"Cien le quito cien me da cero, y noventa y…noventa y cuatro más noventa y cuatro me dan cien"* (FB en 100 + 94 – 94 = 100); "Diez más siete dan diecisiete y tres más tres dan seis" (CA en 7 + 3 = 10 + 3).

Este tipo de explicaciones pone en duda la comprensión de las sentencias por parte de estos alumnos, sin embargo, ambos dan muestras de una comprensión avanzada del signo igual en alguna otra sentencia de no-acción. Al haber sido sugeridas ambas explicaciones tras la participación de alguno de sus compañeros, se considera que puedan ser resultado del intento de aportar una explicación diferente sobre la veracidad o falsedad de la sentencia. No obstante, como comentamos previamente, muestra una excesiva flexibilidad o falta de conocimiento de las convenciones que regulan la escritura e interpretación de las igualdades y sentencias.

Otro alumno (RL) presenta inicialmente esta dificultad en la discusión de la sentencia 13 + 11 = 12 + 12 donde procede a sumar 11 y 12 (**"***Yo he pensado once más doce que me da veinte… tres* [Tú has sumado ¿el qué? ¿Doce más?] *Doce más once")*. Sin embargo, al hacerle observar que el signo igual está en medio y que ambos términos están en distintos miembros, el alumno rectifica: **"***He sumado doce más doce, veintidós […] Veinticuatro […] Y a trece le quitas, le sumas once […] Que me dan…. Veinticuatro"*.

Cabe destacar una alteración de la disposición de los términos que tiene lugar en la sentencia 18 + 3 – 4 = 17. Dos alumnos (CL y RB) justifican la veracidad de esta sentencia operando 18 + 3 y 17 + 4 y observando la mismidad de resultado. Por lo tanto, su respuesta afirma la veracidad de dicha sentencia a partir de la de su sentencia equivalente 18 + 3 = 17 + 4. Desafortunadamente no tuvimos tiempo para profundizar en el origen de estas respuestas por lo que se desconoce por qué dichos alumnos combinaron, de este modo particular, los términos. Estos alumnos no alteran la disposición de los términos en ninguna otra sentencia.

Correcciones

Los alumnos no encontraron dificultades en proponer correcciones para las sentencias, salvo posibles dificultades relativas al cálculo. De las diez sentencias falsas que incluimos en esta discusión, se pidieron correcciones a los alumnos para cinco de ellas: 10 – 7 = 10 – 4, 0 + 325 = 326, 7 = 12, 37 + 22 = 300 y 100 – 100 = 1.

Las correcciones propuestas fueron de variadas formas ($a = a$, $a \pm b = c$, $a + b = c + d$, y $a \pm b \pm c = d$), en la mayoría de los casos de igual estructura que la sentencia dada. En cuatro de las cinco sentencias a corregir los alumnos propusieron sentencias de la forma $a = a$.

Concretamente, diez alumnos (FM, FB, CL, RT, JM, DL, EF, CH, MR, JQ) propusieron alguna corrección. La mayoría de las correcciones fueron en forma de sentencias de acción (propuestas por FB, CA, DL, CH y JQ), seguidas de sentencias de la forma $a = a$ (propuestas por FM, RT, MR), y alguna sentencia de no–acción (propuestas por FM, CL y EF).

FB sigue mostrando en esta sesión cierta dificultad para construir sentencias de no-acción. En este caso, hace un intento proponiendo la sentencia $10 - 6 = 10 - 1$. Conjeturamos que dichas dificultades pueden ser en parte debidas a su limitada fluidez en el cálculo.

Discusión de los resultados y Conclusiones de la sesión 3

A diferencia de las sesiones anteriores, en este caso no se tiene información procedente de todos los alumnos; sólo se tienen datos de aquellos que participaron en la discusión y, más concretamente, de los que explicaron su respuesta. Las respuestas relativas únicamente a la falsedad o veracidad de la sentencia, sin explicación del por qué, no aportan información. Además, algunos alumnos participan únicamente en sentencias de acción, lo cual no permite distinguir si tienen una comprensión avanzada o, por el contrario, una comprensión operacional del signo igual. Por este motivo, los datos no permiten precisar la comprensión del signo igual de cada alumno.

En esta sesión se observa que en todos los casos los alumnos consideran todos los términos que componen la sentencia a la hora de darle respuesta. Sin embargo, sí se sigue haciendo manifiesta, en casos puntuales, la dificultad de alterar la disposición de los términos de la sentencia, pudiendo estar en ocasiones ocasionada por la necesidad de proponer una explicación diferente a las dadas previamente por otros alumnos sobre la misma sentencia. En particular, se observa un uso peculiar del significado *equivalencia numérica*, por parte de un alumno, al aceptar que la mismidad de valor numérico se obtenga al operar pares de números de diferentes miembros.

Este aspecto se encuentra también relacionado con las dificultades encontradas por los alumnos en el reagrupamiento de los términos dentro de una expresión para realizar el cálculo de una cadena de operaciones de diferentes formas.

Los alumnos muestran, en general, aceptación de las sentencias de la forma a = a. Dos alumnas aplican una supuesta conmutatividad de la resta en una sentencia de la forma $a - b = b - a$, no dando importancia al orden de los términos. Es posible que no hayan reconocido la imposibilidad de realizar esta operación por no estar acostumbradas a encontrar, dentro de su práctica aritmética, cálculos que no se pueden realizar. En sesiones anteriores se observa también que, en otras situaciones, algunos alumnos dan muestras de considerar una supuesta conmutatividad de la resta al operar restas con el minuendo menor que el substraendo. Conjeturamos que para los alumnos estas operaciones tienen sentido en el contexto simbólico, porque, en general, muestran flexibilidad (o desconocimiento) en relación con las convenciones que regulan el simbolismo aritmético.

F.4 Sesión 4. Resolución de sentencias verdaderas y falsas

Durante la cuarta sesión los alumnos resuelven por escrito de manera individual una actividad de lápiz y papel compuesta por diez sentencias verdaderas y falsas. En esta actividad han de indicar si cada una de las sentencias es verdadera o falsa, dando una explicación de su respuesta, y, en el caso de que la consideren falsa, deben proponer una versión correcta de dicha sentencia (Ver hoja del alumno en Anexo B y descripción del diseño de la tarea en el capítulo 8).

En las respuestas a esta actividad escrita, 19 de los 24 alumnos que realizan la actividad[101] (FB, FM, RB, MAG, RL, CA, CL, MT, JM, DL, MB, EF, CH, JQ, BR, MP, VS, BI y EV), muestran una comprensión avanzada del signo igual. Un alumno (MA) da muestras de una comprensión operacional y otra alumna (NM) de una comprensión no estable.

[101] En realidad en esta sesión participan 25 alumnos pero uno de ellos (JA) no da respuesta a ninguna de las sentencias.

MA muestra una comprensión operacional del signo igual en todas las sentencias de no–acción, imponiendo que uno de los términos del miembro derecho sea igual al valor numérico del miembro izquierdo (ej., “[75 + 23 = 23 + 75] *Falsa porque 75 + 23 no es 75 ni 23”),* con la excepción de la última sentencia, 257 – 34 = 257 – 30 – 4, en la que no se ha podido precisar el significado del signo igual empleado (“*Verdadera porque 257 – 34 =257–30–40”).* A diferencia de otras aplicaciones del significado *operador* del signo igual, MA no ignora ninguno de los términos de la sentencia sino que acepta que cualquier término del miembro derecho sea el valor numérico del miembro izquierdo.

NM muestra una comprensión no estable del signo igual al dar evidencias del significado *equivalencia numérica* en varias sentencias de no–acción (ej., “$[7+15=8+15]$ *Falsa porque 7 + 15 son 22 y 8 + 15 son 23*”) y mostrar el significado *operador* del signo igual en otros casos: “$[17-12=16-11]$ *Falsa porque 17 – 12 es cinco*”, “$[6+4+18=10+18]$ *Falsa porque 6 + 4 + 18 es veinte*”.

Otro alumno, MG, parece mostrar una compresión avanzada del signo igual en la mayoría de las sentencias, aunque sus explicaciones no son muy precisas (“$[18-7=7-18]$ *Verdadera porque dieciocho menos siete y siete menos dieciocho dan lo mismo”, “*$[7+15=8+15]$ *Falsa porque siete y cinco dan diez y ocho más quince dan el resultado).* En algún caso, como en la sentencia $122+35-35=122$, no podemos identificar el modo en que procede ni si aplica el significado del signo igual *equivalencia numérica*. La explicación que da a dicha sentencia es la siguiente: “*Verdadera porque ciento veintidós más treinta y cinco y treinta y cinco menos treinta y cinco dan lo mismo”.* En la sentencia 53 + 41 = 54 + 40 tampoco muestra con claridad el significado del signo igual empleado aunque afirma la veracidad de la sentencia: “*Verdadera porque cincuenta y cuatro más cuarenta dan cincuenta y dos”.*

Algunas de las explicaciones de MR sugieren el uso del significado *equivalencia numérica:* “[75 + 23 = 23 + 75] *verdadera porque da lo mismo*”, “$[7+15=8+15]$ *falsa porque un número está cambiado”,* “$[18-7=7-18]$ *Verdadera porque 18 – 7 = 7 – 18 es igual”*. Además, afirma la falsedad de las sentencias $17-12=16-11$,

$6+4+18=10+18$, 275 – 34 = 275 – 30 – 4 y 53 + 41 = 54 + 40 explicando "*Falsa porque 17–12 no dan 16 – 11", "Falsa porque no está bien hecho", "Falsa", "Falsa porque no da bien"*.

Las correcciones que propone a las diversas sentencias que considera falsas involucran términos iguales en ambos miembros: 17 = 17, 18 = 18, 41 = 41, 7 + 15 = 15 + 7, 16 – 14 = 14 – 16, 75 – 14 = 14 – 75. También se observa que las únicas sentencias que considera verdaderas son 75 + 23 = 23 + 75, $18-7=7-18$ y $122+35-35=122$, todas ellas formadas por dos pares de números que se repiten. Sus respuestas muestran, por tanto, cierta rigidez en el tipo de sentencias que considera correctas exigiendo que estén formadas por términos repetidos. Estas observaciones nos permiten afirmar que la alumna MR está haciendo uso del significado del signo igual *similitud numérica*.

Además de MR, otros tres alumnos (FM, RL, y MB) dan muestras puntuales del significado *similitud numérica*. MB y RL dan las siguientes explicaciones en la sentencia $122+35-35=122$: "*Verdadera porque ciento veintidós es igual a ciento veintidós y treinta y cinco es igual a treinta y cinco"* y "*Verdadera porque los números y las cantidades son iguales*". Estos alumnos consideran que dicha sentencia es verdadera simplemente porque contiene términos que se repiten, no haciendo referencia a las operaciones que los relacionan, ni a la posición de los términos respecto del signo igual. De forma similar FM explica en la sentencia 53 + 41 = 54 + 40: "*Falsa porque 53 no es igual a 54 y 41 no da lo mismo que 40"*.

La alumna CY no da muestras claras de su comprensión del signo igual ya que sus explicaciones consisten, en la mayoría de los casos, en una "lectura" de la sentencia como justificación tanto de la veracidad como de la falsedad de ésta: *"*$[122+35-35=122]$ *Falsa porque 122 más 35 menos 35 no da 122"* y "$[16+14-14=36]$ *Verdadera porque 16 + 14 menos 14 da 36",* "$[17-12=16-11]$ *Falsa porque 17 menos 12 menos 16 – 11 no es verdadera",* "$[6+4+18=10+18]$ *Verdadera porque 6 más 4 más 18 da 10 más 18"* (Ver en la Tabla F-11 el resumen de la comprensión puesta de manifiesto por cada alumno).

Tabla F-11: Clasificación de los alumnos en función de aspectos sintácticos y semánticos de su actuación en la resolución de las sentencias numéricas de la sesión 4. **N= 24** (ya que uno de los presentes no responde).

Comprensión del SI	**Significado del signo igual**			**Altera disposición**				**Ignora algún término**	
				Miembro		**Totalidad**			
Avanzada	E	19 + ¿1[1]?				4	FB, RL, BR, MP, RB, CY	1	BI
No estable	A/E								
	O/E	1	NM					1	NM
Operacional	A								
	O	1	MA						
No se puede precisar		1	CY						

En cada caso la primera columna indica el número de alumnos y la segunda las siglas que identifican a dichos alumnos. En el caso de la comprensión avanzada no se indican las siglas para favorecer la brevedad de la tabla.
Una alumna, MR, da muestras únicamente del significado *similitud numérica*. Otros tres alumnos (FM, RL, MB) dan muestras puntuales de este significado además de dar muestras de una comprensión avanzada del signo igual
[1]Este alumno es MG.

Dificultades

Las dificultades encontradas por los alumnos en la resolución de las sentencias verdaderas y falsas propuestas se localizan principalmente en las sentencias de la forma a + b – b = c y a – b = b – a. En la sentencia $18-7=7-18$, ocho alumnos (FB, MAG, RL, CL, JM, MR, MP y EV) afirman su veracidad como consecuencia de tener términos iguales en ambos miembros, lo cual puede interpretarse como aplicación de una supuesta conmutatividad de la resta. Algunas de las explicaciones que evidencian el uso de esta suposición son las siguientes: "*Verdadera porque dieciocho menos 7 y el otro es lo mismo y si es lo mismo da igual*" (FB), "*Verdadera porque los números son iguales pero están puestos de otra forma*" (CL).

En esta misma sentencia siete alumnos (FB, CA, MB, JQ, NM, BR, y BI) operan $7-18$, de distintos modos, obteniendo como resultado 19, 25 y 11, el primero de ellos obtenido en el intento de aplicar los algoritmos estándares a esta resta. Las explicaciones que acompañan a algunas de dichas respuestas son "*Verdadera porque 18 – 7 son 11 y 7 – 18 son 11*" (CA), "*Falsa porque 18 – 7 = 11 y 7 – 18 = 19*" (BR), y "*Verdadera porque 18 – 7 = 25 y 7 – 18 = 25"* (BI). En el caso de esta última alumna el valor numérico de los dos miembros procede de haber sumado ambos términos en vez de restarlos.

Una de las alumnas también realiza, en otras sentencias, restas en las que el minuendo es menor que el substraendo. Concretamente en la sentencia 75 – 14 = 61 opera 75 – 14 y 14 – 75, intentando obtener de una u otra forma el otro término que aparece en la sentencia.

En las sentencias de la forma a + b – b = c ($122+35-35=122$ y 16 + 14 – 14 = 36) dos alumnos (NM y FB) no dan respuesta, explicando que no las entienden, y otros cuatro alumnos (RL, BR, MP y RB) combinan términos de distintos miembros en el intento de aplicar el significado del signo igual *equivalencia numérica* a estas sentencias de acción. Por ejemplo, en la resolución de la sentencia $122+35-35=122$, RB resta 122 – 35, obteniendo 113, y suma 122 + 35 = 157, concluyendo la falsedad de la sentencia por ser diferentes los resultados obtenidos. De forma similar en la sentencia 16 + 14 – 14 = 36, MP realiza mediante el algoritmo de la resta las operaciones 14 – 36 = 78 y 16 + 14 = 30 y explica "*Falsa porque me da 30 y en la otra 78*".

Estos alumnos dan muestras del significado *equivalencia numérica* en otras sentencias de no–acción y, en estos casos, proceden de forma similar, obviando la posición de los términos respecto del signo igual e interpretando dichas sentencias de acción como sentencias de no-acción.

Además de posibles errores de cálculo, y de las dificultades ya comentadas, algunos alumnos manifiestan cierta dificultad puntual. FB encuentra dificultades en las sentencias 16 + 14 – 14 = 36 y 17 – 12 = 16 – 11, aunque, en general, da muestras de una comprensión avanzada del signo igual. En esta última sentencia hace un intento de operar conjuntamente todos los términos (ver Figura F-12). Este alumno muestra, también, dificultades en la construcción de una corrección para la sentencia $7+15=8+15$ escribiendo 7 15 + 157 = 22.

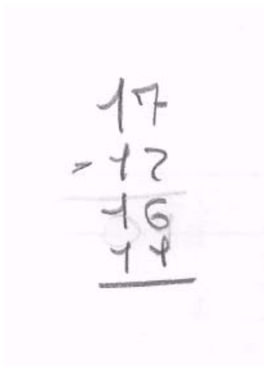


Figura F-12: Anotaciones aparte de FB para la sentencia 17 – 12 = 16 - 11

Por otra parte MB, considera falsa la sentencia 257 – 34 = 257 – 30 – 4 al interpretar el miembro derecho de la sentencia como 257 – (30 – 4). Por este motivo propone como corrección sustituir – 4 por + 4. Esta dificultad ya fue observada en las respuestas de varios alumnos durante la discusión de la sesión 3 aunque únicamente en sentencias de la forma a – b + b = c y no en sentencias de no-acción.

Otra alumna (VS) determina la falsedad de las sentencias $75+23=23+75$ y $7+15=8+15$ aplicando la suposición de que, para hacer una suma, el primer sumando ha de ser mayor que el segundo: "*Falsa porque 75 más 23 da 98 y a 23 no le puedes sumar 75*", "*Falsa porque 7 + 15 da 22 y a 8 no le puedes sumar 15*". Estas explicaciones muestran una sobre-generalización de las restricciones de la operación resta, dentro del conjunto de los números naturales.

Una de las alumnas que evidencia el significado del signo igual *equivalencia numérica,* hace un uso puntual del significado *operador* del signo igual en la sentencia $6+4+18=10+18$.

Aspectos sintácticos

En todas las respuestas dadas son involucrados todos los términos de la sentencia en cuestión, con la excepción de dos respuestas NM y BI en las que hacen un uso puntual del significado *operador* del signo igual. Seis de los veinticuatro alumnos alteran, en algún caso, la disposición de la totalidad de la sentencia, concretamente al aplicar el significado *equivalencia numérica* a sentencias de acción (RL, BR, MP y RB) y al operar conjuntamente todos los términos de una sentencia interpretando operacionalmente el signo igual (FB y CY).

Correcciones

Cuatro alumnos (RL, BR, MG y VS) no aportan ninguna corrección a las sentencias que identifican como falsas y otros dos (DL, NM) no proponen correcciones en algunos casos. NM da correcciones cuando aplica una comprensión operacional del signo igual, no así cuando utiliza el significado del signo igual *equivalencia numérica* para resolver la sentencia $7+15=8+15$.

El tipo de correcciones que proponen los alumnos no se limitan a sentencias de acción y no-acción, en realidad son más frecuentes las correcciones que consisten en expresiones tales como "diferente", "lo mismo", "iguales" o una o dos cifras que corresponden al valor numérico de uno o ambos miembros (ej., 94 para la sentencia

53 + 41 = 54 + 30, 22-23 para la sentencia $7+15=8+15$). Una de las alumnas propone una sentencia con tres términos indicando, de este modo, el valor numérico de ambos miembros (ej., 18 – 7 = 18 – 7 = 11).

Diez alumnos (FB, FM, RB, CA, CL, MT, EF, CH, MR y BI) proponen sentencias verdaderas como correcciones a las sentencias falsas. Dichas correcciones son, aproximadamente, la mitad de no-acción (ej., 257 – 34 = 547 – 34, $16+14=14-16$, 5 = 5) y la otra mitad de acción (ej., 300 + 40 = 340, 75 – 14 = 61, 15 + 21 = 36), en general, del mismo tipo que la sentencia de la cual son corrección. Las correcciones que son sentencias de no-acción están todas formadas por términos iguales en ambos miembros, ya sea en igual o distinto orden, con la excepción de la corrección que propone MT para la sentencia $18-7=7-18$ (18 – 7 = 9 + 2).

Los alumnos que proponen sentencias de no-acción como correcciones son MT, EF, CH, MR, FB, FM, CL, y CA .Tres alumnos, RB, EF y MR, proponen correcciones de la forma a=a.

En algunos casos los alumnos (DL, MB, CA, JQ, FM,) indican en la corrección, una expresión aritmética como propuesta para reemplazar uno de los términos (ej., 7 + 15 como corrección de la sentencia $7+15=8+15$) o explican lo que cambiarían en la sentencia (ej., "el 7 lo cambio por un 8" en la sentencia $7+15=8+15$).

Discusión de los resultados y Conclusiones de la sesión 4

En esta sesión, diversos alumnos vuelven a manifestar el significado *similitud numérica* y, en general, predomina una comprensión avanzada del signo igual.

Se vuelven a detectar dificultades ya observadas en las sesiones anteriores como el uso puntual de una comprensión operacional del signo igual, la suposición de la conmutatividad de la resta y las dificultades de los alumnos al agrupar términos de distintos modos con la intención de proponer formas diferentes de realizar los cálculos.

Se detectan también algunas dificultades no evidenciadas en las sesiones anteriores. Concretamente la sobregeneralización por parte de una alumna de las restricciones propias del dominio de la resta, en el conjunto de los números naturales, al caso de la suma. Algunos alumnos hacen uso del significado *equivalencia numérica* en sentencias de acción, combinando términos de distintos miembros. Además, se detecta una nueva evidencia de la flexibilidad con la que los alumnos interpretan la estructura de las sentencias. En este caso una alumna considera tanto la lectura de izquierda a derecha como la lectura inversa en una sentencia de acción para comprobar si el valor numérico del término izquierdo, leído en uno u otro sentido, corresponde con el término incluido en el miembro derecho de la sentencia.

F.5 Sesión 5. Entrevistas

Durante la quinta sesión, entrevistamos individualmente a la mitad de los alumnos utilizando una colección de sentencias verdaderas y falsas, diseñadas en función de su actuación en las sesiones previas (Ver hoja del alumno en Anexo B y descripción del diseño de la tarea en el capítulo 8).

Dichas entrevistas nos permiten detectar una comprensión avanzada del signo igual en todos los alumnos entrevistados, con la excepción de NM quien evidencia una comprensión no estable del signo igual (O/E).

La entrevista de NM contiene únicamente dos sentencias de no–acción (8 + 6 = 4 + 4 + 6 y 11 + 7 = 10 + 8). En la primera de ellas esta alumna muestra el significado del signo igual *equivalencia numérica* afirmando la veracidad de dicha sentencia tras calcular el valor numérico de ambos miembros. En la sentencia 11 + 7 = 10 + 8, en cambio, utiliza el significado *operador* del signo igual: inicialmente opera juntos todos los términos y posteriormente ignora el ocho y considera, únicamente, los tres primeros términos de la sentencia. A continuación, se recoge el extracto de su explicación de esta sentencia:

NM: *Once más siete, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, diecisiete. Dieciocho te da.*
I: *Muy bien.*
NM: *Igual, ahora…Diez más ocho, diecisiete, no, ¿cuánto he dicho?*
I: *Tú has dicho dieciocho aquí*
NM: *Dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho. A mi me da veintiocho sumando... diez más...no, ahora me he hecho un lío,*
I: *Tranquila no pasa nada.*
NM: *Dieciocho…*
I: *Tú has hecho once más siete y te ha dado dieciocho*
NM: *Dieciocho. Ahora más diez, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós,*

veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho,...ahora más ocho, veintiocho, veintinueve, treinta, treinta y uno, treinta y dos, treinta y tres, treinta y cuatro, treinta y cinco y treinta y seis, me da.
I: *Entonces lo que has hecho es sumar todos los números juntos ¿no? y te da treinta y seis. Vale ¿y eso te dice si es verdadera o falsa?*
NM: *A mi me dice que es falsa*
I: *¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?*
NM: *Porque si once más siete te da dieciocho, no te da diez*
I: *Ah vale, tú dices que once más siete no da diez de aquí ¿Y este ocho de aquí? ¿Crees que hay que sumárselo al diez? ¿O no hay que sumárselo? ¿No? ¿Qué harías con él? ¿Lo dejarías ahí?*
NM: *Sí*

En este extracto observamos que NM se muestra algo confundida ("*me he hecho un lío*"). Aunque inicialmente parece proceder a calcular el valor numérico de ambos miembros de la sentencia de forma separada, su falta de fluidez en el cálculo le causa cierta confusión y le conduce a cambiar de estrategia, operando conjuntamente todos los términos de la sentencia. Sin embargo, este cálculo no le conduce a deducir la falsedad o veracidad de la sentencia, recurriendo finalmente al significado *operador* del signo igual, ignorando el término más a la derecha del signo igual.

NM muestra, por lo tanto, una comprensión no estable al recurrir a un significado operacional del signo igual ante las dificultades encontradas.

En relación con la comprensión del signo igual destaca también el uso puntual de un alumno del significado *similitud numérica* (JM), en la sentencia $9 + 4 - 4 = 9$, como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista:

JM: *Es verdadera*
I: *¿Cómo lo sabes?*
JM: *Porque nueve más cuatro son trece, y trece menos cuatro son nueve.*
I: *Muy bien, es verdad ¿y sabrías decírmelo de otra forma, por qué es verdadera? Sin hacer las cuentas*
JM: *Porque si aquí a éste, um... pueden ser los mismos, éstos que éstos*
I: *¿Cómo? ¿Qué quieres decir?*
JM: *Que pueden ser, que éstos son los mismos y al ser los mismos es verdadera*
I: *Porque son estos números los mismos...*
JM: *Que los otros*
I: *Los que se repiten. Muy bien, vamos a ver otra.*

En este caso, el alumno da inicialmente muestras del significado *operador* del signo igual pero, al pedirle que proponga una explicación alternativa, recurre a justificar su respuesta a partir de la mismidad de los términos. Esta explicación muestra la asunción de que la mismidad de términos garantiza la veracidad de la sentencia y puede ser consecuencia de la necesidad de aportar una explicación que no implique cálculos.

Aspectos sintácticos.

Aparte de NM ningún alumno altera la disposición de los términos de ninguna de las sentencias propuestas ni ignora uno de los términos. Tampoco muestran dificultades no debidas a errores de cálculo puntuales.

Discusión de los resultados y Conclusiones de la sesión 5.

En relación con la comprensión del signo igual, los resultados de esta entrevista confirman la comprensión mostrada por los alumnos entrevistados en la sesión 4, con la excepción de MR que muestra en este caso una comprensión avanzada del signo igual tras haber resuelto las sentencias de la sesión previa utilizando únicamente el significado *similitud numérica*. En esta sesión MR procede inicialmente a justificar su explicación de la veracidad de la sentencia $9 + 4 – 4 = 9$, confundiéndola con $9 + 4 = 4 + 9$ ("*Verdadera* […] *Porque hay cuatro y nueve y aquí es igual que cuatro y nueve, ¡No!, falsa, falsa, porque esto es un igual y esto es un menos"*), pero rectifica inmediatamente y en las siguientes sentencias da muestras únicamente del significado *equivalencia numérica*.

Los resultados muestran, además, la asunción de algunos alumnos de considerar ciertas las sentencias que involucran términos iguales, independientemente de su posición relativa, las operaciones que los relacionen y su posición respecto del signo igual. Aunque en este caso dicho uso del significado *similitud numérica* parece ser forzado por la intervención de la entrevistadora al pedir una explicación alternativa de la sentencia que no implique cálculos, esta asunción se manifiesta como un aspecto de importancia a abordar en el aula en el contexto de la resolución de igualdades numéricas.

Con respecto a las dificultades de los alumnos en la resolución de las igualdades y sentencias, estas entrevistas permiten confirmar alguna de las observaciones realizadas a este respecto. Concretamente la inestabilidad que experimentan algunos alumnos en su comprensión del signo igual al encontrar igualdades o sentencias que les resultan más difíciles debido a la magnitud de los términos.

F.6 Sesión 6. Un curso académico después

Durante la sexta sesión, los alumnos resuelven por escrito de manera individual la misma actividad de lápiz y papel que en la sesión cuarta, compuesta por diez sentencias verdaderas y falsas. Los alumnos han de indicar si cada una de las sentencias es verdadera o falsa, dando una explicación de dicha respuesta, y han de dar una corrección de la sentencia en caso en que la consideren falsa (Ver hoja del alumno en Anexo B y descripción del diseño de la tarea en el capítulo 8).

El análisis de los resultados muestra que la mayoría de los alumnos (19 de los 25 alumnos) muestran una comprensión avanzada del signo igual en la resolución de las sentencias propuestas. Uno de los alumnos (JA) no responde a ninguna de las sentencias. De los cinco alumnos restantes, dos (NM y MG) muestran una comprensión operacional del signo igual, otro alumno (MA) muestra una comprensión no estable y los otros dos alumnos (CY y CA) evidencian el uso del significado del signo igual *similitud numérica*.

NM resuelve sólo las primeras cinco sentencias y en ellas da muestras de una comprensión operacional del signo igual. Justifica la falsedad de las sentencias de no–acción 17 – 12 = 16 – 11, 6 + 4 + 18 = 10 + 18 y 18 – 7 = 7 – 18 dando el valor numérico del miembro izquierdo y propone como corrección para cada una de ellas las sentencias de acción 11 – 05 = 16, 7 + 5 + 11 = 831 y 14 – 8 = 26 – 15 respectivamente. Esta última sentencia procede de la combinación de las operaciones 14 – 8 = 26 y 26 – 15 = 11 las cuales realiza aparte y encadena o enlaza haciendo uso del significado operacional del signo igual.

A diferencia de NM, MG no ignora ningún término de las sentencias sino que procede a operarlos todos juntos en todas las sentencias de no-acción (ver Figura F-13 y Figura F-14). No obstante, aporta explicaciones diferentes en cada caso: *"[6 + 4 + 18 = 10 + 18] Verdadera porque seis más cuatro mas dieciocho igual más dieciocho dan treinta y cuatro",* "[53 + 41 = 54 + 40] *Falsa porque cincuenta y tres mas cuarenta y uno igual cincuenta y cuatro mas cuarenta dan setenta y ocho*", "[7

+ 15 = 8 + 15] *Verdadera porque siete mas quince igual ocho mas quince dan treinta",* "[257 – 34 = 257 – 30 – 4] *Falsa porque dan veintiuno".*

En la primera de dichas explicaciones determina la veracidad de la sentencia habiendo obtenido 34 como resultado de operar juntos todos los términos, pese a que 34 no es un término incluido en la sentencia. En cambio, en la segunda explicación afirma la falsedad de la sentencia habiendo procedido, de igual modo, operando juntos todos los términos.

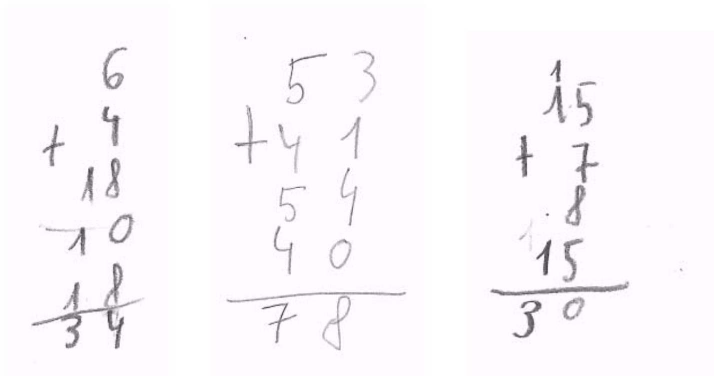


Figura F-13: Algunas anotaciones aparte de MG durante la sesión 6

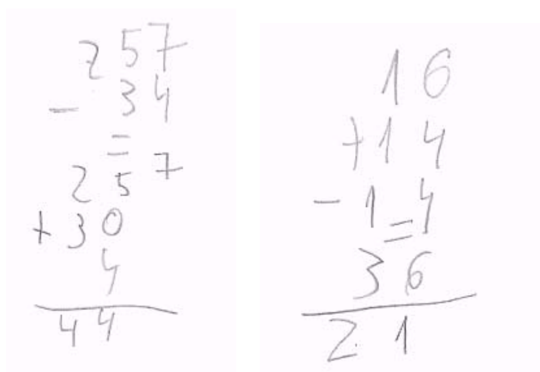


Figura F-14: Otras anotaciones aparte de MG durante la sesión 6 en relación con las sentencias 257 – 34 = 257 – 30 – 4 y 16 + 14 – 14 = 36

Como se observa en la Figura F-13, en algunos casos el alumno, al operar conjuntamente todos los miembros de la sentencia mediante el uso de algoritmos estándares, incluye el signo igual en la expresión vertical, en un intento de reflejar la estructura de la sentencia aunque no da evidencias de tenerlo en cuenta en su particular aplicación de los algoritmos. Es importante destacar que este tipo de respuesta implica la interpretación de las sentencias de no-acción, no como una sentencia de acción sino como una igualdad abierta de acción; en tanto que no comprueba si la combinación de parte de la sentencia da lugar a uno de los términos de ésta, sino que opera conjuntamente todos los términos. No hemos podido inferir, a partir de la información dada en las explicaciones del alumno, el modo en que deduce la veracidad o falsedad de la sentencia a partir del resultado obtenido.

MA da muestras de una comprensión operacional en todas sus respuestas a sentencias de no–acción (ej., "[75 + 23 = 23 + 75] *Falsa porque 75+23 no son 75",* "[53 + 41 = 54 + 40] *Falsa porque 53 + 41 no son 40")* con la excepción del caso de la sentencia 17 – 12 = 16 – 11 en la que afirma la veracidad de la misma habiendo comprobado que ambos miembros tienen el mismo valor numérico. Al aplicar el significado *operador* del signo igual, MA considera uno de los términos del miembro derecho como resultado de la operación expresada en el miembro izquierdo de la sentencia, en la mayoría de los casos el término más a la derecha del signo igual. Incluso en las sentencias de acción 122 + 35 – 35 = 122 y 16 + 14 – 14 = 36 ignora parte de la sentencia, concretamente, el término situado justo a la izquierda del signo igual junto con el signo operacional que le precede (–35 y –14).

CA, da explicaciones que evidencian el uso del significado del signo igual *similitud numérica* al exigir en todas salvo una de las sentencias la mismidad de términos en ambos miembros ("[53 + 41 = 54 + 40] *Falsa porque 53 + 41 no es igual a 54 + 40",* "[7 + 15 = 8 + 15] *Falsa porque 7 + 15 no es = a 8 + 15")* y sólo considerar verdaderas las sentencias de no-acción en las que aparecen términos iguales en ambos miembros independientemente del orden de éstos ("[257 – 34 = 257 – 30 – 4] *Verdadera porque 257-34 =257-30-4",* "[18 – 7 = 7 – 18] *Verdadera porque el 7 y el 7 son iguales y el 18 y el 18 son iguales"*). Incluso en la sentencia de acción $75 - 14 = 300$ justifica la falsedad refiriendo a la no mismidad de los términos en vez de al valor numérico del miembro izquierdo ("*Falsa porque 75 y el 15 no son iguales*"). En una de las sentencias de acción muestra el uso del significado *operador* del signo igual el cual le permite resolver correctamente la sentencia.

De forma similar, CY basa todas sus explicaciones sobre la veracidad o falsedad de las sentencias, en la mismidad de los términos (ej., "[17 – 12 = 16 – 11] *Falsa porque 17-12 no es igual a 16-11 sería 11-16 y después 16-11*") y, además, propone verbalmente correcciones en las que ambos miembros están formados por los mismos números (ej., "[para 53 + 41 = 54 + 40] *53+41 sería igual a 41+53", "*[16 + 14 – 14 = 36] *16+14 sería igual a 14+16").* (Ver resumen de la comprensión del signo igual puesta de manifiesto por cada alumno en la Tabla F-12).

Tabla F-12: Clasificación de los alumnos en función de aspectos sintácticos y semánticos de su actuación en la resolución de las sentencias numéricas de la sesión 6. **N= 24**

Comprensión del SI	**Significado del signo igual**			**Altera disposición**				**Ignora algún término**	
				Miembro		**totalidad**			
Avanzada	E	20				1	BR	¿1?	BI
No estable	A/E								
	O/E	1	MA					1	MA
Operacional	A								
	O	2	NM, MG			1	MG	1	NM

En cada caso la primera columna indica el número de alumnos y la segunda las siglas que identifican a dichos alumnos. En el caso de la comprensión avanzada no se indican las siglas para favorecer la brevedad de la tabla.
Dos de los alumnos participantes en esta sesión (CA y CY) dan únicamente muestra del significado del signo igual *similitud numérica* por lo cual su comprensión no aparece en ninguna de las categorías recogidas en la tabla.

Dificultades

Se detectan pocas dificultades en la resolución de las igualdades propuestas, a parte de las relativas a la comprensión del signo igual. La sentencia 18 – 7 = 7 – 18 es la única que merece especial atención, ya que cinco alumnos (FB, CA, JM, MP, y MB) afirman la veracidad de la sentencia a partir de la observación de la repetición de números en ambos miembros y otros seis operan el miembro derecho obteniendo como resultados 11(RB, MAG), 09 (VS), 20(MP) y 19 (CL, BR).

La respuesta 19 corresponde al uso del algoritmo estándar para restar 7 – 18 (ver Figura F-16). La respuesta 11 es resultado de aplicar una supuesta conmutatividad de la resta. En algunos casos, los alumnos no llegan a realizar dicha operación, pero afirman que 11 es el valor numérico de dicha expresión, sabiendo que 18 – 7 = 11. CY y RL afirman que ambos miembros dan el mismo resultado, aunque en este caso no se puede precisar si han operado 7 – 18 o han obtenido dicha respuesta observando la mismidad de términos en ambos miembros.

Como en sesiones anteriores una de las alumnas, que muestra una comprensión avanzada del signo igual, interpreta operacionalmente una de las sentencias operando conjuntamente todos los términos (ver Figura F-15).

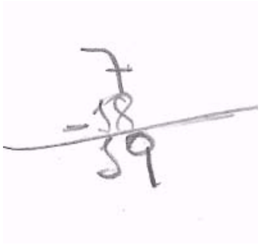


Figura F-16: Anotaciones de BR en la sesión 6 para la sentencia 18 – 7 = 7 – 18

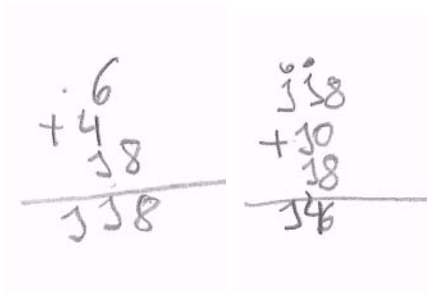


Figura F-15: Anotaciones aparte de BR en la sesión 6 para la sentencia 6 + 4 + 18 = 10 + 18

Además, cabe destacar las dificultades en el cálculo que manifiesta RL (ver Figura F-17) en la resolución de las sentencias 75 – 14 = 340 y 17 – 12 = 16 – 11 debido a su particular forma de aplicar los algoritmos estándares.

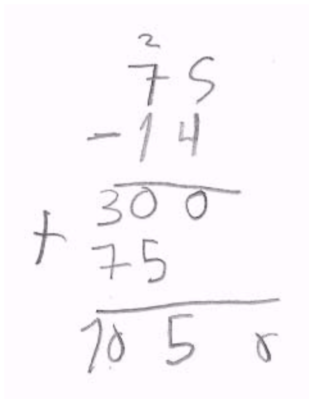


Figura F-17: Anotaciones aparte de RL durante la sesión 6 para la sentencia 75 – 14 = 340

Aspectos sintácticos

Sólo tres alumnos (BI, MA y NM), al dar resolución a alguna de las sentencias, ignoran alguno de los términos. En el caso de MA y NM ocurre al aplicar el significado *operador* del signo igual, siendo en ocasiones ignorado cualquiera de los términos del miembro derecho (ej., “[18 – 7 = 7 – 18] *Falsa porque 18-7 no son 7”,* “[257 – 34 = 257 – 30 – 4] *Verdadera porque 257-34 son 4”)* o, incluso, uno de los términos del miembro izquierdo (ej., “[16 + 14 – 14 = 36] *Falsa porque 16 + 14 no son 36”.* De forma similar BI considera únicamente los dos primeros términos del miembro izquierdo en la sentencia 122 + 35 – 35 = 122: “*Verdadera porque he sumado 122 + 35 = 157”.*

Dos alumnos (BR y MG) alteran la disposición de la totalidad de la sentencia al operar conjuntamente todos los términos de algunas de las sentencias.

Correcciones

En este caso las correcciones propuestas por los alumnos consisten en sentencias de acción o no-acción, propuestas en lenguaje simbólico aritmético (ej., 75 – 14 = 61 como corrección para 75 – 14 = 300) o en lenguaje verbal escrito (ej., "*17 – 12 es igual que 17 – 12*", "*dieciocho menos siete dan doce*" correcciones propuestas para la sentencia 17 – 12 = 16 – 11 y 17 – 8 = 8 – 17 respectivamente) y expresiones aritméticas propuestas para sustituir uno de los términos de la sentencia falsa (ej., 18 – 7 para corregir la sentencia 18 – 7 = 7 – 18).

De las sentencias propuestas como correcciones un 35% son de no-acción (ej., 18–7=7–18, 14 – 8 = 26 – 15) y el resto de acción (ej., 11 – 05 = 16, 980 –340= 640). Todas las sentencias de no-acción propuestas están formadas por dos términos que se repiten en ambos miembros ya sea en la misma o en distinta posición (ej., 7+15=7+15, 6 + 4 = 4 + 6), con la excepción de dos sentencias 7 + 15 = 8 + 16 y 7 + 15 = 8 + 14 construidas por CL y MT respectivamente. La mayoría de estas sentencias son propuestas como correcciones a sentencias falsas de no-acción.

BI no propone corrección para ninguna sentencia y otros cuatro alumnos (RL, MB, MR y JQ) no dan corrección en alguna de las sentencias que identifican como falsas. Doce alumnos (FM, RB, MAG, RL, CA, CL, MT, JM, EF, CH, MR, y CY) proponen alguna sentencia de no-acción. Otros nueve alumnos (FB, MA, DL, MB, JQ, BR, MP, VS, NM y RT) proponen únicamente sentencias de no-acción, aunque DL y JQ también proponen una expresión verbal (15 + 7, 18 – 7) para modificar el miembro derecho de la sentencias 7 + 15 = 8 + 15 y 18 – 7 = 7 – 18 receptivamente, dando lugar a sentencias de no-acción. MG propone sentencias de acción de forma verbal.

RL construye una sentencia con tres términos incluyendo el valor numérico de ambos miembros, salvo error de cálculo, como tercer miembro: 7+15=7+15= 92[102]. MA también construye una sentencia con tres términos pero, al hacer uso del significado del signo igual *operador*, la sentencia construida es difícil de interpretar: 7 + 15 = 8 + 15 = 18[103]. NM hace uso de este significado operacional del signo igual al proponer la sentencia 14 – 8 = 26 – 15 en la cual encadena operaciones sin llegar a

[102] RL obtiene 92 como resultado de la suma 15 + 7 utilizando el algoritmo estándar.
[103] MA afirma que 7 + 18 son 15.

dar el resultado de la ultima operación, el cual calcula aparte mediante el algoritmo de la resta.

Discusión de los resultados y Conclusiones de la sesión 6

En esta sesión se repiten algunas de las observaciones hechas en las sesiones anteriores. Cabe destacar dos usos inusuales del significado *operador* del signo igual: construir una sentencia con operaciones en ambos miembros en la que uno de los términos no interviene, es decir en al que se hace uso del signo igual para encadenar cadenas de operaciones, y operar todos los términos para decidir la veracidad o falsedad de la sentencia. Además, se observa por parte de un alumno que, incluso en sentencias de acción, ignora algún término. Concretamente obliga al miembro derecho a ser el resultado de operar los dos primeros términos del miembro izquierdo.

Anexo G:

Resumen y conclusiones en inglés

Summary

The research study presented in this report is a teaching experiment which aims to inquire into a teaching/learning process and to analyze what happens and how it happens. This teaching/learning process takes place when working with 8-9 years old in solving open and true/false number sentences whose design is based on basic arithmetic relations. We ask the students to solve the sentences and explain their responses and strategies. We promote the use of multiple strategies to solve the sentences and, especially, the strategies which are based on the use of arithmetic relations and properties.

Our interest is to explore the way students face this type of tasks focusing on analyzing the strategies and ways of thinking that they use, the understanding and knowledge that they display and the difficulties that they encounter. This study is a design research. Therefore, its last aim is to produce knowledge which serves to guide teaching and to identify effective teaching and learning practices, in this case, in line with the Early-Algebra proposal.

In particular, the research aims to illustrate part of the potential of the Early-Algebra proposal, considering a teaching approach which promotes the algebraization of arithmetic.

Specifically the research problem addressed is *the study of the use and development of relational thinking and the students' understanding of the equal sign displayed when working with number sentences.*

Pilot and main study. With this objective, this study extends a previous work, Molina (2005), developed during the academic year 2003/2004. In this first study we worked with a group of third graders who not previously received specific education about the use of the equal sign in non-action sentences. We analyzed their understanding of the equal sign and its development through five teaching interventions in the class. In the five teaching sessions, the students solved and discussed their responses to open and true/false number sentences which were based on basic arithmetic properties. We

also paid some attention to the study of the use and emergence of *relational thinking* in this context.

This study shows 8-9 years old students' capacity of developing understanding of the meaning of the equal sign *numeric equivalence*, starting from an operational understanding of this symbol. It also describes the students' difficulties in this process, the stages that they follow in the development of their understanding of the equal sign, and their capacity of using relational thinking to solve number sentences.

In our second study, presented in this report, we follow this line of research, focusing now more deeply in the study of the use and development of relational thinking, when solving number sentences, by another group of 8-9 years old students. This objective is facilitated by the fact that most of the participant students initially displayed understanding of the meaning of the equal sign *numeric equivalence*. These students have previously worked on solving action and non-action number sentences. The understanding of mathematical symbols is an important aspect in the teaching approach of the students' official teacher.

Relational thinking. In this study, we deepen the study of the students' capacity to use relational thinking and the way students make use of this type of thinking when solving number sentences whose design is based on basic arithmetic properties. Previously, we theoretically define and characterize this type of thinking and analyze its connections with other constructs such as number sense, operational sense, flexible quantitative thinking, quasivariable thinking and meta-conceptual strategies.

We aim to characterize different uses of relational thinking which take place when solving number sentences, providing detailed information to enable an operative description and identification of this type of thinking and to complete its theoretical definition.

There are few studies which have analyzed the characteristic of this type of thinking and its use by students in the context of arithmetic. Relational thinking, as such, has received little attention from research on mathematics education, which identifies it as a novel and interesting aspect to research about. It is also important as a construct which can help to clarify existing ideas in the Early-Algebra proposal.

In arithmetic teaching, the learning of arithmetic properties, especially commutative and associative properties, is considered. However, less attention is given to the development of strategies of thinking (Thornton, 1978). Focusing the attention on the development and use of relational thinking helps to decrease the frequent computational approach in arithmetic teaching which is considered one of the main causes of the lack of students' awareness of the structure of arithmetic and of some of the difficulties in the learning of algebra (Liebenberg, Sasman & Olivier, 1999).

From our point of view, as well as the other researchers' (Carpenter et al., 2003; Koehler, 2004), *relational thinking* can help to develop a semantic and structural learning of arithmetic, which is one of the prerequisites for the development of capacity to understand and manipulate the notational conventions of algebra, according to Booth (1989). Relational thinking has the potential to promote and facilitate the algebraization of arithmetic, to direct the attention to the structure underneath arithmetic, and to promote the development and use of number sense and operational sense.

The context chosen in this study, solving number sentences, is highlighted by Carpenter and his colleagues because of its potential to promote the use of relational thinking. This choice of this context makes the understanding of the equal sign an important aspect to consider. In addition, this understating is referred by various authors, such as Davis, (1964), Herscovics & Kieran (1980), MacGregord (1996), Radford (2000), Carpenter, Franke & Levi (2003) and Freiman & Lee (2004), as an important element in the transition from arithmetic to algebra.

Our interest regarding the understanding of the equal sign is focused on identifying the meanings of this symbol as used by the students, analyzing the way in which they are used and examining the evolution of the students' understanding through the sessions of work in solving number sentences. We analyze some local aspects of the students' understanding of the equal sign which are displayed when solving the activities proposed. In this context we also analyze the difficulties that the students encountered.

Arihmetic symbolism. Unlike other studies, in this research we do not link the work on arithmetic with concrete contexts which serve to give meaning to the symbols.

We work on a purely symbolic context. This choice is made considering that, as Resnick (1992) points out, the teaching of mathematics cannot always be centered on relations between physical quantities because mathematics also refers to abstract quantities as numbers, operators, functions, … Mathematical thinking is completely linked to a formal language which establishes constraints on mathematical reasoning and gives it great power.

Mathematics reasoning depends on formalisms; being very limited the mathematical thinking which can be done without them, not only in algebra, where it is more obvious, but also in arithmetic (Resnick, 1992). Considering the importance of symbolism in the learning of mathematics, and especially of arithmetic and algebra and its common structure, we highlight the necessity of promoting the development of its understanding.

Methodology. The research methodology used in this study coincides with the one used on our pilot study. Both studies are transformative teaching experiments guided by a conjecture; a type of study in which we recognize the characteristics of research design methodology. As it is an emergent methodological paradigm, we detail its origin and evolution, its main characteristics, strong points and limitations, and some of the criteria used to evaluate its quality.

General structure of the research study

In Figure 1 we present a general diagram of the structure of the research study as it is presented in this report. We indicate the main elements and the main interrelations between them. We distinguish two main parts: a theoretical one and an empirical one.

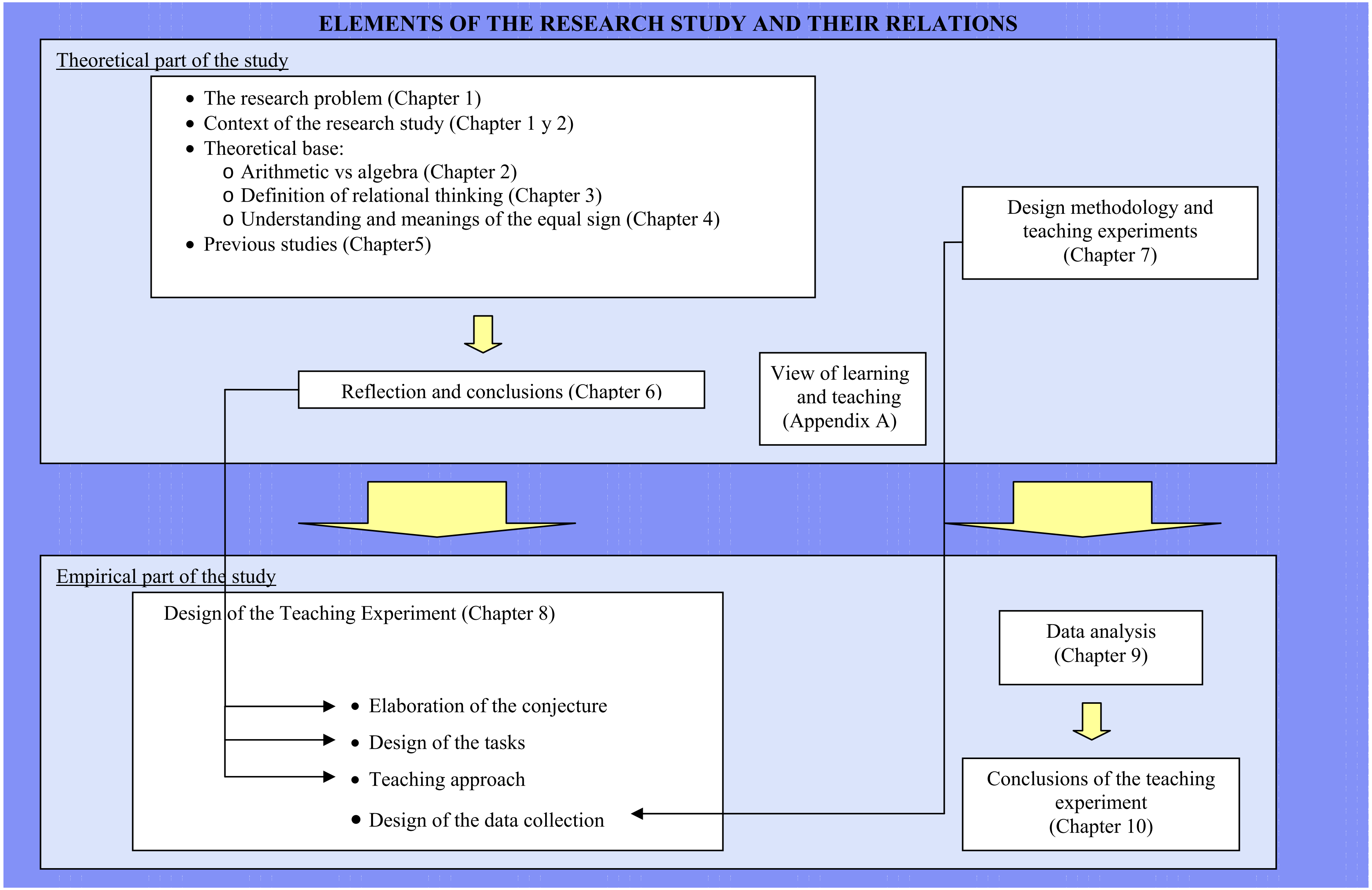


Figure 1: General structure of the research study and main relations between its parts

Within the theoretical part, we state the research problem (Chapter 1) which is placed in the context of the Early-Algebra proposal and is related to a study realized by Carpenter and some colleagues about the integration between arithmetic and algebra.

The theoretical aspects of this study are related to the differences and connections between arithmetic and algebra (Chapter 2), the definition of relational thinking (Chapter 3) and the understanding and meanings of the equal sign (Chapter 4); in addition to considering previous empirical studies related to all these aspects (Chapter 5). All these elements, together with our view of understanding, learning and teaching (summarize in Appendix A), constitute the theoretical framework of our research work (summarized in Chapter 6).

Within the theoretical part, we have identified the characteristics, origin and theoretical foundation of design research methodology (Chapter 7). We have consulted a variety of theoretical papers about this methodological paradigm which have helped to identify the aspects to take into account in the theoretical and empirical part of this work, and especially in the articulation of both parts.

The empirical part includes the design of the research experiment (Chapter 8), taking into account the reflection and conclusions extracted from the theoretical part of the study― which determine the conjecture that guides this study, the teaching approach chosen and the tasks used in the in-class interventions― as well as the knowledge about the methodology and the chosen methodological design which especially influence the design of the data collection.

This part also includes the analysis of all the collected data (Chapter 9), which are discussed within the theoretical framework that we establish in the theoretical part. The results of this analysis are contrasted with the results of previous empirical studies. The way we have developed this analysis is influenced by our knowledge about the type of methodology used as well as the type of data collected and the research objectives.

We close this research study by stating the general conclusions obtained from the whole research process (Chapter 10), which lead us to present some open questions and some future lines of continuation of this research.

Conclusions and main contributions of the study

The research here presented is a study in the field of Mathematical Education. It is devoted to deepen in the phenomenon of the understanding of the equal sign and the use and development of relational thinking; both important aspects within the proposal of integrating algebraic thinking in the learning of elementary school mathematics.

With this objective, we have consulted theoretical and empirical studies from the area of Mathematics Education and others like Mathematics, Psychology and the Philosophy. All this studies have allowed us (a) to know the current state of research about the Early-Algebra proposal: main research questions which have been addressed and results which have been obtained, (b) to define, exemplify and characterize relational thinking, mainly in the context of the work with arithmetic and algebraic expressions, (c) to study the connection of this construct with other terms which are more frequent in the literature, (d) to analyze the algebraic aspects of relational thinking in the context of the work with arithmetical expressions by starting from examining the main differences and existing connections between arithmetic and algebra, (e) to identify part of the potential and importance of this type of thinking, (f) to gather results from previous studies related to strategies and ways of performance based on the use and development of relational thinking, (g) to examine the complexity of the understanding and meanings of the equal sign which includes studying the evolution of this symbol in the history and the meanings of terms to which it is related (equality, identity, and equivalence), and (h) to know the state of research about the phenomenon of the understanding of the equal sign and the resolution of number sentences, equalities and equations by students, mainly, elementary students, as well as other related mathematical situations as the study of the equivalence of arithmetic or algebraic expressions.

Starting from our knowledge of the methodology of transformative and driven by a conjecture teaching experiments (Confrey & Lachance, 2000), which we used in our previous study Molina (2005), and considering it suitable to approach the new research problem, we have deepened in the knowledge of this methodology. First we have identified the methodological paradigm where it is located: design research. We have explored its origins, theoretical foundation and main characteristics, deepening, later, in the knowledge of teaching experiments and of the research design used.

In the empirical part of the study, we have designed the in-class intervention considering the research objectives as well as the continued analysis that has been made. We have also realized a careful data collection. The analysis of the data have allowed us to identify: (a) the strategies used by the students when solving the proposed true/false number sentences, (b) profiles of behaviour regarding the use of relational thinking, (c) the meanings of the equal sign displayed by the students, and (e) levels in the understanding of the equal sign shown by the students. We articulate the results obtained from the empirical work around these four aspects.

This chapter closes this report by summarizing the way in which we have answered the research objectives of this study. We also indicate some limitations of this work and its main contributions, and present the main open questions that have been identified.

10.1 Remembering the research problem

As it has been mentioned in the presentation of this report and, in more detail, in chapter 1, the research problem approached in this work is the study of the use and development of relational thinking and the students´ meanings of the equal sign displayed when working in solving open and true/false number sentences.

With this objective, this study extends our previous work by deepening in the understanding of the construct relational thinking as well as in the phenomenon of its use and development and students´ understanding of the equal sign. We gather here the specific objectives we have considered to analyze, in the following sections, the degree in which we have reached them.

O1. To identify the strategies that the participant students use when solving the considered number sentences, and to analyze mainly those one based on some use of relational thinking.

O2. To characterize the use of relational thinking which is displayed in the productions and interventions of these students, identifying the aspects in which the students focus their attention when they use this type of thinking.

O3 To analyze and to evaluate the understanding of the equal sign displayed by the participant students when solving and constructing open and true/false number sentences.

O4 To analyze students´ evolution throughout the sessions regarding their understanding of the equal sign and the use of relational thinking they display.

Within the development of the theoretical framework of this study we address the following objectives:

O5. To describe and characterize relational thinking in any context, and, specially, in the context of arithmetic.

O6. To analyze the connection of relational thinking, in the context of arithmetic, with other related constructs existing in the literature of Mathematical Education.

Concerning the methodology used which is within an emergent paradigm in educational research, we considered the following objectives:

O7. To identify the origins, the theoretical foundation and the main characteristics of design research and, specially, of the type of teaching experiment chosen.

O8. To analyze the potential and limitations of the chosen methodology.

O9. To identify the difficulties which emerge when applying this methodology

In following sections we detailed the way in which we have addressed and answered these objectives.

10.2 Conclusions of the empirical work

In this section we detail the degree and way in which we have fulfilled the first four objectives related to the empirical part of the study.

Objective O1. To identify the strategies that the participant students use when solving the considered number sentences, and to analyze mainly those one based on some use of relational thinking.

The analysis of the gathered data has allowed identifying with detail a diversity of strategies used by the students for solving the considered true/false number sentences. Guided by the distinction between the role of computation and relational thinking in the solution process, we have distinguished and organized the strategies identified in the students´ answers. These strategies are organized in two branches according to if, when initiating the solution process, the student proceeds to find and compare the numerical value of both sides or to observe the sentence, detect some particular characteristics or relations between its elements, and to use related arithmetic knowledge to solve it.

All except one of these strategies shows use of relational thinking as well as different moments in the solution process in which this type of thinking is displayed by the students. The sophistication of this use and the influence in it of the computational process are variable in each case. All these aspects have been discussed in chapter 9.

The identification of some key elements in the solution process has allowed us to specify the students´ flow of thinking when employing each strategy by using a diagram. In this way, in some strategies, we have made explicit the role of the computation to become aware of the structure of the sentence. We have also appreciated the importance of other aspects like the place and way in which the students´ attention is focused when starting to solve the sentence, the fluctuation of their attention during the solution process, the cognitive load of the task for the students, their arithmetic knowledge and their way to conceive the numbers, the expressions and the sentence. Therefore, we consider we have fulfilled this objective.

Objective O2. To characterize the use of relational thinking which is displayed in the productions and interventions of these students, identifying the aspects in which the students focus their attention when they use this type of thinking.

The detected strategies and identified profiles of behaviour serve to detail and to analyze the characteristics of the use of relational thinking displayed by the students.

The strategies allow describing the students´ flow of thinking when solving a sentence, the moment of this process in which they use relational thinking and the role of this thinking. The profiles focus the attention on the students´ capacity of using relational thinking distinguishing between more or less sophisticated forms of using this thinking and the elements on which this use is based.

Objective O3. To analyze and to evaluate the understanding of the equal sign displayed by the participant students when solving and constructing open and true/false number sentences.

The analysis of the students´ answers has allowed detecting four meanings of the equal sign which students display when solving and constructing number sentences: operator, expression of an action, numerical equivalence and numerical similarity. This last one has not been identified in previous studies and seems to be a result of the type of activity promoted in the classroom, the type of sentences considered and the lack of importance that some students give to the structure of the sentence. We have observed that students accept the existence of multiplicity of meanings of the equal sign and use each one when they consider suitable.

After identifying the meaning of the equal sign displayed by each student in each sentence, we have distinguished three levels in the students´ understanding of the equal sign: operational understanding, no stable understanding and advanced understanding. These levels have allowed analyzing the evolution of the students´ understanding of the equal sign through the six sessions.

Objective O4. To analyze students´ evolution throughout the sessions regarding their understanding of the equal sign and the use of relational thinking they display.

Both evolutions have been analyzed: the evolution of the understanding of the equal sign by the identification of levels of understanding, and the evolution of the use (or manifestation) of relational thinking by means of the study of the students´ profiles of behaviour.

Particularly we have appreciated the stability of the understanding of the equal sign of 14 of the 26 participant students and some one-shot no stability in some students´ understanding. This instability takes place at different moments which evidences a variable influence of the in-class interventions, in the development of the students´ understanding of the equal sign.

Regarding the evolution of the use of relational thinking, we observed that it is positive after the discussion on session 3. We also detect some reduction in the students´ manifestation of relational thinking when the influence of our in-class intervention is weaker. The data allow appreciating that students are capable of using relational thinking in solving number sentences and that the social valuation of this type of thinking highly condition its manifestation. It is specially difficulty to delimit the students´ capacity of using relational thinking or its tendency to make use of this type of thinking from the analysis of their written answers; but it is possible to detect greater evidences in the individual interviews.

10.3 Theoretical conclusions

In this section we detail the degree and way in which we fulfil the objectives O5, O6 and O7, concerning theoretical aspects about relational thinking.

Objective O5. *To describe and characterize relational thinking in any context and, specially, in the context of the arithmetic.*

From the bibliographical search of the terms thinking (think) and relation, in documents from the areas of Mathematics Education, Mathematics, Philosophy, Psychology, Logic and Language, we have defined relational thinking as the intellectual activity (internal) consisting of examining objects or mathematical situations, considering them like totalities, detecting relations between them in a spontaneous way or looking for them, and to use these relations with an objective. This objective can be to solve a problem, to make a decision or to learn more about the situation or involved concepts.

In the context of working with arithmetic and algebraic expressions, this definition is compatible with the one used by Koehler, Carpenter and colleagues; authors who have had an outstanding influence in the motivation of this research.

In this context, the objects are the algebraic and arithmetic expressions. Then relational thinking is related with the part of algebra consisting of the study and generalization of patterns and relations. It implies considering expressions from a structural perspective, as totalities, focusing the attention in the relations which form the structure of arithmetic and including the exploration and identification of patterns. In situations of computation, it implies the use of flexible strategies, related to mental computation and to the use of number sense and operational sense.

Objective O6. To analyze the connection of relational thinking, in the context of arithmetic, with other related constructs existing in the literature of Mathematical Education

We have identified nine terms that are connected to the construct relational thinking: flexible quantitative thinking, flexible computational strategies, mental arithmetic, number sense, operational sense, symbolic sense, structural sense, quasivariable thinking and conceptual meta-strategies. Their connections have been analyzed in chapter 4. We specially underline the equivalence of this type of thinking with the meta-conceptual strategies defined by Hejny, Jirotkova and Kratochvilova (2006). In both cases the student's attention and actions are focused on the structure of the situation or problem, considering it as a totality.

The other terms do not have a so direct relation. Some terms, as quasivariable thinking or flexible computational strategies are more specific, referring to manifestations of relational thinking in a restricted context. Other terms like number sense, operational sense or structural sense help to emphasize aspects that are involved when using relational thinking although they refer to very general and complex capacities.

The identification and consideration of these terms have helped to place the term relational thinking within the existing literature of the area in order to (a) describe and understand in greater depth what relational thinking include in the context of working on arithmetic and algebraic expressions, and (b) to identify empirical studies about aspects related to the use and development of relational thinking.

10.4 Conclusions related to the methodology

In this section we detail the degree and way in which we fulfil the objectives O7, O8 and O9, related to the research methodology used.

O7. To identify the origins, the theoretical foundation and the main characteristics of design research and, specially, of the type of teaching experiment chosen.

The bibliographical search made about research design, teaching experiments and, in particular, transformative and directed by a conjecture teaching experiments has allowed us to fulfil this objective. On the one hand, we highlight the influence, in its origin and theoretical foundation, of the clinical interviews, the Russian experiments of education, the psychology of Piaget and the radical and social constructivism; whose relations with this methodology have been detailed in chapter 7. In the other hand, the origins of research design are located in artificial sciences (like aeronautics), having been later adapted to educational research because of the recognition of the intrinsic complexity of the phenomena related to the teaching and learning of sciences and, specially, of mathematics, and the necessity to enhance the relevance and influences of research into practice.

We have identified the main characteristics of design research; a methodology which includes very diverse types of studies with respect to the educative context in which it takes place and the educative agents involved.

In order to deepen into the knowledge of the research design considered, we have focused later on the description of teaching experiments. These studies are characterized by the fact that the researcher acts as the teacher of the class during the in class interventions. Finally, Confrey and Lachance´s (2000) work has allowed us to detail the characteristics of transformative and directed by a conjecture teaching experiments.

Objective O8. To analyze the potential and limitations of this methodology.

The careful bibliographical search made about design research has allowed us to fulfil this objective. However, its emergent character influences the degree in which the strong points and limitations have been identified.

The different authors consulted as well as the origins and foundation of this methodology, indicate as their main strengths: the decrease of the existing distance between the educative practice and theoretical analyses as well as its capacity to promote the identification and development of new ideas, constructs, and questions to approach in another studies.

Within the limitations, we mention the amount of data that is generated, the difficulty of the comparison between designs, the lack of generality, the deliberate lack of control of many variables and the difficulty to demonstrate its quality.

O9. To identify the difficulties which emerge when applying this methodology

This objective has not been tackled till now in this report. In order to fulfil it, we gather here the main difficulties and limitations that have been detected when applying the methodology. We also propose some way to approach them.

On the one hand, we highlight the necessity to count on several investigators due to the great amount of data that is generated and to the importance of contrasting perspectives about the phenomenon in study and the analysis of the data (directed in this last case to guarantee the quality of the analysis). This limitation can be palliated by (a) closely delimiting the focus of the study and reducing, in this way, the aspects to analyze in the diversity and amount of information collected, and (b) having frequent discussions with researchers (related in different degree to the theme of the study), during the analysis of the data, about the way in which it is being developed and the results that are being obtained. These discussions, besides to contribute and to enrich the analysis of the data and the general development of the work, help to guarantee its quality.

The reduction of the aspects to analyze in the data also helps to approach one of the limitations of this methodology that has been pointed by other authors: that the argumentations and results come only from a low percentage of the gathered data.

In our case, the fact that most of the research process and data collection has been realized by one researcher has caused to give more presence to the part of research of this work than to the instructional design. This fact has also made difficult to contrast the visions of the observer and the teacher-researcher as it is recommended; however, the later observation of the video-recording of the in-class interventions has allowed addressing this contrast in some way.

On another hand, we observed that the exploratory character of this type of studies causes that all variables of the in-class intervention relevant to the considered phenomenon can not be known in advance. Some of them can be identified as relevant in the retrospective analysis. For this reason, we suggest doing a varied and exhaustive collection of data, particularly by video-recording the in-class interventions, which will allow to later explore the in-class activity and to identify new elements of interest. Similarly, some of the gathered data can be left aside when making the analysis if they are not considered to be relevant.

Since this type of studies consists of several interventions in the classroom, it becomes necessary to take into account the students´ mathematical activity between the data collection sessions. It is important to know which topics students´ work on, in order to consider its possible influences when doing the interpretation of the data. This can be a source of weaknesses for the research work, depending on the certainty of researchers´ knowledge about the students´ mathematical activity during this period.

Another limitation is originated by the intervention of one of the researchers as teacher. This double function can cause certain tension between the educational paper and the researcher paper, which the person has to put simultaneously into play. In this sense, it is necessary that the objectives of each intervention are carefully limited and described and that the teacher-researcher states to them. This fact also causes that the educational experience of the researcher is an influence in the process of intervention in the classroom.

With respect to the analysis of the data, we observe that the retrospective analysis is very complex; due to (a) the great amount of data generated by this type of studies and (b) that each session has to be analyzed in a different way, although the general aspects that are being analyzed are the same ones. In addition, we emphasize the necessity to make a radical rupture with the previous analysis made, to be able to deepen into the phenomenon to study. The preliminary and continuous analysis of the data and the retrospective analysis are substantially different. During the first one, which is to be very fast, only a partial vision of the experiment and a preliminary version of the research conjecture are available. The retrospective analysis, however, is calmer and it is based on the complete vision of the teaching experiment and requires deepening in the understanding of the situation in study. Because of these reasons, the results that are obtained from each one of these analyses are significantly different, not only in their depth. For example, in this work the classifications of the students´ performance done during the preliminary analysis of the data are not the same than the classifications of the students´ behaviour made in the retrospective analysis.

This is one of the most important difficulties in the use of this methodology, according to our experience, to be able to stay away from the analysis made during the collection of data as well as of the initial conjecture and the foundations that underneath the design of each session. In this way the analysis of the totality of the gathered data can be made with rigor and objectivity.

In this second analysis of the data, it is initially necessary to explore the totality of the data to identify the conceptual path followed by the group as well as the main changes and elements that are appreciated. It is important to pay attention to the introduction of new strategies, new actions or new forms of language. Some extreme cases allow identifying nuances within the students´ behaviours or answers. The possible interpretations of an answer allow appreciating a variety of possibilities to deepen in by contrasting with the other data. The analysis is a continuous dialectic between the data and the conjectures that are elaborated. It is important to question the way in which the proposed tasks as well as the specific interventions of the teacher-researcher contribute to the changes and development that are perceived. The exploration of the data helps to appreciate a trajectory by continuously looking in the data for evidences that support or refute the conjectures that are elaborated.

A last difficulty, mainly related to the presentation and justification of the results, is to delimit the origin of the knowledge that the researchers acquire throughout all the process, due to the continuous dialectic between the theory and the practice that takes place.

10.5 Limitations of the research study

In this section we indicate some limitations of this research study, which have been considered in its development, in addition to the limitations and difficulties of the chosen methodology which have been previously mentioned.

First, the results refer to the group of students who participated in this study. The election of this group has been accidental, caused by the availability and facilities given by their teacher to make the teaching experiment in his classroom. Although this group cannot be considered representative of all 8-9 years old Spanish students, it can be regarded as "a normal" class of this level.

The verbal methods are frequently used as a research tool and are valued in research within the areas of mathematics education and psychology, in spite of recognizing in it some limitations (Villegas & Castro, 2003). The information obtained in the data collection is limited by the students´ capacities to express their thinking in a written or verbal way. In our case, it is also affected by the presence of the researcher and, occasionally, the person who video-records the sessions. The surrounding inevitably imposes some restrictions that we have tried to palliate, in order to help students feel comfortable and to express their thinking with freedom, without being influenced by the researcher´ expectations.

With the same intention, the first in-class intervention had as main objective to facilitate the students´ familiarization with the teacher-researcher, and vice versa, as well as their adaptation to the work methodology used in the in-class intervention. In addition, the person who made the video-recording stayed all the time at the end of the classroom, to the backs of the students. In the individual interviews, we used audio-recording instead. The official teacher was always present in the classroom which facilitated the students´ participation. Nevertheless it was impossible to avoid the influence that the presence of their partners produced in some of the students restraining their oral explanations (e.g. the most hesitant students tended to participate less in the discussions).

In order to favour the validity of the collected information and to diminish the influence of these limitations, in addition to the measures already mentioned, we combined individual and group activities as well as oral and written activities in the data collection.

The influence of the researcher´ interventions in the students´ performance is one of the factors considered when making analysis of the data, although we tried to diminish it. In the presentation of this analysis in this report, we have indicated the situation in which we identify the influence of the teacher-researcher questions or comments in the students´ answer.

10.6 Contributions of this study

This work provides information of interest for researchers in the field of Mathematical Education and for elementary teachers. In relation to a particular mathematical context, to know the way in which students think, the knowledge and meanings they use, the strategies that they employ, the way in which their understanding evolves, and the difficulties they encounter are aspects of great interest within the area of Mathematics Education.

On the one hand, and after analyzing the state of the research problem, our work is a contribution to the development of knowledge about the mathematics teaching and learning process in relation with working with number sentences and the integration of algebra in the learning of arithmetic.

On the other hand, this information is useful to teachers to better understand their students´ mathematical thinking and to make decisions about the work to carry out in the classroom (Empson & Junk, 2004). The research methodology used causes that the results are of great applicability to the practice, because they have been obtained in a real teaching/learning context.

The distinctions and descriptions gathered here can promote the appreciation and development of awareness of particular aspects that may have not previously been appreciated or articulated in this way. This it is, according to Mason (in press), one of the first steps in the professional development of teachers: to extend their awareness of aspects about teaching and learning mathematics.

Studies about students´ thinking, their understanding about a mathematics concept or idea, and the strategies they used in a particular mathematics situation allow examining the way students´ structure their attention in that situation and, in general, the way they give sense to mathematics. These studies can help to see the mathematical activity from the students´ eyes and, in this way, being able to direct their actions towards new forms of attention favouring the development of their understanding.

These research studies usually lead to appreciate a richness of possibilities, about the ways of conceiving, considering or interpreting a mathematical situation and acting on it, greater than it could be previously expected.

Some authors (Baroody & Coslick, 1998; Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 2000; Empson & Junk, 2004) highlight the role of knowledge, about the development of students´ mathematical thinking, in the improvement of mathematics teaching. This knowledge helps teachers to significantly change their educative practice and beliefs and have positive effects in the learning of their students.

10.7 New perspectives and open research lines

From this study, we identify some questions of interest to be considered in research in the field of Mathematics Educacion; some of them already mentioned in previous chapters of this report.

How are the strategies identified in this study related to the strategies that students use when solving open number sentences? Are the displayed dependency and independency of doing some computation before using relational thinking, based on different types of knowledge of arithmetic relations? How do the students´ explanations (language) evolve when students develop their capacity to use relational thinking? What is a justification of the truth of a number sentence, for elementary students?

Can the transference of the use of relational thinking to other contexts be favoured? If so, how? Which is the role of relational thinking within other mathematics sub-areas such as Geometry, Statistics and Probability? What capacity of use of relational thinking is displayed by the students in other contexts? Which specific contexts of other mathematics sub-areas can be of use to promote the development, use and manifestation of relational thinking?

Are the understanding of action and non-action number sentences, the correct solving of open number sentences and the construction of true/false number sentences, three stages in the development of the understanding of the equal sign? In which order? Is the development of the meaning of the equal sign *numerical similarity* a direct consequence of our type of interventions in the classroom or of the lack of importance that the students give to the structure of the sentences? Can the following conjecture be confirmed? Conjecture: in the context of number sentences students develop their understanding of the equal sign by increasing the number of meanings they give to this symbol instead of recognizing the meaning of the equal sign *numerical equivalence* as global meaning of this symbol?

Additionally, as we indicated in chapter 6, we identify two lines of interest in which to develop the study of relational thinking: the process of generalizing arithmetical properties after students have displayed use of this type of thinking, and the use of relational thinking in algebraic contexts, in particular in the context of algebraic expressions, sentences and equations.