

R. 310-41
UNIVERSIDAD DE GRANADA

DISCURSO

LEIDO EN LA

SOLEMNE APERTURA DEL CURSO ACADÉMICO

DE 1941 - 1942

POR EL

Dr. D. Adolfo Rancaño Rodríguez

CATEDRÁTICO DE LA FÁCULTAD DE CIENCIAS



GRANADA
Imprenta H.º de Paulino Ventura
Mesones núm 52
1941

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
N.º Documento 243849
N.º Copia 243854



R.31049

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DISCURSO

LEIDO EN LA

SOLEMNE APERTURA DEL CURSO ACADÉMICO

DE 1941 - 1942

POR EL

Dr. D. Adolfo Rancaño Rodríguez

CATEDRÁTICO DE LA FÁCULTAD DE CIENCIAS

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
N.º Documento <u>243849</u>
N.º Copia <u>243854</u>



GRANADA
Imprenta H.º de Paulino Ventura
Mesones núm 52
1941

EXCMOS. SRES.:

SEÑORAS, SEÑORES:

La inflexible rigidez de un turno lleva hoy a ocupar esta Cátedra prestigiada por el desfile de tantas eminencias al más insignificante de los miembros de este Claustro sapientísimo. No quiero molestar vuestra atención exponiéndooos cuán doblemente abrumado me siento, por vuestra sabiduría y por mi pequeñez; podrían parecer tópicos de falsa modestia lo que no sería más que la revelación sincerísima de un estado de ánimo.

El Destino ha querido que al empezar mi discurso rindiendo culto a la tradición académica de dedicar un recuerdo a los que nos abandonaron, o bien para siempre, porque rindieron ya su jornada, o porque los rigores de la ley les obligaron a cesar por su edad en este noble sacerdocio del Magisterio, o porque pasaron a continuarlo a otras Universidades, y un saludo cordial a los que vienen a compartir con nosotros las tareas docentes, tenga que referirme casi exclusivamente a amigos entrañables, lo que si en algunos casos resulta para mí tristísimo, es por venturosa compensación motivo en otros de íntima alegría.

Para siempre nos abandonó aquel gran señor, que eso era ante todo, D. Rafael Acosta Ingjott, Catedrático insigne de Derecho Romano, Decano de la Facultad de Derecho y Alcalde de esta Ciudad a su fallecimiento. El tiempo transcurrido no ha borrado la impresión terrible que nos produjo la inesperada noticia de su fallecimiento a unos cuantos compañeros que re-

gresábamos a la Península de cumplir una misión académica. Toda ponderación de las prendas excelsas de inteligencia, bondad, y honda simpatía humana que adornaban a D. Rafael Acosta y de la pérdida irreparable que su muerte ha supuesto para la Ciudad de Granada, para su Universidad y para cuantos nos honrábamos con su amistad y con su afecto, resultaría pálida y ociosa.

Otra pérdida considerable, siquiera ésta por fortuna no irreparable, ha tenido la Facultad de Derecho con la marcha a la Universidad de Valencia del eminente Profesor Corts Grau. Como un señalado privilegio de la fortuna considero el haber tenido ocasión en los últimos años de intimar con Corts y de haber tratado de cerca al Profesor insigne, pensador profundo, literato culto y elegante, humorista fino, conversador ameno e inolvidable camarada. Él sabe bien cuánto hemos lamentado todos su marcha.

Al hacer este recuento de bajas y altas del personal docente de la Universidad de Granada durante el curso 1940-41, he de citar por lo que se refiere a su Facultad de Derecho a dos destacadísimos Profesores, cuyos extraordinarios méritos han proyectado sus personalidades desde el reducido ámbito universitario al otro mucho más amplio de la vida Nacional; me refiero a D. Alfonso García Valdecasas, que ha pasado de esta Facultad a la de Derecho de la Universidad Central y a D. Manuel Torres López, trasladado de Salamanca a Granada. Sería a más de ocioso, pueril, que yo tratase de descubrirlos la relevantísima personalidad de estos dos ilustres granadinos.

El Profesorado de la Facultad de Medicina se ha visto en el curso que acaba enriquecido con la valiosísima aportación de dos insignes cirujanos: D. Juan Sánchez Cózar y D. Enrique Hernández López y del ilustre Profesor de Farmacología don Emilio Muñoz Fernández. Fuí condiscípulo del primero en el preparatorio de Medicina, como entonces se llamaba, en la Universidad Central y ya sabéis que nadie mejor que los compañeros para juzgar los méritos y cualidades de un estudiante; fuí pues testigo de mayor excepción desde los comienzos de su carrera de los relevantísimos que concurren en D. Juan Sánchez Cózar. Ya comprenderéis que me es particularmente grato dar la bienvenida a esta ilustre Universidad, en un acto como el de hoy, a mi dilecto y eminente condiscípulo, que fué, como el Pro-

fesor Hernández, alumno brillantísimo de esta Facultad de Medicina.

En cuanto al ilustre Profesor D. Emilio Muñoz Fernández, no ha de coartar el afecto que le profeso el elogio y ponderación de sus méritos insignes; fué como alumno gala de esta Facultad de Medicina y constituye uno de los legítimos motivos de orgullo de la misma, a la que ya perteneció como Profesor Auxiliar y a la que ha de seguir prestigiando desde el más elevado sitio que sus méritos relevantes le han permitido conquistar en plena juventud. No se trata de una esperanza más o menos fundada, pues su extraordinaria capacidad le ha permitido obtener ya triunfos resonantes en los más diversos campos: el Laboratorio, la Clínica, la Cátedra, la Investigación y la Industria.

A cambio de estas valiosísimas aportaciones, la Facultad de Medicina de Granada se ha visto privada en el curso que ahora acaba del inestimable concurso del joven y eminente Profesor Gay Prieto al que sus méritos han llevado a ocupar la Cátedra de Dermatología de la Universidad Central, dejando en este Claustro un hueco difícil de llenar.

Estrellas fugaces han sido por su breve paso por esta Facultad de Medicina los no menos ilustres Profesores: Laguna de Pediatría, García Miranda, de Oftalmología y Balén, de Higiene. A todos ellos les deseamos en las nuevas Cátedras ganadas por concurso los éxitos científicos a que les hacen acreedores sus méritos.

He dejado de intento para el final a mi querida Facultad de Ciencias, la cual ha sido compensada con creces por el Destino en el curso último de desgracias pasadas. Efectivamente, hemos tenido la fortuna singular de que por una vez no se aplicaran los rigores de la Ley en el caso de la jubilación por edad de ese dechado de Maestros que se llama D. Juan Tercedor, el cual ha podido mantener encendido durante el curso pasado el fuego sagrado de la vocación por las Matemáticas en un plantel de entusiastas jóvenes. Nunca agradeceré bastante la Facultad al Sr. Ministro el servicio señaladísimo que le prestó el día que firmó la Orden autorizando al sabio Maestro, en la plenitud de su vigor físico e intelectual, para continuar en el ejercicio de la función docente que tan a maravilla realiza.

Por si esto era poco, dos Profesores jóvenes llenos de entusiasmo y de prestigio han venido a honrar a nuestra Facultad:

el Profesor Burriel con el que me une antigua y entrañable camaradería y el Profesor Solé, cuyo mejor elogio será hacer público el temor que desde que vino sentimos por perderlo para nuestra Facultad, donde la no existencia de Sección de Naturales le dificulta el logro de la máxima aspiración de un Maestro, formar Escuela.

* * *

La elección de asunto para un discurso en un acto como éste, es un arduo problema para un Profesor de Ciencias. Los abstrusos temas de nuestra especialización no son a propósito como lo son los de Historia, Arte, Literatura, Política, etc., para entretener al público vario y heterogéneo de estos actos. Cabe sí, hacer una vulgarización de un tema de actualidad científica; pero la dificultad estriba en que esta vulgarización siendo original tenga la altura científica que exige esta Tribuna; las vulgarizaciones posibles han sido ya hechas de manera magistral por los grandes artífices de la nueva Ciencia, que son los únicos verdaderamente capacitados para hacerlas, y están recogidas en manualitos asequibles y que han obtenido una gran difusión entre nosotros; tales por ejemplo en el tema siempre candente de la constitución de la materia, uno de los capitales de la disciplina que cultivo, las que han hecho el príncipe Luis de Broglie en «Materia y Luz», Jean Thibaud en «Vida y transmutaciones de los átomos», Maurice de Broglie en «Átomos, radioactividad, transmutaciones» o el matrimonio Joliot-Curie en la conferencia sobre «Transmutación» recientemente publicada en la Revue des Sciences. Después de lo hecho por estas primeras figuras de la Ciencia actual, sería insensato en mí pretender vulgarizar con originalidad en estos dominios. Como tampoco se trata de dar una explicación más de Cátedra, renunciando por de contado a haceros pasar un rato ameno, de lo que me considero incapaz, he querido siquiera, que de un discurso de estos pudiera deducirse alguna utilidad para los estudiosos, y al recordar que algunas veces discursos de apertura de curso o de ingreso en Corporaciones sabias de mis Maestros me han simplificado extraordinariamente la preparación bibliográfica de algún tema difícil, tratado únicamente en revistas poco asequibles, he pensado, maestro como lo soy por vocación entu-

siasta, prestar algún servicio a mis discípulos resumiendo lo mejor que he podido un asunto del que no hay bibliografía que yo sepa en nuestra lengua y de la que es poco asequible la publicada en otros idiomas.

Todos sabéis que las grandes Teorías de la Física actual, o sea de la Física de nuestro siglo; la teoría de la Relatividad de Einstein, la Mecánica Cuántica absoluta de Heisenberg, Born y Jordan, la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger, la Mecánica Ondulatoria relativista de Dirac, etc., han requerido el empleo de algoritmos matemáticos nuevos, que han tenido que crear los autores de las nuevas teorías físicas por no bastarles los de la Matemática clásica, o a los que se ha dado por lo menos por dichos autores un nuevo desarrollo. Así la Mecánica relativista requirió el empleo del Cálculo diferencial absoluto; la Mecánica cuántica absoluta o nueva Mecánica cuántica de Heisenberg, el Cálculo de matrices (de las matrices de Hermite, el gran matemático francés del siglo pasado), la Mecánica ondulatoria de Schrödinger, el cálculo de operadores y la mecánica ondulatoria relativista, que es la que mejor permite abordar los problemas del electrón, el Álgebra simbólica o Álgebra de los estados y de los observables de Dirac, etc.

De estos diversos algoritmos se han ocupado entre nosotros: aquel sapientísimo Profesor, ya fallecido por desgracia para la Ciencia española, D. José M.^a Plans, del Cálculo diferencial absoluto; el cálculo de matrices ha sido tratado en su magnífico discurso de ingreso en la Academia de Ciencias por mi sabio Maestro D. Julio Palacios; de éste y del de operadores de Schrödinger se ocupa el excelente tratado de Castelfranchi tan divulgado en nuestro país «Física Moderna»; pero del Álgebra simbólica de Dirac no se ha escrito nada en nuestro idioma, y a llenar esta laguna de nuestra bibliografía se dirige esta modesta disertación, que se limita pues a dar un resumen del nuevo algoritmo matemático del joven y gran físico inglés.

INTRODUCCIÓN

Como dice nuestro gran Ortega Gasset, desde 1901 y coincidiendo peregrinamente con la fecha inicial del nuevo siglo comienzan a elevarse sobre el horizonte intelectual pensamientos de nueva trayectoria. Esto que puede observarse en casi todas las ciencias, es especialmente cierto para la Física, ya que la nueva Física teórica que empieza a levantarse a comienzos de nuestro siglo y que tan portentoso desarrollo ha adquirido en los años transcurridos del mismo, tiene rasgos y características que la diferencian totalmente de la Física clásica.

Esta, como hace observar Dirac, había considerado el Universo, como un conjunto de elementos observables, (partículas, flúidos, campos, etc.) que se mueven según leyes definidas y del cual podíamos pues tener una imagen perfectamente determinada en el espacio y en el tiempo. A esta concepción del Universo corresponde una Física con un fin concreto: elegir entre todas las hipótesis posibles relativas al mecanismo y a las fuerzas que unen a los elementos observables entre sí, aquella que nos permita darnos cuenta lo más sencillamente posible de su modo de comportarse. Pero en los últimos tiempos los físicos han caído en la cuenta de que las leyes fundamentales de la Naturaleza no se refieren a nuestra imagen del Universo, sino a la realidad que aquella pudorosamente oculta, a ese substratum eternamente desconocido del cual no podemos construir nuestra representación en el espacio y en el tiempo sin introducir elementos extraños que no tienen nada que ver con el fondo de las cosas, y que para llegar a formular estas leyes es indispensable el empleo de la «teoría de las transformaciones», que nos permite caracterizar los elementos importantes del Universo asimilándolos a los invariantes de ciertas transformaciones (o mejor aún a magnitudes casi invariantes, es decir, a cantidades que se transformen según leyes muy sencillas). Los hechos que nosotros observamos no son más que las relaciones de estos casi invariantes con un sistema de referencia determinado, elegido generalmente de manera que se introduzcan simplificaciones cómodas, pero cuya elección no tiene ninguna importan-

cia desde el punto de vista teórico. La característica esencial de los métodos de la Física teórica moderna consiste precisamente en el empleo cada vez más extenso de la teoría de las transformaciones, tal como fué aplicada primero a la teoría de la relatividad y después a la de los Cuanta; es más, según todas las apariencias esta característica, es decir, este papel preponderante, jugado por la teoría de las transformaciones en la Física moderna habrá de acentuarse cada vez más en la Física del porvenir. El progreso de dichos métodos consistirá en buscar ecuaciones que sean invariantes para transformaciones cada vez más generales.

Desde un punto de vista puramente filosófico esto significa implícitamente que se tiene cada vez más en cuenta en su justo valor el papel jugado por el observador, quien introduce en sus observaciones las regularidades que en ellas se manifiestan, y prueba de este modo la ausencia de lo arbitrario en los procedimientos de la Naturaleza.

Hecha abstracción del andamiaje matemático y desde un punto de vista puramente conceptual se comprueba que las nuevas teorías están construídas partiendo de conceptos que no pueden ser descritos por medio de nociones intuitivas o que nos sean familiares y cuyo significado no se comprende perfectamente hasta después de haberse familiarizado con sus propiedades y con su empleo.

Si se abordan las nuevas teorías desde el punto de vista matemático nos encontramos, como he dicho antes, con la necesidad del empleo de algoritmos matemáticos nuevos. El Análisis matemático sigue constituyendo el instrumento ideal para estudiar conceptos abstractos de cualquier naturaleza que sean y su potencia en este aspecto es ilimitada; por esta razón todo tratado concerniente a la nueva Física que no se limite únicamente a describir hechos experimentales debe ser necesariamente un tratado matemático: pero no hay que olvidar que las Matemáticas no son para el físico más que un instrumento, formidable y poderosísimo instrumento, pero instrumento al fin, y hay necesidad de llegar a dominar las ideas físicas fundamentales sin necesidad de recurrir constantemente a su expresión analítica, manteniendo la Física en primer plano y descubriendo siempre que sea posible el sentido físico oculto bajo el formalismo matemático.

Por lo que se refiere a la forma matemática bajo la cual se puede presentar la teoría, pueden elegirse dos métodos de exposición distintos. De una parte el método simbólico, utilizando directamente de una manera abstracta las magnitudes fundamentales (los invariantes de las transformaciones) y de otra parte el método de las coordenadas o de las representaciones, que emplea sistemas de números correspondientes a estas magnitudes. Generalmente se expone la mecánica cuántica, utilizando el segundo de estos métodos. Se la designa con el nombre de Mecánica ondulatoria (Schrödinger) o mecánica de matrices (Heisenberg) según que los elementos físicos sobre los cuales se fija principalmente la atención sean los estados del sistema o sus variables dinámicas. Tiene la ventaja de requerir conocimientos matemáticos más asequibles y de seguir el desarrollo histórico de la teoría. Pero el método simbólico (Dirac), de cuyo aparato matemático pretendemos hacer un resumen, penetra más profundamente en la naturaleza de las cosas y en la esencia íntima de las nuevas ideas y permite expresar las leyes físicas de una manera elegante y concisa; su empleo es de esperar que se generalice más y más a medida que el algoritmo matemático por él requerido se desenvuelva más.

LOS FUNDAMENTOS FÍSICOS DEL ALGORITMO

I. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.

Ondas y partículas.

Como es sabido la Electrodinámica clásica, esa bella y elegante teoría, una de las mejor construídas de la Física del siglo pasado, se muestra en muchos aspectos inconciliable con los hechos experimentales. En particular para explicar la estabilidad de los edificios atómicos, sin la cual no podrían atribuirse a la materia propiedades físicas y químicas determinadas, hubo de renunciar Bohr a las leyes de la Electrodinámica y reemplazar la Mecánica clásica por una nueva disciplina, debida al genio de Planck, a la que se dió el nombre de Mecánica Cuántica, porque los rasgos más llamativos (aunque no los más impor-

tantes), que la distinguen de la antigua Mecánica, son la variación discreta de ciertas variables dinámicas y la existencia de discontinuidad en ciertos fenómenos físicos.

Aunque parecía imposible modificar la Electrodinámica clásica sin destruir completamente su armonía y su coherencia, puede decirse sin incurrir en exageración que la Mecánica Cuántica sobrepasa en elegancia y en belleza a la teoría clásica, gracias a que las modificaciones que ha sido necesario introducir en aquella, aún cuando fundamentales y suponiendo el empleo de conceptos completamente nuevos, son poco numerosas y a que las características de la teoría clásica a que debía ésta su atractivo pueden ser trasladadas sin cambios apreciables a la nueva teoría.

La necesidad de una modificación radical de las leyes y conceptos de la Mecánica clásica se hace aún más imperiosa cuando se examinan los hechos experimentales referentes a la naturaleza de la luz.

Desde el origen de la Ciencia dos concepciones fundamentalmente distintas se disputan la explicación de dicha naturaleza; la hipótesis corpuscular o de emisión y la hipótesis ondulatoria. La primera sospechada ya por Empédocles (siglo V antes de J. C.) en Grecia, ha sido expresada por Kepler. Laplace y desarrollada sobre todo por Newton (1642-1727). La segunda, que se remonta a Aristóteles ha tenido como partidarios a Descartes, Euler y sobre todo a Huyghens (1629-1695). Según Newton la luz está formada por corpúsculos extraordinariamente pequeños, ligeros, proyectados por los cuerpos luminosos. Huyghens por el contrario consideraba la luz como un movimiento vibratorio de un medio elástico, fluido infinitamente sutil, el éter, que escapa a nuestros sentidos pero que está extendido por todas partes, hasta en el vacío más perfecto. Las célebres experiencias de Fresnel (1788-1827) sobre la interferencia, la difracción y la polarización y la experiencia de Foucault (1862) sobre la velocidad de la luz en el aire y en el agua fueron decisivas a favor de la teoría ondulatoria, que daba una explicación sencilla y natural de los fenómenos ópticos más complicados conocidos hasta fines del pasado siglo. Maxwell desarrollando la teoría de Faraday sobre propagación a distancia de las acciones eléctricas y magnéticas, completó y precisó las ideas de Huyghens creando la teoría electromagnética de la luz. Según

Maxwell un rayo luminoso debe ser considerado como una perturbación electromagnética que se propaga por ondas. La vibración eléctrica y la vibración magnética son perpendiculares entre sí y a la dirección de la propagación de las ondas. Por otra parte toda perturbación vibratoria de naturaleza electromagnética debe poseer todas las propiedades de la luz: interferencia, refracción, polarización, velocidad de propagación, etc. Desarrollando su teoría de carácter principalmente matemático y considerada como una de las más bellas manifestaciones de la inteligencia humana (Boltzmann en el prólogo de una obra suya dedicada a la teoría de Maxwell, sintetizó su admiración por el prodigioso edificio que inmortalizó al gran físico inglés en la siguiente frase: «Ist es ein Gott der diese Zeichen schrieb»), Maxwell dió las ecuaciones célebres que ligan las propiedades eléctricas y ópticas de los cuerpos materiales. Las experiencias célebres de Hertz (1888) sobre las descargas oscilantes confirmaron brillantemente la teoría maxwelliana. Las ondas electromagnéticas producidas por Hertz se propagaban con la velocidad de la luz y poseían todas las propiedades previstas por Maxwell; no diferían de las radiaciones ordinarias más que por su longitud de onda mayor de un metro. Hoy en T. S. H. se producen ondas hertzianas de varios kilómetros de longitud. Se pueden por otra parte producir por descargas eléctricas ondas que tienen aproximadamente la misma longitud que los rayos infrarrojos. No hay duda de la identidad de naturaleza de las diversas radiaciones: ondas hertzianas, rayos infrarrojos, radiaciones visibles y ultravioleta, rayos X, rayos γ ; rayos ultrapenetrantes o cósmicos. Todas estas radiaciones son consideradas como vibraciones electromagnéticas de longitudes de onda diferentes.

La extensión hecha por Einstein de la teoría de los Cuanta de Planck admitiendo para la luz una naturaleza atómica al considerarla compuesta de partículas de pequeñísimas dimensiones, llamadas «fotones», cada una de las cuales tiene una cantidad de movimiento y una energía perfectamente definida, funciones de la frecuencia, con una existencia tan real como los electrones o como cualquier otro género de partículas de las que estudia la Física, y que serían también indivisibles (no se ha observado nunca una fracción de fotón y podemos admitir sin temor a equivocarnos que no existen dichas fracciones);

gracias a cuya teoría de los fotones pueden explicarse fenómenos tan interesantes como el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton, la difusión de la luz por los electrones libres etc., que no encuentran explicación mediante la teoría ondulatoria, supone un retorno audaz a la teoría corpuscular de Newton y un renunciamento a la teoría de Huyghens que considera a la luz como un fenómeno ondulatorio. Pero por otra parte esta última teoría es la única capaz de explicar numerosos fenómenos: difracción, polarización, interferencia, incomprensibles en la teoría corpuscular.

La interferencia, por ejemplo, considerada en la teoría ondulatoria como una superposición de varios movimientos vibratorios con un efecto de reforzamiento o debilitación ¿cómo se podría explicar e interpretar en la teoría de los Cuanta?, ¿de qué modo los fotones al encontrarse pueden reforzarse o debilitarse el uno al otro sin que varíen las cantidades de energía correspondientes a cada quantum? Pues si variase la energía debería variar también la frecuencia y se tendría el cambio de una radiación por otra, lo que no corresponde a la realidad. ¿Cuál es la significación de la frecuencia misma en la teoría de los fotones?

Así pues, en la fase moderna de la lucha entre las dos teorías de la luz ocurre este hecho singular: por una parte existen un conjunto de problemas perfectamente claros desde el punto de vista corpuscular; por otra parte ocurre todo lo contrario para otro grupo de fenómenos. En efecto todos los problemas que se refieren a la absorción o a la emisión de la energía radiante, es decir, la totalidad de los fenómenos que residen en los átomos y las moléculas, están en contradicción completa con la teoría ondulatoria y se explican perfectamente por la teoría cuántica.

Puede ilustrarse así la extraña situación en que se encontraba la Física en 1926 y que se conoce con el nombre de «crisis de la Física». Imaginemos dos cuerpos M y N separados por una distancia arbitraria, todo lo que ocurre en M y en N es el campo de la teoría cuántica, en tanto que lo que pasa entre M y N es el reino de la teoría ondulatoria. En otros términos, el principio y el fin del flujo luminoso pertenecen a los cuanta, el medio a las oscilaciones y a las ondas. Es evidente, sin embargo, que no se pueden introducir dos hipótesis de carácter comple-

tamente distinto para explicar las diversas partes de un mismo fenómeno. Se trata de saber cómo hacen los quanta, los fotones emitidos por el cuerpo emisor M para dispersarse en el espacio en ondas y para replegarse luego de nuevo en el cuerpo absorbente.

Pero hoy puede considerarse la crisis completamente vencida; las nuevas mecánicas: ondulatorias de Broglie y de Schrödinger, la nueva mecánica cuántica de Heisenberg, Born y Jordan, con respecto a la cual la teoría de Planck-Einstein se llama ya teoría cuántica clásica, la ondulatoria relativista de Dirac, han resuelto la dificultad permitiendo dar una teoría coherente de la luz que engloba la explicación de todos los fenómenos conocidos, admitiendo una asociación de ondas y corpúsculos, que no es única en el caso de la luz, sino que es completamente general. Las ondas dirigen a los fotones y en general a todas las partículas a ellas asociadas de una manera incomprensible en la mecánica clásica, dando lugar en condiciones apropiadas a fenómenos de interferencia y difracción.

La influencia de las ondas sobre el movimiento de las partículas se hace sentir tanto menos cuanto mayor es la masa de éstas y no puede ser demostrada fácilmente más que en el caso de las partículas más ligeras, es decir, de los fotones. Las nociones de onda y partícula deben ser consideradas como dos abstracciones utilizadas para describir una misma realidad física. No se debe representar esta realidad como algo que contenga a la vez ondas y partículas que actúan las unas sobre las otras, ni tratar de construir un mecanismo que pueda describir correctamente sus relaciones recíprocas, pues toda tentativa de este género iría precisamente contra los principios básicos del progreso de la Física moderna. La Mecánica cuántica no hace más que intentar formular las leyes fundamentales de tal manera que se pueda deducir de ellas sin ambigüedad lo que pasará en condiciones experimentales dadas. Todo intento de penetrar en el mecanismo de las relaciones entre ondas y partículas más profundamente de lo que exige este fin preciso y concreto, sería inútil y desprovisto de sentido.

La polarización de los fotones

A pesar de la importancia considerable que en la Física moderna tiene esta idea de la asociación de ondas y partículas no es, sin embargo, más que un caso particular de un principio mucho más general: «el principio de superposición», idea fundamental de la nueva Mecánica cuántica, punto inicial, a partir del cual empieza ésta a desviarse de la teoría clásica.

Para analizar este principio, vamos a considerar un caso particular, muy sencillo, suministrado por el estudio de la polarización de la luz.

Como quiera que cuando se provoca la emisión de electrones por medio de luz polarizada en un plano determinado, existe una dirección privilegiada de emisión electrónica, habrá que considerar a un rayo de luz polarizada en una cierta dirección, constituido por fotones polarizados en la misma dirección; así que en lo sucesivo diremos que cada fotón se encuentra en un cierto «estado de polarización». Veamos cómo podemos explicar, mediante estas ideas, la resolución de una luz dada en sus componentes polarizados y la recombinación de estos componentes.

Supongamos que al pasar por un polarizador un rayo de luz polarizada en un plano dado, se resuelva en dos componentes, cuyos planos de polarización formen con el plano del rayo incidente ángulos α y $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Según la óptica clásica, las relaciones de las intensidades de los dos componentes a la intensidad del rayo incidente serán, respectivamente, $\cos.^2 \alpha$ y $\sin.^2 \alpha$. En nuestro lenguaje, diremos que en el rayo incidente los fotones están en el estado de polarización 0, y en los dos componentes en los estados α y $\alpha + \frac{\pi}{2}$. ¿Cómo explicar lo que ocurre al atravesar un fotón el polarizador? ¿Cómo los fotones que están en el estado de polarización 0 se transforman en fotones en los estados α y $\alpha + \frac{\pi}{2}$? Pero antes de resolver esta cuestión, se nos plantea otra cuestión previa. ¿Podemos llegar a conocer por medio de una experiencia lo que ocurre cuando un fotón atraviesa un polarizador? La experiencia más directa que podríamos disponer, consistiría en utilizar un rayo de luz

formado por un sólo fotón y medir la energía de cada uno de los dos rayos en que se le puede descomponer. Conforme a las previsiones de la Mecánica cuántica, se obtendrá como resultado de la medida, que la totalidad de la energía del rayo incidente está concentrada: o bien en uno de los componentes, o bien en el otro, pero nunca repartida entre los dos; la experiencia no revela jamás la existencia de fracciones de fotón. Si repitiésemos la experiencia un gran número de veces, en un número de casos igual a la fracción $\cos.^2 \alpha$ del número total, veríamos que toda la energía estaría concentrada en el componente α y un número de veces igual a la fracción $\sin.^2 \alpha$, la energía estaría acumulada en el componente $\alpha + \frac{\pi}{2}$; o sea, que el fotón tiene la probabilidad $\cos.^2 \alpha$ de encontrarse en el componente α y la probabilidad $\sin.^2 \alpha$ de aparecer en el componente $\alpha + \frac{\pi}{2}$; valores de las probabilidades que conducen cuando el número de fotones del rayo incidente es grande a la distribución de la energía dada por la Óptica clásica.

La individualidad del fotón queda, pues, salvaguardada, si bien es a expensas del determinismo. El resultado de una experiencia no queda determinado por las condiciones iniciales, que el observador puede modificar a su antojo, como exige la teoría clásica. A lo sumo, puede preverse la probabilidad de obtener un resultado u otro. Esta indeterminación característica de la Mecánica cuántica está en contradicción con las ideas clásicas, y parece indicar una derogación del principio de causalidad. Ahora bien, como la observación experimental misma provoca inevitablemente (según las leyes generales de la Mecánica cuántica), un cambio de fase de magnitud indeterminada e imprevisible, puede atribuirse la indeterminación del resultado, como ya hizo observar Bohr, a la incertidumbre de que está afectada la perturbación producida por la medida, con lo cual la aparente derogación del principio de causalidad podría ser atribuida a una imperfección teóricamente inevitable de nuestros medios de observación. Observemos de pasada la imposibilidad de recombinar después de la medida, los dos componentes, de manera que se consigan efectos de interferencia.

Volvamos a nuestro primer problema y tratemos de describir lo que le ocurre al fotón durante la experiencia; pero advirtamos que no se trata de una descripción al modo de las

de la teoría clásica, por medio de una imagen continua, sino más bien de un lenguaje convencional, útil para ayudarnos a deducir los resultados experimentales y para recordarlos.

Es necesario suponer que entre los diferentes estados de polarización de un fotón, existe una relación tal que un fotón que se encuentra en estado 0, pueda ser considerado como si se encontrase simultáneamente en parte en el estado α , y en parte en el estado $\alpha + \frac{\pi}{2}$; lo mismo podría considerársele encontrándose en parte en el estado β , y en parte en el estado $\beta + \frac{\pi}{2}$, siendo β un ángulo de polarización cualquiera, o en dos estados de polarización, correspondientes a dos direcciones, que no formasen entre sí ángulo recto, o en más de dos estados a la vez; hay, pues, muchas maneras de describir un fotón: legítimas todas y equivalentes desde el punto de vista teórico, aunque la más sencilla de todas es, naturalmente, la que lo sitúa totalmente en el estado 0. Cuando nos limitamos a decir que un fotón se encuentra distribuido entre dos o más estados, no damos más que una descripción puramente cualitativa, sin embargo, en la teoría matemática del problema físico tratado, se la precisa cuantitativamente, introduciendo números característicos de cada distribución y que fijan los «pesos» respectivos de los diferentes estados.

Es muy difícil imaginarse un fotón que se encuentra simultáneamente en parte en un estado y en parte en otro estado distinto, y aún más difícil imaginarse esta situación como equivalente a la del fotón, cuando se encuentra parcialmente en otros dos estados distintos de los anteriores o a la del fotón cuando está todo él en un estado único; no tenemos, sin embargo, más remedio si queremos avanzar en las nuevas ideas, que familiarizarnos con estas relaciones entre los estados del fotón y coordinar en una teoría matemática coherente (precisamente la que pretendemos exponer), las leyes a que obedecen.

La interpretación de la acción del polarizador en la experiencia de polarización, antes descrita, es muy sencilla si se considera que el fotón incidente está en parte en el estado α , y en parte en el estado $\alpha + \frac{\pi}{2}$. El polarizador separa los dos componentes: α y $\alpha + \frac{\pi}{2}$ en dos rayos distintos, y diremos

que el fotón que ha atravesado el polarizador está en parte en uno de los rayos con la polarización α , y en parte en el otro con la polarización $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Esta es la descripción más sencilla posible de la experiencia en cuestión. Podría también suponerse al fotón distribuido entre tres o más estados.

Atendamos ahora a lo que ocurre cuando medimos la energía de uno de los componentes: obtenemos como resultado de la medida o la energía total del fotón o 0; luego el fotón que estaba en parte en uno de los rayos y en parte en el otro, debe cambiar bruscamente y encontrarse entero en un sólo rayo; cambio brusco que puede ser atribuido a la perturbación introducida necesariamente por la medida; es imposible prever en qué rayo se encontrará el fotón, y lo único que podemos es calcular las probabilidades de cada uno de los dos resultados posibles, con arreglo a la distribución del fotón en los dos rayos. Además, esta manera de describir lo que le ocurre al fotón durante la experiencia, conduce a una conclusión importante, ya mencionada antes: la imposibilidad de hacer interferir de nuevo los dos rayos, después de haber medido la energía de uno de los dos componentes. Efectivamente, como demuestra la teoría matemática, la interferencia tiene lugar por superposición de los dos rayos, cuando el fotón se encuentra en parte en uno de ellos y en parte en el otro; pero si las operaciones que nos conducen a la medida de su energía obligan al fotón a pasar por completo a uno de los dos rayos, no podrá, de ninguna manera, interferir con el otro, en el cual no hay fotón.

Véase, pues, cómo la idea nueva, un poco vaga quizás, de considerar al fotón en parte en un estado y en parte en otro nos permite explicar la evolución del fotón durante la experiencia. A primera vista puede parecer que, en realidad, no hemos resuelto nada con la introducción de estas nuevas ideas, que todo se ha reducido al empleo de un nuevo lenguaje convencional, que no nos enseña nada que no supiésemos antes; pero esta suposición se desvanece al ver que esas ideas nos permiten resolver todas las cuestiones que nos plantea la experiencia, y con esto debemos conformarnos, pues a la verdad el único objeto de la Física teórica es calcular y obtener resultados comparables a los resultados experimentales. Además,

no son tan vagas nociones, que nos permiten precisar, como hemos hecho antes, que cuando se mide la energía en uno de los rayos, se introduce en él una perturbación que imposibilita toda interferencia ulterior; eso, sin haber pasado del aspecto cualitativo de la teoría, que cuando aportemos elementos cuantitativos, se verán aún más claramente las ventajas de la nueva teoría sobre las ideas verdaderamente vagas de las teorías clásicas que, por otra parte, bastan para resolver en muchas experiencias de Óptica elemental los problemas relativos a los resultados observados, y en estos casos la nueva teoría no tiene nada que añadir a lo ya conocido; pues el objeto de las nuevas Mecánicas cuánticas es ensanchar el campo de las cuestiones, que pueden explicarse por ella, pero no el dar soluciones más detalladas que las que la experiencia pueda revelar.

Superposición e indeterminación.

Para generalizar las nuevas ideas utilizadas en la descripción del fotón a un sistema atómico cualquiera, o sea, a un conjunto de electrones y de núcleos atómicos sometidos a su interacción recíproca, hemos de empezar por generalizar el concepto de «estado». Se dice que un fotón se encuentra en un determinado estado de polarización cuando se le ha obligado a atravesar ciertos y determinados aparatos de polarización; del mismo modo, diremos que un sistema atómico está en un estado dado cuando ha sido preparado de una manera determinada, que puede reproducirse a voluntad indefinidamente y cuyo método de preparación del sistema puede tomarse como definición del estado considerado. Tenemos, además, que admitir que entre los estados de un mismo sistema existe una relación tal, que un sistema que se encuentra en un determinado estado, pueda también considerarse como si se encontrase en parte en cada uno de dos o varios estados distintos. El estado inicial debe también considerarse como resultante de dos o varios estados más, por medio de una especie de «superposición», inconcebible dentro del marco de las ideas clásicas, y lo mismo otro estado cualquiera puede considerarse como resultado de la superposición de dos o varios estados distintos, y esto de una infinidad de maneras diferentes. Inversamente, dos o más estados cualesquiera pueden superponerse para dar un nuevo

estado, y así, como ya dijimos, puede considerarse a un fotón como estando enteramente en un estado único, aún cuando se encuentre en parte en el rayo de polarización α y en parte en el rayo de polarización $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Las propiedades de un estado formado por la superposición de otros dos son, en cierto modo, intermedias entre las de los dos estados componentes, a las que se aproxima, más o menos, según el peso mayor o menor con que intervengan estos estados en el proceso de superposición. El nuevo estado queda completamente definido por los dos estados componentes, cuando se conocen sus pesos relativos y su diferencia de fase; la significación precisa de los términos «peso» y «fase», la veremos al estudiar más adelante la teoría matemática.

Llegados a este punto, tenemos que modificar ligeramente la significación del término «estado». De ahora en adelante, consideraremos el estado de un sistema definido por la situación de éste durante un intervalo indefinido de tiempo y no por su estructura en un instante determinado; la noción de estado no se refiere, pues, a una región del espacio de tres dimensiones, sino más bien a una región del Universo de cuatro dimensiones.

Un sistema que después de una preparación adecuada se encuentre en un cierto estado, permanecerá en este estado en tanto que no sea perturbado, lo cual no quiere decir que no sufra modificación alguna revelable experimentalmente, sino que prosiguirá su evolución perfectamente definida, pasando por una serie de transformaciones previstas por la teoría de los Cuanta y que, por definición, se consideran como pertenecientes al estado considerado. Cuando una causa cualquiera actúa sobre el sistema, se puede o bien considerar a éste como efectivamente perturbado por un elemento extraño, que modifica su estado, o bien, considerar a la influencia perturbadora como si formase parte del sistema y contribuyese a definirlo; en este último caso, si englobamos igualmente en el sistema a los efectos de la perturbación, puede decirse que aquél no hace más que proseguir su evolución en un estado único y bien determinado. En cada caso se escogerá de estas dos interpretaciones la que resulte más cómoda.

Ejemplo de esto lo tenemos en el caso anteriormente discu-

tido del fotón, que atraviesa un polarizador y se encuentra luego parcialmente en cada uno de los rayos componentes. Caben dos interpretaciones igualmente legítimas: o consideramos al fotón perturbado por su paso a través del polarizador, de manera que a la salida se encuentre en un estado diferente del estado inicial o, por el contrario, consideramos al polarizador como si formase parte integrante del campo en que se mueve el fotón; en este último caso, el fotón permanece en el mismo estado al principio, cuando está aún en el rayo incidente, que luego, cuando se encuentra en parte en cada uno de los rayos componentes, y lo que hace es proseguir su evolución natural en ese estado; las leyes generales de la Mecánica cuántica, son aplicables a cualquiera de estas dos interpretaciones. Existen, sin embargo, dos casos en los cuales no tenemos más remedio que admitir que la perturbación modifica el estado del sistema, que son: 1.º Cuando la perturbación es una observación. 2.º Cuando la perturbación consiste en una preparación del sistema para llevarlo a un estado determinado.

Después de haber establecido la significación de «estado» en el complejo espacio-tiempo, es necesario ahora precisar la definición de «observación». Para conseguirlo, es necesario al describir una observación, especificar el intervalo de tiempo que separa la preparación del sistema del momento en que se hace la observación o del instante en que se pone en marcha el aparato de observación. Hay que advertir que se puede perfectamente atribuir sentido a una observación efectuada sobre un sistema en un estado dado, en un instante anterior a la preparación de este estado. Supongamos que se prepare el sistema en el instante t_0 , de manera que después de este instante esté en un determinado estado; podemos imaginarnos perfectamente cuál debería ser su estructura antes del tiempo t_0 , para que, abandonado a sí mismo y no perturbado, evolucione de modo que se encuentre después de t_0 en el estado considerado. Podemos, pues, suponer que el estado así considerado se produzca anteriormente y atribuir una significación precisa a una observación hecha antes de t_0 sobre el sistema en dicho estado.

Introduzcamos ahora, en el caso general, la indeterminación en las medidas de que ya nos hemos ocupado en el caso de los fotones. En general, cuando se efectúa una observación sobre un sistema atómico cualquiera, preparado de una cierta

manera y que se encuentra, por consiguiente, en un cierto estado, el resultado no será completamente determinado; es decir, si se repite varias veces la misma medida en condiciones idénticas, se obtendrán, en general, números diferentes. Sin embargo, si se repite la medida un gran número de veces, se comprobará que un mismo resultado particular se encuentra para un cierto estado un número de veces igual a una fracción determinada y siempre la misma del número total de medidas; podemos, pues, decir que cada vez que se repita la experiencia, existe una probabilidad definida de obtener dicho resultado particular; podemos calcular teóricamente esa probabilidad, la cual puede, a veces, ser igual a la unidad, y en este caso desaparece totalmente la indeterminación del resultado.

La indeterminación en los resultados de las medidas es una consecuencia de las relaciones de superposición entre los diversos estados. Consideremos dos estados A y B del sistema, elegidos de manera que exista una observación que dé con certidumbre un resultado determinado para el estado A, y que no dé este mismo resultado para el estado B. A dos estados de esta clase les llamaremos «estados ortogonales». Supongamos que efectuemos una observación estando el sistema en un estado formado por la superposición de A y B. El resultado no podrá ser determinado más que en el caso de que el peso de A o el de B, en el proceso de superposición, sean nulos. El resultado que se obtiene con certidumbre para el estado A, tendrá ahora una probabilidad p de producirse (siendo p el peso de A), y una probabilidad $1 - p$ de no producirse. Variando de una manera continua los pesos relativos en el proceso de superposición, podemos obtener una serie continua de estados: desde A sólo hasta B sólo, para los cuales la probabilidad de llegar al resultado que se obtiene con certidumbre para A varía de una manera continua desde 1 hasta 0.

Ya hemos dicho que una observación no queda completamente determinada, si no se indica al instante en que se efectúa. Ocurre, sin embargo, a veces, que el resultado de una medida, o más bien, la probabilidad de obtener un resultado particular cualquiera, no depende del instante en que se efectúe. Un estado para el que ocurre esto, cualquiera que sea la observación efectuada sobre el sistema, se llama «estado estacionario» y nos lo

imaginaremos como un estado en el cual la situación del sistema no varía.

En Mecánica cuántica la posibilidad de obtener nuevos estados del sistema, por simple superposición, está ligada al hecho de que las ecuaciones de definición de los estados sean lineales, respecto a las incógnitas. Es, pues, natural que se haya tratado de establecer una analogía con los sistemas de la Mecánica clásica, regidos por ecuaciones lineales y para los cuales es válido un cierto principio de superposición (por ejemplo, con las cuerdas vibrantes o las membranas tensas). A causa de estas analogías, esporádico que se ha dado a algunas de las nuevas Mecánicas cuánticas el nombre de Mecánicas ondulatorias. Hay que insistir, sin embargo, en el hecho de que la superposición que aparece en Mecánica cuántica es de naturaleza esencialmente distinta, que la que se encuentra en la teoría clásica. Las analogías podrían, pues, inducirnos a error, como podemos ver en el siguiente caso particular: Supongamos que se comparen los estados de un sistema atómico a los estados de vibración de una membrana. Cuando se superpone consigo mismo un estado de vibración de una membrana, se obtiene un nuevo estado de amplitud doble. Por otra parte, si se superpone según la Mecánica cuántica un estado atómico consigo mismo, el estado resultante es exactamente igual al estado inicial. El valor absoluto de la amplitud de la membrana vibrante, considerado como elemento distinto de las amplitudes relativas de sus diferentes puntos, no tiene análogo en el caso del sistema atómico.

Compatibilidad de las observaciones.

Cuando se efectúa una observación en un sistema dado, este generalmente se perturba y su estado después de la observación difiere del estado inicial. No hay más que un sólo caso en que la observación pueda no modificar el estado del sistema: aquel en que el estado inicial y la observación son tales que existe la probabilidad unidad, es decir, la certidumbre de obtener por medio de esa observación un resultado particular determinado. Omitimos por brevedad el razonamiento un poco largo que permite justificar esta conclusión.

Por consiguiente, cuando se ha efectuado una primera observación sobre un sistema en un estado determinado, no se puede admitir en general que una segunda observación vaya a encontrar al sistema en el mismo estado que la primera. La primera observación modifica el estado del sistema que debe ser preparado de nuevo antes de poder sufrir una segunda observación en las mismas condiciones. Sin embargo, puede ocurrir que la primera observación modifique el estado del sistema de tal manera que la probabilidad de obtener un resultado determinado por medio de la segunda no sea alterado. Llamaremos a dos observaciones de esta naturaleza «observaciones compatibles». Tres o más observaciones son compatibles cuando una cualquiera de ellas es compatible con todas las demás. Dos o más observaciones pueden ser compatibles, o bien con relación a un estado inicial determinado, o con relación a cualquier estado inicial. En lo sucesivo nosotros nos referiremos siempre (salvo advertencia en contrario) a observaciones compatibles de la segunda clase.

Según las leyes de la Mecánica cuántica, la condición de compatibilidad de dos observaciones es una condición simétrica con respecto a ellas. Sea α_1 una primera observación hecha en el instante t_1 y α_2 una segunda compatible con la primera y efectuada en el instante t_2 posterior a t_1 ; según la definición dada, la probabilidad de obtener un cierto resultado por medio de la observación α_2 es la misma si se hace esta observación sobre el sistema en el estado inicial o si se la aplica al estado que sigue inmediatamente a la primera observación α_1 . Según la ley de simetría precedente, la probabilidad de obtener un cierto resultado por medio de la observación α_1 deberá ser la misma, bien si se hace esta observación α_1 sobre el sistema en el estado inicial, o bien si se la aplica al estado que sigue inmediatamente a la observación α_2 .

Una de las principales propiedades de las observaciones compatibles consiste en crear estados para los cuales se pueda conocer con certidumbre el resultado de una cualquiera de dichas observaciones.

El caso más interesante que se presenta en el estudio de dos observaciones compatibles es el que se ofrece cuando se efectúan simultáneamente. La condición de compatibilidad exige en este caso que si una de ellas se hace un intervalo de tiempo

muy pequeño antes que la otra, la probabilidad de obtener un cierto resultado por medio de la segunda observación sea la misma que si la primera no se hubiese nunca efectuado.

Es a menudo cómodo considerar dos o varias observaciones compatibles, sobre todo si son simultáneas, como si formasen una observación única, cuyo resultado se expresará por dos o varios números. Frecuentemente hay que considerar en la nueva teoría el número máximo de observaciones compatibles independientes y simultáneas que se pueden hacer sobre un sistema; para abreviar se llama a este sistema de observaciones englobadas en una sola «una observación máxima». El estado en el cual deja a un sistema una observación máxima está completamente determinado por el resultado de esta observación y es independiente del estado inicial. Esta proposición puede considerarse o como un axioma o como una definición más precisa de la noción de estado.

El estado de un sistema después de haber efectuado en él una observación máxima se caracteriza por el hecho de que existe otra observación máxima (precisamente la repetición inmediata de la que se acaba de hacer) tal que si la efectuamos sobre el sistema en este estado final lo conduce con certidumbre a un resultado determinado (el resultado anterior otra vez).

Así, pues, un estado cualquiera del sistema puede definirse, sin equívocos, como el estado que sigue a una observación máxima que se ha efectuado en él y por la cual se ha obtenido un resultado determinado. Podemos, pues, concluir que debe existir para un estado cualquiera una observación máxima que conduce con certidumbre a un resultado particular determinado e inversamente, si consideramos el resultado de una observación máxima determinada, debe existir un estado del sistema, para el cual este resultado pueda obtenerse con certidumbre por medio de la observación considerada.

Más sobre los fotones.

Cuando se aplica la Mecánica cuántica a un sistema formado por una sola partícula, libre en movimiento, las ecuaciones que definen el estado de este sistema, son idénticas a las ecuaciones clásicas del movimiento ondulatorio, como se comprueba al estudiar la teoría matemática de este asunto. Esta

1925
1/2

circunstancia es la que confiere a la partícula un gran número de propiedades de las ondas, y es la que nos permite considerar a un corpúsculo en un estado determinado, como si estuviese asociado a una onda o dirigido por ella.

Para precisar más la naturaleza de las relaciones que existen entre las partículas y las ondas asociadas a ellas, vamos a dar un ejemplo típico, que ilustra el conflicto entre las teorías corpusculares y ondulatorias de la luz, a que antes hicimos referencia y que indica la solución dada al caso por la Mecánica cuántica.

Consideremos un rayo de luz; dividámoslo en dos componentes de igual intensidad y produzcamos franjas de interferencia. Según la antigua teoría corpuscular, cada uno de los dos componentes contendría el mismo número de fotones, y los fotones pertenecientes a uno de ellos podrían interferir con los del otro. En ciertas condiciones, dos fotones deberían, pues, destruirse recíprocamente y, por el contrario, en otras circunstancias deberían producir cuatro fotones. Esto está francamente en contradicción con la idea del fotón-corpúsculo y, además, no está conforme con el principio de conservación de la energía, el cual ha de satisfacerse no solamente de una manera estadística, sino también en el detalle de los fenómenos físicos.

La Mecánica cuántica resuelve la dificultad, admitiendo que un fotón cualquiera se encuentra parcialmente en cada uno de los dos componentes, cosa factible si se acepta la idea fundamental de la superposición de los estados. Cada fotón interfiere únicamente consigo mismo; dos fotones diferentes no pueden nunca producir interferencias. La solución de las ecuaciones de Maxwell, que dan la explicación ondulatoria del fenómeno, no representa más que un sólo fotón y no el conjunto de los fotones considerados. Los valores relativos de la intensidad de la luz en diferentes puntos del espacio, calculables a partir de esta solución, determinan las probabilidades relativas de la presencia del fotón en estos puntos, cuando se intenta fijar experimentalmente su posición en el espacio. Los únicos elementos importantes son las intensidades relativas en diferentes puntos; a la noción de intensidad absoluta, no puede dársele ninguna interpretación. No debe tratarse de establecer una relación de ninguna naturaleza que sea entre la intensidad absoluta de las

ondas y el número de partículas; esto establece una diferencia marcadísima entre las ideas modernas y las antiguas, referentes a la conexión entre ondas y corpúsculos.

Es evidente que esta manera de ver el fenómeno, que tiene la nueva Mecánica cuántica, no nos permite imaginar un mecanismo con propiedades intermedias, entre las de los corpúsculos y las de las ondas. Sin embargo, al suponer un fotón está parcialmente distribuido entre dos componentes, nos recuerda la unión estrecha que existe entre ellas y nos impide llegar intuitivamente a las conclusiones inexactas a que nos conduciría el admitir que cada componente posee sus fotones propios. Por ejemplo, al exigir que la probabilidad total de presencia del fotón en un punto cualquiera del espacio, sea constantemente igual a la unidad, nos recuerda que cualquiera que sea la forma en que los dos rayos interfieran; si se neutralizan en un punto, deberán sumarse en otro, de manera que el principio de conservación de la energía no caiga nunca en defecto, quedando eliminadas las dificultades relativas a la aplicación de este principio a los fenómenos en detalle.

Definición de la superposición de los estados

Vamos ahora a precisar la definición de la superposición de los estados. Diremos con Dirac que un estado A puede estar formado por la superposición de otros dos B y C cuando no es nula la probabilidad de que un resultado cualquiera obtenido por medio de una observación efectuada sobre el sistema en el estado A, pueda obtenerse idénticamente por la misma observación efectuada sobre el sistema en uno, por lo menos, de los estados B y C.

El principio de superposición afirma que pueden superponerse según la precedente definición dos estados B y C para formar un tercero A y que si se modifica la manera de efectuar la superposición pueden obtenerse una infinidad de estados A. Este principio es el fundamental de la Mecánica cuántica y está en contradicción absoluta con las ideas clásicas, las cuales, obligan a admitir por un lado que el resultado de una observación es siempre conocido con certidumbre y por otra parte que dados dos estados diferentes de un mismo sistema se puede

siempre encontrar una observación que aplicada sucesivamente a cada uno de ellos, conduzca a resultados diferentes.

De la definición dada de la superposición de estados se deducen inmediatamente algunos teoremas elementales de la nueva Mecánica cuántica. Así, los estados B y C no son ellos mismos más que casos particulares de estados formados por la superposición de B y de C.

Otro: Sea el estado Q formado por la superposición de un primer estado C y de un segundo P, resultado éste de la superposición de los dos estados A y B. Supongamos que una observación cualquiera efectuada sobre el sistema en el estado Q conduzca a un cierto resultado; existirá por definición en este caso una probabilidad no nula de obtener el mismo resultado efectuando la observación considerada cuando el sistema se encuentre en uno de los dos estados P y C, y por consiguiente, una tal probabilidad existirá del mismo modo cuando la observación se haga sobre el sistema en uno por lo menos de los tres estados A, B y C. Esta propiedad del estado Q es, pues, simétrica respecto a los tres estados A, B y C, de modo que «el orden de varias superposiciones sucesivas es indiferente», lo cual es absolutamente indispensable para que el término «superposición» tenga sentido.

Otra consecuencia: Cuando una cierta observación conduce con certidumbre a un mismo resultado, tanto para un estado A como para otro estado B del sistema, se puede afirmar que conducirá también con certidumbre a ese mismo resultado para cualquier otro estado formado por la superposición de A y de B; efectivamente, no puede dicha observación dar un resultado distinto, porque la probabilidad de este resultado distinto para cada uno de los dos estados A y B, es siempre igual a 0.

Se podría construir teóricamente toda la Mecánica cuántica a partir del principio fundamental de superposición, introduciendo el *mínimum indispensable* de nuevas hipótesis, pero aunque este procedimiento sería el más lógico, no es el más ventajoso, por lo difícil y en todo caso lo artificioso que resultaría el planteamiento de este *mínimum* de hipótesis, a partir de las cuales se pudiese ya deducir la totalidad de la teoría. Es mejor dar de primera intención a las leyes generales la forma que resulte más sencilla para expresarlas y recordarlas, y analizar a continuación sus consecuencias, o sea, deducir los resultados que se

derivan de la idea fundamental de la superposición y que son indispensables para que la teoría tenga un sentido físico preciso, cuya deducción pondrá además de manifiesto la precisión y la coherencia de las hipótesis fundamentales.

EL ALGORITMO MATEMÁTICO

II. EL ÁLGEBRA SIMBÓLICA DE LOS ESTADOS Y DE LOS OBSERVABLES.

La marcha que hay que seguir para establecer el nuevo algoritmo es la siguiente: Hay que empezar por introducir un cierto número de símbolos con los que se designan los diversos elementos físicos estudiados, como las variables dinámicas o los diversos estados del sistema considerado. Se establece a continuación un cálculo algebráico de esos símbolos, partiendo de ciertos axiomas enunciados explícitamente. Para completar la teoría hay necesidad de fijar reglas que permitan traducir en ecuaciones simbólicas las condiciones físicas que nos den, e inversamente prever los resultados físicos a partir de relaciones entre los símbolos considerados. En estas condiciones, la marcha del cálculo para un problema determinado de Mecánica cuántica será la siguiente: Supongamos que el sistema considerado se encuentra en un estado en el cual ciertas variables dinámicas tienen determinados valores. Estos datos nos permiten escribir inmediatamente las ecuaciones del problema entre los símbolos del estado y las variables consideradas. Aplicando luego los axiomas del cálculo simbólico, deduciremos otras relaciones, y a partir de estas, llegaremos finalmente a conclusiones de orden físico. No habrá que especificar en ningún momento la naturaleza exacta de los símbolos utilizados, cosa que por otra parte sería perfectamente inútil. A lo largo del cálculo bastará considerar a estos símbolos como magnitudes abstractas. Los únicos elementos necesarios para establecer dicho cálculo son los referidos axiomas algebráicos y las reglas que permiten pasar de las ecuaciones simbólicas a los fenómenos reales. Por otra parte al darnos en bloque el conjunto de dichos axiomas y dichas reglas admitimos implícitamente un cierto

número de leyes físicas, a las que sería muy difícil llegar de otra manera.

Adición de los estados.

Vamos a designar cada estado de un sistema dinámico por el símbolo ψ y a distinguir los diferentes estados por los subíndices de ψ , por ejemplo: $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$. La relación entre tres estados ψ_0, ψ_1, ψ_2 , de los cuales el primero ψ_0 puede formarse por superposición de los otros dos ψ_1, ψ_2 , se expresará por una ecuación del tipo:

$$\psi_0 = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \quad (1)$$

en la que c_1 y c_2 son números reales o complejos. Dando a los coeficientes c_1 y c_2 todos los valores posibles, se obtienen todos los estados distintos que se pueden formar por la superposición de ψ_1 y ψ_2 . Se pueden siempre sumar de esta forma, con coeficientes c_1 y c_2 arbitrarios, dos símbolos ψ , que designan dos estados cualesquiera. La suma será otro símbolo ψ , que designa un estado que puede ser formado por la superposición de otros dos, salvo en el caso particular en que la suma es 0.

Supondremos que los axiomas de la adición ordinaria siguen siendo válidos, es decir, que la adición es conmutativa.

$$c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 = c_2 \psi_2 + c_1 \psi_1$$

y asociativa:

$$(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) + c_3 \psi_3 = c_1 \psi_1 + (c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3)$$

El primero de estos axiomas implica la perfecta simetría del proceso de superposición de dos estados, la cual es evidente después de la definición de superposición dada. El segundo axioma supone el teorema ya demostrado, según el cual, el orden de las superposiciones sucesivas es indiferente.

Hasta ahora, nuestras hipótesis son compatibles con la definición de la superposición de estados dada antes; veamos, sin embargo, que van más lejos que dicha definición y contienen nuevas leyes físicas. Por ejemplo, podemos deducir de ellas que si el estado ψ_0 puede estar formado por la superposición de ψ_1 y ψ_2 , de modo que la ecuación (1) sea válida, el estado ψ_1 podrá

igualmente considerarse formado por la superposición de ψ_0 y ψ_2 (con tal que $c_1 \neq 0$). En efecto, la condición de superposición (1) es simétrica con respecto a ψ_0, ψ_1 y ψ_2 , cosa que no podría deducirse de la definición de superposición dada en el capítulo anterior. Tres estados ligados simétricamente entre sí por una relación del tipo (1) se llaman «dependientes». Podemos generalizar la definición y decir que un número cualquiera de estados $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ son dependientes o independientes, según que exista o no entre ellos una relación del tipo:

$$c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots + c_n \psi_n = 0 \quad (2)$$

Ya hemos mencionado en el capítulo anterior, el hecho de que cuando se superpone un estado a sí mismo, el estado resultante es idéntico al estado inicial. Debemos, pues, admitir como regla de nuestro cálculo simbólico, que $\psi_1 + \psi_1$ o $2\psi_1$ representan el mismo estado que ψ_1 . Adoptaremos aún una hipótesis mucho más general que ésta, a saber: que ψ_1 y $c\psi_1$ representan el mismo estado, pudiendo ser c un número cualquiera, incluso imaginario, pero diferente de 0.

Se comprendería quizás mejor la naturaleza de la conexión que esta hipótesis establece entre los estados de un sistema y los símbolos ψ , si se representasen los ψ como vectores en un espacio de un número suficientemente grande de dimensiones. El número de dimensiones necesarias es igual al número de los estados independientes de que es susceptible el sistema, número que, en general, es infinitamente grande. Una ecuación del tipo (1) o (2), puede ser considerada como una ecuación vectorial, siendo, en general, complejos los vectores. En estas condiciones, un estado debe ser considerado como completamente determinado por la dirección de un vector; dos vectores de la misma dirección, pero de longitudes diferentes, representan el mismo estado.

Introduzcamos ahora otra serie de símbolos Φ_1, Φ_2, \dots que representan igualmente los estados de un sistema. Todo estado designado por un símbolo ψ_r puede serlo también por un símbolo Φ con el mismo índice r . Dados tres estados cuyos ψ satisfagan a la ecuación (1), los Φ correspondientes satisfarán por hipótesis a

$$\Phi_0 = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 \quad (3)$$

designándose, por las letras rayadas, números complejos conjugados. Por hipótesis, los símbolos Φ gozan de las mismas propiedades que los ψ ; la adición es conmutativa y asociativa; $c \Phi_1$ representa el mismo estado que Φ_1 , y un cierto número de estados $\Phi_1 \dots \Phi_n$ se llaman independientes, si toda relación del tipo

$$\bar{c}_1 \Phi_1 + \bar{c}_2 \Phi_2 + \dots + \bar{c}_n \Phi_n = 0$$

es imposible, siendo las c distintas todas de 0.

Toda la teoría que va a desarrollarse es perfectamente simétrica con relación a las Φ y a las ψ ; la suma de un ψ y de un Φ no tiene significación alguna y no figurará nunca en nuestros cálculos.

Podría parecer superfluo introducir una segunda serie de símbolos para representar los mismos estados de un sistema; sin embargo, es indispensable hacerlo así para tener una perfecta simetría con respecto a las dos raíces cuadradas de -1 , desde que se admite que los coeficientes c_r pueden tomar valores imaginarios. Un proceso de superposición como el (1) definido por dos números complejos c_1 y c_2 , podrá ser definido también por los dos números complejos conjugados \bar{c}_1 y \bar{c}_2 ; tenemos, pues, que introducir la relación (3) y tratarla lo mismo que la (1).

Ya hemos dicho que se puede multiplicar Φ o ψ por un número cualquiera, y que los símbolos así obtenidos $c \Phi$ o $c \psi$ designan el mismo estado que se tenía antes de la multiplicación. Podemos, pues, poner

$$\psi_r = a_r \psi_r^* \quad \Phi_s = b_s \Phi_s^* \quad (4)$$

siendo a y b números arbitrarios distintos de 0, y utilizar los símbolos ψ^* y Φ^* para designar estados en lugar de ψ y Φ . Sin embargo, las a y las b deben satisfacer a ciertas condiciones si se quiere que ψ^* y Φ^* verifiquen relaciones análogas a (1) y (3). De estas últimas relaciones se deduce:

$$\psi_o^* = c_1 \frac{a_1}{a_o} \psi_1^* + c_2 \frac{a_2}{a_o} \psi_2^*$$

$$\psi_o^* = \bar{c}_1 \frac{b_1}{b_o} \Phi_1^* + \bar{c}_2 \frac{b_2}{b_o} \Phi_2^*$$

Para que los coeficientes de las dos ecuaciones sean dos a dos complejos conjugados como en (1) y (3), debe verificarse

$$\frac{b_1}{b_o} = \frac{\bar{a}_1}{a_o} \quad , \quad \frac{b_2}{b_o} = \frac{\bar{a}_2}{a_o}$$

de donde:

$$b_r = f a_r \quad (5)$$

en que f es un número independiente de r .

La relación que existe entre las ecuaciones (1) y (3) así como la condición (5) que rige la transformación más general (4) y que no altera esa relación nos llevan a considerar cada Φ_r como proporcional a la magnitud imaginaria conjugada del ψ_r correspondiente, proporcionalidad que puede convertirse en igualdad si se le aplica una transformación del tipo (4), (5) con un valor conveniente de f . Por tanto, si adoptamos para las ψ una representación vectorial podremos considerar a todo ψ_r como el vector imaginario conjugado del Φ_r correspondiente. Hay que observar sin embargo que la relación entre ψ y Φ no es exactamente de la misma naturaleza que la que existe entre dos números complejos conjugados ordinarios, porque no tiene sentido alguno el separar en un ψ una parte real de una parte imaginaria pura. En los números complejos ordinarios la parte real se obtiene tomando la media del número y de su complejo conjugado; no podemos hacer lo mismo con un símbolo ψ porque la adición de un ψ y un Φ no puede realizarse. Vemos, pues, que la relación entre un ψ y el Φ correspondiente no es completamente la misma que la que existe entre dos números conjugados. Para recordar la diferencia que existe, vamos a reservar la expresión «imaginarios conjugados» para describir la relación entre ψ y Φ y utilizar por el contrario la expresión «complejos conjugados» para magnitudes que como los números complejos ordinarios pueden descomponerse en una parte real y una parte imaginaria pura.

Los vectores ordinarios del cálculo vectorial pueden también descomponerse como los números en una parte real y otra imaginaria pura; la representación vectorial de los ψ y los Φ no es pues, rigurosamente correcta, aunque en ocasiones pueda resultar muy útil. Cuando utilicemos esta representación vectorial debemos tener en cuenta que es imperfecta porque no se

opone a la adición de dos vectores ψ y Φ y por tanto confiere a los ψ y Φ más propiedades de las que la Mecánica cuántica exige y permite conferirles.

Multiplicación de los estados.

Las únicas funciones de ψ o de Φ , que hemos considerado hasta ahora, son combinaciones lineales con coeficientes numéricos de las ψ o de las Φ solas. Introduzcamos ahora el producto de una magnitud ψ por otra magnitud Φ ; suponemos que este producto existe y que representa, en general, un número complejo y lo escribimos siempre $\Phi \psi$, es decir, poniendo siempre a la izquierda el Φ y a la derecha el ψ . Expresiones como $\psi \Phi$, $\psi_1 \psi_2$, $\Phi_1 \Phi_2$ están desprovistas de sentido y no aparecerán nunca en nuestros cálculos. Por hipótesis los productos $\Phi \psi$ obedecen a la ley distributiva:

$$(\Phi_1 + \Phi_2) \psi = \Phi_1 \psi + \Phi_2 \psi \quad (6) \quad \Phi (\psi_1 + \psi_2) = \Phi \psi_1 + \Phi \psi_2 \quad (7)$$

y a la ley:

$$\Phi (c \psi) = c (\Phi \psi)$$

donde c es un número cualquiera.

Si adoptamos la representación vectorial, el número $\Phi \psi$ puede ser considerado como el producto escalar de los vectores Φ y ψ , con lo cual las condiciones (6) y (7) se cumplen. Sin embargo, esta representación nos conduciría también a atribuirle a las expresiones $\Phi_1 \Phi_2$ y $\psi_1 \psi_2$ un sentido preciso; comprobamos, una vez más, que la representación vectorial atribuye a las ψ y a las Φ muchas más propiedades de las que exige la Mecánica cuántica.

Haremos aún dos nuevas hipótesis expresadas por las relaciones siguientes:

$$\Phi_r \psi_s = \overline{\Phi_s \psi_r} \quad (8) \quad \text{y} \quad \Phi_r \psi_r > 0 \quad (9)$$

que están de acuerdo con nuestra manera de considerar las magnitudes ψ y Φ como cantidades imaginarias conjugadas. Poniendo en la primera $s = r$, deducimos que $\Phi_r \psi_r$ es real; la segunda relación precisa que, además, esta cantidad es posi-

tiva. Para asegurarnos de la legitimidad de estas hipótesis, examinemos su comportamiento cuando se efectúa una transformación del tipo (4), (5). Se deduce de (8)

$$f \overline{a_r} a_s \Phi_r^* \psi_s^* = \overline{f a_s a_r \Phi_s^* \psi_r^*}$$

y de la desigualdad (9), $f \overline{a_r} a_r \Phi_r^* \psi_r^* > 0$. Si f es real y positivo, estas dos relaciones dan $\Phi_r^* \psi_s^* = \Phi_s^* \psi_r^*$ y $\Phi_r^* \psi_r^* > 0$. Luego, para que (8) y (9) sean invariantes para una transformación, (4), (5), es necesario imponer a esta última una determinada restricción (que f sea real y positivo).

En lo sucesivo, nos atendremos exclusivamente a la hipótesis de que cada Φ es exactamente igual a la imaginaria conjugada del ψ correspondiente; pues la hipótesis más amplia de la proporcionalidad no conduce a consecuencias interesantes. Esto significa que las ecuaciones (8) y (9) no deben ser invariantes para transformaciones del tipo (4), más que si se tiene $b_r = \overline{a_r}$, es decir, únicamente si en (5) $f = 1$. La restricción que hay que imponer a las transformaciones (4) para conservar la invarianza de (8) y (9) está comprendida en la precedente.

Se admite muy a menudo que un ψ_r y su imaginario conjugado Φ_r satisfacen a $\Phi_r \psi_r = 1$, y se dice en este caso que estas funciones están «normalizadas con respecto a la unidad» o sencillamente «normalizadas». La desigualdad (9) demuestra que es siempre posible «normalizar» un ψ o un Φ , multiplicándolo por un número convenientemente elegido, cuyo módulo queda ya determinado, pero cuyo argumento queda al arbitrio.

De (9) se deduce el siguiente corolario: si se tiene $\Phi_r \psi = 0$ (10), cualquiera que sea ψ , se tendrá $\Phi_r = 0$ (10'). En efecto, si Φ_r no fuese idénticamente nulo, su imaginario conjugado ψ_r sería un ψ , que no satisfaría a $\Phi_r \psi = 0$, lo cual es contrario a la hipótesis. Es evidente que el teorema análogo obtenido, permutando Φ con ψ , es igualmente cierto.

Vamos ahora a demostrar que si Φ y ψ_r están normalizados, se tiene:

$$|\Phi_r \psi_s| \leq 1 \quad (11)$$

teniendo lugar la igualdad únicamente cuando Φ_r y ψ_r representan el mismo estado. Sea a un número real cualquiera y

apliquemos la desigualdad (9) al estado $\psi_r - e^{ia} \psi_s$ o $\Phi_r - e^{-ia} \Phi_s$, tendremos:

$$(\Phi_r - e^{-ia} \Phi_s) (\psi_r - e^{ia} \psi_s) > 0$$

o sea:

$$\Phi_r \psi_r - e^{-ia} \Phi_s \psi_r - e^{ia} \Phi_r \psi_s + \Phi_s \psi_s > 0$$

de donde se deduce, utilizando las condiciones de normalización, $\Phi_r \psi_r = \Phi_s \psi_s = 1$:

$$e^{ia} \Phi_r \psi_s + e^{-ia} \Phi_s \psi_r < 2$$

los dos términos del primer miembro, son números complejos conjugados; luego la parte real de $e^{ia} \Phi_r \psi_s$ es menor que la unidad, y si esto tiene que ser cierto, cualquiera que sea a , el módulo de $\Phi_r \psi_s$ será inferior a 1. La desigualdad se transforma en igualdad si se escoge el número arbitrario a , de tal modo, que $\psi_r - e^{ia} \psi_s = 0$, lo que significa que ψ_r y ψ_s designan el mismo estado, con lo cual la proposición (11) queda completamente demostrada.

Hasta ahora hemos tratado de la multiplicación de ψ por Φ , desde un punto de vista puramente matemático, sin preocuparnos en absoluto de su sentido físico; vamos a atribuir ahora un sentido físico a los productos de la forma $\Phi_r \psi_s$. Consideremos la observación máxima del estado Φ_r que conduce con certidumbre a un resultado determinado; ya sabemos que tal observación existe siempre. Apliquemos ahora esta observación máxima al sistema en el estado ψ_s . Ya no tenemos seguridad de obtener el mismo resultado que antes; habrá una cierta probabilidad de obtenerlo; que llamaremos «probabilidad de acuerdo» («probability of agreement», en el original inglés), de ψ_s con Φ_r . Esta probabilidad es un número que no depende más que de los estados ψ_s y Φ_r , y que es igual a 1 cuando el estado ψ_s coincide con el estado Φ_r . Introduciremos la hipótesis de «que la probabilidad de acuerdo de ψ_s con Φ_r es igual a $|\Phi_r \psi_s|^2$, estando Φ_r y ψ_s normalizadas». Esta hipótesis no tropieza con contradicciones. Acabamos, efectivamente, de demostrar que $|\Phi_r \psi_s|^2$ no puede exceder de 1, cosa indispensable para que pueda medir una probabilidad. También hemos visto que la única transformación del tipo (4) que se puede efectuar en un Φ o un ψ normalizados, sin alterar la normali-

zación, consiste en una multiplicación por un factor de módulo igual a la unidad; esta transformación no cambiará, pues, el valor de $|\Phi_r \psi_s|^2$, que posee así la invarianza necesaria para que se le pueda atribuir un sentido físico, perfectamente determinado.

Ya una vez que el producto de un Φ por un ψ ha adquirido la significación indicada, los axiomas y las hipótesis (6), (7), (8) y (9) se convierten en cierto modo en leyes físicas; en efecto se pueden deducir de ellos consecuencias de orden físico; así por ejemplo de (8) se puede deducir que la probabilidad de acuerdo de ψ_s con ψ_r es igual a la de ψ_r con ψ_s .

Podemos también darnos cuenta a partir de (6) y (7) de como varía la probabilidad de acuerdo de un estado ψ_0 con un estado $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ formado por la superposición de otros dos ψ_1 y ψ_2 , cuando se hacen variar los coeficientes c_1 y c_2 . Consideremos el caso en que ψ_1 y ψ_2 son ortogonales, es decir, el caso en que existe una observación que conduce con certidumbre a resultados diferentes para los dos estados ψ_1 y ψ_2 , de manera que su probabilidad de acuerdo sea 0; es pues necesario que $\Phi_1 \psi_2 = 0$, $\Phi_2 \psi_1 = 0$. Para que $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ esté normalizado lo mismo que ψ_1 y ψ_2 , deberá verificarse:

$$\begin{aligned} 1 &= (\bar{c}_1 \Phi_1 + \bar{c}_2 \Phi_2) (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = \\ &= |c_1|^2 \Phi_1 \psi_1 + |c_2|^2 \Phi_2 \psi_2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 \end{aligned}$$

Si consideramos ahora un estado ψ_0 ortogonal con ψ_2 , tendremos para probabilidad de acuerdo de ψ_0 con $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ el valor

$$|\Phi_0 (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2)|^2 = |\Phi_0 c_1 \psi_1|^2 = |c_1|^2 |\Phi_0 \psi_1|^2$$

igual a $|c_1|^2$ veces la probabilidad de acuerdo de ψ_0 con ψ_1 . Así, en esta forma este resultado no puede ser considerado como una consecuencia de orden físico, pero sí lo sería si conociésemos otro sentido físico de $|c_1|^2$, lo que nos permitiría igualar este número a la relación de la probabilidad de acuerdo de ψ_0 con $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ a la de ψ_0 con ψ_1 . Sin embargo, el hecho de que esta relación sea independiente del estado ψ_0 , con tal de que este sea ortogonal con ψ_2 , constituye ya un resultado físico y nos da un ejemplo de consecuencias de orden físico que se pueden deducir de los axiomas (6) y (7).

Vemos también que estos axiomas permiten atribuir un sentido físico a los coeficientes que aparecen en el proceso de superposición de estados o por lo menos a sus cuadrados. La interpretación más sencilla se obtiene haciendo ψ_0 igual a ψ_1 o a ψ_2 en el ejemplo anterior. Se deduce entonces que la probabilidad de acuerdo de $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ con ψ_1 es igual a $|c_1|^2$ y la de $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ con ψ_2 es igual a $|c_2|^2$. La suma de estas dos probabilidades es igual a la unidad como se habría podido deducir de la definición de superposición dada en el capítulo anterior. $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ pueden ser llamados los «pesos» de los estados ψ_1 y ψ_2 en el proceso de superposición. El estado $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ no queda completamente determinado por estos pesos, pues queda arbitrario un «factor de fase», a saber, el argumento de c_1/c_2 . Esta fase no tiene un sentido físico tan sencillo como los pesos.

Algebra de los observables.

Introduzcamos ahora en los cálculos las variables dinámicas. En mecánica clásica, para un estado cualquiera del sistema, una variable dinámica viene dada por una función determinada del tiempo y por consiguiente representa algo que se refiere a todos los instantes del intervalo durante el cual tiene lugar el fenómeno. En la teoría de los Cuanta una variable dinámica ya no viene dada por una función del tiempo del tipo habitual, si bien debe ser siempre un elemento que se refiera a todos los instantes, si es que quiere conservarse la analogía con las variables dinámicas clásicas. En Mecánica cuántica es más cómodo utilizar un elemento que se refiera a un instante determinado, análogo en cierto modo al valor que toma una variable para un valor particular del tiempo. Llamaremos a un tal elemento «magnitud observable» o sencillamente un «observable». Podremos ahora decir que lo mismo en Mecánica cuántica que en Mecánica clásica, toda observación consiste en medir un observable y que el resultado de la operación es un número. En mecánica clásica, la medida de una variable dinámica para un estado particular del sistema, conduciría a un resultado expresado por una función del tiempo; por el contrario, en la teoría de los Cuanta, tal medida carece generalmente de sentido.

Designemos cada observable por un símbolo, por una letra, por ejemplo, el valor de una de las coordenadas cartesianas de un electrón en un instante determinado t_1 es un observable que designaremos por el símbolo $x(t_1)$. Una variable dinámica como $x(t)$ puede ser considerada como un observable dependiente de un parámetro t que representa el tiempo. En el cálculo utilizaremos los símbolos de los observables y los de los estados combinándolos según las reglas y los axiomas siguientes:

Siempre se puede multiplicar un símbolo α que represente un observable por un símbolo ψ que designe un estado; el producto debe escribirse $\alpha \psi$, poniendo siempre el factor ψ a la derecha. Este producto tiene la naturaleza de un ψ y puede ser sumado a otros ψ . En la representación vectorial de los ψ un observable α puede ser considerado como un operador que aplicado al vector ψ daría otro vector $\alpha \psi$.

Supondremos que la multiplicación es distributiva, es decir, que se verifica:

$$\alpha (\psi_1 + \psi_2) = \alpha \psi_1 + \alpha \psi_2 \quad (12)$$

y también:

$$\alpha (c \psi) = c (\alpha \psi) \quad (13)$$

siendo c un número cualquiera. En lenguaje vectorial esto significa que α es un operador lineal que efectúa rotaciones y dilataciones o compresiones uniformes del campo vectorial.

La multiplicación de los ψ por un número, es una operación que satisface a las condiciones anteriores; los números pueden pues considerarse como un tipo particular de observables; mas adelante le atribuiremos sentido físico a esta multiplicación.

Admitiremos que si se verifica $\alpha \psi = 0$, sea cual sea ψ , el observable α es nulo $\alpha = 0$. Esto significa que una tal magnitud queda completamente determinada cuando se da el valor del producto obtenido multiplicándola por un ψ arbitrario; en efecto, si los productos de dos observables por un ψ arbitrario son iguales, su diferencia debe ser nula y los dos observables deben necesariamente coincidir.

La suma $\alpha_1 + \alpha_2$ de dos observables α_1 y α_2 queda definida por la condición:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \psi = \alpha_1 \psi + \alpha_2 \psi \quad (14)$$

sea cual sea ψ . Las leyes conmutativa y asociativa de la adición se deducen de una manera inmediata de esta definición, así como de las leyes correspondientes de la adición de los símbolos ψ . Definiremos a continuación el producto $\alpha_1 \alpha_2$ de dos observables α_1 y α_2 por la condición: $(\alpha_1 \alpha_2) \psi = \alpha_1 (\alpha_2 \psi)$, cualquiera que sea ψ . La multiplicación de los observables es asociativa y distributiva como resulta de la definición anterior; así que tendremos:

$$[(\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3] \psi = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3 \psi) = \alpha_1 [\alpha_2 (\alpha_3 \psi)] = \alpha_1 [(\alpha_2 \alpha_3) \psi] = [\alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3)] \psi$$

y puesto que estas igualdades son válidas cualquiera que sea ψ , debe verificarse que: $(\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3 = \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3)$.

En cambio por lo general la multiplicación de los observables no es conmutativa, es decir, que generalmente $\alpha_1 \alpha_2$ no es igual a $\alpha_2 \alpha_1$. En el caso particular en que esta igualdad se cumpla, diremos que α_1 conmuta con α_2 o que α_1 y α_2 conmutan o que los dos son conmutables. Diremos que varios observables son conmutables si cada uno conmuta con todos los demás.

Como la teoría debe ser simétrica respecto a los ψ y a los Φ debe ser posible efectuar el producto de un observable α por un símbolo Φ . Este producto que debe escribirse $\Phi \alpha$, poniendo siempre el Φ a la izquierda, tiene la naturaleza de un Φ ; representa pues un estado y puede sumarse a otros Φ .

Deben de verificarse las relaciones correspondientes a (12) y (13):

$$(\Phi_1 + \Phi_2) \alpha = \Phi_1 \alpha + \Phi_2 \alpha \quad \text{y} \quad (c \Phi) \alpha = c (\Phi \alpha)$$

Necesitamos además para el Álgebra simbólica un axioma suplementario que establezca la ley asociativa de la multiplicación, según la cual $\Phi (\alpha \psi) = (\Phi \alpha) \psi$, de modo que uno cualquiera de los dos números pueda escribirse $\Phi \alpha \psi$ sin paréntesis. Este axioma nos permite demostrar que la suma o el producto de dos observables definidos por (14) o (15), coincide con la suma o el producto definidos de la misma manera a partir de los Φ , es decir, por:

$$\Phi (\alpha_1 + \alpha_2) = \Phi \alpha_1 + \Phi \alpha_2 \quad (16) \quad \text{y} \quad \Phi (\alpha_1 \alpha_2) = (\Phi \alpha_1) \alpha_2$$

cualquiera que sea Φ . Para la suma, por ejemplo, puede deducirse de la definición (14), utilizando la igualdad (6), que:

$$\Phi (\alpha_1 + \alpha_2) \psi = \Phi \alpha_1 \psi + \Phi \alpha_2 \psi \quad \text{o} \quad [\Phi (\alpha_1 + \alpha_2) - \Phi \alpha_1 - \Phi \alpha_2] \psi = 0$$

cualesquiera que sean Φ y ψ . Se deduce de ellas, teniendo en cuenta (10), que:

$$\Phi (\alpha_1 + \alpha_2) - \Phi \alpha_1 - \Phi \alpha_2 = 0$$

que es justamente el resultado (16), que se pretendía obtener. La demostración en el caso del producto se hace de la misma forma.

A partir del teorema, según el cual $\alpha = 0$ si $\alpha \psi = 0$ para cualquier valor de ψ , podríamos deducir por un razonamiento análogo que se tiene igualmente $\alpha = 0$ si $\Phi \alpha = 0$ para cualquier valor de Φ .

Observables complejos conjugados.

Resulta muchas veces útil y cómodo considerar la suma y el producto de dos observables como si fuesen también observables. Esto implica, como vamos a ver, una generalización de la noción de observable que, en lo sucesivo, englobará también a las funciones complejas de las variables dinámicas clásicas, o mejor aún a los valores que toman estas funciones en un instante dado. Un observable no es, pues, necesariamente una cantidad susceptible de medida directa por medio de una observación única, sino más bien un elemento, que se deduce de ella por generalización.

De una manera más general puede considerarse como observable todo operador cuya multiplicación por los ψ o los Φ , obedece a las reglas anteriormente enunciadas. Podemos definir así un observable α , dando los valores de $\alpha \psi$ para todo valor de ψ y estos valores pueden ser elegidos arbitrariamente con la única restricción (12). Consideremos un sistema completo de estados independientes ψ_r , es decir, tal que un ψ cualquiera pueda expresarse linealmente en función de los miembros ψ_r del sistema. Se pueden elegir arbitrariamente los valores de $\alpha \psi_r$; teniendo en cuenta (12) estos valores, determinan completamente el valor de $\alpha \psi$ cuando ψ tiene cualquier valor, y de este modo α mismo queda completamente determinado. Del mismo modo, en lugar de dar los $\alpha \psi_r$, se podría definir α , dando los números $\Phi_s \alpha \psi_r$, que son completamente arbitrarios, si los Φ_s y los ψ_r forman un sistema completo. De (10) se deduce inmediatamente

que por este procedimiento queda α determinado de una manera unívoca. Sea ahora α un observable y consideremos la ecuación:

$$\overline{\Phi_s \alpha \psi_r} = \Phi_r \beta \psi_s \quad (17)$$

en que ψ_r, ψ_s son dos ψ cualesquiera, y Φ_r, Φ_s sus imaginarios conjugados. Podemos considerar esta ecuación como la ecuación de definición de un nuevo observable β . Efectivamente, se puede primero suponer que (17) es válido para ψ_r y ψ_s independientes, que formen sistemas completos; comprobar luego fácilmente que si (17) es válido para dos valores de ψ_r , lo será también para toda combinación lineal de estos valores, y finalmente que (17) es válido de un modo general.

En efecto, si (17) es válido para $\psi_r = \psi_1$ y para $\psi_r = \psi_2$, tendremos las ecuaciones:

$$\overline{\Phi_s \alpha \psi_1} = \Phi_1 \beta \psi_s \quad \overline{\Phi_s \alpha \psi_2} = \Phi_2 \beta \psi_s$$

de donde podremos deducir:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_s \alpha (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2)} &= \overline{c_1 \Phi_s \alpha \psi_1 + c_2 \Phi_s \alpha \psi_2} = \\ &= \overline{c_1} \Phi_1 \beta \psi_s + \overline{c_2} \Phi_2 \beta \psi_s = (\overline{c_1} \Phi_1 + \overline{c_2} \Phi_2) \beta \psi_s \end{aligned}$$

lo que prueba que (17) es también válida para $\psi_r = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$.

El observable β definido por (17) se llamará el «observable, complejo conjugado» del observable α , y lo designaremos por $\bar{\alpha}$. Tendremos, pues:

$$\overline{\Phi_s \alpha \psi_r} = \Phi_r \bar{\alpha} \psi_s \quad (18)$$

El observable complejo conjugado de $\bar{\alpha}$ es α mismo. Se usa el término «complejo conjugado» en lugar de «imaginario conjugado», porque un observable y su complejo conjugado son de la misma naturaleza, y pueden, por tanto, sumarse; puede, pues, separarse un observable α en una parte real $1/2(\alpha + \bar{\alpha})$ y una parte imaginaria pura $1/2(\alpha - \bar{\alpha})$. La condición para que un observable sea real, está dada por:

$$\overline{\Phi_s \alpha \psi_r} = \Phi_r \alpha \psi_s \quad (19)$$

En el caso particular en que el observable es un número, la cantidad compleja conjugada definida por (18), es idéntica al

número complejo conjugado correspondiente, definido por el Álgebra clásica.

Demostremos ahora que si los símbolos ψ_1 y Φ_1 son imaginarios conjugados, también lo serán $\alpha \psi_1$ y $\Phi_1 \bar{\alpha}$, siendo α un observable cualquiera. Sea Φ la imaginaria conjugada de $\alpha \psi_1$; según (8), tendremos $\Phi \psi_s = \overline{\Phi_s \alpha \psi_1}$ para un ψ_s arbitrario. Pero según la definición (18) $\overline{\Phi_s \alpha \psi_1} = \Phi_1 \bar{\alpha} \psi_s$, de donde $\Phi \psi_s = \Phi_1 \bar{\alpha} \psi_s$ para un ψ_s cualquiera; (10) da entonces $\Phi = \Phi_1 \bar{\alpha}$ (20), que era lo que queríamos demostrar.

Vamos ahora a ver cuál es la cantidad compleja conjugada del producto $\alpha_1 \alpha_2$ de dos observables α_1 y α_2 . La ecuación que define $\alpha_1 \alpha_2$, es:

$$\Phi_p \overline{\alpha_1 \alpha_2} \psi_q = \overline{\Phi_q \alpha_1 \alpha_2} \psi_p \quad (21)$$

para un ψ_p y Φ_q arbitrarios. Si ponemos en (8) $\Phi_s = \Phi_q \alpha_1$ y $\psi_r = \alpha_2 \psi_p$, lo que supone según (20) $\psi_s = \bar{\alpha}_1 \psi_q$, $\Phi_r = \Phi_p \bar{\alpha}_2$, tendremos $\Phi_p \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \psi_q = \overline{\Phi_q \alpha_1 \alpha_2} \psi_p$. Puesto que estas ecuaciones son válidas para Φ_p y ψ_q arbitrarios, tendremos comparando con (21):

$$\overline{\alpha_1 \alpha_2} = \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \quad (22)$$

Luego, «la cantidad compleja conjugada de un producto, se obtiene tomando el complejo conjugado de cada factor e invirtiendo su orden primitivo». Esta regla es válida aún para los productos de más de dos factores, como puede verse, aplicándola repetidamente. Se tiene, por ejemplo: $\overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1$. De ella se deduce el siguiente corolario: Si α_1 y α_2 son dos observables reales, $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1$ es real y $\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1$ es imaginaria pura; $\alpha_1 \alpha_2$ no es real, más que si α_1 y α_2 conmutan. La ecuación (18) y el teorema que expresa la ecuación (20), nos dicen que, en general, cuando se quiere formar la cantidad imaginaria conjugada o compleja conjugada de cualquier combinación de símbolos, que representen estados u observables, basta invertir el orden de los factores y tomar la imaginaria conjugada o la cantidad compleja conjugada de cada factor.

Interpretación física del Álgebra de los observables.

Los axiomas y las hipótesis adoptados para el cálculo de los observables han sido, hasta aquí, de carácter puramente matemático, sin significación física alguna. Vamos ahora a indicar cómo se puede establecer una relación entre estos axiomas y los fenómenos reales y transformarlos así en leyes físicas; bien entendido, que nos vamos a referir por ahora únicamente a observables reales.

Supongamos que, al medir el observable α estando el sistema en el estado particular ψ_r , haya certidumbre de obtener como resultado un número dado \mathbf{a} ; esta certidumbre implica que α y ψ_r no son completamente arbitrarios, sino que existe entre ellos una cierta relación. Por hipótesis, esta relación será:

$$\alpha \psi_r = \mathbf{a} \psi_r \quad (23)$$

Inversamente una ecuación de este tipo será susceptible siempre de la siguiente interpretación física: si se hace una medida para determinar el observable α estando el sistema en el estado ψ_r , habrá certidumbre de obtener como resultado el número \mathbf{a} ; puede aún decirse, utilizando el lenguaje de la Física clásica, admisible en este caso, que «el observable α tiene el valor \mathbf{a} para el estado ψ_r ». La ecuación (23), equivale a:

$$\Phi_r \alpha = \mathbf{a} \Phi_r \quad (24)$$

a condición de que α sea un número real; (24) es, efectivamente, la imaginaria conjugada de (23), según el teorema expresado por la relación (20); subsiste, por tanto, el paralelismo establecido entre las magnitudes Φ y ψ . En el caso particular en que el observable α es un número, la ecuación (23) es válida para cualquier estado ψ_r con el mismo valor de \mathbf{a} ; esto significa que el resultado de una medida será siempre el mismo, cualquiera que sea el estado considerado del sistema.

Desde ahora, podemos intentar deducir algunos resultados físicos de la teoría que acabamos de exponer. Por ejemplo, si

para el estado ψ el observable α_1 tiene el valor \mathbf{a}_1 , y el observable α_2 el valor \mathbf{a}_2 , se tienen las ecuaciones:

$$\alpha_1 \psi = \mathbf{a}_1 \psi \quad \alpha_2 \psi = \mathbf{a}_2 \psi \quad (25)$$

de las que se puede deducir:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \psi = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \psi \quad \alpha_1 \alpha_2 \psi = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \psi.$$

Para el mismo estado ψ el observable $\alpha_1 + \alpha_2$ tiene el valor $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ y el observable $\alpha_1 \alpha_2$ el valor $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$; resultados necesarios para que la teoría sea coherente. Del mismo modo, admitiremos que $f(\alpha_1)$ tiene el valor $f(\mathbf{a})$ para el estado ψ , siendo f una función cualquiera desarrollable en serie de potencias y aún pueden definirse funciones de un observable más generales que las desarrollables en serie de potencias, y el resultado precedente sería aún válido para estas nuevas funciones, lo cual puede servir de base para la definición de dichas funciones generalizadas.

Si un observable α tiene el valor \mathbf{a} para cada uno de los estados ψ_1 y ψ_2 , podremos escribir las ecuaciones:

$$\alpha \psi_1 = \mathbf{a} \psi_1 \quad \alpha \psi_2 = \mathbf{a} \psi_2$$

de donde:

$$\alpha (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = \mathbf{a} (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2).$$

El valor de α es, pues, siempre \mathbf{a} para cualquier estado obtenido por superposición de ψ_1 y ψ_2 . Este resultado se obtuvo ya, a partir de la definición de la superposición de estados; el hecho de que pueda deducirse de la teoría matemática expuesta, pone de manifiesto la coherencia de la misma.

En Mecánica clásica, una magnitud observable tiene siempre un valor definido, cualquiera que sea el estado del sistema. No ocurre lo mismo en Mecánica cuántica, donde hace falta que se cumpla una condición del tipo de la (23), para que un observable pueda tener un cierto valor, estando el sistema en un estado determinado. En general, la medida de un observable para un determinado estado, conducirá a uno cualquiera entre un cierto número de valores posibles, según una ley de probabilidad. El problema que vamos ahora a abordar es el de

ver lo que se puede decir en el caso general de un observable cualquiera, en sus relaciones con un estado arbitrario del sistema.

Si se da un observable α y se consideran dos estados del sistema Φ_r, ψ_s , se puede formar el número $\Phi_r \alpha \psi_s$; esta es la única manera de calcular un número que se refiera a la vez a un observable dado y a dos estados determinados. Se puede así adscribir a un observable dado un valor numérico determinado, asociado a cada grupo de dos estados; hay, pues, una diferencia claramente marcada entre la nueva Mecánica y la teoría clásica, en la cual se puede siempre atribuir a un observable un valor numérico, asociado a un sólo estado del sistema, a saber, el valor de este observable para el estado considerado.

Como caso particular del precedente, podríamos formar el número $\Phi_r \alpha \psi_r$, tomando dos símbolos imaginarios conjugados Φ_r y ψ_r , que representen el mismo estado. Tendríamos de este modo un número completamente determinado para el observable α y para el estado único ψ_r , a condición de que Φ_r y ψ_r estén normalizados; es fácil ver que en estas condiciones $\Phi_r \alpha \psi_r$ es invariante para cualquier transformación del tipo (4), si se cumple $b_r = \bar{a}_r$, que no altera la normalización. Se podría, pues, en rigor, asociar al observable α un valor numérico bien determinado para un estado único ψ_r , pero no sería correcto definir este número como si fuese el valor del observable α para el estado ψ_r por la siguiente razón: Si para un cierto estado el valor del observable α_1 es \mathbf{a}_1 y el de α_2 , \mathbf{a}_2 , sería preciso que el valor de $\alpha_1 + \alpha_2$ fuese $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ y el de $\alpha_1 \alpha_2$, $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$. La definición anterior, permitiría escribir:

$$a_1 = \Phi_r \alpha_1 \psi_r \qquad a_2 = \Phi_r \alpha_2 \psi_r$$

de donde puede deducirse:

$$a_1 + a_2 = \Phi_r (\alpha_1 + \alpha_2) \psi_r$$

y, por tanto, que el valor de $\alpha_1 + \alpha_2$ es igual a $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$; pero no podríamos deducir:

$$a_1 a_2 = \Phi_r \alpha_1 \alpha_2 \psi_r$$

Efectivamente, esta relación es en general inexacta y es,

por tanto, imposible deducir que el valor de $\alpha_1 \alpha_2$ es $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$. Por consiguiente, no podemos definir el valor de un observable α para un estado ψ_r por el número $\Phi_r \alpha \psi_r$; tenemos que limitarnos a la ecuación (23) para dar la definición de este valor en el caso particular en que, efectivamente, exista. Sin embargo, como la demostración no cae en defecto más que en el caso del producto $\alpha_1 \alpha_2$, pero no en el de la suma $\alpha_1 + \alpha_2$, esto nos permite considerar a $\Phi_r \alpha \psi_s$ como el «valor medio» del observable α para el estado ψ_r ; puesto que la media de una suma debe ser igual a la suma de las medias, mientras que la media de un producto no tiene por qué coincidir con el producto de las medias de los factores. El Álgebra simbólica que estamos desarrollando nos permite, pues, definir el valor medio de un observable para un estado particular del sistema, sin incurrir en contradicciones.

Hagamos ahora la hipótesis importantísima de que la media así definida, es idéntica a la que se obtendría si se midiese el observable un gran número de veces y se tomase la media de los resultados obtenidos. Esta hipótesis es el lazo esencial que liga nuestra Álgebra simbólica con los fenómenos físicos, del que pueden deducirse como casos particulares los otros puntos de contacto, anteriormente mencionados; es decir, la hipótesis de que $|\Phi_r \psi_s|^2$ es la probabilidad de acuerdo Φ_r con ψ_s , y la hipótesis de que la ecuación $\alpha \psi = \mathbf{a} \psi$ expresa la certidumbre de obtener el resultado \mathbf{a} cuando se mide el observable α sobre un sistema en el estado ψ .

Si el observable α tiene el valor \mathbf{a} para el estado ψ_r , o sea, si la ecuación (23) es válida, se podrá escribir que:

$$\Phi_r \alpha \psi_r = \Phi_r \mathbf{a} \psi_r = \mathbf{a} \Phi_r \psi_r = \mathbf{a}$$

estando Φ_r y ψ_r normalizados.

Se ve, pues, que el valor medio de α para el estado ψ_r es, precisamente, \mathbf{a} , resultado indispensable para que la interpretación física que hemos dado sea coherente. Es imposible, evidentemente, establecer la recíproca, es decir, deducir la relación (23), partiendo de $\Phi_r \alpha \psi_r = \mathbf{a}$.

La teoría precedente pone, igualmente, de relieve los números $\Phi_r \alpha \psi_s$, en que Φ_r y ψ_s designan dos estados diferentes; estos números no son susceptibles de una interpretación directa tan sencilla como los $\Phi_r \alpha \psi_r$. La Mecánica cuántica, sin embargo, permite demostrar que, a parte de un factor, $|\Phi_r \alpha \psi_s|^2$ es

igual a la probabilidad de una transición del estado ψ_s al estado Φ_r , provocada por una energía perturbadora, cuya integral en el tiempo es α .

Ejemplo de cálculo algebraico de los observables.

Para dar un ejemplo de esta Álgebra simbólica, que aparte de la no conmutatividad de la multiplicación, sigue las mismas reglas que el Álgebra ordinaria, vamos a examinar las propiedades de dos observables, p y q , que satisfacen a la condición $qp - pq = i$ (26), donde i es la unidad imaginaria, o sea, $\sqrt{-1}$. Según lo dicho, al hablar de los observables complejos conjugados, dos observables reales, p y q , pueden satisfacer a esta condición. Multiplicando (26) por q , primero a la izquierda y después a la derecha, obtendríamos:

$$\begin{aligned} q^2p - qpq &= iq \\ qpq - pq^2 &= iq \end{aligned}$$

que, sumadas, dan: $q^2p - pq^2 = 2iq$. Este resultado puede ser generalizado. Multipliquemos (26) una primera vez por q^{n-1} a la izquierda; la segunda vez por q^{n-2} a la izquierda y por q a la derecha; la tercera por q^{n-3} a la izquierda y por q^2 a la derecha, y así sucesivamente, y finalmente la n -ésima vez por q^{n-1} a la derecha, obtendremos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} q^n p - q^{n-1} pq &= iq^{n-1} \\ q^{n-1} pq - q^{n-2} pq^2 &= iq^{n-1} \\ q^{n-2} pq^2 - q^{n-3} pq^3 &= iq^{n-1} \\ \dots & \dots \\ qpq^{n-1} - pq^n &= iq^{n-1} \end{aligned}$$

que sumadas dan:

$$q^n p - pq^n = niq^{n-1}$$

resultado que puede también escribirse así:

$$q^n p - pq^n = i \frac{dq^n}{dq}$$

De donde se deduce que si $f(q)$ es una función cualquiera de q desarrollable en serie de potencias, se tendrá:

$$fp - pf = i \frac{df}{dq} \quad (27)$$

puesto que esta relación es válida para todos los términos por separado.

Como caso particular, podemos poner en lugar de f la serie

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ic)^n q^n}{n!}$$

siendo c un número ordinario. Llamemos a esta función e^{icq} , que gozará de las mismas propiedades que la función exponencial clásica, propiedades que se demuestran exactamente de la misma manera que en Análisis matemático ordinario. Con este valor de f , (27) se convierte en:

$$\begin{aligned} e^{icq} p - pe^{icq} &= -c e^{icq} \\ e^{icq} p &= (p - c) e^{icq} \end{aligned} \quad (28)$$

III.—ESTADOS PROPIOS Y VALORES PROPIOS

Definiciones y propiedades elementales.

Vamos a estudiar en este capítulo algunas propiedades de los observables reales, que dan lugar a la teoría de los estados y valores propios de tan enorme importancia en las nuevas Mecánicas cuánticas y ondulatorias.

Dado un observable real cualquiera, podremos escribir la relación:

$$a \psi = a \psi \quad (29)$$

en la que a es un número, y que podremos considerar como una ecuación entre las incógnitas a y ψ . Sean a y ψ una solución cualquiera de esta ecuación; llamaremos a a un «valor propio».

y a ψ un « ψ propio» del observable α . Es fácil ver que los valores propios son números reales; basta multiplicar (29) por Φ , el imaginario conjugado de ψ , obtendremos: $\Phi \alpha \psi = a \Phi \psi$; ahora bien, $\Phi \alpha \psi$ y $\Phi \psi$ son los dos números reales, según se deduce de las ecuaciones (19) y (18), si en ellas se hace $r = s$, luego a debe ser también real

Podemos también escribir la ecuación análoga a (29)

$$\Phi \alpha = a \Phi \quad (30)$$

siendo a y ψ una solución de (29), el mismo valor de a y el Φ imaginario conjugado de ψ serán una solución de (30), que es la ecuación imaginaria conjugada de (29).

Los Φ soluciones de (30) se llamarán « Φ propios», y los estados caracterizados por los ψ propios o los Φ propios, serán los «estados propios» relativos al observable α . Cada ψ o Φ propio o cada estado propio está asociado a un valor propio determinado; diremos, desde ahora, que *pertenece o corresponde* a este valor propio.

La significación física de los valores propios deriva del hecho de existir un estado del sistema —el estado propio que pertenece al valor dado— tal, que si se mide el observable α cuando el sistema se encuentra en este estado particular, haya certidumbre de obtener por resultado el valor propio considerado. «Los valores propios de un observable son los resultados posibles de una medida efectuada en este observable». Todo resultado posible de la medida de un observable α tiene que ser, necesariamente, un valor propio; en efecto, debe satisfacer a (29), cuando en esta ecuación se pone en lugar de ψ el símbolo del estado, en el cual se encuentra el sistema inmediatamente después de la observación

El conjunto de los valores propios de un observable puede formar una sucesión discreta de números o un conjunto continuo o las dos cosas a la vez. El cálculo de los valores propios constituye uno de los principales problemas de la Mecánica cuántica.

En el caso particular en que el observable es un número ordinario, no tiene más que sólo un valor propio, que es este mismo número y todos los estados posibles son estados propios.

Siendo α un observable y c un número, resulta inmediatamente de las definiciones dadas, que los valores propios de los

observables $\alpha + c$ y α difieren en c , y que los estados propios correspondientes son idénticos. Del mismo modo, todo valor propio de $c \alpha$, es igual a c veces el valor propio correspondiente de α , y todo estado propio de $c \alpha$ es igualmente un estado propio para α .

Vamos ahora a demostrar el siguiente teorema: «Dos estados propios, pertenecientes a valores propios diferentes de un mismo observable, son ortogonales».

Sea ψ_1 un estado propio, perteneciente al valor propio a_1 y ψ_2 otro estado propio, perteneciente al valor a_2 . Tendremos las ecuaciones:

$$\alpha \psi_1 = a_1 \psi_1 \quad (31) \quad \Phi_2 \alpha = a_2 \Phi_2 \quad (32)$$

multipliquemos (31) a la izquierda por Φ_2 y (32) a la derecha por ψ_1 , con lo que obtenemos:

$$\Phi_2 \alpha \psi_1 = a_1 \Phi_2 \psi_1$$

$$\Phi_2 \alpha \psi_1 = a_2 \Phi_2 \psi_1$$

de donde restándolas:

$$(a_1 - a_2) \Phi_2 \psi_1 = 0$$

de manera que si a_1 no es igual a a_2 se tendrá $\Phi_2 \psi_1 = 0$ y, por tanto, los dos estados ψ_1 y ψ_2 son ortogonales, como queríamos demostrar.

Este teorema viene impuesto por el sentido físico que le hemos atribuido a la noción de estado propio. Efectivamente, habiendo elegido dos estados propios pertenecientes a valores propios diferentes, se puede siempre encontrar una observación que nos conduzca con certidumbre a resultados diferentes, según que el sistema se encuentre en uno u otro de los dos estados; esta observación consiste, precisamente, en la medida del observable α y los dos estados serán ortogonales por definición.

Es evidente que si ψ_1 y ψ_2 son dos ψ propios pertenecientes al mismo valor propio, toda combinación lineal de la forma $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ representará un ψ propio perteneciente a este mismo valor. Vamos a demostrar que una combinación lineal cualquiera de ψ propios pertenecientes a valores diferentes, no

puede representar un estado propio, es decir, que los ψ propios, que pertenecen a valores propios diferentes, son necesariamente independientes. Si no fuese así, debería existir entre un cierto número de ψ propios pertenecientes a valores propios diferentes, una relación del tipo:

$$\sum_r c_r \psi_r = 0 \quad (33)$$

siendo los c_r coeficientes numéricos; sin mengua de la generalidad, podemos suponer que no existe ninguna otra relación independiente del tipo (33) entre los ψ_r ; si existiesen otras podríamos eliminar un cierto número de ψ_r entre ellas y tendríamos finalmente una sola relación lineal entre los ψ_r restantes. Multiplicando (33) por α , tendremos:

$$0 = \alpha \sum_r c_r \psi_r = \sum_r c_r \alpha \psi_r = \sum_r c_r a_r \psi_r \quad (34)$$

siendo a_r el valor propio perteneciente a ψ_r . Pero (34) es una relación lineal de coeficientes numéricos entre los ψ_r , que por hipótesis no puede ser independiente de (33). Esto exige que los a_r sean todos iguales lo que significa que los ψ deben todos pertenecer al mismo valor propio. Puede también deducirse este teorema de la definición, dada en el primer capítulo, de la superposición de estados, teniendo en cuenta el sentido físico de los estados propios; puesto que una relación del tipo (33) significa que uno de los estados propios, por ejemplo ψ_1 , puede ser obtenido por superposición a partir de los otros estados $\psi_2, \psi_3 \dots$; por consiguiente, el resultado de una observación cualquiera hecha en el sistema en el estado ψ_1 podrá también obtenerse con una probabilidad distinta de 0 como resultado de la misma observación efectuada cuando el sistema se encuentra en uno por lo menos de los estados $\psi_2, \psi_3 \dots$. No sería así si los ψ_r perteneciesen a valores propios diferentes y se eligiese como observación precisamente la medida del observable α . Luego la existencia de una relación (33) es imposible.

Desarrollo en serie de los símbolos ψ .

En la teoría de los valores propios puede enunciarse en la siguiente forma el teorema del desarrollo en serie: «Un símbolo ψ cualquiera puede ser desarrollado en serie, según los ψ propios de un observable arbitrario», es decir, que puede escribirse:

$$\psi = \sum_p \psi_p \quad (35)$$

donde los ψ_p son los ψ propios de un observable real α

Un tal desarrollo en serie es único, pues en caso contrario, existiría una relación del tipo (33) entre los ψ propios pertenecientes a valores propios diferentes, y ya vimos que esto es imposible

En el caso de que los valores propios de α no formen una sucesión discreta, sino que constituyan un conjunto continuo, o si existen a un tiempo una sucesión discreta y un conjunto continuo de valores propios, el conjunto de los ψ propios que aparecen en (35), puede no ser numerable o, dicho de otro modo, puede haber tantos ψ propios como puntos hay en una recta. En este caso, para expresar del modo más general, ψ en función de los ψ_p , tendremos necesidad de una integral del tipo:

$$\psi = \int \psi_p dp \quad (36)$$

o bien, a un tiempo de una suma y de una integral.

La teoría de los símbolos ψ desarrollada en el capítulo anterior, no nos da una definición rigurosa para una integral del tipo (36). Tal definición haría necesaria la introducción de un cierto número de nuevas hipótesis, concernientes a las nociones de límite y de continuidad para los símbolos ψ . Para las necesidades de la Física, es suficiente, sin tratar de establecer una teoría rigurosa, contentarse con algunas nociones intuitivas aproximadas, referentes a límites y a continuidad, como las que puede sugerir la representación vectorial de los ψ . Estas nociones intuitivas muestran que si un símbolo ψ es una función

continua de un parámetro p , se le puede derivar e integrar con respecto a este parámetro, y el resultado que se obtenga será también un símbolo ψ .

En tales condiciones, es absurdo buscar una demostración rigurosa del teorema del desarrollo en serie, basada en los principios del Álgebra simbólica. Sin embargo, puede darse el siguiente razonamiento. Consideremos un símbolo ψ , ψ_z función del parámetro τ , que satisfaga a la ecuación diferencial:

$$\frac{\delta}{\delta \tau} \psi_z = i \alpha \psi_z \quad (37)$$

Cuando se da el valor de ψ_z para un valor determinado de τ esta ecuación permite calcular ψ_z para un valor de τ , que difiera infinitamente poco del anterior. Encontraremos, pues, una solución única para todo valor inicial dado de ψ_z , es decir, para ψ_z igual a un ψ_0 arbitrario para $\tau = 0$. Admitamos ahora que esta solución pueda desarrollarse en serie o en integral de Fourier; tendremos, si tomamos el caso de la integral para fijar las ideas

$$\psi_z = \int e^{i p z} \psi_p dp \quad (38)$$

donde ψ_p es independiente de τ , pero contiene el parámetro p . Sustituyendo esta expresión en (37), tendremos:

$$\int i p e^{i p z} \psi_p dp = i \alpha \int e^{i p z} \psi_p dp$$

o sea:

$$\int p e^{i p z} \psi_p dp = \int e^{i p z} \alpha \psi_p dp$$

Siendo esta ecuación válida para todos los valores de τ , podremos igualar los coeficientes de $e^{i p z}$ en los dos miembros, lo que nos da:

$$p \psi_p = \alpha \psi_p$$

ψ_p es, pues, un ψ propio de α , perteneciente al valor propio p .

Poniendo $\tau = 0$ en (38), obtendremos:

$$\psi_0 = \int \psi_p dp$$

que expresa el ψ_0 arbitrario en función de los ψ propios ψ_p , bajo la forma (36). Si en lugar de la integral (38), se tuviese un desarrollo en serie de Fourier, se obtendría una sucesión discreta de términos como los que aparecen en (35).

El punto vulnerable del anterior razonamiento es la hipótesis hecha de que se pueda desarrollar ψ_z en serie o en integral de Fourier (38). Consideremos la representación vectorial de ψ_z y supongamos que este sea un vector que varíe de una manera continua; es natural suponer posible un cierto desarrollo de Fourier, salvo cuando la magnitud del vector tiende hacia el infinito para $\tau \rightarrow \infty$, lo que puede ocurrir para una ecuación de movimiento del tipo (37). Podemos, sin embargo, excluir esta posibilidad, utilizando el hecho de ser real el observable α . (Para un observable complejo el teorema del desarrollo en serie no es siempre cierto). El símbolo Φ_z imaginario conjugado de ψ_z satisfará a la ecuación diferencial imaginaria conjugada de (37)

$$\frac{\delta}{\delta \tau} \Phi_z = -i \Phi_z \alpha \quad (37')$$

Como $\frac{\delta}{\delta \tau} (\Phi_z \psi_z) = \Phi_z \frac{\delta \psi_z}{\delta \tau} + \frac{\delta \Phi_z}{\delta \tau} \psi_z$, sustituyendo en esta ecuación los valores de $\frac{\delta \psi_z}{\delta \tau}$ y de $\frac{\delta \Phi_z}{\delta \tau}$ dados por (37) y (37') tendremos:

$$\frac{\delta}{\delta \tau} (\Phi_z \psi_z) = \Phi_z i \alpha \psi_z - i \Phi_z \alpha \psi_z = 0 \quad (39)$$

lo cual nos dice que el cuadrado del módulo del vector ψ_z , que es igual a $\Phi_z \psi_z$, permanece constante.

La discusión sumaria que se ha hecho, indica que el teorema del desarrollo en serie podría deducirse rigurosamente de los principios del Álgebra simbólica, completados con algunos axiomas convenientes, referentes a las nociones de límite y de continuidad. Un teorema análogo tendríamos para los Φ .

En lo sucesivo, nos referiremos a desarrollos en serie, pero los teoremas que demos- tremos son también ciertos para las integrales y se demostrarían de la misma manera, modificando la forma, pero sin alterar el fondo de las demostraciones. Estas modificaciones fôrmales requieren, sin embargo, una notación nueva, que daremos en el capítulo siguiente.

Funciones de un observable.

El teorema del desarrollo en serie nos permite dar una definición de las funciones de un observable real, que tiene el mismo grado de generalidad que la de las funciones ordinarias de una variable real. Sea α un observable real, y sea ϕ_p uno de sus ϕ propios, pertenecientes al valor propio a_p , de manera que $\alpha \phi_p = a_p \phi_p$.

Como se dijo en el capítulo anterior, si $f(x)$ designa una función cualquiera de x desarrollable en serie, se tiene:

$$f(\alpha) \phi_p = f(a_p) \phi_p \tag{40}$$

relación que podemos suponer sigue siendo válida para funciones más generales. Sea $f(x)$ una función cualquiera de una variable real x , definida en un campo que contenga el punto $x = a_p$; en este caso, el segundo miembro de (40) tiene un sentido y podemos utilizarlo para definir $f(\alpha) \phi_p$. La definición no nos lleva a contradicciones aún en el caso de que existan varios ϕ propios ϕ'_p, ϕ''_p, \dots pertenecientes al mismo valor propio a_p , de forma que existan entre ellos relaciones lineales del tipo $\sum c' \phi'_p = 0$, siendo c' números; en efecto, la definición dada, nos dará:

$$f(\alpha) \sum c' \phi'_p = \sum c' f(\alpha) \phi'_p = \sum c' f(a_p) \phi'_p = 0$$

Luego, si el campo de existencia de la función $f(x)$ encierra todos los valores propios de α podemos atribuir un sentido preciso al producto de $f(\alpha)$ por un ϕ propio cualquiera de α . El producto de $f(\alpha)$ por un ϕ cualquiera, está también bien definido, puesto que podemos desarrollar este ϕ arbitrario en serie de ϕ propios y multiplicar por $f(\alpha)$ cada término por separado.

Por consiguiente, se le puede asignar un sentido preciso a $f(\alpha)$, siendo $f(x)$ una función (aunque sea irregular y discontinua), de la variable real x , definida en un campo que contenga todos los valores propios de α .

Estos resultados se deducen necesariamente de la significación física que hemos atribuido a los valores propios. Si α es un observable, $f(\alpha)$ será una magnitud de la misma naturaleza, con tal de que $f(x)$ sea una función de la variable real x , que tenga sentido para todos los valores de esta variable, resultados de posibles medidas, es decir, para todos los valores propios; en efecto, los mismos aparatos y las mismas experiencias que sirven para medir α , medirán también $f(\alpha)$.

De (40) se deduce que todo ϕ propio de α es un ϕ propio para $f(\alpha)$. La recíproca no es cierta; es decir, todo ϕ propio de $f(\alpha)$ no es, por lo general, un ϕ propio de α , salvo cuando $f(\alpha)$ es una función unívoca de $f(\alpha)$. Resulta también de (40) que los valores propios de $f(\alpha)$ son funciones de los valores propios de α , estableciéndose su dependencia por la misma función f ; por ejemplo, los valores propios de α^2 son los cuadrados de los valores propios de α . Estos resultados son indispensables si queremos conservar para los valores propios y los estados propios la significación física que les hemos atribuido. Del mismo modo, la suma o el producto de dos funciones de un observable, así como la función de un observable, son igualmente funciones de este observable. Se puede deducir todo ello fácilmente de la definición (40); la interpretación física dada, hace tan necesarios estos resultados como los anteriores.

Se puede definir $f(\alpha)$, utilizando los Φ propios en lugar de los ϕ propios. Tendremos en este caso:

$$\Phi_p f(\alpha) = f(a_p) \Phi_p$$

donde Φ_p es un Φ propio de α . Ecuación que es la imaginaria conjugada de (40) y puede deducirse, por tanto, de ella. Las dos definiciones de $f(\alpha)$ son, pues, equivalentes.

Se puede también demostrar el siguiente teorema: «Cuando un observable conmuta con α , conmuta igualmente con $f(\alpha)$ y su recíproco. «Sea α un cierto observable real; si cada observable que conmuta con él, conmuta igualmente con otro observable f , este último es necesariamente una función de α , $f(\alpha)$ ».

Omitimos, por brevedad, las demostraciones, muy elegantes, debidas, como toda la teoría, a Dirac.

Ejemplos de funciones de un observable.

Vamos, ahora, a considerar algunos ejemplos de funciones elementales del observable real α . Si 0 no es un valor propio de un observable α , se puede siempre definir su inverso α^{-1} . Por definición, esta función α^{-1} satisface a:

$$\alpha^{-1} \phi_p = a_p^{-1} \phi_p$$

siendo ϕ_p un ϕ propio de α , perteneciente al valor propio a_p . De esta igualdad se deduce:

$$\alpha \alpha^{-1} \phi_p = \alpha a_p^{-1} \phi_p = \phi_p$$

y puesto que esto es cierto cualquiera que sea ϕ_p debe verificarse $\alpha \alpha^{-1} = 1$, y análogamente $\alpha^{-1} \alpha = 1$. Una cualquiera de estas ecuaciones basta para determinar completamente el inverso cuando este existe. Para probarlo supongamos que $(\alpha^{-1})_1$ y $(\alpha^{-1})_2$ sean dos soluciones distintas de $\alpha \alpha^{-1} = 1$, de modo que

$$\alpha (\alpha^{-1})_1 = 1 \qquad \alpha (\alpha^{-1})_2 = 1$$

De estas se deduce: $\alpha \xi = 0$ (41), siendo $\xi = (\alpha^{-1})_1 - (\alpha^{-1})_2$. Si existe un ξ que sin ser idénticamente nulo satisfaga a (41) no habrá inverso según la anterior definición; pues si tal inverso α^{-1} existiese, se tendría multiplicando (41) a la izquierda por α^{-1} :

$$0 = \alpha^{-1} \alpha \xi = \xi$$

Luego $\xi = 0$, y las dos soluciones de $\alpha \alpha^{-1} = 1$ serán idénticas.

Tomemos como segundo ejemplo la raíz cuadrada de α ; está definida por:

$$\sqrt{\alpha} \phi_p = \pm \sqrt{a_p} \phi_p \qquad (42)$$

La raíz cuadrada de α existe siempre, pero no constituye un observable real más que si α no tiene valores propios negativos; de (42) se deduce:

$$\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha} \phi_p = \sqrt{a_p} \sqrt{a_p} \phi_p = \alpha \phi_p$$

de modo que:

$$\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha} = \alpha \qquad (43)$$

La raíz cuadrada de un observable queda hasta cierto punto indeterminada a causa de la ambigüedad que introduce el doble signo en (42). Para determinar completamente una raíz cuadrada, debemos elegir el signo para cada uno de los valores propios a_p , introducidos en (42), lo que equivale a elegir un signo determinado para la raíz cuadrada de una variable real, cuyo campo de variación esté constituido por los valores propios a_p . En esta forma, la ecuación (42) definirá siempre un observable $\sqrt{\alpha}$, que satisface a (43) y que será lícito llamar la raíz cuadrada de α . Supongamos que existen dos ϕ propios del observable α , pertenecientes a un mismo valor propio a_q ; podemos en este caso definir un observable $\sqrt{\alpha}$ por la ecuación (42), tomando el signo + para uno de los dos ϕ propios y el signo - para el otro y afectándolo de un signo arbitrario para los ϕ propios, pertenecientes a valores propios distintos de a_q . Tal observable cumpliría con la condición (43), pero no sería una función del observable α , según la definición anterior, pues esta exige que no haya más que un sólo coeficiente para cada valor propio a_p en el segundo miembro de (42), o dicho de otro modo, que este coeficiente sea una función unívoca de la variable real a_p . Si esta condición no se cumple, $\sqrt{\alpha}$ no podrá satisfacer, por ejemplo, a la condición de conmutar con todo observable que conmute con α .

Contrariamente a lo que ocurre con la inversa aritmética, la ecuación (43) no basta para definir la raíz cuadrada; es necesario completarla con la condición de que la función así definida, sea efectivamente una función de α .

El número de funciones, «raíz cuadrada», diferentes es $2n$, siendo n el número de valores propios de α . La más útil es, generalmente, la que existe únicamente cuando todos los valores propios de α son positivos y para todos los cuales se toma siempre el signo + en la raíz cuadrada.

Como ejemplo de función no analítica, citaremos el módulo $|\alpha|$ del observable α . Esta función queda definida por $|\alpha| \phi_p = |a_p| \phi_p$ y constituye una magnitud observable propiamente dicha, a pesar de que la función de variable real

correspondiente tiene una derivada discontinua; se la puede, pues, utilizar correctamente en los cálculos.

Estados propios simultáneos.

Un mismo estado puede ser, a la vez, un estado propio para dos observables: α y β , es decir, que puede satisfacer, simultáneamente, a las dos condiciones: $\alpha \psi = a \psi$ y $\beta \psi = b \psi$, donde a y b son números. Tenemos en éste caso:

$$\alpha \beta \psi = a b \psi = \beta \alpha \psi$$

o sea:

$$(\alpha \beta - \beta \alpha) \psi = 0$$

Esto nos sugiere que las circunstancias más favorables para la existencia de un estado semejante se presentan cuando $\alpha \beta - \beta \alpha = 0$; es decir, cuando α y β son conmutables.

Cuando α y β no conmutan, la existencia de un estado propio simultáneo es posible, pero excepcional. Por otra parte, cuando α y β conmutan, el número de los estados propios simultáneos es tan grande, que se les puede utilizar para desarrollar en serie un estado arbitrario cualquiera. Este teorema es una generalización del teorema del desarrollo en serie, anteriormente demostrado. La proposición recíproca de ésta es también cierta: «Si se puede desarrollar un ψ arbitrario, según los estados propios simultáneos de dos observables dados α y β , estas dos magnitudes son necesariamente conmutables».

El concepto de estados propios simultáneos puede ser generalizado al caso de varios observables, y los teoremas enunciados siguen siendo válidos, y lo mismo el teorema del desarrollo en serie, que es igualmente válido para un observable sólo o para dos o varios observables que conmutan. Así es, que un grupo de dos o varios observables que conmutan, posee, en conjunto, un gran número de propiedades, semejantes a las de un observable único. La teoría de las funciones de un observable puede también aplicarse sin modificaciones a las funciones de dos o varios observables que conmutan. Siendo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ un sistema de observables que conmutan, podemos

definir una función general $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ de estas variables por la ecuación

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \psi_{abc\dots} = f(a, b, c, \dots) \psi_{abc\dots}$$

en que $\psi_{abc\dots}$ es un ψ propio simultáneo de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ perteneciente, respectivamente, a los valores propios a, b, c, \dots y $f(a, b, c, \dots)$ una función de las variables reales a, b, c, \dots cuyos campos de variación están formados, respectivamente, por los valores propios de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Los teoremas referentes a las funciones de un observable único, son aplicables a las funciones de varios observables que conmutan; por ejemplo, tendremos el siguiente teorema: «Todo observable que conmuta con cada uno de los elementos de un sistema de observables conmutables $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ conmutará igualmente con una función de ellos $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ ».

Si consideramos el número máximo de observables independientes conmutables (independencia que equivale a que ninguno de ellos es función de los otros), no puede haber más que un sólo estado propio simultáneo, para todos los observables, que pertenezcan a un sistema determinado de valores propios. Luego, si el sistema o grupo de observables satisface a las condiciones dichas, cada estado propio queda completamente determinado por los valores propios, a los cuales pertenece. Tal sistema se llama un sistema o grupo *completo* de observables conmutables.

Teoremas de probabilidades.

Busquemos ahora cuál es la probabilidad de obtener un resultado determinado cuando el sistema en el cual se efectúa la observación se encuentra en un estado dado. No utilizaremos para ello más hipótesis física que la que expusimos al hablar de la significación física del Álgebra de los observables, referente al valor medio de un observable. Para determinar la probabilidad de encontrar el valor a cuando se mide un observable α en un sistema en el estado ψ , tendremos en cuenta el hecho de que si se mide $f(\alpha)$, siendo f una función cualquiera de α , el valor medio obtenido será $\Phi f(\alpha) \psi$, siendo Φ el imaginario conjugado

de ψ y estando ψ y Φ normalizados. Desarrollemos Φ y ψ según los Φ propios y los ψ propios:

$$\Phi = \sum_a \Phi_a \quad \psi = \sum_{a'} \psi_{a'} \quad (44)$$

perteneciendo Φ_a al valor propio a y $\psi_{a'}$ al valor propio a' . La expresión del valor medio de $f(\alpha)$ se convierte en:

$$\sum_a \Phi_a f(\alpha) \sum_{a'} \psi_{a'} = \sum_{aa'} f(a) \Phi_a \psi_{a'} = \sum_a f(a) \Phi_a \psi_a \quad (45)$$

utilizando el teorema según el cual los estados propios pertenecientes a valores a y a' diferentes, son ortogonales. Si $P(a)$ designa la probabilidad de encontrar a a como valor del observable α , el valor medio de $f(\alpha)$ según las reglas ordinarias del cálculo de probabilidades, aplicables en este caso, será $\sum_a f(a) P(a)$. Igualando esta expresión a (45), tendremos:

$$\sum_a f(a) P(a) = \sum_a f(a) \Phi_a \psi_a$$

Esta ecuación es válida cualquiera que sea la función $f(a)$ de la variable real a , podemos pues igualar los coeficientes de $f(a)$ en los dos miembros, lo que da:

$$P(a) = \Phi_a \psi_a \quad (46)$$

Si se calcula por medio de esta expresión de $P(a)$ la probabilidad de que α tenga uno cualquiera de todos los valores posibles, se obtiene efectivamente la unidad, como es fácil de comprobar; en efecto, según las condiciones de normalización de Φ y ψ tenemos:

$$\sum_a \Phi_a \sum_{a'} \psi_{a'} = 1 \text{ que se reduce a } \sum_a P(a) = \sum_a \Phi_a \psi_a = 1$$

Podemos darle otra forma a la expresión (46) suponiendo que Φ_r y ψ_r están también normalizados e introduciendo coeficientes numéricos en los desarrollos (44), que se convierten en:

$$\Phi = \sum_a \bar{c}_a \Phi_a \quad \psi = \sum_{a'} c_{a'} \psi_{a'}$$

en cuyo caso tenemos para $P(a)$

$$P(a) = \bar{c}_a \Phi_a c_a \psi_a = |c_a|^2;$$

la probabilidad para que α tenga un valor dado es igual al cua-

drado del módulo del coeficiente correspondiente en el desarrollo del ψ considerado según los ψ propios.

Se deduce inmediatamente de aquí que si ψ es un estado propio perteneciente al valor propio a , la probabilidad de que α tenga el valor a es igual a la unidad. Luego el resultado anterior, según el cual α tiene con certidumbre el valor a si satisface a la condición $\alpha \psi = a \psi$, puede deducirse directamente de la hipótesis sobre la expresión del valor medio de un observable.

Otra consecuencia inmediata es la siguiente: supongamos que midiendo el observable α sobre el sistema en el estado $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ se haya encontrado por resultado a , se puede entonces afirmar que si se efectúa la misma medida sobre el sistema en el estado ψ_1 o en el estado ψ_2 , la probabilidad de obtener el resultado a , en uno de estos dos casos por lo menos, será distinta de 0. En efecto, si en el desarrollo de $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ según los ψ propios de α , el término perteneciente al valor propio a no es nulo, será también distinto de 0 o en el desarrollo de ψ_1 o en el de ψ_2 . Esto demuestra que la definición de superposición dada en el primer capítulo es equivalente a la contenida implícitamente en el Álgebra simbólica, completada por la interpretación de $\Phi \alpha \psi$ como valor medio de α .

Los resultados obtenidos siguen siendo válidos cuando se reemplaza el observable α por un grupo de dos o más observables conmutables. Por ejemplo, si se desarrolla ψ según los ψ propios simultáneos de dos observables α y β conmutables, es decir, si se pone $\psi = \sum_{ab} \psi_{ab}$ en donde ψ_{ab} representa un ψ propio simultáneo perteneciente a los valores propios a de α y b de β , la probabilidad de obtener los resultados a y b midiendo α y β sobre un sistema en el estado ψ , será $\Phi_{ab} \psi_{ab}$, estando Φ y ψ normalizados.

La existencia de una probabilidad determinada, independiente del orden en que se hagan las medidas, exige una completa independencia de las observaciones, que no deben perturbarse una a otra y sugiere que «la condición de conmutabilidad de dos observables es equivalente a la condición de que los dos observables correspondientes sean compatibles». De esta proposición así como de su recíproca: «Si las medidas de dos observables α y β constituyen dos observaciones compatibles, los observables α y β son conmutables», se pueden dar demostraciones rigurosas, que omitimos por brevedad.

Conviene sin embargo dar una forma matemática a la condición que expresa que una observación se ha efectuado con el mínimo de perturbación del sistema, condición que hasta ahora ha sido examinada únicamente desde un punto de vista cualitativo.

Sea una observación consistente en la medida de un observable α aplicada a un sistema en el estado ψ . El estado del sistema después de la observación debe ser un estado propio de α puesto que se sabe con certidumbre cuál será el resultado de una nueva medida de α para este estado. Supongamos ahora que la observación se haga de tal modo que el estado del sistema después de la medida esté siempre representado por uno de los ψ propios que aparecen cuando se desarrolla el ψ inicial según los ψ propios de α , es decir, por uno de los ψ_a de $\psi = \sum_a \psi_a$. Esto es siempre posible, puesto que en el desarrollo de ψ hay un sólo ψ propio, ψ_a , para cada valor propio a , susceptible de constituir el resultado de la medida y que tenga una probabilidad distinta de 0. Se puede considerar esta observación de α como aquella que provoca la perturbación mínima del sistema. Las observaciones que provocan el mínimo de perturbación son pues aquellas para las cuales el estado del sistema antes de la observación puede estar formado por superposición a partir de todos los estados posibles del sistema después de la medida; puede también decirse que son las observaciones para las cuales todo resultado de una medida hecha sobre el sistema en el estado inicial puede obtenerse por la misma observación efectuada sobre el sistema en uno de sus estados finales. Si se admite la existencia de observaciones que posean esta propiedad, la validez del teorema del desarrollo en serie se hace físicamente necesaria.

La identificación de la condición de conmutabilidad de los observables con la de la compatibilidad de las observaciones nos permite dar una razón física para la validez del teorema enunciado, según el que, un observable que conmuta con α conmuta igualmente con una función arbitraria, $f(\alpha)$, de α .

Este teorema podremos enunciarlo ahora en la siguiente forma: «Toda observación compatible con la observación de α , lo es igualmente con la de $f(\alpha)$ », bajo cuya forma el teorema es físicamente evidente puesto que efectivamente toda observación de α es igualmente una observación de $f(\alpha)$.

De la hipótesis referente al valor medio de un observable se puede también deducir que «el valor de la probabilidad de acuerdo de dos estados normalizados ψ_1 y ψ_2 es $|\langle \psi_2, \psi_1 \rangle|^2$ ».

Transformaciones de contacto.

Tiene gran importancia en la teoría de los valores propios el siguiente teorema: «Siendo α un observable cualquiera y S otro, sometido únicamente a la condición de que exista su inverso S^{-1} , el observable $S \alpha S^{-1}$ tiene los mismos valores propios que α ».

Sea a uno de los valores propios de α y ψ_a el ψ propio correspondiente, de modo que $\alpha \psi_a = a \psi_a$. Tendremos que:

$$S \alpha S^{-1} S \psi_a = S \alpha \psi_a = a S \psi_a$$

Luego, $S \psi_a$ es un ψ propio de $S \alpha S^{-1}$ perteneciente al valor propio a . Recíprocamente, puede demostrarse de manera análoga, que si a es uno de los valores propios de $S \alpha S^{-1}$ y ψ el ψ propio correspondiente, a será igualmente un valor propio de α , teniendo como ψ propio $S^{-1} \psi$.

El teorema es también válido aún cuando S no sea un observable real; en este caso, no puede ya definirse S^{-1} , utilizando la definición general de función de un observable; pero sí podemos emplear las condiciones $S S^{-1} = S^{-1} S = 1$, que bastan para la demostración. S puede ser un observable cualquiera, con tal de que exista un observable S^{-1} , que satisfaga a estas condiciones. Ni siquiera es necesario que α sea un observable real para que el teorema sea cierto; sin embargo, el teorema no es útil más que cuando α y $S \alpha S^{-1}$ son los dos observables reales, pues los únicos valores propios que tienen interés en Mecánica cuántica, son los de los observables reales. Esta restricción se traduce por una condición a la cual debe satisfacer S ; efectivamente, según ya vimos, si $S \alpha S^{-1}$ es real, al mismo tiempo que α , debe verificarse:

$$S \alpha S^{-1} = \overline{S \alpha S^{-1}} = \overline{S^{-1}} \overline{\alpha} \overline{S} = \overline{S^{-1}} \alpha \overline{S}$$

que exige, prescindiendo de factores numéricos: $S^{-1} = \overline{S}$, $S =$

$=S^{-1}$, siendo cada una de estas condiciones, consecuencia de la otra.

La transformación por la cual se pasa de un grupo de observables α_r a otro grupo $\beta_r = S \alpha_r S^{-1}$, donde S satisface a la anterior condición, se llama una «transformación de contacto» por ser análoga a las transformaciones de contacto de la Mecánica clásica. Cada observable transformado β_r , tiene los mismos valores propios que el observable inicial correspondiente α_r . Además, la transformación posee propiedades muy notables, como las siguientes:

«Si entre un cierto número de observables α , existe una relación algebraica cualquiera, la misma relación subsiste entre los observables β correspondientes», y

«Si uno de los α es una función de otro, según la definición general de funciones de un observable, la misma relación funcional ligará a los correspondientes β ».

El resultado de dos transformaciones de contacto, aplicadas sucesivamente, es también una transformación de contacto. Efectivamente, consideremos la transformación $\beta_r = S \alpha_r S^{-1}$ de los α en β , y la transformación $\gamma_r = T \beta_r T^{-1}$ de los β en γ . Tendremos, $\gamma_r = T S \alpha_r S^{-1} T^{-1}$, pero $(T S) (S^{-1} T^{-1}) = 1$ y $(S^{-1} T^{-1}) (T S) = 1$, luego podremos poner $S^{-1} T^{-1} = (T S)^{-1}$ y la relación, entre los α y los γ será entonces: $\gamma_r = (T S) \alpha_r (T S)^{-1}$, que es también una transformación de contacto.

Si el observable S no difiere de la unidad más que en un infinitamente pequeño, la transformación $\beta = S \alpha S^{-1}$ es una transformación de contacto infinitesimal. Supongamos que se tenga $S = 1 + i A$, donde A es un infinitamente pequeño, y cuyo cuadrado, por tanto, es despreciable. Tendremos: $S^{-1} = 1 - i A$, puesto que así, despreciando A^2 se cumple que: $S S^{-1} = S^{-1} S = 1$. La ecuación de transformación se convierte en:

$$\beta = (1 + i A) \alpha (1 - i A)$$

que dá, despreciando como siempre A^2 :

$$\beta - \alpha = i (A \alpha - \alpha A)$$

que es la forma normal de una transformación de contacto infinitesimal.

Para que $\beta - \alpha$ sea real al mismo tiempo que α , A debe ser también un observable real.

Como aplicación de la teoría de las transformaciones de contacto, vamos a obtener algunos resultados referentes a los observables p y q , de que nos ocupamos al final del capítulo anterior.

Apliquemos el teorema sobre la identidad de los valores propios de p y de $S p S^{-1}$, haciendo $S = e^{icq}$, en que c es un número real, lo que implica que $S^{-1} = \bar{S}$. Tendremos en virtud de (28):

$$S p S^{-1} = e^{icq} p e^{-icq} = (p - c) e^{icq} e^{-icq} = p - c$$

Luego p tiene los mismos valores propios que $p - c$, que son los de p disminuídos en c ; luego, si a es un valor propio de p , $a - c$ será otro; como esto es cierto para cualquier valor de c , los valores propios de p serán todos los números de $-\infty$ a $+\infty$. De la misma manera se puede demostrar que los valores propios de q son igualmente todos los números entre $-\infty$ y $+\infty$, resultados que aparecen como consecuencias obligadas de la relación algebraica única $qp - pq = i$.

IV.—REPRESENTACIÓN DE LOS ESTADOS Y DE LOS OBSERVABLES.

Propiedades generales.

En los dos capítulos anteriores, hemos considerado ciertos símbolos abstractos, que designan los estados o los observables y que por hipótesis obedecen a ciertas y determinadas leyes. En el presente, vamos a examinar las representaciones de estos símbolos abstractos, es decir, sistemas de números que tengan exactamente las propiedades de los símbolos que representan. Encontrada tal representación y comprendida la naturaleza exacta de la correspondencia entre ella y los símbolos abstractos considerados, se pueden obtener todas las propiedades de éstos, sin introducir en los cálculos más que los sistemas de números que los representan y a los cuales se aplican los métodos ordinarios del Análisis matemático. De esta forma, es evidente que no se obtendrán otras relaciones entre los símbolos abstractos que las que se podrían deducir directamente mediante

el Álgebra simbólica de estas magnitudes, sin haber recurrido a su representación. Sin embargo, estas representaciones nos permiten llegar algunas veces a los resultados de una manera mucho más sencilla y más cómoda; a parte de que son de una gran utilidad en las aplicaciones de la teoría, puesto que los números que en ellas aparecen tienen a menudo una interpretación física inmediata.

Sea ψ_p el término general de un sistema completo de ψ independientes; por ser completo el sistema, un ψ cualquiera podrá ser expresado mediante una combinación lineal de los ψ_p

$$\psi = \sum_p a_p \psi_p \quad (47)$$

en que los a_p son números. Además, por ser los ψ_p independientes, el desarrollo (47) es único, puesto que si fuese posible escribir otro desarrollo

$$\psi = \sum_p a'_p \psi_p$$

obtendríamos restándolos:

$$0 = \sum_p (a_p - a'_p) \psi_p$$

igualdad que no puede verificarse, siendo los ψ_p independientes, más que si $a_p = a'_p$ cualquiera que sea p .

Luego, según (47), cada ψ determina de una manera unívoca una serie de números a_p , e inversamente toda serie de números arbitrarios a_p determina un ψ . Entre ψ y la serie de números a_p existe, por tanto, una correspondencia biunívoca.

Si ψ_a corresponde a la serie de números a_p y ψ_b a la serie b_p , se tiene:

$$\psi_a = \sum_p a_p \psi_p \quad \psi_b = \sum_p b_p \psi_p$$

de donde:

$$\psi_a + \psi_b = \sum_p (a_p + b_p) \psi_p$$

lo que demuestra que $\psi_a + \psi_b$ corresponde a la serie $a_p + b_p$. Del mismo modo, siendo c un número cualquiera, $c \psi_a$ corresponde a la serie $c a_p$. Luego las reglas de adición y multiplicación por un número, que son válidas para los ψ , se aplican

también a las series de números a_p que les corresponden. Estas nos proporcionan, pues, una representación de los ψ , estando cada ψ representado por la serie de números definida en (47). A los ψ_p les vamos a llamar los ψ fundamentales de la representación considerada. Cambiando el sistema de ψ fundamentales, un mismo ψ estará representado por una serie de números distintos, y obtendremos así una nueva representación. Siempre existe una representación para cada sistema completo de ψ independientes, puesto que se puede siempre tomar estos ψ como ψ fundamentales. En la representación vectorial de los ψ , los números que los representan son los componentes de los vectores ψ con relación a un sistema de ejes, determinado por los ψ fundamentales, y que, en general, pueden ser oblicuos. Las diferentes representaciones de un mismo ψ son, en este caso, los componentes del mismo vector referidos a diferentes sistemas de ejes. Un estado queda definido solamente por las relaciones entre los números a_p correspondientes de diversas series posibles, puesto que se puede multiplicar un ψ por un número arbitrario, sin que deje de designar el mismo estado.

Vamos a ver ahora cómo se puede representar un observable α . Siendo ψ_q uno cualquiera de los ψ fundamentales elegidos para representar ψ , podremos formar el producto $\alpha \psi_q$ y desarrollarlo, según éstos ψ fundamentales, bajo la forma (47)

$$\alpha \psi_q = \sum_p \psi_p \alpha_{pq} \quad (48)$$

siendo los α_{pq} números que dependen del índice q característico del ψ del primer miembro, como indica por otra parte la notación. Hemos colocado en (48) los coeficientes α_{pq} a la derecha de los ψ_p respectivos, en lugar de colocarlos a la izquierda, como se hace de ordinario, para que sea más fácil recordar el orden de los dos índices: el índice del ψ y el índice del α_{pq} más próximo al ψ , son idénticos.

Por medio de la ecuación (48) cada observable α determina de una manera unívoca un conjunto de números α_{pq} , e inversamente un conjunto de números α_{pq} determina un observable α . Existe, pues, una correspondencia biunívoca entre el conjunto de números α_{pq} y el observable α ; este conjunto constituye, pues, una representación del observable α ; examinemos ahora

la correspondencia que existe entre las propiedades de estos conjuntos de números y las de los observables.

Todo conjunto que representa un observable es un conjunto de dos dimensiones, a causa de los dos índices p y q; la manera más cómoda de escribirlo consiste en ordenar sus términos en forma de matriz; el número α_{pq} constituirá en ella el elemento de la matriz, colocado en la intersección de la fila p con la columna q. Un observable queda, pues, representado por una matriz. El número de filas y de columnas de ésta es igual a los números de los ψ fundamentales de la representación, y a cada ψ fundamental corresponde una fila y una columna. Una fila y una columna relativas al mismo ψ fundamental se corresponden. El elemento de matriz, colocado en una fila y en una columna que se corresponden, es decir, un elemento del tipo α_{pp} se llama un elemento «diagonal», porque todos los elementos de este tipo se encuentran en la diagonal principal de la matriz cuando se han arreglado las filas y las columnas en el mismo orden.

Es fácil comprobar que si un observable α está representado por una matriz α_{pq} y otro β por la matriz β_{pq} , el observable $\alpha + \beta$ estará representado por $\alpha_{pq} + \beta_{pq}$ y el observable $c\alpha$ por $c\alpha_{pq}$, siendo c un número cualquiera. Estos resultados se expresan simbólicamente mediante las ecuaciones:

$$(\alpha + \beta)_{pq} = \alpha_{pq} + \beta_{pq} \quad (49)$$

$$(c\alpha)_{pq} = c\alpha_{pq} \quad (50)$$

que dan las reglas ordinarias de adición de matrices o de su multiplicación por un número. Si el producto $\alpha\beta$ está representado por la matriz $(\alpha\beta)_{pq}$, se tiene por definición:

$$(\alpha\beta)\psi_q = \sum_p \psi_p (\alpha\beta)_{pq} \quad (51)$$

Pero como tenemos también:

$$(\alpha\beta)\psi_q = \alpha(\beta\psi_q) = \alpha \sum_r \psi_r \beta_{rq} = \sum_r (\alpha\psi_r) \beta_{rq} = \sum_{pr} \psi_p \alpha_{pr} \beta_{rq} \quad (52)$$

Igualando los coeficientes de ψ_p en los dos segundos miembros

de (51) y (52), lo que está permitido, puesto que los ψ son independientes, obtendremos:

$$(\alpha\beta)_{pq} = \sum_r \alpha_{pr} \beta_{rq} \quad (53)$$

Luego, la matriz que representa a $\alpha\beta$ es igual al producto de la matriz que representa a α por la matriz que representa a β , efectuándose la multiplicación, según las reglas ordinarias del cálculo de matrices.

Para que esta regla sea válida, es indispensable elegir de una forma conveniente el orden en que deben escribirse los índices de α_{pq} en la ecuación de definición (48). Si en lugar de (48) hubiésemos escrito:

$$\alpha\psi_q = \sum_p \alpha_{qp} \psi_p$$

hubiésemos encontrado para ley de la multiplicación:

$$(\alpha\beta)_{pq} = \sum_r \alpha_{rq} \beta_{pr} \quad (54)$$

menos cómoda que (53).

Las ecuaciones (49), (50) y (53), muestran que las propiedades de las matrices reproducen fielmente las leyes de la adición y la multiplicación de los observables, y justifican por tanto nuestra elección. Las matrices como los observables siguen todas las reglas del Álgebra ordinaria, a excepción de la ley de conmutatividad de la multiplicación.

Ya citamos el hecho de que un número puede ser considerado como un caso particular de un observable. Los elementos de la matriz que representa un número c están definidos por $c\psi_q = \sum_p \psi_p c_{pq}$, que da $c_{pp} = c$ $c_{pq} = 0$ ($p \neq q$). Luego la matriz que representa a c es una matriz diagonal, es decir, que todos sus elementos son nulos con excepción de los elementos diagonales que son iguales a c. Podemos poner $c_{pq} = c\delta_{pq}$, estando definido el símbolo δ_{pq} por

$$\delta_{pp} = 1 \quad \delta_{pq} = 0 \quad (p \neq q) \quad (55)$$

Los números δ_{pq} son los elementos de la matriz unidad, cuyo producto a derecha o a izquierda por una matriz cualquiera, es igual a esta misma matriz.

Vamos a deducir ahora la ley de multiplicación entre las

representaciones de un observable y de un símbolo. Sea a_p la sucesión de números que representa a ψ , según la definición (47) y sea b_q la que define el símbolo $\alpha \psi$, siendo α un observable cualquiera, de modo que $\alpha \psi = \sum_q \psi_q b_q$. Según (47)

$$\alpha \psi = \alpha \sum_p \psi_p a_p = \sum_{pq} \psi_q \alpha_{qp} a_p$$

de donde igualando los coeficientes de ψ_q obtenemos:

$$b_q = \sum_p \alpha_{qp} a_p \quad (56)$$

que nos dá la ley de multiplicación que buscamos. Esta ley nos sugiere la idea de considerar la sucesión de los números a_p como una matriz, cuyas filas corresponderían a los diversos ψ fundamentales de la representación, pero que no tendría más que una sola columna. La ecuación (56) expresaría entonces sencillamente la ley de multiplicación de una tal matriz por la matriz α_{pq} .

La correspondencia establecida entre las propiedades de los observables y de los ψ de una parte y sus representaciones de otra parte, y de la que hemos dado como ejemplo las relaciones (49), (50), (53) y (56), nos permite transformar una ecuación cualquiera entre dos magnitudes simbólicas en una relación entre sus magnitudes representativas. Supongamos por ejemplo que se nos dá la ecuación:

$$\alpha \beta \psi = \gamma \psi' + \psi'' \quad (57)$$

donde α , β , y γ son tres observables y ψ , ψ' y ψ'' tres estados del sistema. Igualando las magnitudes representativas de cada miembro, obtendremos aplicando la ley (56)

$$\sum_p (\alpha \beta)_{qp} a_p = \sum_p \gamma_{qp} a'_p + a''_q$$

en que a_p , a'_p , y a''_q representan respectivamente a ψ , ψ' y ψ'' . Utilizando la relación (53) obtendremos:

$$\sum_{pr} \alpha_{qr} \beta_{rp} a_p = \sum_p \gamma_{qp} a'_p + a''_q$$

Cada magnitud abstracta de la ecuación original (57) ha sido reemplazada por su elemento representativo en el orden correspondiente. Los índices están colocados según reglas muy sencillas y fáciles de recordar: Dos factores consecutivos tienen

siempre un índice común; en la sucesión de los índices, los índices comunes aparecen seguidos; el primer índice de cada término es el mismo en todos los términos, y finalmente en cada término se hace la suma con respecto a todos los índices que aparecen dos veces.

Como ejemplo de ecuaciones que pueden transformarse así, se puede tomar cualquiera de las ecuaciones de la teoría de los valores propios expuesta en el capítulo anterior. Así, la ecuación (29) de este capítulo dá por ejemplo:

$$\sum_q \alpha_{pq} a_q = a a_p$$

Cuando se conoce la matriz α_{pq} estas ecuaciones constituyen un sistema clásico de ecuaciones lineales y homogéneas entre las incógnitas a_p y a . Todo valor de a para el cual estas ecuaciones tienen una solución (no idénticamente nula) puede llamarse un valor propio de la matriz α_{pq} . Eliminando las incógnitas a_p , entre estas ecuaciones lineales y homogéneas, se obtiene, para determinar los valores propios a , la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - a & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - a & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - a \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (58)$$

Los valores propios de una matriz que representa un observable deben evidentemente coincidir con los valores propios de este observable.

Representaciones ortogonales.

No hemos considerado hasta aquí la representación de los símbolos Φ , los cuales pueden ser siempre tratados de una manera análoga a los ψ . Podemos, pues, elegir un sistema completo de Φ independientes Φ_p , que llamaremos los Φ fundamentales de la representación y desarrollar un Φ cualquiera según estos Φ_p .

$$\Phi = \sum_p a_p^* \Phi_p \quad (59)$$

la sucesión de números a_p^* constituirá una representación de Φ . Del mismo modo si α es un observable cualquiera el producto de α por un Φ fundamental $\alpha \Phi_p$ puede ser desarrollado según los Φ fundamentales.

$$\alpha \Phi_p = \sum_q \alpha_{pq} \Phi_q \quad (60)$$

Los coeficientes α_{pq} forman una matriz, que representará el observable α . Se puede, fácilmente, comprobar que las leyes de adición y de multiplicación de las matrices (49), (50) y (53), son también válidas para las magnitudes representativas de los observables, obtenidas a partir de una representación basada en un sistema de Φ fundamentales. Un detalle hay que hacer resaltar: el orden de los índices de los α_{pq} , exige que los coeficientes del segundo miembro de (60) se escriban a la izquierda de los Φ correspondientes, al contrario de lo que ocurría en la ecuación (48). El orden de los índices, adoptado para (60) como el elegido para (48) es indispensable para obtener la ley de multiplicación (53) que obedezca a la regla de los índices y evitar la ley (54).

Podemos obtener pues de esta forma una representación de los observables, basada, o bien en un sistema de Φ fundamentales, o bien en un sistema de ψ fundamentales. El problema que se nos plantea ahora es el de ver si se puede encontrar un sistema de Φ y un sistema de ψ fundamentales que den cada uno la misma representación para un mismo observable cualquiera. Si fuese así, podríamos considerar los dos sistemas como pertenecientes a una misma representación y tendríamos la posibilidad de reunir en una representación única lo mismo los Φ y los ψ que los observables utilizados. Una condición necesaria para que Φ y ψ fundamentales diferentes puedan darnos la misma representación para un observable dado es que estén caracterizados por el mismo sistema de índices p, q, r, \dots ; estos índices caracterizarán en este caso las filas y las columnas de las matrices. Luego a cada ψ fundamental corresponderá un Φ fundamental, que tendrá el mismo índice. Según la notación empleada hasta ahora, un Φ y un ψ con el mismo índice son símbolos imaginarios conjugados que designan el mismo estado; esta regla no será ya válida en lo sucesivo.

En (60) para caracterizar los Φ fundamentales hemos em-

pleado los mismos índices que para los ψ en (48); podríamos, pues utilizar estas ecuaciones para ver qué conclusiones se pueden deducir cuando se supone que los coeficientes α_{pq} son idénticos en las dos expresiones para un observable cualquiera α .

Cambiamos en (60) el índice de sumación q por r y multipliquemos por ψ a la derecha, obtendremos:

$$\Phi_p \alpha \psi_q = \sum_r \alpha_{pr} \Phi_r \psi_q \quad (61)$$

Análogamente, si cambiamos en (48) el índice de sumación p por r y si multiplicamos por Φ_p a la izquierda, obtendremos:

$$\Phi_p \alpha \psi_q = \sum_r \Phi_p \psi_r \alpha_{rq} \quad (62)$$

Los segundos miembros de las ecuaciones (61) y (62) no pueden ser iguales para un observable arbitrario; es decir, para α_{pq} arbitrarios, más que si se verifica:

$$\Phi_p \psi_q = 0 \quad (p \neq q) \quad (63) \quad \text{y} \quad \Phi_p \psi_p = c$$

en que c es un número independiente de p . Sin mengua de la generalidad podremos tomar $c = 1$ y tendremos:

$$\Phi_p \psi_p = 1 \quad (64)$$

Las ecuaciones (63) y (64) pueden ser combinadas en una ecuación única:

$$\Phi_p \psi_q = \delta_{pq} \quad (65)$$

La cual expresa la condición para que un sistema de Φ fundamentales y un sistema de ψ fundamentales nos den la misma representación.

Por medio de estas condiciones, se puede fácilmente obtener, de una manera explícita, la expresión de los diversos números que aparecen en las representaciones. Por ejemplo, para determinar los coeficientes a_p , que aparecen en el desarrollo (47) de un ψ arbitrario, tenemos:

$$\Phi_q \psi = \Phi_q \sum_p a_p \psi_p = \sum_p a_p \delta_{pq} = a_q \quad (66)$$

Del mismo modo, el coeficiente general a_q^* en el desarrollo (59) de un Φ arbitrario, es:

$$a_q^* = \Phi \psi_q \quad (67)$$

Por otra parte, tendremos a partir de (60):

$$\Phi_p \alpha \psi_r = \sum_q \alpha_{pq} \Phi_q \psi_r = \alpha_{pr} \quad (68)$$

que dá, explícitamente, los elementos de la matriz que representa a un observable cualquiera, resultado que podría también obtenerse a partir de (48).

Tratando de obtener una base única para la representación de los Φ , de los ψ y de los observables, nos hemos visto obligados a abandonar nuestra notación primitiva, en la cual un Φ y un ψ que tengan el mismo índice, son magnitudes imaginarias conjugadas; la representación que así resultaba, es incómoda y poco útil. Puede, sin embargo, ocurrir como caso particular, que los Φ y los ψ fundamentales sean, efectivamente, imaginarios conjugados cuando sus índices son idénticos y que designen, por tanto, el mismo estado; en este caso particular no conviene abandonar la notación que hemos introducido al principio. La representación que de ella resulta y que llamaremos una «representación ortogonal», es extraordinariamente útil.

Llamaremos estados fundamentales de la representación a los estados cuyo símbolo es un Φ o un ψ fundamental. La condición (62) demuestra que son ortogonales, y la condición (64) que los Φ y los ψ que los representan están normalizados. La representación vectorial de los Φ y los ψ nos proporciona una interpretación geométrica sencilla, de una representación ortogonal. Esta representación vectorial designa el símbolo Φ y el símbolo ψ imaginario conjugado por dos vectores complejos conjugados. No hay ninguna incompatibilidad en suponer que cada Φ fundamental de una representación ortogonal y su imaginario conjugado ψ estén representados por el mismo vector real. Siendo así, la condición (63) muestra que estos vectores son perpendiculares entre sí, y la condición (64), que tienen la longitud unidad; forman pues la base de un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares.

Los números que representan un Φ o un ψ arbitrario son, pues, los componentes de estos vectores en este sistema de coordenadas; siendo el sistema de coordenadas un sistema real,

tendrá que verificarse que los componentes de un Φ y de su imaginario conjugado ψ sean complejos conjugados y, por tanto, que las series de números que representan a Φ y a ψ sean también complejas conjugadas, como se comprueba fácilmente comparando las ecuaciones (66) y (67). Por tanto, un estado está representado por la misma serie de números si está definido por un Φ o por un ψ , con la incertidumbre única del signo de $\sqrt{-1}$.

Si α es un observable real, los elementos de la matriz que lo representa, satisfacen según la ecuación (68) a $\alpha_{pr} = \overline{\alpha_{rp}}$, en el caso de una representación ortogonal. Una matriz, cuyos elementos cumplen tal condición, se llama matriz «hermítica». Si además todos sus elementos son reales, tendremos: $\alpha_{pr} = \alpha_{rp}$, es decir, la matriz será simétrica. La relación (68) nos prueba, además, que el elemento diagonal α_{pp} es igual al valor medio del observable para el estado fundamental correspondiente ψ_p , según la definición que se dió al hablar de la interpretación física del Álgebra de los observables. Si α no es real, los elementos de la matriz que representa al observable complejo conjugado $\bar{\alpha}$ definido en el capítulo II, están dados por $\alpha_{pr} = \overline{\alpha_{rp}}$ (69). Se puede llamar a la matriz $\overline{\alpha_{pr}}$ la matriz compleja conjugada de α_{pr} .

La función δ .

Hasta aquí hemos admitido que el número de ψ fundamentales es, si no finito, por lo menos infinito numerable, de modo que cada uno de ellos pueda ser caracterizado por un índice p que no tiene más que valores discretos. Esta condición no la llenan la mayor parte de los sistemas dinámicos que presentan algún interés; el número total de estados independientes es, en general, infinito e igual al número de puntos de un segmento de recta. En un caso semejante cada ψ fundamental debe estar caracterizado por un índice p que pueda tomar un valor cualquiera de un campo. La condición (47) que expresa que un ψ cualquiera es una función lineal de los ψ fundamentales, debe ser escrita de nuevo, reemplazando la suma por una integral en la forma:

$$\psi = \int a_p \psi_p dp \quad (70)$$

donde se sobreentiende que el campo de integración es el campo total de variación del índice p utilizado para caracterizar los ψ fundamentales; el coeficiente a_p es una función de la variable continua p .

El teorema, según el cual un ψ cualquiera puede ser escrito bajo la forma (70), no es rigurosamente exacto, si se impone a los a_p la condición de que han de ser finitos, que se admite implícitamente cuando se afirma que forman una función de la variable continua p . Como resultaría muy incómodo tener que recordar en los desarrollos posteriores de la teoría que la fórmula (70) no es válida para ciertos ψ excepcionales, soslayaremos la dificultad, admitiendo que los coeficientes a_p pueden hacerse infinitos, según ciertas leyes convenientemente elegidas para que la relación (70) siga siendo formalmente válida en todos los casos. Procedimiento análogo al utilizado en Geometría, cuando para evitarnos el decir que las paralelas hacen excepción a la regla, según la cual dos rectas de un plano se cortan siempre en un punto, se conviene en decir que se cortan también, efectivamente, pero que el punto de intersección está en el infinito.

Nótese que en la hipótesis de los a_p finitos, los ψ que no son de la forma (70), pueden siempre ser considerados como límite de ψ , que tengan esta forma. Por ejemplo, ψ_q puede ser escrito así:

$$\psi_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \int a_{pn} \psi_p dp$$

satisfaciendo los coeficientes a_{pn} a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int a_{pn} dp = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{pn} = 0 \text{ (para } p \neq q \text{)}$$

Al aproximarnos al límite, a_{pn} se convierte en una función de p , que vale 0 para todos los valores de p , excepto para aquellos que están en la proximidad inmediata de q , y para los cuales su valor llega a ser tan grande, que su integral es igual a la unidad. Formalmente, podremos poner:

$$\psi_q = \int a_p \psi_p dp \quad (70') \quad \text{en que} \quad a_p = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{pn}$$

Podemos decir que a_p es una función singular de p , que se anula para todos los valores de p , excepto para $p = q$ y que para este último valor $p = q$, se hace infinita, de tal modo, que su integral es igual a la unidad. Es, pues, una función de dos variables p y q , que no depende más que de su diferencia y podremos poner:

$$a_p = \delta(p - q) \quad (71)$$

estando definida la función singular $\delta(x)$ por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \delta(x) = 0 \text{ (para } x \neq 0 \text{)}$$

No hay que temer que la introducción de la función δ en nuestros cálculos haga menos rigurosa la teoría de lo que lo era hasta ahora; en efecto, toda ecuación que contenga la función δ puede ser escrita bajo una forma equivalente, aunque generalmente menos cómoda, en la cual la función δ no figure para nada. La función δ constituye más bien una notación cómoda. La única falta real de rigor de la teoría resulta del hecho de que ciertas operaciones que efectuamos con los símbolos abstractos utilizados, no estén rigurosamente definidas, como por ejemplo, la derivación y la integración con respecto a los parámetros que encierran estos símbolos. Cuando estas operaciones tienen sentido, estudiando las representaciones de los símbolos abstractos, podemos utilizar libremente la función δ , como si fuese una función continua, sin que esto conduzca a resultados erróneos. Podemos, incluso, darle un sentido preciso a la función δ de un observable por medio de la definición general de funciones de un observable, con tal de que los valores propios de este observable formen una serie continua.

Anotemos algunas propiedades elementales de la función δ , que pueden deducirse de su definición o que, por lo menos, no están en contradicción con ella. Tenemos:

$$\delta(-x) = \delta(x) \\ x \delta(x) = 0 \quad (72)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (73)$$

siendo $f(x)$ una función continua cualquiera de x , a un número cualquiera y el campo de integración un campo cualquiera que contenga el punto a ; en la fórmula (73) no se han introducido límites particulares más que para fijar las ideas. La operación «multiplicación por $\delta(x - a)$ e integración con relación a x » equivale, pues, a sustituir x por a . Esto sigue siendo cierto cuando se aplica esta operación, no solamente a una función ordinaria de x , $f(x)$, sino también a un símbolo ϕ o a un observable que contenga el parámetro x , con tal de que se trate de una función razonablemente continua de x .

Otra propiedad de la función δ está dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(a - x) dx \delta(x - b) = \delta(a - b) \quad (74)$$

Para demostrarla consideremos al primer miembro como una función de b a la que llamaremos $F(b)$. Se ve inmediatamente que $F(b) = 0$, si $b \neq a$; tenemos igualmente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(b) db &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(a - x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - b) db = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(a - x) dx = 1 \end{aligned}$$

$F(b)$ satisface, pues, a todas las condiciones que definen $\delta(b - a)$ y puede, por tanto, ser identificada a $\delta(b - a)$ o a $\delta(a - b)$. Se habría podido obtener la ecuación (74) partiendo de la (73) y sustituyendo en ella $f(x)$ por la función impropia $\delta(x - b)$, lo que nos proporciona un ejemplo de cómo se puede utilizar la función δ como si fuese una función continua sin llegar a resultados inexactos.

Para llegar a expresar $\frac{\delta \phi_p}{\delta q}$ bajo la forma (70) es necesario utilizar la derivada $\delta'(x)$ de $\delta(x)$. Es evidente que esta derivada es una función aún más discontinua y más anormal que la misma función $\delta(x)$, pero en muchos casos se la puede utilizar libremente como si fuese una función continua de x sin lle-

gar a resultados erróneos. Sus propiedades elementales son:

$$\begin{aligned} \delta'(-x) &= -\delta'(x) \\ x \delta'(x) &= -\delta(x) \end{aligned} \quad (75) \quad y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - a) dx = -f'(a) \quad (76)$$

para toda función derivable de x que puede ser también un símbolo ϕ o un observable que contenga a x como parámetro. La segunda y la tercera de estas propiedades pueden obtenerse diferenciando respectivamente (72) con respecto a x y (73) con respecto a a . La tercera puede también comprobarse por medio de una integración por partes:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - a) dx &= \left[f(x) \delta(x - a) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - a) dx = -f'(a) \end{aligned} \quad (76)$$

según (73).

Otra propiedad viene dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(a - x) dx \delta(x - b) = \delta'(a - b) \quad (77)$$

relación que puede ser obtenida diferenciando (74) con respecto a a . Puede también deducirse de (73) si se reemplaza a por b y $f(x)$ por $\delta'(a - x)$; lo cual proporciona un ejemplo de cómo se puede utilizar δ , como si fuese una función continua.

Si en (76) sustituimos $f(x)$ por ϕ , la variable x por p y a por q , obtendremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_p \delta'(p - q) dp = -\frac{\delta \phi_p}{\delta q}$$

lo cual prueba que $\frac{\delta \phi_p}{\delta q}$ puede ser expresada en la forma (70),

sustituyendo a_p por $-\delta'(p - q)$ Utilizando derivadas de orden superior de δ , se pueden escribir en forma análoga $\frac{\delta^2 \phi_q}{\delta q^2}$, $\frac{\delta^3 \phi_q}{\delta q^3}$, etcétera.

Representación de una serie continua de estados fundamentales.

Podemos generalizar ahora la teoría de la representación de los estados y de los observables para hacerla aplicable a sistemas que tengan tantos estados independientes como puntos hay en un segmento de recta. El ψ del primer miembro de (70) estará representado por los números a_p , que aparecen como coeficientes en el segundo miembro o por la función a_p de la variable continua p . Del mismo modo, si α es un observable cualquiera, podremos desarrollar $\alpha \psi_q$ en la forma siguiente, que corresponde a (48):

$$\alpha \psi_q = \int \psi_p dp \alpha_{pq}$$

en que los α_{pq} son números; el observable α estará representado por estos números α_{pq} , que son funciones de las dos variables continuas p y q . Resulta a menudo cómodo llamar matriz a esta función de dos variables, con objeto de utilizar los mismos términos al tratar el caso (78) que el (48). El número de filas y columnas de una tal matriz, es igual al número de los puntos de un segmento de recta. La ley de multiplicación de estas matrices correspondiente a la ley (53), es ahora:

$$(\alpha \beta)_{pq} = \int \alpha_{pr} dr \beta_{rq} \quad (79)$$

y puede ser demostrada lo mismo que (53).

Igualmente tenemos el teorema correspondiente a (56), según el cual la función b_q de q , que representa $\alpha \psi$, está dada en función de a_p , que representa a ψ por la relación:

$$b_q = \int \alpha_{qp} dp a_p \quad (80)$$

Si se considera el número c como un observable su representación será por definición:

$$c \psi_q = \int \psi_p dp c_{pq} \quad (81)$$

de modo que:

$$c_{pq} = c \delta(p - q) \quad (82)$$

La matriz que representa la unidad es, pues, ahora aquella cuyo término general es: $\delta(p - q)$; como la de antes, tiene también la propiedad de dejar inalterada a toda matriz que la multiplica sea a derecha o a izquierda. Comparando estos resultados con los resultados correspondientes en el caso de una serie discreta de ψ fundamentales, comprobamos que la única diferencia consiste en que el símbolo δ de dos índices, definidos por la (55), ha sido reemplazado por una función δ de la diferencia de estos dos índices. Esta es una regla general: cada vez que se pasa de las sumas a las integrales, el símbolo de dos índices δ debe ser reemplazado por la función δ , como se ha indicado.

La relación entre los ψ fundamentales y los Φ fundamentales que definen la misma representación es ahora:

$$\Phi_p \psi_q = \delta(p - q) \quad (83)$$

obtenida a partir de (65) reemplazando el símbolo δ de dos índices según la regla anterior. Implícitamente la condición (83) supone que $\Phi_p \psi_q$ es infinito. Luego la ley según la cual el producto de un símbolo Φ por un símbolo ψ existe siempre y es un número, debe ser ampliada de modo que incluya la posibilidad de un producto infinito.

Cuando los Φ y los ψ fundamentales que tienen el mismo índice son símbolos imaginarios conjugados que designan el mismo estado del sistema, tendremos, como anteriormente, una representación ortogonal. Consideremos el sentido de la ecuación (83) para una representación ortogonal. La condición (83) puede ser descompuesta en otras dos:

$$\Phi_p \psi_q = 0 \quad (p \neq q) \quad (84) \quad \int \Phi_p \psi_q dp = 1 \quad (85)$$

La primera que corresponde a (63), expresa que dos estados fundamentales cualesquiera son ortogonales. La segunda que corresponde a (64) se utiliza a veces para definir la normalización de ψ_q cuando el índice q que caracteriza a los estados independientes ψ_q toma una serie continua de valores; reemplaza a la condición $\Phi_q \psi_q = 1$, que no sería en este caso de ninguna utilidad en el cálculo.

Ahora bien, al modificar de esta forma la definición de normalización, es menester tener presente que las reglas utilizadas para la interpretación física de la teoría, no son válidas más que para la antigua definición. La ley general, según la cual $\Phi_q \alpha \psi_q$ es el valor medio del observable α para el estado ψ_q , a condición de que $\Phi_q \psi_q = 1$ es válida en todos los casos, lo mismo para una serie continua que para una sucesión discreta de estados fundamentales. Es bien cierto que en el caso de una serie continua, $\Phi_q \alpha \psi_q$ será nulo, en general, si $\Phi_q \psi_q = 1$; pero este resultado es, precisamente el exigido por la Física. En este caso, las únicas magnitudes que presentan interés son las razones de las medias de diferentes observables; la condición de normalización (85) es muy útil para el cálculo de estos números.

A partir de (70), utilizando (83) y aplicando (73), obtenemos:

$$\Phi_q \psi = \psi_q \int a_p \psi_p dp = \int a_p \delta(p - q) dp = a_q \quad (86)$$

Este resultado, que corresponde a (66), da explícitamente los coeficientes a_p del segundo miembro de (70), que representan a ψ . La imaginaria conjugada Φ está representada por los números $a_q = \Phi \psi_q$ correspondientes a (67), y que en el caso de una representación ortogonal, son los complejos conjugados de los números a_p . Del mismo modo se obtiene, a partir de (78), la relación:

$$\Phi_r \alpha \psi_q = \int \Phi_r \psi_p dp \alpha_{pq} = \int \delta(r - p) dp \alpha_{pq} = \alpha_{rq} \quad (87)$$

que corresponde a (68) y que da explícitamente los elementos de la matriz que representa a α . Sin embargo, el resultado de antes, según el cual un elemento diagonal α_{qq} representa el valor medio de α para el estado ψ_q en el caso de una representación

ortogonal, no es ahora cierto, puesto que la condición de normalización (83), que utilizamos ahora no conduce ya a la interpretación física correcta. Por ejemplo, si tomásemos $\alpha = 1$, llegaríamos al valor $\delta(q - q) = \infty$, en tanto que es evidente que el valor medio de la unidad debe ser la misma unidad.

La función peso.

Resulta a menudo cómodo modificar las ecuaciones (70) y (78) que definen las representaciones de un estado y de un observable, introduciendo una función que juegue el papel de «peso». Tomemos una función cualquiera ρ_p de la variable p , definida en todo el campo de variación de p , que caracteriza a los estados fundamentales y que no se anule en todo ese campo y reemplacemos (70) y (78), por:

$$\psi = \int a_p \psi_p \rho_p dp \quad (88) \quad \text{y} \quad \alpha \psi_q = \int \psi_p \rho_p dp \alpha_{pq} \quad (89)$$

Podemos ahora convenir en que sean los nuevos coeficientes a_p y α_{pq} los que representen el estado y el observable considerado, y esto nos lleva a una generalización de la teoría de las representaciones, ya que los nuevos coeficientes están ligados a los coeficientes primitivos por relaciones muy sencillas. Se trata más bien de un artificio de cálculo, cómodo la mayor parte de las veces, especialmente en ciertas aplicaciones de la teoría; por ejemplo, para aumentar la simetría de las ecuaciones o para hacer más inmediata la interpretación física de los elementos representativos. Se podría introducir el mismo artificio en el caso de una serie discreta de estados fundamentales; pero en este caso no reporta el hacerlo utilidad alguna.

El peso ρ , así introducido, debe aparecer no sólo en los desarrollos (88) y (89), sino en todas las fórmulas en que interviene una integración respecto al parámetro p , que caracteriza los ψ fundamentales; aparecerá, por ejemplo, en la fórmula que da la ley de multiplicación de dos observables, ecuación (79), que se convierte en:

$$(\alpha \beta)_{pq} = \int \alpha_{pr} \rho_r dr \beta_{rq}$$

y en la de multiplicación de un observable y un ψ , ecuación (80), que se convierte en:

$$b_q = \int \alpha_{qp} \rho_p dp a_p$$

Del mismo modo, el número c considerado como un observable, no está ya representado por el segundo miembro de (82), puesto que la (81) debe ser modificada en esta forma:

$$c \psi_q = \int \psi_p \rho_p dp c_{pq}$$

lo que dá en lugar de (82):

$$c_{pq} = c \rho_p^{-1} \delta(p - q) = c \rho_q^{-1} \delta(p - q)$$

La matriz unidad $\delta(p - q)$ se convierte en $\rho_p^{-1} \delta(p - q)$. Esto sugiere que la ecuación (83) deberá ser modificada así:

$$\Phi_p \psi_q = \rho_p^{-1} \delta(p - q) \quad (90)$$

conclusión confirmada al fijarnos en que la condición de normalización (85), debe escribirse:

$$\int \Phi_p \psi_q \rho_p dp = 1 \quad (91)$$

Ya podemos ahora precisar cuales son los cambios que sufren los elementos representativos de un estado o de un observable cuando se introduce la función peso. Para que los Φ_p y los ψ_q de las ecuaciones (83) y (85) satisfagan a las ecuaciones (90) y (91), es necesario multiplicarlas por $\rho_p^{-1/2}$. Debemos, pues, multiplicar por $\rho_p^{-1/2}$ el a_p de la ecuación (70) para que satisfaga a (88) y por $(\rho_p \rho_q)^{-1/2}$ el α_{pq} de la ecuación (78) para que satisfaga a (89). Estos resultados son casos particulares de la siguiente regla general: «Cuando se introduce el peso, todo símbolo que encierra los índices $p, q \dots$, queda multiplicado por $(\rho_p \rho_q \dots)^{-1/2}$. Si se tiene en cuenta que la cantidad bajo el signo \int de una integral relativa a p tiene dos veces el ín-

dice p , se ve que la regla anterior está de acuerdo con la necesidad de incluir el factor ρ_p en una tal integral cuando se introduce en ella la función peso.

Representaciones en el caso general.

En la mayor parte de las aplicaciones de la Mecánica cuántica, el sistema atómico considerado encierra un número de estados independientes, mucho mayor que en los casos examinados hasta ahora.

Los estados fundamentales de una representación no pueden ser caracterizados completamente más que por medio de varios índices p_1, p_2, \dots , que pueden tomar cualesquiera valores en un campo dado de un espacio de n dimensiones: el espacio de las p . Las generalizaciones que hay que hacer en la anterior teoría, son evidentes. Por ejemplo, en lugar de (70) y (78), tendremos que poner los desarrollos:

$$\psi = \iint \dots a_{p_1 p_2 \dots} \psi_{p_1 p_2} dp_1 dp_2 \dots \quad (92)$$

$$\alpha_{\psi_{q_1 q_2 \dots}} = \iint \dots \psi_{p_1 p_2 \dots} dp_1 dp_2 \dots \alpha_{p_1 p_2 \dots q_1 q_2 \dots} \quad (93)$$

Un estado ψ está representado ahora por $a_{p_1 p_2 \dots}$ que es una función de las n variables $p_1 p_2 \dots$ y un observable α por $\alpha_{p_1 p_2 \dots q_1 q_2 \dots}$, matriz cuyas filas y columnas están caracterizadas por estas mismas variables. El símbolo ψ de uno de los estados fundamentales $\psi_{q_1 q_2}$ está representado por:

$$\delta(p_1 - q_1) \delta(p_2 - q_2) \dots \delta(p_n - q_n) \quad (94)$$

como puede fácilmente comprobarse sustituyendo esta expresión en lugar de $a_{p_1 p_2}$ en (92) y efectuando una a una las integra- ciones, teniendo en cuenta (73).

El $\delta(p - q)$ introducido anteriormente en el caso de una sola dimensión, está siempre reemplazado por el producto (94).

Del mismo modo, el símbolo $\frac{\partial}{\partial q_m} \psi_{q_1, q_2, \dots}$ ($m = 1, 2, \dots, n$) está representado por:

$$-\delta(p_1 - q_1) \delta(p_2 - q_2) \dots \delta(p_{m-1} - q_{m-1}) \delta'(p_m - q_m) \delta(p_{m+1} - q_{m+1}) \dots \delta(p_n - q_n) \quad (95)$$

como puede fácilmente comprobarse con ayuda de (76). A parte del signo — esta expresión no difiere de (94) más que por el factor que ocupa el lugar m.

Para englobar todos los casos que se presentan en la práctica, debemos llevar aún más lejos la generalización y ocuparnos de los casos en que sumas e integrales aparecen a un tiempo. Tenemos, por ejemplo, en el caso de una dimensión:

$$\psi = \sum_P a_P \psi_P + \int a_p \psi_p dp \quad (96)$$

El estado ψ está ahora representado por los números a_P y a_p , los unos forman una serie discreta a_P , los otros una serie continua a_p . Estos números pueden ser considerados como los valores de una función de una variable, cuyo campo de variación está constituido por un segmento continuo y por algunos puntos aislados. En el caso de varias dimensiones podemos tener sumas para algunas de las variables e integrales para las otras. La regla general, que se aplica a todos los casos, es la siguiente: Un estado está representado por una función cuyo campo es tal, que a cada uno de sus puntos corresponde un estado fundamental. No hay ninguna restricción en cuanto al número de puntos de este campo o a su disposición en el espacio de las p, que los caracteriza. Este campo puede estar constituido por una serie discreta de puntos y por un cierto número de regiones continuas, teniendo cada una un número cualquiera de dimensiones. Un observable está representado por una matriz cuyas filas y columnas corresponden de una manera unívoca a los puntos de este campo.

Las ecuaciones de la anterior teoría de las representaciones pueden ser transcritas sin dificultad a la nueva teoría; no se puede, sin embargo, escribirlas en una forma que encierre todos los casos posibles sin introducir una notación adecuada y

muy complicada. Tomaremos como ejemplo el caso más sencillo en que es válida la ecuación (96).

La definición de los elementos representativos de un observable viene ahora dada por:

$$\alpha \psi_Q = \sum_P \psi_P \alpha_{PQ} + \int \psi_p dp \alpha_{pQ}$$

$$\alpha \psi_q = \sum_P \psi_P \alpha_{Pq} + \int \psi_p dp \alpha_{pq}$$

correspondientes a (48) y (78). Los coeficientes que aparecen en la representación de un observable son, pues, de cuatro tipos distintos, designados por: α_{PQ} , α_{pQ} , α_{Pq} , α_{pq} , correspondientes a las diferentes clases de valores, discretos o continuos, que toman los índices. Del mismo modo, tendremos para ley de multiplicación de las representaciones de dos observables:

$$(\alpha \beta)_{PQ} = \sum_R \alpha_{PR} \beta_{RQ} + \int \alpha_{Pr} dr \beta_{rQ}$$

$$(\alpha \beta)_{pQ} = \sum_R \alpha_{pR} \beta_{RQ} + \int \alpha_{pr} dr \beta_{rQ}$$

$$(\alpha \beta)_{Pq} = \sum_R \alpha_{PR} \beta_{Rq} + \int \alpha_{Pr} dr \beta_{rq}$$

$$(\alpha \beta)_{pq} = \sum_R \alpha_{pR} \beta_{Rq} + \int \alpha_{pr} dr \beta_{rq}$$

correspondientes a (53) y (79); en cada caso tenemos una suma con respecto a R y una integración con respecto a r. Las condiciones (65) y (83) se convierten en:

$$\begin{aligned} \Phi_P \psi_Q &= \delta_{PQ} & \Phi_p \psi_Q &= 0 \\ \Phi_P \psi_q &= 0 & \Phi_p \psi_q &= \delta(p - q) \end{aligned}$$

Estos ejemplos bastan para mostrar cómo habrá que interpretar cada ecuación en cada uno de los diferentes tipos de representaciones.

Puede aún hacerse una última generalización introduciendo

la función peso en el caso general. Este peso ρ puede ser una función arbitraria de las variables p que caracterizan los ψ fundamentales, con la condición de que no se anule en todo el campo considerado. Acompañará siempre a las diferenciales dp_m en cada integración y figurará igualmente en la matriz unidad con la potencia -1 .

V.—LA TEORÍA DE LAS TRANSFORMACIONES.

Empleo de los estados propios como estados fundamentales de una representación.

En el capítulo anterior, hemos introducido la noción de representación de los símbolos abstractos, y la hemos tratado desde un punto de vista general puramente matemático, siendo los elementos representados en cierto modo los componentes de los símbolos considerados referidos a un sistema general de coordenadas. Vamos ahora a concentrar nuestra atención en ciertas representaciones particulares, es decir, en conjuntos de componentes tomados con relación a sistemas de coordenadas particulares, elegidos y especificados de una manera perfectamente determinada, y veremos que los elementos representativos considerados, tendrán a menudo interpretaciones físicas inmediatas. En este capítulo no nos ocuparemos más que de representaciones ortogonales. Una representación ortogonal está construída sobre la base de un sistema completo de estados ortogonales, que constituyen los estados fundamentales. Se obtiene muy fácilmente un sistema semejante con ayuda de la teoría de los valores propios, desarrollada en el capítulo III. Los estados propios simultáneos de un grupo de observables reales y conmutables forman un sistema completo, siendo dos cualesquiera de ellos, asociados a grupos de valores propios diferentes, ortogonales. Si el grupo de observables que conmutan es un grupo completo, no habrá más que un sólo estado propio para cada grupo de valores propios, como ya hemos demostrado; todos los estados propios serán, pues, ortogonales y podrán,

por consiguiente, ser utilizados como estados fundamentales de una representación. Cada uno de ellos está asociado a un grupo de valores propios que se pueden emplear para caracterizarlos en lugar de los índices arbitrarios p_m del capítulo anterior, que no tienen ningún sentido físico.

Sean $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n observables que conmutan y que forman un grupo completo, y sean ξ'_m, ξ''_m, \dots los valores propios de ξ_m ; un ψ fundamental cualquiera puede escribirse $\psi(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ o sencillamente para abreviar $\psi(\xi')$. Del mismo modo, un Φ fundamental puede escribirse $\Phi(\xi'')$. El Φ fundamental imaginario conjugado de $\psi(\xi')$ será $\Phi(\xi'')$. Esta notación, que utiliza los acentos ', '', prima, segunda, etc., para designar los valores propios de los observables es muy cómoda y es la que utilizaremos en lo sucesivo. Vamos a introducir ahora una nueva notación para designar las representaciones de los estados y de los observables, que aumentará aún más la simetría de nuestras ecuaciones.

Un símbolo ψ cualquiera está representado por una serie de números, asociados cada uno a uno de los ψ fundamentales y, por consiguiente, a un grupo de valores propios. El número asociado al grupo de valores propios $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ se escribirá en lo sucesivo $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n |)$ o sencillamente $(\xi' |)$. Cuando sea necesario especificar cuál es el símbolo ψ utilizado, precisando el índice k , de que está afectado, podremos escribir este índice a la derecha de la rayita vertical en la expresión que da el elemento representativo de $\psi_k: (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n | k)$ o $(\xi' | k)$. Como veremos más adelante, la razón que nos hace adoptar esta notación es la simetría notable encerrada en ella, puesto que contiene de una parte el grupo de números ξ' que se refieren a uno de los ψ fundamentales, y de otra parte el parámetro k , que especifica cuál es el ψ representado; simetría puesta de manifiesto perfectamente al escribir los ξ' a la izquierda y el k a la derecha. De una manera análoga, designaremos el elemento representativo de un símbolo general Φ por $(| \xi'')$ y el de un Φ particular Φ_k por $(k | \xi'')$. Por lo que se refiere a la representación de un observable α , vamos a escribir el elemento de matriz α_{pq} asociado a los estados fundamentales ψ_p y ψ_q como sigue: $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n | \alpha | \xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_n)$ o sencillamente $(\xi' | \alpha | \xi'')$, siendo los ξ' y los ξ'' los valores propios pertenecientes, respectivamente, a los estados fundamentales ψ_p y ψ_q o $\psi(\xi')$ y $\psi(\xi'')$, como se escribirían en la nueva notación.

Para indicar cómo debe utilizársela, transcribiremos a la nueva notación algunas ecuaciones del capítulo anterior. Las ecuaciones (49) y (50), se convierte en:

$$\begin{aligned} (\xi' | \alpha + \beta | \xi'') &= (\xi' | \alpha | \xi'') + (\xi' | \beta | \xi'') \\ (\xi' | c \alpha | \xi'') &= c (\xi' | \alpha | \xi'') \end{aligned}$$

Para fijar las ideas, escojamos el caso en que cada ξ'_m toma una serie contínua de valores; las ecuaciones (47) o (70), que definen la representación de un símbolo ψ , se convierten en:

$$\psi = \int \psi(\xi') d\xi' (\xi' |) \quad (98)$$

en donde se ha escrito para abreviar $d\xi'$ en lugar del producto $d\xi'_1, d\xi'_2, \dots, d\xi'_n$, y donde un sólo signo \int indica una integración respecto a todas esas variables. Hay que hacer notar la manera cómo se agrupan juntos en (98), todos los ξ' cuando se coloca convenientemente el $d\xi'$, lo cual constituye la nueva forma que toma la regla de los índices, enunciada al hablar de las propiedades generales de la representación de los estados y de los observables. De la misma manera, las ecuaciones (48) y (78) del capítulo anterior, que definen la representación de un observable α , se convierten en:

$$\alpha \psi(\xi'') = \int \psi(\xi') d\xi' (\xi' | \alpha | \xi'') \quad (99)$$

La ley de multiplicación (53) o (79) de los elementos representativos de dos observables se convierte en:

$$(\xi' | \alpha \beta | \xi'') = \int (\xi' | \alpha | \xi''') d\xi''' (\xi''' | \beta | \xi'')$$

y la de la multiplicación de un observable y de un ψ (56) o (80), en:

$$(\xi' | 1) = \int (\xi' | \alpha | \xi'') d\xi'' (\xi'' | k) \quad (100)$$

especificando k el símbolo ϕ_k y l el símbolo $\phi_l = \alpha \phi_k$. La magnitud compleja conjugada $\bar{\alpha}$ de un observable α , está representada ahora por:

$$(\xi' | \bar{\alpha} | \xi'') = \overline{(\xi'' | \alpha | \xi')} \quad (101)$$

relación que corresponde a (69); en fin, las representaciones $(\xi' |)$ y $(| \xi')$ de un ψ y de su imaginario conjugado Φ , son cantidades complejas conjugadas.

La representación que estamos analizando está construída a base de un cierto número de observables que conmutan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Veamos ahora cómo se debe representar uno de estos observables ξ_m . Reemplazando en (99) α por ξ_m , se tiene:

$$\xi_m \psi(\xi'') = \int \psi(\xi') d\xi' (\xi' | \xi_m | \xi'') \quad (102)$$

Pero puesto que $\psi(\xi'')$ es un ψ propio de ξ_m perteneciente al valor propio ξ''_m , tendremos:

$$\xi_m \psi(\xi'') = \xi''_m \psi(\xi'') = \int \psi(\xi') d\xi' \xi'_m \delta(\xi' - \xi'') \quad (103)$$

en que $\delta(\xi' - \xi'')$ designa el producto:

$$\delta(\xi'_1 - \xi''_1) \delta(\xi'_2 - \xi''_2) \dots \delta(\xi'_n - \xi''_n).$$

Igualando los coeficientes de los segundos miembros de (102) y (103), obtendremos:

$$(\xi' | \xi_m | \xi'') = \xi''_m \delta(\xi' - \xi'') \quad (104)$$

Esto es evidentemente igual a $\xi''_m \delta(\xi' - \xi'')$, lo que hace la relación (104) simétrica con relación a ξ' y a ξ'' .

Si los ξ no toman más que valores discretos en lugar de variar de una manera contínua, tendremos en lugar de (104):

$$(\xi' | \xi_m | \xi'') = \xi''_m \delta_{\xi', \xi''}$$

en que $\delta_{\xi', \xi''}$ es una abreviatura de la expresión:

$$\delta_{\xi'_1 \xi''_1} \delta_{\xi'_2 \xi''_2} \dots \delta_{\xi'_n \xi''_n}.$$

Luego el observable ξ_m está representado por una matriz diagonal, cuyos elementos diagonales son los valores propios ξ'_m . En el caso de una serie continua de filas y de columnas, es cómodo definir una matriz diagonal como una matriz cuyo elemento general (ξ', ξ'') contiene la función $\delta(\xi' - \xi'')$ de factor, como por ejemplo, el segundo miembro de (104); en este caso, un término cualquiera de la diagonal principal puede ser definido como coeficiente de esta función $\delta(\xi' - \xi'')$. Con esta definición, la ley de representación de un ξ_m , que acabamos de enunciar, es ya válida en todos los casos. El hecho de que la definición dada de una matriz diagonal continua, se adapte exactamente a las exigencias del cálculo, se debe a que no altera una de las propiedades más importantes de las matrices diagonales discretas a saber su conmutabilidad. Por esta razón, no hubiera sido suficiente generalizar y definir una matriz diagonal continua como una matriz, cuyo término general (ξ', ξ'') se anule, salvo cuando los ξ'' difieren infinitamente poco de los ξ' .

Por un razonamiento análogo al que conduce a (104), se encuentra que la representación de una función cualquiera $f(\xi)$ de ξ es:

$$(\xi' | f(\xi) | \xi'') = f(\xi') \delta(\xi' - \xi'') \quad (105)$$

Es evidente que el coeficiente $f(\xi')$ tiene un sentido preciso, puesto que la función f debe estar definida para cada uno de los valores propios de las ξ . Luego la representación que toma como estados fundamentales los ψ propios simultáneos de un grupo de observables ξ es tal, que cada uno de estos observables, y también una función cualquiera de los mismos, están representados por una matriz diagonal. Inversamente, en esta representación, toda matriz diagonal representa una función de los ξ , cuya expresión está dada por el término diagonal (ξ', ξ'') , considerado como función de las variables ξ' . Luego, dado un grupo de observables que conmutan, existe una representación, en la cual cada uno de los observables está representado por una matriz diagonal. Si estos observables forman un sistema completo, determinarán completamente la representación, a parte de ciertas fases arbitrarias; éstas aparecen por el hecho de que se puede multiplicar un ψ propio simultáneo por un factor numérico cualquiera de módulo unidad, sin alterar las condi-

ciones que lo definen. Por ejemplo, podemos multiplicar cada $\psi(\xi')$ por $\exp[-if(\xi')]$, en que $f(\xi')$ es una función real arbitraria de las ξ' . En este caso, cada elemento representativo de un estado $(\xi' |)$ estará multiplicado por $\exp if(\xi')$ y cada elemento representativo de un observable por $\exp i[f(\xi') - f(\xi'')]$. Un término diagonal cualquiera $(\xi' | \alpha | \xi'')$ no se altera por esta transformación, como lo exige por otra parte su significación física, que es la de una media. Las fases arbitrarias que aparecen de este modo en las representaciones, no tienen, generalmente, importancia; podemos, pues, considerar que una representación está completamente determinada cuando se dan los observables que están en ella representados por matrices diagonales. Nuestra notación admite implícitamente esto, puesto que las solas indicaciones que recuerdan la representación, a la cual pertenece el elemento considerado, son las letras que designan los observables representados por matrices diagonales.

Las representaciones que acabamos de considerar y para las cuales cada ψ fundamental es un ψ propio simultáneo de un grupo de observables reales y conmutables, no constituyen casos excepcionales; efectivamente, toda representación ortogonal goza de la misma propiedad. Tomemos una representación cualquiera en que los ψ fundamentales sean ψ_p, ψ_q, \dots y formemos una matriz diagonal cualquiera, cuyo elemento general ξ_{pq} , sea de la forma $a_p \delta(p - q)$; siendo a_p una función de p , podemos considerar esta matriz como representación de un observable ξ . Este observable será real si la representación es ortogonal. Tenemos en ese caso:

$$\xi \psi_q = \int \psi_p dp \xi_{pq} = \int \psi_p dp a_p \delta(p - q) = a_q \psi_q$$

y cada ψ fundamental ψ_q es un ψ propio de ξ . En el caso de varias dimensiones, hacen falta varios índices p o q para caracterizar un ψ fundamental; podemos tomar entonces varias matrices diagonales, y cada una de ellas representará un observable ξ , cuyos ψ propios serán los ψ fundamentales. De esta manera, podemos obtener un número suficiente de observables ξ , que tengan como ψ propio los ψ fundamentales, para constituir un sistema completo de observables conmutables y para poder

tratar el problema aplicándole los métodos y notaciones descritos anteriormente.

Transformaciones canónicas.

Sean dos representaciones basadas, respectivamente: la una en los ψ fundamentales $\psi(\xi')$ que son, al mismo tiempo, los ψ propios simultáneos de un grupo de observables que conmutan ξ_m , y la otra en los ψ fundamentales $\psi(\eta')$, que forman los ψ propios simultáneos de otro sistema de observables que conmutan η_m . Un ψ arbitrario tendrá dos representaciones $(\xi' |)$ y $(\eta' |)$; la primera función de las variables ξ'_m y la otra función de las η'_m . Como ψ está completamente determinado por los elementos de una sola representación, debe existir una relación entre los dos elementos representativos $(\xi' |)$ y $(\eta' |)$ de manera que cada uno de ellos esté determinado por el otro. Vamos a examinar que forma tiene esta relación. Para fijar las ideas tomemos el caso de las integrales; según la definición del elemento representativo $(\eta' |)$ tenemos:

$$\psi = \int \psi(\eta') d\eta' (\eta' |)$$

Pero un ψ fundamental $\psi(\eta')$ de la representación η puede ser representado por medio de la representación ξ . El elemento que le corresponde en esta representación puede escribirse $(\xi' | \eta')$ colocando el η' , que indica cual es el ψ representado, a la derecha; $(\xi' | \eta')$ está pues definido por la relación:

$$\psi(\eta') = \int \psi(\xi') d\xi' (\xi' | \eta') \quad (107)$$

Sustituyendo este valor en el segundo miembro de (106) se obtiene:

$$\psi = \iint \psi(\xi') d\xi' (\xi' | \eta') d\eta' (\eta' |)$$

que dá por comparación con la ecuación (98) que define $(\xi' |)$:

$$(\xi' |) = \int (\xi' | \eta') d\eta' (\eta' |) \quad (108)$$

(108) es la ecuación de transformación que da la representación ξ de un símbolo ψ en función de la representación η del mismo símbolo. Se puede demostrar de la misma forma que la ecuación que da $(\eta' |)$ en función de $(\xi' |)$ es:

$$(\eta' |) = \int (\eta' | \xi') d\xi' (\xi' |) \quad (109)$$

en la cual $(\eta' | \xi')$ es el elemento representativo del ψ fundamental $\psi(\xi')$ en la representación considerada. Uno cualquiera de los dos elementos representativos $(\xi' |)$ y $(\eta' |)$ es pues una función lineal del otro. Las expresiones $(\xi' | \eta')$ y $(\eta' | \xi')$ que nos permiten pasar de una a otra se llaman «funciones de transformación»; son funciones de los dos grupos de variables η' y ξ' . Podemos obtener explícitamente la expresión de $(\xi' | \eta')$ empleando un procedimiento que corresponde al utilizado para llegar a la ecuación (86) y que consiste en multiplicar la ecuación (107) por $\Phi(\xi')$ a la izquierda. El resultado es:

$$(\xi' | \eta') = \Phi(\xi') \psi(\eta') \quad (110)$$

Análogamente se puede demostrar que:

$$(\eta' | \xi') = \Phi(\eta') \psi(\xi') \quad (111)$$

de donde se deduce que $(\xi' | \eta')$ y $(\eta' | \xi')$, son números complejos conjugados.

Para que las relaciones (108) y (109) puedan ser simultáneamente válidas, las funciones de transformación deben satisfacer a ciertas condiciones. Si sustituimos en (108) el valor de $(\eta' |)$ dado por (109), obtendremos:

$$(\xi' |) = \iint (\xi' | \eta') d\eta' (\eta' | \xi'') d\xi'' (\xi'' |)$$

Pero tenemos también:

$$(\xi' |) = \int \delta(\xi' - \xi'') d\xi'' (\xi'' |)$$

Siendo estas ecuaciones válidas para una función arbitraria

$(\xi'' |)$ de las variables ξ'' , podemos igualar los coeficientes de $(\xi' |)$ en los segundos miembros; esto nos dá:

$$\int (\xi' | \eta') d \eta' (\eta' | \xi'') = \delta (\xi' - \xi'') \quad (112)$$

Otra manera de obtener este mismo resultado consiste en escribir la ecuación (108) para el símbolo $\psi (\xi'')$. El primer miembro de la representación ξ de $\psi (\xi'')$ es evidentemente $\delta (\xi' - \xi'')$, en tanto que el segundo miembro se convierte en:

$$\int (\xi' | \eta') d \eta' (\eta' | \xi'') \text{ puesto que la representación } \eta \text{ del símbolo } \psi (\xi'') \text{ es } (\eta' | \xi'').$$

De una manera semejante se puede obtener la ecuación análoga a la (112) y que se deduce de ella permutando ξ y η :

$$\int (\eta' | \xi') d \xi' (\xi' | \eta'') = \delta (\eta' - \eta'') \quad (113)$$

Las relaciones (112) y (113) son las únicas condiciones que las funciones de transformación están obligadas a satisfacer idénticamente. Son restricciones de la misma naturaleza que las condiciones de ortogonalidad y de normalización.

Se puede tratar en la misma forma el asunto de la transformación de las representaciones de los símbolos Φ . Encontraríamos por ejemplo, como ecuación de transformación que nos da el elemento representativo $(| \eta')$ de un símbolo Φ cualquiera en función de $(| \xi')$, la ecuación:

$$(| \eta') = \int (| \xi') d \xi' (\xi' | \eta')$$

la cantidad $(\xi' | \eta')$ está ahora definida por la representación η del Φ fundamental $\Phi (\xi')$; es decir, por medio de la ecuación:

$$\Phi (\xi') = \int (\xi' | \eta') d \eta' \Phi (\eta')$$

Si multiplicamos esta ecuación por $\psi (\eta')$ a la derecha se obtiene como expresión explícita de $(\xi' | \eta')$:

$$\Phi (\xi') \psi (\eta') = (\xi' | \eta')$$

que es la misma (110). Luego la cantidad $(\xi' | \eta')$ definida al dar la representación η de $\Phi (\xi')$ es idéntica a la que habíamos introducido antes y que daba la representación ξ de $\psi (\eta')$; la notación que utiliza el mismo símbolo para estas dos magnitudes queda pues justificada. La simetría que existe entre la forma en que $(\xi' | \eta')$ encierra las cantidades ξ' de una parte y η' de la otra es la misma señalada al comienzo de este capítulo. En efecto, todo elemento representativo $(\xi' | k)$ de un símbolo ϕ_k determinado, si está convenientemente normalizado, puede ser considerado como la función de transformación que liga una representación ξ a otra representación, en la cual ϕ_k es uno de los estados fundamentales.

Existe algo arbitrario en la expresión de las funciones de transformación, que corresponde a lo introducido por las fases arbitrarias que aparecen en las representaciones. Si se multiplican los estados fundamentales $\psi (\xi')$ y $\psi (\eta')$ por $\exp [-i f (\xi')]$ y $\exp [-i g (\eta')]$ siendo f y g funciones reales arbitrarias, la función de transformación $(\xi' | \eta')$ quedará multiplicada por $\exp \left\{ -i [f (\xi') - g (\eta')] \right\}$. Luego el módulo de la función de transformación está bien definido y la indeterminación proviene únicamente de su argumento.

La relación entre los elementos representativos de un mismo observable α en dos representaciones diferentes puede ser obtenida fácilmente, por un gran número de procedimientos distintos. Por ejemplo, podemos utilizar la expresión explícita del elemento representativo de α , dada por la ecuación (87). Escribiéndola para el caso de una representación ξ obtenemos:

$$(\xi' | \alpha | \xi'') = \Phi (\xi') \alpha \psi (\xi'')$$

En el segundo miembro que consiste en un producto de tres símbolos abstractos reemplacemos los factores por sus elementos representativos en la representación η , obtenemos:

$$(\xi' | \alpha | \xi'') = \iint (\xi' | \eta') d \eta' (\eta' | \alpha | \eta'') d \eta'' (\eta'' | \xi'') \quad (114)$$

que da la representación ξ en función de la representación η . De una manera análoga podemos obtener la relación:

$$(\eta' | \alpha | \eta'') = \iint (\eta' | \xi') d\xi' (\xi' | \alpha | \xi'') d\xi'' (\xi' | \eta'') \quad (115)$$

que da la representación η en función de la representación ξ . Estas relaciones constituyen las ecuaciones de transformación de los elementos representativos de un observable. Uno cualquiera de estos elementos es una función lineal del otro, y para pasar de uno a otro, es necesario utilizar las mismas funciones de transformación que en el caso de los estados ψ .

Si consideramos ahora una tercera representación ζ , tendremos otras funciones de transformación; de una parte $(\zeta' | \xi')$, $(\xi' | \zeta')$ que la ligan a la representación ξ y de otra parte $(\zeta' | \eta')$, $(\eta' | \zeta')$ que la unen a η ; entre todas estas funciones hay relaciones sencillas. La ecuación (110) en la que se ha reemplazado η por ζ , da:

$$(\xi' | \zeta') = \Phi(\xi') \psi(\zeta')$$

Reemplacemos en el segundo miembro cada uno de los factores de este producto de símbolos abstractos por sus elementos representativos en la representación η ; obtendremos:

$$(\xi' | \zeta') = \int (\xi' | \eta') d\eta' (\eta' | \zeta') \quad (116)$$

La relación compleja conjugada de la anterior que puede deducirse de la misma manera es:

$$(\zeta' | \xi') = \int (\zeta' | \eta') d\eta' (\eta' | \xi') \quad (117)$$

Las ecuaciones (116) y (117) dan las funciones de transformación ξ , ζ en función de las ξ , η y η , ξ .

Multipliquemos la ecuación (114) por $d\xi'' (\xi'' | \eta''')$, colocando

este factor a la derecha para no destruir la continuidad de la notación, e integremos respecto a $d\xi''$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int (\xi' | \alpha | \xi'') d\xi'' (\xi'' | \eta''') = \\ & = \iiint (\xi' | \eta') d\eta' (\eta' | \alpha | \eta'') d\eta'' (\eta'' | \xi'') d\xi'' (\xi'' | \eta''') = \\ & = \iint (\xi' | \eta') d\eta' (\eta' | \alpha | \eta'') d\eta'' \delta(\eta'' - \eta''') \end{aligned}$$

teniendo en cuenta (113). De donde se deduce:

$$\int (\xi' | \alpha | \xi'') d\xi'' (\xi'' | \eta''') = \int (\xi' | \eta') d\eta' (\eta' | \alpha | \eta''') \quad (118)$$

Designaremos a cada uno de los miembros de esta ecuación por $(\xi' | \alpha | \eta''')$ y lo consideraremos como el elemento representativo del observable α en la «representación mixta» (ξ, η) . Estos elementos forman una matriz que basta para determinar el observable α y que no difiere de las matrices anteriormente consideradas, más que en que sus filas y columnas se refieren a dos sistemas distintos de estados fundamentales y que, por consiguiente, no se puede establecer entre ellas correspondencia biunívoca como antes. Las matrices mixtas, que representan dos observables, pueden ser sumadas con tal de que pertenezcan a la misma representación mixta; en otros términos se tiene:

$$(\xi' | \alpha + \beta | \eta') = (\xi' | \alpha | \eta') + (\xi' | \beta | \eta')$$

Pueden también multiplicarse, aunque pertenezcan a dos representaciones mixtas diferentes, a condición de que las columnas del primer factor (indicadas por la letra de la derecha) se refieran al mismo sistema de estados fundamentales que las filas del segundo, y que, por tanto, se pueda establecer una correspondencia biunívoca entre ellas; en otros términos, el producto de $(\xi' | \alpha | \eta')$ por $(\eta' | \beta | \zeta')$ existe y es igual a:

$$(\xi' | \alpha \beta | \zeta') = \int (\xi' | \alpha | \eta') d\eta' (\eta' | \beta | \zeta')$$

Nótese que el elemento representativo de la unidad en la representación mixta (ξ, η) , es decir, $(\xi' | 1 | \eta')$ es precisamente la misma función de transformación $(\xi' | \eta')$, como puede deducirse inmediatamente de la definición (118). Es evidente, que los términos «matriz diagonal» o «elemento diagonal», no tienen sentido alguno cuando se trata de matrices pertenecientes a representaciones mixtas. Los elementos representativos de las ξ y de las η en una representación mixta (ξ, η) están dados por las expresiones:

$$(\xi' | \xi_m | \eta') = \xi'_m (\xi' | \eta') \quad (\xi' | \eta_m | \eta') = (\xi' | \eta') \eta'_m \quad (119)$$

como puede comprobarse, utilizando sucesivamente el primero y el segundo miembro de (118). Estos elementos pueden, pues, expresarse directamente por medio de la función de transformación.

Todas las ecuaciones de este párrafo han sido escritas para el caso en que los parámetros ξ , η , que caracterizan los estados fundamentales, no tomen más que valores continuos. Se comprende, inmediatamente, cómo habrá que modificarlas cuando todos esos parámetros, o solamente un cierto número de entre ellos, tomen valores discretos, o cuando sus campos de variación encierren simultáneamente series discretas y conjuntos continuos. Si en una representación ξ , los ξ , por ejemplo, varían de una manera continua, los parámetros η , de otra representación η , aplicada al mismo sistema dinámico, no tomarán necesariamente valores continuos; pero si el número de estados fundamentales es finito en una representación dada, lo será también para cualquier otra representación.

Los pasos que hemos estudiado de una representación a otra se llaman «transformaciones canónicas». Hay que tener cuidado en no confundirlas con las «transformaciones de contacto», estudiadas anteriormente, confusión que era muy corriente en trabajos y memorias publicados en los primeros tiempos de la nueva Mecánica cuántica. Matemáticamente, los dos tipos de transformación tienen la misma forma, como puede verse si se escriben simbólicamente las ecuaciones (114) y (115) de la transformación canónica, reemplazando las funciones de transformación $(\xi' | \eta')$ y $(\eta' | \xi')$ por S y S^{-1} ; en el fondo tienen significaciones completamente distintas. Una transformación

canónica transforma una representación de un cierto número de observables en otra representación de los mismos observables; una transformación de contacto es un paso de un sistema de observables a otro sistema distinto del anterior. En el caso de las transformaciones de contacto, las relaciones algebraicas o funcionales de los observables iniciales son invariantes e idénticas a las de los observables transformados. Por el contrario, en el caso de la transformación canónica, los resultados correspondientes a los anteriores, expresan sencillamente la condición necesaria para que los elementos representativos transformados puedan ser considerados como representativos de los mismos observables. Como ya dijimos, la transformación de contacto tiene su análoga en Mecánica clásica; la transformación canónica, que es la más importante de las dos para la Mecánica cuántica, no la tiene, en cambio, porque la teoría clásica no estudia las representaciones.

Amplitud de las probabilidades.

Supongamos un sistema en un estado dado ψ y que se efectúan observaciones en cada uno de los observables ξ_m de un grupo de observables que conmutan. Según lo dicho, al estudiar en la teoría de los valores propios los teoremas de probabilidades, la probabilidad de obtener una cierta serie de resultados es igual al cuadrado del módulo del coeficiente correspondiente en el desarrollo de ψ , según los ψ propios simultáneos de los observables ξ_m , estando todos los ψ normalizados. Cuando los observables ξ_m forman un sistema completo, no habrá más que un sólo ψ propio simultáneo para cada serie de valores propios ξ'_m ; en este caso, los coeficientes del desarrollo de ψ constituyen una representación de ψ designada por $(\xi' |)$. La probabilidad de obtener una cierta serie de resultados ξ'_m será ahora $|(\xi' |) |^2$.

Existe, pues, una interpretación física de la representación ξ de un ψ normalizado cualquiera o, por lo menos, una interpretación del módulo de los elementos representativos; lo cual relaciona estos elementos con la probabilidad de obtener un cierto resultado, por medio de una observación máxima, que consista en medir el sistema completo de observables ξ_m . Se

puede atribuir el mismo significado físico a los elementos representativos de un Φ normalizado cualquiera, que son sencillamente los complejos conjugados de los elementos representativos del ψ imaginario conjugado de Φ .

Consideremos ahora el caso en que nuestro ψ es uno de los ψ fundamentales $\psi(\eta')$ de otra representación η . La probabilidad de obtener los resultados ξ' está dada en este caso por $|\langle \xi' | \eta' \rangle|^2$, es decir, por el cuadrado del módulo de la función de transformación. Pero $\psi(\eta')$ es el estado para el cual se sabe con certidumbre que los observables η tienen los valores η' . Luego $|\langle \xi' | \eta' \rangle|^2$ da la probabilidad para que los observables ξ tengan los valores ξ' , cuando se sabe que los η tienen los valores η' . Por esta razón, Jordan ha llamado a la expresión $\langle \xi' | \eta' \rangle$ una «amplitud de probabilidad». Como se ha dicho antes, el módulo de esta amplitud está perfectamente determinado; pero su argumento no lo está. El cuadrado de este módulo es una probabilidad ordinaria.

Puesto que:

$$|\langle \xi' | \eta' \rangle|^2 = \langle \xi' | \eta' \rangle \langle \eta' | \xi' \rangle = |\langle \eta' | \xi' \rangle|^2$$

tendremos el teorema recíproco siguiente: «La probabilidad para que los ξ tengan los valores ξ' , cuando se sabe que los η tienen los valores η' , es igual a la probabilidad para que los η tomen los valores η' , cuando se sabe que los ξ tienen los valores ξ' ».

Como ya hemos dicho, al considerar las series continuas de estados fundamentales, cuando los ξ toman valores que forman una serie continua, es necesario multiplicar los ψ fundamentales de una representación dada por un coeficiente numérico, infinitamente pequeño, con objeto de obtener la normalización indispensable para la interpretación física. Además, el teorema que acabamos de invocar, y que nos da las probabilidades en función de los coeficientes de un cierto desarrollo, no es válido cuando este desarrollo en serie se transforma en integral. Por estas razones, la expresión antes obtenida, y que da la probabilidad de ciertos valores dados de ξ para un estado determinado, no es válida en el caso de una variación continua. Pero en este caso, en la práctica no tenemos necesidad de conocer más que la probabilidad de que las ξ tengan valores comprendidos entre determinados límites; la probabilidad de que tengan

valores determinados es nula, como puede deducirse teóricamente.

Vamos a buscar ahora para el caso en que los ψ fundamentales estén normalizados, según las ecuaciones (83) o (85), la relación que existe entre los elementos representativos de ψ y la probabilidad de que los ξ tengan valores comprendidos entre límites determinados y muy próximos. El método que vamos a utilizar consistirá en obtener los resultados para el caso de los ξ continuos, como límite del caso en que los valores de los ξ sean discontinuos, pero muy numerosos e infinitamente próximos unos a otros.

Para fijar las ideas tomemos el caso de una sola variable ξ y supongamos que tenga un gran número de valores propios discretos situados muy cerca unos de otros. Sea s el número de los valores propios por unidad de longitud del campo de una dimensión de ξ ; s puede variar de un modo cualquiera con ξ . Sean $\psi_{\xi'}$ los ψ propios convenientemente normalizados para la interpretación física, es decir, tales que:

$$\Phi_{\xi'} \psi_{\xi'} = 1 \quad (120)$$

y supongamos que un ψ arbitrario normalizado, esté desarrollado en serie, según éstos ψ propios, de manera que:

$$\psi = \sum_{\xi'} c_{\xi'} \psi_{\xi'} \quad (121)$$

En este caso, $|c_{\xi'}|^2$ es la probabilidad de que ξ tenga el valor ξ' para este estado ψ . Podemos suponer que $c_{\xi'}$ varía lentamente de un valor ξ' al siguiente, de modo que la probabilidad total de que ξ esté comprendido entre ξ' y $\xi' + d\xi'$, será aproximadamente:

$$P = |c_{\xi'}|^2 s' d\xi'$$

siendo s' el valor de s para el valor ξ' de la variable y siendo el intervalo $d\xi'$ pequeño, pero muy grande aún comparado con el intervalo entre dos valores propios consecutivos. Con el mismo

grado de aproximación, la suma (121), puede ser reemplazada por una integral, lo que nos da:

$$\psi = \int c_{\xi'} \psi_{\xi'} s' d\xi' \quad (122)$$

Introduzcamos ahora los ψ propios $\psi(\xi')$, normalizados según la regla aplicable en el caso de variación continua de los ξ' , es decir:

$$\int \Phi(\xi') \psi(\xi'') d\xi'' = 1 \quad (123)$$

Este cambio de la normalización de los ψ fundamentales produce una modificación de los elementos representativos, que es de la misma naturaleza que la estudiada al tratar de la función peso y provocada por un cambio de esta función, con la diferencia de que aquí el cambio es infinitamente grande en el límite. Para comparar (123) con (120), saquemos de (120) la relación:

$$\sum_{\xi'} \Phi_{\xi'} \psi_{\xi''} = 1$$

que dá, si se reemplaza la suma por una integral:

$$\int \Phi_{\xi'} \psi_{\xi''} s'' d\xi'' = 1$$

La cantidad, bajo el signo integral, se anula siempre, salvo cuando $\xi' = \xi''$, así es que podemos reemplazar s'' por $(s' s'')^{1/2}$. Podremos por tanto poner:

$$\Phi(\xi') = s'^{1/2} \Phi_{\xi'}, \quad \psi(\xi'') = s''^{1/2} \psi_{\xi''}$$

y con estos valores la ecuación (123) quedará satisfecha. De (122) deducimos:

$$\psi = \int c_{\xi'} \psi(\xi') s'^{1/2} d\xi' = \int \psi(\xi') d\xi' (\xi' |)$$

en que $(\xi' |)$, elemento representativo de ψ , normalizado, según

las reglas válidas en el caso continuo, tiene el valor $(\xi' |) = c_{\xi'} s'^{1/2}$.

La probabilidad P es ahora $|\psi(\xi')|^2$. Luego, el cuadrado del módulo del elemento representativo, da la probabilidad, por unidad de campo de variación de ξ , para que ξ tenga un valor determinado. En el caso de varios observables ξ , se puede demostrar de la misma forma, que la probabilidad para que cada ξ'_m tenga un valor comprendido entre ξ'_m y $\xi'_m + d\xi'_m$ es:

$$P = |\psi(\xi')|^2 d\xi'_1 d\xi'_2 \dots d\xi'_n = |\psi(\xi')|^2 d\xi' \quad (124)$$

En el caso de los ξ' continuos, tomemos para ψ uno de los ψ fundamentales $\psi(\eta')$ de la nueva representación y supongamos que los η' no tomen más que valores discretos. Las condiciones de normalización (112) y (113) se convierten ahora en:

$$\sum_{\eta'} (\xi' | \eta') (\eta' | \xi'') = \delta(\xi' - \xi'') \quad (125)$$

$$y \int (\eta' | \xi') d\xi' (\xi' | \eta'') = \delta_{\eta', \eta''} \quad (126)$$

Con lo cual tenemos escritas las condiciones de normalización en una forma, que nos permite aplicar directamente el resultado (124). Efectivamente, por una parte la primera da:

$$\Phi(\xi') \psi(\xi'') = \delta(\xi' - \xi'') \quad (127)$$

(puesto que la ecuación (125) no es mas que la ecuación (127) escrita con elementos representativos η' en lugar de los símbolos Φ y ψ); esta relación muestra que los ψ fundamentales de la representación ξ satisfacen a la condición de normalización bajo la forma (123). Por otra parte la segunda da por el mismo razonamiento:

$$\Phi(\eta') \psi(\eta'') = \delta_{\eta', \eta''}$$

y demuestra que $\Phi(\eta') \psi(\eta') = 1$ o que $\psi(\eta')$ está normalizado de una forma directamente utilizable para la interpretación física. De estos resultados deducimos que:

$$|\psi(\eta')|^2 d\xi' \quad (129)$$

mide la probabilidad de que ξ' esté comprendido entre ξ' y $\xi' + d\xi'$, cuando se sabe que los η tienen los valores η' . La función de transformación es una especie de amplitud de probabilidad; (126) nos permite escribir:

$$\int |(\xi' | \eta')|^2 d\xi' = 1$$

lo que demuestra, que la probabilidad total de que ξ' tenga un valor cualquiera, es igual a la unidad. Esto comprueba, que la elección hecha de condiciones de normalización, no nos conduce a ningún absurdo.

Cuando lo mismo los η' que los ξ' no toman más que valores contínuos, no se puede utilizar de ningún modo la función de transformación, para obtener probabilidades absolutas; sin embargo, esta función puede siempre darnos probabilidades relativas. Aún si $(\xi' | \eta')$ no está convenientemente normalizada respecto a η' , la expresión (129) dará siempre, a parte de un factor independiente de ξ' , la probabilidad de que los valores de ξ estén comprendidos entre ξ' y $\xi' + d\xi'$. El conocimiento de las probabilidades relativas, basta en la práctica de las aplicaciones.

Los dos tipos principales de problemas con que se tropieza en Mecánica cuántica, son: la previsión de los resultados de ciertas experiencias y el cálculo de la probabilidad de uno de estos resultados, cuando se conocen las condiciones iniciales. El primer tipo se resuelve calculando los valores propios de un observable; el segundo se reduce siempre a buscar una amplitud de probabilidad o una función de transformación y al cálculo del cuadrado de su módulo. Cuando se dan ciertas relaciones algebraicas entre los ξ y los η , un método general de cálculo de la función de transformación que relaciona el grupo de los ξ con el grupo de los η , es el siguiente: Se obtienen primero las matrices $(\xi' | \eta_m | \xi'')$, que representan los η en la representación ξ ; las únicas condiciones que estas matrices tienen que satisfacer son las relaciones algebraicas dadas. Enseguida se pueden utilizar las ecuaciones:

$$\int (\xi' | \eta_m | \xi'') d\xi'' (\xi'' | \eta') = (\xi' | \eta') \eta'_m$$

que se deducen inmediatamente de (118) y (119). Estas relaciones son ecuaciones integrales lineales entre las incógnitas $(\xi' | \eta')$, funciones de las variables ξ' . Constituyen, en realidad, las ecuaciones fundamentales de la teoría de los valores propios y sus soluciones normalizadas son, precisamente, las funciones de transformación. Se llama, a menudo, a estas soluciones las «funciones propias» de la matriz $(\xi' | \eta_m | \xi'')$, que las determina. Estas ecuaciones integrales se reducen en ocasiones a ecuaciones diferenciales, por la presencia en $(\xi' | \eta_m | \xi'')$ de la función δ y de sus derivadas.

Ejemplos:

Ya hemos visto que para todo sistema de observables ξ_m que conmutan, existe una representación llamada la representación ξ , en la cual cada uno de estos observables está representado por una matriz diagonal, que tenga como elementos diagonales los valores propios correspondientes. Este hecho es de una gran utilidad para las aplicaciones de la teoría, y constituye, generalmente, el punto de partida de todo cálculo de representaciones. Para mostrar como se puede utilizar, vamos a dar dos ejemplos, que tienen una cierta importancia desde el punto de vista físico.

Primero:

El primero de estos ejemplos tiene relación con los observables p y q , de que nos ocupamos al hablar del cálculo algebraico de los observables, y que satisficían a la relación $qp - pq = i$. El problema consiste en determinar los valores propios de $p^2 + q^2$, suponiendo que p y q son observables reales. Un razonamiento elemental nos permite demostrar en este caso que $p^2 + q^2$ no puede tener valores propios negativos. En efecto, los valores propios de p^2 no pueden ser negativos, puesto que son los cuadrados de los valores propios de p , que son reales. De donde se deduce que el valor medio de p^2 para un estado ψ cualquiera no puede ser negativo; del mismo modo el valor medio de q^2 y, por consiguiente, el de $p^2 + q^2$ para este mismo estado ψ no puede ser negativo. Luego $p^2 + q^2$ no puede tener valor propio negativo, puesto que en el caso contrario,

tendría un valor medio negativo, igual a este mismo valor propio para el estado propio correspondiente.

Sea:

$$A = (p + iq)(p - iq) = p_2 + q_2 + i(qp - pq) = p_2 + q_2 - 1$$

tenemos que:

$$(p - iq)(p + iq) = p_2 + q_2 + 1 = A + 2$$

de donde:

$$A(p + iq) = (p + iq)(p - iq)(p + iq) = (p + iq)(A + 2)$$

Escribamos la ecuación correspondiente, para los elementos representativos de los símbolos considerados, en una representación, en la cual A es matriz diagonal. Esto nos dá:

$$\begin{aligned} \sum_{A''} (A' | A | A'') (A'' | p + iq | A') &= \\ = \sum_{A''} (A' | p + iq | A'') (A'' | A + 2 | A'); \end{aligned}$$

en virtud de $(A' | A | A'') = A' \delta_{A'A''}$, esta relación se reduce a:

$$A' (A' | p + iq | A') = (A' | p + iq | A') (A'' + 2)$$

De donde se deduce:

$$\text{o bien, } (A' | p + iq | A') = 0; \quad \text{o bien, } A' = A'' + 2$$

Aplicando directamente la ley de multiplicación de matrices, se tiene si A' es un valor propio cualquiera de A:

$$\begin{aligned} (A' | (p + iq)(p - iq) | A') &= \\ = \sum_{A''} (A' | p + iq | A'') (A'' | p - iq | A') \quad (130) \end{aligned}$$

extendiéndose la sumación a todos los valores propios A''. Pero hemos visto que $(A' | p + iq | A'')$ se anula, salvo si $A'' = A' - 2$. Luego, todos los términos de la suma son nulos, a excepción de aquél para el cual $A'' = A' - 2$. Pero si $A' - 2$ no es un valor propio de A, todos los términos de la suma, sin excepción, serán nulos y se tendrá:

$$0 = (A' | (p + iq)(p - iq) | A') = (A' | A | A') = A'$$

El resultado obtenido puede expresarse diciendo que si A' es un valor propio cualquiera de A, o bien $A' = 0$, o bien $A' - 2$ es también un valor propio de A. Luego, siendo A' un valor propio cualquiera, $A' - 2, A' - 4, A' - 6, \dots$ lo serán también; esta serie no puede extenderse hasta $-\infty$, puesto que $p^2 + q^2$, que es igual a $A + 1$, no puede tener valores propios negativos, como ya hemos dicho. Esta serie debe, pues, terminarse y no puede terminar más que en el término 0. Luego los valores propios de A, son: 0, 2, 4, 6, \dots y los de $p^2 + q^2$: 1, 3, 5, 7, \dots

Se pueden obtener, fácilmente, las representaciones de p y q. La ecuación (130) se reduce a:

$$A' = (A' | p + iq | A' - 2) (A' - 2 | p - iq | A')$$

En virtud de la ecuación (101) los dos factores del segundo miembro son cantidades complejas conjugadas. Luego:

$$(A' | p + iq | A' - 2) = A'^{1/2} e^{i\gamma'}$$

siendo γ' una función real de A'. Todos los elementos de la matriz $p + iq$ que no son de este tipo son nulos. El observable complejo conjugado $p - iq$ está representado por la matriz:

$$(A' - 2 | p - iq | A') = A'^{1/2} e^{-i\gamma'}$$

y todos los elementos que no tengan esta forma, son nulos. Se deduce de aquí:

$$\begin{aligned} (A' | p | A' - 2) &= 1/2 A'^{1/2} e^{i\gamma'} (A' | q | A' - 2) = -1/2 i A'^{1/2} e^{i\gamma'} \\ (A' - 2 | p | A') &= 1/2 A'^{1/2} e^{-i\gamma'} (A' - 2 | q | A') = 1/2 i A'^{1/2} e^{-i\gamma'} \quad (131) \end{aligned}$$

siendo nulos todos los otros elementos de las matrices p y q. La aparición de la fase arbitraria en la expresión de los elementos representativos de p y q, está perfectamente de acuerdo con la observación hecha anteriormente, de que una representación no está completamente determinada por los observables representados en ella por matrices diagonales.

Como ya hemos visto, los valores propios de A forman una

sucesión discreta y, por consiguiente, el número de estados fundamentales en una representación, para la cual A es diagonal, es infinito numerable. Esto es tanto más notable, si se tiene en cuenta que se puede obtener otra representación, para la cual el número de estados fundamentales del sistema será igual al número de puntos de un segmento de recta; un ejemplo nos lo proporciona la representación, en la cual p está figurado por una matriz diagonal, puesto que los valores propios de p están formados por todos los números de $-\infty$ a $+\infty$, como ya demostramos al hablar de las transformaciones de contacto. Contando pues de varias maneras diferentes el número de estados independientes del sistema, podemos esperar encontrar como resultado números cardinales distintos.

Segundo ejemplo:

Nuestro segundo ejemplo se refiere a tres observables que satisfagan a:

$$\begin{aligned} \alpha \beta - \beta \alpha &= i \gamma \\ \beta \gamma - \gamma \beta &= i \alpha \\ \gamma \alpha - \alpha \gamma &= i \beta \end{aligned} \quad (132)$$

Pongamos $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \theta$. El problema consistirá en determinar los valores propios de α, β, γ y θ . Vamos a suponer que α, β, γ son reales. Por un razonamiento análogo al hecho en el problema anterior podemos deducir que θ no puede tener valores propios negativos. Se tiene:

$$\gamma \alpha^2 - \alpha^2 \gamma = (\gamma \alpha - \alpha \gamma) \alpha + \alpha (\gamma \alpha - \alpha \gamma) = i \beta \alpha + i \alpha \beta$$

en virtud de la tercera de las ecuaciones (132). Igualmente:

$$\gamma \beta^2 - \beta^2 \gamma = (\gamma \beta - \beta \gamma) \beta + \beta (\gamma \beta - \beta \gamma) = -i \alpha \beta - i \beta \alpha$$

de donde:

$$\gamma (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2) \gamma = 0$$

de modo que:

$$\gamma \theta - \theta \gamma = 0$$

luego θ conmuta con γ y por razón de simetría también con α y β ; θ conmuta pues, con una función cualquiera de α, β y γ .

Hemos encontrado, pues, un observable que conmuta con todos los observables del problema. Cada vez que encontremos un tal observable, tendremos motivos para poderlo tratar como si fuese un número, puesto que haciéndolo así, no incurriremos en contradicción con las relaciones algebraicas a que satisface. He aquí una demostración formal de la legitimidad de esta manera de proceder. Utilicemos una representación en la cual θ , así como un cierto número de otros observables x , estén representados por matrices diagonales; un observable cualquiera P estará representado por: $(\theta' x' | P | \theta'' x'')$. La condición $\theta P - P \theta = 0$ nos dá:

$$\theta' (\theta' x' | P | \theta'' x'') - (\theta' x' | P | \theta'' x'') \theta'' = 0$$

de donde:

$$(\theta' x' | P | \theta'' x'') = 0$$

a menos que $\theta' = \theta''$. Luego, todos los elementos de la matriz que representa un observable cualquiera del problema se anulan, a excepción de aquéllos que son del tipo $(\theta' x' | P | \theta' x')$. Se deduce de esto, que cuando se reemplaza una ecuación entre observables por la ecuación correspondiente entre sus representaciones, todos los elementos de matriz que se encuentran en ella se refieren a un sólo y único valor de θ' . Es, pues, inútil indicar explícitamente este valor particular θ' cuando se escriben los elementos de matriz $(\theta' x' | P | \theta' x')$; puede escribirse sencillamente $(x' | P | x')$. Todo ocurre como si utilizásemos una representación definida únicamente por las x , sin ayuda de las θ ; las ecuaciones serán exactamente de la misma forma que si θ fuese un número igual a este θ' particular, lo que coincide con el resultado esperado.

Aplicemos este método a nuestro ejemplo. Supondremos, pues, que θ sea un número perfectamente determinado y, a partir de esta hipótesis, calcularemos los valores propios de γ ; los de α y β serán los mismos por razón de simetría. Todo valor numérico de θ , que no esté en contradicción con las relaciones (132), será un valor propio de θ . Siendo α y β reales, el valor medio de γ^2 para cualquier estado, no podrá ser mayor que θ y, por consiguiente, los valores propios de γ^2 deberán ser inferiores o iguales a θ . Los valores propios de γ no pueden, pues, ser

mayores que $\theta^{1/2}$ ni menores que $-\theta^{1/2}$. Esta restricción parece razonable si se tiene en cuenta el hecho de que no podemos dar a θ más que valores positivos o nulos, puesto que, como ya dijimos, sus valores propios no pueden ser más que positivos o nulos. Se deduce de (132):

$$(x + i\beta)\gamma - \gamma(x + i\beta) = -i\beta - \alpha - (x + i\beta) \quad \text{o}$$

$$(x + i\beta)\gamma = (\gamma - 1)(x + i\beta)$$

Expresemos este resultado en una representación γ ; tendremos:

$$(\gamma' | x + i\beta | \gamma'') \gamma'' = (\gamma' - 1) (\gamma' | x + i\beta | \gamma'')$$

de donde se deduce:

$$\text{o bien: } (\gamma' | x + i\beta | \gamma'') = 0 \quad \text{o bien: } \gamma'' = \gamma' - 1.$$

Ahora bien si γ' es un valor cualquiera de γ :

$$(\gamma' | x + i\beta | \alpha - i\beta | \gamma') = \sum_{\gamma''} (\gamma' | x + i\beta | \gamma'') (\gamma'' | x - i\beta | \gamma')$$

extendiéndose la sumación a todos los valores propios γ'' . Los términos del segundo miembro son todos nulos, salvo aquel para el cual $\gamma'' = \gamma' - 1$. Si $\gamma' - 1$ no fuese un valor propio de γ , son todos nulos sin excepción y tendremos:

$$(\gamma' | (x + i\beta)(\alpha - i\beta) | \gamma') = 0$$

Pero:

$$(x + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 - i(\alpha\beta - \beta\alpha) =$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma = \theta - \gamma^2 + \gamma = \theta + 1/4 - (\gamma - 1/2)^2$$

Luego si $\gamma' - 1$ no es un valor propio de γ se tiene:

$$0 = (\gamma' | \theta + 1/4 - (\gamma - 1/2)^2 | \gamma') = \theta + 1/4 - (\gamma' - 1/2) \quad \text{o } \gamma' = 1/2 \pm k$$

siendo k la raíz cuadrada positiva:

$$k = (\theta + 1/4)^{1/2} \quad (134)$$

Luego si γ' es un valor propio, $\gamma' - 1$, $\gamma' - 2$, etc., lo serán también y formarán una sucesión que debe tener fin, puesto que no

puede haber términos menores que $-\theta^{1/2}$. El último término de esta serie será: o bien $1/2 + k$, o bien $1/2 - k$, y puesto que no puede haberlos mayores que $\theta^{1/2}$ y por consiguiente que k , será $1/2 - k$. Luego los valores propios de γ serán $1/2 - k$, $3/2 - k$, $5/2 - k$,

Invirtiendo el orden de los factores en el producto representado por el primer miembro de (133) podemos deducir por un razonamiento análogo, que si γ' es un valor propio cualquiera de γ , $\gamma' + 1$ será otro, o si no $\gamma' = 1/2 \pm k$, de donde se deduce que los valores propios de γ serán $k - 1/2$, $k - 3/2$, $k - 5/2$, .. Combinando estos dos resultados vemos que la diferencia entre $1/2 - k$ y $k - 1/2$ debe ser un número entero, o sea, que k debe ser entero o la mitad de un entero impar. Los valores propios de γ serán por consiguiente:

$$k - 1/2, k - 3/2, k - 5/2, \dots, -k + 3/2, -k + 1/2 \quad (135)$$

lo que prueba incidentalmente que k no debe ser nulo, como resulta también de su ecuación de definición (134). El valor correspondiente de θ es $k^2 - 1/4$ y los valores propios de θ , son todos de esta forma.

Este ejemplo pone de manifiesto que si se tienen dos observables que conmutan y se escoge arbitrariamente un valor propio de cada uno de ellos, no existirá necesariamente un estado para el cual el valor de cada observable sea el valor propio escogido; es decir, un estado propio simultáneo, perteneciente a estos dos valores propios. Por ejemplo, los valores propios de γ están formados por todos los números enteros e iguales a la mitad de un entero impar y los de θ por todos los números de la forma $k^2 - 1/4$, donde k es un número entero distinto de 0 o igual a la mitad de un número impar; sin embargo, únicamente en el caso en que γ' es uno de los números (135) existe un estado para el cual γ y θ tienen simultáneamente los valores γ' y $k^2 - 1/4$. Estas restricciones, referentes a la posibilidad de existencia de estados propios simultáneos para dos o varias variables que conmutan, no invalidan, de ningún modo, la teoría general que hemos expuesto.

* * *

He aquí expuesto, siguiendo lo más fielmente que nos ha sido posible al mismo autor de la teoría, el instrumento matemático, con el cual el joven y gran físico inglés Dirac, ha elaborado su Mecánica cuántica racional o Mecánica ondulatoria relativista, que concilia en gran parte las concepciones relativistas con las cuánticas y permite explicar importantísimos hechos experimentales, hasta entonces deficientemente interpretados por la vía teórica de la Mecánica ondulatoria bajo su forma inicial. Dirac descubrió que las condiciones cuantistas para un sistema múltiplemente periódico podían expresarse por medio de los llamados «paréntesis de Poisson», usados ya en la Mecánica clásica, que tienen la propiedad de ser invariantes con respecto a cualquier transformación canónica de las coordenadas y de los momentos, y con cuya ayuda pueden expresarse todos los coeficientes diferenciales, que intervienen en las ecuaciones de movimiento; con ellos se logra conservar en la nueva Mecánica cuántica la forma canónica o hamiltoniana de las ecuaciones.

La teoría de Dirac permitió a su autor demostrar las fórmulas halladas por Heisenberg, Born y Jordan, referentes al momento angular; halló la fórmula de la g de Landé (el Aufspaltungsfaktor de Landé, en el efecto Zeeman anómalo):

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

y la fórmula que da la energía perturbadora:

$$V = \frac{e \mathcal{H}}{2 m c} j_z \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{(j^2 - 1/4 k^2) - (l^2 - 1/4 k^2) + (s^2 - 1/4 k^2)}{j^2 - 1/4 k^2} \right\}$$

en este mismo efecto, y explicó la intensidad relativa de los componentes de un múltiplete en un campo magnético débil.

Aplicó su teoría al efecto Compton, obteniendo una concordancia superior a la lograda por el propio Compton, al aplicar la teoría de Einstein.

Explicó los estados de energía cinética negativa del electrón, exigidos teóricamente por las ecuaciones que definen la energía y los únicos con los que se podía explicar la difusión de la luz por los electrones, previendo así la existencia de los positrones, confirmada después experimentalmente por Ander-

son, y dando una explicación anticipada, con su conocido esquema de los «agujeros», de hechos experimentales, tan sensationales como la materialización de los fotones y el aniquilamiento de los positrones, que han venido a confirmar, de una manera definitiva, la posibilidad de tan enorme trascendencia filosófica, de la transformación de la materia en energía y de ésta en aquélla.

He llegado al fin de mi trabajo. Es para mí un grato deber, que cumplo gustosísimo, dar desde aquí, en nombre de la Universidad y en el mío propio, las más rendidas gracias a los R.R. P.P. Jesuítas del Colegio Máximo de Cartuja y especialmente al R. P. Aldama, Rector, y al R. P. Sánchez de Lamadrid, Profesor del mismo, que han resuelto una de las más graves dificultades que se oponían a la publicación de este trabajo, cediéndonos con la mayor gentileza los tipos griegos, necesarios para su impresión.

No quiero tampoco terminar sin haceros presente la expresión de mi gratitud por la bondad con que habéis escuchado tan fatigosa lectura, y sin dirigir mi felicitación estusiasta a los alumnos premiados en este acto. Ellos son la gala de esta Universidad, el orgullo y la alegría de sus maestros y una de las más firmes esperanzas de la Patria.

HE DICHO.

N. B. Por dificultades tipográficas, ha habido que sustituir, en las páginas 48 y 49 de esta trabajo, la notación tradicional en Matemáticas de la unidad imaginaria i por i .