GEOMETRIA ESPECVLATIVA, Y PRATICA DE LOS PLANOS, Y SOLIDOS.

AVTHOR
El M.R.P. Ioseph Zaragoça, de la Compañia de Iesus, Calificador del Santo Oficio, Cathedratico de Theologia Escolastica en los Colegios de Mallorca, Barcelona, y Valencia, y agora de Mathematicas en los Estudios Reales del Imperial de Madrid.

IMPRESSA
DE ORDEN DEL EXCELENTISSIMO señor Marques de Leganes, y dedicada a su Excelencia por Ioseph Vicente del Olmo Cauallero, Secretario del Santo Oficio.

CON LICENCIA,

En Valencia, Por Geronimo Villagrassa, Año M.DC.LXXI.

Corregida segun los Quadernos del Author

LICENCIA.

Imprimatur.
D. Gregorio, y Antillon V. G.

Imprimatur.
I. Gilart. F. A.

AL EXCELENTISSIMO SEÑOR Don Diego Phelipez de Guzman, Duque de Sanlucar, Marques de Leganês, y Morata, &c. Virrey, y Capitan General que fue del del Reyno de Valencia, &c.

LA Geometria especulatiua, y pratica, que en los Estudios Reales dictò el M. R. P. Ioseph Zaragoçà, de la Compañia de IESVS, impressa de orden de V. Exc. buelue al centro de donde saliò, creyendo hallar en èl todo el amparo que ofrece la estimacion, que haze V. Exc. de su Autor, tan conocida, como llorada en esta Ciudad, de los que gozauamos la enseñança de tan gran Maestro, antes que V. Exc. le trasladasse a Madrid, y enriqueciesse con su Magisterio la Corte.

Quiera Dios se mueuan con este exemplo otros muchos a comunicar los escritos que han atesorado de tan fecunda mina, para que los aficionados escusen el gustoso trabajo de solicitar las copias, tal vez menos ajustadas al original, y goze el mundo vn tesoro tanto mas admirable, quanto mas recogido, pues el ingenio de su Autor ha sido siempre tan singular en la breuedad, como sutilissimo en la inuencion, en la disposicion claro, y en la materia difuso. ¶ 2 Na-

Nadie tiene mejor conocida esta verdad, que V. Exc. como quien mas de cerca beuiò las cristalinas corrientes de su dotrina con tan feliz progresso, que en pocos meses pudo V. Exc. escurecer a los muy versados en la Geometria, Arithmetica, Algebra, Esphera, Trigonometria, y Architectura militar, no con pequeña admiracion de los que mirauamos a V. Exc. tan ocupado en el gouierno de Valencia en edad de diez y siete años; pero el progresso en las Mathematicas, y humanidad, el acierto, felicidad, y prudencia en el gouierno manifestaron, que tan superiores virtudes en los Astros de Magnitud primera, no se han de vincular a los años; aunque estos prodigios son mas singulares en cada siglo, que el Fenix, pues no a todas las edades se conceden vn Chiron, y Achiles, vn Aristoteles, y Alexandro.

Pudiera en este lugar esplayarme en los altos Progenitores de V. Exc. y sin recurrir a Guzman el Bueno, al Gran Capitan, a los Dauilas, ni a los Espinolas, rayos todos de Marte, hallara mas vezino a Don Diego de Guzman, abuelo de V. Exc. que en España, Italia, y Flandes hizo inmortal su gloria militar; pero mayor la promete el gran espiritu de que dotò a V. Exc. el Cielo, pues quantos sin passion le miran, reconocen en el valor, robustez, y generosidad otro Achiles, Herculeses, y Alexandro, sin temer que les desmienta el tiempo, que le desean solo para que en la dilatada vida de V. Exc. que Dios guarde, puedan las flores de tanto espiritu llegar a sazonarse en los frutos que toda esta Monarquia espera. Valencia, y Febrero 24. de 1671.

Exc. Señor.

B. su M. de V. Exc.

Su mas cierto seruidor.

Ioseph Vicente del Olmo.

IN-

INTRODVCCION DEL AVTOR.

LA dificultad de las Mathematicas pide toda la induſtria del Maeſtro en facilitar ſus demonſtraciones. El eſtilo mas breue no es el mejor, ſi peca en confuſo; ni el mas prolijo afiança en la difuſion la claridad, que ſe pide. El buen orden tiene, a mi juizio, el primer lugar en todo: las premiſſas diſponen para la concluſion; eſta ſale nada violenta, ſi aquellas eſtàn diſpueſtas. En vn medio, y dos eſtremos bien ordenados eſtriua toda la eficacia de la razon. Eſtas conſideraciones alentadas con la experiencia de lo que cueſta aprẽder ſin Maeſtro vna ciencia tan noble, pudieron motiuarme, diez años ha, el intentar nueuo methodo en la Geometria. Las tareas Eſcolaſticas no dexaron por entonces perficionar mi idea, porque el primer empeño es el de la obligacion; pero luego q̃ la Theologica ſe conmutò en Mathematica, fue mi primer cuidado la perfeccion de eſte aſſumpto, que oy conſagro a la primera Nobleza de Eſpaña, que en los Eſtudios Reales concurre. Trato primero de la Geometria Eſpeculatiua, que de la Pratica, porque eſta depende de aquella, y no al contrario. He reducido las materias a claſſes, juntando en vna todas las que ſon de vna eſpecie: con que ſon las propoſiciones, y figuras menos. Pudoſe mudar el orden tambien de los libros que nos dexò Euclides, pero tuue por mejor conſeruarle, pues no ſe gana tanto en la facilidad, quanto ſe pierde en la inteligencia de los Autores, que citan los libros de tan gran Maeſtro. Las definiciones ſe hallaràn juntas en los Proemiales comunes a la Geometria Pratica, y Eſpeculatiua. Con eſte artificio he procurado conſeguir tres coſas. La primera, ſocorrer la memoria de lo que cada libro contiene, reducidos los indiuiduos a ſus eſpecies. La ſegunda, facilitar la enſeñança con la breuedad, y claridad que de eſta reduccion ſe ſigue. La tercera, no confundir la inteligencia de los Autores, que citan a Euclides, pues vn libro correſponde a otro, y aunque el numero de las propoſiciones es diferente, ſi ſe atiende a la eſpecie, luego ſe encontrarà la correſpondiente. Eſta ha ſido mi idea; ſi conſegui el intento, ſerà el prouecho de los diſcipulos, y de Dio-

la

la gloria; sino llenè el assumpto, espero no auer malogrado por lo menos el tiempo, ni quedar frustrado de la estimacion que en tan arduas empressas el buen deseo merece.

EXPLICACION DE LAS CITAS.

LAs citas van cerradas dentro vn parentesis. La P. significa los proemiales. La L. el libro. La N. el numero en que se diuide la proposicion. La *p*. el problema de la Geometria pratica, como (8.P.) es la proposicion, ò numero 8. de los proemiales (6. L.1.) la proposicion 6. del libro primero (3.N.) el numero 3. de la proposicion presente (4.*p*.3.) el 4. problema, y pratica tercera de la Geometria pratica.

Pag.	Lin.	Erratas.	Lee.
Pag.43.	lin.23.	*e.o.*	*g.b.*
pag.62.	lin.19.	mayormente,	mayor que,
pag.89.	lin.1.	a vna,	ò vna.
pag.98.	lin.8.	CD.	CB.
pag.110.	lin.24.	FD.	FB.
pag.127.	lin.12.	AF.BG.	AG.BF.
pag.135.	lin.20.	FDC.	FDB.
pag.142.	lin.3.	O.	AO.
pag.154.	lin.10.	NRP.	MRP.
pag.156.	lin.6.	BH.	GH.

En la pagina 148. lin.3. se añadirà *el arco XP. de 24. gr. es la decima quinta parte del circulo.*

PROEMIALES.

LA Mathematica es ciencia de la quantidad inteligible, y precinde de toda materia. Diuidese en Geometria, y Arithmetica, y cada vna en sus partes. La Arithmetica es ciencia de la quantidad discreta, cuyos terminos no tienen vnion, como son los numeros. La Geometria es ciencia de la quantidad continua, cuyos terminos estàn continuados, y vnidos, aunque sea con imaginaria vnion en las partes del espacio imaginario.

1. P. *Axioma.*

VNa quantidad se ajusta al lugar de otra, quando puesta en su lugar le ocupa enteramente; y assi las quantidades ajustadas, ò que se ajustan son iguales; pero por ser iguales, no se ajustan, sino quando son semejantes, como vn circulo igual a otro, y vn arco a otro de vn mesmo, ò igual circulo, &c.

2.P. *Axioma.*

EL todo compuesto de muchas partes es igual a todas sus partes juntas, porque se compone de ellas: y es mayor que cada parte sola, porque incluye por lo menos otra parte mas. Las partes de vna denominacion son iguales entre si, como vna mitad a otra, vn tercio a otro, &c. pero si dos todos son desiguales, el mayor tiene mayores partes, y al contrario.

3. P. *Axioma.*

LAs quantidades que son iguales a otra, ò que la contienen, ò son contenidas de ella iguales vezes, son tambien iguales entre si: lo mesmo es respeto de otras dos iguales. Las que tienen vn mesmo, ò igual excesso a otra, y a dos iguales: y las que son igualmente excedidas de otra, y de dos iguales, son tambien iguales entre si.

Lo que se dize de vna cantidad respeto de otra mayor, menor, ò igual: dupla, tripla, &c. mitad, tercio, quarto, &c. se dize tambien de qualquiera otra su igual.

4.P. *Axioma.*

SI a cantidades iguales se añaden, ò quitan cantidades iguales, ò vna comun a las dos, resultan cantidades iguales. Si a cantidades iguales se añaden, ò quitan desiguales, quedaràn desiguales, y serà mayor aquella a quien se añadiò mas, ò quitò menos.

Si a desiguales se añaden, ò quitan iguales, ò vna comun, quedaràn desiguales, y serà mayor la mesma que antes lo era.

Si de tres cantidades la primera es mayor que la segunda, y la segunda que la tercera; tambien la primera serà mayor que la tercera, y al contrario.

5.P. *De la Magnitud*

MAgnitud, ò grandeza es vna cantidad continua mensurable: si es finita, y terminada, sus terminos son los estremos de la magnitud. El punto Mathematico no se toma como parte, que componga la magnitud, porque solo es vn signo, ò señal indiuisible sin partes, que se nota en la cantidad, sin que la Mathematica examine si ay, ò no puntos indiuisibles en la composicion del continuo physico, y real: porque todas ſus demonſtraciones ſon independẽtes de vna, y otra ſentencia, y aſsi eſtas ſon las que ſe han de ajuſtar, y componer con las demonſtraciones Mathematicas.

6. P. *De la Linea.*

LInea es vna magnitud larga ſin anchura, ni profundidad, porque ſe imagina formada con el mouimiento de vn punto indiuiſible. Linea recta es la que directamente procede ſin jamàs torcer a vna, ni otra parte: y ſi es finita, procede igualmente entre los dos puntos, que ſon ſus terminos; y es la mas breue diſtancia entre ellos: con que de vn punto a otro ſolo ſe puede tirar vna linea recta, pero eſta ſe puede continuar infinitamente.

Linea curva es la que no procede directamente, y tuerce a vna, ò otra parte, como es la circular, y otras innumerables, que no pertenecen a eſte lugar.

7. P. *De la ſuperficie, y cuerpo.*

S*Vperficie* es vna magnitud larga, y ancha ſin profundidad: imaginaſe compueſta de lineas, y ſi todas las lineas por todas partes ſon rectas; ò ſi vna regla bien recta

ta dãdo vna buelta por todas partes ſe ajuſta con la ſuperficie, ſerà ſuperficie plana; ſino ſerà curva, ò mixta de plana, y curva.

Cuerpo es vna magnitud ancha, larga, y profunda: llamaſe *ſolido*. El ſolido phyſico, y Mathematico ſe diſtinguen en eſto, que el phyſico dize la vnion de ſus partes conſiſtente, y firme, y ſe opone al fluido: el Mathematico todo lo comprehende, y aun ſe eſtiende al eſpacio imaginario, porque ſolo es vna extenſion, ò cantidad que admite las tres dimenſiones de largueza, anchura, y profundidad.

8. P. *Del circulo, y ſu diametro*, fig. 1.

LInea *circular*, es vna linea obliqua, diſtante igualmente de vn punto, que eſtà en medio del eſpacio comprehendido. *Circulo* es el eſpacio, que la linea circular comprehende: ſu *centro* es aquel punto medio: ſu ambito, perimetro, peripheria, ò circunferencia, es la linea circular, que le comprehende, ò ciñe. Deſcriueſe el circulo ſi la linea EB. dà vna buelta entera ſin que el punto E. ſe mueua: y el punto E. ſerà el centro. De donde ſe infiere, que todas las rectas del cen-

centro a la circunferencia son iguales entre si, porque todas son iguales a la recta EB. con que se descriuiò el circulo: llamanse *radios, ò rayos, ò semidiametros.*

Diametro es la recta que passa por el centro, y se termina en la circunferencia por vna, y otra parte. Todos los diametros son iguales, como AB. CD. porque cada vno se compone de dos radios iguales. Qualquier diametro diuide al circulo en dos partes iguales: porque si la parte ADB. se dobla sobre el plano ACB. tirando infinitos radios, como EC. EF. todos por ser iguales, se terminaran en las dos circunferencias: luego qualquier punto del arco ADB. caerà sobre otro de ACB. y assi vn arco se ajustarà sobre otro: luego seràn iguales (1. P.) y cada vno serà la mitad del circulo, ò *semicirculo.*

9. P. *Diuision, y partes del circulo.* fig. 1.

QValquiera circulo se imagina diuidido en 360. partes, que se llaman *grados*: cada grado en 60. minutos primeros: cada minuto en 60. segundos: cada segundo en 60. terceros, y assi infinitamente. El semicirculo, pues, contiene 180. grados, y el quadrante, ò quarta parte contiene 90. que es la mitad del semicirculo.

Arco es parte de la circunferencia, como el arco DA. ò AC. &c.

Cuerda, ò subtensa es la recta, que termina vn arco: como AB. es cuerda del arco ADB. ò BCA. y CB. es cuerda del arco CFB. y tambien del arco CADB.

Segmento es el espacio comprehendido entre la cuerda CB. y arco CFB. ò entre la cuerda CB. y arco CADB: y porque qualquiera cuerda diuide la circunferencia, y circulo en dos arcos, y segmentos, que entre los dos llenan toda la circunferencia, y circulo: se dize el vn arco complemento del otro, y el vn segmento complemento del otro. *Sector* es el espacio comprehendido de vn arco, y los dos radios, que le terminan: como el espacio ECFBE. que està comprehendido del arco CFB. y de los radios CE. BE.

Arcos semejantes, aunque sean de circulos desiguales, son los que contienen tantos grados el vno como el otro, respeto de su cir-

circulo: asimismo segmentos entre si semejantes, y sectores entre si semejantes, son los que constan de arcos semejantes.

10. *P.* *Del angulo, y su medida*, fig. 1.

A*Ngulo* es la inclinacion de dos lineas, que se juntan en vn pũto: como ABC. quando solas dos lineas concurren, se puede nombrar el angulo con la letra sola del concurso, como el angulo B. pero quando concurren tres, ò mas lineas en vn punto, se deue nombrar con tres letras, y la del concurso deue ponerse en medio: como el angulo FEB. es el mismo que BEF. y el angulo FEC. el mismo que CEF. y CEB. que BEC. Que las lineas sean cortas, ò largas, no muda el angulo, porque no haze variar la inclinacion de las lineas, y assi el Angulo ABC. es el mesmo que EBO.

La Medida del angulo es el arco, que se imagina descrito del punto del concurso como centro, y se comprehende entre las dos lineas, que forman el angulo: como si del punto E. se describe qualquier circulo, el arco CB. serà medida del angulo CEB. con que si dos angulos CEB. AED. son igua-

al angulo: lo mesmo es de las lineas circulares, y qualesquiera otras curvas.

Figura inscripta en otra, es la que con sus angulos toca los lados de la otra, y aquella se llama *circunscripta*, como el quadrado HD. està inscripto en BE. y BE. circunscripto a HD. assimesmo HD. està inscripto en el circulo HFDA. y el circulo circunscripto, y BE. està circunscripto al circulo, y el circulo inscripto en BE. lo mesmo es de qualesquiera otras figuras, assi respeto del circulo, como de vnas con otras.

18. *P.* *De la razon de las quantidades*,

L*A razon* es el respeto, ò relacion de vna quantidad a otra del mesmo genero, como si se compara linea con linea, superficie con superficie, cuerpo con cuerpo. Pide la razon dos terminos. El primero que se compara es *antecedente*. El segundo a quien se compara, es *consequente*.

Vna cantidad respeto de otra, ò es igual, mayor, ò menor. Si se compara igual a igual, se dize *razon de igualdad*, como 4. a 4. Si se compara la mayor a la menor, se dize *razon de mayor desigualdad*, como 4. a 2. Si menor a mayor, es *razon* de menor desigualdad, como 2. a 4.

Si la cantidad mayor contiene algunas vezes justamente a la menor, se dize *multiplice*: y la menor se dize *parte aliquota*, porque tomada algunas vezes, compone enteramente a la otra, como 6. es multiplice de 2. porque justamente le contiene tres vezes: y 2. es parte aliquota de 6. porque el 2. tomado tres vezes, compone enteramente al 6. y assi es vn tercio. Las otras partes, que no se pueden ajustar, se llaman *aliquantas*, como 2. es parte aliquanta de 5. y 5. de 7. &c.

La razon multiplice toma el nombre de las vezes, que la mayor contiene a la menor: si la contiene dos vezes, como 4. a 2. es dupla: si tres vezes, como 6. a 2. es tripla, &c.

Submultiplice es quando la parte aliquota se compara a la cantidad multiplice: y si se contiene dos vezes, es *subdupla*, como la razon de 2. a 4. si tres vezes es *subtripla*, como 2. a 6. &c. Otras especies de razon no son aqui tan necessarias, puedense ver en mi Arithmetica, lib. 1. cap. 11.

19. P.

19. P. *De las razones semejantes, y proporcion.*

VNa razon es igual, ò semejante a otra siempre que el *antecedente* de la vna igualmente contiene, ò es contenido de su *consequente*, q̃ el antecedente de la otra contiene, ò es contenido de su *consequente*, como la razon de 4. a 2. es igual, ò semejante a la de 6. a 3. porque como el 4. es duplo de 2. assi 6. es duplo de 3. La razon de 2. a 4. es igual, ò semejante a la de 3. a 6. porque como 2. es mitad de 4. assi 3. es mitad de 6. La razon de 3. a 2. es semejante a la de 6. a 4. porque como 3. contiene vez y media al 2. assi el 6. contiene vez y media al 4.

Proporcion es la igualdad, ò semejança de dos razones: llamase en Griego *Analogia*; y como vna razon tiene dos terminos, la proporcion, que pide dos razones, tiene quatro terminos, dos *antecedentes*, y dos *consequentes*, que se llaman *terminos proporcionales*; y pues la razõ de 4. a 2. es como la de 6. a 3. hazẽ las dos razones vna proporcion: y los quatro terminos son proporcionales, 4. a 2. como 6. a 3.

Proporcion racional es la que se puede explicar por numeros, como la precedente. *Irracio-*

cional la que no se puede explicar por numeros, como la que tienen los lados de los quadrados con sus diametros.

Proporcion continua es quando el termino 1° al 2° tiene la misma razon que el 2° al 3° y que el 3° al 4° y el 4° al 5° &c. desuerte que siempre se và continuando la mesma razon; y se dizen los terminos, tres, quatro, ò cinco *proporcionales continuos*, conforme el numero de los terminos, como los siguientes 1. 2. 4. 8. 16. &c. porque 1. es mitad de 2. y 2. de 4. y 4. de 8. &c.

20. P. *Comparacion de los terminos proporcionales.*

LOs terminos proporcionales se pueden comparar *directamente, alternando, inuertiendo, componiendo, diuidiendo, y conuirtiendo.* Todo esto se explicarà en los quatro terminos proporcionales siguientes.

Razon 1.		*Razon 2.*	
Anteced.1.	*Conseq.1.*	*Antec.2.*	*Conseq.2.*
1.term.	*2.term.*	*3.term.*	*4.term.*
B. 4. a	C. 2.	D. 6. a	E. 3.

Comparacion directa es quando se compara el *antecedente* 1° a su *consequente* 1° y el 2° al 2° como B. a C. assi D. a E.

Alterna es quando se toman los terminos alternatiuamente: B. a D. como C. a E.

Inuersa es quando se compara el consequente a su antecedente. C. a B. como E a D.

Componer es comparar la suma, ò agregado del antecedente, y consequente al mismo consequente: explicase la suma con este signo + que quiere dezir *Mas*: como B+C. a C. es como D.+E. a E. esto es B. y C. a C. son como D. y E. a E. ò B. mas C. a C. como D. mas E. a E.

Diuidir es comparar la diferencia del antecedente, y consequente al mesmo consequente: explicase con este signo — que quiere dezir *Menos*. B—C. a C. como D.—E. a E. esto es B. menos C. a C. es como D. menos E. a E.

Conuertir es inuertir la composicion, y diuision: componiendo es B.+C. a C. como D+E. a E. luego conuirtiendo serà C. a B.+C. como E. a D.+E. Item diuidiendo, es B—C. a C. como D—E. a E. luego conuirtiendo C. a B—C. como E. a D—E.

De los quatro proporcionales el 1° y 4° son los *estremos*: el 2° y 3° son los *medios*. En la proporcion

porcion continua los medios siempre son dos menos que el numero de los terminos: con que si los terminos continuos son tres, ay vn medio: si quatro, ay dos medios: si cinco, ay tres medios, &c.

21. P. *De la razon compuesta, duplicada, y triplicada, &c.*

R*Azon compuesta* es la que se compone de otras, como vn numero de otros. Si huuiere pues muchas cantidades de vna especie, la primera a la vltima se dize, que tiene la razon compuesta de las razones intermedias, como en el exemplo siguiente.

1.	2.	3.	4.
B. 27.	C. 9.	D. 3.	F. 1.

Si fueren tres quantidades continuas, ò no continuas, B. C. D. serà la razon de B. a D. compuesta de la razon de B. a C. y de C. a D. assi como la distancia de B. a D. es cõpuesta de B. a C. y de C. a D. Assimismo si son quarro B. C. D. E. la razon de B. a E. se compone de B. a C. de C. a D. y de D. a E. &c.

Razon duplicada, es vna razon compuesta de dos razones semejantes continuas, ò razon compuesta dos vezes de otra, como si B.

B. C. D. son proporcionales continuos, porque la razõ de B. a C. es la mesma que C. a D. y la de B. a D. es compuesta de las dos iguales, se dize compuesta dos vezes de vna mesma, y assi duplicada de la razon de B. a C. *Esto quiere sumo cuydado.*

La razon, pues, *dupla*, y *duplicada* se diferencian en esto, que la *dupla* es quando vn termino es duplo del otro, como 4. a 2. La *duplicada* es quando vna razõ (sea la que fuere dupla, tripla, ò quadrupla) se toma dos vezes, como la razon de B. a C. es tripla: la de C. a D. es tambien tripla; pero la de B. a D. es compuesta de dos razones triplas continuadas; y assi es *duplicada* de B. a C. esto es, compuesta dos vezes de la razon tripla de B. a C. &c.

Razon triplicada de otra, es tres vezes compuesta de la otra, y se diferencia de la tripla, como la *duplicada* de la dupla: desuerte, que si B. C. D. E. son quatro proporcionales continuos: la razon de B. a E. q̃ es compuesta de las tres iguales B. a C: C. a D: D. a E. es *triplicada* de B. a C. porque se compone della tres vezes, de donde infiero esta conclusion general.

Si huuiere muchos terminos proporcionales con-

continuos en qualquiera especie de razon, el 1° al 3° tiene la razon duplicada del 1° al 2° el 1° al 4° triplicada: el 1° al 5° quadruplicada, y assi infinitamente.

22.P. *De la diuision, y composicion proporcional,* fig. 3.

LAs cantidades se diuiden, y componen proporcionalmente entre si, quando las partes de la vna se hazen proporcionales a las de la otra, como las rectas RH. DB. estàn diuididas proporcionalmente entre si; porque RM. a MH. es como DC. a CB. y los rectangulos OH. GB. estàn diuididos proporcionalmente si RN. a NH. es como DE. a EB. lo mismo es en qualesquiera otras cãtidades.

Vna cantidad està diuidida proporcionalmente, ò segun media, y estrema razon, quando la parte menor a la mayor tiene la mesma razon, que la mayor a toda la cantidad, como si BC. a CD. es como CD. a BD. estarà BD. diuidida proporcionalmente: lo mismo es del paralelogramo BG. si BE. a ED. es como ED. a BG. llamase media, y estrema razõ, porque de tres proporcionales continuos se hallan alli el medio, y los estremos; pues la par-

iguales, seràn los arcos de vno, ò iguales circulos CB. AD. tambien iguales; y los de circulos desiguales seràn semejantes; y si los arcos son iguales, ò semejantes, seràn los angulos iguales. Si el arco AC. es de 90. grados, serà el angulo AEC. de 90. grados, &c. De dõde se infiere, que por el punto E. àzia la mesma parte, sola vna recta EA. puede formar el mesmo angulo, porque como ha de cortar el arco AC. y passar por A. necessariamente serà la mesma linea EA.

11. *Del angulo recto, y obliquo, y de la linea perpendicular*, fig. 1.

ANgulo recto es el que comprehende la quarta parte de vn circulo, ò mitad del semicirculo, que son 90. grados. Todos los angulos rectos son iguales entre si, porque cada vno es la quarta parte de vn mesmo circulo, y dos angulos rectos son 180. grados, que es el semicirculo.

La linea perpendicular a otra es la que con ella haze dos angulos rectos, y parte al semicirculo en dos partes iguales: como si del centro E. sube la linea EC. y los arcos CB. CA. son iguales, seràn los angulos AEC. CEB. rec-

rectos iguales,y la recta EC.serà *perpendicular* sobre AB. porque no se inclina mas a vna parte que a otra:y del punto E. no puede salir otra perpendicular, porque solo el punto C. parte al semicirculo en dos partes iguales; y assi la perpendicular de vn punto es vnica.

Angulo obliquo se dize el que no es recto. Si es menos de 90 grados,es menor que recto, y se llama *Agudo*, como FEB. porque el arco BF.es menos que el quadrante BC. Si es mas de 90.grados,es mayor que recto, y se llama *Obtuso*,como FEA.porque el arco FA.es mas que el quadrante AC.

12.*P.* *De los Triangulos*.fig.1.

T*Riangulo* es vna figura de tres angulos, y porque tiene tambien tres lados, se llama figura trilatera.

Triangulo rectangulo es el que tiene vn angulo recto,como el triangulo CEB.

Triangulo obliquangulo es el que no es rectangulo,y tiene tres angulos obliquos, como son CEO.OEB.

Triangulo obtusangulo, ò *ambligonio* es el que tiene vn angulo obtuso,como EOC.

Triangulo acutangulo, y *oxygonio* es el que tiene tres angulos agudos, como AEG.y BEO.

Triangulo equilatero, ò *isoplear* o el que tiene tres lados iguales,como AEG.

Triangulo isoceles el que tiene por lo menos dos lados iguales,como CEB.y GEA.

Triangulo escaleno el que tiene tres lados desiguales, como CEO.y OEB.

13.*P.* *De las Paralelas*.fig.2.

LIneas rectas paralelas son las que infinitamente continuadas siempre distan igualmente, y assi jamàs pueden concurrir, como si el triangulo rectangulo ABC.se mueue sobre la linea AD.formarà la linea CCC. siempre equidistante de AD. y los lados BC. BC. BC. siempre seràn equidistantes, como tambien los lados AC.AC.AC. pues aunque estas lineas se continuen infinitamente, en qualquiera parte,que se tome el punto C.siempre CC.caminò tanto como BB.

Consectarios 1. Si vna linea DA. corta las paralelas BC.BC.BC.ò CA. CA. CA. entra en ellas con iguales angulos:A. A. A. porque son vn mesmo angulo del triangulo ABC. que solo mudò lugar con el mouimiento: y si el el primer angulo B. es recto, todos los angulos B. B. B. seràn rectos: luego las paralelas tienen el perpendiculo comun: y las que tienen el perpendiculo comun, son paralelas.

2 Si vna recta DA. entra en otras con iguales angulos A. A. A. seràn AC. AC. AC. paralelas: porque como las paralelas han de formar los mesmos angulos, si estas les forman; pues ningunas otras les pueden formar (10. P.) estas son las paralelas.

3 Si dos lineas BC. BC. son paralelas a otra BC. son tambien entre si paralelas: porque si a igual distancia se añade, ò quita distancia igual, resultarà igual distancia.

14. *P.* *De los Paralelogramos*, fig. 3.

Paralelogramo es figura de quatro lados, y angulos, cuyos lados opuestos son entre si paralelos, como OSHR. y GFBD.

Rectangulo es paralelogramo de quatro angulos rectos, como OSHR. GECD.

Quadrado es rectangulo de quatro lados iguales, como ONMR. y GECD.

Rhombo es paralelogramo, que tiene quatro lados iguales, y dos angulos desiguales, como QPXL.

Rhom-

Rhomboide es paralelogramo, que tiene dos lados, y dos angulos desiguales, como AZPQ.

Diametro del paralelogramo, es la recta, que junta los angulos opuestos, como LP. llamase tambien *diagonio*, ò *diagonal*.

Centro es el punto comun de los diametros, donde mutuamente se cortan como V.

Los paralelogramos ya hechos se pueden nombrar con las quatro letras de los angulos, y para mas compendio se nombran con las dos letras de los angulos opuestos, como el paralelogramo OSHR. se dize OH. ò RS.

Las otras figuras de quatro lados, que no son paralelogramos, se llaman *Trapezios*, y se nombran con todas las quatro letras de sus angulos.

15. *P.* *Potencia de las lineas.* fig. 3.

Potencia de vna linea se dize el espacio que ella puede comprehender tomada quatro vezes, y formando vn quadrado, como el quadrado GC. es la potencia de la recta DC. y aunque el quadrado GC. consta de quatro lineas, se dize formado de sola vna, por ser todas quatro iguales.

Las

Las potencias de dos lineas son sus dos quadrados: las potencias de tres son sus tres quadrados, &c. *Si dos lineas son iguales, son sus potencias, ò quadrados iguales*, porque se ajustan; *y si las dos potencias son iguales, son las dos lineas iguales*: si el quadrado de vna linea DF. es tanto como los quadrados de otras dos DB. BF. se dize que DF. puede tanto como DB. y BF.

La potencia de dos es el espacio que entre las dos lineas pueden comprehender, formando vn paralelogramo rectangulo, como el rectangulo GB. es la potencia de las dos rectas GF. FB. pues aunque tiene quatro lados, se dize formado de dos, porque los opuestos GF. DB. son iguales, y tambien GD. FB.

Quando los quadrados, y rectangulos no estàn formados, se nombran por las mesmas lineas de que se pueden formar, como el quadrado DC. es el que se puede formar de DC. El rectangulo BF. FG. es el que puede formar la recta BF. con FG.

Quando las dos rectas tienen vn punto comun, se nombran para mas compendio con solas tres letras, como el rectangulo GEF. es el que se puede formar de las rectas GE. EF. El

El rectangulo GFE. es el de GF. FE. *Estos modos de hablar importan mucho para la inteligencia de los Autores.*

Todo lo dicho se puede aplicar a los paralelogramos, que no son rectangulos, substituyendo en lugar del quadrado al Rhombo, y en lugar del *oblongo*, ò rectangulo prolongado al rhomboide.

16. P. *De los Polygonos.*

LAs figuras q̃ tienen mas de quatro lados y angulos, se llamã Polygonos. Si todos los lados, y angulos son iguales, son los Polygonos ordenados, ò regulares. Sino son todos los lados, y angulos iguales, seràn Polygonos irregulares.

Pentagono es Poligono de cinco angulos, y lados. *Hexagono* de seis. *Heptagono* de siete. *Octagono* de ocho. *Enragono*, ò *nonagono* de nueue. *Dezagono* de diez. *Onzagono* de onze. *Dozagono* de doze, &c. Tãbien las suelen llamar vulgarmente *cincauado*, *seisauado*, *sietauado*, *ochauado*, *nonauado*, &c. ò *cincauo*, *seisauo*, *sietauo*, &c. En todos los Polygonos la recta que junta dos angulos opuestos, se dize *diagonal*, ò *diagonio*.

17. P.

17. P. *Del contacto inſcripcion, y circunſcripcion.* fig. 4.

VNa quantidad toca a otra quando ſolo tiene con ella vn punto comun; y no pueden tener mas, aunque ſe continuen entrambas: y aquel punto comun es el del *contacto*. Sucede eſto entre dos lineas, vna recta, y otra curva, ò entre dos curvas, ò entre vn angulo, y vna linea recta, ò curva.

Dos circulos ſe tocan interiormente, quando el vno eſtà dentro del otro, y tienen vn punto comun, como ARS. AMN. ſe tocan en A. interiormente, ſi el punto A. es comun.

Dos circulos ſe tocan exteriormente, ſi el vno eſtà fuera del otro, y tienen vn punto comun, como HAD. MAN. ſe tocan ſi A. es comun.

Tangente del circulo es la recta que tiene con el circulo vn punto comun, como BC. es tangente de los circulos HAD. MAN. RAS. y les toca a todos, ſi el punto A. es comun a la recta, y a los tres circulos.

Vn angulo toca a la recta, ò la recta al angulo, ſi tienen vn punto comun, como el angulo HAD. toca a la recta BC. en A. y la recta al

parte mayor es media proporcional entre la menor, y toda.

Figuras ſemejantes ſon las que ſe componen de iguales angulos comprehendidos de lados proporcionales, como el rectangulo OH. Si es equiangulo a GB. y OS. es a SH. como GF. a FB. ſerà OH. ſemejan te a GB. lo miſmo es de los triangulos RSH. y DFB. y de otras figuras.

Los lados proporcionales, que ſe oponen a iguales angulos, ſe llaman lados *Homologos*.

Reciprocas figuras ſon las que tienen los lados *reciprocos*, eſto es, que de quatro proporcionales, los dos eſtremos eſtàn en vna figura, y los dos medios en otra: como ſi en los triangulos RHS. y FBC. ſon proporcionales RH. a FB. como BC. a HS. ſeràn los lados reciprocos, y las figuras reciprocas. Lo meſmo es de los rectangulos OH. EB.

23.P. *De los solidos en comun.*

L*Inea perpendicular a vn plano*, es la que corta al plano en vn punto, y es perpendicular a todas las rectas del plano, que passan por aquel punto.

2 *Comun seccion de dos planos* es la linea comun, ò que se halla en dos planos, que se cortan.

3 *Vn Plano es perpendicular a otro*, quando todas las rectas, que estàn en êl, perpendiculares a la comun seccion, son tambien perpendiculares al otro plano.

4 *Plano inclinado al otro* es el que no es perpendicular. *La inclinacion* se mide por el angulo agudo, que hazen dos perpendiculares a la comun seccion, y salen de vn punto comun, cada vna por su plano. *Inclinacion semejante* es la que tiene igual angulo, ò medida.

5 *Planos paralelos* son los que siempre distan igualmente, aunque infinitamente se continuen.

6 *Solidos semejantes* son los que se terminan de superficies semejantes, tantas en vno, como en otro.

7 *Angulo solido rectilineo* es el que se contiene de muchos angulos rectilineos, que estàn en diferentes planos, y solo tienen vn punto comun: y seràn semejantes, ò iguales, quando lòs angulos planos de que se componen son iguales, y dispuestos con el mesmo orden.

24.P. *De los solidos en particular.*

1 P*Risma* es vn solido, que tiene por lo menos dos planos opuestos paralelos, iguales, y semejantes.

2 *Paralelepipedo* es vn solido, que consta de seis planos paralelogramos, que cada dos opuestos son paralelos.

3 *Cubo* es vn solido que consta de seis planos quadrados, como vna piedra por todas partes quadrada.

4 *Piramide* es vn solido comprehendido de tres, ò mas triangulos, que se terminan en vn punto. *Base* de la piramide es el plano en que insiste, ò estriua, y puede ser triangulo, ò quadrilatero, &c. *Vertice* es el punto en que la piramide fenece.

5 *Piramide Conica* (en Latin *Conus*) es la que tiene por base vn circulo, y fenece en vn punto alto: *su Exe* es la recta del vertice al centro de la base: *su Lado* es la recta del vertice a la cir-

circunferencia de la base. Si el *Exe* es perpendicular a la base, se dize esta piramide *recta*: sino, es *obliqua*, ò *escalena*.

6 *Cilindro* es vn solido, cuyos dos planos opuestos son dos circulos iguales, y paralelos: *sus bases* son los dos circulos: su *Exe* la recta q̃ junta los centros de las bases. Si el *Exe* es perpendicular a las dos bases, es el cilindro *recto*; sino, es obliquo, ò escaleno. *Lado* es la recta de vna circunferencia a otra. *Cilindros semejantes* son los que tienen los exes, y diametros de las bases proporcionales, y lo mesmo es de las *Piramides Conicas*.

7 *Esfera, Globo, ò Bola* es vn solido comprehendido de vna superficie, de cuyo centro todas las lineas a la superficie son iguales, y se llaman *radios*, ò *semidiametros*. *El diametro* es la recta, que passa por el centro, y se termina a vna, y otra parte de la superficie.

Fin de los Proemiales.

LIBRO I.

De las lineas, triangulos, y paralelogramos.

EL que deseare aprouechar en la Geometria, ha de aplicar su primer cuydado en saber la materia de cada libro, el numero de sus proposiciones, y lo que cada vna contiene, por ser de suma conueniencia para la inteligencia de las demonstraciones.

Este libro contiene ocho proposiciones.

Prop. 1. *De las lineas que concurren.*

Prop. 2. *De las paralelas.*

Prop. 3. *De los angulos de las figuras.*

Prop. 4. *De la igualdad de los triangulos.*

Prop. 5. *De la igualdad, ò desigualdad en vn triangulo.*

Prop. 6. *De la igualdad, y desigualdad en dos triangulos.*

Prop. 7. *De los Paralelogramos en si mesmos.*

Prop. 8. *De los triangulos, y paralelogramos de igual base, y altura.*

PROPOSICION I.

De las lineas que concurren.

1 *LOs angulos, que en vn punto se forman sobre vna linea, son tanto como dos rectos.*

2 *Si los angulos de vn punto son tanto como dos rectos, se forman sobre vna linea.*

3 *Si son mas, ò menos que dos rectos, no se forman sobre vna linea.*

4 *Los angulos que se pueden formar en vn punto, son tanto como quatro rectos.*

5 *Si dos lineas se cortan, los verticales opuestos son iguales entre si,*

Demonstracion. fig.1.

1 SObre la linea AB. se forman los angulos AEC. CFB. Si del punto E. se imagina descrito el circulo ACBD. siendo los arcos AC. CB. iguales, seràn los angulos AEC. CEB. rectos iguales (11.P.) y si la linea EF. corta los arcos BF. FA. desiguales, los dos juntos seràn tanto como el semicirculo ACB. luego los dos angulos BEF. FEA. son tanto como dos rectos (11.P.) y porque los tres arcos BF. FC. CA. son vn semicirculo, son

son los tres angulos BEF. FEC. CEA. tanto como dos rectos, &c.

2 Si los dos Angulos AEF. FEB. ò los tres AEC. CEF. FEB. son tanto como dos rectos, seràn los arcos AC. CF. FB. vn semicirculo (11.P.) luego AEB. serà vn diametro (8.P.) y asi serà vna recta linea (8.P.)

3 Porque los angulos que se forman sobre vna linea, ni son mas, ni menos que dos rectos (1.N.) luego los que son mas, ò menos que dos rectos, no se forman sobre vna linea.

4 Porque todos los angulos del punto E. comprehenden enteramente al circulo en los arcos AC. CF. FB. BD. DG. GA. luego comprehenden las quatro quartas partes del circulo, q̃ son quatro angulos rectos (11.P.) luego todos los angulos AEC. CEF. FEB. BED. DEG. GEA. son tanto como quatro rectos.

5 AB. FG. se cortan en E. luego porque los semicirculos GAF. AFB. son iguales (8.P.) quitando el arco comun AF. quedaràn iguales arcos GA. FB. (4.P.) luego los angulos verticales opuestos GEA. FEB. tienen iguales medidas, y asi son iguales (10.P.) como

mo tambien AEF. GEB. por la mesma razon.

PROPOSICION II.

De las Paralelas.

1 *SI otra recta las corta, entra en la vna, y sale de la otra con iguales angulos.*

2 *Haze los angulos alternos, que son los internos opuestos, iguales.*

3 *Los internos de vna parte son tanto como dos rectos.*

4 *Al contrario: si vna recta haze con otras todos los angulos dichos, son paralelas.*

5 *Si las dos lineas no son paralelas, no hazen dichos angulos; y sino hazen dichos angulos, no son paralelas.*

Demonstracion. fig.2.

1 AB.CD. son paralelas, y EF. las corta: luego porque entra con iguales angulos (13. P.) son el 1° y 4° iguales: y pues el 4° y 6° son tambien iguales, por ser verticales (1.l.1.) luego tambien el 1° y 6° son iguales (3.P.) luego entra, y sale con iguales angulos.

2 El angulo 1° y 2° son iguales por ser verticales (1.l.1.) Tambien el 1° y 4° son iguales (13.P.) luego el 2° y 4° son iguales (3.P.) que son los alternos, ò internos opuestos.

3 Porque el 4° y 5° son tanto como dos rectos (1.l.1.) siendo el 4° igual al 2° (2.N) serà el 2° y 5° tanto como dos rectos, que son los internos a vna parte.

4 Si EF. haze con CD. y AB. los angulos iguales 1° y 6° item 2° y 4° item 2° y 5° tanto como dos rectos, serà AB. paralela a CD. porque la paralela que ha de passar por G. ha de hazer dichos angulos (1.N.) y pues por el punto G. no puede otra recta que AB. formar los mismos angulos (10.P.) serà la recta AB. paralela a CD.

5 Porque si fueran paralelas, formàran dichos angulos (1.N.) y si formàran dichos angulos, fueran paralelas (4.N.) &c.

PROPOSICION III.

De los angulos de las figuras.

1 *LOs angulos de vn triangulo son iguales a dos rectos.*

2 *Si vn lado se continua, el angulo externo es igual a los dos internos opuestos.*

3 *Los angulos de qualquier rectilineo son doblados rectos, menos 4. que los lados.*

4 *Los externos todos de vn rectilineo son iguales a quatro rectos.*

Consectarios.

5 *Si vn angulo de vn triangulo es recto, los otros dos hazen otro recto, y cada vno es agudo menor que recto.*

6 *Los angulos de vn rectilineo son iguales a los de otro de tantos lados.*

7 *Si vn angulo es igual a otro, las sumas de los otros son tambien iguales; y al contrario.*

Demonstracion. fig.3.

1 EN el triangulo ABC. considerese FBD. paralela a la base AC. luego los angulos alternos *a.* y *d.* son iguales; y tambien *c.* y *e.* (2.l.1.) luego los tres angulos *a.b.c.* son iguales a los tres *d. b. e.* y pues los tres *a.b.c.* hazen tanto como dos rectos (1.l.1.) los tres del triangulo *d.b.e.* seràn iguales a dos rectos.

2 Continuese el lado ACG. El angulo BCG. con el angulo *e.* haze dos rectos (1.l.1.) los angulos *d.b.* con *e.* tambien hazen dos rectos (1.N.) luego el angulo externo BCG. es igual a los dos internos opuestos *d.b.*&c.

3 Sea qualquier rectilineo ACDEF. tomando dentro qualquier punto B. si se tiran BA. BC. BD. BE. BF. se formaràn tantos triangulos como lados: y pues cada triangulo tiene tanto como dos angulos rectos (1.N.) todos los angulos seràn doblados rectos, q̃ los lados: y quitando los angulos, que se forman en el punto B. iguales a quatro rectos (1.l.1.) quedaràn los angulos de la figura doblados rectos menos 4. que los lados, &c.

4 Continuados todos los lados, se formaràn los angulos externos: luego el externo DCG. con su immediato interno DCA. es tanto como dos rectos (1.l.1.) y cada externo con su interno es dos rectos: luego todos los externos con todos los internos son doblados rectos, que los lados de la figura: luego porque los internos son doblados rectos menos 4. que los lados, suplen los externos estos 4. rectos, y assi son iguales a 4. rectos.

Los Consectarios son tan claros, que no necessitan de explicacion.

PROPOSICION IIII.

De la total igualdad de dos triangulos.

1 *SI los tres lados de vno ſon iguales a los tres del otro.*

2 *Si dos lados ſon iguales a dos del otro, y comprehenden iguales angulos.*

3 *Si dos angulos, y vn lado de vn triangulo, ſon iguales a los de otro.* y se corresponden.

4 *Si dos lados ſon iguales a los de otro; y vn angulo opueſto igual, y el otro opueſto es de vna eſpecie, todo es igual.*

Demonſtracion. fig.4

1 LOs triangulos ABC. ADC. tienen los lados AB. AD. iguales, y CB. CD. y AC. comun: luego doblando el triangulo ABC. ſobre ADC. porque las rectas CB. AB. ſon radios de los circulos BFD. BGD. no ſe podràn juntar ſino en el punto D. donde ſe cortan los circulos: luego todo el triangulo ABC. ſe ajuſtarà ſobre ADC. y ſeràn iguales los angulos B. D. y CAB. CAD. y ACB. ACD. (1.P.) &c.

2 Si los lados AB. AD. ſon iguales, y AC. comun, y los angulos CAB. CAD: luego tambien los arcos BG. GD. que ſon ſus medidas (10.

(10.P.) luego doblando ABC. ſobre ADC. ſe ajuſtarà el arco BG. ſobre GD. y el punto B. caerà ſobre D. y CB. ſobre CD. luego los angulos B. D. ſon iguales, y BCA. DCA. y los lados CB. CD. (1.P.)

3 Si dos angulos de vn triangulo ſon iguales a dos del otro, el 3° ſerà igual al 3° (3.l.1.) luego los angulos ſobre el lado comun AC. ſon iguales a los otros: BAC. BCA. iguales a DAC. DCA. luego tambien los arcos, que ſon ſus medidas (10.P.) BF. a FD. y BG. a GD. luego doblando el triangulo BAC. ſobre DAC. caerà FB. ſobre FD. y GB. ſobre GD. y el punto B. ſobre D. luego el lado BA. es igual a DA. y BC. a DC. (1.P.)

4 Si AB. AD. ſon iguales, y AC. comun, y los angulos ACD. ACB. opueſtos a los lados AD. AB. y los angulos B. D. de vna eſpecie, doblando ABC. caerà el punto B. ſobre D. ò ſobre F. donde la recta CDE. corta al circulo; porque ſolas EA. DA. ſon iguales a BA. y conſiderando AH. perpendicular, ſeràn los angulos ADH. AEH. agudos (3.l.1.) luego ADC. ſerà obtuſo (1.l.1.) luego porque los angulos D. y B. ſe ſuponen de vna eſpecie obtu-

tusos, caerà B. sobre D. y se ajustarà el lado BC. con CD. el angulo B. con D. y CAB. con CAD. &c.

En todos quatro casos es lo mesmo, aunque el lado CA. no sea comun, porque ajustando dos lados iguales, se formarà vn lado comun.

PROPOSICION V.

De la igualdad, ò desigualdad en vn triangulo.

1 *LAdos iguales se oponen a iguales angulos.*

2 *Angulos iguales se oponen a iguales lados.*

3 *El lado mayor se opone a mayor angulo, y el angulo mayor a mayor lado.*

4 *Dos lados son mayores que el otro.*

Consectarios.

5 *El triangulo equilatero es equiangulo, y el equiangulo es equilatero.*

6 *En el triangulo isoceles la recta, que parte igualmente la base, tambien el angulo; y si el angulo, tambien la base, y es perpendicular; y al contrario.*

7 *Si la perpendicular parte igualmeute la base de vn triangulo, tambien el angulo: y si èl angulo, tambien la base: y la recta que parte igualmente base, y angulo, es perpendicular, y siempre el triangulo serà isoceles.*

8 *Si dos rectas iguales caen de vn punto sobre otra, se apartan igualmente del perpendiculo, y forman con èl iguales angulos; y al contrario.*

9 *La menor linea que de vn punto puede caer sobre otra, es la perpendicular, y es vnica.*

Demonstracion. fig. 5.

1 AB. AC. son iguales: considerese *Ae.* que parta igualmente el angulo A. luego porque los lados BA. *Ae.* son iguales a CA *Ae.* y comprehenden iguales angulos BA*e.* CA*e.* todo serà igual (4. l. 1.) esto es, los angulos *b. c* los segmentos *be. oc.* los angulos *e. o.* luego son rectos, y A*o.* perpendicular (11. P.) De aqui nacen los consect. 5° 6° 7° y 8°

2 Si los angulos *b. c.* son iguales, considerense iguales BA*e.* CA*e.* y el lado A*e.* comũ: luego todo el triangulo A*e*B. es igual a A*e*C. (4. l. 1.) luego AB. AC. son lados iguales opuestos a iguales angulos *b. c.*

3 Siendo AB. AC. iguales, son iguales angulos *b. c.* (1. N) luego si AD es mayor que AC. ò AB. crece el angulo C. y mengua D.

(3.

(3.l.1.) luego el lado mayor AD. ſe opone al mayor angulo C. y al contrario, creciendo el angulo C. y menguando D. es AD. mayor que AB. ò AC. luego el angulo mayor C. ſe opone al mayor lado AD.

4 La recta AD. es la mas breue diſtancia entre los puntos A.D. (6.P.) luego es menor que AC. CD.

Los *conſect.* 5° 6° 7° 8° nacen del numero 1°

9 Siendo recto *e.* qualquier angulo *b.* ſerà menor (3.l.1.) luego la perpẽdicular A*e.* es vnica, y qualquiera otra AB. es mayor que A*e.* (3.N.)

PROPOSICION VI

De la igualdad, y deſigualdad en los triangulos.

1 *SI dos triangulos tienen dos lados iguales, el que tiene mayor angulo, tiene mayor baſe.*

2 *Y el que tiene mayor baſe, tiene mayor angulo.*

3 *Si dos triangulos tienen vna meſmo, ò igual baſe, el que tuuiere ſobre ella vn angulo menor, y el otro, ò igual, ò menor, tendrà menores lados.*

4 Pe-

4 *Pero los lados comprehenderàn mayor angulo.*

5 *Si de vn punto dentro del triangulo ſe tiran lineas a la baſe, ſerà lo meſmo.*

Demonſtracion. fig.6.

1 EN los triangulos BAD. BAC. es BA. lado comun, ò igual: y AD. AC. iguales: y el angulo BAC. mayor que BAD. digo que BC. ſerà mayor que BD. porque AE. EC. ſon mayores que AC. (5.l.1.) ſon tambien mayores que ſu igual AD. luego quitando de AED. y AEC. el pedaço comun AE. quedarà EC. mayor que ED. (4.P.) y añadiendo BE. a cada parte, ſerà CEB. mayor que DEB. (4.P.) luego porque BED. ſon mayores que BD. (5.l.1.) ſerà BEC. mucho mayor que BD. (4.P.)

2 Si los angulos BAC. BAD. fueran iguales, ſiendo iguales los lados BA. AC. a BA. AD. fueran iguales las baſes BC. BD. (4.l.1.) luego ſi BC. ſe ſupone mayor que BD. ſeràn los angulos BAC. BAD. deſiguales: y pues el mayor angulo tiene mayor baſe (1.N.) ſi BC. es baſe mayor que BD. ſerà BAC. angulo mayor que BAD.

E 3. Los

3 Los triangulos BAC. BAE. tienen la base AB. igual, ò comun; y el angulo ABE. igual, ò comun: y BAE. es menor que BAC. seràn los lados AE. EB. menores que ACB. porq̃ AC. CE. son mayores que AE. (5. l. 1.) luego añadiendo la porcion comun EB. seràn AC. CEB. mayores que AEB. (4. P.) Si el angulo ABF. es menor tambien que ABC. continuando AFE. seràn FE. EB. mayores que FB. (5. l. 1.) luego añadiendo el comun AF. seràn AFEB. mayores que AFB. (4. P.) y pues ACB. aun son mayores que AEB. (3. N.) seràn tambien mayores que AFB. (4. P.)

4 Los tres angulos de vn triangulo son iguales a los tres del otro (3. l. 1.) luego si la suma de los dos sobre la base es menor, el 3° BEA. ò BFA. serà mayor que C. (4. P.)

5 Si dentro del triangulo ABC. se toma el punto E. ò F. es lo mesmo que antes.

PROPOSICION VII.

Del paralelogramo en si mesmo

1 S*Vs angulos, y lados opuestos son iguales.*

2 *Los diametros le parten, y se parten igualmente.*

3 Lo

3 *Lo mesmo es qualquiera recta que passa por el centro, ò concurso de los diametros.*

4 *Vn quadrilatero serà paralelogramo, si tiene dos lados paralelos iguales.*

5 *Tambien si los lados opuestos son iguales.*

6 *Tambiẽ si los angulos opuestos son iguales.*

Demonstracion. fig. 7.

1 DB. es paralelogramo, y AC. su diametro, porque AB. DC. son paralelas, los angulos alternos *f. a.* son iguales (2. l. 1.) y tambien *e. o.* porque AD. BC. son paralelas: luego siendo AC. lado comun a los dos triangulos ABC. ADC. y los angulos sobre la base *a. e.* iguales a *f. o.* todo es igual (4. l. 1.) AB. a DC. y CB. a DA. y el angulo ABC. a CDA: y el angulo A. que es *a. o.* a *f. e.* luego los lados, y angulos opuestos son iguales.

2 El triangulo ADC. es igual a CBA. (1. N.) luego el diametro AC. parte al paralelogramo igualmente: lo mesmo es DB. Tambien porque los lados DC. AB. son iguales en los triangulos DGC. AGB. y los angulos alternos *f. a.* y *g. b.* (2. l. 1.) luego todo es igual (4. l. 1.) DG. a GB. y CG. a GA. luego los diametros AC. DB. se parten igualmente.

 3. Qual-

3 Qualquier a otra recta EGF. passe por el centro; porque GC.GA. son iguales (2.N.) y los angulos alternos *e.o.* y *h.d.* (2.l.1.) todo el triangulo AEG. es igual a GFC. y EG. a GF. (4.l.1.) luego EF. se parte igualmente: y porque ABC. es la mitad del paralelogramo (2.N.) si le quitamos GFC. y en su lugar subsstituimos EGA. su igual, serà el trapezio EABF. igual al triangulo ABC. ò medio paralelogramo.

4 Si DC.AB. son paralelas iguales, seràn los angulos alternos *f.a.* iguales (2.l.1.) y AC. lado comun: luego porque DC.CA. iguales a BA.AC. comprehenden iguales angulos *f.a.* todo es igual (4.l.1.) DA.CB. y los angulos alternos *e.o.* iguales: luego CB.DA. son paralelas iguales: y AC. es paralelogramo.

5 Si DC. AB. son iguales, y tambien DA.BC. siendo AC. comun, todo el triangulo ADC. es igual a CBA. (4.l.1.) luego los angulos alternos *e.o.* son iguales: luego CB. AD. son paralelas: y porque *f.a.* son iguales, seràn DC.AB. paralelas (4.l.1.) luego AC. es paralelogramo.

6 Si los angulos C.A. son iguales, y tambien D.B. seràn C.B. tanto como D.A. luego porque los quatro C.B.A.D. son tanto como quatro rectos (3.l.1.) seràn C.B. tanto como dos rectos: luego por ser internos iguales a dos rectos, seràn DC.AB. paralelas (2.l.1.) y assimesmo porque D.C. son iguales a C.B. y tanto como dos rectos seràn DA.CB. paralelas, y AC. paralelogramo.

PROPOSICION VIII.

De los triangulos, y paralelogramos de igual base, y altura.

1 *Si tienen igual altura, estàn, ò pueden estar entre dos paralelas.*

2 *Vn triangulo es medio paralelogramo.*

3 *Los paralelogramos que tienen vna mesma, ò igual base con igual altura, son iguales.*

5 *Los iguales, si tienen igual base, tienen igual altura; y al contrario.*

5 *Lo mesmo se dize de los triangulos.*

6 *El que tuuiere doblada base, o altura, serà doblado mayor.*

Demonstration. fig.8.

1 Las alturas de las figuras se miden por los perpendiculos CO.FH. luego si los perpendiculos son iguales, seràn OH.

OH.CF.paralelas,por ser equidistantes: luego las figuras que tienen igual altura, si tienen las bases en la recta OH.feneceràn en la recta CF. y sino tienen las bases en OH. como se pueden poner sobre ella, podràn estar entre dos paralelas: y al contrario, si las figuras estàn entre dos paralelas, tienen igal altura, porque las paralelas OH.CF. siempre tienen igual perpendiculo CO.FH.&c.

2 Sea qualquier triangulo Z. si AC. se considera paralela a BD.y DC.a BA.serà BC. paralelogramo, y el triangulo Z. su mitad (7.l.1.) Otra vez, si BF.se considera paralela a DA.y DF.a BA.serà AF.paralelogramo, y el triangulo Z.serà su mitad (7.l.1.)

3 En todos tres casos los paralelogramos BC.AF.tienen vna mesma, ò igual base (que es lo mesmo,porque si es igual, se puede ajustar) y porque tienẽ igual altura estàn, ò se pueden poner entre dos paralelas (1.N.) digo que son iguales: porque los lados CA. DB. son paralelos iguales, y tambien AE.BF. (7.l.1.) y los angulos HBD. HAC.y tãbien HBF. HAE. (2.l.1.) luego si de los iguales HBD. HAC.quitamos los iguales HBF. HAE. quedaràn iguales FBD. EAC. (4.P.) luego porque los lados AC.AE.iguales a BD.BF,comprehenden iguales angulos todo el triangulo ACE.serà igual a BDF. (4.l.1.) luego si en el caso 1° y 2° añadimos a cada parte el espacio BDEA.resultarà el paralelogramo AF. igual a BC.y si en el *caso* 3° de los triangulos iguales CAE.DBF.quitamos el comun DGE. y añadimos el comun AGB. resultaràn paralelogramos AF.BC.iguales.

4 Si BC.y AF.son iguales, continuando la paralela CD. cortarà el paralelogramo AF.igual a BC.(3.N.) luego CD. passarà por EF.y assi BC. AF. estàn entre dos paralelas, &c.

5 Lo mismo es de los triangulos, por ser medios paralelogramos (2.N.)

6 CN.es doblado que CB. porque su altura, ò base CM.es doblada que CA.&c.

Proposicion 47.de Euclides.

Tiene su lugar en el lib.2.Prop.4.

LI-

LIBRO II.

DE LA POTENCIA DE LAS lineas.

LA potencia de las lineas se explicò en el Proemial 15. Todo lo que se demostrarà en este libro del Quadrado, y rectangulos, conuiene tambien al rhombo, y rhomboides, y a los triangulos, que son sus mitades (8.l.1.) Aduierto esto en comun, por que no sea necessario repetirlo despues en cada proposicion.

Tiene este libro quatro Proposiciones.

PROPOSICION I.

Diuision de vna recta en qualesquiera dos partes.

1 *EL quadrado de toda es igual a los rectangulos de toda, y de las mesmas partes.*

2 *Tambien a los quadrados de las partes, y a dos rectangulos de las mesmas*

3 *El quadrado de toda con el quadrado de vn segmento, es igual a dos rectangulos de toda, y del mesmo segmento con el quadrado del otro segmento.*

4 *El rectangulo de toda, y vn segmento, es igual al quadrado del mesmo segmento, y al rectangulo de los segmentos.*

Demonstracion. fig. 1.

1 LA recta AB. se diuide en E. El quadrado de AB. es BC. con que AC. es igual a AB. El rectangulo de toda AC. y del segmento AE. es CE. el rectangulo de toda BD. que es AB. y del segmento BE. es ED. luego el quadrado BC. es igual a los rectangulos CE. ED. porque se compone dellos (2.P.) lo mismo es aunque AB. se diuida en tres, ò mas partes.

2 Si AF.BG.CR. se toman iguales a EA. seràn AH. quadrado de AE. y HD. quadrado de HG. ò EB. y HB. HC. dos rectangulos de las partes AE. EB. luego el quadrado AD. de toda la linea AB. es igual a los quadrados de las partes AH. HD. y a los dos rectangulos de las mesmas BH. HC. porque se compone de ellos (2. P.)

3 Los rectangulos AG. AR. son de toda la linea AB. ò AC. y del vn segmento AE. ò AF. luego porque AG. AR. incluyen los dos rectangulos HB. HC. y dos vezes al quadrado AH. Si les añadimos el quadrado HD. del otro segmento EB. excederàn a todo el quadrado AD. en vn quadrado AH. luego el quadrado AD. con el quadrado AH. es igual a los dos rectangulos AG. AR. con el quadrado HD.

4 El rectangulo AG. de toda la recta AB. y del segmento AE. ò AF. es igual al quadrado AH. del segmento AF. y al rectangulo HB. de de los dos segmentos, porque se compone de ellos (2. P.) Assimesmo el rectangulo FD. es igual al quadrado HD. y al rectangulo HC. &c. De los rhombos, y rhomboides se demuestra lo mesmo en su figura.

PROPOSICION II.

Diuision de la recta en dos partes desiguales.

1 *EL quadrado de toda es igual a quatro rectangulos de las partes con el quadrado de su diferencia.*

2 *Los quadrados de las partes son iguales a dos rectangulos de las mesmas con el quadrado de su diferencia.*

3 *Y son la mitad del quadrado de toda con el quadrado de la diferencia.*

4 *El quadrado de la parte mayor es igual al de la menor con el rectangulo de toda la linea, y de la diferencia de las partes.*

Demonstracion. fig. 2.

1 LA recta es AB. las partes desiguales AE. EB. tomense BN. BG. DM. DL. CR. CO. AF. iguales à AE. porque NB. y AE. son iguales, serà EN. la diferēcia de EB. y NB. ò EB. y AE. y serà HZ. el quadrado de la diferencia EN. ò HS. luego el quadrado AD. de toda la recta serà igual a los quatro rectangulos EG. GL. LO. OE. con el quadrado HZ. porque se compone dellos (2. P.)

2 Los quadrados de las partes son AH. ò NG. y HD. estos dos NG. HD. se componen de

de los rectangulos NM.MR. y del quadrado HZ. luego los quadrados de las partes NG. HD. son iguales a los dos rectangulos NM. MR. con el quadrado de la diferencia HZ. (2. P.)

3 Sea MP. el mesmo quadrado HZ. y pues los rectangulos NM.MR. con el quadrado HZ. contienen vna vez a los quadrados NG.HD. (2.N.) luego los rectangulos RF. FN. con el quadrado MP. contienen otra vez a los mesmos quadrados NG.HD. luego todo el quadrado AD. (que se cōpone de NM. MR. RF. FN. y HZ.) con el quadrado MP. contiene dos vezes a los quadrados NG.HD. luego estos son la mitad de aquellos, y aquellos duplos de estos, &c.

4 Los rectangulos AS.SD. son iguales: luego si les añadimos el espacio comun SR. seràn iguales los rectangulos SD. SR. a SA. SR. luego porque SD. SR. es el quadrado HD. y SA.SR. es el quadrado FE. y rectangulo EL. serà el quadrado HD. de la parte mayor igual al quadrado FE. de la parte menor, y al rectangulo EL. de toda la linea ER. y de la diferencia EN.

PRO-

PROPOSICION III.

Diuision de la recta en dos partes iguales, y en dos desiguales.

1 *EL quadrado de la mitad de la linea es igual al rectangulo de las partes desiguales con el quadrado del segmento intermedio.*

2 *Los quadrados de las partes desiguales exceden a los de las iguales en dos quadrados del segmento intermedio.*

3 *El quadrado de toda es igual a dos rectangulos de las partes desiguales mas dos quadrados de las iguales, mas dos quadrados del segmento intermedio.*

4 *Y es quadruplo del quadrado de la mitad.*

Demonstracion. fig.3.

1 AE.EB. son partes iguales. y AN.NB. desiguales: su rectangulo FN. y SX. es quadrado del segmento intermedio EN: y EO. quadrado de la mitad de AB. que es EB. luego porque FE. es igual a NO. añadido el comun XN. serà XB. igual a FE. NX. esto es, a FN. SX. luego el quadrado XB. de la mitad de la linea EB. es igual al rectāgulo de las partes desiguales AS. y al quadrado de la seccion intermedia SX. &c.

2 El

2 El quadrado de la parte mayor AN. es AZ. el de la parte menor NB. es NG. dos quadrados de la feccion intermedia EN. fon SX. XZ. El rectangulo pues QR. es igual a EG. luego añadido el comun QE. feràn QE. EG. tanto como EC. que es dos quadrados de las partes iguales ET. TR. luego porque los quadrados defiguales AZ. NG. exceden a QE. EG. en dos quadrados SX. XZ. excederàn tābien AZ. NG. a los dos quadrados iguales ET. TR. en dos quadrados de la feccion intermedia SX. XZ. &c.

3 Porque FE. es igual a NO. añadido el comun HN. ferà el rectangulo FN. de las partes defiguales tanto como HN. NO. y afsimefmo OL. LP. feràn tanto como otro rectangulo FN. luego añadidos los dos quadrados iguales ET. TR. y los dos de la feccion intermedia SX. XZ. ferà el quadrado todo AD. igual a todos, porque fe compone dellos.

4 Porque el quadrado AD. es igual a los quatro quadrados iguales XA. XB. XD. XC. luego es quadruplo de cada vno.

PRO-

PROPOSICION IIII.

Potencia de los lados de los triangulos.

1 *LA base opuesta al angulo recto, puede tanto como los dos lados.*

2 *La opuesta al obtuso, puede mas dos rectangulos de vn lado, y su continuacion hasta el perpendiculo.*

3 *La opuesta al agudo puede menos dos rectangulos de vn lado, y de su segmento entre el perpendiculo, y dicho angulo agudo.*

4 *Si vna base puede tanto como los lados, su angulo opuesto es recto.*

Demonstracion. fig.4.

1 EL triangulo ABC. tiene el angulo ABC. recto: digo, que AC. puede tanto como AB. BC. esto es, que el quadrado de AC. es igual a los quadrados de AB. BC. Continuese AD. igual a BC. y DH. sea quadrado de BD. y tomando FH. GE. iguales a BC. AD. feràn AB. CH. FG. ED. iguales (4.P.) y por fer los quatro angulos rectos B. H. G. D. del quadrado DH. (14.P.) feràn los quatro triangulos *a. c. e. g.* iguales (4.l.1.) y tambien *b. b. d. f.* (7.l.1.) luego los quatro lados AC. CF. FE. EA. fon iguales, y los angu-

los

los A.C.F.E.rectos;y asi AF.es quadrado de AC.(14.P.) y por ser iguales BR. DA. y ser AR.comun,serà DR.igual a BA. y DL. quadrado de AB.ò RD.

Demonstracion 1.El quadrado DH. excede a los quadrados RC.DL. en los quatro triangulos iguales *a.b.c.d.* el mesmo quadrado DH. excede al quadrado AF. en los quatro triangulos iguales *a.c.e.g.* luego el quadrado AF.es igual a los quadrados RC. DL. (3.P.)

Demonstracion 2.El quadrado AF. es igual a los quatro triangulos *b.d.f.h.*y al quadrado ML. los quadrados RC.DL. son tambien iguales a los quatro triangulos *e.f.g.h*,y al quadrado ML. luego el quadrado AF. es igual a los dos RC.DL.(3.P.)

Demonstracion 3. Los triangulos *e.g.* son iguales *a.b.d.* luego añadido el espacio comun ELOGAE.resultarà de vna parte el quadrado AE.igual a los quadrados RC. DL. de otra parte.(4.P.)

2 El triangulo ARC.tiene el angulo ARC. obtuso,y continuado AR.es CB.perpendicular:luego el quadrado RC.es igual a RB. BC. (1,N.) luego los quadrados AR.RC.son iguales

les a los tres AR.RB.BC.y pues el quadrado AC.es igual a CB. BA. (1.N.) y el quadrado BA.es igual a BR. RA. mas dos rectangulos AR.RB.(1.l.2.) luego sera el quadrado AC. igual a los tres quadrados CB. BR. RA. mas dos rectangulos ARB.luego excede a los tres quadrados CB.BR.RA.(que son los dos CR. RA.)en dos rectangulos ARB.del lado AR.y del segmento RB.

3 ASC.es angulo agudo: y CB. perpendicular.Digo,que el quadrado AC. es menor que los quadrados AS.SC.en dos rectangulos ASB.

El quadrado AC.es igual al quadrado BC. BA.(1.N.)el quadrado SC.es igual a CB.BS. (1.N.) y el quadrado AS.es igual a SB. BA. mas dos rectangulos ABS.(1.l.2.) luego los quadrados AS.SC.son iguales a BA.BC.mas dos quadrados BS.mas dos rectangulos ABS. luego exceden a BA. BC. que son AC. en dos quadrados BS.y dos rectangulos ABS.y porq̃ vn rectangulo ABS.con vn quadrado BS.es tãto como vn rectãgulo ASB.(1.l.2.)seràn dos rectangulos ABS.con dos quadrados BS.tanto como dos rectangulos ASB. que es el excesso.

4 Porque si el angulo fuera obtuso, la base pudiera mas que los lados (2.N.) y si el angulo fuera agudo, pudiera menos que los lados (3.N.) luego si puede tanto como los lados, serà el angulo recto.

LIBRO III.

DEL CIRCVLO.

TRatase en este libro de las propiedades del circulo, menos lo que pertenece a la proporcion, que tiene su lugar en el libro sexto.

Contiene todo el libro siete proposiciones.

PROPOSICION I.

De vn punto fuera del centro.

1 *QVe el punto estè dentro, ò fuera del circulo, las rectas que de alli se tiraren a la circunferencia concaua, son desiguales; y la que passa por el centro. es mayor; y la que mas se aparta, menor.*

2 *Solas dos lineas opuestas pueden ser iguales; y si de vn punto salen tres iguales a la circunferencia, serà el centro.*

3 *Si el punto està fuera del circulo, y las lineas se tiraren a la circunferencia conuexa, la que passa por el centro, es menor; y la que mas se aparta, mayor; y solas dos opuestas pueden ser iguales.*

Demonstracion. fig.1.

1 DEl punto A. dentro, ò fuera del circulo salen AOG. AF. AE. &c. juntense OF. OE. porque OF. OG. son iguales radios, seràn AOF. AOG. iguales (4. P.) luego porque AOF. es mayor que qualquiera AF. (5.l.1.) serà AOG. mayor que qualquiera AF. y tambien porque AOF. y AOE. son iguales: y el angulo AOF. es mayor que AOE. serà AF. mayor que AE. (6.l.1.) luego la que mas se aparta, es menor.

2 Si

2 Si los arcos GF. GH. son iguales, son iguales angulos FOG. HOG. luego tambien AOF. AOH. (1.l.1.) y pues los lados HOA. iguales a FOA. comprehenden iguales angulos, todo serà igual: AF. y AH. (4.l.1.) luego las que igualmente se apartan, son iguales: y no puede auer otra igual, porque solos dos puntos F.H. pueden igualmente distar de G. luego si de vn punto salen tres lineas iguales a la circunferencia, no estarà el punto fuera del centro, y serà el mesmo.

3 El punto A. està fuera del circulo, y pues ONA. son mayores que OLA. (5.l.1.) quitando los iguales radios ON. OL. quedarà NA. mayor que LA. (4.P.) y porque POA. son iguales a NOA. y el angulo POA. mayor que NOA. serà PA. mayor que NA. (6.l.1.) y por ser el angulo NOA. igual a MOA. y los lados iguales seràn AN. AM. iguales (4. l. 1.) luego la que mas se aparta es mayor, y la que igualmente se aparta, es igual, &c. y la menor es AL. que continuada passa por el centro.

PRO-

PROPOSICION II.

De las cuerdas, arcos, y segmentos.

1 *TOda la cuerda cae dentro del circulo.*

2 *El diametro perpendicular a la cuerda parte igualmente cuerda, arco, y segmento, y al contrario.*

3 *Los diametros solos se pueden partir igualmente,*

4 *Las cuerdas que igualmente distan del centro, son iguales, y cortan iguales arcos, y segmentos, y al contrario.*

5 *La que menos dista del centro, es mayor, y corta mayor arco, y segmento; y al contrario.*

6 *Lo mesmo que en vn circulo, es en circulos iguales.*

Demonstracion. fig. 2.

1 EN la cuerda MN. tomando qualquier punto Z. sera el angulo externo BZM. mayor ~~mente~~ que, el recto BOZ. (3.l.1.) luego mayor que el agudo BMO. luego el radio BM ò BE. es mayor que el lado BZ. (5.l.1.) luego el punto Z. cae dentro del circulo.

2 Tirados los radios iguales BM. BN. serà

serà MBN. triangulo isosceles: luego la perpendicular BOS. parte igualmente la base, ò cuerda MN. en O. y tambien el angulo MBN. (5.l.1.) luego doblando SBN. sobre SBM. se ajustarà: y serà el arco SN. igual a SM. y el espacio SON. a SOM. luego la cuerda MN. y el arco MSN. y el segmento MSNM. quedan igualmente partidos. Al contrario, si MO. ON. son iguales, por ser MBN. isosceles, serà BO. perpendicular: y los angulos MBS. SBN. iguales (5.l.1.) luego tambien los arcos, que son sus medidas MS. SN. (10.P.) y si los arcos son iguales, tambien los angulos, y assi BO. serà perpendicular (5.l.1.)

3 Los diametros EH. CS. se parten en radios iguales en el centro: y fuera del centro no se pueden partir igualmente dos rectas; porq̃ si PF. MN. se partiessen igualmẽte en O. fueran perpendiculares al radio BOS. (2.N.) que es impossible, por ser la perpendicular OM. vnica (11.P.)

4 Si EF. CR. distan igualmente del centro, son los perpendiculos BD. BG. iguales, y tambien los radios BC. BE. y los angulos D. G. y los otros C. E. de vna especie agudos (3.

(3.l.1.) luego todo el triãgulo BDC. es igual a BGE. (4.l.1.) CD. a GE. y asimesmo DR. a GF. y CR. a FE. y los arcos CHR. ESF. &c. Al contrario, si CR. EF. son iguales, se ajustarà el triangulo CBR. con EBF. (4.l.1.) y el perpendiculo BD. con BG. luego distan igualmente: y tambien son los arcos, y segmentos CHR. ESF. iguales, &c.

5 Si la distancia BO. es menor que BG. cae MN. mas proxima al centro que EF. luego porque el angulo MBN. es mayor que EBF. serà MN. mayor (6.l.1.) y el arco MSN. mayor que ESF. y al contrario, si MN. es mayor, es mayor el angulo MBN. que EBF. (6.l.1.) luego tambien el arco MSN. es mayor que ESF. y MN. cae superior a EF. y mas proxima al centro.

6 Porque los circulos iguales se pueden ajustar, y formar vn mismo circulo.

PRO-

PROPOSICION III.

De los angulos en el circulo.

1 *El angulo en la circunferencia es la mitad del angulo en el centro, y del arco en que insiste, y serà igual al del centro, si tiene el arco duplo.*

2 *Los angulos de vno, ò iguales segmentos son iguales; y si son iguales, cortan iguales arcos de circulos iguales, ò semejantes de desiguales.*

3 *Si vn quadrilatero està en el circulo, sus angulos opuestos son iguales a dos rectos; y al contrario.*

4 *El angulo en el semicirculo es recto: en el segmento mayor, es agudo: en el menor, obtuso.*

Demonstracion. fig. 3.

1 Sobre el arco FG. se forma en la circunferencia el angulo FCG. y en el centro GOF. por ser iguales OC. OF. son iguales angulos OCF. OFC. (5.l.1.) luego porque el externo FOG. es igual a los dos (3.l.1.) serà duplo de cada vno, y FCG. es mitad de FOG. y del arco FG. su medida. Tambien ECG. serà mitad del arco EFG. luego quitando GCF. mitad de GF. queda FCE. mitad de EF., ò añadiendo a ECG. el angulo

I GCB.

G CB.mitad de GB.resultarà ECB. mitad de E GB.&c.(4.P.)

2 En el ſegmento FCB.eſtàn los angulos FEB.FCB.luego porque cada vno es la mitad del arco en que inſiſte FGB.(1.N.) ſeràn iguales (3.P.) y ſi ſon iguales, ſeràn la mitad de iguales angulos en el centro (1.N.) luego ſi los circulos ſon iguales, ſeràn los arcos en que los angulos inſiſten iguales (10.P.) y ſi los circulos ſon deſiguales, ſeràn los arcos ſemejantes, por ſer de iguales grados (9.P.

3 En el quadrilatero ECBF. el angulo ECB.es la mitad del arco opueſto EGB. y el angulo EFB. es la mitad del arco opueſto ECB. (1.N.) luego porque los dos arcos ECB.EGB.ſon todo el circulo, los dos angulos ECB.EFB.ſeràn la mitad del circulo, que es tanto como dos rectos (11.P.) Aſsimeſmo los angulos CBF. CEF. ſon tanto como dos rectos. Al contrario, ſi los angulos ECB.EFB. ſon tanto como dos rectos el circulo, que paſſarà por E.C.B.paſſarà por F.

4 El angulo ECB.es la mitad del ſemicirculo opueſto EGB.(1.N.) luego es angulo recto (11.P.) Item el angulo FBC. que eſtà en

el ſegmento mayor CBF.es la mitad del arco opueſto FEC. (1.N.) luego porque el arco FEC.es menos que el ſemicirculo, ſerà el angulo FBC.menos que la mitad del ſemicirculo; luego es agudo menor que recto (11.P.) Item porque FEC.eſta en el ſegmento menor ſerà la mitad del arco opueſto FGC.(1.N.) luego es mas que la mitad del ſemicirculo; luego es obtuſo.(11.P.)

PROPOSICION IIII.

De los circulos concentricos.

1 *DIſtan igualmente; y al contrario.*

2 *El angulo del centro corta arcos ſemejãtes; y el de la circunferẽcia, deſemejãtes.*

3 *Si vna recta les corta fuera del centro, corta ſegmentos deſemejantes.*

4 *Pero los interſegmentos de qualquiera recta ſon iguales.*

Demonſtracion. fig.4.

1 POrque OB. ON. OF. OG. ſon iguales radios: luego quitados radios iguales OC. OM. OE. OH. quedaràn iguales diſtancias CB.MN.EF.HG.y al contrario, ſi el punto O.es centro del circulo mayor, y las diſtancias CB. MN. EF.HG.ſon

iguales, quitadas de los radios iguales OB. ON. OF. OG. quedaràn iguales OC. OM. OE. OH. luego O. es tambien centro del circulo menor (1. l. 3.)

2 El angulo GOS. corta los arcos HEP. GFS. que son medida de vn mesmo angulo GOS. luego son semejantes (10. P.) pero el angulo NGS. de la circunferencia corta los arcos MR. NS. y porque el angulo MOR. es mayor que NOS. los arcos MR. NS. sus medidas son desemejantes (10. P.)

3 La recta GS. corta los dos circulos fuera del centro: luego porque los angulos GOS. LOR. son desiguales, seràn los arcos GES. LER. desemejantes, y GFS. de mas grados que LER. (10 P.)

4 Si el radio OE. es perpendicular a GS. seràn partes iguales GZ. ZS. y tambien LZ. ZR. (2. l. 3.) luego quitando iguales ZL. ZR. quedaràn iguales intersegmentos GL. RS. y añadiendoles LR. resultaràn iguales intersegmentos GR. LS. (Q. P.) Assimesmo BE. CF. seràn iguales, &c. Lo mismo es de la recta que corta dos circulos eccentricos sies perpendicular al diametro que passa por los dos centros.

PRO-

PROPOSICION V.

De los circulos que se cortan.

1 NO tienen vn mesmo centro.

2 *La interseccion es en solos dos puntos.*

3 *La recta que junta los centros es perpendicular a la cuerda comun, y parte igualmente la cuerda, segmentos, y arcos, y al contrario.*

4 *Todas las rectas de la interseccion cortan arcos semejantes en vno, y otro circulo.*

Demonstracion. fig. 5.

1 SI tuuiera vn mismo centro, fueran equidistantes, y no se cortaran (4. l. 3.) luego si se cortan, no tienen vn mesmo centro.

2 Los circulos *nqh. ngh.* se cortan en *h. n.* sus centros son O. C. luego porque el punto O. està fuera del centro C. solo se podràn tirar dos lineas opuestas iguales a la circunferencia conuexa *ngh.* que son O*n*. O*h*. (1. l. 3.) luego solos dos puntos *n. h.* pueden ser comunes, y assi la interseccion es en solos dos puntos.

3 La cuerda comun es *nh.* la q̃ junta los centros es OC. y doblado el triangulo O*n*C. se ajustarà con O*h*C. por ser O*n*. *n*C. GO. iguales

les a O*b*.*b*C.CO.(4.l.1.)luego se ajustarà *yn.* con *yh.* los arcos tambien *qn.qh.* y *gn. gh.* y los angulos *g yn. g yh.* luego OC. es perpendicular a *nh.* (11.P.) y todo lo parte igualmente (2.l.3.) Al contrario, si O*y.* es perpendicular a la cuerda *nh.* la parte igualmente, y continuada passarà O*y*C. por el centro C. (2.l.3.) y si O*y*. parte igualmente a *nh.* es su perpendicular, y passa por C.(2.l.3.)

4 Si de la interseccion *h.* se tiran lineas *hn. hp. hm.* porque el punto *h.* està en las dos circunferencias, serà el angulo *nhp.* la mitad del arco *dn.* y la mitad de *pn.* luego *dn. pn.* son arcos semejantes (3.l.3.) y assi mesmo *gd. mp.* con que si *nd. dg.* son iguales, tambien seràn iguales *np. pm.* &c.

PROPOSION VI.

De los circulos que se tocan.

1 *NO tienen vn mesmo centro.*

2 *La recta que junta los centros passa por el contacto, que es en vn solo punto.*

3 *La que passa por el contacto, y vn centro, passa por todos los centros.*

4 *La que por el contacto corta vn circulo, corta de todos arcos, y segmentos semejantes.*

De-

Demonstracion. fig. 6.

1 SI tuuieran vn mesmo centro, fueran equidistantes, y no se tocaran (4.l.3.) luego si se tocan, no tienen vn centro.

2 Sean los circulos ANG. AS*g*. sus centros E.C. y CE. les junta; digo, que el contacto està en A. Tomese en la circunferencia ANG. qualquier punto R. serà CR. mayor que CA.(1.l.3.) luego mayor que CS. que es radio igual a CA. luego el punto R. no es comun a los circulos; y assi no es el contacto: lo mismo es de qualquiera otro punto que no sea A. luego solo A. es el contacto. Si los circulos son APX. AS*g*. tomando en el interior qualquier punto P. porque C. està fuera del centro B. serà CP. menor que CA. y CS (1.l.3.) luego P. no es punto comun: luego solo puede ser A. el contacto, y punto comun.

3 La linea CBE. que và por los centros C.B.E. passa por el contacto A. (2.N.) luego la linea AE. que passa por el contacto, y centro E. continuada, passarà por los centros BC. porque es la misma linea CBAE.

4 La recta FAZ*f*. corta todos los circulos por el contacto A. Los angulos FAG. *f*A*g*.

fAg. verticales son iguales (2. l. 1.) luego los arcos FG. XZ. *fg*. (que son duplos de los angulos en la circunferencia) seràn semejantes (3. l. 3.) luego quitados cada vno de su semicirculo, quedaràn semejantes los arcos, y segmẽtos ANF. APZ. AS*f*. y assimesmo ARGF. AXZ. A*ngf*. &c.

PROPOSICION VII.

De la tangente.

1 *ES la perpendicular al estremo del radio, y en aquel solo punto està el contacto.*

2 *La recta del centro al contacto es perpendicular a la tangente; y la perpendicular del centro passa por el contacto; y la del contacto passa por el centro.*

3 *Si muchos circulos se tocan en vn punto, la que en èl toca a vn circulo, les toca a todos.*

4 *Qualquiera otra recta que passa por el contacto, corta al circulo, y haze con la tangente angulos iguales a los que caben en los segmentos alternos.*

Demenstracion. fig. 7.

1 SEa DAL. perpendicular al estremo del radio E A. tomando en ella qualquier punto L. porque EAL. es angulo recto, serà ELA. menor (3. l. 1.) luego el lado EL. opuesto al mayor angulo, serà mayor que el radio EA. ò EN. (5. l. 1.) luego qualquier punto L. que no sea A. cae fuera del circulo: luego solo el punto A. es comun a la recta DAL. y al circulo, y assi DA. es tangente en aquel solo punto, &c.

2 Siendo la tangente DA. perpendicular al radio EA. luego la recta EA. del centro E. al contacto A. es perpendicular a DA. y si AG. es su perpendicular, passarà por E. y si BE. es su perpendicular, passarà por A. porque siempre es la mesma AE. ò EA.

3 Si los tres circulos se tocan en A. la recta EABC. passa por todos los centros (6. l. 3.) luego la recta DA. que toca al circulo ANF. y es perpendicular al estremo del radio EA. (1. N.) serà tãbien perpendicular al estremo de los radios CA. BA. que son la mesma recta CBAE. luego toca todos los circulos en A. (1. N)

4 Qualquiera otra AF. que no sea la tangente LA. haze el angulo FAE. menor que el recto LAE. luego considerando EHN. perpendicular, serà el angulo recto EHA. mayor que EAH. luego el lado EA. ò EN. es mayor que

que EH.(5.l.1.) luego el punto H.està dentro del circulo, y afsi AF. le corta, y juntando FG. por fer el angulo del femicirculo AFG. recto (3.l.3.) harà GAF. con FGA. vn recto (3.l.1.) y pues GAF. con FAL. haze tambien vn recto LAG. feràn AGF. FAL. iguales: luego porque todos los angulos del fegmēto ARF. fon iguales a FGA. (3.l.3.) todos fon iguales à FAL. y tomando en el fegmento ANF. qualquier punto N. el angulo AGF. con FNA. ferà tanto como dos rectos, por fer ANFG. quadrilatero (3.l.3.) Tambien LAF. FAD. fon tanto como dos rectos (1.l.1.) luego quitando iguales AGF. FAL. quedaràn iguales DAF. FNA. luego la recta AF. haze con la tangente LAD. angulos iguales a los que caben en los fegmentos alternos opueftos, efto es, el angulo LAF. igual al que cabe en el fegmento ARF. y el angulo FAD. al del fegmento ANF. &c.

Propoficion 35.36.37. de Euclides.

Son de la proporcion de las lineas del circulo, y tienen fu lugar en el fin del lib. 6. prop. 6.

LIBRO IV. DE EVCLIDES.

¶ *Todas fus propoficiones fon problemas, que tienen fu lugar en la Geometria practica.*

LI-

LIBRO V.

DE LA RAZON, Y PROPORCION en comun.

La razon, y proporcion, y las cofas concernientes a la inteligencia de efte libro fe explicaron en los Proemiales 18.19.20.21.

Todas las propoficiones de efte libro fon puros axiomas, que folo necefsitan de explicacion, como lo aduierte Pedro Ramo en fus Efcuelas Mathematicas, y el P. Andres Tacquet en fu Geometria. Reducenfe todas a cinco.

Prop. 1. *De las razones entre fi.*

Prop. 2. *De las cantidades iguales.*

Prop. 3. *De las cantidades defiguales.*

Prop. 4. *De los terminos proporcionales.*

Prop. 5. *Del todo, y fus partes.*

PROPOSICION I.

De las razones entre si.

1 *Las iguales a otra, son iguales entre si.*

2 *Las duplicadas, ò triplicadas a otra, ò a otras dos iguales, son iguales entre si; y al contrario.*

3 *Si vna razon es duplicada, ò triplicada a otras dos, son estas iguales; y al contrario.*

4 *Las compuestas de iguales, son iguales.*

Explicacion.

1 SEan las tres razones B a C. y D a E. y F a G.

B 2. a C. 1. D. 6. a E 3.
F. 8 a G. 4.

Si B a C. es como F a G. y D a E. es como F a G. luego B a C. es como D a E. porque si F a G. es dupla; serà B a C. dupla, y D a E. dupla: luego la razon de B a C. y D a E. son semejantes duplas, &c. Esto es general en toda especie de cantidad, substituyendo en lugar de las letras, ò numeros, ò lineas, ò superficies, ò cuerpos.

2 Sean tres continuos proporcionales B. C. D. y otros tres en la mesma razon E F G.

B. 9. C. 3. D. 1.
E. 18. F. 6. G. 2.

La razon de B a D. es duplicada de C a D. (21. P.) la de E a G. se supone tābien duplicada de C a D. luego la razon de B a D. es la mesma que de E a G. como se vê en los numeros. Item, la razon de B a D. es duplicada de C a D. la de E a G. es duplicada de F a G. la de C a D. es como F a G. luego la de B a D. es como E a G. Al contrario, si B a D. es como E a G. y la razon de B a D. es duplicada de C a D. luego la de E a G. tābien serà duplicada de C a D. Item, si B a D. es como E a G. y B a D. es razō duplicada de C a D. y E a G. es duplicada de F a G. luego C a D. serà tambien como F a G.

3 La razon de B a D. es duplicada de E a F. la mesma de B a D. es tambien duplicada de F a G. luego E a F. es como F a G. &c. Al contrario, si E a F. es como F a G. y la razon de B a D, es duplicada de E a F. luego la mesma B a D. serà tambien duplicada de F a G.

4 La razon de B a D. es compuesta de B a C. y C a D. (21. P.) la de E a G. es compuesta de E a F. y F a G. siendo B a C. como E a F. y C a D. como F a G. luego B a D. es como E a G. llamese *ex æquo, vel æqualitate* por la igualdad de composicion. En fin vna razon se compara a otra, como vna cantidad a otra.

PRO-

PROPOSICION II.

De las cantidades iguales.

1 *LAs cantidades iguales tienẽ vna mesma razon con otra, ò con otras iguales.*

2 *Si dos cantidades tienen vna mesma razon con otra, ò con otras iguales, son ellas iguales.*

3 *Vna cantidad tiene la mesma razon a dos otras iguales.*

4 *Si vna, ò muchas cantidades iguales tienen la mesma razon a otras, son estas iguales.*

Explicacion.

1 SEan iguales cantidades B.C. y tambien D.E.

B.3. C.3. D.9. E.9.

Si B. y C. son iguales, la mesma razon tendrà B a D. que C a D. y si D. y E. son iguales, serà B a D. como C a E.

2 Si B a D. es como C a D. luego B. y C. son iguales. Item, si B a D. es como C a E. siendo D. y E. iguales: luego B. y C. son iguales.

3 Si D. E. son iguales, serà B a D. como B a E. porque D. y E. son como vna mesma.

4 Si B a D. es como B a E. luego D. y E. son iguales; y si B. C. son iguales, y B a D. es como C a E. seràn D. y E. tambien iguales.

PRO-

PROPOSICION III.

De las cantidades desiguales.

1 *LA mayor tiene mayor razon a otra tercera; y la que tiene mayor razon, es mayor.*

2 *Si otra se les compara, tiene mayor razon a la menor; y a la que tiene mayor razon, es menor.*

3 *Si dos tienen vna razon a dos desiguales, son ellas tambien desiguales; y al contrario.*

4 *El mayor antecedente tiene mayor consequente, si la razon es la mesma; y al contrario.*

Explicacion.

1 SEan B.C.D.E. quatro cantidades;

B.8. C.6. D.4. E.3.

Si B. es mayor que C. la razon de B a D. serà mayor que la de C a D. y si B a D. tiene mayor razon que C a D. es B. mayor que C.

2 Si B. es mayor que C. la razõ de D a C. es mayor que de D a B. y si la razon es mayor, es C. menor que B.

3 Si B. y C. tienen vna misma razon con D. y E. luego si D. y E. son desiguales, tambien lo seràn B. y C. y si B. y C. lo son, tãbien D. y E.

4 Si B a D. es como C a E. y B. es mayor que C. tambien D. serà mayor que E. y si D. es ma-

mayor que E.tambien B.es mayor que C.

PROPOSICION IV.

De los terminos proporcionales.

1 *SI quatro terminos son proporcionales directos, seràn tambien proporcionales alternando, inuertiendo, componiendo, diuidiendo, y conuertiendo.*

2 *La suma de los antecedentes a la suma de los consequentes, es como vn antecedente a su consequente.*

3 *Si los terminos compuestos son proporcionales, tambien lo seràn diuididos; y al contrario.*

4 *Si muchos terminos son continuos proporcionales, sus diferencias guardan la mesma propor cion, y al contrario.*

Explicacion.

1 SEā los quatro terminos B.C. D.E.

B.6. C.3. D.4. E.2.

Directamente: como B a C. asi D a E: luego
Alternando: como B a D: asi C a E: luego
Inuertiendo: como C. a B. asi E a D: luego
Cōponiēdo como B+C a C. asi D.+E a E. luego.
Diuiēdo: como B—C a C. asi D—E a E. luego
Conuertiendo: como C a B+C. asi E a D+E. y como C a B—C. asi E a D—E.

2 Co-

2 Como B+D. suma de los antecedentes a C+E. suma de los consequentes, asi B a C. ò asi D a E.

3 Si B+C a C. es como D+E a E. luego diuididos B a C. serà como D a E. y al contrario si B a C. es como D a E. compuestos seràn B+C a C. como D+E a E.

4 Sean continuos B. C. D. E. y las diferencias F. G. H. digo que tienen la mesma razon.

B.27. C.18. D.12. E.8.

F.9. G.6. H.4.

Porq̄ son proporcionales B a C. como C a D. luego diuidiendo seràn B—C a C. como C—D a D. (1.N.) y pues B—C. es lo mesmo que F. y C—D. q̄ G. seràn F. a C. como G a D. luego alternando F a G. como C a D. (1.N.) asimesmo serà G a H. como D a E. &c. luego F. G. H. son diferencias que tienen la mesma razon continua.

Al contrario si F. a G. es como C a D. luego alternando F. a C. como G a D. y componiendo F+C a C. como G+D a D. esto es B a C. como C a D. luego B. C. D. son continuos proporcionales, &c.

L PRO-

PROPOSICION V.

Del todo, y sus partes.

1 C*Omo vn todo a otro, assi la parte a la parte semejante del otro.*

2 *Como la parte de vn todo a la parte semejante de otro: assi vn todo a otro.*

3 *Si vna parte a otra semejante fuere, como el todo al todo, serà tambien el residuo al residuo, como el todo al todo, ò como la parte a la parte semejante.*

4 *Si el residuo al residuo es como la parte a la parte; el todo al todo tendrà la mesma razon: y al contrario.*

Explicacion.

1 Sea el vn todo B + C. y el otro D + E. B 8 + C.4. D.2. + E.1. Como B + C a D + E. assi B a D.

2 Como B a D. assi B + C a D + E.

3 Si B a D. es como B + C. a D + E. tambien C a E. serà como B a D. ò B + C a D + E.

4 Si B a D. es como C a E. luego alternando B a C. como D. a E. y componiendo B + C a D + E. assi B a D. como se vê en los numeros.

LIBRO VI.

DE LA RAZON, Y PROPORCION en particular.

ESte libro se dize de *Oro* con mucha razon, por la nobleza, y fecundidad de sus proposiciones: pues apenas se hallarà en toda la Mathematica problema, ò theorema ilustre, que no tenga dependencia de este libro: y assi deue el estudioso aplicar su principal industria, y trabajo en la perfecta inteligencia, y entera comprehension de sus theoremas, que todos se reducen a seis.

Prop.1. *De los triangulos, y paralelogramos de igual base, altura, ò angulo.*

Prop.2. *De los triangulos equiangulos.*

Prop.3. *De la seccion de los angulos.*

Prop.4. *De las figuras semejantes.*

Prop.5. *De los circulos, y sus partes.*

Prop.6. *De las rectas del circulo.*

PROPOSICION I.

De los triangulos, y paralelogramos de igual base, altura, ò angulo.

1 *SI tienen igual altura, tienen la razon que las bases, y al contrario.*

2 *Si tienen igual angulo, tienen la razon compuesta de los lados.*

3 *Si los lados del angulo igual son reciprocos, seràn iguales figuras, y al contrario.*

4 *Si tres, ò quatro rectas son proporcionales el triangulo, ò paralelogramo de la media, ò medias es igual al de las estremas con igual angulo.*

Demonstracion. fig. 1.

1 LOs triangulos BEN. NED. tienen vna mesma altura, y assi estàn, ò pueden estar entre dos paralelas BD. EH. luego si las bases fueran iguales, fueran ellos iguales (8.l.1.) si BN. es dupla de ND. es el triangulo BEN. duplo de NED. si tripla triplo, &c. luego tantas vezes contiene vn triangulo a otro, como vna base a otra: luego el triangulo BEN. a NED. tiene la mesma razon, que la base BN. a ND. (19.P.) el mesmo argumento se haze de las alturas, quando las bases son iguales (8.l.1.) y lo mesmo es de los paralelogramos, que son duplos de los triangulos. (8.l.1.)

2 Los triangulos *b.* y *g.* tienen iguales angulos BNE. DNC. juntese DE. y el triangulo *b.* a *g.* tendra la razon compuesta de *b.* a *d.* y *d.* a *g.* (21.P.) y pues *b.* a *d.* es como BN. a ND. y *d.* a *g.* es como EN. a NC. (1.N.) luego *b.* a *g.* tiene la razon compuesta de los lados, de BN a ND. y de EN. a NC. &c.

3 Si los lados son reciprocos DN. a NB. como EN. a NC. seràn *b.* y *g.* iguales: porque *d.* a *b.* es como DN. a NB. y el mesmo *d.* a *g.* es como EN. a NC. (1.N.) luego porque DN. a NB. se supone como EN a NC. serà *d.* a *b.* como *d.* a *g.* (1.l.5.) luego *b.* y *g.* son iguales (2.l.5.) Si *b.* *g.* son iguales: serà *d* a *b.* como *d* a *g* (2.l.5.) luego porque *d* a *b* es como DN. a NB. y *d* a *g.* es como EN a NC. (1.N.) seràn lados reciprocos DN. a NB. como EN a NC.

4 Si son quatro proporcionales DN. a NB. como EN. a NC. seràn *b.* y *g.* iguales (3.N.) si las proporcionales son tres DN. a NB. como NB a NC. tomando EN. igual a BN. seràn como quatro: DN a NB. como EN a NC. luego *b.* y *g.* son iguales (3.N.) lo mesmo es de los

los paralelogramos, que son duplos de los triangulos (8.l.1.)

PROPOSICION II.

De los triangulos equiangulos.

1 *LA paralela a la base, forma triangulos equiangulos con lados, bases, è intersegmentos proporcionales, y al contrario.*

2 *Si los tres lados de vno son proporcionales a los tres de otro, son equiangulos, y al contrario.*

3 *Si tienen vn angulo igual, y sus lados proporcionales; ò los lados del otro proporcionales, y el tercero de vna especie, son equiangulos.*

4 *Los equiangulos tienen los lados proporcionales; y si son paralelos, tendràn las bases paralelas, ò en vna recta: y al contrario.*

Demonstracion. fig. 2.

1 EN el triangulo BNC. continuados los lados a vna, y otra parte, son ED.FG. paralelas a la base BC. los angulos alternos CBN.NDE. son iguales, y tambien BCN.NED (2.l.1.) y los opuestos N. verticales (1.l.1.) luego los triangulos BCN. NDE. son equiangulos, y assimesmo DEN. NFG.BCN. Luego si se juntan las rectas BE. CD. seràn los triangulos BCE.BCD. iguales, so-

sobre vna base BC. y entre paralelas BC. ED. (8.l.1.) y quitando el comun BNC. quedaràn iguales BNE.CND. y por tener iguales angulos BNE. CND. seràn los lados reciprocos (1.l.6.) luego FN a ND. es como NC. a NB. assimesmo se demostrarà que NE a ND. es como NG. a NF. luego NG a NF. es como NC. a NB. (1.l.5.) luego el residuo CG a BF. es como NC a NB. (5.l.5.) y considerando BH. paralela a NG. serà NF a FG. como BN a HG. que es BC (7.l.1.) luego lados, intersegmentos, y bases, todo es proporcional.

2 FNG.GMO. tienen los lados proporcionales: tomando FB. igual a GM. sea BH. paralela a NG. luego FB a BH. es como FN a NG. (1.N.) y pues GM a MO. se supone como FN. a NG. serà FB a BH. como GM a MO. (1.l.5.) luego porque FB. se tomò igual a GM. serà BH. igual a MO. (2.l.5.) tambien FB a FH. es como FN a FG. ò GM a GO. luego FH. y GO. son iguales (2.l.5.) luego el triangulo GMO. es el mesmo FBH. (4.l.1.) y pues FBH. es equiangulo a FNG. por las paralelas BH.NG. (1.N.) serà GMO. equiangulo a FNG. y al contrario si

GMO.

GMO. es equiangulo con FNG. ajustando el angulo MGO. sobre F. caerà MO. sobre BH. serà paralela a NG. luego todo serà proporcional lados, y base, &c. (1. N.)

3 Si el angulo MGO. es igual a F. y los lados MG a MO. como NF. a NG. y el angulo O. de vna especie con NGF. tomese FB. igual a GM. y siendo BH. paralela a NG. serà FB a BH. como FN a NG. (1. N.) y como GM a MO. (1. l. 5.) y pues FB. se tomò igual a GM. serà BH. igual a MO. (2. l. 5.) luego porque FB. BH. son iguales a GM. MO. y el angulo MGO. igual a F. y O. de vna especie con FHB. que es FGN. serà todo el triangulo GMO. igual a FBH. (4. l. 1.) luego GMO. que es FBH. es equiangulo a FNG. y los lados, y bases proporcionales (1. N.)

4 Si GMO. BNC. son equiangulos son los lados, y bases proporcionales (2. N.) y si MG. NF. son paralelas, y MO. NG. continuãdo la base OG. serà el angulo MGO. igual a F. (2. l. 1.) y pues MGO. se supone igual a NBC. serà NBC. igual a F. luego BC. y FGO. son paralelas (2. l. 1.) y en los triangulos GMO. FNG. seràn FG. GO. vna recta: y al contrario

si las bases BC. y FGO. son paralelas, a vna recta se demostraràn los angulos G. B. F. iguales, y los triangulos equiangulos, &c.

PROPOSICION III.

De la seccion de los angulos.

1 *La recta que parte el angulo igualmente, parte la base con proporcion a los lados, y al contrario.*

2 *La recta que haze con vn lado vn angulo igual al opuesto, forma vn triangulo semejante al todo: y el lado es medio proporcional entre la base, y segmento con termino: y al contrario.*

3 *La perpendicular del angulo recto haze dos triangulos semejantes al todo: es media entre los segmentos: y cada lado es medio entre la base, y segmento con termino.*

4 *Los perpendiculos de dos angulos hazen con el otro dos triangulos semejantes, y segmentos proporcionales con los lados opuestos.*

5 *Si dos rectas de los angulos parten proporcionalmente los lados, se parten ellas proporcionalmente, y al contrario.*

Demonstracion. fig. 3.

1 EN el triangulo NFG. la recta NH. haze iguales angulos FNH.

 HNG.

HNG. siendo HB. paralela a GN. son los angulos alternos iguales GNH. NHB. (2. l. 1.) luego tambiē son iguales NHB. BNH. (3. P.) luego se oponē a iguales lados BH. BN. (5. l. 1) y pues FH. a HG. es como FB a BN. que es BH. y FB a BH. es como FN. a NG. (2. l. 6.) luego FH. a HG. es como FN a NG. (1. l. 5.) al contrario si FH. a HG. es como FN a NG. serà tambien FH a HG. como FB a BH. y como FB a BN. (2. l. 6.) luego BH. y BN. son iguales (2. l. 5.) luego los angulos HNB. BHN. son iguales (5. l. 1.) y pues BHN. HNG. son alternos iguales (2. l. 1.) seràn FNH. HNG. tambien iguales.

2 Si la recta NH. haze el angulo HNG. igual al opuesto F. porque el angulo NGF. es comun a los dos triangulos FGN. NGH. serà NHG. igual a GNF. (3. l. 1.) luego los triangulos GHN. NGF. son equiangulos: luego tienen los lados proporcionales FG. a GN. como GN a GH. y el lado GN. medio entre FG. GH. &c.

3 Si el angulo *bdc* es recto, y *dr* perpendicular, el angulo *c.* con *b.* harà vn recto (3. l. 1.) y pues *b*[illegible] con *rdb* haze vn recto, serà *rdb* igual a *c.* luego el triangulo *brd* es equiangulo al todo *bdc* (2. N.) assimesmo *crd* es equiangulo a *bdc.* y a *brd.* luego son proporcionales *br* a *rd.* como *dr.* a *rc.* y *dr* es media entre *br.* *rc* (2. l. 6.) y tambien *br* a *bd.* como *bd* a *bc.* y *cr* a *cd* como *cd* a *cb.*

4 En el triangulo END. son los dos perpendiculos DX. EZ. y por ser los angulos X. Z. rectos iguales, y N. comun seràn NEZ. NDX. iguales (3. l. 1.) luego son equiangulos: y son proporcionales EN. a NZ. como DN. a NX. (2. l. 6.) y el rectangulo ENX. igual a DNZ. (1. l. 6.)

5 Si en el triangulo *bdc.* las rectas *ca. dr.* parten proporcionalmente los lados *bd.* *bc.* luego los triangulos *abc.* *rbd.* que tienen el angulo *b.* comun, tienen los lados reciprocos: como *ba.* a *br.* assi *bd.* a *bc.* luego son los triangulos *abc.* *rbd.* iguales (1. l. 6.) luego quitado el espacio comū *banr.* quedaràn iguales *and.* *rnc.* y porque los angulos verticales *and.* *rnc.* son iguales (1. l. 1.) seràn los lados reciprocos *an.* a *nc.* como *rn.* a *nd.* (1. l. 6.) luego las rectas *ca.* *dr.* que cortan proporcionalmente los lados, se cortan ellas proporcionalmente.

PROPOSICION IV.

De las figuras semejantes.

1 *LAs semejantes a otra son semejantes entre si; resueluense todas en triangulos semejantes, y al contrario.*

2 *Tienen la razon duplicada de los lados homologos, y al contrario.*

3 *Descritas sobre rectas proporcionales son proporcionales: y sobre vn triangulo rectangulo, la de la base es igual a las de los lados, y al contrario.*

4 *Las que estàn dentro de otra con vn angulo comun, tienen los lados paralelos, y comun diagonal, y al contrario.*

5 *La diagonal por el angulo comun haze segmentos semejantes, y los complementos proporcionales a los segmẽtos:* Cõsectario *En los paralelogramos, y figuras que se parten igualmente por la diagonal son los complementos iguales.*

Demonstracion. fig.4.

1 POrque las semejantes a otra, tienen con ella iguales angulos, y lados proporcionales: luego tambien entre si (1.l.5.) y assi seràn semejantes. Las figuras BFMNE. BDRSC. semejantes, tienen angulos iguales, y lados proporcionales (22.P.) tiradas FE. FN. DC. DS. siendo los angulos EBF. CBD. iguales, y EB a BF. como CB. a BD. seràn los triangulos *b*.*q*. semejantes (2.l.6.) y assimesmo *x*. *z*. luego quitando iguales angulos de iguales, quedan los triangulos *h*. y *g*. equiangulos, y semejantes: luego las figuras semejantes se resueluen en triangulos semejantes: y al contrario si se resueluen en triangulos semejantes con la mesma disposicion tendràn todos los angulos iguales, y los lados proporcionales: luego las figuras compuestas seràn semejantes (22.P.)

2 Iuntas las figuras en los angulos iguales EBF. CBD. continuese CH. que sean tres continuas EB. a BC. como BC a CH. y serà la razon de EB a CH. duplicada de EB a BC. (21.P.) luego porque EB a BC. se supone como FB a BD. serà BC a CH. como FB a BD. (1.l.5.) y pues el triangulo *d*. a *q*. es como FB a BD. (1.l.6.) y *d* a *r* es como BC a CH. que es FB a BD. seràn *q*. *r*. iguales (2.l.5.) luego *b*. a *q*. tiene la mesma razon que *b*. a *r*. y pues *b* a *r* tiene la razon que EB a CH. (1.l.6.) que es duplicada de EB a BC. tendrà *b* a *q*. la razon duplicada de EB a BC. que son lados homologos:

gos: lo mesmo se demostrarà de *b* a *g.* y de *z* a *x*.luego la suma de *b. h. z.* que es la figura BFMNE.a la suma de *q. g. x.* que es la figura BDRSC.tiene la mesma razon que *b.* a *q.* (4.l.5.) que es duplicada de EB a BC.

3 Siendo EB a BC.como NF.a DS.el trapezio *bb* a su semejante *qg.* tendrà la razon duplicada de EB a BC.y el triãgulo *z.* a *x*.tendrà la razon duplicada de NF.a DS. (2.N.) luego porque la razon duplicada de EB a BC. es la mesma que de NF.a DS.(1.l.5.) el trapezio *bb* a *qg.* tiene la razon que el triangulo *z.* a *x.* y alternãdo *bb* a *z.* como *qg.* a *x.*(4.l.5.)

Sea el triangulo EBD. rectangulo: los quadrados de EB.BD.DE. porque son semejantes tendràn la razon duplicada de los lados (2.N.) y qualesquiera otras figuras semejantes tendran la mesma razon duplicada de los lados(2.N.) luego porque los quadrados de EB.BD.son iguales al quadrado de ED.(4.l.2.) tambien qualesquiera figuras semejantes descritas sobre EB.BD.seràn iguales a la de ED.&c.

4 Las figuras *qd.rh.* semejantes tienen el angulo *z.* comun. Digo que la diagonal *zd.* passa por *h.* y *zb* por *i.* porque se diuiden en triangulos semejantes(1.N.) luego los angulos *m.n.* son iguales:luego *mh. nd.* son paralelas(2.l.1.) tambien los angulos *mzh. nzd.* son iguales:luego *zhd* es vna recta: y assimesmo *zib. zol.* y los lados paralelos *bd.ib.* &c. Assimesmo se demostrarà que la figura *fc.* semejante a *qd* si tiene el angulo *b.* comun serà la diagonal *biz* comun, y los lados *cu. dn* paralelos,&c. Al contrario si los lados *mh.nd* son paralelos, &c.y las diagonales *zhd.zib* &c. comunes,seràn los triangulos *zhm. zdn.* semejantes(2.l.6.) luego diuidiendose las figuras en triangulos semejantes, seràn semejantes (1.N.) y siendo *fc.rh.* semejantes a *qd.* seràn entre si semejantes.(1.N.)

5 La diagonal *zb* haze los segmentos *bdnz.bcui.ihmz* que constan de triangulos semejantes(4.N.) luego son segmentos semejantes(1.N.) assimesmo son semejantes *blqz.befi.iorz.* luego el segmento *blqz* a *bdnz* es como *befi* a *bcui*.y como *iorz.* a *ihmz.*(3.N.) luego el residuo que es el complemento *elqroife.* al complemento *cdnmhiuc.* tiene la mesma razon(5.l.5.) De donde nace que en el paralelogra-

gramo *qd.* siendo los segmentos iguales son los complementos *iq. id* iguales: y lo mesmo es en los complementos *elqroife. cdnmbiuc.* si *zb.* haze iguales segmentos.

PROPOSICION V.

De los circulos, y sus partes.

1 *LOs angulos, y sectores de vno, ò iguales circulos tienen la razon que los arcos, y al contrario.*

2 *Las circunferencias, cuerdas, y arcos semejantes tienen la razon que los radios.*

3 *Los arcos, segmentos, y cuerdas semejantes de circulos iguales; son iguales: y de mayor circulo, mayores: y si son iguales en desiguales circulos, son desemejantes, y de mas valor el de menor circulo.*

4 *Las figuras inscriptas, y circunscriptas, sectores, y segmentos semejantes, y los circulos entre si tienen la razon duplicada de los radios.*

Demonstracion. fig. 5.

1 SI el arco CG. es igual a GD. es el angulo CBG. igual a GBD. (10. P.) luego todo el sector CBG. se ajustarà con GBD. y serà igual: assimesmo si CG. es duplo de CP. serà el angulo, y sector CBG. duplo de CBP.

CBP. y CBM. triplo: y CBD. quadruplo, &c. luego siempre los angulos, y sectores tienen la razon que los arcos en vno, ò iguales circulos.

2 Sean los arcos CD. FE. semejantes, y la sexta parte de dos circulos, por ser el angulo FBE. igual a CBD. (10. P.) y los lados CB. igual a BD. como FB. igual a BE.

Seràn los triangulos semejantes (2.l.6.) luego la cuerda CD. a FE. como el radio CB. a FB. (2.l.6.) Diuidiendo igualmente los arcos en H. y G. serà CG. a FH. como CB. a FB. y continuando la biseccion, serà CP. a FR. como CB. a FB. y pues corresponden infinitamẽte a iguales cuerdas iguales arcos en cada circulo: luego los arcos semejantes tienen la razon que las cuerdas, que es la razon de los radios, &c.

3 Porque las cuerdas, y arcos semejantes son como los radios (2. N.) luego si los radios son iguales, seràn cuerdas, y arcos, y segmentos iguales; y si el radio es mayor, serà la cuerda, arco, y segmento mayor: y si las cuerdas, ò arcos son iguales siendo los radios desiguales, seràn desemejantes, porque si fueran

ſejantes al mayor radio,le correſpondiera mayor cuerda,y arco,&c.(3.l.5.)

4 Sean FE.CD.lados homologos de las figuras ſemejantes inſcriptas : eſtas tienen la razon duplicada de FE.a CD.(4.l.6.) luego porque FE.a CD.es como FB.a CB.(2.N.) tendràn las figuras la razon duplicada de los radios FB.a CD.(1.l.5.) lo meſmo ſe demueſtra de las circunſcriptas.

Diuidiendo igualmente los arcos CD.FE. tendrà el triangulo CGD.a FHF. la razon duplicada de las cuerdas CD.FE.ò radios CB. FB.(4.l.6.) y continuando la biſecciõ tendrà la meſma razon el triangulo CPG.a FRH.y aſsi infinitamente : luego la ſuma de todos los triangulos que componen al ſector,ſegmento,ò circulo;tendrà a la otra ſuma la meſma razon duplicada de los radios : luego porque los ſectores,ſegmentos,y circulos ſon iguales a la ſuma de todos los triangulos continuada infinitamente la biſeccion ; tendrà vn ſector a otro, y vn ſegmento,ò circulo a otro la meſma razon duplicada de los radios(2.l.5.)con que todo lo que ſe ha dicho(4.l.6.) de las figuras ſemejantes ſe entiende de los ſegmentos, ſectores,y circulos ſemejantes. PRO-

PROPOSICION VI.

De las rectas del circulo.

1 *SI dos rectas ſe cortan en el circulo,el rectangulo de la vna es igual al de la otra.*

2 *La perpendicular al diametro es media proporcional entre los ſegmentos,&c.*

3 *La tangente de vn punto es media proporcional entre la ſecante, y ſu exterior ſegmento : y al contrario, y dos tangentes de vn punto ſon iguales*

4 *Las ſecantes forman triangulos ſemejantes, y ſon reciprocas con ſus exteriores ſegmentos, y el vn rectangulo igual al otro.*

Demonſtracion. fig.6.

1 LAs rectas DE.CF. ſe cortan en H. juntas CD.EF.los angulos DCF.y DEF.ſon la mitad del arco DF. y ſon iguales, y tãbien CDE. CFE.(3.l.3.) y los verticales CHD. EHF.(1.l.1.) luego CHD. EHF. ſon equiangulos,y los lados proporcionales (2.l.6.)CH. a HD. como EH. a HF.luego el rectangulo CHF. es igual a DHE.(1.l.6.)

2 La recta CO. es perpendicular al diametro DE : el angulo DCE. en el ſemicirculo es recto (3.l.3.) luego el perpendiculo CO. es medio entre los ſegmentos DO. OE.

(3.l.6.) y el quadrado CO. igual al rectangulo DOE. (1.l.6.) asimismo CD. es media entre ED. DO. y CE. entre DE. EO. (3.l.6.).

3 La recta BC. toca al circulo en C. y qualquiera otra BE. le corta: juntas CD. CE. harà DC. el angulo DCB. igual a CED. del segmento alterno CEFD. (7.l.3.) luego porq̃ en el triangulo BCE. la recta CD. haze el angulo BCD. igual al opuesto CED. es la tangente BC. media entre EB. BD. (3.l.6.) luego el quadrado BC. es igual al rectangulo EBD. (1.l.6.) Al contrario, si BC. es media entre DB. BE. serà BC. tangente; porque la tangente ha de ser media, y la media es vnica. Tambien las tangentes BC. BZ. son iguales, porque cada vna es media entre EB. BD.

4 BE. BF. son secantes de vn punto que cortan el circulo: juntando DG. EF. en el quadrilatero DEFG. el angulo DEF. con FGD. haze dos rectos (3.l.3.) y pues FGD. con DGB. haze dos rectos (1.l.1.) serà DEF. igual a DGB. asimismo EFG. es igual a GDB. y DGB. a FEB. luego los triangulos DBG. FBE. son equiangulos: luego EB. a BF. es como GB. a BD. (2.l.6.) y el rectangulo EBD. igual a FBG. (1.l.6.) &c. LI-

LIBRO XI.

DE LOS SOLIDOS.

EN este libro se resume lo que trata Euclides en el 11. y 12. de los *Solidos*, y es todo lo que en la practica, y especulatiua puede ser de prouecho, porque lo concerniente a los cuerpos regulares es mas curioso, que necessario.

La mayor dificultad de los solidos està en que las figuras, como se forman en vna superficie plana, no pueden representar perfectamente la solidez de los cuerpos. El estudioso, pues, que entra de nueuo en esta materia, ha de considerar, que los cuerpos se descriuen en perspectiua, como si fueran transparentes, para que se puedan ver los lados, y angulos opuestos.

Sirua de exemplo la figura primera, en que FC. representa vn *cubo*, que se termina con seis superficies quadradas. La de enfrente, y su opuesta son BD. AE. las de los lados FB. EC. la la inferior, y superior AC. FD. la base es AC. en que el cubo estriua.

Los angulos, y las lineas no se pueden representar como son, porq̃ DCB. y DCH. son angulos rectos iguales, y las rectas BC. y CG. son tãbien iguales en el cubo, pero en la figura no; y assi en los angulos, y lineas no se ha de atender a lo que se vê descrito, sino a lo que se supone, ò infiere por consequencia necessaria de lo ya demostrado. Con esta atencion creo no se ha de hallar mas dificultad en los solidos que en los planos.

Contiene este libro seis proposiciones.

PRO-

PROPOSICION I.

Del concurso en los solidos.

1 *SI dos planos concurren, la comun seccion es linea recta.*

2 *Vna recta està toda en vn plano, y vn triangulo, y dos rectas que se cortan.*

3 *La perpendicular de vn punto a vn plano es vnica.*

4 *Si vna recta es perpendicular a otras dos, ò tres en vn mismo punto, todas estas son de vn plano perpendicular a la recta.*

Demonstracion. fig. 1.

1 EL plano triangular ABG. tiene por termino la recta BG. luego la recta BG. se puede ajustar a qualquiera superficie plana BE. (7. P.) y serà entonces BG. linea comun, ò comun seccion de los planos AC. y BE. aunque infinitamente se continuen.

2 La recta BG. està toda en el plano AC. porque se ajusta al plano por todas partes (7. P.) y assi no puede estar parte en el plano, y parte superior, ò inferior a èl.

Tambien vn triangulo BCG. està todo en vn plano, porque qualquier triangulo rectilineo

neo es vna superficie plana, comprehendida de tres rectas.

Tambien dos rectas BC. CG. que se cortan en C. estàn en vn plano, porque si qualquiera otra BG. las corta, forman vn triangulo BCG. que es superficie plana.

3 Del punto sublime D. al plano inferior AC. no puede caer otra perpendicular, que DC. porque tirada qualquiera otra DH. y junta HC. serà HCD. vn plano (2.N.) y por ser el angulo DCH. recto (23.P.) serà DHC. agudo (3.l.1.) luego sola DC. puede ser perpẽdicular.

Si el punto A està en el mesmo plano, AC. y AF. es perpendicular, serà tambien vnica, porque tirada qualquiera otra AR. si se junta FR. serà FRA. vn plano (2.N.) que si se imagina continuado, serà la comun seccion AB. linea recta (1.N.) luego porque el angulo FAB. es recto (23.P.) serà RAB. agudo (3.l.1) luego AF. es vnica perpendicular.

4 Si AG. GC. concurren en C. y GE. es su perpendicular en el punto G. serà GE. perpendicular al plano AC. porque del punto G. la perpendicular al plano es vnica (3.N.) esta ha de

de ser perpendicular a las rectas AG. CG. (23.P.) luego si GE. es perpendicular a GA. GC. serà GE. perpendicular del plano AC. en que estàn las rectas AG. GC.

Si por el punto G. passa qualquier otra GB. perpendicular a GE. estarà GB. en el mesmo plano que AG. GC. porque todas las rectas que passan por G. perpendiculares a GE, forman vna superficie, a quien es perpendicular GE. luego porque GE. es perpendicular al plano en que estàn AG. GC. (4.N.) estarà BG. en la mesma superficie plana que AG. GC.

PROPOSICION II.

Del paralelismo en los solidos.

1 *Dos paralelas estàn en vn mesmo plano con qualquiera otra que las corta.*

2 *Si dos rectas son perpendiculares a vn plano, seràn paralelas.*

3 *Si dos rectas son paralelas, y la vna es perpendicular a vn plano, tambien la otra.*

4 *Si dos rectas son paralelas a otra, seràn paralelas entre si, aunque no estèn las tres en vn plano.*

Demonstracion. fig. 1.

1 SI a las paralelas BL. CD. las corta qualquiera otra BC. y la recta BC. se considera mouer igualmente, passando B. hasta L. y C. hasta D. se formarà la superficie plana, ò paralelogramo BD. luego sus terminos, que son las paralelas BL. CD. y las rectas BC. LD. estàn en vn mesmo plano BD.

2 BL. y GE. son perpendiculares al plano AC. juntando GB. si se considera que por GE. passa el plano BE. perpendicular a AC. y del punto B. sale NB. perpendicular a la comun seccion GB. serà BN. paralela a GE. (2. l. 1.) y perpendicular al plano AC. (23. P.) y por ser la perpendicular vnica (1. l. 11.) serà BN. la mesma BL. luego BL. y GE. son paralelas.

3 Si GE. y BL. son paralelas, y EG. es perpendicular al plano AC. tambien lo serà BL. porque considerando por EGB. vn plano BE. perpendicular a AC. y BN. perpendicular a la comun seccion BG. serà BN. perpendicular al plano AC. (23. P.) luego serà paralela a GE (2. N.) y por ser BN. BL. paralelas a GE. y porque GB. las corta a todas, estaràn todas en

en vn plano EGB. (1. N.) y serà el angulo LBG. el mesmo NBG. (2. l. 1.) luego LB. es la mesma NB. (10. P.) y perpendicular al plano AC.

4 Si BL. y CD. son paralelas a GE. tambien lo seràn entre si, porque considerando el plano AC. perpendicular a GE. tambien lo serà a BL. por ser paralelas BL. GE. y tambien a CD. por ser paralelas CD. GE. (3. N.) luego CD. BL. por ser perpendiculares al plano AC. son entre si paralelas. (2. N.)

PROPOSICION III.

De los planos en los solidos.

1 *SI vna recta es perpendicular a vn plano, todos los planos que passan por ella, son perpendiculares al otro.*

2 *Si la comun seccion de los planos es perpendicular a otro, tambien los planos son perpendiculares; y al contrario.*

3 *Si dos angulos son paralelos, seràn iguales, y estàn en vn plano, ò en planos paralelos.*

4 *Si dos planos son paralelos, tienen comun perpendiculo; y al contrario.*

5 *Si vn plano corta dos planos paralelos, las comunes secciones son paralelas.*

 6 Si

6 *Si muchos angulos planos comprehenden vn angulo solido, el mayor de todos es menor que todos los otros juntos, y todos menores que quatro rectos.*

7 *Si muchos planos paralelos comprehenden vn solido paralelepipedo, los planos opuestos son paralelogramos iguales, y semejantes.*

Demonstracion. fig. 1.

1 La recta GE. es perpendicular al plano AC. y por GE. passa qualquier plano BE. digo que es perpendicular a AC. De qualquier punto L. en el plano BE. considerese LB. perpendicular a la secciõ BG. luego porque los Angulos LBG. EGB. de vn plano son dos rectos, seràn LB. EG. paralelas (2. l. 1.) y porque GE. es perpendicular al plano AC. tambien lo serà LB. (2. l. 11.) luego todas las perpendiculares a la seccion seràn seràn perpendiculares al plano AC. luego el plano BE. es perpendicular a AC. (23 P.)

2 GE. es comun seccion de los planos BE. CE. digo, que si GE. es perpendicular al plano AC. tambien los planos BE. EC. seràn perpendiculares al mesmo AC. porque BE. CE. passan por la perpendicular GE. luego ellos

ellos son perpendiculares al plano AC. (1 N.) Al contrario, si BE. CE. son perpendiculares a AC. del punto G. comun, considerese vna perpendicular en cada plano BE. CE. luego porque la perpendicular es vnica (1. l. 11.) serà GE. comun a los dos planos, y serà la comun seccion perpendicular a AC.

3 Los angulos LED. BGC. sean paralelos, esto es, la recta LE. a BG. y ED. a GC. digo que son iguales, aunque estàn en diferentes planos; y si los planos son diferentes, seràn paralelos.

Tomense EL. ED. GB. GC. iguales; y porque EL. BG. son paralelas iguales, seràn LB. EG. paralelas iguales, y tambien DC. EG. (7. l. 1.) luego BL. CD. son peralelas iguales a GE. y entre si (2. l. 11.) luego LD. BC. son paralelas iguales (7. l. 1.) luego los tres lados LE. ED. DL. son iguales a los tres BG. GC. CB. y assi el angulo LED. es igual a BGC. (4. l. 1.) y si los planos LED. BGC. son diferentes, porque los lados de los triangulos que comprehenden los planos LED. BGC. son paralelos, seran los planos paralelos.

4 Los planos FD. AC. son paralelos; digo,

go, que si BL. es perpendicular a AC. tambien lo serà a FD. porque tomando qualesquiera puntos G.C. y considerando perpendiculares GE. CD. seràn paralelas a BL. y estaràn en vn plano (2.l.11.) y seràn iguales las distancias BL. GE. CD. de los planos paralelos AC. FD. (23.P.) luego LC. LG. son paralelogramos, y el angulo BLD. es recto igual a BCD. y BLE recto igual a EGB. (7.l.1.) luego porque BL. es perpendicular a LE. LD. serà tambien perpendicular al plano FD. (1.l.11.) luego BL. es perpendiculo comun a los planos paralelos AC. FD. Assimesmo el plano BE. porque passa por el perpendiculo comun BL. serà perpendicular a los dos planos AC. FD. &c. Al contrario, si BL. es perpendiculo comun a los planos AC. FD. considerando GE. ò CD. paralela a BL. serà CD. perpendicular a los dos, y estaràn BL. CD. en vn plano (2.l.11.) luego por ser los angulos BD. y LC. rectos iguales, es BD. paralelogramo, y BL. CD. iguales distancias; y assimesmo GE. (7.l.1.) luego AC. FD. son equidistantes.

5 BF. EC. son dos planos paralelos, y BE. les corta: digo, que las secciones BL. GE. son paralelas, considerando AC. perpendicular a la comun seccion BL. seràn los planos BF. BE. perpendiculares a AC. (2.N.) y tambien BF. CE. por ser paralelos (4.N.) luego porque BE. CE. son perpendiculares a AC. serà la comun seccion GE. perpendicular a AC. (2.N.) luego porque las dos secciones BL. GE. son perpendiculares al plano AC. seràn paralelas (2.l.11.)

6 Si el angulo PXQ. es igual a los dos QXS. SXZ. se ajustarà con ellos, y formarà vna superficie plana: luego no podràn comprehender espacio solido. Assimesmo si los angulos X. son iguales a quatro rectos, forman vna plana superficie (1.l.1.) luego no comprehenderàn espacio solido. Pero si los angulos QXS. SXZ. son mayores que PXQ. y los tres, menores que quatro rectos, imaginando cortado el espacio PXZ. si se juntan XZ. XP. se releuarà el punto X. y formarà el angulo solido X.

7 En el solido FC. los planos FD. AC. paralelos se cortan con el plano EC. luego las secciones ED. GC. son paralelas (3.l.11.) assimesmo seràn EG. DC. paralelas, por ser los

los planos FG. LC. paralelos, y cortarles EC. luego EC. es parlelogramo; lo mesmo se demostrarà de FB. &c. luego los planos opuestos son paralelogramos.

La igualdad se prueba, porque los angulos EDC. FLB. son paralelos, luego sõ iguales (3. l. 11.) y asimesmo AFL. GED. &c. Tambien los lados CD. BL. por ser lados opuestos del paralelogramo BD. (7. l. 1.) y asimesmo GE. AF. como tambien ED. FL. y GC. AB. luego los paralelogramos FB. EC. porque tienen iguales lados, y angulos, se ajusteràn: luego son iguales, y semejantes (1. P.) lo mesmo es de qualesquiera dos opuestos.

PROPOSICION IV.

De los segmentos solidos.

1 *SI vn paralelepipedo, prisma, cilindro, ò piramide, se parte con vn plano paralelo a la base, la seccion es semejante a la base.*

2 *Y los segmentos solidos del paralelepipedo, prisma, ò cilindro son proporcionales a los segmentos de los lados.*

3 *Si vn paralelepipedo se parte con vn plano por los angulos opuestos, seràn los segmentos dos prismas iguales.*

4 Qual-

4 *Qualquier prisma poligono se diuide en prismas triangulares, que son dos menos que sus lados, y lo mismo es de las piramides poligonas.*

5 *Si vna piramide tiene la base paralelograma, se parte por el vertice, y angulos opuestos igualmente.*

Demonstracion. fig. 3.

1 EN el paralelepipedo AG. el plano KM. es paralelo a la base BD. luego AL. serà paralelepipedo (24. P.) y el plano KM. igual, y semejante a BD. (3. l. 11.)

En el prisma BADHEF. se demostraràn iguales, y paralelas BA. KI. y AD. IM. y DB. MK. como en la prop. 3. N. 7. luego por ser los tres lados KI. IM. MK. iguales a BA. AD. DB. seràn en todo iguales, y semejantes los triangulos BAD. KIM. (4. l. 1.) lo mismo es en qualesquiera otros prismas de bases poligonas, &c.

En la piramide VXZD. fig. 2. siendo el plano QRT. paralelo a VXZ. son VX. QR. paralelas, y VZ. QT. y ZX. TR. (3. l. 11.) luego como DR. a DX. asi RQ. a XV. y QT. a VZ. y RT. a XZ. (2. l. 6.) luego porque los tres lados del triangulo QRT. son proporcionales

P a

a los tres de VXZ. seràn los triangulos semejantes (2.l.6.) lo mesmo se demostrarà de los triangulos RST. XYZ. y de los quadrilateros SQ. YV. y en todas las piramides de bases poligonas, &c. *fig.* 3.

2 En el paralelepipedo AG. es el plano PN. paralelo a la base CA. y son CP. PG. iguales: luego en el solido AP. son iguales, y semejantes los planos CA. PN. y tambien PN. GE. (3.l.11.) y todos los planos del solido AP. iguales, y semejantes a los del solido NG. luego NG. se ajustarà con AP. y assi son iguales (1.P.) assimesmo serà AG. duplo de AP. y si CP. se diuide igualmente en L. y se considera el plano LI. serà AL. igual a IP. luego IG. serà triplo de AL. y AG. quadruplo de AL. luego si los lados CP. PG. son iguales tambien los solidos AP. NG. y si el lado CG. es duplo de CP. tambien el solido AG. de AP. si el lado LG. es triplo de CL. tambien el solido IG. de AL. si el lado CG. es quadruplo de CL. tambien AG. de AL. luego los segmentos solidos tienen entre si la razon que los segmentos de los lados.

La mesma induccion se haze en el prisma ABDHFE. cortado con los planos paralelos NOQ. IKM. y lo mesmo es en los prismas de ba

ses poligonas, y en los cilindros.

3 El paralelepipedo AG. se parte igualmẽte con el plano BH. por los angulos opuestos BH. y DF. porque si se considera qualquier plano IL. paralelo a la base AC. serà IL. igual a ÇA. (1.N.) y KMI. igual a KML. (7.l.1.) lo mesmo es en el plano NP. y en qualquiera parte que se considere vn plano paralelo a CA. luego todo el prisma ABDHFE. es igual a BCDHFG. porque se componen de iguales planos siempre.

4 El plano PQRST. *fig.* 2. es base de vn prisma: considerando los planos QH. QG. quedarà el prisma poligono diuidido en tres prismas triangulares, &c. Lo mismo es de las Piramides poligonas.

5 La base de la piramide VXYZD. es vn paralelogramo; digo, que el plano DXZ. la parte igualmente; porque considerando qualquier plano SQ. paralelo a la base YV. en qualquiera parte que se considere, serà la seccion SQ. paralelograma, semejante a YV. (1.N.) y los triangulos QRT. RST. iguales, (7.l.1.) luego la piramide triangular XYZD. es igual a VXZD. porq̃ se cõponen de planos iguales siempre. P 2 PRO-

PROPOSICION V.

De los Solidos desemejantes.

1 *Qvalquiera prisma triangular es medio paralelepipedo.*

2 *Qualquiera piramide es la tercera parte de vn prisma de la mesma base, y altura, y la piramide conica de vn cilindro.*

3 *Los paralelepipedos, prismas, y cilindros de igual altura tienen la razon que las bases; tambien las piramides entre si.*

4 *Los mesmos si tienen igual base, tienen la razon que sus alturas.*

5 *Los mesmos si tienen la base, y altura reciprocas, son iguales, y al contrario.*

6 *Si de tres rectas proporcionales se forma vn paralelepipedo, serà igual al que se formare de la media proporcional con igual angulo.*

CONSECTARIO.

Lo mesmo es de los prismas triangulares, ò piramides trilateras, ò quadrilateras.

Demonstracion.

1. Sea vn prisma, 1 ~~SI vn piramide~~ triangular BCGELD. *fig.* 1. y su base BCG. si continuado el plano, se considera BA. paralela a CG. y GA. a CB. y AF. paralela a BL. y GE. (2.

(2.l.11.) serà FC. paralelepipedo, y el plano BE. le parte igualmente (4.l.11.) luego el prisma BCGELD. es medio paralelepipedo.

2 Sea vna piramide triangular ABCE. *fig.* 2. y considerando CD. AF. paralelas a BE. y el plano FED. paralelo a BCA. se formarà vn prisma: y el solido añadido es la piramide FDCAE. que por ser la base FC. paralelograma la parte igualmente el plano ADE. (4.l.11.) luego las piramides FADE. ACDE. son iguales: assimesmo, porque BCDEA. es piramide, y su base BD. paralelograma la parte igualmente el plano ECA. (4.l.11.) luego las piramides CDEA. CBEA. son iguales: luego tambien son iguales entre si CBAE. FDAE. (3.P.) luego la piramide CBAE. es la tercera parte del prisma BCAFED.

Lo mesmo es de las piramides poligonas, porque assi ellas, como los prismas se diuiden en triangulares (4.l.11.) y como la base circular se considera como poligono de infinitos lados, milita lo mismo en la piramide conica, y en el cilindro, y se demostrarà otra vez (3.N.)

3 En la *fig.* 3. los paralelepipedos RZ. AP.

AP. estàn en vn mesmo plano RC. y tienen igual altura, esto es, se terminan en un mesmo plano XP. digo; que AP. a RZ. tiene la mesma razon que las bases AC. a RT. porque considerando qualquier plano SL. paralelo a las bases, que corte por qualquiera parte a los dos solidos el plano IL. serà igual a AC. y SV. a RT. (4.l.11.) luego IL. a SV. tendrà la mesma razon que AC. a RT. (2.l.5.) lo mesmo se demostrarà de qualesquiera secciones que nacen de qualquier plano paralelo a las bases: luego la suma de todas las secciones del solido AP. a las del solido RZ. (que por estar entre dos planos paralelos, no pueden ser mas en vno que en otro) tendrà la mesma razon que la base CA. a RT. (4.l.5.) luego los paralelepipedos de igual altura tienen la razon que las bases.

Esta demonstracion es general, aunque los solidos no sean semejantes, ni de vna especie, pues en lugar de RZ. se puede substituir vn prisma, ò cilindro de igual base.

De las piramides entre si se demostrarà lo mesmo, porque siempre las secciones se demostraràn semejantes, y proporcionales a las ba-

ses (4.l.11.) luego siendo las bases iguales, seràn ellas siempre iguales (2.l.5.)

De donde se infiere, que como vn prisma, y cilindro, que tienen igual base, y altura son iguales; y tambien las piramides que tienen iguales bases, y alturas; siendo la piramide poligona, la tercera parte del prisma (2.N.) lo serà tambien del cilindro: luego la piramide circular que es igual a la poligona, serà tambien la tercera parte assi del prisma, como del cilindro.

4 Si las bases RT. AC. son iguales, tendrà el solido RZ. a AG. la razon que la altura RX. a AE. porque considerando el plano XP. paralelo a RC. seràn RZ. AP. iguales (3.N.) luego RZ. a AG. serà como AP. a AG. (2.l.5.) luego porque AP. a AG. es como la altura AN. ò RX. a AE. (4.l.11.) serà RZ. a AG. como RX. a AE.

5 Si las bases, y alturas son reciprocas, esto es, YT. a AC. como CG. a TZ. seràn los solidos YZ. AG. iguales, pues continuando el plano pZ. que pP. sea vn mesmo plano paralelo a las bases, tendrà YZ. a AP. la razon que YT. a AC. 3.N.) esto es, que CG. a TZ, ò CP. y

y pues AG. a AP. tiene tambien la razo n que CG. a CP. ò TZ. (4. l. 11.) luego porque YZ. y AG. tienen vna misma razon con AP. son iguales entre si (2. l. 5.)

Al contrario, si YZ. y AG. son iguales, serà YZ. a AP. como AG. a AP. (2. l. 5.) esto es, como CG. a CP (4. l. 11.) y pues YZ. a AP. es como YT. a AC. (3. N.) serà YT. a AC. como CG. a CP. ò TZ. (1. l. 5.) luego las bases, y alturas son reciprocas. Lo mesmo es en los prismas, y cilindros, y en las piramides, que son sus terceras partes.

6 Sean tres continuas AB. BC. CG. y Y*q*. *q*T. TZ. iguales a la media BC. y los paralelepepidos AG. YZ. con todos sus planos tengan iguales angulos planos, y solidos; digo, que son iguales, porque AC. a YT. es como AB. a Y*q*. (1. l. 6.) que es AB. a BC. tambien TZ. (que es BC.) a CG. es como AB. a BC. pues son continuas AB. BC. CG. luego por ser reciprocas las bases, y alturas AC. a YT. como TZ. a CG. son iguales YZ. AG. (5. N.)

El *Consectario* es claro, porque los prismas triangulares son medios paralelepipedos (1. N.) y las piramides vn tercio de los prismas

mas (2. N.) luego como el todo al todo, assi la parte a la parte (5. l. 5.)

PROPOSICION VI.

De los solidos semejantes.

1 *Los semejantes a otro, lo son entre si, y se resueluen en partes semejantes.*

2 *Tienen la razon triplicada de los lados homologos, y las esferas de los radios.*

3 *Formados sobre rectas proporcionales, son proporcionales, y al contrario.*

4 *Los que estàn dentro de otro con vn angulo comun tienen los lados, y planos paralelos, y comun diagonal, y al contrario.*

5 *El plano que passa por los angulos, y lados comunes haze segmentos semejantes, y los complementos proporcionales a los segmentos.*

Demonstracion. fig. 4.

1 La primera parte puede passar por axioma; pero quien quisiere, la podrà demostrar como en el *lib. 6. prop. 4. n. 1.*

2 Sean dos paralelepipedos AH. RC. semejantes. Considerense juntos los angulos iguales en B. desuerte que AB. BC. formen vna recta linea, y tambien EB. BD. y los planos AD. EC. formen vn mesmo plano, y los otros

planos continuados, como se vê en la figura, y seran quatro paralelepipedos RC. BM. CH. HA. la razon de RC. a AH. es compuesta de RC. a BM. y de BM. a CH. y de CH. a HA. (21.P.) la razon de RC. a BM. es como GB. a BF. la de BM. a CH. es como EB. a BD. y la de CH. a HA. como CB. a BA. (4.l.11.) luego porque la razon de GB. a BF. y EB. a BD. y CB. a BA. es vna mesma, por ser lados de los solidos semejantes RC. HA. (23.P.) serà la razon de RC. a HA. compuesta tres vezes de vna mesma razon GB. a BF. luego es triplicada de GB. a BF. (21.P.) que son los lados homologos.

De los prismas, y cilindros, se concluye lo mesmo, porque son iguales a los paralelepipedos de igual base, y altura.

De las piramides, porque son la tercera parte de los prismas, y cilindros.

De los solidos regulares, ò irregulares, porque se resueluen en piramides semejantes.

De las esferas, porque se haze induccion de los solidos inscritos, como de los planos inscritos en el circulo, *lib.6.p.5.*

De donde se infiere, q̃ si fueren quatro continuas P. Q. X. Z. el solido descrito sobre P. al semejante descrito sobre Q. tendrà la razon q̃ P. a Z. que es triplicada de P. a Q. (21.P.)

3 Si son proporcionales P. a Q. como X. a Z. y sobre P. Q. se descriuen dos solidos semejantes, y sobre XZ. otros dos semejantes entre si, aunque no sean semejãtes a los otros, seràn proporcionales; porque el 1° al 2° tiene la razon triplicada de P. a Q. y el 3° al 4° triplicada la de X. a Z. (2.N.) luego porque la razõ de P. a Q. se supone ser la mesma que de X. a Z. serà el 1° al 2° como el 3° al 4° (1.l.5.) y al contrario, si el 1° al 2° es como el 3° al 4° porque el 1° al 2° tiene la razon triplicada de P. a Q. y el 3° al 4° triplicada la de X. a Z. luego P. a Q. serà como X. a Z. (1.l.5.) y si P. Q. X. Z. son continuas, tambien los quatro solidos, si todos son entre si semejantes, seràn cõtinuos; pues por tener la razon triplicada de vna mesma, tendràn vna mesma razon (1.l.5.)

4. y 5. La demonstracion es con el mismo estilo que la del *lib.6.p.4.* y la dexo por ser facil la aplicacion, y el theorema menos necessario que los otros.

Fin de la Geometria especulatiua.

GEOMETRIA

PRATICA.

GEometria practica es ciencia practica de la quătidad continua. Las propsiciones puramente especulatiuas se llaman *Theoremas*: las que enseñan el modo de poner algo en execucion, se dizen *Problemas*. Con la inteligencia de las especulaciones antecedentes será facil la execucion de las siguientes practicas. Para mas claridad se reduce todo el tratado a ocho especies de Problemas.

Prob. 1. *De las rectas angulares, y paralelas.*
Prob. 2. *Diuision, y proporcion de las rectas.*
Prob. 3. *De los triangulos, y paralelogramos.*
Prob. 4. *Del circulo.*
Prob. 5. *De las figuras inscritas, y circunscritas.*
Prob. 6. *De la proporcion, suma, diferencia, y transformacion de las figuras.*
Prob. 7. *De las superficies, y solidos, y sus medidas.*
Prob. 8. *De los problemas no resueltos.*

PRO-

PROBLEMA I.

De las rectas angulares, y paralelas.

1 *POr vn punto dado en vna recta, tirar otra que haga vn angulo dado.*

2 *Diuidir qualquier angulo en dos partes iguales con vna recta.*

3 *Hallar el valor de vn angulo, y formarle de qualesquiera grados.*

4 *Tirar vna paralela à otra recta, dado el punto, ò la d distancia.*

5 *Por vn punto dado fuera de vna recta, tirar otra que haga vn angulo dado.*

6 *De vn punto dado, tirar vna perpendicular, y con ella partir vna recta igualmente.*

7 *Instrumento para los angulos rectos. Vease de los Angulos el Problem. 4. p. 2. y 6.*

Pratica 1.

Sea la recta dada AB. el punto A. y el angulo dado FDE. puesta la punta del compàs en D. con qualquiera abertura formese el arco EF. y con la mesma abertura formese el arco BC. tomando por centro el punto dado A. luego tomando con el compàs el arco EF. se cortarà BC. su igual, y tirando la recta AC. serà el angulo CAB. igual a FDE. porque sus medididas CB. FE. son iguales (10. P.)

Pratica 2.

Sea el angulo que se ha de diuir BAC. puesto el compàs en A. descriuase qualquier arco BG. y con la mesma abertura desde los puntos B. y C. descriuanse dos arcos, que se crucen en D. y la recta DA. partirà igualmente el angulo, porque los tres lados DB. BA. AD. son iguales a los tres DC. CA. AD. luego el angulo BAD. es igual a CAD. (4. l. 1.)

Pratica 3.

Con vn semicirculo de alaton, carton, ò talco diuidido en 180. grados BOC. se hallarà facilmente el valor de los angulos. Sea el angulo dado BAD. puesto el centro en el punto A. y el radio sobre la recta AB. Si la recta AD. corta 60. grados, serà el angulo BAD. de 60. grados; y BAF. de 120. &c. Para formar el angulo BAD. de 60. grados, puesto el semicirculo, se tirarà la recta AD. por los 60. grados, &c. Este instrumento es muy vtil para la pratica.

Pratica 4.

Sea la recta dada AB. y el punto C. desde el punto C. tirese qualquiera recta CB. que corte

te a BA. y del punto B. formese vn arco AH. y con la mesma abertura del punto C. formese DE. tomando el arco AH. y cortando DE. su igual, serà CE. paralela a AB. porque los angulos alternos ABC. BCE. son iguales (2. l. 1.) por ser iguales medidas AH. DE. (10. P.)

Si la distancia dada es XZ. tomando en la recta AB. qualquier punto A. se descriuirà desde A. el arco G. y del punto B. el arco F. con la mesma distancia XZ. y aplicando la regla a los arcos, se tira la recta FG. que serà paralela a BA. porque las distancias ~~AF. BG.~~ son iguales, y son la mesma distancia XZ. Quanto mas apartados se tomaràn los puntos A. B. saldrà la operacion mas exacta. AG. BF.

Pratica 5.

Sea la recta dada BA. y el punto fuera D. se ha de tirar DA. que el angulo DAB. sea igual al dado G. Tomese en la recta BA. qualquier punto C. y hagase el angulo BCE. igual a G. (p. 1.) y por el punto D. tirese DAF. paralela a EC. (p. 4.) y serà el angulo DAB. igual a ECB. (13. P.) luego tambien a G.

Pratica 6.

Si el punto C. està en la recta AB. tomense

CA.

CA. CB. iguales; y de los puntos A. y B. con qualquiera distancia formense dos arcos, que se crucen en E. junta EC. serà perpendicular, y los angulos AGE. ECB. rectos, porque los lados EC. CA. AE. son iguales a EC. CB. BE. luego los angulos ECA. ECB. son iguales (4. l. 1.) y rectos (1 1. P.)

Si el punto D. està fuera de la recta AB. puesto el compàs en D. con qualquiera distancia, se descriue el arco BA. que corte a la recta AB. puesto el compàs en A. y B. con la mesma distancia, ò con qualquiera otra se descriuen dos arcos, que se crucen en G. y serà DG. perpendicular, porque parte el angulo ADB. igualmente (2. p.) luego por ser ADB. isoceles, serà DC. perpendicular (5. l. 1.)

Si la recta AB. se ha de partir igualmente, puesto el compàs en A. y B. se descriuen con qualquiera distancia dos arcos arriba, y dos abaxo que se crucen en E. y G. y luego EG. serà perpendicular como antes: y dos segmentos AC. CB. iguales (5. l. 1.)

Si el punto B. està en el estremo de la linea, puesto el compàs en B. se tomarà qualquiera distancia BD. con que D. este fuera de la linea, y des-

descrito el arco ABF. se tirarà ADF. y serà FB. perpendicular, porque el angulo FBA. en el semicirculo ABF. es recto (3. l. 3.)

Si el punto F. està fuera de AB. tirese qualquiera recta FA. y diuidida igualmente en D. se descriuirà de alli el semicirculo ABF. y la recta BF. serà perpendicular, porque el angulo FBA. del semicirculo es recto (3. l. 3.)

Pratica 7.

El instrumento mas comodo para los angulos rectos, y lineas perpendiculares, es la esquadra ABC. de bronze, madera, ò carton; porque formado vna vez el angulo recto ABC. aplicando el lado AB. a la linea, el lado CB. sirue de regla para tirar la perpendicular CB. y conuiene que el angulo interior tambien sea recto para muchas operaciones.

PROBLEMA II.

Diuision, y proporcion de las rectas.

1 *Diuidir vna recta en qualesquiera partes.*

2 *Regla para la diuision igual.*

3 *Diuidir vna recta en partes semejantes a otra.*

4 *Dada vna recta, añadirle otra, que la dada*

da sea media entre la añadida, y la compuesta, y diuidir vna dada en media, y estrema razon.

Consectario, *dada la media, y la diferencia de las estremas, hallar las tres proporcionales continuas.*

5 *Dadas dos lineas, hallar la media proporcional.*

6 *Dadas dos lineas, hallar la tercera proporcional.*

7 *Dadas tres lineas, hallar la quarta proporcional.*

Pratica 1.

Si se ha de diuidir la linea AB. en cinco, ò mas partes, tirese AC. perpendicular (1.*p*.6.) y tambien BD. tomense en AC infinita, qualesquiera cinco partes iguales, y las mesmas en BD. y tirando las paralelas CD. OH. &c. como CO es la quinta parte de CA. assi OZ. es la quinta parte de AB. (2.l.6.) luego quedarà AB. diuidida en cinco partes. Assimismo qualquiera recta que se tire CB. quedarà diuidida en otras cinco partes, y serà CZ. la quinta parte de CB. &c.

Pratica 2.

Tomese vna regla AB. de bronze, ò box, ò mar-

marfil, y diuidida en 100. partes, ò en 1000. con el artificio precedente, seruirà para la diuision de qualquiera otra linea, como si de la linea MN. se huieren de tomar de 100. partes las 60. tirese CD. igual a AB. y del punto C. descriuase el arco DE. tomese MN. y hagase su igual DE. tirese luego CE. y tomando de la regla AB. las 60. partes, se cortarà CF. su igual y descriuirà el arco FG. luego como CF. es las 60. partes de CD. assi FG. serà las 60. partes de DE. ò MN. (2.l.6.) Esta regla sirue en lugar de Pantometra.

Pratica 3.

3 La linea CD. està diuidida en F. G. y se ha de diuir AB. en la mesma razon. Del punto C. tirese CE. que forme qualquier angulo, y sea igual a BA. juntando DE. se tiraràn GO. FH. paralelas a DE. (1.*p*.4.) luego por ser paralelas DE. GO. FH. quedarà CE. que es AB. diuidida como CD. (2.l.6.)

Pratica 4.

4 Sea la recta dada AB. tirese AC. perpendicular su igual: diuidida AC. igualmente en E. (1.*p*.6.) descriuase el circulo AGCD. y tirese BED. y del punto B. el arco GF. y estarà

 to-

to do hecho; porque siendo EAB. angulo recto, es BA. tangente (7.l.3.) y media proporcional entre BG. BD. (6.l.6.) luego porque DG. es igual a CA. que es AB. serà DG. media entre BG. y BD. luego DG. que es la dada AB. es media entre la añadida GB. y la compuesta BD.

Mas: porque AF. es diferencia entre BF. ò BG. y BA. y tambien BF. ò BG. es diferencia entre BD. y DG. ò AB. siendo BG. ò BF. BA. BD. tres continuas tendràn las diferencias AF. FB. la mesma razon (4.l.5.) luego AF. a FB. es como BF. a BA. luego BA. està diuidida en F. en media, y estrema razon (2 1.P.)

Dada la media AB. y la diferencia de las estremas AC. forme esta vn angulo recto con AB. y diuidida igualmente en E. descriuase el circulo AGC. tirada la recta BED. seràn tres proporcionales GB. BA. BD. (6.l.6.) y DG. que es AC. es la diferencia de las estremas GB. y BD.

Pratica 5.

5 Sean dadas AB. EF. continuese AB. que BC. y EF. sean iguales: diuida AC. igualmente en O. (1.*p*.6.) del centro O. se descriue el semicirculo ADC. y tirada la perpendicular BD.

BD. serà media proporcional entre AB. y BC. que es EF. (6.l.6.)

Otro modo, sean las dadas AC. EF. y tomese CB. igual a EF. tirado el circulo ADC. y la perpendicular BD. se juntarà DC. y serà media entre AC. CB. porque el angulo del semicirculo ADC. es recto (3.l.3.) luego DC. es media entre BC. CA. (3.l.6.)

Pratica 6.

Sean dadas BC. y BA. buscase la mayor BD. del punto B. se descriue el arco CF. tirese AO. perpendicular, y con qualquiera distācia AO. se descriue el circulo EAF. que corte al arco CF. y serà BFE. la tercera proporcional, porque BC. que es BF. BA. BE. son continuas (6.l.6.)

Si se dà la mayor DB. se descriue el arco DE. y tirando BE. serà la menor BF.

Otro modo. Sean dadas la menor GH. y la media HM. formen qualquier angulo MHG. tirando MG. se harà el angulo HMN. igual a MGH. y serà HN. la tercera, y mayor, porque son continuas GH. HM. HN. (3.l.6.) Si se dà NH. HM. tirada MN. se harà el angulo HMG. igual a MNH. y serà HG. la tercera menor (3.l.6.)

Pra-

Pratica 7.

Sean dadas AB. CB. BE. formen qualquiera angulo ABD. juntese CE. y tirese AD. paralela a CE. (1.*p*.4.) luego seràn como BC. a BA. assi BE. a BD. que es la quarta (2.l.6.) Si fuere dada BD. se junta AD. y tirada CE. paralela, serà BE. la quarta proporcional.

PROBLEMA III.

De los triangulos, y paralelogramos.

1 *Hazer vn triangulo equilatero de vna recta.*

2 *Hazer vn triangulo isosceles de dos rectas.*

3 *Hazer vn triangulo isosceles, que cada angulo sobre la base sea duplo del vertical, ò vn tercio*

4 *Hazer vn triangulo rectangulo de dos rectas.*

5 *Hazer vn triangulo escaleno de tres rectas.*

6 *Hazer vn paralelogramo dados los lados, y el angulo.*

7 *Hazer vn triangulo, ò paralelogramo, ò qualquiera figura semejante a otra.*

Pratica 1.

1 Sea la recta dada AB. con esta distancia desde A. y B. se forman dos arços, que se cruzan en C. el triangulo ABC. serà equilatero, porque AB. BC. CA. tienen vna mesma medida, y abertura de compàs.

Pratica 2.

Sean las rectas AB. DE. del punto A. descrivase el arco BC. y tomando con el compàs DE. se passarà desde B. hasta C. y el triangulo BAC. serà isosceles, porque los lados AB. AC. son radios iguales: y BC. es igual a DE. &c.

Pratica 3.

Dada la recta BD. ò tomada al arbitrio, añadasele DC. que sean continuas CD. DB. BC. (2.*p*.4.) sobre BC. formese el triangulo isosceles, que BF. FC. sean iguales a BD. y tirada FD. serà FBD. el triãgulo primero, y BFC. el segundo. *Demonstracion*. Porque BD, ò BF. es media entre DC. CB. es el angulo DFC. igual a B. (3.l.6.) y pues B. y C. son iguales por ser BFC. isosceles (5.l.1.) serà DFC. igual a C. luego porque el externo FDB. es igual a DFC. y C. (3.l.1.) serà duplo de C. esto es, de B. luego FDB. BFD. que son iguales (5.l.1.) son duplos de B. luego si a BFD. le añadimos DFC. igual a B. serà todo BFC. triplo de B. y tambien de C. que es igual a B.

Pra-

Pratica 4.

Sean las dos rectas dadas A C. D E. que han de comprehender el angulo recto. Hagase CB. perpendicular a CA. y sea igual a DE. junta BA. serà ABC. el triangulo.

Si se dà la base AB. y el vn lado DE. diuidida AB. igualmente en O. descriuase el semicirculo ACB. y tomando BC. igual a DE. juntense BC. CA. el triangulo ABC. serà rectangulo en el semicirculo (3.l.3.

Pratica 5.

Sean las tres lineas dadas AB. C. D. y del punto A. con la distancia C. descriuase el arco EG. luego del punto B. con la distencia D. se descriua el arco FG. que se cruzen en G. y juntas AG. BG. seràn iguales a C. y D. y BA. la mesma.

Pratica 6.

Dada la recta GH. para formar vn quadrado, que deue tener el angulo recto, tirese HM. perpendicular (1.p.6.) igual a GH. y con la mesma distancia de M. y G. se descriuen dos arcos, que se cruzen en O. tiradas OM. OG. serà OH. quadrado, porque todos los lados son iguales a GH. y los angulos rectos.

El

El rhombo se descriue de la mesma suerte, con que el angulo H. sea obliquo igual al angulo dado.

El rectangulo oblongo dadas AB. BC. hagase BC. perpendicular (1.p.6.) y del punto A. con la distancia BC. se descriue vn arco, y del punto C. con la distancia AB. otro, que se cruzan en F. tiradas FC. AF. serà BF. el rectangulo.

El rhomboide se forma de la mesma suerte, con que el angulo ABE. sea obliquo, igual al dado, y EA. serà el rhomboide de AB. BE. &c.

Pratica 7.

Dado el triangulo ABE. se ha de formar otro semejante sobre vna recta igual a XZ. Tomese AC. igual a XZ. continuando si fuere menester a AB. y tirese CD. paralela a BE. (1.p.4.) y serà el triangulo ACD. semejante a ABE. (2.l.6.)

Si es el trapecio dado BF. tirese el diametro AED. y CD. paralela como antes: y DH. paralela a EF. y continuando si fuere menester el lado AFH. serà CH. *trapezio* semejante a BF. (4.l.6.) lo mesmo es del paralelogramo.

Si la figura es ABEFO. tirense las diagonales AED. AFH. y tomando AC. igual a la da-

S da

dada XZ. se harà CD. paralela a BE. y DH. a EF. y HG. a FO. con q̃ serà la figura ACDHG. semejante a ABEFO. (4.l.6.) y tendrà el lado AC. igual al lado XZ.

PROBLEMA IV.

Del circulo.

1 *Descriuir un circulo por dos, ò tres puntos, hallar el centro, y valor de un arco, y diuidirle en dos partes iguales.*

2 *Sobre una recta, ò dado el circulo, hallar un arco capaz de un angulo dado.*

Consectario. *Descriuir un angulo dado sobre una recta, que toque a otra linea dada.*

3 *Cortar de un circulo un arco semejante a otro dado.*

4 *De un puto dado tirar una tangente a un circulo dado, ò descriuir un circulo que toque a una recta dada.*

5 *De un punto dado interior, ò exterior descriuir un circulo que toque a otro.*

6 *Sobre una recta finita descriuir un arco, que toque a otra infinita dada.*

Consectario. *Sobre una recta formar el angulo mayor que puede tocar otra recta infinita.*

7 *Por un punto dado tirar una recta dentro del circulo igual a otra dada.* *Pra-*

Pratica 1.

Los dos puntos dados son M. S. abriendo el compàs a la distancia que ha de seruir de radio, desde M. y S. se formaràn dos arcos, que se crucen en O. y serà el centro de donde se descriuirà el circulo AMS.

Los tres puntos dados son A. B. C. cõ qualquiera distãcia desde A. y B. se descriuen dos arcos q̃ se cruzen en E. y otros dos en G. ò Q. luego desde B. y C. se hazen otros dos en D. y F. con la mesma, ò qualquiera otra distancia: tirando las rectas DFO. MOG. que se crucen en O. serà O. centro del circulo, y alargado el compàs hasta C. se descriua CBARC. Porque DO. EO. son perpendiculares a las cuerdas CB. BA. y las parten por medio (1.*p*.6.) luego passan por el centro (2.l.3.) y assi el punto comun O. serà el centro.

El arco dado es ABC. tomense tres qualesquiera puntos A. B. C. y se hallarà el centro O. como antes, y se acabarà el circulo.

Si el arco dado es AB. y se ha de partir por medio, tirese la recta EG. como antes, y porque es perpendicular, y parte igualmẽte a BA. (1.*p*.6.) partirà tambien igualmente el arco (2.l.3.)

 Pa-

Para el valor del arco MS. se hallarà primero el centro O. y pues el arco MS. es medida del angulo MOS. (10.P.) se hallarà el valor del angulo MOS. (1.*p*.3. que es el arco MS.

Pratica 2.

Dada la recta AB. y el angulo CDE. del centro D. descriuase qualquier arco CEF. y tomando EF. igual a CE. se juntaràn CF. FD. Hagan se los angulos ABG. GAB. iguales a CFD. (1.*p*.1.) y del concurso G. se descriue el arco ANB. digo que tomando en la circunferencia qualquier pũto N. serà el angulo ANB. igual al dado CDE. porque el angulo ANB. es la mitad del angulo AGB. (3.l.3.) luego es la mitad de CDF. ò igual a CDE.

Dado el circulo, de qualquier punto N. tirese qualquiera recta NB. y hagase el angulo BNA igual a CDE. el arco ANB. es capaz del angulo dado, porque todos seràn iguales a BNA. (3.l.3.) que es CDE.

Consectario. La otra recta dada sea MN. descrito el arco ANB. capaz del angulo CDE. el angulo ANB. toca a la recta MN. (17.P.) y es igual a CDE. lo mesmo serà del angulo AMB. si se tiran las rectas AM. MB. si el circulo no corta a la recta MN. serà impossible el caso. Lo mesmo es de la curua PN.

Pratica 3.

El circulo es FGH. y el arco AB. busquense sus centros C. O. sino estàn dados (4.*p*.1.) tirada CF. se cortarà CE. igual a OB. y descrito el arco ED. se tomarà igual a BA. tirada CDG. seràn semejantes los arcos GF. DE. AB. porque son medida de vn mesmo angulo GCF. (10.P.)

Pratica 4.

Dado el circulo BFG. y el punto B. en la circunferencia: tirese el radio CB. y su perpendicular BA. (1.*p*.6.) y serà tangente (7.l.3.)

Si el punto A. està fuera, passe AC. por el centro, y diuidida CA. igualmente en D. se descriua el semicirculo CBA. y serà el angulo CBA. recto (3.l.3.) luego AB. tangente (7.l.3.)

Si la recta es dada AB. y en ella el punto B. tirese BG. perpendicular (1.*p*.6.) y tomando BC. igual al radio, que se desea, se descriuirà el circulo GFB. que tocarà a la recta BA. en B. (7.l.3.)

Si el centro C. està dado, tirese CB. perpendicular (1.*p*.6.) y el circulo BFG. tocarà a la recta BA. en B. (7.l.3.)

Pra-

Pratica 5.

Dado el circulo MOH. y el punto A. fuera, passe AC. por el centro C. y con el radio AO. se descriua el circulo OGD. y tocara a MOH. en O. Si el punto dado es B. passe BC. por el centro, y descriuase el circulo OLS. Si es dado el punto del contacto O. passe OC. por el centro, y los circulos DGO. y OLS. tocaràn a MOH. en O. (6.l.3.)

Pratica 6.

Sea dada la recta AB. y la infinita CD. continuada AB. Si corta a CD. en D. hagase DC. media entre BD. DA. (2.*p*.5.) y por los tres puntos A. B. C. descriuase vn circulo (4.*p*.1.) que tocarà a CD. en C. porque siendo DC. media entre la secante AD. y su exterior segmento DB. serà DC. tangente (6.l.6.)

Si la finita dada es EF. paralela a CD. partase igualmente con el perpendiculo AGC. y por los tres puntos ECF. descriuase el circulo (4.*p*.1.) y tocarà a la recta CD. por ser el radio OC. perpendicular (7.l.3.)

Consectario. Dada la recta AB. ò EF. finita, descriuase el circulo como antes: el angulo ACB. serà el mayor que puede tocar a CD. porque si el circulo fuera menor, no tocara a la recta CD. Si fuera mayor, la cortara, y el arco AFB. fuera de menos valor sobre la mesma cuerda AB. (5.l.6.)

Pratica 7.

Dado el circulo BDC. y el punto A. dentro, ò fuera, se ha de tirar ABC. que BC. sea igual a XZ. tomando qualquier punto D. hagase DE. igual a XZ. y del centro O. descriuase el circulo GHR. que toque a DE. (4.*p*.4.) y del punto A. tirese ABC. que toque al circulo GHR. y serà BC. igual a XZ. ò ED. porque las distancias del centro OG. OH. son iguales (2.l.3.)

PROBLEMA V.

De las figuras inscritas, y circunscritas.

1 *Circunscriuir vn circulo a vn triangulo, è inscriuir vn triangulo en vn circulo.*

2 *Inscriuir vn circulo en vn triangulo, y circunscriuir vn triangulo a vn circulo.*

3 *Inscriuir vn hexagono, y triangulo regular en vn circulo, y las figuras de doblados lados.*

4 *Ins-*

4 *Inscriuir vn quadrado, y octagono, &c.*

5 *Inscriuir vn pentagono, quindezagono, y las de doblados lados.*

6 *Circunscriuir al circulo todas las figuras regulares; y al contrario, ò inscriuir el circulo en ellas.*

7 *Diuidir el circulo en 360. grados.*

Pratica 1.

1 *Dado el triangulo ABC.* descriuase por los tres puntos A. B. C. el circulo (4.*p*.1,) y quedarà circunscrito al triangulo.

Dado el triangulo ABC. y el circulo GDE. circunscriuase el circulo ABC. como antes, y tomando qualquier punto G. cortense los arcos GD. DE. semejantes a A*B*. *B*C. (4.*p*.3.) y serà DEG. el triangulo inscrito equiangulo a *B*CA. (3.l.3.)

Pratica 2.

Sea el triangulo ABC. partan CO. *B*O. igualmente los angulos C. y *B*. (1.*p*.2.) sea OF. perpendicular, y cortese *B*G. igual a *B*F. y CE a CF. y con el radio OF. descriuase el circulo EFG. porque EC. CO. son iguales a FC, CO, y comprehende iguales angulos ECO. OCF. serà

serà OE. igual a OF. y el angulo E. recto, como F. (4.l.1.) y assimesmo OG. perpendicular igual a OF. luego el circulo passa por E. y G. y por ser los angulos E. G. F. rectos toca a los lados (7.l.3.) y està inscrito en el triangulo. (17.P.)

Sea el triangulo ABC. y el circulo PMN. inscriuase el circulo EGF. como antes, y tomando qualquier punto P. haganse los arcos PM. PN. semejantes a GE. GF. tirados los radios HP. HM. HN. tirense perpendiculares SMZ. ZNR. RPS. y tocarà el triangulo SRZ. al circulo PMN. (7.l.3.) y serà semejante a ABC. porq̃ los quatro angulos M. H. N. Z. son iguales a E. O. F. C. (3.l.1.) luego porque M. H. N. se han hecho iguales a E. O. F. serà Z. igual a C. (3.l.1.) assimesmo S. igual a A. y R. a B. luego son equiangulos, y semejante ZSR. CAB. &c.

Pratica 3.

Sea el circulo ADF. con el mesmo radio CA. tomense las distancias AB. BD. DE. EF. FG. y fenecerà en GA. Porque el triangulo ABC. es equilatero: son sus tres angulos iguales (5.l.1. luego el angulo C. es de 60. grados, que es vn tercio de dos rectos, ò semicirculo 180. y vn sexto de todo el circulo, y assi el arco AB. su medida (10.P.) es la sexta parte de todo el circulo: y los angulos A. B. D. todos son iguales, que constan de 120. grados, ò dos sextas partes del circulo.

El triangulo BGE. es equilatero, porque los arcos BG. GE. EB. son iguales de dos sextas partes, luego tambien las cuerdas (3.l.3.)

Si todos los arcos, como AB. se diuiden igualmente (4.*p*.1.) se descriuirà el *dodezagono*, y assi infinitamente las figuras de doblados lados.

Pratica 4.

Para el quadrado, sea qualquier diametro CD. y EAB. su perpendicular, juntas AD. DB. BC. CA. formaran el quadrado, pues por ser los quatro angulos E. rectos, son los quatro arcos iguales (11.P.) luego las quatro cuerdas iguales (2.l.3.) y los quatro ~~angulos A. D. B. C. que insisten en los semicirculos, son rectos (3.l.3.)~~

Para el octagono, se partiràn igualmente los arcos en F. G. &c. (4.*p*.1.) y quedarà el circulo diuidido en 8. partes: luego juntando las cuerdas

das AF. FD. &c. se formarà el *octagono*.

Pratica 5.

El pentagono se descriue, tirando qualquier diametro BDE. formase el triangulo isoceles BDF. que los angulos D. y F. sean duplos de FBD. (3.*p*.3.) continuada DFG. es el arco BG. la quinta parte del circulo: y tomando sus iguales GH. HO. OL. se descriue el pentagono; porque los tres angulos D. F. B. son dos rectos (3.l.1.) luego porque D. F. son iguales, y cada vno duplo de B. serà B. vn quinto de dos rectos: luego D. es dos quintos de dos rectos, y del semicirculo: luego D. ò su medida GB. es vn quinto de todo el circulo, que es 72. grados.

El dezagono, partase HO. en E. igualmente, y serà HE. la decima parte del circulo.

El veintagono se hallarà partiendo igualmẽte el arco HE. (4.*p*.1.) ò tomando el quadrante BN. de 90. grados, y pues BL. es de 72. quedarà LN. de 18. que es la vigesima parte del circulo.

El treintagono, tomese BX. la sexta parte del circulo, ò 60. grados (5.*p*.3.) quitado de BL. 72. queda XL. de 12. que es la trigesima parte

 de

de 360. y de todo el circulo, y tomando LP. igual a LX. de 12. *gr.* queda PN. de 6. *gr.* la sexagesima parte del circulo, &c. el arco XP, de 24. g es la 15. parte del circulo;

Pratica 6.

Dado el circulo ABCD. inscriuase la figura, q̃ se ha de circunscriuir (5.*p*.3.4.5.) y tirando a los angulos los radios EA. EB. &c. haganse perpendiculares LAF. FBG. &c. y quedarà circunscrita la figura regular.

Dada la figura ABCD. si se ha de circunscriuir el circulo, partanse igualmente los lados AD. DC. con las perpendiculares OE. ZE. y con la distancia ED. se circunscriuirà el circulo DABC. &c.

Si el circulo se ha de inscriuir en la figura FGHL. partiendo igualmente los lados LF. LH. con los perpendiculos AE. DE. (1.*p*.6.) cõ el radio EA. se inscriuirà el circulo ABCD. la mesma pratica trae a los ojos la demonstracion.

Pratica 7.

Para diuidir el circulo en 360. *gr.* sobre la recta AB. descriuase el semicirculo AoB. y con la mesma abertura de compàs se tomarà *Ad.* y B6. de 60. *gr.* y desde *d.* y 6. con la mesma distan-

tan-

tancia se descriuan dos arcos que se cruzen en D. y serà DC. perpendicular, y *Ao.* quadrante, y con el mesmo radio de *A.o.* se descriuiràn dos arcos, que se cruzen en *n.* y *Cn.* partirà el quadrante *Ao.* igualmente, y serà *Ab.* y *bo.* de 45. *grados*; y tomando con el mesmo radio las distancias *or. o3.* quedarà todo el semicirculo diuidido en seis partes iguales, que cada vna vale 30. grados: diuidiedo cada vna en tres, tentando, quedarà el quadrante *Bo.* diuidido en nueue partes, que cada vna vale diez *gr.* y pues *bo.* es 45, y *do.* es 30. serà *db.* 15. *gr.* luego tomando esta distancia, y passandola de B. entre 1. y 2. tendremos los cinco grados, con que todo el quadrante *Bo.* puede quedar diuidido de 5. en 5. grados: luego se halla el lado del *pentagono* (5.*p*.5.) y sea *Ab.* 72. *gr.* quedarà *bo.* de 18. y pues *do.* es de 30. quedarà *db.* de 12. y partiẽdo *bo.* igualmente en *c.* serà *co.* de 9. *gr.* y pues *db.* y *rb.* son de 15. si quitamos *dx.* y *rz.* iguales a *db.* 12. quedarà *bx.* y *bz.* de 3. *gr.* y *zx.* de 6. y quitando *co.* 9. *gr.* de *o8.* quedarà 1. *gr.* que quitado de los 5. quedaràn 4. *gr.* y quitando *bo.* 18. de *o7.* que es 20. quedaràn 2. *gr.* con que teniendo ya 1, 2, 3, 4. y 5. *gr.* se acabarà

rà

rà de diuidir todo el quadrante *Bo.* en 90. y todo el ſemicirculo en 180. &c.

Vn ſemicirculo de bronze bien diuidido, es de ſuma importancia para formar los angulos, y hallar ſu valor.

PROBLEMA VI.

De la proporcion, ſuma, diferencia, y transformacion de las figuras.

1 *AVmentar, ò diſminuir las figuras ſemejantes en qualquiera proporcion, y hallar la proporcion de las ſemejantes.*

2 *Hallar la ſuma, ò diferencia de qualeſquiera figuras ſemejantes.*

3 *Formar vn anillo, ò marco regular, igual à qualquiera, ò qualeſquiera figuras de la meſma eſpecie, y al contrario.*

4 *Transformar vn triangulo en otro, ò vn paralelogramo en otro, dado vn angulo, y la baſe.*

5 *Transformar vn triangulo en vn paralelogramo, dado vn angulo, y la baſe, y al contrario*

6 *Transformar qualquiera figura en vn paralelogramo, dado vn angulo, y la baſe.*

7 *Transformar qualquiera figura en otra eſpecie dada, ò en vn quadrado, y hallar ſu proporcion.*

Pra-

Pratica 1.

Sobre la recta AB. eſtà qualquiera figura ABF. pideſe otra menor, que la mayor a la menor tenga la razon que G. a H. entre G. H. halleſe la media proporcional M. (2. *p.* 5.) conocidas las tres G. M. y AB. halleſe la quarta proporcional BC. (2. *p.* 7.) luego ſobre BC. deſcriuaſe la figura CBE. ſemejante a la dada ABF. (3. *p.* 7.) y ſerà CBE. la que ſe pide.

Demoſtr. La figura ABF. a CBE. tiene duplicada la razon de AB. a CB. (4. l. 6.) eſto es de G a M. la razon de G. a H. es tambien duplicada de G. a M. (21. P.) luego la razon de ABF. a CBE. es como la de G. a H. (1. l. 5.)

Si la figura CBE. ſe ha de aumentar en razon de H. a G. hallada la media M. ſe harà como H. a M. aſsi BC. a BA. (2. *p.* 7.) y la figura BAF. ſerà la que ſe pide, la demoſtracion es la meſma.

La proporcion de ABF a CBE. ſe hallarà ſi conocidas AB. CB. ſe halla la tercera proporcional DB. (2. *p.* 6.) porque AB a DB. tiene la razon duplicada de AB a CB. (21. P.) como vna figura a otra ſemejante (4. l. 6.)

Pra-

Pratica 2.

Considerense descritas sobre las rectas *a.c. m.n.* qualesquiera figuras semejantes, circulos, ò triangulos, ò poligonos regulares, ò irregulares: pidese la suma de los quatro, formese el triangulo rectangulo, que C A. AB. sean iguales a *a.* y *c.* (1.*p.*4.) la figura de BC. serà la suma de CA. y AB. que son *a.* y *c.* (4. l. 6.) y tirando CD. perpendicular a CB. (1.*p.*6.) igual a *m.* serà BD. suma de DC. y CB. esto es de *a. c. m.* y si DE. se tira perpendicular a BD. y igual a *n.* serà BE. suma de BD. y DE. esto es de *a. c. m. n.* (4. l. 6.)

La diferencia de las figuras que se pueden descriuir sobre BC. y *a.* se hallarà si sobre la mayor CB. se haze vn semicirculo CAB y tomando CA. igual a *a.* serà AB. la diferencia, porque siendo recto el angulo A. del semicirculo (3. l. 3.) la figura de BC. es igual a la de CA. y AB. (4. l. 6.) luego la de CB. excede a la de CA. en toda la de AB. *Mas*, si la de *r.* excede a las de *a. c.* primero se sumaràn *a.* y *c.* y serà BC. y sobre la base BD. igual a *r.* se formarà el triangulo DBC. (3.*p.*4.) y serà CD. el excesso en que *r.* excede a *c. a.* &c.

Pra-

Pratica 3.

Sea dado el circulo menor GZX. y el mayor AFE. pidese el intermedio *arn.* que el anillo, ò espacio comprehendido entre entre los dos AFE. *arn.* sea igual al circulo GZX. Tomese la diferẽcia entre los circulos OA. OG. (6.*p.*2.) y se hallarà O*a.* que se pide, porque siendo el circulo del radio OA. igual a los de los radios OG. O*a.* serà el circulo GZX. la diferencia entre los circulos AFE. *arn.* (6.*p.*2.) y pues el anillo entre los dos circulos AFE. *arn.* es tambien la diferencia de los dos, porque es lo que excede AFE. a *arn.* serà el anillo igual al circulo dado GZX. (3.P.)

Si se dà el circulo GZX. y el interior del anillo *arn.* y se busca el exterior AFE. se hallarà la suma de los circulos OG. O*a.* (6.*p.*2.) que serà OA. y el anillo comprehendido de los circulos AFE. *arn.* serà igual al circulo GZX.

Dado el anillo entre AFE. *arn.* si se toma la diferencia entre los circulos OA. O*a.* (6.*p.*2.) se hallarà el circulo OG. que es GZX. igual al anillo dado.

Lo mesmo que del anillo, se dize del marco entre los exagonos AFE. *arn.* respeto del

V exa-

exagono GZ X. y lo mesmo es de qualesquiera figuras regu lares que se pueden inscriuir en los circulos.

Pratica 4.

Sea el triangulo dado MNS. la nueua base MR. y el nueuo angulo sobre la base sea G. Hagase el angulo RMP. igual a G. y SQ. paralela a MN. que cortarà a MP. en O. juntese oculta RO. y NP. paralela a RO. el triangulo MRP. es igual a MNS. y tiene la base, y angulo dado. *Demonstr.* Por ser paralelas RO. NP. son proporcionales RM. a MO. como MN. a MP. luego porque los triangulos PMR. OMN. tienen los lados reciprocos, y el angulo OMN. comun, seràn iguales (1. l. 6.) luego porque MON. es igual a MSN. sobre vna base, y entre dos paralelas (8. l. 1.) serà MPR. igual a MSN. (3. P.)

Otra vez. Sea dado el triangulo MRP. la nueua base MN. y el angulo opuesto a la base ha de ser igual a L. Tirese NP. y hagase RO. paralela a NP. y OSQ. paralela a MN. luego sobre MN. descriuase vn arco capaz del angulo L. (4. *p.* 2.) que cortarà a OQ. en S. serà el triangulo MSN. el que se pide; pero si el circulo

lo no corta a la paralela OQ. serà el caso imposible. *Demonstr.* El triangulo MON. es igual a MPR. como antes (1. l. 6.) MON. es igual a MSN. (8. l. 1.) luego MNS. es igual a MPR. y tiene el angulo S. igual a L. (3. l. 3.) opuesto a la base dada MN. como se deseaua.

Lo mesmo es en los paralelogramos MX. MQ. por ser duplos de los triangulos (8. *l.* 1.) pero en el segundo caso el angulo S. opuesto a la base, es el que haze el diametro NS. con el lado SM. La pratica es la mesma.

Pratica 5.

Dado el triangulo ABE. la base AC. y el angulo CAD. se pide el paralelogramo AG. igual a BEA. formese el triangulo ADC. igual a BEA. (6. *p.* 4.) y partiendo igualmente AD. en F. sean FG. CG. paralelas a CA. AF. y serà AG. el que se pide; porque AF. es la mitad de AD. es el paralelogramo AG. igual al triangulo DAC. (8. l. 1.) esto es a BEA. como se deseaua.

Dado el paralelogramo AG. la base AB. y el angulo BAE. ò AEB. tomese FD. igual a FA. y serà DCA. igual a GA. (8. l. 1.) haràse despues el triangulo AEB. con la base, y angulo dado, igual a DCA. (6. *p.* 4.) y serà tambien igual à GA. (3. P.)

Pratica 6.

El rectilineo ABCDE. se ha de transformar en vn paralelogramo GS. que la base sea dada GH. y el angulo dado H. diuidase el rectilineo en los triangulos EAD. ADC. ACB. y sobre BH. hagase el paralelogramo GN. igual al triangulo AED. sobre MN. el paralelogramo MQ. igual a DCA. y sobre PQ. el paralelogramo PS. igual a CBA. (*6.p.4.*) luego todo GS. serà igual a los triangulos del rectilineo, que son el mesmo rectilineo (2.P.)

Pratica 7.

Dados los rectilineos Z. y X. pidese vno semejante a X. que sea igual a Z. tomando qualquiera recta FC. y qualquier angulo C. hagase el paralelogramo CB. igual a Z. y sobre BD. el paralelogramo BE. igual a X. (*6.p.6.*) tomese *nr*. quarta proporcional, como ED. a DC. assi *nm*. a *nr*. (2.*p*.7.) y hallada la media *ns*. que seã tres continuas *nr*. *ns*. *nm*. (2.*p*.5.) se descriuirà sobre *ns*. vn rectilineo semejante a X. (3.*p*.7.) y serà igual a Z. como se pide.

Demonstr. X. a Z. es como EB a BC. sus iguales: EB. a BC. es como ED. a DC. (1.l.6.) luego X a Z. es como ED. a DC. (1.l.5.) y por ser tres

continuas *nm*. *ns*. *nr*. es X. a *x*. como *nm* a. *nr*. (4.l.6.) y pues *nm*. a *nr*. se hizo como ED. a DC. (1.l.5.) esto es como X. a Z. luego Z. y *x*. son iguales entre si (2.l.5.) y *x*. semejante a X. &c.

La reduccion al quadrado se puede hazer de la mesma suerte; pero mas facil serà tomar qualquiera recta FC. y el angulo C. recto, y hazer el rectangulo BC. igual a Z. (6.*p*. 6.) y hallando entre CD. DB. la media *h*. (2.*p*. 5.) el quadrado de *h*. serà igual al rectangulo BC. (1. l.6.) y al rectilineo Z. &c.

La razon de X a Z. se hallarà si se forma el rectangulo FD. igual a Z. y sobre BD. el rectangulo BE. igual a X. (6.*p*.6.) y serà X a Z. como EB a DF. esto es como DE. a DC. (1.l.6.)

PROBLEMA VII.

De la superficie, y solidez.

1 *HAllar la superficie de vn paralelogramo, y triangulo.*

2 *Hallar las superficies planas rectilineas de todas las figuras, y cuerpos.*

3 *Hallar la altura de los solidos.*

4 *Hallar la solidez de los paralelepipedos, y prismas.*

5 *Hallar la solidez de las piramides, y cuerpos regulares.*

6 *Describir vn solido semejante a otro sobre vn lado dado, y hallar la razõ de dos solidos semejãtes*

7 *Transformar vn paralelepipedo, prisma, ò piramide en otro dado, su base rectilinea, ò su altura.*

Explicacion de la superficie.

LA superficie se mide por quadrados de aquella recta, que es medida de los lados de la figura, como si vn triangulo equilatero tiene diez pies de lado, la superficie se medirà por pies quadrados, ò por quadrados que tienen vn pie de lado: y lo mesmo es de qualquiera otra medida, en que se consideran diuididos los lados de la figura.

Explicacion de la solidez.

La solidez de los cuerpos se mide por cubos de aquella recta que es medida de los lados del solido, como si los lados del solido se miden por pies, la solidez se medirà por pies cubicos, ò por cubos, que tienen vn pie de lado: y lo mesmo es de qualesquiera otras medidas.

Pratica 1.

El producto de la base, y altura es la superficie del paralelogramo.

Exemplo 1. Si el paralelogramo es rectangulo, como FB. y la base AB. tiene 3. pies, y el lado AF. tiene 5. se multiplicarà vno por otro, y el producto serà 15. pies quadrados, y es toda la superficie de FB. como se vê en el rectangulo Z. que se compone de 15. quadrados.

Exemplo 2. Si el paralelogramo no es rectãgulo, como AD. se tira la perpendicular AE. al lado opuesto, y si hallo que AB. tiene 3. pies, y AE. 5. multiplicando el lado por el perpendiculo, que es 3. por 5. salen 15. pies quadrados la superficie de AD. porque considerando BF. tambien perpendicular, serà el rectangulo BE. igual al rhomboide AD. (8.l.1.)

El producto de la base, y mitad de la altura, ù de la altura, y mitad de la base es la superficie del triangulo: porque el triangulo es medio paralelogramo. (8.l.1.)

Exemplo 1. Si el triangulo PRO. es rectangulo, serà PR. perpendicular, y la altura del triangulo: pues si PR. es de 4. pies, y la base RO. de 9. multiplicando 9. pies por 2. que es la mitad de la altura, sale la superficie 18. pies quadrados: tambien si multiplico la altura 4. por la mitad de la base, que serà 4. y medio, sale 18.

Exem-

Exemplo 2. En el triangulo HLP. el per pen diculo PR. cae dentro, y es 4. pies, su mitad 2. y HL. la base es 5. multiplicando 5. por 2. sale la superficie 10. pies quadrados.

Exemplo 3. En el triangulo LOP. cae el perpendiculo PR. fuera del triangulo en la base OL. continuada: la base es 6. el perpendiculo 4. su mitad 2. multiplicando 6. por 2. sale la superficie 12. pies quadrados.

Pratica 2.

Qualquiera figura ABCDEF. se resue lue en triangulos: luego hallada la superficie de todos los triangulos (7. *p.* 1.) constarà la superficie de toda la figura. Lo mesmo es en todas las sup erficies planas rectilineas de los cuerpos.

En las figuras regulares, multiplicando el per imetro, ò suma de todos los lados, por la mitad del perpendiculo del centro a vno de los lados, sale la superficie. Lo mesmo es si se multiplica el perpendiculo por la mitad del perimetro. De donde se infiere, que en el circulo que se considera como poligono de infinitos lados, y su perpendiculo es el radio, si se multiplica este por la mitad de la circũferencia, ò perimetro, el producto, ò rectangulo serà la superficie, ò area de todo el circulo.

El modo de hallar la circunferencia se dirà (8. *p.* 4.) Otra regla hallarà el curioso en mi Arithmetica *lib.* 4. *cap.* 9. para hallar las superficies por los lados, y los lados por las superficies, y transformar vnas figuras en otras, &c.

Pratica 3.

En los prismas, piramides, y paralelepipedos, que tienen vn lado BC perpendicular a la base, el mesmo lado es su altura.

Si los lados estàn inclinados, como en la piramide ADXE. del punto E. se arrojarà el perpendiculo EZ. sobre el plano de la base continuado, y serà la altura del solido.

Si el perpendiculo huuiere de caer dentro del solido, como en la piramide *carb.* por el vertice *b.* se acomodarà vna regla, ò linea recta *bg.* y paralela a la base del solido, y de qualquiera punto *g.* se arrojarà el perpendiculo *go.* que serà la alturà del solido.

Pratica 4.

Multiplicando la superficie de la base por la altura del paralelepipedo, ò prisma sale su solidez. En el paralelepipedo rectangulo DC. la base es el paralelogramo AC. sus lados AB. de 4. pies, y BC. de 3. luego multiplicando 4. por 3. sa-

ſale la ſuperficie AC. 12. pies quadrados (7. p. 1.) multiplicando eſta ſuperficie por la altura AD. 10. pies, que es el perpendiculo comun a los planos inferior, y ſuperior, ſalen 120. pies cubicos la ſolidez del paralelepipedo DC.

En los priſmas es lo meſmo, como en el priſma pentagono Z. por la *Pratica* 2. Si hallo que la ſuperficie de la baſe tiene 20. pies quadrados, y ſu altura 10. multiplicando 20. por 10. ſalen 200. pies cubicos, que es toda la ſolidez del priſma; porque los priſmas, y paralelepipedos de igual baſe, y altura ſon iguales (5. l. 11.)

Pratica 5.

Multiplicando la ſuperficie de la baſe por vn tercio de la altura de la piramide ſale ſu ſolidez. Porque la piramide es vn tercio del priſma que tiene igual baſe, y altura (5. l. 11.) como en la piramide ABCD. la ſuperficie del triangulo ABC. que es ſu baſe, ſe hallarà por la *pratica* 1. ſupongamos ſea 20. pies quadrados: ſu altura, que es la perpendicular DO. del vertice al plano de la baſe, ſea 9. pies, ſu tercio ſerà tres pies: y multiplicando la ſuperficie 20. por 3. ſale la ſolidez 60. pies cubicos. Lo meſmo es

es en todas, aunque la baſe ſea quadrada, pentagona, &c.

Si la piramide eſtà rompida, como HLFQIP. y le falta el pedaço ſuperior PQIR. aplicando dos reglas a los lados HP. FQ. ſe hallarà el vertice R. y ſeràn dos piramides HFLR. PQIR. y tomadas las alturas del punto R. ſobre los planos HFL. PQI. (7. p. 3.) y halladas las ſuperficies deſtos (7. p. 2.) ſe hallarà primero la ſolidez de HFLR. y deſpues la de PQIR. como antes: y quitando eſta de aquella, quedarà la ſolidez del pedaço HFLPQI. &c.

La ſolidez de los cuerpos regulares ſe hallarà explicada con facilidad en mi Arithmetica *lib. 4. cap. 9.* con que eſcuſo el repetirla en en eſte lugar.

Pratica 6.

Sobre la recta dada ED. ſe ha de hazer vn ſolido ſemejante a RH. Formeſe primero ſobre ED. la baſe DC. ſemejante a BA. (3. p. 7.) y ſobre EC. el plano CG. ſemejante a OA. y ſobre ED. el plano DG. ſemejante a BO. &c. Formados todos los planos ſemejantes, y diſpueſtos con el meſmo orden, ſeran los ſolidos RH. EF. ſemejantes, porque todos los angulos

los ſeràn iguales, y los lados proporcionales (23.P.

La razon del ſolido RH. a EF. ſe hallarà, ſi dados los lados homologos RB. y ED. ſe halla la tercera proporcional M. (2.*p*.6.) y conocidas RB. ED. y M. ſe halla la quarta N. (2.*p*.7.) con que ſeràn quatro continuas RB. ED. M. N. y RB a N. tiene la razon triplicada de RB a ED. (21.P.) y pues RH a EF. tambien tiene la razon triplicada de RB a ED. (6.l.11.) la razon de RH. a EF. ſerà la meſma que la de RB a N. (1.l.5.)

Pratica 7.

Sea vna piramide ABCD. quiereſe otra igual ſobre la baſe dada EFGHI. Lo primero ſe hallarà la razon de la baſe EFGHI. a la baſe ABC. (6.*p*.7.) y ſea como *b*. a *d*. y tomando la recta *a*. igual a la altura de la piramide ABCD. conocidas *b*. *d*. *a*. ſe hallarà la quarta proporcional *c*. (2.*p*.7.) que ſi ſe toma por altura de la piramide EFGHIO. ſerà igual a ABCD. porq̃ ſon reciprocas como la baſe EFGHI. a la baſe ABC. aſsi la altura *a*. a la altura *c*. luego ſon las piramides iguales (5.l.11.)

Si ſe huuiere de hazer piramide igual a vn priſma, ſe tomarà el triplo de la altura hallada.

da. Si vn priſma igual a vna piramide, ſe tomarà el tercio de la altura hallada, porque el priſma es triplo de la piramide (5.l.11.)

Quando la altura es dada, como *c*. tomando la altura de la piramide dada ABCD. que es *a*. la razon de *c*. a *a*. ſerà la de las baſes: luego formando otra baſe ſemejante a ABC. en razon de *c*. a *a*. (6.*p*.1.) y transformandola deſpues en qualquiera eſpecie de figura (6.*p*.7.) ſaldrà ſiempre la piramide igual, porque ſiempre ſeràn las baſes, y alturas reciprocas. Lo meſmo es en los priſmas, &c. Entre priſmas, y piramides ſe toma el triplo, ò tercio como antes.

PROBLEMA VIII.

De los problemas no reſueltos.

1 *De la triſeccion del angulo, ò arco, &c.*

2 *De la inſcripcion del heptagono. &c.*

3 *De las dos medias proporcionales, &c.*

4 *De la quadratura del circulo.*

Aduertencia.

Problemas no reſueltos llamo a los que no eſtàn ſin controuerſia demoſtrados: y aſsi pongo entre ellos la quadratura del circulo, ſin negar por eſſo la gloria que merece al P. Gre-

Gregorio de San Vincencio, de la Compañia de Iesus (Mathematico insigne, y a mi juizio en solo el tiempo inferior a los maximos Apolonio, y Archimedes) hasta que su quadratura estê sin controuersia admitida de todos.

1 DE LA TRISECCION, &c.

El angulo recto facilmente se diuide en tres partes iguales, porque el angnlo de vn triangulo equilatero es vn tercio de dos rectos (5.l.1. luego su mitad serà vn tercio de vn recto. Methodo general para todos los angulos, hasta oy no se ha visto.

Caramuel en su Mathematica nueua, que acaba de salir a luz este año de 1670. dize, que carecieron desta demonstracion Ptolomeo, y los antiguos; y en la *pag.* 330. *num.* 270. nos la propone desta suerte.

Sea el angulo FCB. ò el arco FB. su medida, juntando FB. tirese CIG. con tal arte que FI. FG. sean iguales, y serà el arco FG. vn tercio de FB. porque los triangulos FCG. GFI. son isoceles, y siendo el angulo G. comun seràn iguales angulos FCG. GFI. (3.l.1.) luego FG. es la mitad de GB. (3.l.3.) ò el tercio de FB. Inmortales gracias dieramos a Caramuel si nos demostrara el arte con que se ha de tirar la linea CIG. pues sin esto queda por resoluer el problema. No carecieron los antiguos de medios para la resolucion.

Papo Alexandrino propone este *lib.* 4. p. 32. sea el angulo dado MLN. y de qualquier punto M. caiga el perpendiculo MN. tirada LP. que OP. sea dupla de LM. serà el angulo NLP. la mitad de PLM. ò vn tercio de NLM. y aunque le trae para el angulo agudo, es tambien general para los obtusos.

Francisco Vieta en el suplemento *p.* 9. propone otro medio. Sea el angulo HIK. ò su medida el arco KH. cõtinuado el diametro KZA. si se tira HA. que EA. se igual al radio IK. serà ZE. vn tercio de KH.

Añado otro medio. Sea el arco TV. y el diametro TR. si se tira VY. que ZY. ZS. sean iguales, serà RY. ò TX. vn tercio de TV. porque es isoceles ZYS. luego los angulos ZYS. ZSY. iguales (5.l.1.) luego YR. ò TX. es la mitad de VX. (3.l.3.) ò vn tercio de TV. todas estas no son demostraciones, porque el medio que se toma, incluye la misma dificultad, y no se demuestra.

An-

Antonio Sanctinio, Professor Romano, publicò el año 1648. vn libro, que intitulò *Inclinationum appendix*, donde trae varias resoluciones, pero llenas de paralogismos. Su censura merece especial tratado, y en èl tendrà su lugar la que mereciere otra trisección, que en esta Corte aguardamos.

Concluyo en que hasta oy solo se puede partir el angulo, ò arco igualmente en 2. 4. 8. 16. partes iguales, &c. procediendo por continua bisecciõn (1. *p*. 2.)

2 DEL HEPTAGONO.

No ay arte para inscriuir en el circulo otras figuras regulares, que las explicadas en el Problema 5. y las que se pueden continuar por bisección de los arcos. Las de 7. 9. 11. 13. 17. 19. lados, &c. se podian inscriuir geometricamente, si se hallasse arte para formar vn triangulo isoceles, que qualquier angulo sobre la base fuera triplo, quadruplo, &c. del vertical, como el triangulo isoceles del angulo duplo (5. *p*. 5.) sirue para el pentagono, el triplo siruiera para el *Heptagono*, el quadruplo para el *Nonagono, &c* Antonio Sanctinio trae vna pratica general, y aunque tengo demostrado su eror, error, con la aduertencia que añadirê, se aproxima tanto a la verdad, que es la operacion segura, y facilissima.

Pratica para todas las figuras regulares.

Del centro H. descriuase qualquier circulo ARB. y tomando qualquier punto A. sea AHB. su diametro. Tomense luego tantas partes iguales, como lados ha de tener la figura, y sea en el exemplo de 7. lados; desuerte, que el vltimo punto 7. cayga cerca del punto B. poco antes, ò despues, y tirada la linea AE. se partirà igualmente en O. y con el radio OA. se descriuirà el circulo ADEF. y siendo OC. perpendicular a AE. desde el punto C. se tirarà por el segundo punto C 2. que determinarà el punto D. y serà AD. la septima parte del circulo ADEF. y si se tira ED. que corte al primer circulo en *a*. serà A*a*. la septima parte del circulo ABC. (5. l. 3.) Quanto el punto E. fuere mas proximo a B. es mas segura la operacion. Lo mesmo es en las figuras de 9. y 11. lados &c.

3 DE LAS DOS MEDIAS.

Varios medios han tentado los Antiguos, y Modernos para hallar las dos medias proporcionales, q̃ les podrà ver el curioso en la Geo-

Y me-

metria del P. Claudio Ricardo, Maestro que fue de Mathematicas en estos Reales Estudios. Propongo solo vno, que me parece de los mas inteligibles, y claros.

Sean dadas E. D. y se buscan las dos medias B. C. que sean quatro continuas E. B. C. D. En vn angulo recto PFG. tomese FG. igual a E. y FP. igual a D. y hecho el rectangulo FK. de su centro A. se descriuirà el circulo FGKP. que passarà por los 4. angulos rectos (3.l.3.) continuados los lados KGH. KPR. si del punto F. se tira la recta FRH. que sean iguales RF. LH. seràn las dos medias HG. RP. y las quatro continuas FG. GH. RP. PF.

Para tirar la recta FR. no ay arte cierta, praticamente se puede hazer desta suerte. Del centro F. tirese vn circulo *pq.* desuerte, que P*p.* sea mayor que PF. y GH. menor que FG. y aplicado la regla a los puntos *p. q.* si no passa por F. se harà otro circulo RH. mayor, ò menor que la recta RH. passe por F. y seràn RF. LH. iguales, y tambien RL. HF. (4.l.3.)

A

Demonstr. El rectangulo KHG. es igual a FHL. (6.l.6.) esto es a LRF. ò KRP. luego son los lados reciprocos (1.l.6.) como HK. a KR. assi

assi RP. a HG. y pues FP. a PR. es como HK. a KR. (2.l.6.) serà como FP. a PR. assi RP. a HG. (11.l.5.) y son tres continuas FP. PR. HG. y por ser proporcionales FP. a PR. como HG. a GF. (2.l.6.) seràn quatro continuas, como FP. a PR. assi PR. a HG. y assi HG. a GF. luego RP. HG. son dos medias entre FP. FG. que son E. y D. &c.

Tambien es cierto, que si se resoluiesse este Problema. *Dadò vn angulo RPF. y vn punto H. dentro, ò fuera, tirar la recta HR. que FR. sea igual a vna dada*, se resoluerian las dos medias, como lo demostrò Vieta en el Suplemento, *prop.5.* y tambien la triseccion del angulo, como vimos en la construcion de Papo Alexandrino.

De las dos medias depende la construccion de los Solidos semejantes en qualquiera razō, y proporcion dada. Como si la recta D. fuere lado de vn solido cubo, prisma, ò piramide, &c. y se pide otro semejante duplo, triplo, &c. si se toma E. dupla, ò tripla de D. ò que E. a D. tenga la razon dada, y se hallan dos medias B. y C. los solidos de C. y D. semejantes tendràn entre si la razon que E. a D. porque vn solido a

 otro

otro ſemejante tiene la razon triplicada de los lados (6.l.11.) y por ſer quatro continuas E.B.C.D. tiene tambien E.a D. la razon triplicada de E.a B. ò C.a D. (21.P.) luego el ſolido C. al ſolido D. tendrà la razon que la recta E.a D. (1.l.5.)

A mas del aumento, ò diminucion de los ſolidos ſemejantes, penden de las dos medias innumerables Problemas; deſuerte, que con ſolo eſte quedaria la Geometria enriquecida, y ſus terminos notablemente dilatados, y con nombre inmortal quien le reſolvieſſe.

4 DE LA QVADRATVRA.

Lo que ſe pide en la Quadratura, es formar vn quadrado, que ſu area, ſuperficie, ò capacidad ſea igual al eſpacio que la linea circular comprehende. Otro Problema es, *hallar la proporcion del diametro con la circunferencia.*

Eſtos dos Problemas tienen tal connexion, que hallado el vno, queda reſuelto el otro; pero ninguno de ſu naturaleza pide que el otro ſe halle primero; porque admitida eſta mutua dependencia, fuera impoſsible la reſolucion de entrambos, como es impoſsible que los dos ſean mutuamente primeros. La quadratura, pues,

pues, ſe puede hallar ſin que ſirua de medio la proporcion del diametro, y circunferencia, como en la *Lunula* que quadrò Hipocrates Chio; y al contrario.

Demoſtrò Archimedes, que el circulo es igual a vn triangulo que tiene la baſe igual a la circunferencia, y la altura, ò perpendiculo igual al radio; porque qualquiera figura regular inſcrita en el circulo ABCD. ſe reſuelue en tantos triangulos iguales, y ſemejantes, como lados; y pues todos tienen igual perpendiculo GO. es toda la figura igual a vn triangulo que tiene la baſe igual a todos los lados AB. BC. CD. &c. y la altura igual al perpendiculo GO. (1.l.6.) Conſiderando, pues, al circulo como poligono de infinitos lados, que ſu perpendiculo es el meſmo radio, ſerà todo el circulo igual tambien al triangulo, que tiene por baſe vna recta igual a toda la circunferencia, y al radio por altura, ò perpendiculo.

De donde ſe infiere, que conocida la proporcion del diametro a la circunferencia, y dado el diametro, es dado el radio, y ſe pudiera hallar vna recta igual a la circunferencia (2.p.7.) y con eſta baſe formando qualquier triangulo que tenga por altura el radio, serà igual al circulo; y despues facilmente se pudiera transformar en quadrado (*6.p.7.*)

Proporcion de Archimedes.

El diametro a la circunferencia tiene la proporcion proxima que 7. a 22. pero sale la circunferencia mayor de lo justo. Dado, pues, el diametro, se hallarà la circunferencia por vna regla de tres. Si vn circulo tiene de diametro 35. pies, dirê si 7. dan 22. que daràn 35. salen 110. pies. Si se diere la circunferencia de 110. para hallar el diametro, diré si 22. dan 7. que daràn 110. salen 35. pies de diametro.

Proporcion de Adriano Mecio.

El diametro 113. la circunferencia 355. esta proporcion es la mas ajusta de quantas se han hallado en numeros pequeños, pues no excede la circunferencia a lo justo en tres partecillas de diez mil, en que se puede considerar el diametro diuidido.

Proporcion de Ceulen.

Diametro. 100.000.000.000.000.000.000.
Circunfer. 314.159.265.358.979.323.847

Esta no excede en vna partecilla de cien tricuentos. El vso destas es el mesmo que antes por

por regla de tres, como se hizo antes.

Consectarios.

1 *La superficie del circulo* es el producto del radio en la mitad de la circunferencia, como si el diametro es 14. serà el radio 7. la circuferencia 44. su mitad 22. multiplicando 22. por 7. salen 154. pies quadrados la superficie del circulo.

2 *La superficie conuexa del cilindro recto* es el producto del lado en la circunferencia del circulo, que es su base: y añadidas las dos superficies del circulo superior, ê inferior, serà toda la superficie del cilindro, como si la base tiene de diametro 14. pies, serà su circunferencia 44. multiplicada por la altura 10. pies, serà la superficie conuexa 440. pies quadrados, y añadidas las dos superficies circulares de 154. serà toda la superficie 748. pies quadrados. En los siguientes Consectarios se obra de la mesma suerte.

3 *La superficie conica conuexa* es el producto del lado en la mitad de la circunferencia de la base circular: y añadida la superficie del circulo, serà toda la superficie conica.

4 *La superficie de vna esfera* es el producto de

de su diametro en la circunferencia del circulo que tiene el mismo diametro; tambien es el quadruplo de la superficie del dicho circulo.

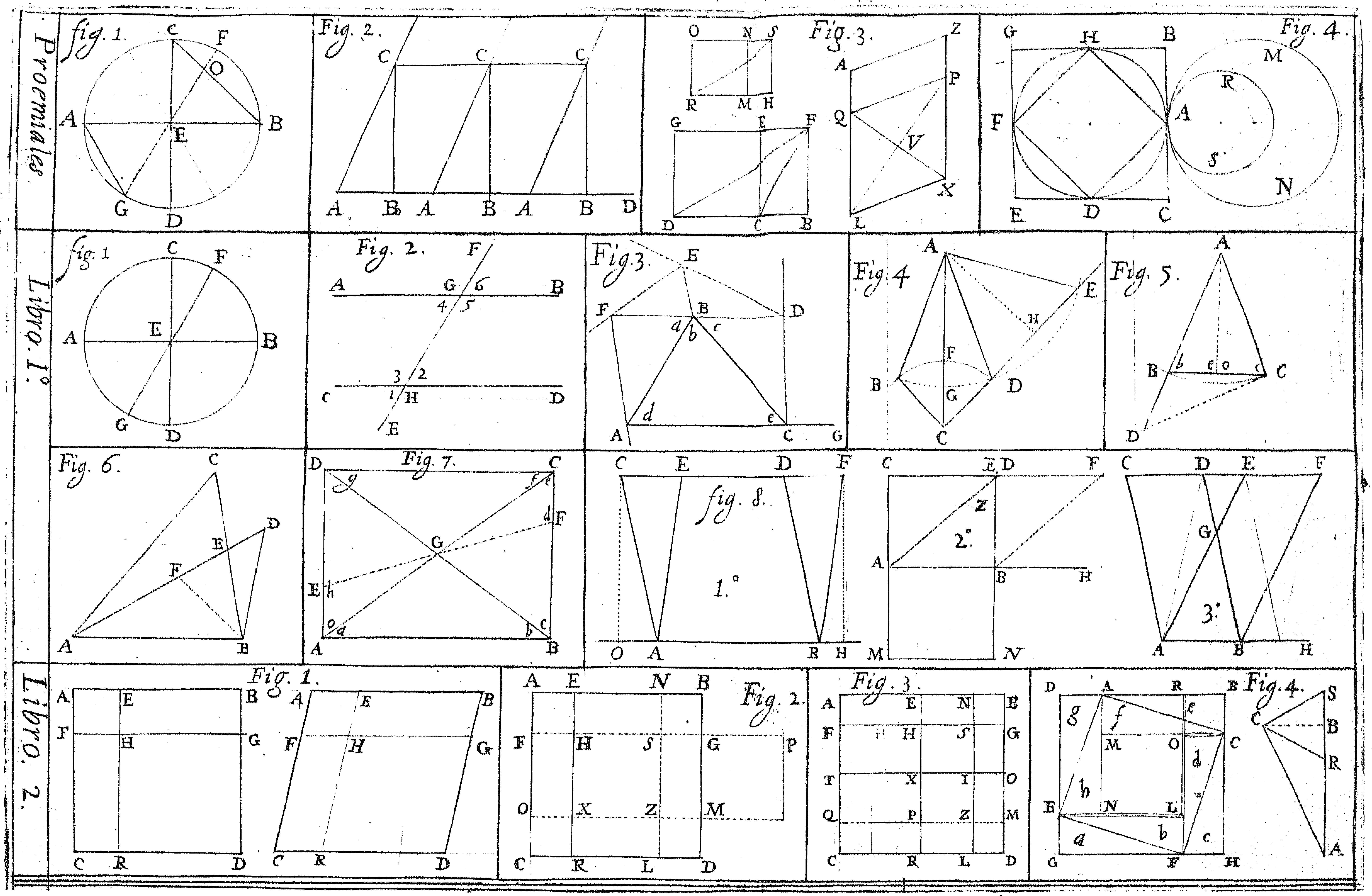
5 *La solidez de la esfera* es el producto del radio en vn tercio de su superficie.

6 *La solidez del cilindro* es el producto de su altura en la superficie de su base.

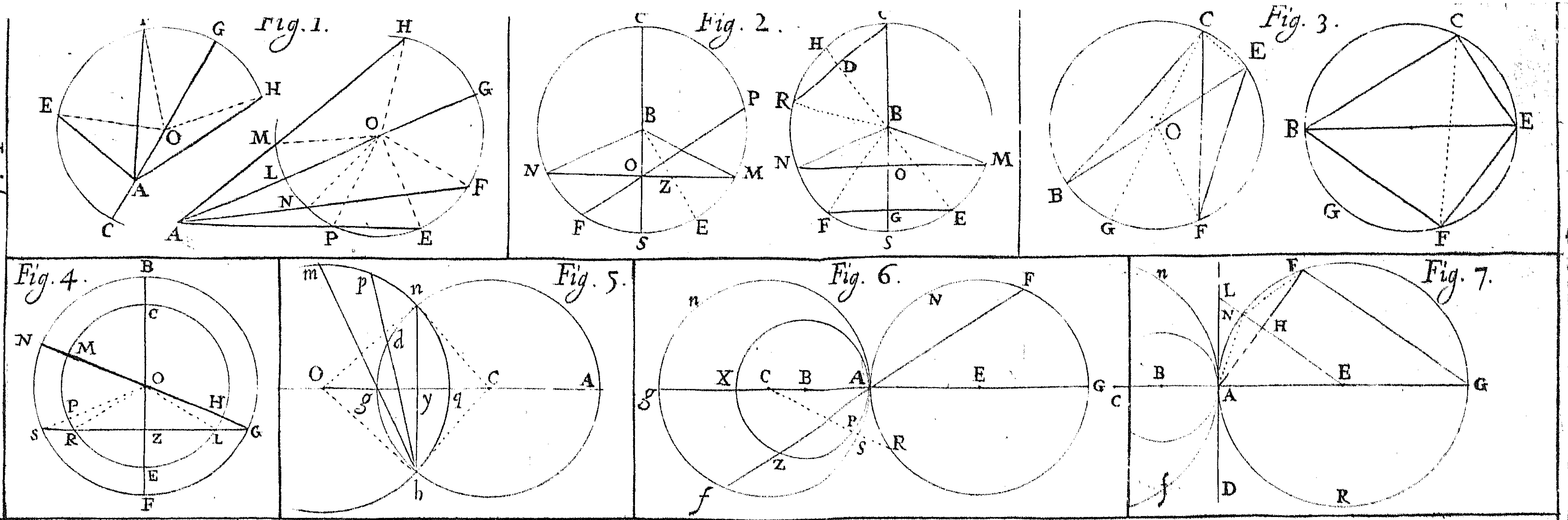
7 *La solidez conica* es el producto de vn tercio de su altura en la superficie de su base circular.

Todos estos Consectarios demostrò Archimedes, y quedan resueltos hallada la quadratura, pero basta para la pratica hallar la circunferencia, y superficie por las proporciones de Archimedes, ò Mecio; y en caso que se desee mayor precision, se puede tomar la que Ceulen propuso.

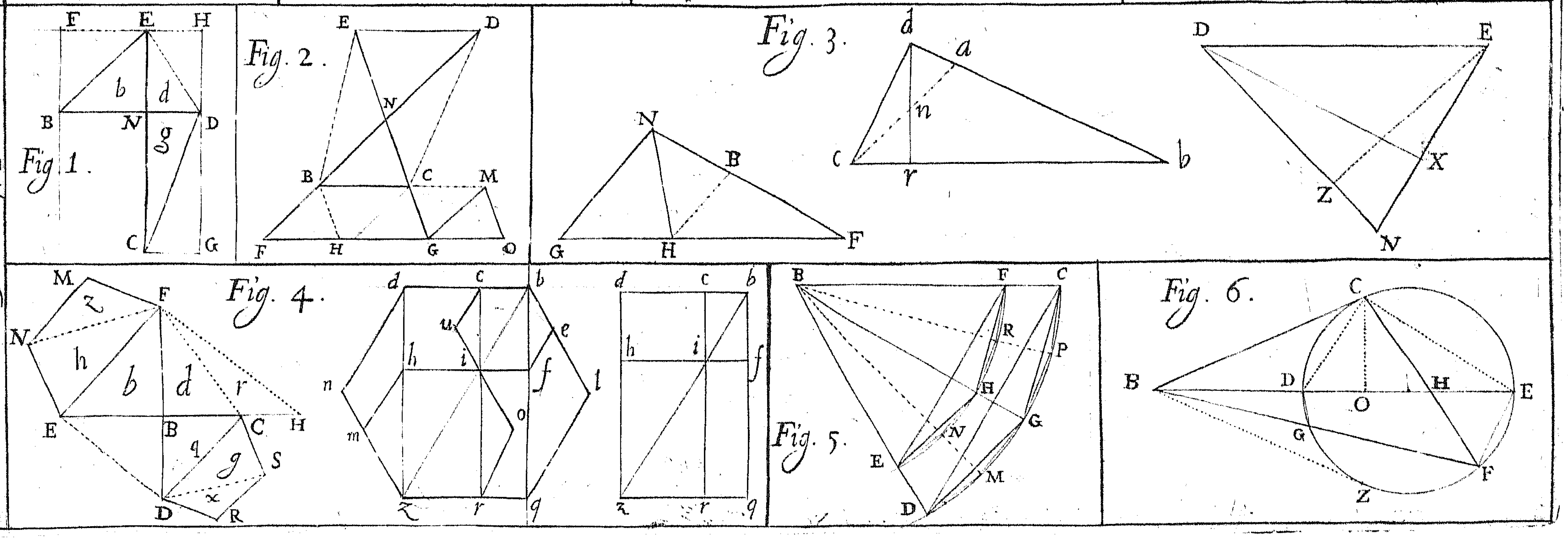
F I N.

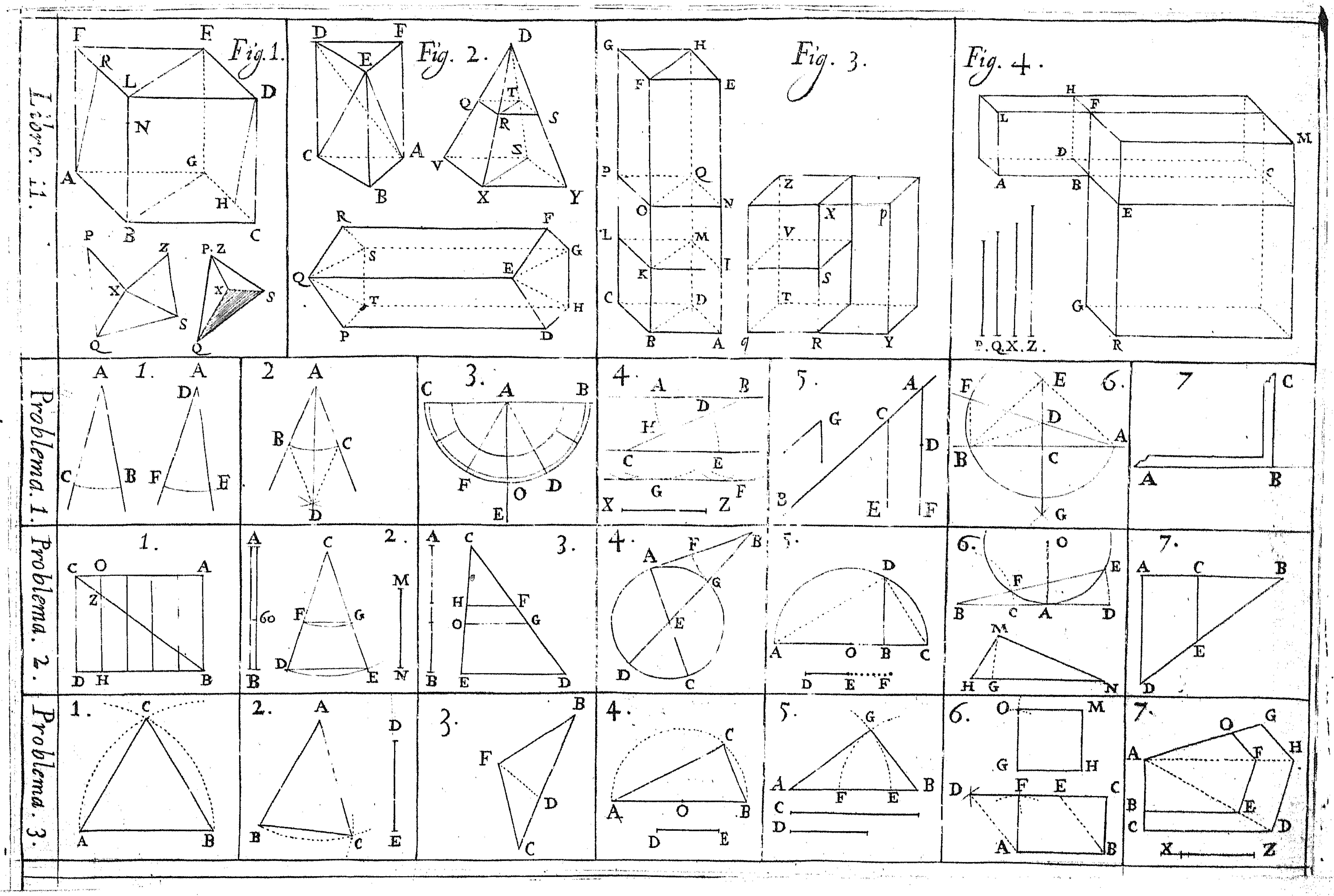

Proemiales
fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Libro. I°
fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
fig. 8.
1.°
2.°
3.°
Libro. 2.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.

Libro. 3.

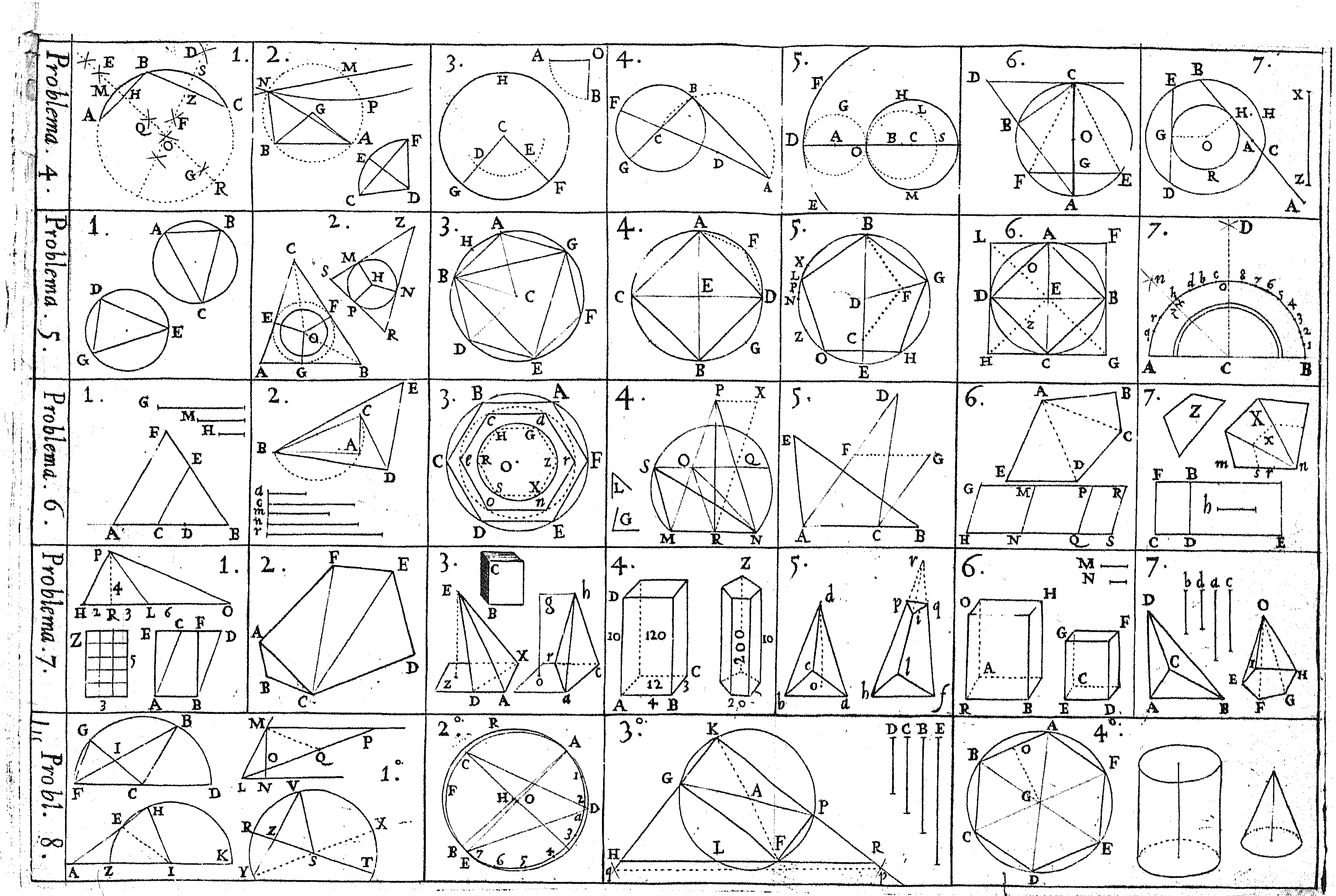


Libro. 6.





Libro 11.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Problema. 1.
Problema. 2.
Problema. 3.


Problema 4.
Problema 5.
Problema 6.
Problema 7.
Probl. 8.