ADMIRANDVM ILLVD GEOMETRICVM PROBLEMA TREDECIM MODIS DEMONSTRATVM,

Quod docet duas lineas in eodem plano designare, quæ nunquam inuicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò sibi-inuicem propiores euadant.

FRANCISCO BAROCIO IACOBI FILIO PATRITIO VENETO AVTORE.

Accessit etiam instrumentum quoddam olim ab eodem Autore inuentum, quo cuiuslibet Coni ortus, ac trium Conicarum Sectionum in Plano descriptio fit.

Cum Indice locupletissimo, eorum quæ toto opere continentur.

CVM PRIVILEGIO.

VENETIIS,
Apud Gratiosum Perchacinum, sumptibus Io. Baptistæ Fantini Patauini. M D LXXXVI.

AVTORES DE LINEIS NVNQVAM COINCIDENTIBVS, ET SEMPER SIBI MAGIS APPROPINQVANTIBVS IN EODEM PLANO IN INFINITVM PROTRACTIS.

QVI REI MENTIONEM tantùm fecerunt.

PROCLVS in ſuis Commentarijs in primum librum Elementorum Euclidis multis in locis.

GEMINVS in libro ſexto ſuarum Geometricarum Enarrationum.

GEORGIVS Valla Placentinus in libro primo ſuę Geometriæ Cap. LIX.

RABBI MOYSES Aegyptius in primo libro Cap. 73 ſui Operis inſcripti Director dubitantium.

COELIVS Calcagninus in quadam ſua Epiſtola.

QVI REM IMPERFECTE demonſtrarunt.

APOLLONIVS Pergæus in prima, & quartadecima Propoſitione ſecundi libri Conicorum.

PAPPVS in ſuis Scholijs in quintum librum Conicorum Apollonij.

EVTOCIVS Aſcalonita in ſuis Commentarijs in in ſecundum librum Archimedis de Sphæra, & Cylindro: & in librum ſecundum Conicorum Apollonij.

INNOMINATVS Antiquus Autor in fine libelli de Sectione Conica, quæ Parabole dicitur.

ORONTIVS Finæus in ſuo libello de Speculo Vſtorio.

IOANNES Vernerus in viceſima Propoſitione ſuorum Elementorum Conicorum.

RABBI MOYSES Narbonenſis in Opuſculo, quod de hac re compoſuit.

RABBI SAMTOV in expoſitione Cap. 73 libri primi operis inſcripti Director dubitantium Rabbi Moyſis Aegyptij.

HIERONYMVS Cardanus Mediolanenſis in libro ſextodecimo de Subtilitate.

IACOBVS Peletarius in ſecundo trium ſuorum Commentariorum De Dimenſione Circuli, De Contactu linearum, & De Conſtitutione Horoſcopi.

AD PRAESTANTISSIMVM NOSTRAE TEMPESTATIS MATHEMATICVM FRANCISCVM BAROCIVM.

NVPER ut argutæ excepit me campus arenæ,
Dum luſtro loca cuncta ſagax, ſitibundus, anhelans
Artis ſacratæ ſacros cognoſcere fonteis,
Et fidum quærens tantis de heroibus unum
(Queis ſophiæ ſummam licuit pertingere metam)
Tramite qui recto dubios deducat ad illam,
Duxq; ſalebroſæ callis nos extricet idem.
Hic mihi tu ſolers occurris magne BAROCI,
Diuino ingenio reſeret qui hæc abdita nobis,
Quo duce, tantarum edocti myſteria rerum,
Dædaleos tutò anfractus ſuperare queamus.
Ergo haud ingrati, tanto pro munere, par eſt
Laudemus cuncti, & grato te pectore amemus.
Quaßis tu interea monumentis perge vetuſtis,
Docto tu radio, docto tu in puluere perge;
Indefeſſus opem conferre petentibus omnem.
Laudes inde tuas ſeries æterna nepotum
Extollet Cœlo, clari ſimul inclyta texent
Vſque Geometræ tua ſcitis dogmata formis,
Axe ſuos dum vaſta Polos premet orbita Mundi.

Alexander Synglíticus Cyprius.

IDEM AD LECTOREM.

ECCE Geometrici (Lector) miracula Puncti,
Nostris nota parum, priscorum haud lucida scriptis.
Altera ad alterius (dictu mirabile) nutum
Se magis atque magis concordi, linea, cursu
Perpetuò inflectunt, inhiant vni vtraque Puncto;
Immo licet spatijs semper breuioribus absint,
Attamen æterno patulæ discrimine distant:
Aeternùm accedunt simul, æternumq; recedunt.
Ignibus ipsa prius spectabitur æquoris vnda,
Terraq; se rapidis miscere volubilis astris.
Aut simul ire Poli, totus quos diuidit Orbis,
Quàm simul vnitæ Puncto claudantur eodem.
Non hunc solertes apicem tetigere Latini,
Non plenè Eutocius, non sat Pergæus Apollon,
Non tota hoc docuit Graiorum turba Sophorum.
Arguti hoc Arabes, sublimi hoc mente Rabini,
Quotquot & hac fuerint præstantes arte Magistri
Mirandæ cuncti reticent mysterion artis.
Attamen hæc nobis arcana BAROCIVS vnus
Candidus impertit, profert hæc vnus apertam
In lucem, & valida rationum indagine fulcit.
Præ reliquis igitur merita illi laurea cedit
Totis Sicelidum votis decreta sororum.

IDEM AD FRANC. BAROC.

IVDICE vel Momo debentur magne BAROCI
Munere pro magno munera magna tibi.
Sit tamen ista meis à te data venia dictis;
Non venit hæc vni gloria tota tibi.
Ecce PALAEOTVS Musarum charus alumnus
Ordinis eximij gloria magna sui,
Huic tu cede volens, operis sibi vendicat huius
Dimidiam laudem, dimidiumq; decus.
Namque tibi toties felici, hic, omine, partus
Istius edendi suasor & auctor erat,
Optasti quoties longos premeretur in annos,
Forsan vt hoc careat posteritate bonum.
Sic bene prospexit sapienti mente CAMILLVS,
Cuius fautrici tanta tenemus ope:
Aeternas ergo, Aonidum decus inclyte, laudes
Grata debemus mente CAMILLE tibi;
Et nos quanta tibi, tibi tanta BAROCIVS ille
Ille Geometrici Duxq;, Caputq; Chori.
Vsque Geometræ debent, omnes quoque Musæ,
Grataq; posteritas (si qua futura) tibi.

Errata	sic corrigito	Pagina	Linea.
in in ſecundum	*in ſecundum*	4	1
quamuis	*quanuis*	41	1
doplo	*duplo*	66	4
cum	*cùm*	74	4
ſit	*eſt*	79	24
partes P	*partes E*	79	31
ſecat	*ſecet*	90	22
ſecet	*ſecat*	90	23
quppecum	*quippecum*	100	11
determinatam	*determinatum*	111	31
viceſimænonæ primi	*viceſimænonæ prop. primi*	121	18
E G	*F G*	125	8
eſſe : diceret	*eſſet dicere :*	136	4
tangentes	*tangentis*	145	27
primum	*primam*	159	8
I M	*K M*	159	33
contractus	*contactus*	166	1
ipſe	*ipſæ*	168	33
periєheriæ	*peripheriæ*	183	7
igi igitur	*igitur*	186	33
ſextadecimam	*ſextamdecimam*	200	11
pallatim	*paulatim*	205	3
tum tum circulis	*tum circulis*	217	20
fruſtratoriè	*fruſtra*	220	30
fruſtratoriæ	*ſuperuacaneæ*	227	14
GH	*KH*	247	26, & 32
GH	*KH*	248	5, & 22

FRANCISCI BAROCII

AD CAMILLVM PALAEOTVM VIRVM CLARISSIMVM

Præfatio.

NONNVLLA in Geometria Problemata, & Theoremata ſunt (Camille vir præſtantiſſime, ac eruditiſſime) quæ cùm admiratione digna ſint, hoc ſibi nomen uendicarunt, ut à Geometris admiranda uocarentur: non profectò quia Geometris admiranda videantur (qui enim rerum cauſas ſciunt, effectus admirari non poſſunt) ſed quoniam vulgo geometricas eorum cauſas ignoranti abſurda, incredibiliaq; apparent. Tale quidem eſt illud Problema. Super vna parte lateris trianguli duas rectas lineas introrſum conſtituere duobus reliquis eiuſdem trianguli lateribus maiores, & minorem angulum quàm ea latera continentes. Quomodo.n. admirabile non eſt, ſi rectæ quidem lineæ ſuper toto latere introrſum conſtitutæ, externis minores, & maiorem angulum comprehendentes ab Euclide demonſtratæ ſunt: quæ verò ſuper parte ipſius lateris conſtituuntur, eiſdem externis maiores, & minorem angulum comprehendentes ſint? Huiuſcemodi verò illud etiã eſt Problema, quod ait. Triangulum quadrilaterum reperire habens angulum externum tribus internis æqualem, tres autem

Admiranda in Geometria Problemata, & Theoremataque ſint, & cur admirãda vocentur.

Admirandũ Problema.

Aliud admirandum Problema.

tem

tem internos duobus rectis minores. Nonne hoc etiam admiratu dignum erit, cùm definiat Euclides triangulum esse trilateram figuram, demonstretq; omnis trianguli angulum externum duobus internis ex opposito iacentibus esse æqualem: necnon tres internos duobus rectis æquales esse? Ex admirandis etiam est Pythagoricum illud Theorema. Tria sola Multangula totum, qui circa punctum vnum est locum replere possunt, nempe Triangulum æquilaterum, Quadratum, & Sexangulum æquilaterum simul, & æquiangulum. Si enim Triangulum, Quadratum, & Sexangulum locum ipsum replent; cur Quinquangulum etiam, & Octangulum, cæteraq; Multangula eum replere nõ possunt? Ex admirabilium numero illud quoque Theorema est. Figurarum planarum rectilinearum quædam habent ambitus quidem, siue circuitus æquales, areas verò inæquales: & è conuerso, areas quidem æquales, ambitus verò inæquales, & quæ quidem minores habent ambitus, quandoque æquales quoad aream, quandoque maiores sunt ijs, quæ maiores ambitus habent: quæ verò quo ad aream minores sunt, si maioribus quoad aream comparentur, aliquando æquali, aliquando maiori ambitu fruuntur. Talia sunt ea Problemata, & Theoremata Geometrica, quæ admirabilia vocantur. Ex omnibus autem admirandis in Geometria propositionibus vna est cæteras admiratione, stuporeq; superans, quippe quæ demonstrat duas in eodem plano posse describi lineas, quæ nunquam adinuicem coincidant, etiamsi in infinitũ protrahantur: et quantò longiùs producuntur, tantò sibijnuicem propiores euadant. Vndè Rabbi Moyses Ae-

Admirabile Pythagoricũ Theorema.

Aliud admirabile Theorema.

Propositio admirabilissima omniũ Geometricarum Propositionum.

Rabbi Moysis Ægyptij dictum.

gyptius

gyptius primo lib. cap. 73 sui diuini operis inscripti Director dubitantiũ, volẽs ostendere quod imaginatio non sit mentis operatio, sed à mente differat, hac vsus est ratione. Quoniam scilicet quædam mente percipiuntur, quæ imaginatio non capit, quam vtique rationem ex hoc confirmat, quòd iam dicta omnium admirabilissima propositio mente quidem percipitur, sub imaginationem verò non cadit. Quod sanè Rabbi Moysis dictum si ita intelligatur vt à multis exponitur, falsum nimirum esse videtur, ideoq; à nonnullis tanquam falsum refellitur. Nil enim à mente percipitur, quod etiam ab imaginatione non capiatur, quamuis diuersis modis, nempe à mente quidem intelligenter, ab imaginatione verò imaginanter. Mens nanq; cuncta simpliciter, & indiuisibiliter rationibus intelligit. imaginatio autem cõposite, & partim diuisibiliter, partim indiuisibiliter formis in phantasia impressis res sibi subiectas imaginatur, atque cognoscit. Cùm enim phantasia inter mentem, et sensum media sit, vt docent Aristotelici, ac Platonici: imaginatio etiam, quæ circa Phantasiam versatur, inter mentem, sensumq; media erit. Cùm autem nil sit in mente, quod priùs non fuerit in sensu, vt Aristoteles docet: necessariò quicquid mens percipit, imaginatio etiam capit. Non datur si quidem ab extremo ad extremum, nisi per medium transitus. Aliter igitur dictum Rabbi Moysis intelligendum esse existimo. Quòd scilicet quædam mente quidem percipiantur, quæ imaginatio non capiat. Hoc est quibusdam rebus imaginatio non assentit, donec discurrens cogitatio causas earum inueniat, mensq; eas tanquam euidentes percipiat.

Quomodo dictum Rabbi Moysis intelligendum sit.

Quòd

Quòd enim duæ lineæ in eodem plano designatæ, si in infinitum producantur, nunquam inuicem coincidant, semperq; magis, ac magis sibijnuicem appropinquent; sensus primùm videt in rebus materialibus, & sensilibus, & imperfectis: deinde imaginatio perfectiori quodam modo in Phantasia id imaginatur, in rebus imaginabilibus, & à materia sensibili separatis, & perfectioribus: postea verò cogitatio discurrens reperit huiusce rei causas, quibus rem ita se habere demonstrat: Postremò demum Mens ipsa rem iam demonstratam veluti veram percipit, tuncq; imaginatio, & sensus menti consentientes conquiescunt. Ecce igitur quòd mentis operatio ab imaginationis operatione differt, ut pulcrè concludit ipse Rabbi, si rectè verba eius intelligantur. Sunt autem aliæ quoque mentis ab imaginatione pulcherrimæ discrepantiæ, ut docent Philosophi, de quibus alibi sermo nobis etiam erit, vbi hoc Rabbi Moysis dictum, eiusq; verba pleniùs exposituri sumus. Verum enim vero quum celeberrimam, ac mirabilissimam iam dictam propositionem in medium mihi attulisses, eiusq; demostrationem à me petijsses: cupiens ego desiderio tuo pro viribus satisfacere, quoddam onus non leue suscepi, à quo tandem Dei Opt. Max. ope expeditum me video. Opus enim de hac re integrum composui, in quo tredecim modis præfatam propositionem problematicè demonstraui, & quicquid ab omnibus tum antiquis, tum recentioribus, quos vidi, Autoribus de hac re dicta fuere, in vnum collegi: & ea quidem, quæ ab eis vel imperfectè, vel malè demonstrata fuerant, ad perfectionem, & exquisitam demonstrationem redegi: ea verò, quæ

de hoc in ...e operis.

...opositũ, & ...biectum ...eris.

ab

ab eis falsò dicta sunt, rationibus confutaui, atque destruxi, vt rei veritas ab omni contradictione, controuersiaq; immunis redderetur. Talem autem in hoc opere ordinem seruaui. Primùm quidem more Mathematicorum principia quædam posui, atque declaraui, quæ vnà cum Euclidis Elementis confirmant quidquid in toto opere à me dictum est. Post principia verò tres propositiones demonstraui, quæ tanquam totius operis Elementa sunt. Deinde vndecim diuersas institutæ propositionis demonstrationes posui: quarum etiam Elementa, & Sumptiones ante eas semper demonstrationibus confirmaui; Corollariaq; necessaria ex eis excerpsi. Post vndecim autem demonstrationes, errores insigniores, & imperfectiones Autorum de hac re tractantium declaraui: falsasq; eorum opiniones redargui. Postremò denique libellum Rabbi Moysis Narbonensis de hac re compositum dilucidaui, in quo dilucidando reliquas etiam duas eiusdem propositionis demonstrationes illustraui, atque perfeci: dictum quoque Rabbi Moysis Aegyptij diligenter exposui, ac demum Diuino auxilio finem operi dedi. Cuncta verò hæc à me quamuis non exiguo labore, libenter tamen peracta sunt cùm vt integrè tibi satisfacerem, tum vt studiosis omnibus maximè prodessem. Omnes enim qui diligenter huic nostræ lucubrationi operam nauarint, non solùm admirandam illam propositionem perfectè, diuersisq; modis demonstrare scient: verum etiam ita in rebus Conicis exercebuntur, atque instruentur, vt omnes libros de Conicis scriptos, præsertimq; Apollonij Elementa perfectè intelligere poterunt: nec non a multis erro-

Ordo.

Finis.

† ribus,

Vtilitas. ribus in quibus Autores ellapsi sunt, sese abstinebunt. Quàm vtilis autem doctrina de Conicis sit, multi grauißimi viri attestantur, quippequi in ea tradenda maximè insudarunt: vt Conon, Apollonius, Serenus, Archimedes, & alij. Ex Conicorum enim doctrina multa humano vsui emolumenta proueniunt. Diuersa nanque Specula tum Conica, tum etiam Columnaria ea Perspectiuæ scientiæ pars, quæ Specularia dicitur, construere docet, quæ porrò mirabiles effectus nobis suppeditant. Fieri autem non potest vt dicta Specula rectè construantur ab eo, qui Conicorum Elementorum ignarus existit. Nam Speculum illud omnium Speculorum alioqui vtilißimum, quod per reflexionem radiorum Solis magna etiam, & durißima corpora comburit, quo Archimedes quoque in Syracusis naues comburebat, nonne ex Conica illa Sectione fit, quæ Parabole appellatur? Præterea centra grauitatum inueniri non possunt sine Conicarum Sectionum adminiculo, vt patet ex libris Archimedis de æquè ponderantibus, seu centris grauium planorum, & ex libro περὶ ὀχουμένων, quem nonnulli inscribunt de insidentibus aquæ, alij verò, de ijs quæ vehuntur in aqua. At centri grauium cognitio, nonne admodum necessaria est ad multas Machinas cùm in bello, tum in pace vtilißimas extruendas? Rursus Perspectiuæ scientiæ, quæ adeo vtilis est, omnia fundamenta ex Conicis dependent, quandoquidem omnis visio per Conum fit. Quinetiam multas alias vtilitates præbet Conicorum doctrina Astrologiæ, Mechanicæ, & Architecturæ, quas in præsentia, ne tædio te afficiam, silentio pertranseo. Vtilißima itaq; Conicorũ doctrina est, ad quam opus

opus hoc nostrum breuiter instituit, dum propositionem præcipuè nobis institutam varijs modis demonstrat. Accipe igitur Camille nobilißime, atq; doctißime hunc nostrum laborem, qui sub tui nominis, totiusq; Academiæ nostræ fœlicißimis auspicijs in lucem prodiens, non parua cum autoritate in manibus hominum versabitur. Bononiæ Kalendis Ianuarij Anno Salutis M. D. LXVI. Dicatio.

Definitiones Primæ.

Definitio 1. CONVS est figura, quę describitur, quando vno rectanguli trianguli latere eorum, quæ circa rectum sunt angulum manente, circunductum triangulum, in eundem rursus locum restitutum fuerit, vnde moueri cęperat. Atque si manens recta linea æqualis fuerit reliquę circum rectum angulum existenti circunductæ, Rectangulus erit Conus: si verò minor, Obtusangulus: si autem maior Acutangulus.

2 Axis autem Coni est manens illa recta linea, circa quam triangulum vertitur.

3 Basis verò Coni, est circulus, qui à circunducta recta linea describitur.

4 Vertex, seu Fastigium, Culmen, Cacumen, Summitas, siue Apex Coni, est punctum supremum manentis rectæ lineæ circa rectum angulum existentis.

Ex his quatuor definitionibus tres priores ab Euclide positæ sunt inter initia libri vndecim Elementorum, & sunt ibi 18, 19, & 20. nos verò quartam etiam subiunximus iuxta Euclidis doctrinam. Apollonius autem Pergęus in principio primi libri Conicorum aliter hæc definiuit, vt in sequentibus definitionibus.

5 Si à quodam puncto ad circunferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum est, coniuncta recta linea in vtranque partem protrahatur, & manente puncto recta illa linea ducta circa circuli circunferentiam in eundem rursus locum restituatur, vnde ferri incępit: descriptam à recta linea superficiem,

quæ

quæ componitur ex duabus superficiebus aduerticem inuicem iacentibus, quarum vtraque in infinitum augetur, describente recta linea in infinitum producta, voco Superficiem Conicam:

Summitatem verò ipsius, punctum dictum: 6

Axim autem, rectam lineam ductam per punctum illud, & centrum circuli: 7

Conum autem, figuram contentam à circulo, & conica superficie, quæ inter summitatem, & circuli circunferentiam interijcitur: 8

Summitatem autem Coni, punctum, quod superficiei conicę summitas est: 9

Axim verò Coni, rectam lineam ductam à summitate ad centrum circuli: 10

Basim demum Coni, circulum illum. 11

Conorum autem Rectos voco eos, qui Axes habent ad rectos angulos ipsis basibus: 12

Scalenos verò, qui non ad rectos angulos ipsis basibus Axes habent. 13

Comparatio definitionũ Euclidis definitionibus Apollonij.

Sic ab Apollonio hæc definiuntur, quę porrò definitiones & numero plures, & locupletiores superioribus quatuor Euclidis definitionibus sunt. Non omnibus enim hisce ab Apollonio definitis Euclides indiguit. Quum autem nobis in hoc libro cuncta hæc necessaria essent, non immerito iuxta doctrinam Apollonij, sic etiam ea definire voluimus. Nam primum quidem definit Apollonius conicam superficiem ex eius ortu, deinde conicę superficiei tum Summitatem, tum Axem. Postea ex his Conum, eiusque Summitatem, Axim, & Basim definit. Postremò Recti, & Scaleni Coni definitiones tradit. Differunt autem definitiones Coni, & suarum Summitatis, Axis, & Basis, quas de mente Euclidis posuimus, ab eis, quas secundum Apollonium tradidimus. Quoniam illæ

Quo differant definitiones Apollonij ab Euclidis definitionibus.

læ quidem ab ortu Coni res ipsas explicant, hæ verò Conum tanquam à conicæ superficiei generatione constitutum accipiunt, eumque ex terminis, à quibus continetur, veluti ex differentijs specificis, similiterque eius Summitatem, Axim, & Basim definiunt.

Digressio.

Quatuor ad notanda. Not. primū.

Quo differant summitas, & Axis conicę superficiei à summitate, & Axe coni.

Quædam autem hìc animaduertenda sunt. Primò ꝙ licet Summitas, & Axis superficiei conicæ cum Summitate, & Axi Coni eædem esse videantur: differunt tamen, atque ex prioribus posteriorum cognitio dependet. Idcirco Apollonius seorsum quidem hasce ab illis declarauit. Cùm enim conicam superficiem vocasset eam, quę componitur ex duabus superficiebus ad verticem inuicem iacentibus, quippequę ex ductu rectæ lineę circa circuli circunferentiam vno ipsius rectæ lineæ puncto immobili permanente generantur: non immerito Summitatem ipsius conicæ superficiei, dictum immobile punctum definiuit. Ipsæ nanque duæ superficies totam conicam superficiem componentes in infinitum ex vtraque parte augeri possunt, si recta linea ipsas suo circunductu describens in infinitum ex vtraque parte protrahatur. Quare punctum illud manens, duasque dictas superficies ad verticem coniungens, totius conicæ superficiei Summitas erit. Recta verò linea ducta per illud punctum, & centrum circuli, erit conicæ superficiei Axis. Cùm autem Conum definisset figuram contentam à circulo, & conica superficie interiectá inter Summitatem, & circuli circunferentiam (hoc est figuram contentam à circulo illo, circa cuius circunferentiam recta linea circunuoluebatur, & parte totius conicę superficiei inter summitatem, & ipsam circuli circunferentiam iacente) merito Summitatem Coni esse dixit punctum illud, quod etiam superficiei conicæ Summitas esse definitum est: Axim verò Coni, rectam lineam ductam ab ipsa tum superficiei conicę, tum Coni Summitate ad iamdicti circuli centrum. Vnde manifestum est ꝙ Summitas, & Axis conicę superficiei à Summitate, & Axe Coni hoc discrepant, quoniam Summitas conicæ superficiei cōsideratur tanquam communis duorum Conorum vertex: Coni autem Summitas, tanquam vnius tantùm Coni fastigium. Similiter Axis conicæ superficiei duos Conorum duorum Axes in se cōtinet, Coni autem Axis, vnius tantum Coni Axis est. Quare non ab re Apollonius conicæ superficiei Axem dixit esse rectam lineam ductam per punctum illud, & centrum circuli: Coni verò Axem, rectam lineam ductam à Summitate ad centrum circuli. Nam illa quidem particula [per punctum

ctum

ctum illud, & centrum circuli] ostendit nobis ꝙ Axis conicæ superficiei debet à superiori duorum illorum Conorum aduerticem inuicem iacentium ita duci, vt transeat per punctum illud, hoc est conicæ superficiei Summitatem, illudq; in se amplectatur: nec non per centrum circuli. Illa verò particula [à Summitate ad centrum circuli] nobis indicat ꝙ Axis Coni debet initium sumere ab ipsa Coni Summitate, & peruenire vsque ad centrum circuli illius, circa cuius circunferentiam linea recta circunducta, & in eundem locum, vnde ferri incepit, restituta; conicam superficiem, Conumq; ipsum produxit, quem vtique circulum mox Coni basim esse Apollonius definiuit. Summitas igitur superficiei conicæ à Coni summitate differunt ratione, quamuis reipsa vnum, & idem sint punctum: Axis verò conicæ superficiei ab Axe Coni discrepat, vt totum à sua parte.

Not. secundum.

Tres conorū species secū dum Eucl.

Duę conorū species secū dum Apollonium.

Hoc itaq; primò erat animaduertendum. Secundò autem adnotandum est ꝙ ex Euclidis definitione tres habemus Conorum species, nempe Rectangulum, Obtusangulum, & Acutangulum, quas Apollonius non distinxit: sed duas ipse Conorum species definiuit, Rectum .s. & Scalenum, quæ quidem duæ species in qualibet trium Euclidis formarum considerari possunt. Conus .n. siue Rectangulus, siue obtusangulus, siue Acutangulus sit: cùm Rectus, tum Scalenus esse potest. Rectus quidem, si eius Axis suæ Basi ad rectos angulos sit: Scalenus verò, si eius Axis ad rectos suæ Basi non fuerit angulos.

Cur Euclides tres, Apollonius autem duas conorum species tradant.

Causa autem propter quam Euclides quidem tripliciter, Apollonius verò dupliciter Conum diuiserint, hæc est: quoniam .s. Antiqui Geometræ affectiones quasdam vnicuique earum trium formarum proprias esse credidere, quas tamē omnes Apollonius demonstrauit in qualibet trium formarum Coni, dummodo Rectus sit. ex quo etiam magnus Geometres appellatus fuit. Quare non erat necessarium vt tres illas species Apollonius distingueret. Quoniam autem non omnia, quæ de Cono Recto dicuntur, Scaleno etiam conueniunt (vt in Apollonij doctrina versatis perspicuum est) propterea oportuit Apolloniū duas iam dictas Conorum species, Rectum .s. & Scalenum proprijs definitionibus distinxisse.

Not. obiter.

Hic autem obiter animaduersione quoque dignum est, ꝙ siue Rectus, siue Scalenus sit Conus hoc habent commune, ꝙ vtriusque Basis circulus sit: hoc autem discrepāt, quòd Recti quidem Coni Axis Basi suæ ad rectos est angulos, Scaleni verò Axis Basi ad rectos angulos non est.

Error quorundam, & Cardani.

Vnde quidam magnopere hallucinati sunt (inter quos etiam Cardanus in libro in libro 16. de subtilitate) qui arbitrantur Conos Scalenos, quos ipsi Inclinatos vocant, non habere Basim circulum, sed aliam figuram à circulo diuersam. Quod nimirùm falsissimum est. Quoniam tales Coni, quorum Basis circulus nō est, neque etiam Coni sunt, sed Conorum partes: Quandoquidem omnis Coni Basis circulus esse debet, vt definitum est tum ab Euclide, tum ab Apollonio. Tertiò adnotandum est quòd definitio Coni tradita ab Euclide non competit nisi Cono Recto; Scaleno enim nullo pacto conuenire potest, vt rectè animaduertit Gemìnus in libro suarum Geometricarum Enarrationum: Definitio verò superficiei conicæ ab Apollonio tradita Scaleno etiam cōuenit Cono, si (vt animaduertunt Pappus, & Eutocius in primū librū. Conic. Apollonij) protrahi, & contrahi ex vtraque parte intelligamus rectam lineam, quę circa circuli circunferentiam vertitur. Cùm igitur Conorum alius Rectus, alius Scalenus sit, & horum vterq; triplex esse possit, scilicet Rectangulus, Obtusangulus, & Acutangulus; hoc etiam vltimò animaduertendum est, quòd in sequentibus principijs cùm de Cono absolutè loquemur, Conum tantummodo dicemus: cùm autem de Cono Recto, particulam [Rectum] Cono semper adijciemus. De Scaleno autem nullum sermonem habebimus tanquam præsenti tractationi nō necessario. omnia vero, quæ dicemus, tum in Rectangulo, tum in Obtusangulo, tum etiam in Acutangulo Cono vera esse intelligenda sunt iuxta doctrinam Apollonij, quem nos sequentes nullam de his tribus formis separatam mentionem faciemus; sed absolutè vel de Cono Recto, vel omnino de Cono sermo nobis erit.

Not. tertiū.

Not. quartū.

14 Canicæ Basis Dimetiens, est ipsa iam dicti circuli Dimetiens.

15 Plana superficies Conum secare dicitur, quæ conicam superficiem secat.

16 Plana superficies Conum tāgere dicitur, quæ cùm tangat conicam superficiem, quomodocunq; producatur, eam non secat.

Tres hasce definitiones superioribus definitionibus subiungere placuit, quoniam tractationi nostræ sunt necessariæ, quæ quidem prorsus conspicuæ sunt. Cùm autem reliquarū definitionū à nobis ponendarum cognitio à quibusdam petitionibus huic tractationi necessarijs dependeat, propterea hæc nobis esse concedenda petimus.

Petitiones.

SI à Coni Vertice ad quodlibet conicæ superficiei punctum recta ducatur linea, tota erit in conica superficie. 1

Si verò in conica superficie duo quælibet puncta præter Coni Verticem recta linea coniungat, tota intra conicam superficiem cadit: Quòd si vltra duo illa puncta producatur, extra Coni superficiem exit. 2

Si Planum per Coni Verticem secet Conum; communis sectio conicæ superficiei, & Basis, & secantis Plani, Triangulum rectilineum est, quod Conum per medium diuidit, ipsumque per medium ab Axe Coni in duo triangula diuiditur. 3

Si Planum Coni Basi Parallelum Conum Rectum secuerit; communis sectio Plani secantis, & conicæ superficiei, circunferentia circuli est centrum habentis in Axe Coni, cuius Dimetiens est communis sectio, in qua dictum planum cum Plano ipsius Axis, seu trianguli Conum per medium diuidentis sese intersecant. 4

Si Planum Conicæ Basi non parallelum secās Conum Rectum, haud per eius Verticem transierit: communis sectio eiusdem plani, & conicæ superficiei inflexa quædam, Mistaque est linea. 5

Hæ sunt Petitiones tum præsenti Tractationi, tum sequentium definitionum perceptioni neceſſariæ, quas tanquam manifeſtas ſupponimus quoniam ſenſui patent, & quoniam ab Apollonio demonſtratæ ſunt. Nam primas quidem quatuor demonſtrauit Apollonius in quatuor primis propoſitionibus primi libri Conicorum: quinta verò patet etiam ex ſecunda harum petitionum, & ex nona propoſitione eiuſdem primi libri Conicorum. Ibi.n.demonſtrat Apollonius eam ſectionem, de qua noſtra quinta petitio loquitur, non eſſe circularem lineam. At neq; etiam recta eſt, quia ſi recta eſſet, per dictam ſecundam petitionem tota intra conicā ſuperficiem caderet, & ſic non eſſet in conica ſuperficie, quod eſt contra ſuppoſitionem ipſius quintæ petitionis. Cùm autem neque recta, neque circularis ſit: neceſſariò miſta erit. Omnis.n.linea vel recta eſt, vel circularis, vel ex his miſta. His itaque petitionibus poſitis reliquæ definitiones ſequuntur.

Definitiones Secundæ.

Definit. 17. LATVS Coni dicitur recta linea, quæ à Coni Vertice vſque ad eius Baſim tota eſt in conica ſuperficie.

Hęc definitio ex prima petitione ſcaturire videtur.

18 Triangulum per Axem Coni vocatur illud, quod Conum per medium diuidit, ipſumque per medium ab Axe Coni in duo triangula diuiditur.

Not. primū. Hæc dependet ex tertia petitione. Adnotādum eſt autem quòd hoc triangulum multi vocant Triangulum ab Axe Coni, fortaſſe quoniam ab Axe Coni per mediū diuiditur. Sed melius eſt ipſum vocare Triangulum per Axem Coni. Quoniam ſemper tale triangulum trāſit per Axem Coni, cùm ſemper Conum per medium diuidere, ipſumq; per medium ab Axe Coni diuidi debeat. Axis.n. Coni in medio Coni ſemper eſt. Vel etiam ſic vocatur, quoniam à
Not. ſecūdū. plano Conum per Axim ſecanti fit. Præterea notādum eſt, quòd in quolibet Cono infinita huiuſcemodi triangula fieri poſſunt, nō ſem-
Error Cardani in lib. 16 de ſubtilita. per æquicruria (vt malè Cardanus exponit.) Sed in Recto quidem Cono tum æquicruria, tum æquilatera. in Scaleno verò tum æquilatera,

latera, tum æquicruria, tum etiam Scalena. Quæ porrò Triangula cùm ab Axe coni per medium in duo triangula diuidantur; ea profectò duo, quæ inde fiunt triangula partialia non ſemper ambo rectangula, (vt ait Cardanus,) ſunt, verùm in recto quidem Cono ambo rectangula ſemper erunt: in Scaleno autem, illa duo tantùm, quæ ſunt dimidiæ partes eius trianguli, quod duo latera in Coni Vertice ſeſe coniungentia æqualia habet. reliqua verò per Axem Coni Scaleni triangula cùm habeant duo dicta latera inæqualia, diuidunt quidem Conum per medium, ipſaque per medium ab Axe Coni diuiduntur, ſed non in duo rectangula triangula. Aut.n.alterum tantùm eorum, aut neutrum rectangulum erit. Alius error Cardani ibidem.

Baſis trianguli per Axem Coni, eſt ipſa conicæ Baſis Dimetiens. 19

Quum trianguli baſis dupliciter à Geometris accipiatur, vel pro latere, quod è ragione ante oculos iacet, quando nullum antea latus nominatum eſt: vel pro tertio latere duobus iam præacceptis, & nominatis: non immerito ipſius per Axem Coni trianguli Baſis ſemper eſſe dicitur ea recta linea, quam in 14 definitione Conicæ Baſis Dimetientem eſſe diximus. quando quidem hæc linea ſemper eſt latus illud trianguli per Axem Coni, quippe quod è regione ante noſtros oculos iacet, dummodo Conus ipſe ſuper ſuā baſim erectus maneat. Baſis trianguli duplex cōſideratio.

Conica ſectio dupliciter accipitur, vel pro linea, vel pro ſuperficie plana. Si pro linea ſuſcipiatur, illa miſta linea eſt, quæ à plano Conicæ Baſi non parallelo ſecanti Conum Rectum, per eiuſque verticem non tranſienti in conica ſuperficie fit: Si verò pro plana ſuperficie, illa plana ſuperficies eſt, quæ continetur à iam dicta miſta, & à recta linea, quæ conicæ baſis, & iam dicti ſecantis plani communis ſectio eſt. 20

Tota hæc definitio à quinta petitione dependet.

Conicæ Sectiones tres ſunt Parabole, Hyperbole, & Ellipſis. Parabole quidem fit, quando planum ſecās 21 Parabole qd ſit.

Rectum Conum ad planum trianguli per Axem Coni erigitur, horumque Planorum communis sectio secans iam Basim, & alterum latus trianguli, reliquo eiusdem trianguli lateri parallela fuerit. Hyperbole verò fit, quando communis dictorum planorum sectio cum reliquo trianguli per Coni Axem latere vltra Coni Verticem producto coincidit. Ellipsis autem fit, quando eadem communis sectio secans alterum duorum ipsius trianguli laterum, & basi non parallela existens, cum reliquo latere intra Conum coincidit.

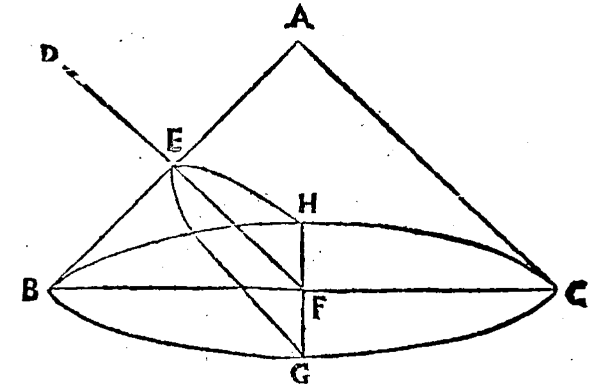
Hyperbole quid sit.

Ellipsis quid sit.

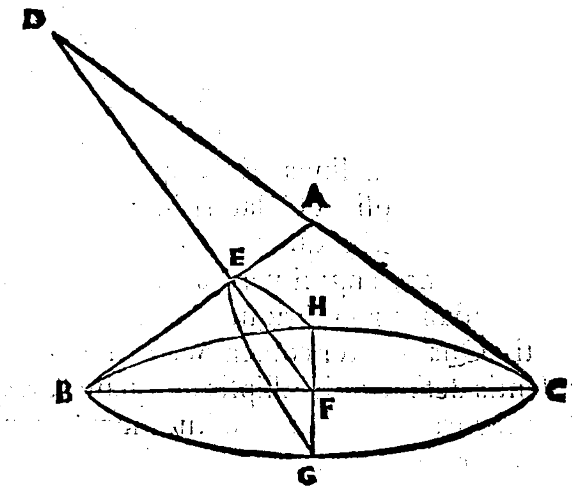
Hæ sunt tres illæ celeberrimæ conicæ sectiones, quas antiqui Geometræ in tribus Coni Recti formis inuenere, Parabolem quidem in Cono Rectangulo: Hyperbolem verò, in obtusangulo: Ellipsim autem, in Acutangulo. cùm enim, in Cono Rectangulo alteri laterũ trianguli per axem Coni perpendicularem rectã lineam duxissent, Parabolem inuenerunt. cùm autem in Obtusangulo Cono idem fecissent, Hyperbolem fieri deprehenderunt. Cùm verò in Acutãgulo idem egissent, Ellipsim oriri comperiere. Quas profecto tres Sectiones prisci alijs nominibus appellarunt. Nam Parabolem quidẽ, Rectanguli Coni sectionem: Hyperbolem verò, obtusanguli Coni sectionem: Ellipsim autem, Acutanguli Coni sectionem vocabant. putantes nimirùm vnamquamque harum trium Sectionum vnicuique trium Conorum speciei propriam esse. Apollonius autem in vno quolibet Cono seu Rectangulo, seu Obtusangulo, seu Acutangulo tres iam dictas reperit Sectiones iuxta diuersum planorum secantium situm, sicuti præsens definitio declarat. vocauit autem eas non communibus (vt antiqui) sed proprijs nominibus, Parabolem, Hyperbolem, & Ellipsim. Nam Rectanguli, seu Obtusanguli, seu Acutanguli Coni Sectio: cõe nomen est, quod tum Parabolæ, tũ Hyperbolæ, tum demũ Ellipsi conuenit. quãdoquidẽ in vnoquoq; Cono vnaquæq; istarũ Sectionum fieri põt. Verùm vt apertiùs ea, quæ dicimus intelligantur, exempla in mediũ adducenda sunt. Sit igitur Conus Rectus, atq; Rectãgulus ABC, cuius vertex A, basis aũt circulus habens dimetientem BC; Triangulum verò per Axem Coni sit

Quomodo Antiqui tres conicas Sectiones in tribus Coni Recti formis inuenerint.

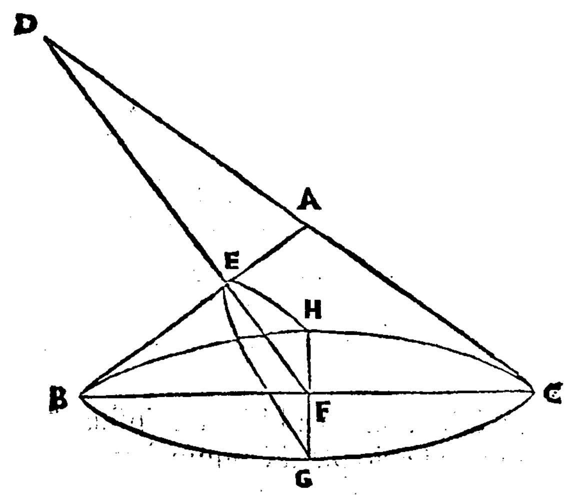
ni sit



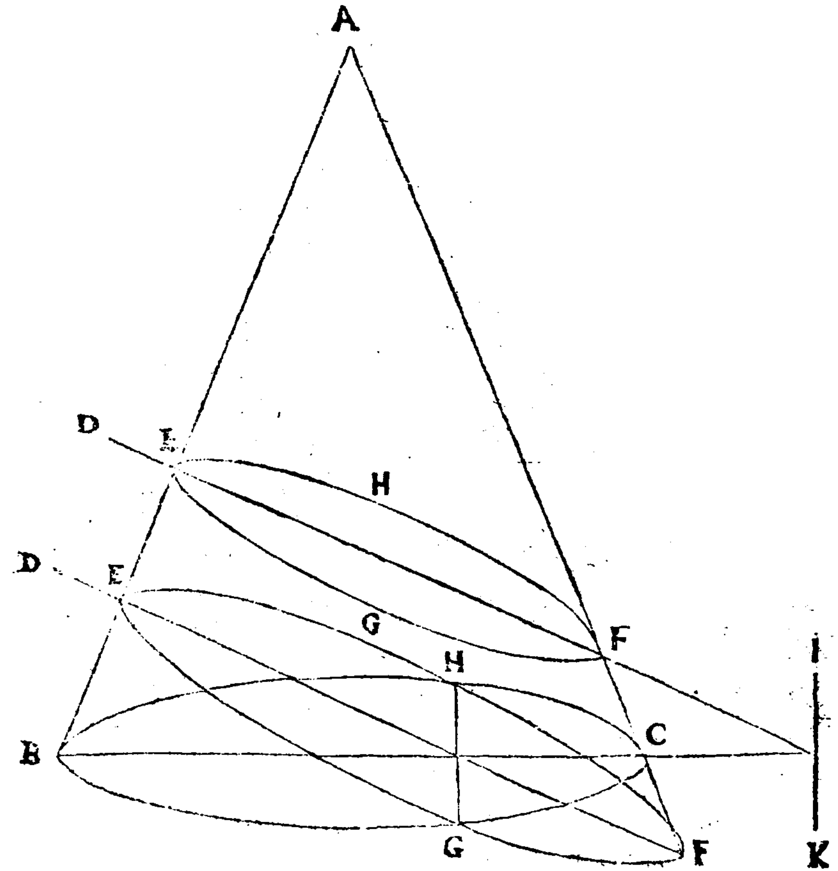
ni sit ABC, cuius latus AB secetur à recta linea DE in signo E ad rectos angulos, & producatur ipsa DE donec secet trianguli basim BC ad signũ F. Deinde imaginemur planũ aliqđ secans Conũ ABC iuxta lineam DEF, quod sit erectum ad Planum ipsius ABC trianguli. Erit ergo communis sectio plani Conum secantis, & plani trianguli ABC ipsa EF recta linea, quæ, cùm ex suppositione anguli FEA, & CAE duo recti sint, parallela erit lateri AC per secundam partem 28 propositionis primi libri Elementorum Euclidis. Fit igitur per quintam petitionem huius in conica superficie quædã mista linea, quæ sit GEH. Erit autẽ cõmunis sectio plani Conum secantis, & Basis conicæ recta GH linea. Quamobrem ipsa GEH Sectio conica, Parabole est per primã præsentis definitionis partẽ. Similiter fiant omnia vt priùs, sed ĩ Cono Recto Obtusangulo. Cũ itaq: duo anguli CAE, & AEF per suppositionẽ duobus rectis maiores sint (vnus.n: rectus, & alter



obtusus

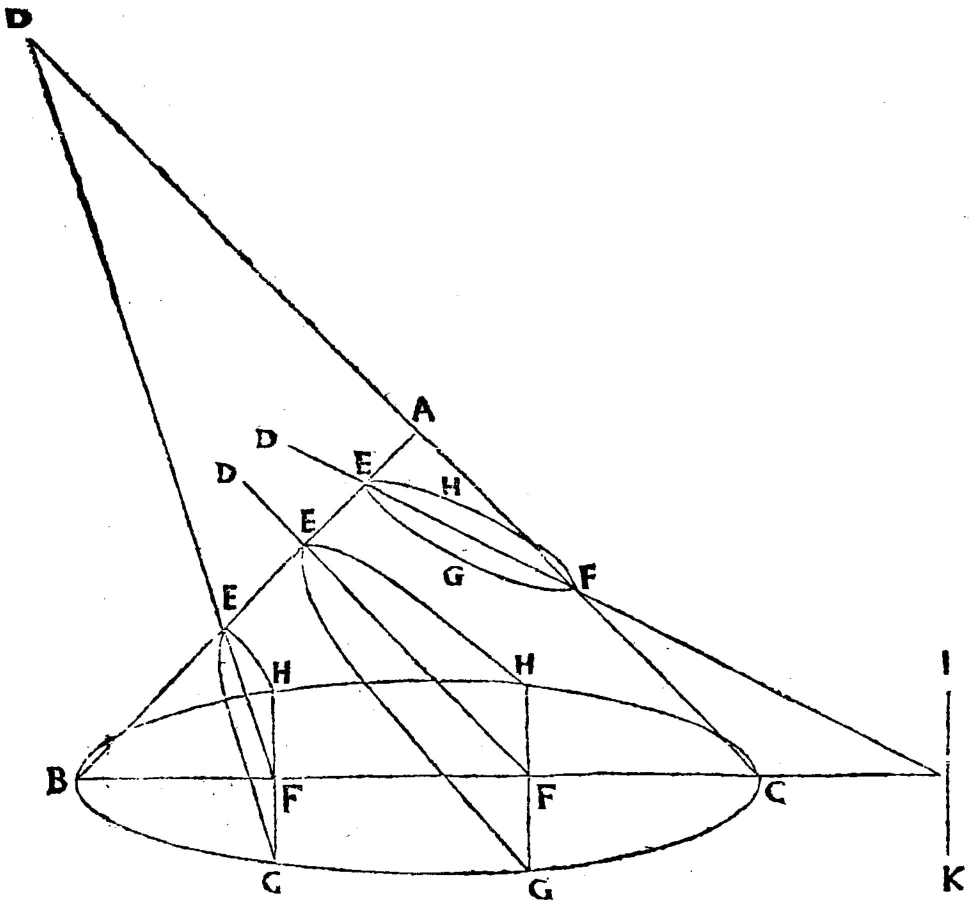


obtusus est) si latus A C producatur in partes A, coincidet necessariò cum ipsa F E communi dictorum Planorum sectione in longum producta ad partes D per quintam petitionem primi libri Elementorum Euclidis. Anguli enim D A E, & D E A duobus sunt rectis minores, cùm per 13 propositionem eiusdem primi vnus eorum rectus, alter acutus sit. Quare per secundam partem huius definitionis conica Sectio G E H Hyperbole est. Haud dissimiliter cuncta in Cono Recto Acutangulo peracta esse intelligantur. Cùm igitur anguli C A E, & A E F ex suppositione duobus rectis minores sint, coincidet per eandem quintam Petitionem primi recta linea E F, quæ est Planorum dictorum communis sectio, ipsi A C lateri intra Conum in signo F: nec est parallela Basi B C, quoniam ex suppositione anguli ad signum E recti sunt, anguli verò ad signa B C per sextam, & tricesimamsecundam propositionem primi libri Elementorum Euclidis, acuti. Quapropter conica Sectio E G F H per tertiam partem præsentis definitionis Ellipsis est, quam & θυρεὸν, hoc est Clypeum Græci vocant propter similitudinem, quam habet cum ipso Clypeo. Hoc pacto tres conicas Sectiones antiqui Geometræ in tribus Conorum formis reperiere. Apollonius autem alio artificio



cio in vno quouis Cono Recto eas omnes adinuenit. Sit vnus quilibet Rectus Conus, siue Rectangulus, siue Obtusangulus, siue Acutangulus ipse A B C, cuius Summitas A, Basis autem circulus habens dimetientem BC. Triangulum verò per axem Coni ipsum A B C, in

Quo Apoll. in vno quouis Cono Recto tres conicas Sectiones reperit.



ABC, in cuius Basi BC suscipiatur quodlibet punctum F, per quod ducatur per 31 propositionem primi lib. Elem. Euclidis recta FED linea parallela ipsi AC lateri, secans reliquum trianguli latus AB in signo E. Rursum à quouis ipsius BC basis puncto F ducatur recta linea FE, quæ non sit parallela ipsi AC lateri, sed coincidat cum eo producto extra Conum vltra Verticem A in signo D. Quod vtiq; semper eueniet quandocunq; anguli CAE, & FEA duobus rectis maiores facti fuerint. nihilq; prohibet quin in quouis Cono fieri possint. Præterea suscepto extra Conum quolibet D signo ducatur recta linea DEF secans duo latera trianguli ABC in signis E, F, & non sit parallela basi BC. Hisce

ita

ita dispositis imaginemur tria Plana secantia Conum ABC iuxta tres rectas EF lineas, quæ sint erecta super Planum trianguli ABC. Erunt communes quidem sectiones ipsorum Planorum, & Plani trianguli ABC tres EF rectæ lineæ. Communes autem eorundem Planorum, & Basis Coni sectiones erunt tres GH rectæ lineę, quæ oportet vt secent ipsam BC ad rectos angulos, vel omnes intra Conum, vel duæ semper intra, & vna extra, vt in superioribus figuris linea IK. Mistæ verò lineę per quintam petitionem huius in conica superficie tres erũt, nempe GEH, & GEH, & EGFH. quarum vna quidem erit Parabole, altera autem Hyperbole, tertia verò Ellipsis iuxta præsentis definitionis doctrinã. & sunt omnes in vno, eodemque Recto Cono, qualiscunque ipse sit. Sic etiam Apollonius vnico in Cono tres conicas Sectiones adinuenit. Causæ autem propter quas Apollonius vnam quidem harum trium conicarum Sectionum Parabolem, alteram Hyperbolem, tertiam Ellipsim nuncupauerit, non illæ sunt, quæ assignantur à Georgio Valla in libro quarto suæ Geometriæ cap. 3, & à Hieronymo Cardano in libro 16 de subtilitate, & à Federico Commandino in commentario suo in librum de Quadratura Paraboles Archimedis de mẽte Eutocij Ascalonitæ in primum librum Conicorum Apollonij. Nam Georgius Valla, & Federicus Commandinus inquiunt de mente ipsius Eutocij Parabolem quidem sic fuisse nominatam, quia communis sectio plani Conum secantis, & plani trianguli per axem Coni parallela est lateri ipsius trianguli. Commandinus enim refert Eutocij verba Græca dicentis Parabolem esse dictam ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι, hoc est à parallelũ esse. Hyperbolem verò sic dictã fuisse duabus aiunt de causis: primò quoniã duo anguli, qui in superioribus figuris sunt AEF, & EAC in Hyperbole duos rectos excedunt: secundò quoniam recta linea DEF in Hyperbole excedit Verticem Coni, & coincidit extra Conum ipsi CA lateri trianguli per Axem Coni insigno D. Ellipsim demum duabus similiter causis ita nuncupatam fuisse asserũt, aut quòd prędicti anguli in Ellipsi à duobus rectis deficiant, aut quòd Ellipsis sit circulus imminutus. Cardanus autem Parabolem quidem ait significare è ragione, & sic appellari: quia quantumcunque vnà cum ipso Cono producatur, semper est è ragione alterius lateris trianguli: Hyperbolem verò ita vocari dixit quoniam angulus AEF in ea maior est, quàm in Parabole: Ellipsim autem ita dici vult, quia

Digressio.

Trium conicarum sectionum etymologia.

Eutocij Ascalonitæ, & Federici Commandini, & Georgij Vallæ, & Hieronymi Cardani falsæ opiniones.

 non

Opinionũ superiorum cõfutatio.

non vt Parabole,& Hyperbole poteſt in infinitum exſtendi. Hę ſunt cauſæ à iamdictis Autoribus redditæ. Quantùm autem à veritate alienæ ſint, nobis rem ipſam rectè cõſiderantibus manifeſtum fiet. Quo nam pacto igitur aliquis etiam parùm in Geometria verſatus ſibi perſuadere poterit quòd Parabole conica illa Sectio vocata ſit quoniam communis ſectio plani Conum ſecantis,& Plani trianguli per Axem Coni parallela eſt lateri eiuſdem trianguli? Quid enim ipſi Parabolæ cum parallela? Nonne cuique græcas callenti literas manifeſtum eſt Parabolem nullo modo parallelum ſignificare poſſe? Miror equidem Eutocium Aſcolonitam rem hanc dixiſſe, cùm græcus fuerit. Rurſus Parabolem ſignificare è regione,credo neminem eſſe,qui fateatur. Quomodo ergo hac etiam ex cauſa ſic appellabitur? Quòd ſi etiam parabole è regione ſignificaret, cur etiam circulus qui à plano Conũ Rectum ſecãte conicæ Baſi parallelo ſit, Parabole non dicitur,cum ipſe quoque Baſi trianguli eiuſdem è regione ſit? Præterea ſi Hyperbole quidem ideſt exceſſus vocaretur, quoniam duo iam dicti anguli duos rectos excedunt angulos: Ellipſis verò ideſt defectus diceretur,quoniam ijdem anguli à duobus rectis angulis deficiunt; cur ab internis potiùs angulis, quàm ab externis hæ figurę nomenclaturam ſortitæ ſunt? Non ne in Hyperbole anguli externi D A E, & D E A deficiunt à duobus rectis? Quur igitur non ab hiſce etiam Ellipſis ſectio hæc vocanda eſt? Similiter cùm in Ellipſi anguli externi duos rectos excedant, qua de cauſa Exceſſus etiam non vocatur? At ſi Hyperbole ſic dicta eſt, quoniam recta linea D E F excedit Verticem Coni, & coincidit extra Conum ipſi C A lateri; cur è contrariò Parabole defectus non dicitur,cuius recta D E F linea ſupra Coni Verticem cũ A C latere nunquã concurrit? Quòd ſi Hyperbole ita nuncupatur quoniam angulus A E F in ea maior eſt quàm in Parabole, cur etiam Parabole reſpectu ipſius Ellipſis exceſſus dicẽda non eſt, cùm in ea quoque angulus A E F maior ſit quàm in Ellipſi. vel cur non potiùs ab altero B E F interno angulo minori in Hyperbole quàm in Parabole exiſtenti defectus denominabitur? Si demum Ellipſis ita vocatur quòd duo iamdicti interni anguli à duobus rectis excedantur, nullam video rationem, propter quam ab internis potiùs angulis Ellipſis, quàm ab externis Hyperbole nuncupanda ſit. Si verò talem habuit denominationem, quòd ſit quaſi circulus imminutus; procul dubio Lunullaris etiã,vel Vtrinque conuexa,vel Cyſſoides fi-

des figura, quæ circuli diminuti eſſe videntur, Ellipſis nomine frui deberent. Si denique ſic vocaretur, quia non vt Hyperbole, & Parabole poteſt in infinitũ extendi; hac eadẽ ratione circulus etiam, nec non tres ſupra nominatæ figuræ hoc nomen ſibi vendicaſſent. Credo itaque neminem eſſe, qui non videat quòd cauſæ, & rationes ab hiſe viris traditæ omninò à veritate ipſa diſſentiant, atque ridiculæ ſint. Quapropter veræ cauſæ harum dènominationum de mente Apollonij nobis aſſignandæ ſunt, quas quidem cauſas Pappus etiam Alexandrinus in ſuis ſcholijs in primum librũ Conicorum Apollonij breuiter tetigit,& Commandinus in ipſa Apollonij editione in fine propoſitionum duodecimæ, ac tertiædecimæ de Hyperbole, & Ellipſi rectè adnotauit, quodammodo ſe corrigens de ijs, quæ dixerat in ſuo commẽtario in lib. Archimedis de Quadratura Paraboles. de ipſius Paraboles autem falſa, quã in iam dicto loco ſcripſerat, etymologia, nuſquam ſe correxit, ſed in eũdem cum Eutotio,& alijs errorem permanſit. Tradens itaque Apollonius ortum, & proprias Affectiones harũ trium Conicarũ Sectionum in 11,& 12, & 13 propoſitionibus primi libri Conicorũ, demonſtrat vnã eſſe peculiarem proprietatẽ vnicuique harum trium Sectionum ab earum ortu ſcaturientem. quòd ſcilicet in Parabole quidem quarundam rectarũ linearum quadrata æqualia ſint quibuſdam parallelogrammis rectãgulis, quippe quæ cuidam datę rectæ lineæ ita adhærent, vt eius longitudinem nec excedant, nec ab ea excedantur, ſed illa linea vnum eorum parallelogrãmmorum latus euadat: in Hyperbole verò, quòd earundem rectarum linearũ quadrata æqualia ſint nonnullis parallelogrammis rectãgulis datæ cuidam rectæ lineæ ſic inhærentibus, vt eius longitudinẽ excedant parallelogrammo ſimili, ſimiliterque iacente cuidam alio dato parallelogrammo rectãgulo: in Ellipſi autem, quòd earundem rectarum linearum quadrata ęqualia ſint quibuſdam parallelogrammis rectangulis, quæ cuidam datæ rectæ lineæ ita inhærent, vt ab eius longitudine deficiant parallelogrammo ſimili, ſimiliterque iacente cuidam alio dato parallelogrammo rectangulo. Cùm igitur tres iam dictas proprias harum trium Sectionum Affectiones ex earum ortu emergentes Apollonius demonſtrauerit, nõ immerito ab eis ipſas denominauit. atque eam quidem, in cuius proprietate Applicatio Geometrica apparet, Parabolem, hoc eſt Applicationem appellauit. eam verò, in cuius peculiari Affectione Exceſſus Geometricus

Veræ cauſæ nominũ triũ conicarũ ſectionum.

metricus requiritur, Hyperbolem, idest Excessum vocauit. eam autem, in cuius accidenti proprio Defectus Geometricus apertissimè videtur, Ellipsim, nempe Defectum nuncupauit. Tres nanque celebres operationes in Geometria fieri solent, quippe quæ à Græcis antiquis Geometris vocatæ fuerunt παραβολή, idest Applicatio, ὑπερβολή, idest Excessus, & ἔλλειψις, idest Defectus. Cùm enim, data quadam recta linea spatium aliquod, seu figuram aliquam rectilineam ita ipsi coaptamus, vt spatium ipsum longitudinem lineæ non excedat, neque ab ea excedatur, sed tota ipsa data linea vnum eius spatij latus euadat: tunc illud spatium ad illam rectam lineam applicari dicitur, & huiusmodi operatio, Applicatio vocatur. Cùm autem spatium illud ita rectæ lineæ coaptamus, vt eius longitudinem excedat, & data recta linea vnius laterum eius pars sit: tunc spatium illud excedere dicitur, atque operatio hæc, Excessus appellatur. Cùm verò spatium ita lineæ adaptamus, vt vnum eius latus pars lineæ datæ sit, spatiumque totam rectæ lineæ longitudinem non impleat, sed aliqua eiusdem lineæ pars extra ipsum spatium relinquatur: tunc deficere spatium illud dicitur, & talis operatio, Defectus à Geometris nuncupatur. Hisce porrò tribus Geometricis operationibus vsus est etiam Euclides in propositionibus 44 primi, & 27, & 28, & 29 sexti libri Elementorum. Ab his itaque celeberrimis in Geometria operationibus Apollonius, omnesque iuniores Geometræ eas tres conicas nominarunt Sectiones, vnam quidem earum Parabolem, alteram Hyperbolem, tertiam Ellipsim vocantes, quandoquidem in generatione, & proprietate ipsarum tres istæ (vti diximus) operationes appareant, in vna quidem Applicatio ipsa, in altera autem Excessus, in reliqua verò Defectus. Optimæ enim illæ denominationes sunt, quæ ab ortu, & proprietate rerum sumuntur. Quæ cùm ita sint, Latini ferè omnes boni Mathematici nomina harũ trium Conicarum Sectionum à nominibus dictarum trium Geometricarum operationum distinguere volentes, operationes quidem latinis semper nominibus exprimunt, nempe Applicationem, Excessum, atque Defectum: Sectiones verò conicas græcis vbique nominibus pronuntiant, Parabolem scilicet, Hyperbolem, & Ellipsim. Hæc de nominibus, & caussis denominationis trium Conicarum Sectionum dicta sufficiant. Meliùs enim intelligentur ea, quæ de causis nominum hìc diximus in progressu libri huius, vbi duodecimam propositionem primi libri Co-

Tres celebres in Geometria operationes.

Applicatio in Geometria quid sit.

Excessus q. d. sit.

Defectus q. d. sit.

bri Conicorum Apollonij declarabimus. Nunc autem reuertentibus nobis eò vnde sumus digressi, reliquum est adnotare quòd quanuis in Scalenis etiam Conis tres dictæ conicæ Sectiones iuxta doctrinam Apollonij reperiantur, nihilosecius in Rectis tantùm Conis eas definire, & declarare voluimus; tum quia magis regulares in Rectis, quàm in Scalenis ipsæ sunt; tum quia vt plurimùm Apollonius, cæterique Mathematici de Coni Recti Sectionibus sermonem habent; adde etiam quòd huic nostræ Tractationi neque Conus Scalenus, neque Sectiones ipsius necessariæ sint. Vnde sanè post hæc principia in tota pręsenti Tractatione vbicunq; absolutè Conum dixerimus, de Cono Recto semper intelligatur.

Digressionis finis.

Notandum.

Placet autem hìc Instrumentum quoddam à nobis olim inuentum apponere, quod Conicam superficiem, ipsosque Conos, tam Rectos, quàm Scalenos; tum Rectangulos, tum Obtusangulos, tum etiam Acutangulos commodè generat: Necnon tres Conicas Sectiones, Parabolem scilicet, Hyperbolem, & Ellipsim aptissimè describit. Ad cuius Instrumenti nostri similitudinẽ Circinus quoque simplex duorum crurium fabricari potest (vt Clarissimus, eruditissimusque vir Iacobus Contarenus alter ętatis nostræ Archimedes me nuper commonefecit huiuscemodi Circinum repertum, sibiq; ostensum, ac traditum fuisse ab Illustrissimo Comiti Iulio Tiene, viro præstantissimo, omnibus in scientijs, Arteque Militari egregiè versato) quo etiam facillimè tres iam dictę Conicæ Sectiones designantur. Cuius Circini alterum crus, quod circunuoluendum est, concauum esse debet, habens in concauitate stylum dentatum mobilem, qui contrahendo se, ac protrahendo cuiusdam denticulatæ rotulę, & laminę circa eã clauo circunuolutæ artificio sursum, deorsumq; feratur. Nam si planum, in quo Sectiones ipsæ Conicę designandæ sunt, parallelũ quidem Axi Instrumẽti nostri, vel immobili cruri Circini iam dicti positum fuerit, Parabole dubio procul describetur: Si verò planum ipsum Axi, vel Cruri iam dicto non parallelum, sed inclinatum versus Instrumẽti, seu Circini summitatem sit, Hyperbole designatur: Si autem planum Axi, siue Cruri ipsi non parallelum, sed è contrario in partem oppositam, scilicet versus inferiorem Instrumẽti, vel Circini partem inclinatum ponatur, Ellipsis describitur. Quippe quod Instrumentum, necnon Circinum ipsum clarè figuræ sequentes ostendunt.

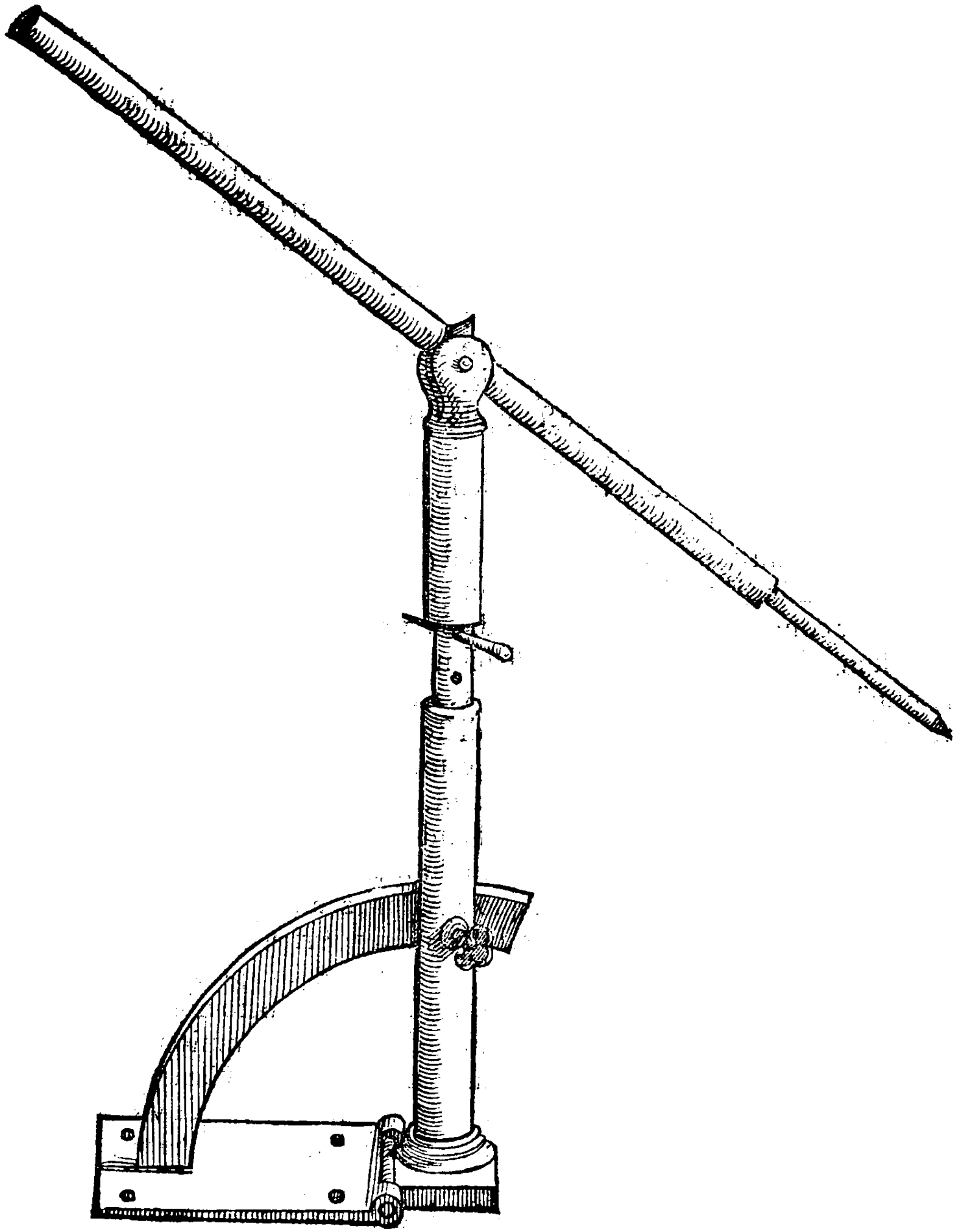
Instrumentũ inuentum à Frãcisco Barocio anno 1566.

Iacobus Cõtarenus.

Circinus inuẽtus à Iulio Tiene.

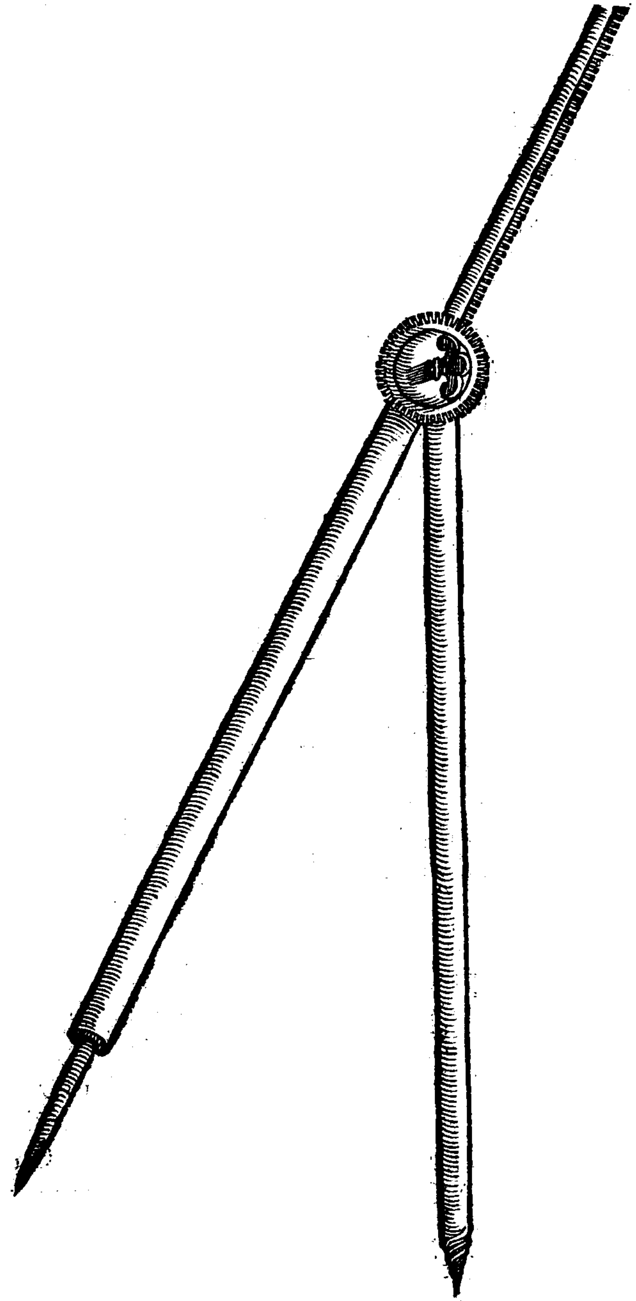
Figura

Figura ostendens Instrumentum iam dictum.



Figura

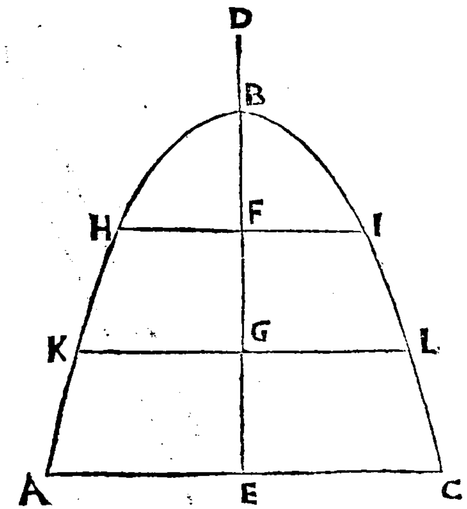
Figura ostendens Circinum iam dictum.



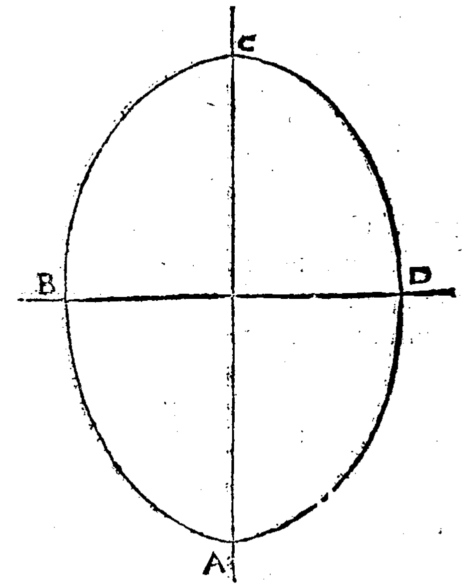
Axis,

Deffinit. 22. Axis, seu Dimetiens Conicæ Sectionis, est recta linea totam Conicam Sectionem per medium diuidens, quę super se ad rectos deductas angulos, & ex vtraque parte à conica Sectione terminatas rectas lineas per medium secat.

Cùm dicimus [Axis, seu Dimetiens conicæ Sectionis] nil refert si conica Sectio vel pro mista linea, vel pro plana superficie suscipiatur. Cùm autem dicimus [à conica Sectione terminatas rectas lineas] tunc Sectio conica pro mista linea debet accipi. Exempli gratia sit Parabole ABC; siue vt linea, siue vt superficies, quam diuidat per medium secundùm longitudinem recta linea DBE, & super, ipsa BE suscipiantur quotlibet signa vtpote FG, per quæ ducantur rectæ lineę secantes ad rectos angulos ipsam DBE in signis FG: & ex vtraq; parte ab ipsa ABC conica Sectione, scilicet mista linea terminatæ in signis HI, & KL. Sitq; HF æqualis ipsi FI, & KG ipsi GL. Cùm itaque recta linea DBE Parabolem ABC per medium diuidat, necnon ipsas HI, & KL super ipsam DE ad rectos angulos deductas per medium secet, Axis, seu Dimetiens Paraboles est. Similiter autem Hyperboles etiam Axis erit ipsa DBE recta linea, si imaginemur ipsam ABC conicam Sectionem Hyperbolem esse. Sit rursus Ellipsis ABCDA, cuius longitudo quidem AC, latitudo verò BD. ducantur autem duę rectæ lineæ diuidentes eam per medium, altera scilicet per longitudinem, & altera per latitudinem. Istæ igitur rectæ lineæ sunt duo ipsius Ellipsis Axes eandem passionem habentes, quam de Paraboles, &



les, & Hyperboles Axe diximus. Horum autem Axium ipsum quidem Ac vocant Axim maiorem, siue Axem longitudinis, quoniam est maxima linea, quæ intra ipsā Ellipsi duci possit, & quoniam secundùm longitudinem Ellipsim per medium secat. ipsum verò BD, minorem Axim, seu Axim latitudinis appellant, quandoquidē minor est quàm AC, & iuxta latitudinem per medium totam Ellipsim dispescit. Hoc itaque pacto hæc nostra definitio intelligēda est. Nō me latet autem Apollonium diuersas conicarum Sectionum Dimetientes, diuersosque Axes varijs modis definire. Quasdam enim Transuersas, quasdam Rectas, quasdam Coniugatas, & quasdam Secundas appellauit Dimetientes. Axes autem quosdam Simpliciter Axes, & quosdam Coniugatos Axes nuncupauit. Præterea scio eum conicarum Sectionum Dimetientem ab earum Axe distinguere, & separatim definire. Omnis enim Axis, Dimetiens etiam est, sed non omnis Dimetiens, est etiam Axis. in sphæra nanque Dimetientes infinitæ sunt, vnus verò tantùm Axis. Similiter in conicis Sectionibus infinitæ Dimetientes esse possunt. At in Parabole, & Hyperbole quidem vnus tantummodo Axis: in Ellipsi verò, duo duntaxat erunt, maior scilicet, seu longitudinis: & minor, seu latitudinis. Nam Dimetiens quidem dicitur à dimetiēdo, quoniam figuram per medium dimetitur: Axis verò, ab agendo, quoniam circa ipsum figuræ circumaguntur. Quum igitur ex trium conicarum Sectionum super Axes suas circunductu quatuor generari corpora solida Geometræ imaginati sint, à Parabole quidem Rectangulum Conoides: ab Hyperbole verò, Obtusangulum Conoides: ab Ellipsi autem, duo Sphęroidea, Oblongum scilicet, & Latum; idcirco Dimetiētes



Notandum.

Diuersa genera Dimetientium, & Axium apud Apolloniū. Quo differat Dimentiēs ab Axi.

Dimetiens vnde dicatur Axis vnde. Qur in conicis sectionibus alię Dimetientes, alij Axes vocētur: & quatuor solida quæ à conicis sectionibus generantur.

eas, circa quas conicæ ipsæ Sectiones sese voluentes Solida illa generant, Axes nominarunt. Reliquas verò Dimetiẽtes, quæ in ipsis sunt, Dimetientium tantùm nomine appellarunt. Distinguit autem Apollonius Dimetientem conicarum Sectionum ab earum Axi hac differentia. quia scilicet Dimetiens quidem omnes parallelas super se ductas, & ex vtraque parte, à conica Sectione terminatas per medium diuidit: Axis verò non solùm per medium, verum etiam ad rectos angulos eas dispescit. His ita se habentibus, cùm in hac Tractatione de illa Dimetiente, quæ etiam Axis est, sermonem vt plurimùm habituri simus: non immerito Axem, & Dimetientem tanquam vnum, & idem definiuimus. Diuersa verò Dimetientium, & Axium genera silentio transiuimus: quoniam vel nullo, vel raro nobis vsui erunt, remittentes etiam lectorem, hæc omnia perfectiùs scire cupientem ad definitiones in primo libro Conicorum ab Apollonio traditas.

Dimetiens, & Axis quo differant secũdùm Apollonium.

Cur Axis, & Dimetiens hic non distinguantur.

Definit. 23. Summitas, seu Vertex conicæ Sectionis, est punctum, in quo Axis, seu Dimetiens conicam Sectionem diuidit.

Hìc etiam cùm dicimus [Vertex conicæ Sectionis] vtroque modo conica Sectio accipi potest. cùm verò dicimus [conicam Sectionem diuidit] de mista linea intelligendum est. Summitas igitur seu Vertex conicæ Sectionis in superioribus figuris erit, in Parabole quidem, & Hyperbole punctum B: in Ellipsi verò duæ Summitates erunt, nempe punctum A, & punctum C. Adnotandum autem est quòd infinitis secundum Apollonium conicarum Sectionum Dimetientibus existentibus, infinitæ etiam erunt earundem Summitates. Summitas verò, quam nos definiuimus, præcipua conicarum Sectionum Summitas est: & de qua vt plurimùm mentio fit.

Notandum.

Definit. 24. Latus conicæ Sectionis, est pars lineæ inflexæ, quæ citra Sectionis Axem in alterutram partem relinquitur.

Exempli gratia in superioribus figuris in ipsa quidem Parabole, & Hyperbole duo latera erunt AB vnum, & BC alterum: in Ellipsi verò si secundùm longitudinem latera suscipiantur, vnum erit ABC, & alterum ADC. Si autem secundùm latitudinem accipiantur

accipiantur, erit vnum quidem BCD, alterum verò BAD. Sed vt plurimùm de lateribus longitudinis in Ellipsi Geometræ sermonem habent. Notandum autem hìc etiã est ꝙ secundùm Apollonium infinita possunt esse conicarum Sectionum latera iuxta infinitas earum Dimetientes. nos verò de præcipuis quoque lateribus hìc loquimur.

Notandum.

Definit. 25. Rectæ lineæ structim, seu ordinatim actæ, vel ordinatè ductæ vocantur illæ, quæ à conicæ Sectionis latere ad Axem, siue Dimetientem ad rectos angulos ducuntur.

Quamuis ab Apollonio rectæ lineæ ordinatè ductæ vocentur non solùm illæ, quæ à conicæ Sectionis latere ad Axem ad rectos ducuntur angulos, verùm etiam omnes parallelæ rectæ lineæ super alijs etiam Dimetientibus ductæ, & ex vtraque parte à conica Sectione terminatæ, quæ ab ipsis Dimetientibus per medium licet etiam non ad angulos rectos diuiduntur: nos tamen priores tantùm definimus eisdem de causis, quibus Axem quoque solum, & non omnes Dimetientes definiuimus. Notandum est autem quòd eæ, quæ à nobis definiuntur rectæ lineæ ordinatè ductæ dupliciter in Ellipsi considerari possunt, vel ratione maioris, vel ratione minoris Dimetientis. Notandum præterea est quòd omnes ordinatæ ductæ dupliciter etiam accipiuntur, vel pro totis, vel pro partibus. tam enim ipsæ, quæ à conica Sectione vsque ad Axem, seu Dimetientem ducuntur: quàm ipsæ, quæ vlteriùs producuntur citra Dimetientem, vel Axem, quo vsque in altera parte conicam Sectionem iterum secent. Exempli causa in superiori figura tum tota HFI ordinatè ducta dicitur, tum quælibet eius partium HF, & FI, similiterque in alijs.

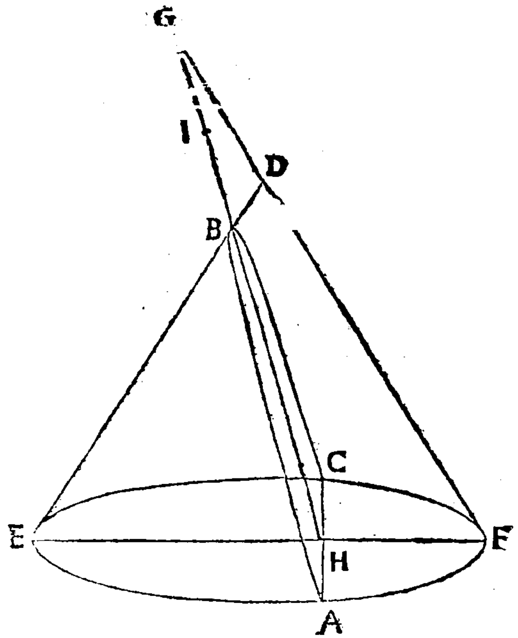
Not. primũ.

Not. secũdũ.

Definit. 26. Centrum Hyperboles, est punctum diuidens per medium partem Axis Hyperboles iacentem inter Verticem Hyperboles, & punctum, in quo ipse Axis productus coincidit cum reliquo trianguli per Coni Axem latere vltra Coni Verticem producto.

E 2 Exempli

Exẽpli gratia ſit Hyperbole ABC facta ĩ Cono DEF, vt ſuperiùs dictum eſt. Et ſit latus Coni productũ FDG, coincidens autem cum ipſo recta linea GBH: ipſa igitur GBH erit Axis Hyperboles. Diuidit enim tum ipſam ABC Hyperbolem per mediũ, tum omnes rectas lineas ſu℘ ipſa BH ad rectos angulos ductas, & ex vtraq; parte à Sectione ABC terminatas.



Quandoquidem planum Hyperboles ABC erectum eſt ad planum trianguli DEF, quod Conum per medium diuidit: ipſa autem GBH in trianguli plano eſt, cùm eius ED latus in ſigno B ſecet. Si itaque ipſa GB totius Axis externa pars per medium diuidatur in ſigno I, punctum illud diuiſionis, Centrum Hyperboles ab Apollonio, cæteriſq; Mathematicis appellatur. Rectam verò IB, vocat Apollonius Lineam ex centro Sectionis, in ſuis ſecundis primi libri Conicorum definitionibus.

Linea ex Cẽtro Hyperboles,q̃ ſit.

Deſinit. 27.

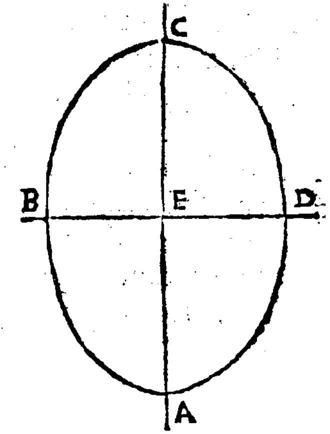
Centrum Ellipſis, eſt punctum, quod eius Axem, ſeu Dimetientem per medium diuidit.

Sit Ellipſis ABCDA, cuius duo ſint Axes, ſeu Dimetientes, maior quidem AC, minor verò BD, qui neceſſariò in partes æquales ſeinuicem ſecant, cùm vterq; eorum totam Ellipſim per medium partiatur. Punctum igitur, in quo ſeſe interſecant, quod verbi gratia ſit E, ipſius Ellipſis Centrum dicitur; quoniam non ſolùm duas eius axes per medium diuidit, ſed omnes etiam rectas lineas, quæ per ipſum ab vno Ellipſis latere ad alterum ducuntur.

Hæc

Centri proprietas.

Hæc enim vna eſt ex Centri proprietatibus. Quamuis autem de Centro Ellipſis nullam in hoc opere faciemus mentionem, illud attamen definire voluimus, quoniam de Dimetientibus etiam ipſius Ellipſis mentionem ſuperiùs fecimus, & quoniam breuiter, & obſcurè Apollonius illud ſimul cum Hyperboles Centro definiuit. Nos verò ſeparatim vnumquodque definiuimus, vt agnoſcatur eorum differentia. alterum enim extra Sectionem eſt, alterum autem, intra. Quòd ſi etiam Parabole Centrum haberet, illud quoque à nobis definitum eſſet dilucidandę huius doctrinæ cauſa: ſed nullum ab Apollonio Centrum Paraboles poſitum fuit, quoniam nuſquam ipſo vſus eſt. At ſi punctum aliquod Centrum Paraboles vocandum eſt, aut erit centrum grauitatis Paraboles poſitum ab Archimede in propoſitione octaua libri ſecundi æquè ponderãtium: aut ſi imaginemur ab vno latere ad aliud latus Paraboles ductam eſſe ad rectos angulos Axi rectam lineam, quæ ab Axe ſecetur per medium, & altera quæuis duarum eius partium ſit æqualis parti ipſius Axis inter ipſam rectam lineam, & Sectionis Summitatem receptæ: punctum illud, in quo ſecatur ab Axi dicta recta linea, Centrum Paraboles appellari poterit, eo ℘ tres ab ipſo ad conicam Sectionem æquales exeunt rectæ lineæ. Centri enim proprietas hęc etiam eſt, vt ab eo ad figuræ Ambitum rectæ lineæ ductæ inuicem æquales ſint. & quantò plures erunt æquales ipſæ lineæ, tantò veriùs ſignum illud Centrum vocabitur.



De Centro Paraboles.

Vna Centri Paraboles cõſidetatio.

Alia eiuſdẽ cõſideratio.

Alia Centri proprietas.

Deſinit. 28.

Recta linea conicam Sectionem ſecare dicitur, quę duo inflexæ lineæ puncta coniungit.

29

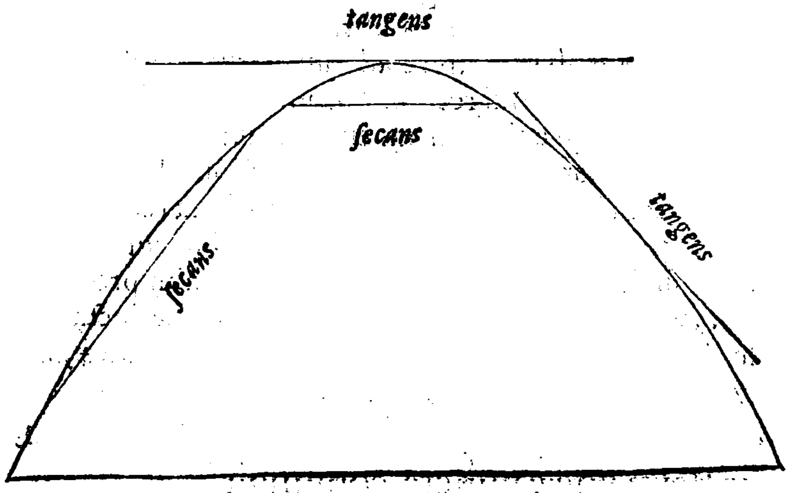
Recta linea conicam Sectionem tangere dicitur, quæ cùm ipſam tangat, quomodocunque producatur, eam non ſecat. Vnde manifeſtum eſt quòd in vnico tantùm puncto eam ſemper tanget.

Hæ duæ definitiones ex ſe prorſus dilucidæ ſunt. Cùm enim

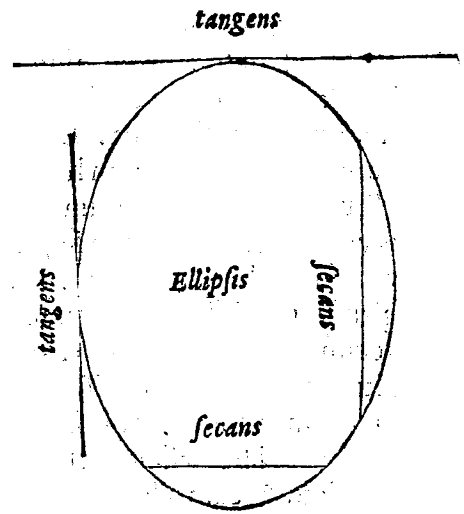
conicæ

conicæ Sectiones in conica ſuperficie præter Coni verticem fiant, proculdubio ſi duo quælibet puncta recta linea in eis coniungat, intra ipſas cadet per ſecundam petitionem huius, easq; neceſſariò ſecabit. Si verò linea recta conicam Sectionem tangens quomodocunque producta eam non ſecet, nemini dubium quòd in vnico tantùm puncto eam tanget, ideoque tangens Sectionem non immerito dicitur. Si enim in duobus ſignis eam tangeret, non eſſet tangens, ſed ſecans. Sic autem Euclides etiam rectam lineam circulum tangere definiuit. omiſit autem definitionem rectæ lineæ circulum ſecantis tanquam manifeſtam ex ipſius tangentis definitione. Duas autem præſentes definitiones figuræ ſequentes declarant.

Cur Euclides rectā lineam circulum ſecantē non definiuerit.



Parabole, vel Hyperbola



Inæquales circuli ſunt, quorum Dimetientes, vel Semidimetientes ſunt inæquales. Et maior quidem eſt, qui maiorem habet Dimetientem, vel Semidimetientem: minor verò, qui minorem. Definit. 30.

Diſſimilia circulorum Segmenta ſunt, quę inæquales angulos capiunt: aut in quibus anguli adinuicem inæquales ſunt. 31

Circulos æquales, & Segmenta circulorum ſimilia definiuit Euclides in definitionibus tertij libri Elementorum. inæquales autem circulos, & diſſimilia circulorum Segmenta non definiuit, quoniam cognito vno contrariorum, facilè cognoſcitur & alterum. Nos verò has duas definitiones hìc ponere voluimus, quoniam ſæpenumerò in hac Tractatione ipſis vtemur.

Recta linea ſuperficiem aliquam, ſeu ſuperficialem Aream poſſe dicitur, cuius quadratum illi ſuperficiei, ſeu Areę ſuperficialis æquale eſt. Definit. 32, & vltima.

Nullibi declarauit Euclides quæ nam ſit rectarum linearum potentia,

tentia, sed veluti manifestum hoc supponit cùm in tertia definitione libri decimi dicat rectas lineas Potentia Commensurabiles esse eas, quarum quadrata ab eadem superficie, siue Area metiuntur. Vnde manifestum nobis est quòd rectarum linearum Potentiæ nil aliud sunt, nisi quadrata, quæ ab ipsis fiunt. Dicuntur autem Potentiæ rectarum linearum, quadrata ipsarum hac ratione. quia tanta est Area vniuscuiusque quadrati quantum potest producere quantitas longitudinis vnius laterum eius in seipsam multiplicata. verbi gratia si recta linea fuerit longa quatuor Cubitorum, multipliceturque ipsa longitudo in seipsam; fiet quadratum, cuius tota Area continebit sedecim quadrata inuicem æqualia, quorum latera vnius Cubiti longitudinem habebunt. Tantum igitur recta linea posse dicitur, quantum quadratum ipsa describere potest. Quare si quadratum illud alicui superficiei, seu Areæ fuerit æquale, ipsam etiam superficialem Aream illa recta linea posse non immerito dicitur. Hactenus de definitionibus simul, & petitionibus.

Quæ sit Rectæ lineæ potentia.

Cur quadrata Potentiæ suorum laterum dicatur.

Communes Sententiæ.

1 RATIONES eædem sunt, quæ ex eisdem componuntur Rationibus.

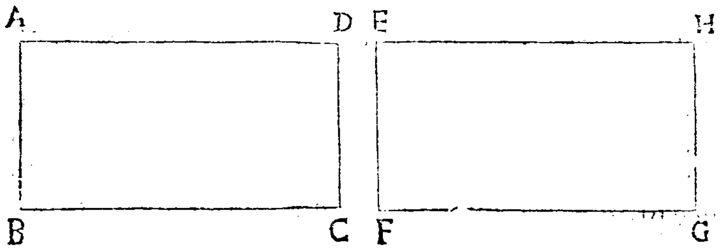
Quomodo Ratio ex Rationibus componatur docuit Euclides in quinta definitione sexti libri Elementorum, & Vitellio in vltima definitione primi libri suæ Perspectiuæ. Quomodo autem dicantur eædem esse Rationes ex sexta definitione quinti libri eorundẽ Elementorum patet. Si igitur Rationes, ex quibus aliquæ aliæ Rationes componuntur, eædem inuicem fuerint; illæ etiam compositæ ex eis Rationes eædem inter se erunt: si verò componentes fuerint diuersæ inter se, compositas quoque adinuicem diuersas esse necesse est.

2 Aæqualium quadratorum æqualia sunt latera, & inæqualium inæqualia: maioris quidem maius, minoris verò minus. Et è conuerso linearum æqualium quadrata æqualia sunt, & inæqualium inæqualia: maioris quidem maius, minoris autem minus.

Hæc quamuis à multis Recentioribus tanquã Communis Sententia supponatur, ab Antiquis tamen tanquam Theorema demonstrabatur. Quòd enim, æqualium quadratorum latera æqualia, & æqualium linearum quadrata æqualia sint, demonstrat Proclus geometricis rationibus in commentario quadtagesimæsextæ propositionis primi libri Elementorum Euclidis. quibus demonstratis, facilè etiam per demonstrationem indirectam demonstrari potest quòd inæqualium quadratorum inæqualia sint latera, & inæqualium linearum inæqualia quadrata: maioris quidem maius, minoris verò minus. Si enim quadratis inæqualibus existentibus latera eorum inæqualia non essent, sed æqualia; quadrata quoque ipsarum ex demonstratis à Proclo essent æqualia, quod est suppositioni contrarium. Similiter si lineis inæqualibus existentibus quadrata ab eis facta non essent inæqualia, sed æqualia; ipsæ quoque lineæ ex eisdem à Proclo demonstratis æquales essent, quod suppositioni oppugnat. Quòd autem maioris quidem quadrati maius latus, minoris verò minus: & maioris quidem lineæ maius quadratum, minoris autem minus sit, apertissimè patet. Quum enim quadrata fiant ex multiplicatione longitudinis linearum in seipsam, vt superiùs diximus; nemo est, qui non fateatur quantitatem longioris lineæ in se multiplicatam producere maius quadratum, quàm breuioris lineæ quantitas: & è conuerso maius quadratum à maiori radice productum fuisse, quàm minus. Quanuis itaque Theorema hoc sit, hisque modis ab antiquis demonstretur, tamen in præsenti nostro Opere tanquam Communem Sentẽtiam supponendũ esse duximus. Sicuti etiam Petitiones quasdam, & Definitiones superiùs supposuimus, quas Apollonius tanquam Theoremata demonstrauit. Fas est enim, in quibusdam operibus prima alicuius scientiæ Elementa non tradentibus, ea, quæ ab alijs demonstrata fuere, veluti principia supponere. sed in primis scientiarum Elementis (qualia Euclidis sunt) nil supponendum est, quod demonstratione confirmari possit.

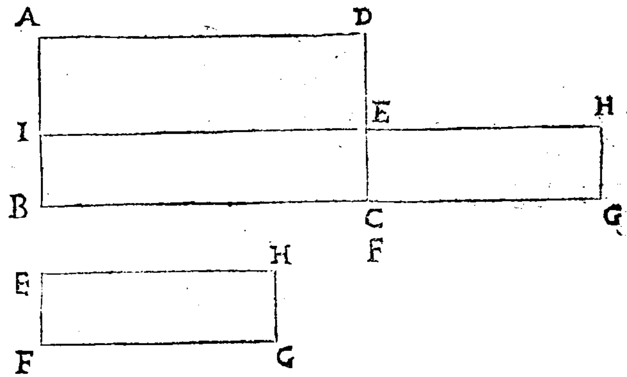
Parallelogramma Rectangula longitudinem, & latitudinem æquales habentia; æqualia sunt: maiores verò, maiora: minores autem, minora. 3

In prima definitione secundi libri Elementorum docet Euclides omne Parallelogrammum Rectangulum contineri à duabus re ctis lineis rectum angulum comprehendentibus. hoc est tantam esse cuiuscunque Parallelogrammi rectanguli Aream, quantum est id quod fit ex multiplicatione adinuicem duorũ eius laterum rectum angulum continentium. At duo cuiuscunque rectanguli latera rectum angulum continentia, nil aliud sunt, nisi eius longitudo, & latitudo. alterum enim longitudinem, alterum latitudinem tenet. Igitur ex ea definitione omnino manifestum est, quòd si quædam parallelogramma rectangula fuerint, quorum longitudo vnius longitudini alterius, & latitudo vnius latitudini alterius æquales fuerint; ipsorum etiam Areæ inuicem æquales erunt: & si longitudo, & latitudo vnius, longitudine, & latitudine alterius maior fuerit; Area quoq; maiorem longitudinem, & latitudinem habentis maior erit, quàm Area eius, quod minorem longitudinem, & latitudinem habet. Potest autem geometrica etiam demonstratione hoc theorema confirmari. Sint duo parallelogramma rectangula ABCD, &



EFGH, quorum longitudines BC, & FG; nec non latitudines AB, & EF sint æquales. Dico quòd eorum etiam Areæ æquales sunt. Si enim inuicem parallelogramma hæc coniungantur ita vt BC longitudo FG longitudini indirectum sit, latitudo autem DC latitudini EF copuletur, communisque vtriusque rectanguli altitudo fiat: erit per primam propositionem sexti libri Elementorum Euclidis sicut basis BC ad basim FG, sic Area ABCD ad aream EFGH. Cùm autem BC ipsi FG ex suppositione sit æqualis, proculdubio Area etiam Areæ æqualis erit. Sint rursus duo parallelogramma rectangula ABCD, & EFGH, quorum ipsum ABCD habeat longitudinem BC, & latitudinem AB maiores longitudine FG, & latitudine EF ipsius EFGH. Dico quòd Area quoque ipsius ABCD maior est, quàm Area ipsius

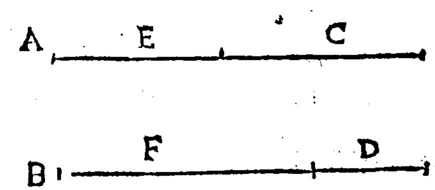
EFGH.



EFGH. coniungatur ipsũ EFGH ipsi ABCD ita vt FG latus sit in directum lateri BC, & copuletur FE cũ CD, à quo abscindet partẽ FE cùm minus sit EF quàm CD. Producatur igitur per punctum E parallela ipsi CB quousque secet latus AB in signo I. Erit ergo per eandem primam sexti parallelogrammum BCEI maius parallelogrammo EFGH. Quare multo magis totum ABCD eodem EFGH maius erit. Demonstrata est igitur vtraque pars huius theorematis, quod in præsentia nos tanquam communem sententiam supponimus, rationibus superius allatis.

Si ab æqualibus inæqualia auferantur, reliqua in- 4
æqualia sunt: maius quidem, à quo minor ablatio
minus verò, à quo maior facta est.

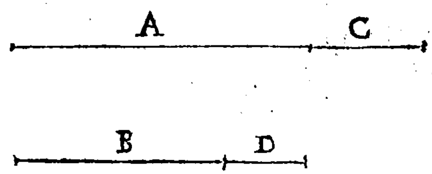
Exempli gratia si ab æqualibus AB quantitatibus inæquales partes auferantur ab A quidem C maior, à B verò D minor: reliqua E pars ipsius A minor est quàm F reliqua ipsius B pars.



Si inæqualibus inæqualia adiungantur maius 5
quidem maiori, minus verò minori: aggregata etiam eodem modo inæqualia erunt, maius nempe, cui maior additio, minus autem, cui minor

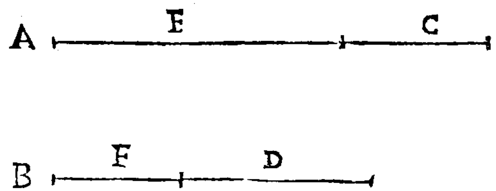
facta fuit.

Vt si inæqualibus quātitatibus A B maiori quidem A maior C, minori verò B minor D adijciatur; aggregatum ex A C aggregato ex B D maius erit.



6 Si ab inæqualibus inæqualia auferantur maius quidem à minori, minus verò à maiori: quæ remanent eodem modo inæqualia erunt, minus scilicet, à quo maior facta fuit ablatio, maius verò, à quo minor.

Vtpote si ab inæqualibus A B quantitatibus minor quidem pars C ab ipsa A maiori auferatur, maior verò D ab ipsa B minori: remanet E reliqua ipsius A pars maior quàm F reliqua pars ipsius B. Tres istæ veræ Cōmunes Sententiæ sunt, quoniam nulla demonstratione indigent cùm sensui pateant. Non fuerunt autem ab Euclidæ positę quoniam multę etiam aliæ Communes Sententię fuerunt ab eo prętermissę vel tanquam ei non necessariæ, vel, breuitatis causa, tanquam sensui manifestæ.



7 Si quotlibet quantitates æquales ad quamlibet aliam eiusdem generis quantitatem comparentur; erunt omnes illa aut æque maiores, aut æquè minores, aut ei simul æquales.

8 Quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam, tanta esse potest quęlibet tertia ad quamlibet quartam.

Has

Has duas Communes Sententias adiecit Campanus in principijs primi libri Elementorum Euclidis, quæ tamen ibi non erant adijciendæ tum quia Euclidi necessariæ non sunt, tum etiam quia intelligentia earum ex definitionibus quinti libri Elemētorum dependet. nam quotlibet quantitates ad quamlibet aliam eiusdem generis quantitatem comparare, nil aliud est nisi Rationes, quas ad illam habent ostendere. Quid autem Ratio sit, & quomodo quantitates Rationem inter se habere dicantur in tertia, & quinta definitione quinti libri Elementorum docet Euclides. Præterea tantam esse aliquam quantitatem ad quamlibet aliam, idem est ac si dicamus talem Rationem habere aliquam quantitatem ad quamlibet aliam; vel Multiplicem, vel Superparticularem, vel Superpartientem, vel ex his compositam. Quid autem Multiplex sit, in secunda definitionem eiusdem quinti docet Euclides: Quid rursus Ratio, & Rationem habere, in iam dictis tertia, & quinta definitionibus. Sensum igitur primæ harum duarum Communium Sententiarum tale est. Quòd si quotlibet quantitates æquales ad vnam quamlibet aliam eiusdem generis quantitatem comparentur, omnes ad eam eandem habebunt Rationem. Non ab re autem dictum est eiusdem generis, quoniam comparatio, atque Ratio non cadit nisi in quātitatibus eiusdem generis, vt ex ipsa tertia definitione quinti libri Elementorū habetur. Idem verò genus pro genere proximo hìc accipiendum est; vt numeri ad numerum, & magnitudinis ad magnitudinem, scilicet lineæ ad lineam, & superficiei ad superficiē, & corporis ad corpus. Discreta enim, & continua quantitas eiusdem generis sunt, cùm ambę sub genere quantitatis reducantur, nulla tamen inter numerum, & magnitudinem cadit Ratio, & comparatio. Quinetiam lineæ ad superficiem, & superficiei ad corpus nulla est Ratio, quamuis sub genere magnitudinis sint. Secundæ autem harum duarum Communis Sententię sensus hic est. Quòd eam Rationem, quam habet aliqua quantitas ad quamlibet aliam, eandemmet quælibet tertia ad quamlibet quartam habere potest. hoc est, si aliqua quantitas ad quandam aliam dupla fuerit, licet nobis accipere quamlibet tertiam, quæ etiam dupla sit ad quamlibet quartam. Et est animaduertendum quòd hìc quoque idem proximum genus in binis, ac binis terminis seruari debet: vt scilicet primæ duæ quantitates sint eiusdem generis, & similiter duæ posteriores. Nil refert autem si duæ primæ à duabus postremis genere differant.

Campanus reprehenditur.

Septimæ cō munis sententiæ expositio.

Octauæ expositio.

Not. primū.

differant. eam enim Rationem, quam habet numerus ad numerum, habere potest & magnitudo ad magnitudinem: & eam, quam habet linea ad lineam, superficies quoque ad superficiem, & corpus ad corpus habere potest. Animaduertendum etiam quòd Campanus limitat hanc secundam Cōmunem Sententiam dicens eam vniuersaliter veram esse in quantitatibus continuis, quoniam magnitudo in infinitum decrescit: in numeris autem non esse vniuersaliter veram nisi in Submultiplicibus, quoniam numerus crescit in infinitum, sed non in infinitum decrescit; vnde possumus accipere duos minimos in aliqua Ratione numeros, quibus minores in eadem Ratione numeri dari non possint, propter Vnitatis indiuisibilitatem. At si Vnitatem in partes diuiserimus, vt Logistici, seu Supputatores docent, partesq; Vnitatis pro terminis tanquam numeros acceperimus; dubio procul hæc Communis Sententia discretis etiam in quantitatibus vera vniuersaliter erit.

Not. secūdū.

Quomodo Campani limitatio intelligēda sit.

9 Si quotlibet quantitates proportionales fuerint sicut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, & quinta ad sextam, sicque vsque ad infinitum, prima autem quàm secunda maior fuerit: erit & tertia quàm quarta, & quinta quàm sexta maior. Quòd si prima fuerit æqualis secundæ, erit & tertia æqualis quartę, & quinta sextę. Si verò prima quàm secunda minor fuerit, erit & tertia quàm quarta minor, & quinta quàm sexta, cętereque in infinitum eodem modo.

Hanc Communem Sententiam tanquam prorsus manifestam, à sextaque libri quinti elementorum definitione dependentem vbique supposuit Euclides, idcirco nos eam hìc posuimus, quoniam maximo nobis vsui futura est. Patet autem per se absque vlla declaratione.

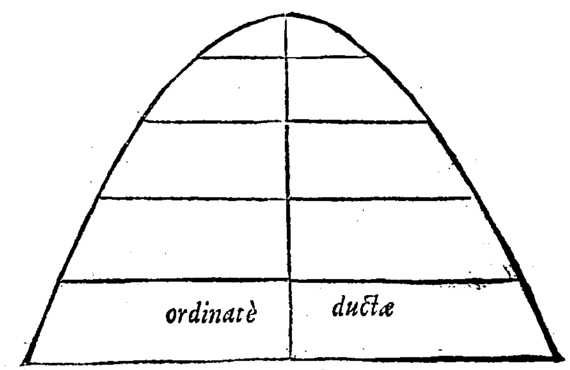
30, & vlt. Linearum ordinatè ductarum propinquiores Summitati Sectionis conicę ab eadem Summitate remotioribus minores sunt.

Quænam sint in Sectionibus conicis lineę ordinatè ductæ superiùs definiuimus. nunc autem hac Communi Sententia declaramus

mus

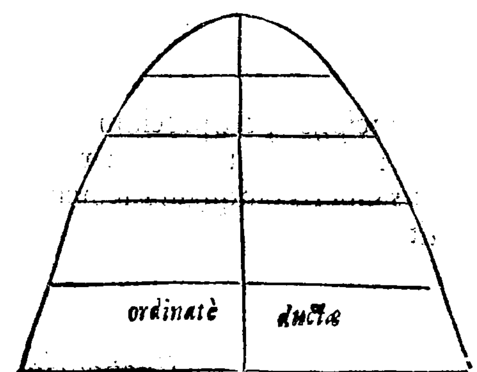
mus quòd eiusmodi linearum illę quidem, quæ Summitati conicæ Sectionis magis appropinquant illis, quæ ab ipsa Summitate magis remouentur semper in omni conica Sectione minores sunt. Hoc autem nulla demonstratione indiget. Cùm enim Parabole, & Hyperbole vnam habeant præcipuam Summitatem, a qua quo magis producuntur, eò magis dilatantur, manifestum est quòd lineæ in ipsis ordinatè ductę quo magis à Summitate remouentur, eò magis crescunt. cùm verò Ellipsis duas præcipuas habeat Summitates, à quibus vsque ad Axem latitudinis continuè latior sit, perspicuum est quòd in ea quoque lineæ ordinatè ductæ quo magis à Summitatibus remotæ sunt, eò magis dilatantur. Notandum autem ꝙ hęc Cōmunis Sētentia vniuersaliter vera est non solùm in lineis ordinatè ductis à nobis definitis, sed in oībus etiā ordinatè ductis, quæ ab Apollonio definitæ sunt. vt subscriptæ figuræ ostendūt. Notandum.

Summitas



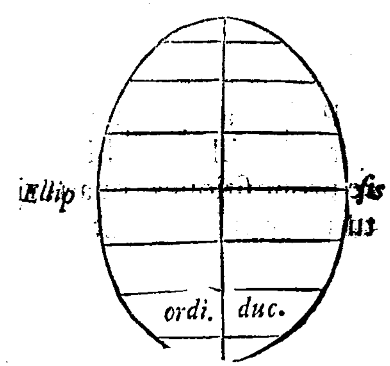
Parabolæ

Summitas

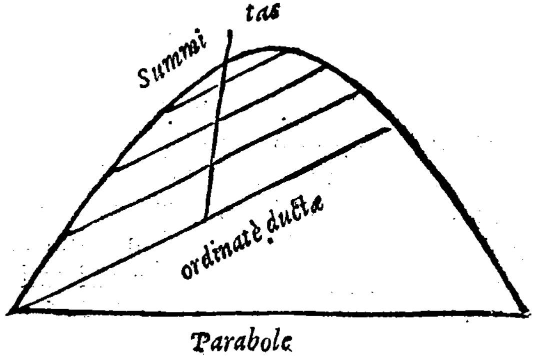


Hyperbole

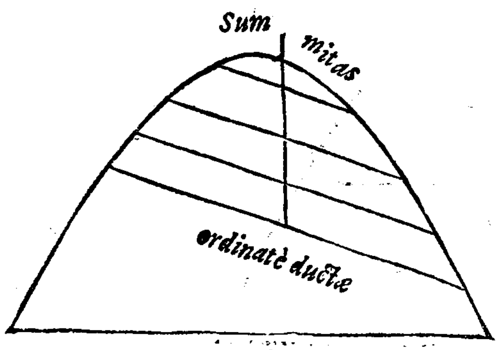
Summitas



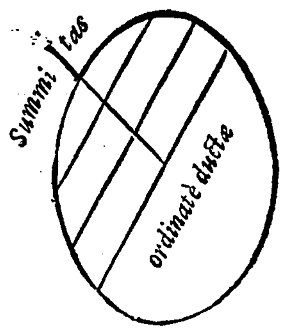
Summitas



Parabole



Hyperbole



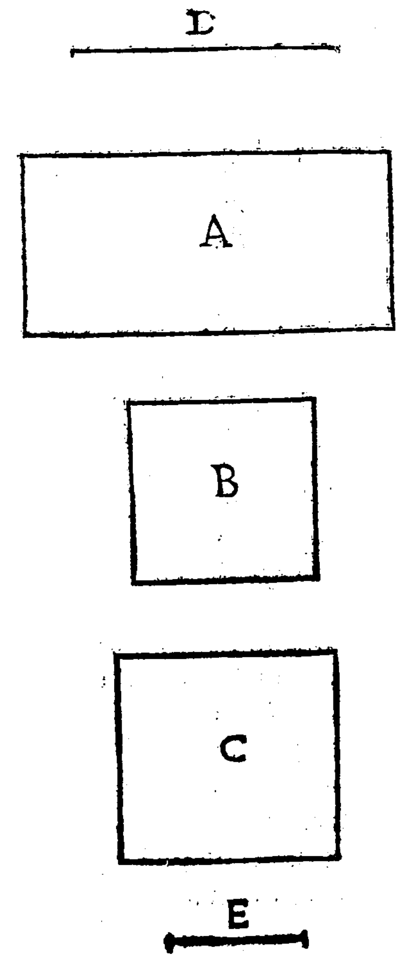
Ellipsis

Positis iam, atque declaratis principijs operæprecium est ante quam Problema nobis propositum aggrediamur, tres demonstrare propositiones, quæ totius huius Operis tanquam Elementa futuræ sunt. Harum autem prima sit huiusmodi.

Propositio prima, Problema primum.

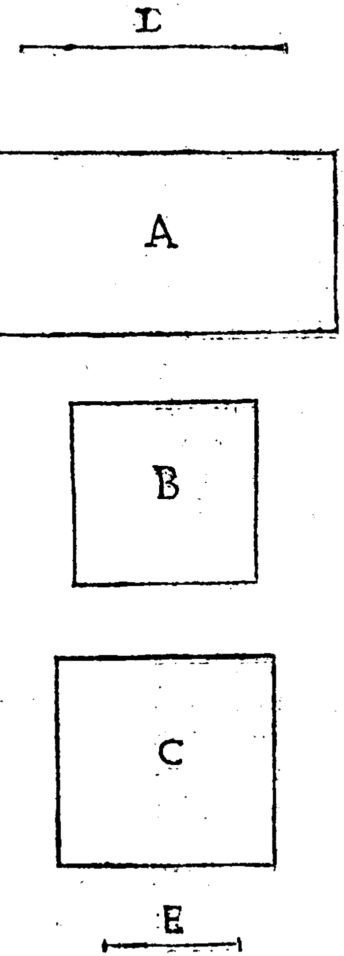
DATO Parallelogrammo Rectangulo, & duobus quadratis: inuenire tertium quadratum, ad quod eam habeat Rationem alterum datorum quadratorum, quam habet datum Rectangulum ad reliquum ipsorum quadratorum. Propositio.

Expositio. Sit datum quidem parallelogrãmum rectangulum A, data verò duo quadrata B, & C. volo inuenire tertium quadratum, ad quod eam habeat rationem alterum quadratorum B, & C, verbi gratia ipsum C, quã habet rectangulum A ad reliquum quadratum B. Cōstructio. Reperiatur itaque per vltimam propositionem secundi libri Elementorum Euclidis latus potens aream A, quod sit recta linea D; & per duodecimam propositionem libri sexti eorundem Elemẽtorum inueniatur recta linea E, ad quam latus quadrati C habeat eandẽ rationem, quã habet recta D ad latus qua-



Determinatio. drati B. Dico quadratum ipsius E illud esse, quod quęritur.

Demonstratio. Quum enim ratio rectæ lineę D ad latus quadrati B, sit sicut rō lateris quadrati C ad rectam E, igitur per primam partem vicesimæ secūdæ propositionis sexti lib. Element. Eucl. eadem etiam erit ratio quadrati lineæ D ad quadratum B, quæ est quadrati C ad quadratum lineæ E. At quadratum ipsius D per Cōstructionem est æquale Rectangulo A. Ergo per primam partem septimæ propositionis quinti libri Element. Eucl. quam habet rationem quadratum ipsius D ad quadratum B, eandem habebit Rectangulum A ad idem quadratum B. Quare per vndecimam propositionem eiusdem quinti parallelogrammum rectangulum A eandem habet rationem ad quadratum B, quam habet quadratum C ad quadratum ipsius E rectæ lineæ.



Conclusio. Datis igitur parallelogrammo rectangulo A, & duobus quadratis B, & C, repertum est tertium quadratum ipsius E, ad quod eam habet rationem alterum datorum quadratorum, nempe C, quam habet parallelogrammum rectangulum A ad reliquum B quadratū, quod erat faciundum.

Propositio Secunda, Theorema primum.

Propositio. SI trianguli per Axem Coni alterum latus versus Coni Verticem indirectum producatur, & ab eius extremitate extra Conum existente ad conicæ Basis Dimetientem recta linea ducatur secans reliquum trianguli latus, atque in eadem recta linea quotcunque signa intra Conum suscipiantur, ab eisque rectæ lineæ plano ipsius per coni Axē trianguli ad rectos angulos erigantur conicæ occurrentes superficiei: erit ratio quadrati vniuscuiusq; ipsarum ad rectos angulos erectarum ad rectangulum contentum à tota sua conterminali versus Coni Verticem extensa, & parte ipsius conterminalis intra Conum existente; sicut ratio quadrati cuiuslibet aliarum ad rectos angulos erectarum ad Rectangulum à tota similiter sua conterminali, & eius parte intra Conum existente comprehensum.

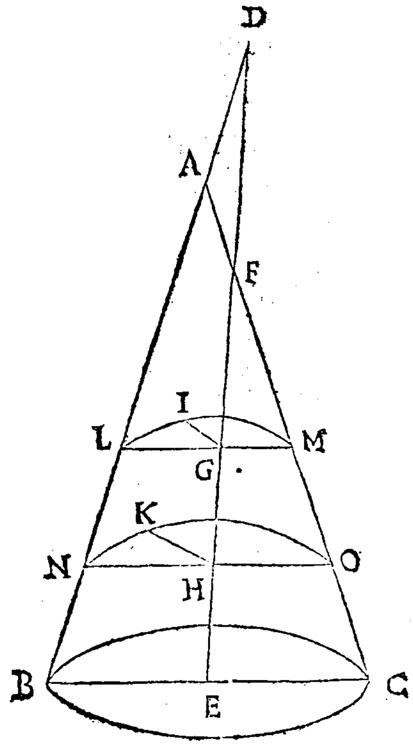
Expositio. Sit ABC triangulum per Axem Coni, & conicæ Basis dimetiēs BC. Et ipsius trianguli latus AB in partem A quantumlibet producatur per secundam pet. primi libri element. Euc. vsque ad D signum, à quo ad quoduis signum E in conicæ BC Basis dimetiente sumptum per primam petitionem eiusdem recta DE ducatur linea secans necessariò AC reliquum eiusdem trianguli latus in signo F, per 32 prop. & 9 com. sent. & 5 pet. primi libri Elementorum Eucl. & per 7 com. sent. huius. si recta scilicet DC linea ducta intelligatur, atque in EF recta linea quotlibet vtcunque assumantur signa vt GH, à quibus plano trianguli ABC ad rectos angulos rectæ lineæ per 12 prop. lib. xj. Elementorum Euclidis erigantur occurrentes conicæ superficiei in IK signis.

Determinatio. Dico quòd ratio quadrati rectæ lineæ GI ad rectangulũ à DG, GF comprehensum, est sicut ratio quadrati lineæ HK ad rectangulum, quodà DH, HF continetur.

Constructio.

Intelligantur itaque duo plana conicæ Basi parallela secantia Conum, rectamque DE lineam in signis GH. quorum vtiq; planorum, & plani trianguli ABC cõmunes sectiones erũt per 3 prop. xi lib. Elem. Euc. rectæ lineæ, quæ sint LGM, & NHO. Communes autem eorundem planorum, & superficiei conicę sectiones erũt per 4 Petitionẽ huius circunferentiæ circulorũ LIM, & NKO, quorum Dimetientes sunt ipsæ LGM, & NHO. ipsæ verò GI, & HK rectæ lineæ per: prop. lib. xi. Elem. Eu. in eisdem cum lineis LGM, & NHO sunt Planis. ipsæ demum LM, & NO rectæ lineæ ipsi BC parallelæ sunt per 16 prop eiusdem lib. xi, vnde etiam inter se parallelæ sunt per 30 propositionem primi libri eorundem.

Hoc obscurè elicitur ex Vernero.



Demonstratio.

His ita constructis, si rectæ lineæ LI, IM, & NK, KO ductæ intelligantur, quoniam anguli quidem LIM, & NKO per 31 prop. libri 3 Elem. Euc. recti sunt; rectæ verò lineæ GI, & *HK* per Constructionem, & per 3 definitionem lib. II eorundem ad rectos sunt angulos ipsis LM, & NO rectis lineis: erunt per Corollarium octauæ propõnis libri sexti Elem. Eu. ipsæ GI, & *HK* mediæ proportionales inter LG, GM, & N*H*, *H*O rectas lineas. Quare per primam partem 17 propositionis eiusdem sexti Elem. erit Rectangulum ab LG, GM compre-

Hoc etiã obscurè ex Verneri verbis elicitur.

comprehensum æquale quadrato ipsius GI: & Rectangulum ab NH, HO contentum æquale quadrato ipsius *HK*. Quoniam autem per prop. 23 eiusdem sexti æquiangula parallelogramma eam habent inter se rationem, quæ ex laterum suorum rationibus componitur; omnia verò parallelogramma rectangula per 4 petitionem primi lib. Elem. Euc. æquiangula etiam sunt: igitur ratio rectanguli à DG, GF contenti ad rectangulum ab LG, GM contentum componitur ex duabus rationibus, quarum vna est lateris DG ad latus GL, altera ipsius FG ad GM. Similiter ratio Rectãguli à D*H*, *H*F comprehensi ad Rectangulum ab N*H*, *H*O cõprehensum componitur ex ratione lateris D*H* ad latus *H*N, & ratione ipsius F*H* ad *H*O. At per Constructionẽ, & 2 partem prop. 29 primi, & quartam propositionem sexti libri Elem. Euc. ratio ipsius D*G* ad *G*L eadem est, quæ ipsius D*H* ad *H*N; & ratio ipsius F*G* ad *G*M eadem, quæ ipsius F*H* ad *H*O. Igitur ratio composita ex rationibus laterum D*G* ad *G*L, & F*G* ad *G*M; & ratio composita ex rationibus ipsorum D*H* ad *H*N, & F*H* ad *H*O eædem sunt per primam com. sent. huius. Qua propter per vndecimam propositionem quinti libri Elementorum Euclidis quater, & secundam partem 7 propositionis eiusdem bis sumptas ratio Rectanguli à DG, *G*F contenti ad Rectangulum ab L*G*, *G*M comprehensum, seu ad ipsi æquale quadratum lineæ *G*I, est sicut ratio Rectanguli à D*H*, *H*F comprehensi ad Rectangulum ab N*H*, *H*O contentum, seu ad ipsi æquale quadratũ lineę *HK*. Ergo per Corollariũ quartæ propõnis quinti lib. Elementorum Euc. ratio quadrati lineę *G*I ad Rectangulum à D*G*, *G*F comprehensum, est sicut ratio quadrati lineæ *HK* ad Rectangulum à D*H*, *H*F contentum. Quod est Propositum.

Conclusio.

Si igitur trianguli per Axem Coni alterum latus versus Coni Verticem indirectum producatur, & reliqua, vt in Propositione. Quod demonstrasse oportuit.

Corollarium.

Hinc fit perspicuum quòd recta linea HK maior est quàm GI.

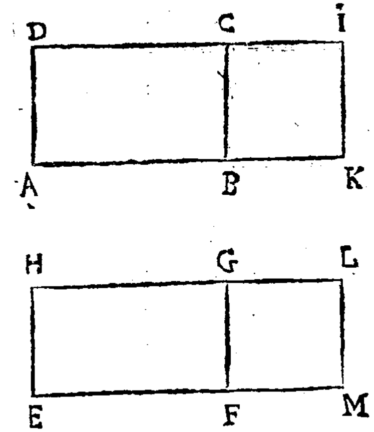
Nam per Constructionem, & 29 prop. primi, & 4 prop. sexti, & 9 Com. Sen. primi lib. Elem. Eucl. & 9 Com. Sent. huius HN maior est ior est quàm GL, & HO maior quàm GM. ergo per 3 Com. Sent. huius Rectangulum contentum ab NH, HO maius est Rectangulo ab LG, GM contento. At quadratum quidem ipsius HK æquale ostensum est Rectangulo ab NH, HO comprehenso, quadratum verò ipsius GI æquale itidem Rectangulo ab LG, GM contento. igitur per primam,& secundam partem 7 propositionis lib.quinti Elem. Eucl. & 9 Com. Sent. huius bis sumptam quadratum ipsius HK maius est quadrato ipsius GI. Quare per 2 Com. Sent. huius recta linea HK maior est quàm GI. & hoc est quod à Corollario proponitur. Eodem autem modo in alijs etiam omnibus huiuscemodi rectis lineis liquebit, quòd semper Basi conicæ propinquiores ab eadem Basi remotioribus maiores sunt.

Propositio tertia, Theorema secundum.

Propositio. SI duo parallelogramma rectangula duobus quadratis ita adiungantur, vt vnum quidem cum ipsis commune latus habeant, duo verò duobus indirectum iacentia, atque duo hæc aggregata inuicem æqualia fuerint, si vnum vnius rectanguli latus ex indirectum iacentibus vni ex eisdem alterius rectanguli lateribus æquale fuerit: quadrata illa æqualia inuicem erunt. Si autem dicta latera inæqualia fuerint: quadratum, cuius lateri maius rectanguli latus in directum iacet, reliquo quadrato minus erit.

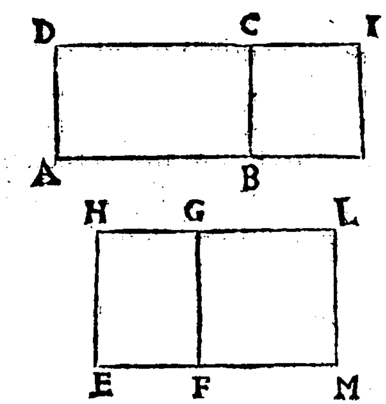
Expositio. Sint duo Parallelogramma rectangula ABCD, & EFGH, quæ adiungantur quadratis BCIK, & FGLM ita vt recta quidem linea BC sit commune latus rectanguli ABCD, & quadrati BCIK; & similiter ipsa FG sit commune latus rectanguli EFGH, & quadrati FGLM: duo verò AB, & DC latera indirectum iaceant ipsis BK, & CI lateribus, & pari modo duo EF, & HG ipsis FM, & GL. Atq; duo hæc aggregata, nempe

pe



pe rectangula AKID, & EMLH inuicem æqualia sint. Dico quòd si AB recta linea rectæ EF æqualis est, quadratũ etiam BCIK æquale est quadrato FGLM. Si verò AB maior fuerit quàm EF, quadratum BCIK quadrato FGLM minus erit. **Determinatio.**

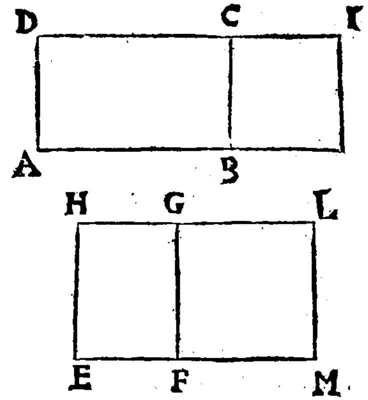
Sint primùm AB, & EF æquales. Si itaq; BCIK quadratum FGLM quadrato ęquale nõ fuerit; aut minus ipso, aut maius esse necesse est. **Demonstratio primæ partis.** Quòd si minus; ergo & BK latus ipso FM latere,& IK ipso LM minus erit per secũdã Com. Sent.huius. Quare per 4 Com.Sent. primi lib.Elemen. Eucl. tota AK minor erit quàm tota EM. est autem & IK minor quàm LM, igitur per 3 Com.Sent. huius Rectangulum AKID Rectangulo EMLH minus est, quod est suppositioni contrarium. **Duos casus hét hęc prima ps, quos vide infra in digressione contra Vernerum.** Si verò quadratum BCIK quadrato FGLM maius esse dicatur, eisdem rationibus cõcludetur AKID Rectangulũ ipso EMLH Rectãgulo maius esse,quod etiam suppositioni oppugnat. Non est igitur quadratum BCIK quadrato FGLM minus,neq; maius, ergo ipsi æquale, quæ est prima propositionis pars. **Conclusio primæ partis.**



Sint modo AB, & EF inæquales, AB scilicet maior quã EF, vt in secunda figura. **Demonstratio secundæ partis.** Si igitur quadratum BCIK quadrato FGLM minus non fuerit, aut æquale ipsi, aut ipso maius erit. **Tres habet casus secunda hæc pars, quos vide infra in digressione contra Vernerum.** Quòd si æquale sit, latus BK lateri FM, & latus IK lateri LM

æqualia

æqualia erunt per iam dictam ſecundã Com. Sent. ergo per eãdem etiam 4 Com.Sent. tota AK maior erit quã tota EM. Cùm autem IK ſit æqualis ipſi LM, quæ per 4 definitionem ſexti lib. Elem. Euc. ſunt altitudines parallelogrammorum AKID, & EM LH, erit per primam prop. eiuſdem ſexti ratio parallelogrammi AKID ad parallelogrammum EMLH ſicut ratio baſis AK ad baſim EM. Atqui baſis AK maior oſtenſa eſt baſi EM; igitur per 9 Com.Sent.huius & parallelogrãmum AKID parallelogrammo EMLH maius erit. quod eſt contra ſuppoſitionem. Si demum BCIK quadratum maius FG LM quadrato quis eſſe dixerit, per eandem ſecũdam Com.Sent. BK erit maior quàm FM, & IK maior quàm LM. Vnde per quintam Com.Sent. huius tota AK maior erit quàm tota EM. ergo per 3 Com.Sent.huius Rectangulum AKID Rectangulo EMLH maius erit, quod iterum ſuppoſitioni aduerſatur. Exiſtente igitur AB linea maiori quàm EF, neque maius eſt quadratum BGIK quadrato FGLM, neque ipſi æquale, ſed minus. Atqui oſtenſum eſt etiam quòd AB, & EF lineis inuicem æqualibus exiſtentibus, BCIK quadratum de neceſſitate FGLM quadrato æquale eſt. Patet ergo vtraque Theorematis huius pars. Si itaque duo parallelogramma rectangula duobus quadratis ita adiungantur, & reliqua vt ſupra. Quod oportebat demonſtrare.



Cõcluſio ſecũdæ partis.

Concluſio totius.

Verùm demonſtratis iam tribus ſequentium omnium demonſtrationum Elementis, age modò ad inſtitutam nobis Problematicam, admirandamque Propoſitionem accedamus.

PRO-

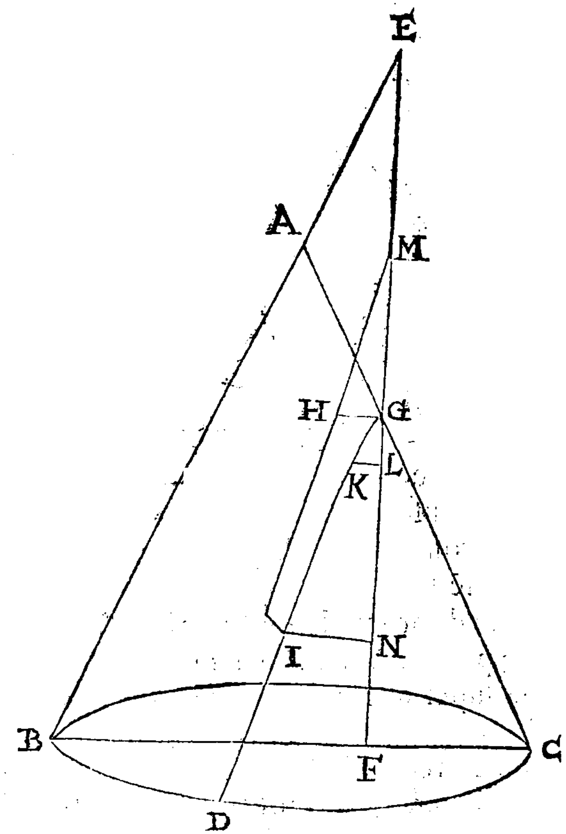
DEMONSTRATIO PRIMA.

Propoſitio.

DVAS in eodem plano deſignare lineas alteram rectam, & alteram curuam, quæ nunquam adinuicem coincidant, etiam ſi in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò ſibiinuicem propiores euadant.

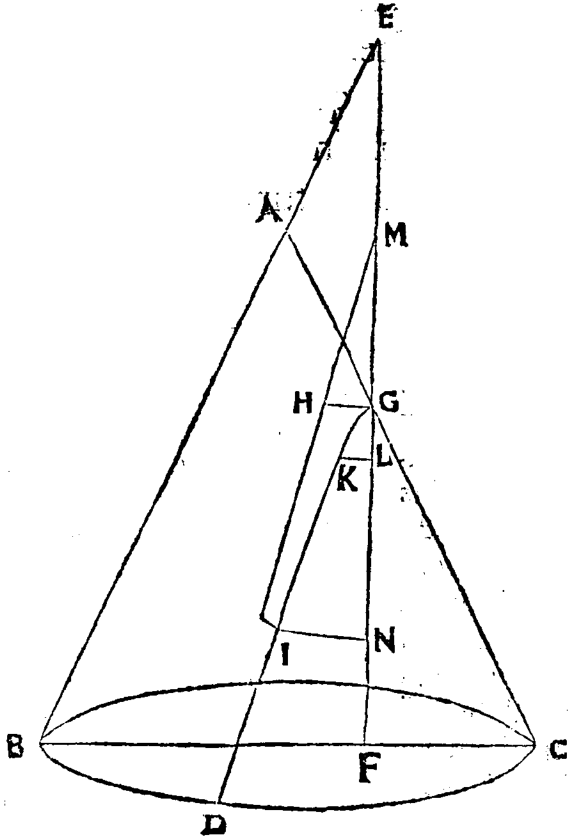
Conſtructio.

Sit Conus ABCD, cuius Vertex A, Baſis BDC circulus, triangulum per Coni Axem ABC, cuius latus AB producatur per ſecundam petitionem primi lib. Elemẽ. Eucl. in partem A quoadlibet, vſque in ſignũ E. & in trianguli ABC Baſi BC accipiatur quodcunq; ſignum F, à quo ad ſignũ E per primam pet. eiuſdẽ primi recta ducatur linea FE ſecãs neceſſariò ratione ſuperiùs dicta latus AC eiuſdẽ triãguli in ſigno G, quæ per 2 prop. lib. 11 Element. Eucl. erit in plano trianguli ABC.



H

ABC. & à signo G per 12 prop. eiusdẽ 11 lib. erigatur recta GH ad angulos rectos plano trianguli ABC, quæ per 3 definitionem eiusdem 11 ad rectos angulos est rectæ lineæ EGF, & per 2 prop. eiusdem erit in vno plano cum recta linea EGF, quod porrò planum secat Conum præter Verticem si vsq; ad Coni Basim protractum esse intelligatur, & erectum est ad planum trianguli ABC per 4 definitionem eiusdem 11. & communis quidẽ



sectio horum duorum planorum erit recta linea EF per constructionem, & 3 prop. eiusdem libri 11: cõmunis verò sectio plani EGH & conicæ superficiei curua quædam est linea Hyperbolica, seu latus Hyperboles per 5 pet. & 21, & 24 definit. huius, & sit GID; quā vtique tangit recta GH in signo G per constructionem, & per secundam partem 28 propositionis primi lib. Elem. Eucl. & per primam partem 32 propositionis primi libri Conicorum Apollonij. Subinde suscipiatur in ipsa GID curua linea quodcunq; signum K, & ab ipso per 11 propositionem lib. 11 Elem. Eucl. ducatur in trianguli ABC planum perpendicularis recta linea KL, quę per

38 prop.

38 prop. eiusdem lib. 11 cadit in EF communem sectionem duorum iam dictorum planorum, ipsique EF ad rectos angulos est per tertiam definitionem eiusdem 11. Posthæc linea recta EG per 10 prop. primi lib. Elem. Euc. secetur in duas partes æquales in signo M, & per prædemonstratum problema fiat GH recta linea tantæ longitudinis, vt ad eius quadratum eam habeat rationem quadratum rectæ lineæ GM, quam habet rectangulum contentū ab EL, LG rectis lineis ad quadratum ipsius LK. Quo demum facto, ducatur MH recta linea per primam pet. eiusdem primi, quę erit in eodem plano EGH, in quo est etiam GID curua linea per 2 prop. lib. xi. Elem. Euc. His hoc modo constructis dico quòd si duæ lineæ, nempe recta MH, & curua GID in eodem EGH plano existentes, in infinitum protrahantur (intelligendo scilicet planum EGH ex parte GH, & Conum ex parte BCD basis in infinitum produci) nunquam adinuicem coincident: & quantò longiùs producuntur, tantò sibi inuicem propiores euadent.

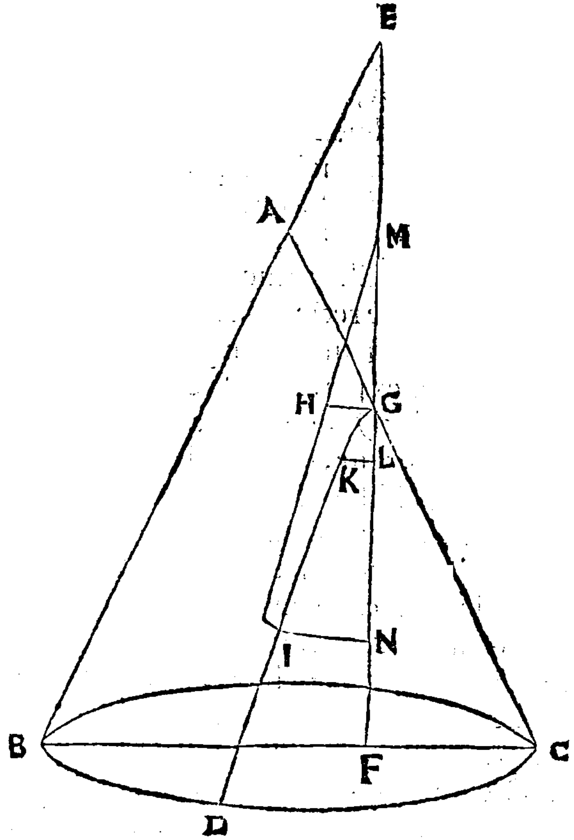
Determinatio.

Demonstratio primæ partis.

Coincidāt autem, si id fieri potest, in aliquo signo, verbi gratia in signo I, à quo per xi. prop. lib. xi. Elem. Euc. in trianguli ABC planum perpendicularis ducatur IN recta linea, quæ per 38 prop. & 3 definitionẽ eiusdem cadit perpẽdiculariter in EGF communem duorum planorum sectionem, & per 6 prop. eiusdem xi. parallela est ipsis GH, & KL rectis lineis. Quare per primum Theorema superiùs demonstratum ratio rectanguli ab EN, NG rectis lineis comprehensi ad quadratum rectæ IN est sicut ratio rectanguli ab EL, LG contenti ad quadratum rectæ lineæ LK. Verùm quæ est ratio rectanguli ab EL, LG comprehensi ad quadratum ipsius LK eadem per constructionẽ posita est ratio quadrati rectæ MG ad quadratum rectæ GH. ergo per xi. prop. libri quinti Elem. Euc. eandem habet rationem rectangulum ab EN, NG contentum ad ipsius NI quadratum, quam habet quadratum, quod fit à linea MG ad quadratum, quod à recta GH describitur. At ipsius MG ad ipsius GH quadratum eandem habet rationem, quam habet etiam quadratum ipsius MN ad quadratum ipsius NI (in triangulo enim iuxta suppositionem rectilineo MNI recta linea NI rectæ GH parallela posita est, vnde per 2. partem 29 propositionis primi Elem. Euc. duo triangula MGH, & MNI æquiangula sunt, & ideo per 4. prop. sexti eorundem habent latera proportionalia, videlicet MG ad GH sicut MN ad NI. Quamobrem per primam

H 2 partem

partē 22 propoſitionis eiuſdem ſexti quadrata etiam harum quatuor linearū ſunt proportionalia) igitur per xi propoſi. libri quinti Elem. Eucl. rectāgulum ab EN, NG rectis lineis contentū ad quadratum lineę NI eādem habet rationem, quam habet quadratū lineę MN ad eiuſdem NI lineæ quadratum. ergo per primam partem 9 propoſitionis eiuſdem quinti rectangulum ab EN, NG cōprehenſum æquale eſt quadrato rectæ lineæ MN. Verumtamen cū inconſtructione recta EG in duas partes æquales in ſigno M diuiſa ſit, eique in rectū adijciatur recta GN, procul dubio per ſextam prop. ſecundi lib. Elem. Euc. rectangulum ab EN, NG comprehenſum ſuperabitur à quadrato lineæ MN, quadrato ipſius MG rectæ lineæ. Sed hoc rectangulum eidem quadrato æquale etiam iam oſtenſum fuit, quod eſt maximè abſurdum. nam fieri non poteſt vt eædem quantitates inuicem æquales ſimul, & inæquales ſint. Hoc equidem inconueniens ſequutum eſt quoniam ſuppoſitum fuit lineam rectam MH, & inflexam GID in eodem plano protractas coincidiſſe adinuicem in ipſo I ſigno. Similiter autem

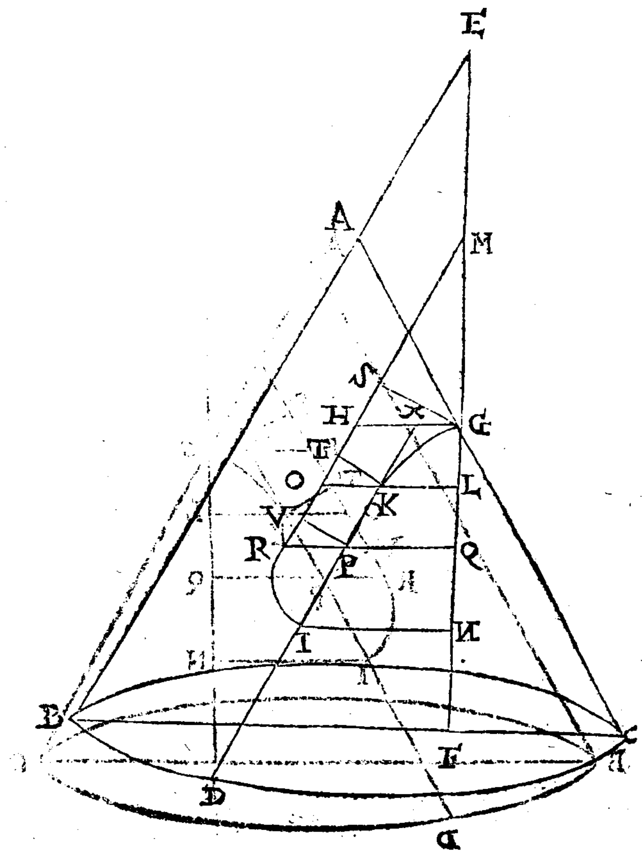


idem

idem ſequetur incommodum ſi etiam in quocunque alio ſigno ipſæ duæ lineæ adinuicem coincidere ponātur. In nullo igitur ſigno coincident, etiam ſi in infinitum protractæ fuerint. Patet itaque prima quæſiti noſtri pars. deſcriptæ nanque ſunt in eodem EGH plano duæ lineæ recta MH, & inflexa GID nunquam adinuicem coincidentes quantumcunque protrahantur. Præterea demonſtrandum eſt quòd quantò longiùs producūtur, tantò ſibi inuicem propiores fiant. Producatur itaque per ſecundam petitionem primi lib. Elem. Euc. recta linea LK in continuum, & directum donec coincidat in ſigno O cum recta linea MH in longum producta. Neceſſariò ſiquidem coincident per quintam pet. primi lib. eorundem. quoniam angulus quidem MLK ex conſtructione rectus

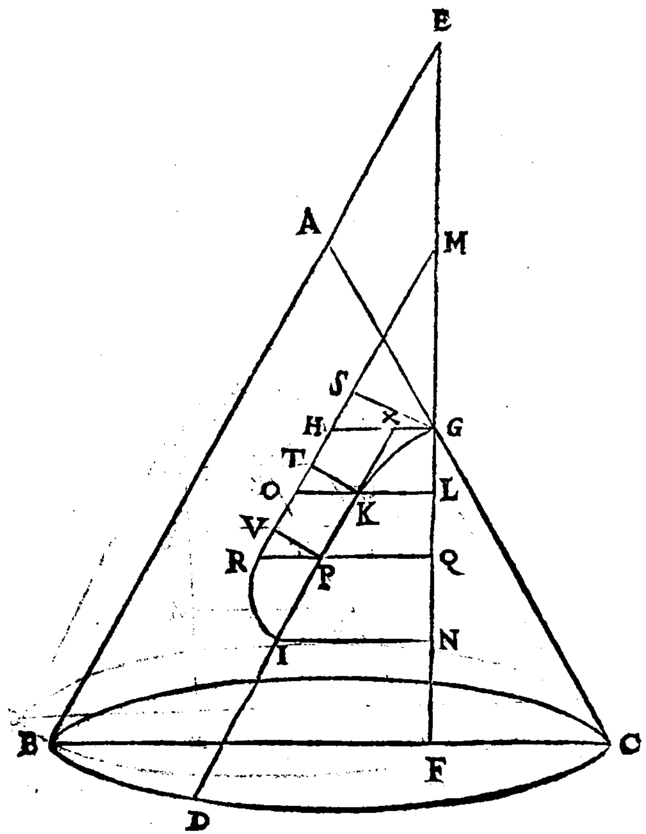
Concluſio primæ partis.

Secūdæ partis conſtructio.



eſt,

eſt, angulus verò LM*H* per 32 prop. eiuſdem primi minor e[ſt] recto. Deinde in ipſa *G* I D curua linea infra ſignium *K* ſuſcipi[a]tur quoddam ſignum P, à quo ſuper E *G* F rectam lineam per 1[2] prop. primi lib. Elem. Euc. perpendicularis P Q ducatur, quæ in partes P producta occurrat ratione iam dicta in puncto R ipſ[i] M*H* productæ. Poſtea verò quoniã per cõſtructionẽ, & 32 prop. primi lib. Elem. Eucl. *GH*, & KO, & PR rectæ lineæ ad rectã MR perpendiculares non ſunt, à punctis *G* K P ipſius inflexæ lineæ ad rectam lineam M R per 12 prop. eiuſdem primi ducantur perpen[...]diculares *G* S, K T, P V rectæ lineæ, quæ quidem per 19 prop. e[...]iuſdem erunt minimæ diſtantiæ, quibus puncta *G* K P diſtant à re[...]cta linea MR. Aio itaque G S diſtantiam eſſe maiorem K T di[...]

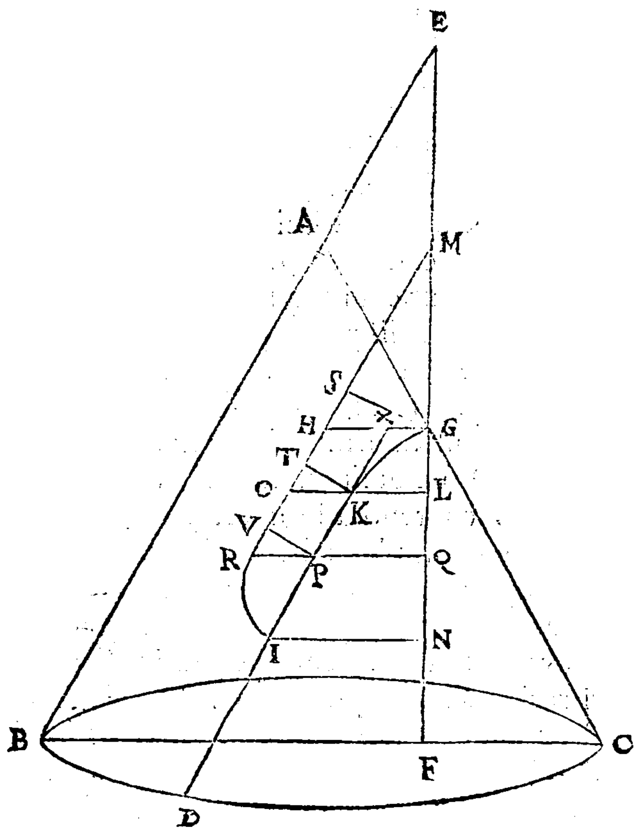


ſtantia,

ſtantia, & ſimiliter ipſam KT ipſa PV: nec non ſi infinitæ eiuſmodi diſtantiæ ducantur, minores continuè fieri eas, quæ Baſi Coni proximiores ſunt, verſus quam fit duarum non coincidentium linearum productio. Volentibus igitur nobis oſtendete lineam GS linea KT, & ipſam KT ipſa PV maiorem eſſe, priùs oſtendendum eſt ipſam G*H* ipſa KO, & ipſam KO ipſa PR eſſe maiorẽ. Quòd itaque G*H* maior ſit quàm KO patet ſi per 31 prop. primi elem. ducatur per ſignum K parallela ipſi MR ſecans lineam G*H* in puncto X (ſecabit enim eam per 5 pet. eiuſdem primi ſi recta linea G*K* ducta eſſe intelligatur, cùm angulus quidem L G X rectus ſit, angulus verò L*K*X æqualis per 2 partem 29 propoſitionis primi lib. Elem. Euc. ipſi *H*OK, & ideo minor recto) nam per 34 propoſi. eiuſdem *H*X æqualis eſt ipſi KO, vndè tota GH eadem KO maior eſt per 9 com. ſent. primi Elemento. Euc. & 7 com. ſent. huius. Quòd verò *K*O maior ſit quàm PR, ſic liquebit. Ratio rectanguli ab EL, LG contenti ad quadratum ipſius KL eſt ſicut ratio quadrati ipſius GM ad quadratum ipſius GH per conſtructionem. atque propterea ſicut etiam ratio quadrati ipſius LM ad quadratum ipſius LO per propoſitiones viceſimamnonam primi, & 4, & 22 ſexti, & xi quinti lib. Elem. Euc. Erit igitur per 19 prop. eiuſdem quinti ratio quadrati ipſius G M (quod per prop. 6. lib. 2. eorundem eſt exceſſus, quo quadratum, ipſius L M ſuperat rectangulum ab EL, LG contentum) ad ipſiùs OK quadratum, & duplum eius, quod à *K*O, KL continetur (quod quidem totum eſt differentia, qua ipſius KL quadratum ab ipſius LO quadrato exceditur per 4 prop. eiuſdem ſecundi) ſicut ratio quadrati lineæ ML ad quadratum ipſius LO, hoc eſt quadrati lineæ GM ad quadratum lineæ GH, eædem enim iſtæ duæ rationes ſunt, vt oſtẽſum eſt. igitur per 2 partem prop. 9 lib. v. Elemen. Euc. quadratum ipſius GH æquale eſt quadrato ipſius KO, & duplo eius, quod ab OK, KL continetur, ſi quidem ad vtrunque eorum quadratum ipſius GM eandem rationem habet. Similiter quoque demonſtrabitur quòd quadratum ipſius *G*H æquale eſt quadrato ipſius PR, & duplo eius, quod ab RP, PQ comprehenditur (nam rectangulum ab EQ, Q*G* contentum ad quadratum PQ eandem habet rationẽ, quam rectangulum ab EL, L*G* comprehenſum ad quadratum KL per primum Theorema ante demonſtratum. vnde per conſtr. & per xi prop. lib. v. Elem. Euc. rectangulum ab EQ, Q*G* ad quadratum lineæ

Demõ 2. partis.

In hoc Vernerus obſcurus eſt.



lineæ P Q ſe habet vt quadratum ipſius M G ad ipſius G H quadratum,& reliqua vt ſuperiùs.) Ergo per 1 communem ſent.primi eorundem Elem.quadratum ipſius K O vnà cum duplo rectanguli ab O K,KL contenti æquale eſt quadrato ipſius R P, & duplo eius rectanguli,quod ab R P,P Q cõprehenditur.Si itaq; duo rectangula à P R, P Q comprehenſa ita ſibijnuicem indirectum coniungantur vt per primam propoſitionem ſecundi libri Elem. Eucl. vnum ex ipſis confectum rectangulum æquale ſit duplo rectanguli à P Q, P R contenti, necnon quadratum lineæ P R ipſi totali rectangulo ſic adiungatur vt vnum cum ipſo commune latus habeat: idemque ſimiliter de duobus rectangulis ab L K, K O contentis, & quadrato lineæ K O fiat: quoniam per Corollarium

primi præoſtenſi Theorematis P Q maior eſt quàm K L, erit per ſecundam partem ſecundi ante demonſtrati Theorematis quadratum lineæ K O maius quadrato lineæ P R. Per 2 igitur Com. Sent. huius recta linea K O maior eſt quàm ipſa P R. Verumenimuero quandoquidem iam demonſtratum eſt rectam lineam G H recta K O, & ipſam K O ipſa P R maiorem eſſe: reliquum eſt vt itidem rectam lineam G S recta K T, & ipſam K T recta P V maiorem oſtẽdamus. Quoniam igitur anguli G S H, K T O, P V R per conſtructionẽ recti ſunt, ideoq; per 4 Pet.primi lib.Elemen.Eucl.inuicem æquales: ſimiliter autem anguli G H S, K O T, P R V per conſtr. & 2 partem 29 prop. primi eorundem Elemen. inter ſe æquales ſunt: ergo per 32 prop. & per 3 Com. Sent. eiuſdem primi triangula G H S, K O T, P R V æquiangula ſunt. Quare per 4 prop.6.lib. eorundem quemadmodum ſe habet G H ad K O, & K O ad P R: ita etiam G S ad K T, & K T ad P V. Sed G H maior eſt quã K O, & K O quàm P R, vt oſtẽſum eſt. igitur etiã G S quã K T, & K T quàm PV per 9 Com.Sẽt.huius maior erit.Hę autẽ ſunt minimę diſtãtiæ,quibus ſigna GKP in curua linea exiſtentia diſtant à recta M R linea, ergo ſignũ P propiùs eſt rectæ lineę M R quàm ſignum K, & ſignum K quàm ſignum G. & quoniam idem de quocunq; alio puncto in eadem obliqua linea ſuſcepto eodem modo vſque in infinitum demonſtrari poteſt, perſpicuum eſt quòd quantò ampliùs recta linea M H R, & inflexa, ſeu Hyperbolica G I D in eodem plano E G H producuntur, eò magis ſibiinuicem appropinquant. Atque hoc erat ſecundum Quæſiti membrum. Quapropter vtraque propoſiti Problematis pars manifeſta, claraque habetur. Duas itaque in eodem plano deſignauimus lineas alteram rectam,& alteram inflexam, quæ nunquam adinuicem coincidunt etiam ſi in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur,tantò ſibiinuicem proximiores euadunt. quod faciundum erat.

Hoc obſcurè ex Verneri verbis haberi poteſt.

In hac parte deficit Vernerus.

Concluſio ſecũdæ partis.

Concluſio vnuerſalis.

Corollarium.

Ex demonſtratione ſecundæ partis huius Problematis emergit nobis Corollarium quòd quotieſcunque Hyperbo-

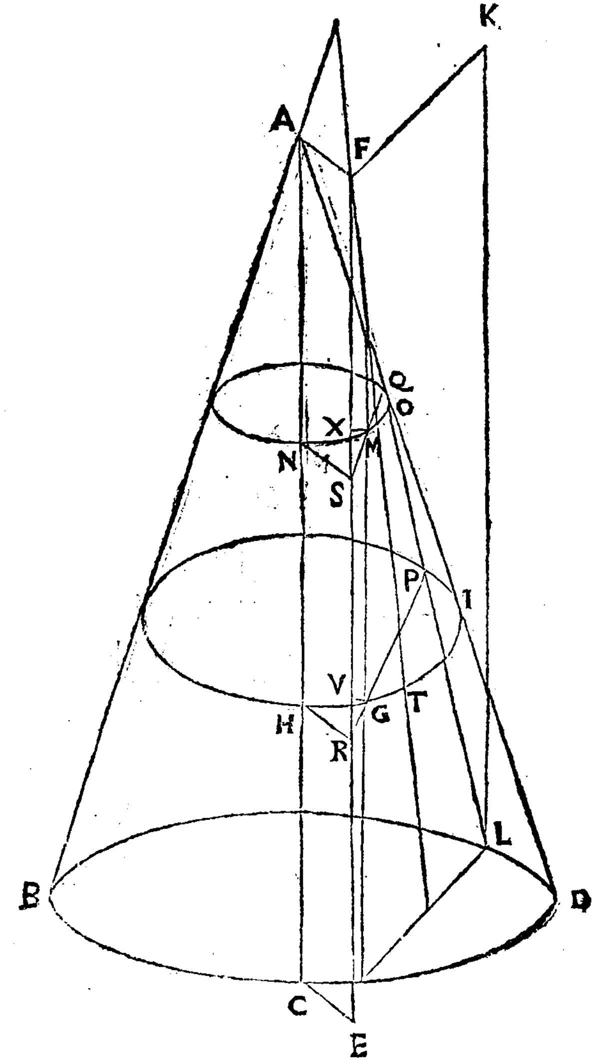
le cum recta linea ipsi non coincidente in eodem plano de- scriptæ fuerint, quadratum ipsius KO, & duplum eiu quod ab OK, KL continetur æqualia sunt quadrati ipsius PR, & doplo rectanguli ab RP, PQ compre- hensi; idemq; verum est in omnibus lineis ordinatè du- ctis intra Hyperbolem, atque ad non coincidentem vsque rectam lineam productis.

Secunda Eiusdem Problematis Demonstratio.

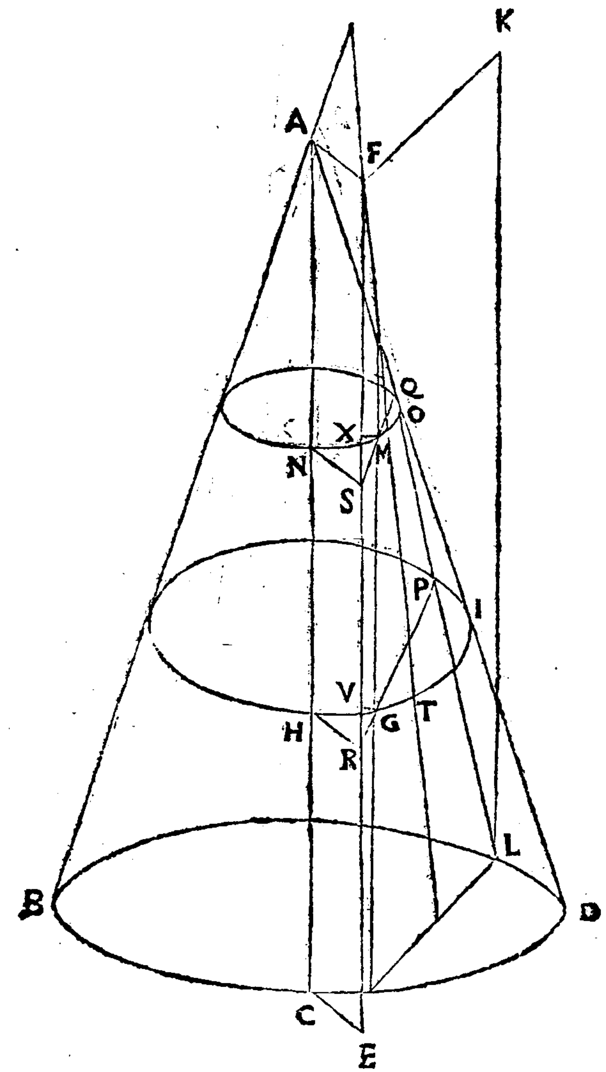
Cõstructio. Sit Conus ABCD, cuius Vertex quidem A, Basis verò BCD circulus, & à puncto C per medium semicircunferentiam BCD diuidente ad Verticem A ducatur recta linea CA, qu tota erit in conica superficie per primam petitionem huius. & a eodem puncto C per 12 prop. 11 lib. Elemen. Eucl. recta erigatu linea CE ad rectos angulos plano trianguli per axem habentis l tus AC. quæ quidem CE linea per 3 definit. eiusdem 11 er ad rectos angulos in puncto C tum dimetienti circuli BCD, tu ipsi AC rectæ lineę. Quare per Corollarium 16 prop. lib. ter Elem. Eucl. eadem AC recta linea erit tangens circulum BCI in puncto C. Duæ igitur lineæ CA, & CE in eodem sunt plan per 2 prop. lib. 11 eorundem, quod quidem planum necessariò ta git conicam superficiem à Vertice vsq; ad Basim in recta linea AC Ducatur itaque per punctum A recta linea AF parallela, & æqu lis rectæ CE per 31, & 3 prop. primi lib. Elem. Eucl. & ducatur p primam Pet. eiusdem EF, quæ etiam per 33 prop. eiusdem prin rectæ lineæ AC parallela, & æqualis erit. factum est ergo ACE parallelogrammum rectangulum planum tangens superficiem co nicam in linea AC. Quòd autem hoc planum hincinde prod ctum, nullibi nisi in linea AC conicam superficiem tangere poss

Indirecta ostensio. facilè conuincitur. Si enim tangeret ipsam in quodam alio pu cto, vt in G; intelligatur planum parallelum basi secans Conu per signum G, cuius plani, & conicæ superficiei communis secti erit circulus per 4 pet. huius, quippequi circulus sit HGI secans li neam AC in signo H. Et quoniam planum circuli HGI sec

planum



planum ACEF in signis GH ipsius contactus, erit per 3 prop. lib. 11 Elemen. Eucl. communis eorum sectio recta linea GH, quæ cum duo puncta connectat in circuli circunferentia existentia, seu in conica superficie præter Coni Fastigium iacentia, cadet intra circulum ipsum, atque intra Conum per 2 prop. 3 lib. Elem. Eucl. In hoc probando deficit Cardanus, & Paralogismũ cõmittit.

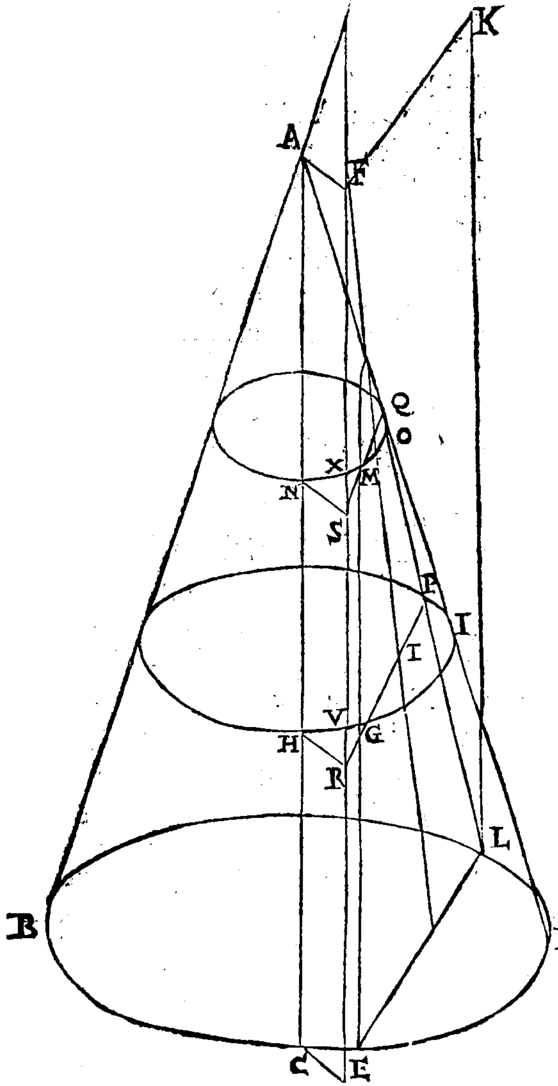


ſeu per 2 Pet.huius. Cùm autẽ ipſa linea G H ſit in plano ACEF, iuxta quam ſecatur à circuli plano, neceſſariò planũ etiam ACEF caderet intra Conum, ſecaretq; ipſum in linea A C per 15 Definitionem huius, quod eſt contra Cõſtructionem, quandoquidem planum A C E F poſitum fuit tangẽs ſuperficiem Coni in linea A C.

Non

Non poteſt enim idem planum in eadem recta linea eandem conicam ſuperficiem & tangere ſimul, & ſecare. Secans ſiquidem intra Conum, tangens verò extra cadit, vt ex 15, & 16 Definitionibus huius patet. Præterea planum A C E F non poſſe tangere conicam ſuperficiem alibi quàm in A C linea, ſic etiam directa demonſtratione habetur. In conica nanque ſuperficie infiniti circuli ex- Directa oſtẽſio.
cogitari poſſunt rectam lineam A C ſecantes, à quibus ſectionibus per 31 prop. primi lib. Elemen. Eucl. in plano A C E F rectæ li- In hoc probando deficit Peletarius, & quod dam falſum dicit.
neæ duci poſſunt parallelæ ipſi C E, atque idcirco per 8 propo. 11 lib. Elem. Eucl. rectæ erunt ad planum dimetientium eorum circulorum, & per tertiam Definitionem eiuſdem ad rectos angulos ipſis dimetientibus, & per 16 prop. 3 lib. eorundem, & eius corollarium tangent circulos ipſos in illis tantùm punctis ſectionum totæ extra circulos, extraq; Conum cadentes. Vnde manifeſtum eſt ꝙ planum A C E F, in quo ſunt iam dictæ lineæ, nullibi niſi in linea A C conicam ſuperficiem tanget. Sit igitur A C E F planum tangens in A C tantùm recta linea Coni ſuperficiem, cuius plani latitudo A F, ſeu C E tanta ſit, vt ſi aliquod planum, cuius communis ſectio cum plano A C E F ſit recta E F, erigatur ſuper planum A C E F, producaturq; ex parte Coni, neceſſariò ſecet Conum præter Verticem. Sit itaque huiuſcemodi planum productum E F K L ſecans conicam ſuperficiem in ſignis G, & M. & quoniam per Conſtructionem, & 4 Definitionem, & 14 prop. 11 Elem. planum E F K L parallelum eſt plano trianguli per axem Coni illius ſcilicet, cuius vnum latus eſt A C; cõmunes etiã duorum iſtorum planorum, & plani trianguli A B D per axem Coni ſectiones parallelæ inuicem erunt per 16 propoſi. lib. 11 Elemen. Eucl. Quare cùm altera iſtarum parallelarum ſectionum per 10, & 18 Definitionem huius ſit axis Coni; reliqua nimirum ſectio per 29, & 5, & 32 prop. primi lib. Elem. Eucl. exibit à minoribus duobus rectis angulis cum latere A B, ideoq; per 5 Pet. eiuſdem primi occurret ipſi A B lateri in partem A producto. Quamobrem per 5 Pet. & 21 Definitionem huius linea G M in ſuperficie conica iacens inflexa, miſta, & Hyperbolica linea eſt, ſeu latus Hyperboles per 24 Definitionem huius. Conſtatque ex Conſtructione ipſam G M curuam lineam in eodem eſſe plano E F K L cum recta E F. Dico itaque haſce duas lineas, inflexam ſcilicet M G, & rectam E F in eodem E F K L plano continuè productas (quod planum Determinatio primæ partis.

intelligatur



intelligatur in infinitum cum tota Coni superficie Basim versus extendi) nunquam sibi inuicem occurrere. Si enim sibi occurrant,

Demonstratio primæ partis.

aut hoc fiet in linea AC, & ita AC, & EF parallelæ coincident, quod est inconueniens: aut præter AC lineam, & ita cum MG quidem inflexa linea semper sit in superficie Coni, recta verò EF maneat

maneat semper in plano ACEF; necessariò planum ACEF tangeret Conum alibi quàm in linea AC, quod fieri nõ posse iam demonstrauimus. Nunquam ergo GM, & EF lineæ coincident etiam si in infinitum protrahantur. Et hæc est prima Problematis pars.

Conclusio primæ partis.

Dico modò quòd istæ duæ lineæ non coincidentes quo magis à culmine Coni elongantur, eò magis inuicem proximæ fiunt. & satis sit in duobus tantùm lineæ inflexæ punctis vtpote G, & M hoc demonstrare, quòd scilicet in pũcto G proximior sit inflexa GM linea rectæ EF, quàm in puncto M. Quandoquidem eodem modò in omnibus etiam alijs ipsius curuæ lineæ punctis idem ostendetur.

Determinatio secundæ partis.

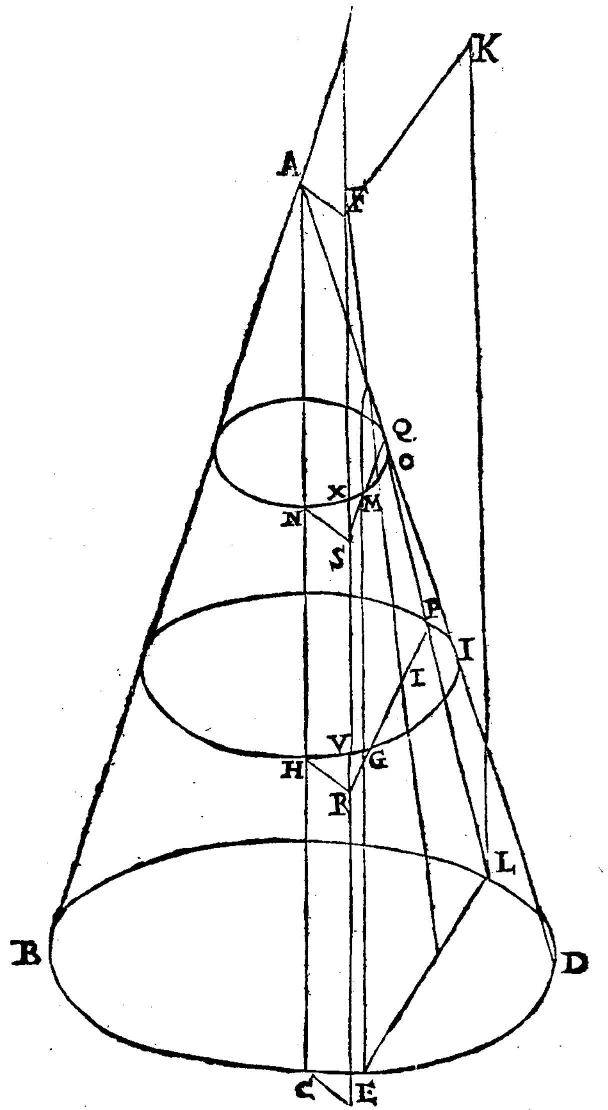
Capiatur itaque circulus NMO parallelus basi BCD, & priori circulo HGI. & ducantur per primam Pet. primi lib. Elem. Eucl. in planis circulorum NMO, & HGI iuxta communes eorum, & plani EFKL sectiones rectæ lineæ GP, & MQ. & producantur in partes G, & M per 2 pet. eiusdem quousque secent lineam EF ipsa quidem PG in signo R, ipsa verò QM in signo S. & erunt per 16 prop. lib. 11 Elem. Eucl. ipsæ PR, & QS inuicem parallelæ. Similiter per eandem primam Pet. ducantur in plano ACEF rectæ lineæ HR, & NS. quæ quidem erunt etiam in planis eorundem circulorum per 2 prop. eiusdem 11 Elementorũ bis sumptã; cũ lineis enim PR, & QS seinuicẽ secant. Igitur per 16 propositionem eiusdẽ 11 sibi inuicẽ, & ipsi CE parallelæ erunt. necnon circulos HGI, & NMO tangent rationibus superiùs dictis.

Constructio secundæ partis.

In hoc deficit Cardanus, & falsũ dicit.

At etiam HN, & RS ex Constructione parallelę sunt. ergo per 34 prop. primi lib. eorundem element. HR, & NS inuicem sunt æquales. & quoniam contingunt circulos HGI, NMO; erit per 36 prop. lib. 3. eorundẽ quadratũ ipsius NS æquale parallelogrãmo rectãgulo, qđ fit ex multiplicatione ipsius QS in SM: & quadratum ipsius HR æquale ei, quod fit ex PR in RG. Quadrata autẽ ipsarum HR, & NS æqualia sunt per Constructionem, & per 2 Com. Sent. huius. Rectangulum igitur, quod fit ex PR in RG æquale est rectangulo, quod fit ex QS in SM per primam Com. Senten. primi lib. Elemen. Eucl. bis sumptam. Quare per secundam partem 16 propositionis lib. 6 eorundem Elementorum ratio rectæ lineæ PR ad rectam QS est sicut ratio lineæ MS ad GR. sed PR maior est quàm QS, ergo MS etiam maior est quàm GR per 9 Com. Sent. huius. Quòd autem PR maior sit quàm QS, sic probetur. Si in Plano EFKL per signum

Demonstratio secundæ partis.



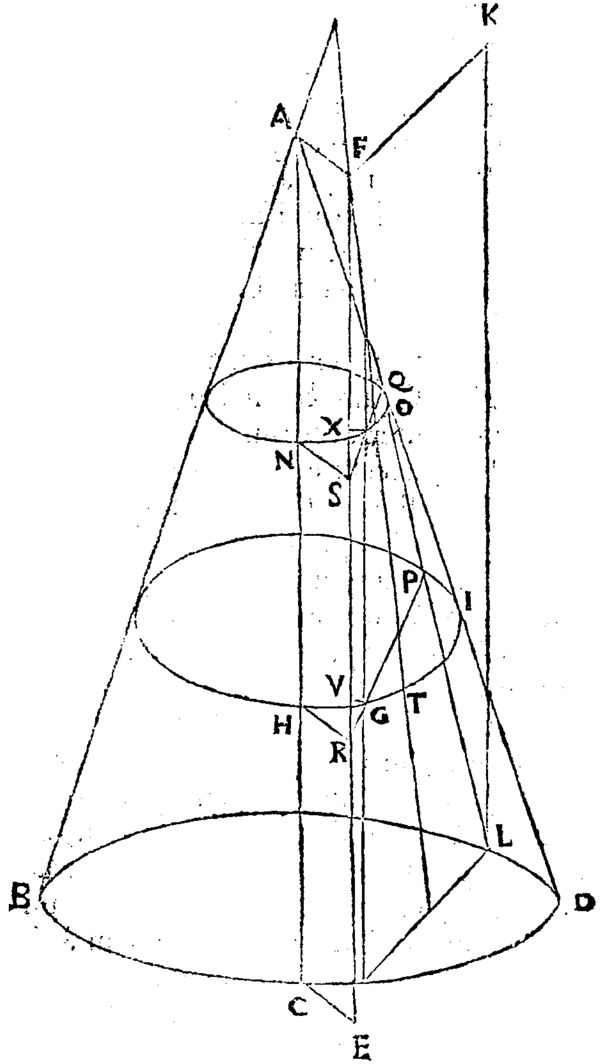
*Hoc malè pbat Car.

signum P ducatur per 31 prop. primi lib. Elemen. Eucl. parallela ipsi EF, dubio procul extra signum Q cadet. quod sic deducatur. Recta linea AF per Construct. & per 2 prop. lib. 11 eorundem Elemento. est tum in plano ACEF, tum in plano trianguli ABD per Axem Coni. Si igitur Axis Hiperboles iam de-

scriptæ

scriptæ in eiusdem trianguli plano per 21, & 22 Definitionem huius existens producatur indirectum versus Coni verticem, necesse est vt rectam AF secet in aliquo puncto. cum autem idem axis sit etiam per Constructionem in plano EFKL, in nullo alio signo quàm in ipso F rectam AF lineam secabit. Producatur igitur axis ipse, qui per 22 Definitionem huius secet PG ordinatè ductam per medium, & ad rectos angulos in signo T. Quoniam igitur trianguli FTR angulus, qui ad T rectus est; erunt duo reliqui eius anguli per 32 prop. lib. primi Elemen. Eucl. acuti. Angulus igitur FRG acutus est. Eadem ratione etiam angulus FSM acutus erit. si itaque protracta recta RP in partem P quantumlibet eius extremitas cõiungatur per rectam lineam cum signo F, ostendetur similiter angulum, qui ex his duabus rectis lineis extra Conum fiet, acutum esse. Quamobrem si in plano EFKL per punctum P per 31 prop. lib. primi eorundem Elemen. ducatur recta linea parallela ipsi RS, necesse est ipsam cadere extra Coni superficiem, quia ipsi à puncto F extra Conum vltimò per imaginationem ductæ lineæ occurrere debet per 5 pet. primi lib. Elem. Eucl. quandoquidem in signo P cum parte protracta ipsius RP acutum facit angulum per secundã partem 29 prop. eiusdem primi lib. Elem. Cùm itaque recta linea, quæ per signum P ipsi SR parallela ducitur, extra Coni superficiem cadat; manifestum est, ꝙ si SQ recta linea extra Conum protrahatur quousque occurrat ipsi parallelæ ductæ per punctum P, in infinitumque productæ (coincident.n. necessariò, quod si quis neget, per vltimam Definitionẽ, & 30 prop. primi lib. eorundem Elemen. facilè probari potest) euadet æqualis ipsi PR per 34 prop. eiusdem primi lib. Elemen. Maior igitur est PR quàm QS per 9 Com. Sent. eiusdem. Verùm quoniam in longùm prouecti sumus vt hoc probaremus iam à digressione reuertendo ad institutum dicimus quòd cùm PR sit maior quàm QS, eam autem (vt ostensum fuit) rationem habet PR ad QS quam habet MS ad GR. & MS igitur quam GR maior est per 9 Com. Sent. huius. At GR, & MS ad rectos angulos ipsi EF minimè sunt; cùm anguli, qui ad R, & S acuti iam ostẽsi sint; atq; propterea ipsæ MS, GR non sunt breuissima interualla, quibus G, & M signa inflexæ lineæ à recta EF distare possint: eò quòd ab eisdem punctis ad ipsam EF rectam lineam perpendiculares duci possunt, quæ per 19 prop. primi lib. Elem. Eucl. ipsis MS, GR

 breuiores



breuiores erunt, imo breuissimæ omnium, quæ ab eisdem signis ad rectam EF duci possint. Omnes enim aliæ ab eisdem punctis ex quauis parte ductæ perpendicularibus ipsis maiores sunt per eandem 19 prop. eùm maiorem angulum, scilicet rectum subtendant. Nam vna tantùm perpendicularis ab eodem puncto ad eandem re-

ctam

ctam lineam in eodem plano duci potest, quod patet ex 17 prop. primi lib. Elemen. Eucl. Quæ cùm ita se habeant, ducantur per 12 prop. primi lib. eorundem Elemen. à signis GM ad lineam rectam EF in plano EFKL perpendiculares GV, & MX: & erunt anguli GVR, & MXS per 4 pet. eiusdem primi lib. Elem. Eucl. æquales, quia recti per 10 Definitionem eiusdem sunt. Quoniam autem GR, & MS parallelæ ex Cōstructione sunt: anguli etiam GRV, & MSX per secundam partem 29 prop. primi lib. eorundem Elem. sunt æquales. ergo per 32 prop. & per 3 Com. Senten. eiusdem triangula GRV, & MSX æquiangula sunt. atque idcirco per 4 prop. sexti lib. eorundem Elemen. ratio ipsius MX ad GV est sicut ratio ipsius MS ad GR. Sed MS maior est quàm GR (vt probatū fuit) ergo & MX quàm GV per 9 Com. Sent. huius maior est. sunt autem MX, & GV minimæ distantiæ, quibus signa GM Hyperbolicę lineę à recta linea EF distare possint: igitur signum G est proximius rectæ EF quàm signum M. quod quidem erat secundò demonstrandum. Descriptę sunt igitur in eodem plano duæ lineæ altera recta, & altera inflexa, & reliqua vt in propositione. Quod fecisse oportuit.

Cōclusio secūdæ partis.

Conclusio vniuersalis.

Corollarium.

Hinc manifestum est quòd si planum EFKL ex parte lineæ EF producatur, in ipsoq; per 31 propositionem primi lib. Elemen. Eucl. vna recta linea parallela ipsi EF ducatur, quæ duæ parallelæ rectæ lineæ distent ab inuicem quodam determinato spatio, gratia exempli mille Stadijs: erunt designatæ in eodem plano duæ lineæ altera recta, vltimò scilicet ducta, & altera curua, nempe Hyperbolica ipsa, quæ cum eodem plano, & superficie Coni in infinitum productæ, semper sibi inuicem magis proximabunt; nunquam tamen mille Stadijs sibi proximiores erunt. alioqui linea GM inflexa rectæ EF oc-

 curret,

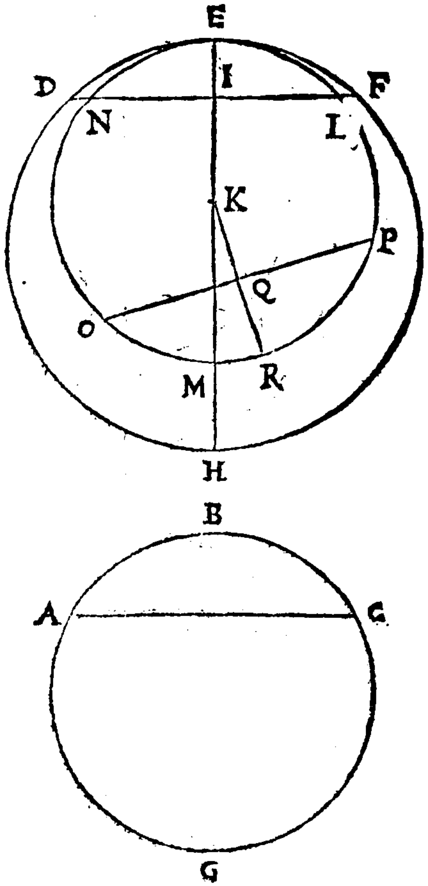
curret, quod fieri non posse iam demonstratum fuit. Hoc autem Corollarium maximè admirandum est.

Ante quam ad tertiam instituti Problematis demonstrationem accedamus quoddam Theorema nobis prædemonstrandum est, in quo tota vis illius demonstrationis consistere videtur. Quidam enim tanquam manifestum hoc supponentes demonstrare se credidere, cùm tamen nugentur. in Geometricis namque demonstrationibus nil tanquam manifestum assumendum est, quin ipsum vel ab alijs satissuperque demōstratum, vel ab omnibus tanquam principium nulla demonstratione indigens concessum, receptumque sit. Theorema igitur, quod præmittimus, sit huiusmodi.

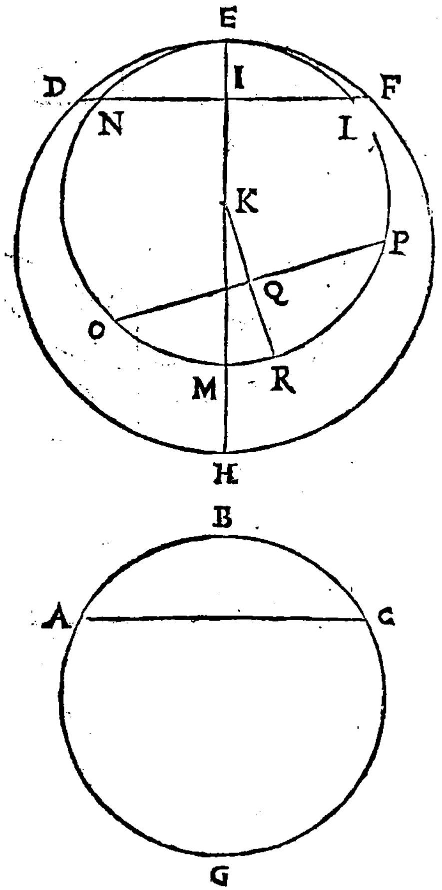
Lemma, seu Assumptum sequentis tertiæ Demonstrationis.

Propositio. AEQVALES rectæ lineæ in circulis inæqualibus inæquales cùm maiorum, tum minorum Segmētorum auferunt circunferentias, in minoribus nempe Segmentis maiorem quidem à minori, minorem verò à maiori: in maioribus autem Segmentis maiorem quidem à maiori, minorem verò à minori circulo circunferentiam.

Expositio. Sint duo inæquales circuli ABC quidem minor, DEF verò maior, in quibus duæ rectæ lineæ AC, & DF inuicem æquales vnà cum circulorum circunferentijs minora quidem Segmenta circulorum contineant ABC, & DEF: maiora verò AGC, DHF. Determinatio. Dico quòd in minoribus quidem Segmentis circunferentia ABC circuli minoris est maior quam circunferentia DEF circuli maioris: in maioribus autem Segmentis aio circunferentiam DHF maioris circuli circunferentia AGC minoris circuli maiorem esse. Constructio primæ partis. Diuidatur itaque recta linea DF per decimam prop.



prop. primi lib. Elem. Eucl. in duas partes æquales in signo I, à quo erigatur ipsi DF ad angulos rectos per 11 propo. eiusdē recta linea, quæ vtrinque per secundam petitionē eiusdē producta secabit circunferentiam DEF, verbi gratia in signo E, & transibit per centrū circuli DEF per Corollariū primæ propositionis tertij libri Elem. Eucl. & secabit ex altera parte eiusdē circuli circunferentiam, vtpotè in signo H. Deinde quoniā semidimetiens circuli DEF est maior semidimetiente circuli ABC per suppositionem, & per 30 Definitionē huius: resecetur per 3 prop. primi lib. Elem. Eucl. à semidimetiente maiore semidimetienti minori æqualis recta linea EK. & centro K, interuallo autem KE describatur per 3 pet. primi lib. Elem. Eucl. circulus ELMN, qui necessariò tanget intrinsecùs circulum DEF, & nullibi nisi in signo E per 11, & 13 prop. tertij lib. Elem. Eucl. Quamobrem secabit



bit eiuſdem ELMN circuli circunferentiam linea recta DF in duobus ſignis, vt puta LN. Igitur recta linea LN eſt minor per 9 Com. Sent. primi lib. eorundem Elemen. quàm DF, hoc eſt quàm AC. Atque idcirco remotior eſt à centro circuli ELMN quàm recta linea ipſi AC æqualis per conuerſam quintędecimæ prop. lib. tertij Elem. Eucl. minorque eſt circunferentia LEN quàm ABC per vltimam propoſitionem lib. ſexti Elem. Eucl. quia

ſi à cen-

ſi à centris circulorum ABCG, ELMN ad AC, LN ſigna rectæ lineæ ductæ intelligantur; erunt anguli ad centra circulorum æqualium conſtituti, quorum ille quidem, qui ABC circunferentiæ inſiſtit, maior erit eo, qui LEN circunferentiæ inſiſteret per 25 prop. primi lib. Elemen. Eucl. Latera enim eorum eſſent æqualia alterum alteri, & baſis AC baſe LN maior. Quare cùm circunferentia LEN minor ſit quàm ABC, etiam AGC circunferentia minor erit quàm LMN per 4 com. ſenten. huius. Vnde per eandem vltimam ſexti ſegmenta ABC, & LEN inæquales capiunt angulos. Ergo per 31 definitionem huius diſſimilia ſunt. A dato igitur circulo ELMN abſcindatur per 34 propoſitionem 3 lib. eorundem Elementorum ſegmentum OMP capiens angulum æqualem cuilibet angulo rectilineo in ſegmento ABC exiſtẽti. quod quidem OMP ſegmentum erit ſimile ſegmento ABC per 10 definitionem eiuſdem tertij. atque circunferentia ABC per 26 prop. tertij, & tertiã Com. Sẽt. primi lib. Elem. Eucl. eſt æqualis circunferentiæ OMP, & per 29 propo. tertij libri eorundem OP recta linea æqualis eſt rectæ AC, & totum ſegmentum ABC toti ſegmento OMP per 24 propoſitionem eiuſdem. Cùm autem OP cẽtro *K* propinquior ſit (vt iam dictum eſt) quàm LN, minor eſt diſtantia ipſius OP à centro K (quæ ſit KQ producta quouſq; ſecet circunferentiam OMP in ſigno R) quàm diſtantia KI. Quoniam verò omnes eiuſdem circuli ſemidimetientes æquales ſunt, QR maior ſit quàm IE per 4 Com. Sent. huius. Cùm igitur QR maior ſit, quàm IE, & OP æqualis ipſi AC, hoc eſt ipſi DF: Eſt autem IE quidem ad angulos rectos ipſi DF, eamque per medium diſpeſcens per conſtructionem, QR verò ſimiliter ad rectos angulos ipſi OP, & per medium ipſam ſecans per 4 definitionem, & ſecundam partem tertiæ propoſitionis tertij libri Elementorum Eucl. neceſſe eſt ſi ſuper recta linea DF in partes P ſimile, & ęquale ſegmentum ipſi ORP conſtituatur, vt eius circunferentia cadat extra DEF circunferentiam ſegmenti circuli maioris: alioquin QR æqualis eſſet ipſi IE, vel minor quàm ipſa, cùm tamen maior eſſe oſtenſa iam ſit. Verùm ſi circunferentia ipſi ORP, vel ABC æqualis cadit extra circunferentiam DEF, perſpicuum eſt ipſam ORP, ſeu ABC ipſa DEF eſſe maiorem per definitionem lineæ rectæ. Quandoquidem recta linea definitur minima omnium eoſdem cum ipſa terminos ha-

Demonſtratio primæ partis.

bentium

hentium linearum: vel à puncto in punctum breuiſſima extenſio; vel quæ ex æquo inter ſigna ſua ſita eſt. ex his enim rectæ lineæ definitionibus clarum eſt quòd omnes curuæ lineæ eoſdem cum recta terminos poſſidentes, & ad eaſdem partes conſtitutæ inter ſe ſunt inæquales: & remotiores quidem à recta proximioribus ſemper maiores, vt ſenſui conſpicuũ, ab omnibusq; conceſſum eſt. Patet igitur prima huiuſce Theorematis pars. Secunda verò ſic conſtabit.

Concluſio primæ partis

Expoſitio ſecũdæ partis.

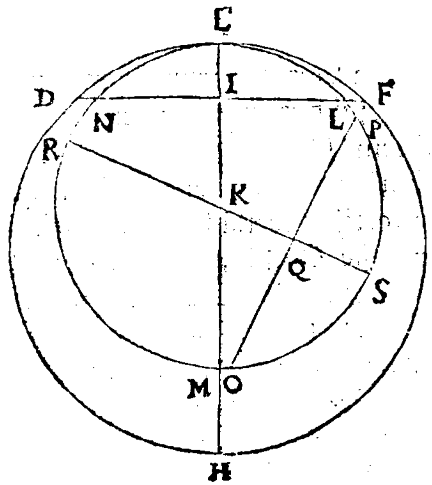
Sint duo circuli inæquales minor quidem ABC, maior verò DEF: & in ipſis duę rectæ lineæ AC, & DF inuicem æquales continentes cũ circunferentijs ſegmenta minora quidem ABC, DEF: maiora verò AGC, DHF.

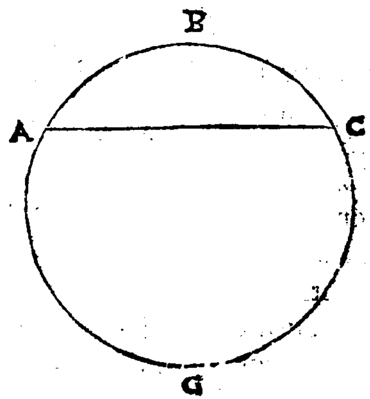
Determinatio ſecundæ partis.

Dico quod DHF circunferentia maior eſt quàm AGC.

Cõſtructio.

Diuidatur igitur vt ſuperiùs recta DF in duas partes ęquales ĩ ſigno I, & erigatur IE ad angulos rectos, & produ-





producatur vtrinque vt tranſeat per centrum, & ſecet circunferentiam circuli in ſignis EH. Deinde circa cẽtrum K circulus æqualis ipſi ABC eo modo, quo ſuperiùs, deſcribatur tangens circulum maiorem in ſigno E, & ſecans rectam quidem DF in ſignis LN, dimetientem verò EH in ſigno M. Et quoniam his ita iacentibus ſuperiùs oſtenſum eſt circunferentiam ABC eſſe maiorem circunferentia LEN, inæquales igitur angulos capiunt per vltimam propoſitionem ſexti lib. Elem. Eucl. Segmenta AGC, & LMN, & ideo diſſimilia ſunt per 31 Definitionem huius. Abſcindatur itaque à circulo ELMN per 34 prop. tertij lib. Elem. Eucl. Segmentum ONEP ſuſcipiens angulum æqualem cuiuis angulo in Segmento AGC exiſtenti. quod vtique Segmentum erit ſimile, & æquale AGC Segmento rationibus ſuperiùs dictis. Poteſt autem aliter etiam abſcindi Segmento AGC ſimile, & æquale Segmentum ONEP, ſcilicet accommodando per primam propoſitionem quarti libri Elemen. Eucl. in circulo ELMN rectam PO æqualem rectæ AC. erit enim per 28 prop. tertij lib. Elem. Eucl. circunferentia ABC æqualis circunferentiæ OP. quare per 26 prop. eiuſdem tertij lib. Segmenta AGC, & ONP ſuſcipiunt angulos æquales. vnde per 10 Definitionem eiuſdem ſimilia ſunt. cùm autem ſint ſuper æqualibus rectis lineis conſtituta proculdubio per 24 prop. eiuſdem æqualia quoque erunt. Hoc itaq; facto recta linea OP, baſis nempe Segmenti OEP ſecetur per medium in ſigno Q, à quo erigatur ipſi OP ad rectos angulos recta linea, quæ protracta vtrinque tranſibit per centrum K, per Corollarium primæ propoſitionis tertij lib. Elem. Eucl. ſecabitque circunferentiam circuli minoris in ſignis RS.

Demonſtratio ſecundæ partis.

His ita conſtructis quoniam OP maior eſt quàm LN (vt ſuperiùs fuit oſtenſum) ergo centro K eſt propinquior per conuerſam 15 propoſitionis tertij lib. eorundem Elementorum. Igitur QK diſtantia minor eſt quàm diſtantia IK. Quare QS maior eſt quàm IE per 4 Com. Sent. huius: nec non QR minor eſt quàm IM per eandem: Vnde multò minor quàm IH. Si igitur ſuper recta linea DF in partem H conſtitutum fuerit Segmentum ONP, neceſſe eſt eius circunferentiam cadere intra circunferentiam DHF: alioquin IH eſſet æqualis ipſi QR, aut minor quàm ipſa, quod eſt contra ea, quæ oſtenſa ſunt. Quapropter ex Definitionibus rectæ lineæ ſuperiùs dictis patet circunferentiam DHF eſſe maiorem circunfe-

Cõcluſio ſecundæ partis.

rentia ONP, ſeu quauis alia, quæ ſit ipſi AGC æqualis. Atque hoc erat ſecundò demonſtrandum. Patet autem hæc ſecũda pars etiam ex ſexta Communi Sententia huius. Aequales igitur rectæ lineæ in circulis inæqualibus, & reliqua vt in propoſitione. Quod erat demonſtrandum, atque præaſſumendum.

Concluſio vniuerſalis.

Corollarium.

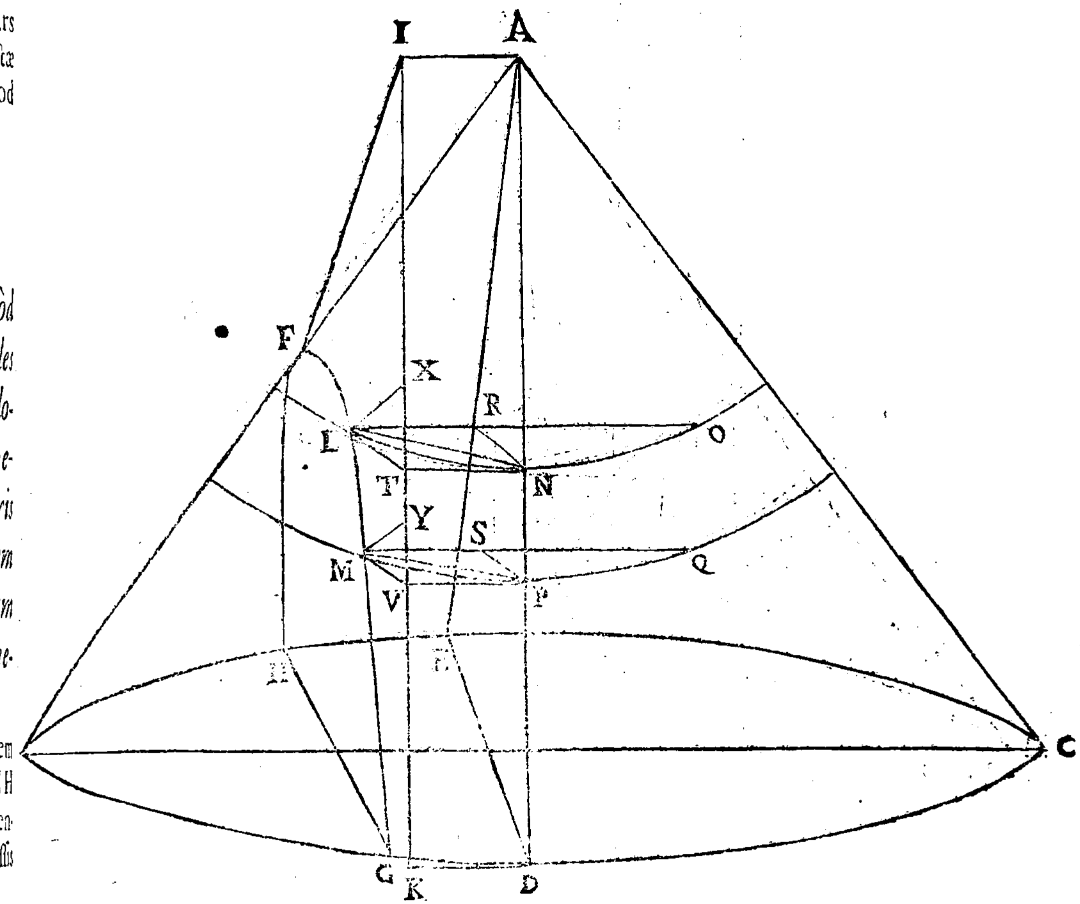
Ex demonſtratione huius Theorematis conſtat quòd in minoribus inæqualium circulorum Segmentis æquales baſes habentibus, partes dimetientium ipſorum circulorum, quæ tum Segmenta ipſa, tum eorum baſes per medium diuidunt, inæquales ſunt: maior quidem minoris dimetientis, minor verò maioris. In maioribus autem inæqualium circulorum Segmentis præfatæ dimetientium partes è contrario ſunt inæquales: maioris quidem dimetientis maior, minoris verò, minor.

Patuit enim in prima configuratione ipſam QR eſſe maiorem ipſa IE, pariterque in ſecunda deſcriptione ipſam QR ipſa IH minorem eſſe. Quod ſanè Corollarium & pulcrum eſt, & ſequenti Demonſtrationi maximè opitulaturum. Hiſce autem præmiſſis modò ad inſtitutum reuertamur.

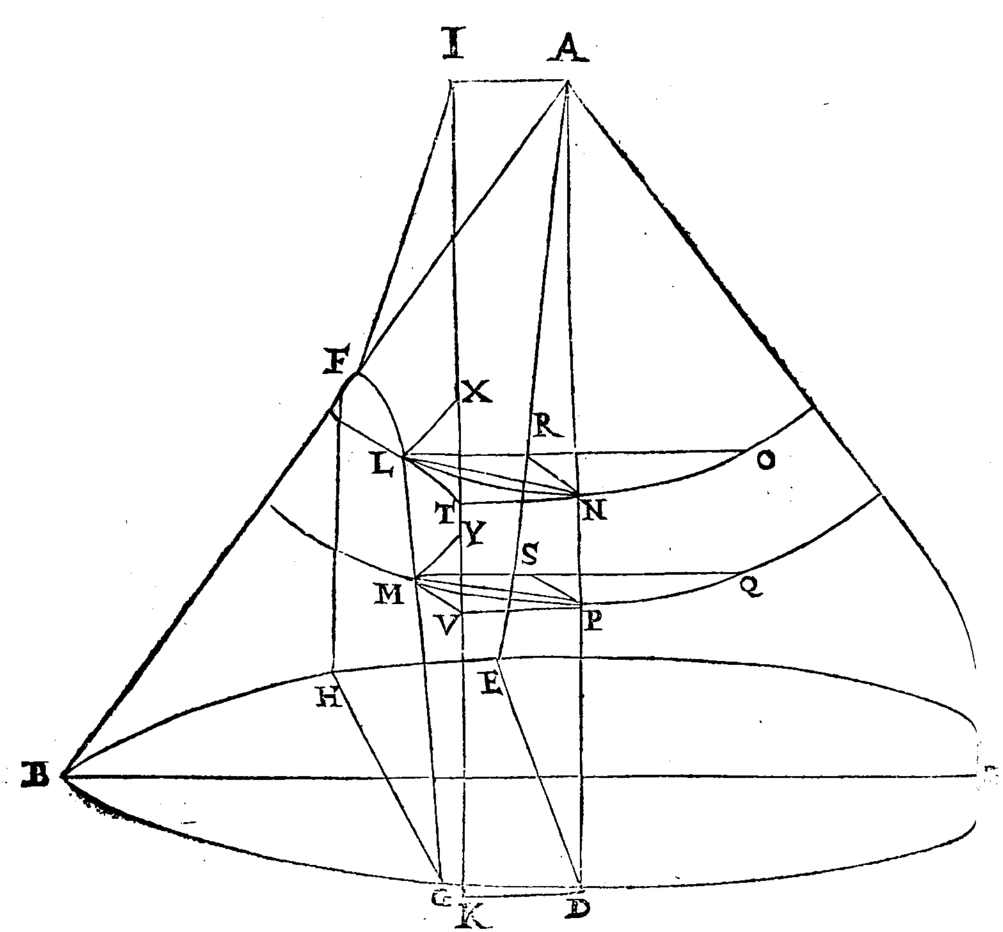
EIVSDEM PRAECIPVI PROBLEMATIS DEMONSTRATIO TERTIA.

Expoſitio, & Cõſtructio.

SIT igitur Conus ABCD, cuius vertex A, baſis verò BDCE circulus, & triangulũ per axem ADE cuius baſis recta linea DE, & aliud per axem triangulum ABC. Sit rurſum aliud quoddam planum GFH plano trianguli ADE parallelum, conum ipſum ſub inflexa GFH linea inæqualiter ſecans, quæ quidem inflexa linea per 21 Definitionem huius vnà cum recta GH continet Hyper-



Hyperbolem ſectionẽ conicam. Quandoquidem ſi per ſignum F (quod erit vertex ipſius Hyperbolis) exire intelligatur communis ſectio plani trianguli ABC, & plani GFH, coincidet per quintam petitionem primi libri Elementorum Eucl. cum latere AC ipſius trianguli extra Coni Verticem producto. Quoniam per Conſtructionem, & 16 prop. 11 lib. Elemen. Eucl. ipſa communis ſectio axi Coni parallela eſt, & ideo ſi protracta intelligatur recta BC, faciet per 12 Definitionem huius, & per 29, & 32 prop. primi lib. Elem. Eucl. cum iam dicta exeunte, & AC rectis lineis intra Conum duos angulos duobus rectis minores. Huius itaq; Hyperbo-



lis planum intelligatur directè, & interminatè protractum ad partes FG. Subinde quoddam aliud planum superficiei Coni sic applicetur vt ipsam tangat in tota recta AD linea, planoque trianguli ADE rectum sit. hoc autem fiat quemadmodum in superiori Constructione. Coëxtenso igitur hoc plano versus Hyperbolem, secabit eius planum: Cùm enim secet planum trianguli ADE parallelum plano GFH, necessariò & ipsum GFH secabit, aliter neque etiam ipsum ADE secaret. quoniam plana, quæ eidem plano sunt parallela; & inter se parallela sunt (vt rectè demonstrant Campanus in 16 prop. lib. 11 Elemen. Eucl. & Vitellio in

Hoc nō probat Orontius.

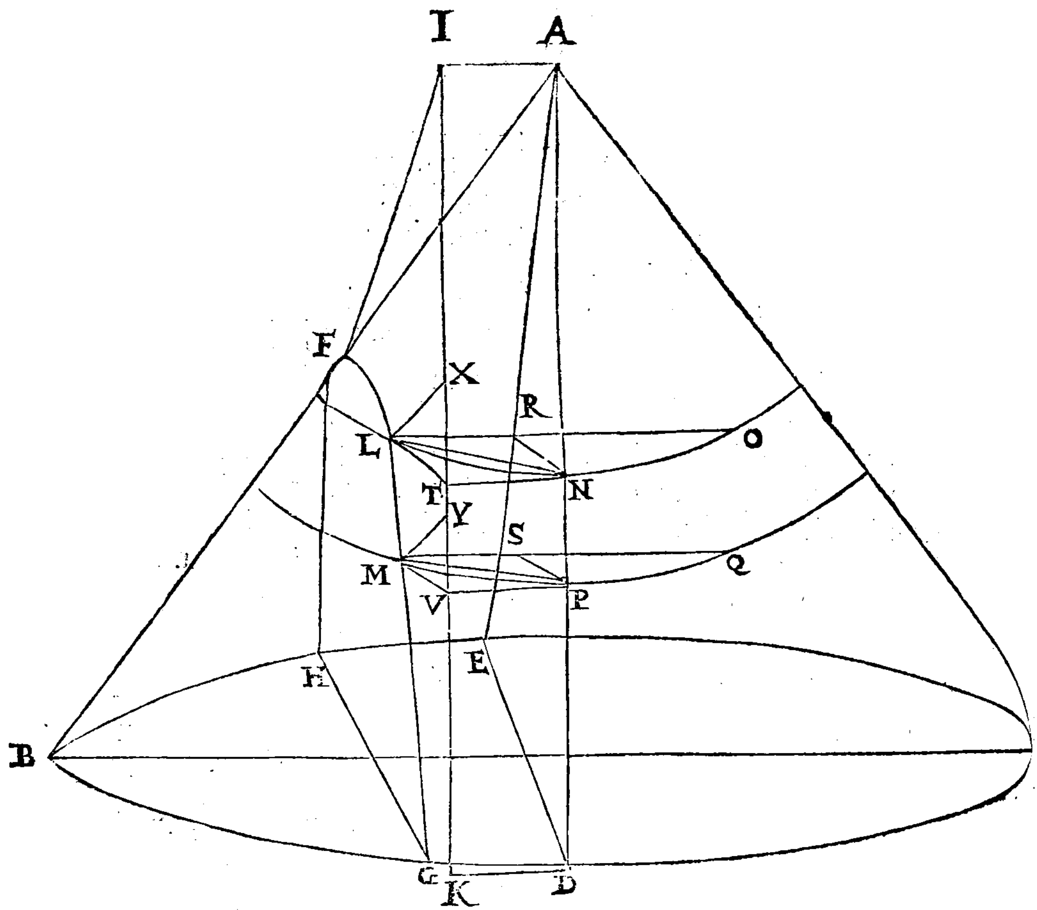
In 14 prop. primi libri suæ Perspectiuę.) Parallela autem plana sunt, quæ inuicem non coincidunt per 8 Definit. eiusdem vndecimi lib. Elem. Eucl. Secent igitur sese duo hæc plana, & sit communis eorum sectio per 3 prop. eiusdem vndecimi lib. recta linea IK, quæ erit parallela rectæ AD per 16 prop. eiusdem. atque idcirco omnes rectæ lineæ, quæ in plano ADKI ducentur ad angulos rectos ipsi AD, erunt etiam ad rectos angulos ipsi IK communi sectioni per 29 prop. primi lib. Elem. Eucl. Quamobrem recta AI ducta ad angulos rectos ipsi ADE plano, ad rectos angulos est ipsi IK. est autem etiam per 3 Definitionem, & 16 prop. 11, & 29 prop. primi lib. Elementorum Eucl. ad angulos rectos ipsi IF axi Hyperbolis, si ducta intelligatur. Ergo per quartam prop. eiusdem 11 lib. AI recta linea plano Hyperboles ad rectos erit angulos. & propterea per 4 Definitionē, vel per 18 prop. eiusdem planum ADKI ad planum ipsius Hyperboles rectum erit. His ita expositis, atque constructis Dico quòd recta linea IK, & inflexa GF in eodem plano existentes nunquam sibi occurrent, etiam si in infinitum vnà cum ipso Cono protrahantur: & quantò magis producuntur, tantò propiores erunt adinuicem. Quòd igitur sibi nunquam occurrant, ex eo manifestū est, ꝙ recta quidem IK in plano ADKI iacet, quod (vt in superioribus ostensum est) nunquam tanget Conum alibi quàm in recta AD linea: Inflexa verò GF linea nusquam à Coni superficie dimouebitur. Quare nunquam recta IK tanget Coni superficiem: neque igitur lineam FG, ipsi conicæ superficiei inhærentem. quod erat primò demonstrandum. Quòd autem istæ duæ lineæ quantò magis producuntur, tantò propiores adinuicem sint dilucidè ostendetur, paucis priùs constructis. Suscipiantur itaque in ipsa inflexa linea duo quælibet signa LM, per quæ transeant duo circuli sibi inuicem, & Basi Coni paralleli, quorum circunferentiæ in superficie conica ab eorundem planis Conum secantibus designatæ sint LNO quidem minoris, culminique propinquioris: MPQ verò, maioris, basique proximioris. Et comprehensis inter lineas AD, & FG eorundem circulorum circunferentijs LN, & MP, fiant eis æquales NO, & PQ circunferentiæ; quod fiet per primam petitionem bis sumptam, & 23 propositionem primi libri Elementorum Euclidis, seu per eandem primam petitionem, & primam propositionem quarti eorundem. Deinde per eandem primam petitionem ducantur

Determinatio.

Demonstratio primæ partis.

Conclusio primæ partis.

Constructio secundæ partis.



ducantur rectæ lineæ L O, M Q, quæ per 3 Com.Sent.primi, & 27, & 29 propoſitionem tertij, & 4 prop. & decimam Definitionem primi libri Element. Eucl. in duas æquales partes, & ad rectos diuidentur angulos à communibus ſectionibus planorum vtriuſq; circuli, & plani trianguli A D E. Sit igitur ſecta ipſa L O in puncto R, ipſa verò M Q in puncto S. & ducantur communes ſectiones N R, & P S, quæ erunt parallelæ per 16 prop. 11 lib. Elemen. Eucl. Ducantur præterea per 31 prop. primi lib. eorundem Elem. per puncta N P ipſis R L, S M parallelæ rectæ lineæ N T, P V. quæ productæ in plano A D K I ſecabunt I K rectam de neceſſita-

te

te per 30 propoſitionem, & vltimam Definitionem primi libri eorundem Element. ſecent ipſam in punctis T V. & ducantur L T, & M V rectæ lineæ, quæ per 16 prop. libri 11 eorundem Element. erunt parallelæ ipſis R N, & S P. His ita constructis quoniam per Cōſtructionem, & 29, & 34 prop. primi lib. eorundem Elemen. parallelogramma rectangula ſunt ipſa L R N T, & M S P V, & latera ex oppoſito habent æqualia: igitur L T ipſi R N, & M V ipſi S P æquales ſunt. Sed R N maior eſt quàm S P per Corollarium præoſteſi Lemmatis. Et L T igitur ipſa M V maior eſt per 14 propoſitionem quinti libri Element. Eucl. Si itaque L T, & M V ad rectos eſſent angulos ipſi I K, haberemus intentum. Quoniam autem non ſunt, angulis I T L, & I V M acutis exiſtentibus (vt patet per Conſtructionem, & octauam propoſitionem, & tertiam Definitionem 11, & 29, & 32 prop. primi libri Elem. Eucl. ſi I F axis Hyperbolis, & ipſæ T L, V M protractæ intelligantur) ducantur per 12 prop. eiuſdem primi lib. Element. à punctis L M ad rectam I K perpendiculares L X, & M Y rectæ lineæ. Cùm igitur L T, & M V (vt iam oſtenſum eſt) parallelę ſint, proculdubio triangula L T X, & M V Y æquiangula ſunt per 29 prop. & 4 pet. & 32 prop. & 3 Com.Senten. primi lib. eorundem Element. Quare per quartam prop. ſexti lib. eorundem Elemen. ratio ipſius L T ad M V eſt ſicut ratio ipſius L X ad M Y. Atqui L T maior quàm M V fuit oſtenſa, ergo per 9 Com.Sent. huius, & L X ipſa M Y maior eſt. Propior eſt itaque linea F G inflexa rectę I K in puncto M quàm in puncto L. Haud diſſimiliter autem ſi deſcribatur ſub M P Q circulo alius quiſpiam circulus ipſi M P Q parallelus, concludetur iterum eadem F G linea in eius cum eodem circulo ſectione propinquior eſſe eidem I K rectæ lineæ, quàm in ſigno M: idemque in infinitum oſtendi poteſt. Quantò magis igitur præfatæ lineæ ad inferiores Coni partes vnà cum ipſo Cono producentur, tantò ſibi inuicem proximiores euadent. Quod ſecundò demonſtrandum erat. Duas igitur in eodem plano lineas, & reliqua vt ſuperiùs. Quod facere oportebat.

Demonſtratio ſecundæ partis.

In hoc deficit Orōtius.

Cōcluſio ſecundæ partis.

Concluſio vniuerſalis.

DE DVABVS LINEIS RECTA, ET CVRVA NON COINCIDENTIBVS,

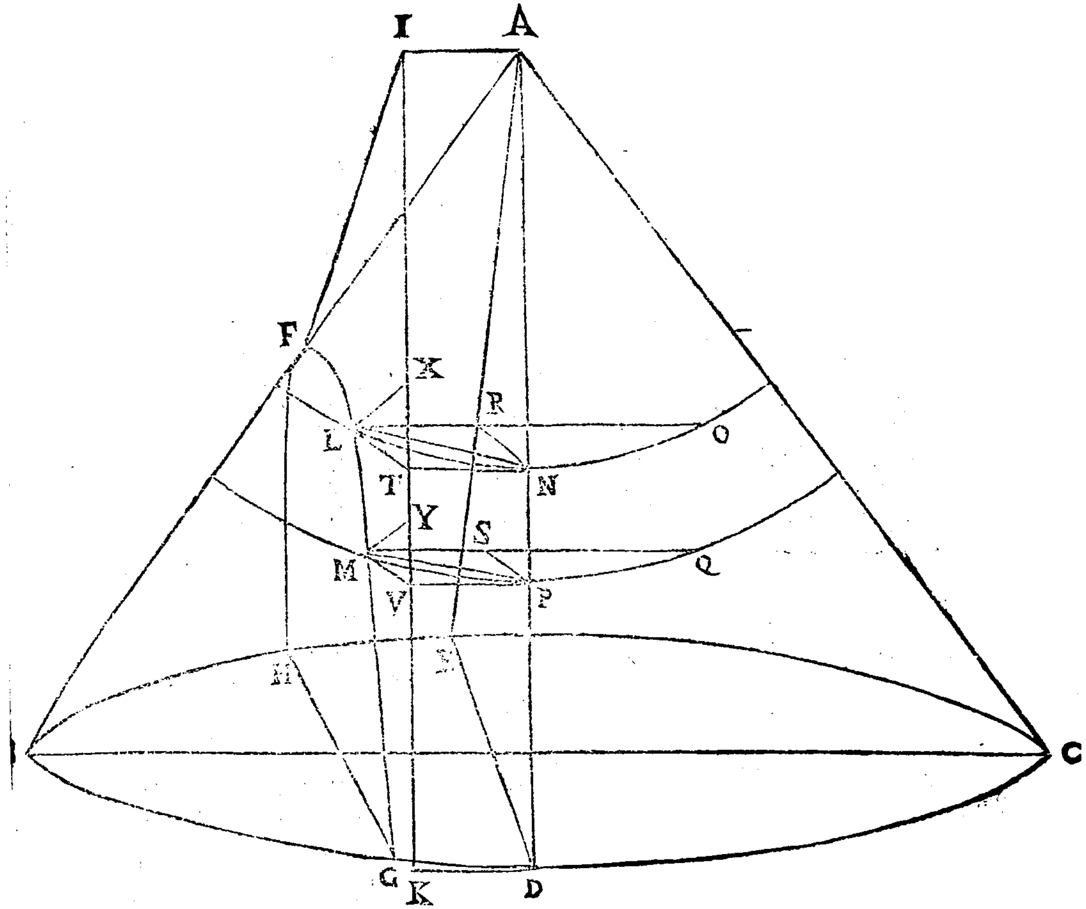
& magis ſemper inuicem appropinquantibus in diuerſis Planis.

Prop.

PRIVSQVAM reliquas inſtituti Problematis demonſtrationes perſequar cõmodum mihi videtur hoc in loco demonſtrare hanc eandem affectionem veram eſſe de duabus etiam lineis altera ſimiliter Hyperbolica, & altera recta, ambabus in Coni ſuperficie, ſed non in eodem plano iacentibus. Quod etiam ab Orontio in ſuo libello de ſpeculo vſtorio, & ab antiquo innominato Autore in fine libelli de ſectione Parabolæ quamuis ſatis obſcurè, imperfectèq́ꝫ, demonſtratum tamen fuit.

Expoſitio, & Conſtructio. Maneant igitur cuncta ſic diſpoſita vt in ſuperiori proxima Conſtructione, & per primam petitionem primi libri Element. Euclid. ducantur LN, & MP dimetientes parallelogrãmorum LRNT, & MSPV. Determinatio. Dico duas lineas FG inflexam, & AD rectam in ſuperficie conica non in eodem plano iacentes in infinitum cum ipſo Cono protractas ſemper magis atq; magis ſibi inuicem proximari, nunquam tamen ſibi occurrere. Demonſtratio. Quum.n. rectæ lineæ LR, MS in eiſdem parallelis ſint planis; erunt parallelæ, & æquales per 16 prop. 11, & 34 prop. primi lib. Elemen. Eucl. intelligendo ſcilicet rectas LM, RS lineas eſſe ductas. Atqui RN maior eſt quàm SP per Corollarium præaſſumpti Lemmatis. triangula igitur LRN, MSP per 4 Com. Sent. primi lib. Element. Eucl. habent duo latera LR, RN ſimul ſumpta duobus lateribus MS, SP ſimul ſumptis maiora, & rectos nihilominus angulos comprehendentia. Quadratum ergo ipſius LN quadrato ipſius MP per 47 prop. eiuſdem primi lib. maius eſt. vnde per 2 Com. Sentent. huius LN recta linea maior itidem eſt quam ipſa MP. Si itaque LN, & MP, rectæ lineæ ad ipſam AD rectam lineam perpendiculares

culares



culares ſunt, habemus intentum. Sin minus; ducantur à punctis LM ad rectam AD perpendiculares, & oſtendetur ſuperioribus rationibus inflexam FG lineam rectæ AD propinquiorem eſſe in puncto M, quàm in puncto L: & ſic in infinitum, & nihiloſecius nunquam coincident, cùm in duobus planis parallelis ſint, ſed aliquod ſemper inter eas erit interſtitium maius quàm recta linea vtrique plano perpendicularis. ſi enim aliquando coinciderent, dubioprocul plana quoque ipſa parallela tunc ſibi occurrerent, quod per 8 Definitionem 11 lib. Elementorum Euclid. nequaquam fieri poteſt. Duæ itaque lineæ in vna ſuperficie conica, ſed Concluſio.

M in

in diuersis planis describi possunt, quę quantò magis in continuum producentur, tantò sibi propinquiores euadent, nunquam tamen inuicem coincident, etiam si in infinitum protractæ fuerint. Quod erat demonstrandum.

DE DVABVS LINEIS CVRVIS NON COINCIDENTIBVS, & magis semper sibi inuicem proximantibus tum in eodem, tum in diuersis Planis.

Propositio.

HIC amplius prætereundum non est, quòd quemadmodum duas lineas inflexam scilicet, & rectam cùm in eodem, tum in diuersis planis accidentia supradicta patientes iam descripsimus: ita duas etiam curuas lineas tum eodem, tum diuersis in planis describere possumus, quippe quæ iisdem passionibus afficiantur.

Expositio, & Constructio in eodē plano.

Iacentibus itaque cunctis quemadmodum in secunda, & tertia propositi Problematis demonstratione, si construatur alius Conus iam extructo æqualis, & similis; priorique posterior ita incumbat, vt recta linea A D sit communis vtrique, planum verò Hyperbolis F G triangulari A D E plano parallelum continuè, directeque extendatur donec secat posteriorem, incumbentemùe Conum eodem modo, quo secet anteriorem succumbentem: statim liquebit propositum.

Demonstratio.

Communis enim sectio iam dicti Hyperboles F G plani, & conicæ superficiei nouissimi Coni erit linea curua similis incuruationis cum inflexa F G linea, quæ duæ curuæ lineæ non desinent continuè propiores inuicem fieri. quoniam vtraque ipsarum per ea, quæ hucusque demonstrata sunt magis magisque appropinquant rectæ lineæ I K eodem in plano eas interiacenti: & nihilosecius nunquam sese tangēt, etiam si in infinitum vnà cum duobus Conis producantur. quandoquidem neque etiam cum recta I K inter ipsas media concurrent. Hæc autem imaginatione potiùs quàm ostensione indigent, quippe cùm ab ijs, qui superio-

res

res Conos extructos præ oculis habent perpulcrè quidem excogitari possunt. atque idcirco nullam huiusce rei configurationem subijcere libuit.

Expositio, & Constructio in diuersis planis.

Agè modo ostendamus quomodo duæ curuæ lineæ in vna superficie conica, diuersis tamen in planis affectionibus supra dictis succumbere offendantur. Si igitur in quolibet Cono duo plana sibi inuicem, & plano trianguli per axem parallela superficiem conicam intersecent: fient porrò in ipsa conica superficie duæ Hyperbolicæ lineæ, quæ quantò amplius vnà cum Cono producuntur, eò magis ac magis sibi proximant, nunquam tamen coincidentes adinuicem, quamuis etiam in infinitum extendantur.

Demonstratio.

Cùm enim intermedio lateri trianguli per axem semper magis magisque appropinquent, cum ipsoque nunquam coëant (vt supra patuit) quòd etiam sibi continuè in infinitum propiores fiant, nunquam tamē inuicem conueniant, luce iam clarius relinquitur.

QVAEDAM ELEMENTA CONICA QVARTAE DEMONSTRATIONI DESERVIENTIA.

DECLARATIS iam, atque restauratis tribus pręcedentibus Demonstrationibus, in pręsentia consequens est propositum nobis Problema iuxta doctrinam Apollonij Pergęi de Conicis tractantium principis demonstrare. ipse enim, licet imperfectè, exactiùs tamen cæteris omnibus Autoribus duas iam dictas lineas, in eodem plano in infinitum productas nunquam inuicem coincidere, & continuè sibi propinquiores fieri theorematicè demonstrauit in prima, & quartadecima propositionibus secundi libri suorum Conicorum Elementorum, in quarta verò eiusdem secundi libri demonstratione (quæ Apollonij non est, sed potiùs Eutocij, vt ibi rectè Federicus Commandinus adnotauit) iam dictæ non coincidentes lineæ problematicè secundùm Apollonij doctrinam describuntur. Volentibus igitur nobis de mente Apollonij nostrum admirandum Problema demonstrare, necessarium erit tres commemoratas propositiones primam scilicet, & quartam, & quartamdecimam secundi libri Conicorum Elementorum Apollonij in vnam problematicam propoſitionem reducere. Quoniam verò tres iam dictæ propoſitiones in vnum reduci, perfecteque intelligi non poſſunt niſi priùs quædam Elementa conica ab Apollonio in primo libro ſuorum Elementorum conicorum demonſtrata rectè percipiantur; idcirco neceſſarium eſſe exiſtimo ante quam ad propoſiti Problematis demonſtrationem accedamus ea primùm hìc declarare. & præſertim quoniam Apollonius in Elementis ſuis propter nimiam breuitatem, & multorum Lemmatum ſuppoſitionem obſcuriſſimus eſt. Ego autem (vt hoc opus noſtrum omnino clarum ſit) aliquantulum prolixiori, ſed perfectiori quoad fieri poterit ſermone ea declarabo, verbis ipſius Apollonij me nequaquam obligans: ſed potiùs mentem ipſius amplioribus, lucidioribuſque verbis explicans. Nam Græca quidem Apollonij Elementa adhuc edita non ſunt: antequam autem à Federico Commandino Latina ederentur, ego ea maximo cum ſudore in ipſa peruerſa, ac ſordida Ioannis Baptiſtæ Memi tralatione ex ingenio correxi, atque dilucidaui: poſtea verò cum quodam etiam exemplari Græco manu ſcripto (quod apud ipſum Commandinum erat) ea contuli. erant enim propter tralatoris illius Græcarum literarum, & Mathematicarum ſcientiarum ignorationem adeo imperfecta, vt nil fœdius vnquam legi poſſet: quandoquidem maximo cum labore quid ſibi velet Apollonius vix conijcere quiſpiam poterat. Quapropter ex iiſdem à nobis iam correctis Elementis conicis ea, quæ in præſentia propoſito noſtro deſeruiunt, qualia tunc pro viribus inſtaurauimus, talia nunc in medium ſumus allaturi. Primum igitur Elementum Conicum à nobis declarandum, ac illuſtrandum duodecima primi libri propoſitio apud Apollonium eſt. Quoniam autem in eius expoſitione quoddam ab Apollonio Lemma ſupponitur, quod in fine vndecimæ propoſitionis eiuſdem primi libri breuiter, & particulatim Eutocius demonſtrat: propterea priuſquam dictam duodecimam propoſitionem declaremus, illud Lemma exquiſitiori, & vniuerſaliori demonſtratione confirmabimus, quippeque diuerſa ſit ab illa Eutocij. Erit enim Problema non inutile huiuſmodi.

Lemma,

Lemma, ſeu Sumptio ſequentis Elementi Conici.

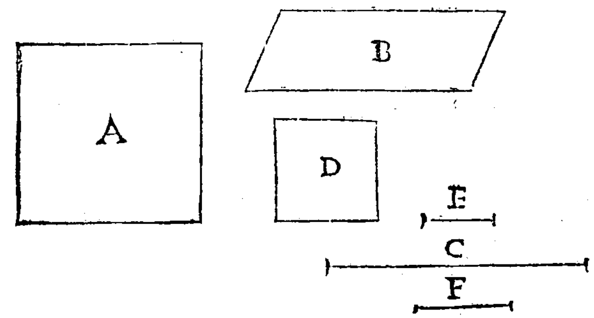
Problema.

Prop.

DATIS quadrato, & parallelogrammo, & recta linea: reperire lineam rectam, ad quàm habeat eandem rationem data recta linea, quam habet datum quadratum ad datum parallelogramum.

Expo.

Sit datũ quadratum A, datum aut parallelogramum B, data verò recta linea C. volo inuenire aliam rectam lineam, ad quam habeat linea C eã rationem, quã



habet quadratum A ad Parallelogramum B.

Constructio

Conſtituatur per vltimam propoſitionem ſecundi libri Elementorum Eucl. dato rectilineo B æquale quadratum D. & per vndecimam propoſitionem ſexti libri eorundem inueniatur recta linea E, ad quam habeat latus quadrati D eam rationem, quam habet latus quadrati A, ad latus quadrati D. deinde per duodecimam propoſitionem eiuſdem reperiatur linea recta F, ad quam linea C habeat eam rationem, quam habet latus quadrati A ad lineam E.

Determinat.

Dico quòd linea F eſt ea, quam quærimus.

Demonſt.

Quoniam itaque per Conſtructionẽ eſt vt latus A ad latus D ſic latus D ad lineã E, erit per ſecundum Corollarium vigeſimæ propoſitionis ſexti libri Elementorum Euclidis ratio lateris A ad lineam E ſicut ratio quadrati A ad quadratum D. ſed ratio lateris A ad lineam E per Conſtructionem eſt ſicut ratio lineæ C ad lineam F, igitur per xi. prop. quinti libri eorundem ratio quadrati A ad quadratũ D eſt vt ratio

ratio

ratio lineæ C ad F lineam. Verùm per ſecundam partem ſeptimæ propoſitionis eiuſdem quinti quadratum A ad quadratum D eandem habet rationem, quam ad parallelogrammum B; ergo per eandem vndecimam datum quadratum A ad datum B parallelogrammum eandem habet rationem, quam data recta linea C ad inuentam F rectam lineam. quod eſt propoſitum. Datis igitur quadrato, & parallelogrammo, rectaque linea: reperta eſt quædam alia recta linea, ad quam eadem eſt ratio datæ rectæ lineæ, quæ dati quadrati ad datum parallelogrammum. Quod faciendum erat.

Concluſio.

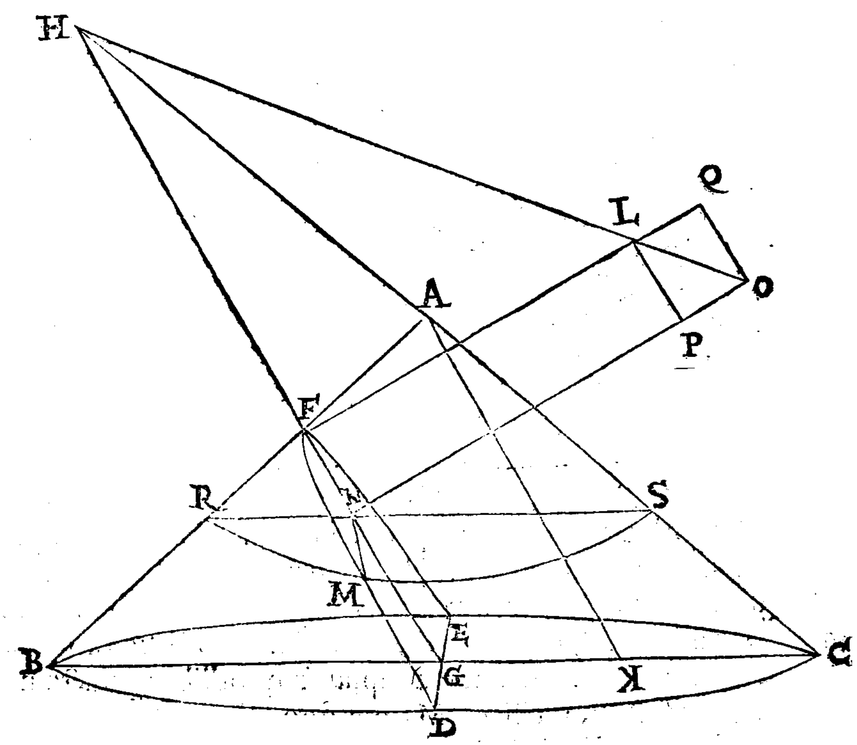
Elementum Conicum primum Propoſitio 12 primi libri Conicorum Apollonij.

Propoſitio.

SI conus plano ſecetur per axem, ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni per lineam rectam ad rectos angulos exiſtentem baſi trianguli per axem, & dimetiens conicæ ſectionis producta coincidat vni laterum trianguli per axim extra coni ſummitatem: recta linea, quæ à conica ſectione ducitur parallela communi ſectioni ſecundi ſecantis plani, & baſis coni vſque ad dimetientem conicæ ſectionis, poterit parallelogrammum rectangulum inhærens cuidam rectæ lineæ, ad quam eam habet rationem recta linea in directum iacens dimetienti conicæ ſectionis, ſubtendenſque angulum extra triangulum per axim, quam habet quadratum rectæ lineæ ductæ à ſummitate coni parallelæ dimetienti conicæ ſectionis vſque ad baſim trianguli per axim, ad rectangulum contentum à baſis trianguli per axem ſegmentis, quæ fecit ipſa ducta à coni vertice; & latitudinem habens rectam lineam in conicæ ſectionis dimetiente receptam ab ipſa potente vſque ad conicæ ſectionis ſummitatem; & excedens parallelogrammo ſimili, & ſimiliter poſito ei, quod continetur ab ipſa ſubtendente angulum extra triangulum per axim, & illa linea, cui inhæret iam dictum rectangulum.

Expoſitio.

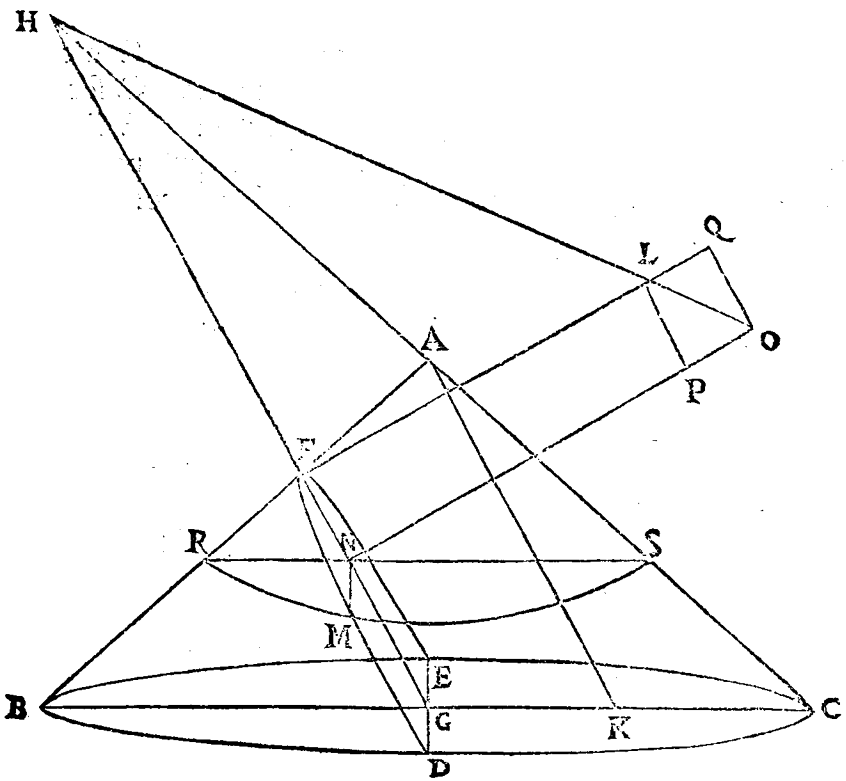
Sit conus cuius ſummitas punctum A, baſis autem circulus BC, & ſecetur plano per axim, & faciet per 3 prop. pri. lib. Conicorũ Apollonij, ſeu per 3 pet. huius ſectionẽ triangulum ABC. ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni per rectam DE lineam ad rectos angulos exiſtentem ipſi BC baſi trianguli per axem ABC, & faciet per 5 pet. & 20 Definitionem huius conicam ſe-



ctionem

Nota q hic dupliciter accipitur conica ſectio, pro linea. ſ. & pro ſuperficie, vt in 20 defin. huius declaratum fuit.

ctionem in ſuperficie coni inflexam DFE lineam. Dimetiens autem conicæ ſectionis ſit FG, quæ producta coincidat vni laterum trianguli ABC, ſcilicet ipſi AC extra coni ſummitatem ad ſignum H. & per ſignum A ducatur AK per 31 prop. primi libri Elementorum Euclid. parallela dimetienti conicæ ſectionis, quæ neceſſariò ſecabit ipſam BC inter ſigna GC (alioquin vel parallelæ coinciderẽt, vel duo anguli HGC, & HCG trianguli CGH erunt aut æquales duobus rectis, aut maiores quàm duo recti per 29, & 16 prop. primi lib. Elemen. Eucl. quod fieri non poteſt per vl-



timam Definitionem, & per 17 prop. eiuſdem. ducatur inſuper à ſigno F per 11 propoſitionem eiuſdem primi lib. FL ad rectos angulos ipſi HG. & fiat per præcedens Lemma ſicut ratio quadrati lineæ AK ad rectangulum à BK, KC contentum ſic ratio lineę HF ad lineam FL. Deinde accipiatur quodlibet punctum in DFE conica ſectione, ſcilicet M, per quod ducatur per 31 prop. primi lib. Elemen. Eucl. MN parallela ipſi DE, & per N ſimili-

ter

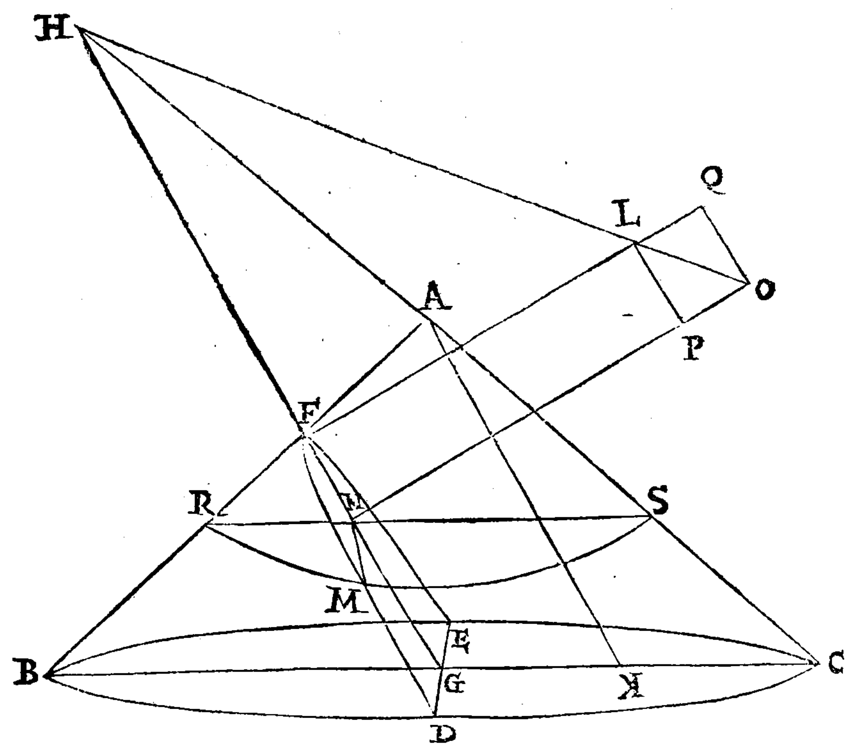
ter ducatur NO parallela ipſi FL. poſtea iuncta HL per primam pet. eiuſdem primi lib. producatur per ſecundam pet. eiuſdem vſq; ad O (coincidet enim cum ipſa NO, quoniam cum FL iam coincidit, aliter neque etiam cum FL coincideret per vltimam definit. & 30 prop. eiuſdem) & per ſigna L, & O ducantur per 31 prop. primi lib. Elemen. Eucl. LP, & OQ parallelæ ipſi FN. quarum LP quidẽ ipſam NO intra O ſignum, OQ verò ipſam FL productam extra ſignum L ſecabit per Conſtructionem, & quintam pet. primi lib. Elem. Eucl. alioqui vel parallelæ concurrerent, vel anguli HNO, & HON trianguli HNO eſſent rationibus paulo antè dictis maiores quàm duo recti. His ita iacentibus dico quòd recta linea MN poteſt parallelogrammum rectangulum FO, quod inhæret lineæ FL, latitudinem habens FN, excedenſque parallelogrammo LO ſimile, & ſimiliter poſito ei, quod ab HF, FL continetur rectangulo. Ducatur enim per 31 propoſitionem primi libri Elementorum Euclid. recta linea RNS parallela ipſi BC. eſt autem & NM parallela ipſi DE ex ſuppoſitione. planum igitur per MN, RS rectas lineas ductum parallelum eſt per 15 propoſitionem 11 lib. Elementorum Euclid. plano per ipſas BC, DE deducto, ideſt baſi coni. Si igitur producatur planum per MN, RS rectas lineas; communis eius, & conicæ ſuperficiei ſectio per 4 prop. primi lib. Apollonij, ſeu per 4 petitio. huius erit circulus, cuius dimetiens eſt RNS. Quoniam itaq; ad ipſam RNS dimetientem perpendicularis eſt MN per ſuppoſitionem, & quartam definitionem, & octauam propoſitionem, & tertiam definitionem 11 lib. Elemẽtorum Euclidis: quod ab RN, NS continetur rectangulum æquale eſt ei, quod ab MN fit quadrato per 31 propoſitionem tertij lib. & Corollarium octauæ propoſitionis ſexti, & primam partem 17 propoſitionis eiuſdem ſexti lib. Elementorum Euclidis. At quoniã eſt ex ſuppoſitione ſicut quadratum lineæ AK ad rectangulum à BK, KC contentum, ſic linea HF ad FL lineam: ratio autem eius, quod ab AK fit quadrati ad id, quod à BK, KC continetur rectangulum, componitur ex ratione, quã habet AK ad KC, & ex ea, quam habet AK ad KB per 23 prop. 6 lib. eorundẽ: Igitur & ratio FH ad FL cõponitur ex ratione, quã habet AK ad KC, & ea, quã habet AK ad KB per 11 prop. 5 li. eorundẽ Ele. Sed vt quidẽ AK ad KC, ſic HG ad GC p 29 prop. bis ſumptã primi, & quar. 6 lib. eorũdẽ Ele.

Determinatio.

Conſtructio.

Demonſtr.

N ideſt



ideſt HN ad NS per eaſdem, & 11 prop. quinti libri eorundem: vt verò AK ad KB ſic FG ad GB, ideſt FN ad NR per eaſdem: ratio igitur HF ad FL componitur ex ratione HN ad NS, & ratione FN ad NR per eandem vndecimam propoſitionem eiuſdem quinti libri. Compoſita autem ratio ex ratione HN ad NS, & FN ad NR eius eſt rectanguli, quod continetur ab HN, NF ad id, quod ab SN, NR per eandem 23 libri ſexti. Et ſicut igitur id, quod ab HN, NF ad id, quod ab SN, NR ſic HF ad FL per eandem vndecimam quinti lib. ideſt HN ad NO per eaſdem 29 prop. primi, & 4 ſexti, & 11 quinti libri eorundem. Verùm vt HN ad NO ſic quod ab HN, NF ad id, quod ab FN, NO per primam prop. ſexti lib. Elemen. Euclid. ſumpta linea FN pro communi altitudine. Et vt igitur quod ab HN, NF ad id, quod ab SN, NR ſic etiam ad id, quod ab ON, NF per eandem vndecimam quinti lib. Quod itaque ab SN, NR æquale eſt ei, quod ab ON, NF per ſecundam partem 9 prop. eiuſdem quinti libri.

quòd

quòd verò fit ab MN æquale demonſtratum eſt ei, quod ab SN, NR. igitur quod ab MN fit quadratum æquale eſt ei, quod ab ON, NF comprehenditur per primam Com. Sent. primi lib. Elementorum Euclid. quod autem ab ON, NF continetur eſt parallelogrammum rectangulum OF. igitur recta linea MN poteſt ipſum OF rectangulum, quippe quod inhæret lineæ FL, latitudinem habens FN, excedensque parallelogrammo LO ſimile, & ſimiliter poſito illi, quod ab HF, FL continetur rectangulo per propoſitiones 15, & 29 primi, & quartam ſexti, & primam Definitionem eiuſdem ſexti libri Elemen. Eucl. vel per 24 prop. ſolam eiuſdem ſexti, facta Conſtructione. quod eſt propoſitum. Si igitur conus Plano ſecetur, & reliqua vt in propoſitione. Quod erat demonſtrandum. **Concluſio.**

Definitiones ex hoc Theoremate emergentes.

VOCETVR autem talis conica Sectio Hyperbole: Linea verò FL; ad quam poſſunt ordinatim ductæ ad FG dimetientem, voceturque eadem & Recta, ſiue Rectum Latus formæ, ideſt rectanguli ab HF, FL contenti: linea autem FH, Tranſuerſa, ſeu Tranſuerſum formæ Latus.

1 Hyperbole quid.
2 Linea, ad quã poſſunt ordinatim ductæ, ſiue Recta, vel Latus Rectum formæ quid.
3 Latus Trãſuerſum formæ, vel Trãſuerſa linea quid.

Haſce tres ex præſenti Theoremate definitiones ijs, quæ ſequuntur neceſſarias Apollonius excerpſit, vnde manifeſta nobis nunc eſſe poteſt trium conicarum Sectionum etymologia, hoc eſt nominis ſignificatio, quam ſuperiùs in 21 definitionis commentario declarabamus. Linea enim FL vocatur linea, ad quam poſſunt ordinatim ductæ, quoniam ipſæ poſſunt quadrata æqualia iam dictis parallelogrammis rectangulis, quæ dum coaptantur ad ipſam FL lineam, in Parabole quidem applicantur ad ipſam ita vt eius longitudinem non excedant, nec excedantur ab ea: in Hyperbole verò, eam excedunt: in Ellipſi autem ab ea exceduntur. Vocatur autem ipſa FL etiam Recta, vel Rectum formæ Latus: Recta quidem, quoniam tum in Parabole, tum in Hyperbole, tum etiam in

 Ellipſi

Ellipsi ea linea, ad quam possunt ordinatim ductæ est erecta ad planum conicæ Sectionis: Rectũ verò formæ Latus, quandoquidem ex duobus illius formæ, cui similis in Hyperbole quidem excedit, in Ellipsi verò deficit, lateribus hoc quidem est erectum ad planum ipsius conicæ Sectionis, reliquum verò latus ad planum sectionis erectum non est, sed in ipso plano prostratum, atque transuersum iacet: vnde non immeritò Transuersa linea, seu Transuersum formæ Latus appellatur. Adnotandum autem est, quòd in Hyperbole quidem, & Ellipsi tres istæ definitiones locum habent: in Parabole verò nulla linea Rectum, vel Transuersum formæ Latus, seu linea Transuersa nuncupatur; quppecum in ipsa non excedat iam dictum parallelogrammum longitudinem lineæ ad quam possunt ordinatè ductæ, nec ab eadem deficiat, sed ad eam applicetur. Quare in Parabole quidem linea, ad quam possunt ordinatim ductæ vocatur etiam Recta (ratione iam dicta) non autem Rectum formæ Latus: Transuersa verò linea, siue Transuersum Latus in Parabole nequaquam dicitur. idcirco Apollonius in fine vndecimæ propositionis primi libri suorum conicorum Elementorum, in qua Paraboles ortum, & propriam affectionem tradidit; Parabolem, & lineam, ad quam possunt ordinatim ductæ definiuit, quam etiam Rectam appellari dixit: de Lateribus autem Recto, & Transuerso, vel Transuersa linea nullam fecit mentionem. At in duodecima, & tertiadecima eiusdem primi propositionibus, in quibus tradidit Hyperboles, & Ellipsis generationes, propriasque affectiones: omnia iam dicta nomina tribus definitionibus declarauit. Præterea adnotandum est, quod etiam latus Rectum, seu Recta, vel linea, ad quam possunt ordinatim ductæ, necnon Basis Recta vocatur à Mathematicis illa recta linea, quæ cum ad axem sectionis ordinatè ducta sit, æqualis est axis parti à seipsa vsque ad Sectionis Summitatem terminatæ. De hac autem recta linea nullam nos in hoc opere facimus mentionem, quoniam nullum ipsa nobis vsum præbet. Tertiò adnotandum est, quòd si quis in Parabole quoque vellet Rectum quidem Latus, siue Rectam vocare eam lineam, ad quam possunt ordinatim ductæ: Transuersum verò Latus, seu Transuersam lineam reliquum latus ipsius parallelogrammi, quod ad ipsam Rectam applicatur æquale quadrato lineæ ordinatim ductæ: non esset incongruum. sunt etenim duo latera iam dicti applicati parallelogrammi, quorum vnum est erectum ad planum conicæ sectionis,

Not. primũ.

Not. secundum.

Not. tertiũ.

ctionis,

ctionis, alterum verò in ipso Sectionis plano prostratũ atq; transuersum existit. Verùm Apollonius his vti nominibus in Parabole noluit ne confunderet Rectum, & Transuersum Latera formæ simi lis excessui, defectuique in Hyperbole, & Ellipsi cum Recto, & Transuerso Lateribus parallelogrammi, quod in qualibet trium conicarum Sectionum inhæret rectæ lineæ, ad quam possunt ordinatim ductæ. Hæc autem pro declaratione trium Apollonij definitionum, & etymologiæ trium conicarum Sectionum breuiter à nobis hoc loco dicta, adnotataque sint.

Elementum Conicum secundum, Propositio 21 primi libri Conicorum Apollonij.

SI ab Hyperbole, vel Ellipsi, vel circuli circunferentia rectæ lineæ ducantur ordinatim ad dimetientem: erunt quadrata earum ad rectangula contenta à lineis receptis in dimetiente ab ipsis ordinatè ductis vsque ad terminos Transuersi formæ Lateris, vt Rectum formæ Latus ad Transuersum: adinuicem verò, vt contenta rectangula à iam dictis receptis lineis. Propositio.

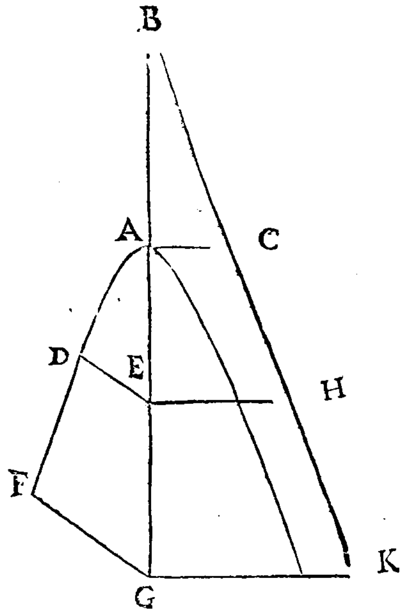
Quamuis Apollonius affectionem huius Theorematis in tribus Subiectis, Hyperbole scilicet, Ellipsi, & circuli circunferentia vnica, & vniuersali demonstratione videatur demonstrare: animaduertendum tamen quòd illa demonstratio neque vna, neque vniuersalis est. quandoquidem Hyperboli, & Ellipsi, & circunferentiæ commune genus nominatum non inuenitur, in quod vna, & vniuersalis demonstratio fiat. hallucinatur autem (inquit Arist.) qui credit vniuersè demonstrare quando affectionem aliquam in quibusdam Subiectis demonstrat specie differentibus, quorũ commune genus innominatum est, cui affectio illa per se inesse possit. Notandum. Primo post. tex. 12.

Non

Non est igitur Apollonij demonstratio vniuersalis, nec vna: sed tres sunt demonstrationes, cùm tria quoque sint Subiecta, in quorum vnoquoq; affectio illa seorsum debet ostendi. Quapropter quum ad institutum nostrum necesse non sit nisi in sola Hyperbole præsentis Theorematis Quæsitum verum ostendere, de Hyperbole tantùm sermo nobis erit. Sit igitur Hyperbole, cuius dimeties AB, &

Expositio. Recta AC ad quam possunt ordinatè ductæ, & ducantur ad dimetientem ordinatim DE, &

Determinatio. & FG. Dico quòd sicut se habet quod ab FG fit quadratum ad id, quod ab AG, GB continetur rectangulum, sic linea AC ad AB lineam: sicut autem quod ab FG ad id, quod à DE, ita quod ab AG, GB ad id, quod ab AE, EB.



Cõstructio. Coniungatur per primam pet. primi lib. Elemen. Euclid. BC diuidens per medium ipsam formam, & per EG signa ducantur per 31 prop. eiusdē EH, & GK ipsi AC parallelæ, quę necessariò secabunt in punctis HK ipsam BC indirectum ad partes C per secundam pet. eiusdem productam; aliter BC esset parallela ipsi AC per vltimam definitionem, & 30 prop. primi lib. eorundem Elementorum, quod est contra Constructionem. His

Demonstratio. ita dispositis æquale est per præcedens Elementum quod quidem fit ab FG ei, quod à KG, GA continetur: quod verò à DE ei, quod ab HE, EA. Et quoniam vt KG ad GB, sic CA ad AB per 29 prop. primi, & 4 prop. sexti libri Elemen. Euclid. & vt KG ad GB (accepta AG pro communi altitudine) sic quod à KG, GA ad id, quod à BG, GA per primam prop. eiusdem sexti: vt igitur CA ad AB, sic quod à KG, GA, idest quod ab FG ad id, quod à BG, GA, per vndecimam, & septimam prop. quinti libri eorundem Elem. per easdem porrò vt quod fit à DE ad id, quod à BE, EA continetur sic CA ad AB. idemque eodem

dem modo de omnibus alijs ordinatè ductis ostendetur. Patet itaque primum Theorematis membrum. At quoniam vt quod fit ab FG ad id, quod à BG, GA, sic quod à DE ad id, quod à BE, EA per iam demonstratum primum membrum, & per 11 prop. quinti lib. Element. Euclid. bissumptam: & alternatim igitur, seu permutando per 16 prop. eiusdem quinti lib. vt quod fit ab FG ad id, quod à DE, sic quod à BG, GA ad id, quod à BE, EA comprehenditur. Patet ergo & secundum. Si igitur ab Hyperbole rectæ lineæ ad dimetientem ordinatè ducantur, & reliqua, vt in propositione. Quod demonstrandum erat.

Conclusio primi membri. Cõclusio secundi. Conclusio vniuersalis.

Post duo iam posita Elementa conica consequens esset reliqua Elementa proposito nostro necessaria ponere, verùm quoniam Elementum, quòd à nobis consequenter ponēdum est quibusdam Lemmatibus indiget, quæ ab Apollonio supponuntur: operæprecium est ea priùs proponere, ac demonstrare. tria verò hæc sunt, duo scilicet Problemata, quæ etiam ab Eutocio in fine 53 prop. primi lib. Conicorum Apollonij breuiter, & quàm obscurè, diminuteque demonstrantur: & vnum Theorema, quod hactenus à nemine demonstratum vidimus. Primum igitur trium dictorum Lemmatum à nobis demonstrandum tale problema sit.

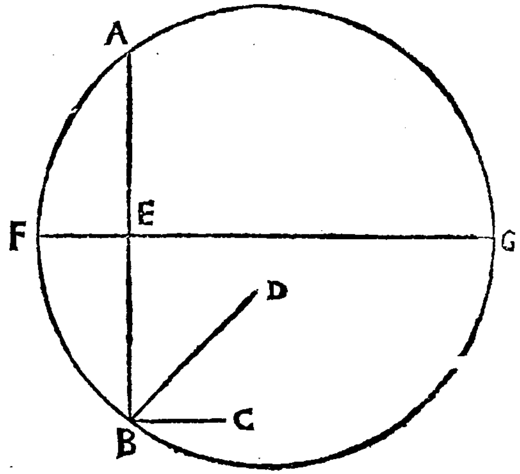
Lemma primum, siue sumptio prima sequentis tertij Elementi, Problema primum.

Propositio. DVABVS datis rectis lineis terminatis, describere circulum per alterius earum extremitates transientem, cuius vna dimetiens à data recta in circulum coaptata sic secetur, vt pars ipsius dimetientis in altero circuli segmento resecta ad partem eiusdem dimetientis in reliquo circuli segmento resectam non habeat maiorem rationem ea, quam habet data recta linea in circulum coaptata, dimetientemque secans ad reliquam datam rectam lineam.

Sint

Expositio.

Sint duæ datæ rectæ lineæ AB, & BC; volo describere circulũ transeuntem per extremitates alterius earum, vt puta ipsius AB; cuius vtique circuli vna dimetiẽs sic à recta AB secetur, vt pars ipsius dimetientis in altero circuli segmento, verbi gratia dextro, resecta ad partem eiusdem dimetientis in reliquo circuli segmento, videlicet sinistro, resectam non habeat maiorem rationem ea ratione, quam habet data



Diuisio Problematis in duas partes.

AB recta linea ad datam rectam lineam BC. Si autem maiorem rationem non habuerit, necessariò vel eandem, vel minorem habebit. quælibet enim ratio cuilibet rationi comparata, vel ipsi eadem, vel minor quàm ipsa, vel maior est. Volo igitur priùs ita describere circulum vt iam dictæ rationes eædem sint.

Constructio primæ partis.

Inueniatur itaq; per 13 propositionem sexti libri Elementorum Euclid. inter ipsas AB, & BC datas rectas lineas media proportionalis, quæ sit BD. & diuidatur recta AB per 10 propositionem primi lib. eorundem Elemen. per medium in signo *E*, à quo per vndecimã prop. eiusdem erigatur ipsi AB ad rectos angulos recta linea E*F*, quæ fiat per 3 prop. eiusdẽ æqualis dimidiæ parti lineæ BD, & per quintã propositionem quarti libri eorundem describatur circulus transiẽs per tria signa ABF, & per secundam petitionem eiusdem primi lib. producatur F*E* in partem *E* vsque quo secet circuli circunferentiam in G signo.

Determinatio.

Dico quòd FG est dimetiens circuli AFB: & G*E* ad *E*F eandem habet rationem, quam AB ad BC.

Demonstratio.

Quod enim dimetiens sit patet per Constructionem, & per Corollarium primæ propositionis tertij libri Elementorum Euclidis: quòd verò eandem habeat rationem G*E* ad *E*F, quam AB ad BC sic probetur. Quoniam per Constructionem AB dupla est ipsius B*E*, & BD dupla ipsius *E*F: erit per 15 propositionem quinti libri Elementorum Euclid. AB ad BD sicut B*E* ad *E*F. sed

B*E* ad

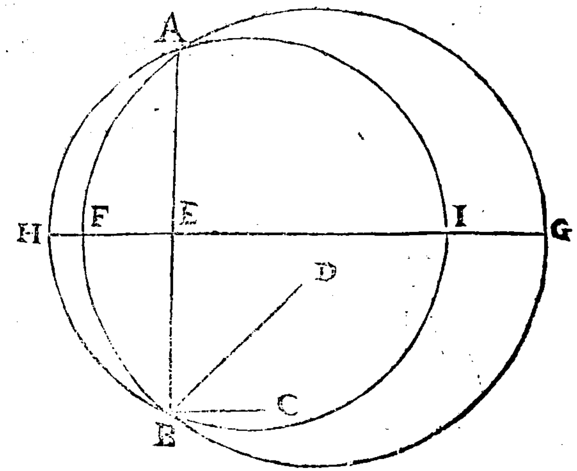
B*E* ad *EF*, vt G*E* ad *E*B per 31 prop. tertij lib. & Corollarium octauæ propositionis sexti lib. eorundem Elemen. igitur per vndecimam propositionem eiusdem quinti lib. AB ad BD sicut G*E* ad *E*B. verùm AB ad BD, vt BD ad BC per Constructionem. ergo per eandem vndecimam prop. G*E* ad *E*B, idest *E*B ad *E*F,

Conclusio primæ partis.

sicut BD ad BC. at probatum fuit quòd etiam G*E* ad *E*B, vt AB ad BD. igitur per 22 prop. quinti libri eorundem Elemen. vt AB ad BC, ita G*E* ad *E*F. quod est primum.

Constructio secundæ partis.

Hoc facto, secundum etiam Problematis membrũ paucis absoluetur. Maneat enim tota prior dispositio, & producatur per secũdam pet. primi lib. Elem. Eucl. *E*F in partem F, & per 3 prop. eiusdem fiat *E*H tantæ longitudinis, vt sit maior dimidio ipsius BD. postea per eandem quintam prop. quarti lib. describatur circulus trãsiẽs per tria signa ABH, quippe qui circulus necessa-



riò secabit priorem AFB circulum in duobus tantùm AB signis per 13, & 10 prop. tertij lib. Elementorum Euclidis. Cùm autem AHB circunferentia transiens per H signum sit extra circunferentiam AFB, proculdubio reliqua ipsius AHB circuli circunferentia cadet intra priorem circulum, secabitq; dimetientem eius in signo, quod sit I.

Determinatio.

His ita constructis, Dico quòd recta H*E*I linea est dimetiens circuli AHB: & I*E* ad *E*H minorem habet rationem quàm AB ad BC.

Demonstratio.

Nam quòd dimetiens sit, constat vt supra. quòd verò I*E* ad *E*H minorem habeat rationem quàm AB ad BC sic liquebit. Quoniam ratio ipsius I*E* ad ipsam *E*H minor est quàm ratio ipsius G*E* ad eandem *E*H per 9 Com. Sent. primi, & primam partem octauæ prop. quinti lib. Elemen. Eucl. ratio verò G*E* ad *E*H minor adhuc est ratione eiusdẽ G*E* ad *E*F per secundam partem iam dictæ octauæ: ratio igitur I*E* ad *E*H

O multò

Cóclusio secundæ partis.

multò minor est quàm ratio GE ad EF, hoc est AB ad BC per primam partem huiusce propositionis, & 13 propositionem eiusdem quinti lib. Elem. Eucl. Quare factum est etiam secundum Problematis membrum. vt in secunda figura. Datis igitur duabus rectis lineis terminatis descripsimus circulum per alterius earum extremitates transientem, & reliqua vt in propositione. Quod facere oportebat.

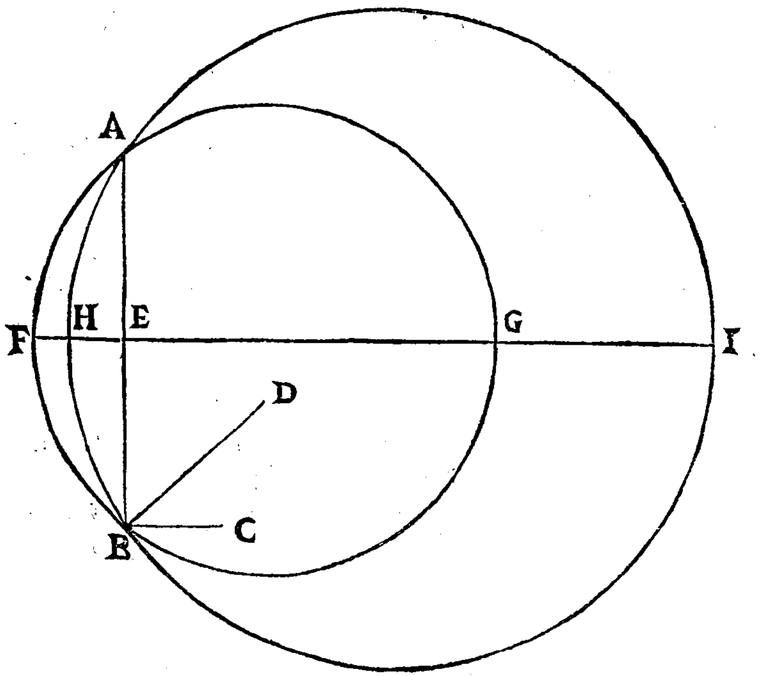
Conclusio vniuersalis propositionis.

Tertia Problematis pars.

Si quis autem velit tertiam quoque huic Problemati partem adiungere, ipsumque magis vniuersale facere, nempe quòd doceat etiam circulum circa datam AB rectam lineam ita describere vt altera suæ dimetientis pars ad reliquam habeat rationem maiorem quàm AB ad BC: facilè demonstrari poterit. Manente nanque

Expositio.

Cóstructio.



prima dispositione fiat per tertiam propositionem primi lib. Elem. Eucl. EH minor dimidio ipsius BD, & per quintam prop. quarti lib. eorundem Elem. circulus describatur trãsiens per tria ABH signa, qui secabit AFB circulum in duobus tantùm AB signis per 13, & 10 prop. tertij lib. eorundem Elemen. eiusque circunferentia

rentia

rentia AHB cadet intra circunferentiam AFB. quocirca reliqua eiusdem AHB circuli circunferentia cadet extra circulum AFB. proptereaque dimetiens FEG producta in partem G, secabit ipsius AHB circuli circunferentiam, vtpotè in signo I. Hisce constructis Dico quòd linea HEI dimetiens est circuli AHB: & IE ad EH rationem habet maiorẽ, quàm AB ad BC. Quòd enim dimetiens sit, liquet vt supra: quòd verò IE ad EH maiorem habeat rationem, quàm AB ad BC, sic ostendetur. Quoniam ratio IE ad EH maior est ratione GE ad EH per primam partem octauæ propositionis quinti libri Elementorum Euclidis, ratio verò GE ad EH maior adhuc ratione GE ad EF per secundam eiusdem octauæ partem: ergo ratio IE ad EH multò maior est quàm ratio GE ad EF, idest quam AB ad BC per secundam partem tertiædecimæ propositionis quinti libri Elem. Eucl. à Campano additam, atque demonstratam. Patet igitur tertia quoque Problematis pars. vt in tertia descriptione. Placuit autem nobis eo modo præsens Problema proponere, quoniam duæ dumtaxat eius partes proposito nostro deseruiunt. Hoc autem Problema aliter, sed diminutè, obscureq; demonstratur ab Eutocio in fine 53 propositionis primi lib. Conicorum Apollonij. Cùm enim ipsum tres (vt iam vidimus) habeat partes, quarum duæ nimirùm ad ipsam 53 propositionem Apollonij construendam summopere necessariæ sunt: nihilominus primam partem solam Eutocius demonstrauit. eius verò demonstratio quam plurimos habet Casus, ex quibus ipse duos tantùm breuissimè demonstratos reliquit. vt in Apollonio, quem Federicus Commandinus nuper Latinum edidit, cuique videre licet.

Determin.

Demonstr.

Cóclusio tertiæ partis.

De Eutocij demonstratione, eiusq; defectibus.

Lemma secundum, siue Sumptio secunda, Problema secundum.

DATO semicirculo, & producta dimetiente extra ipsum in alteram partem quantumlibet; & ducta recta linea à puncto, in quo dimetiens ipsa producta secat circunferentiam, ad quoduis semicircunferentię punctum

Propositio.

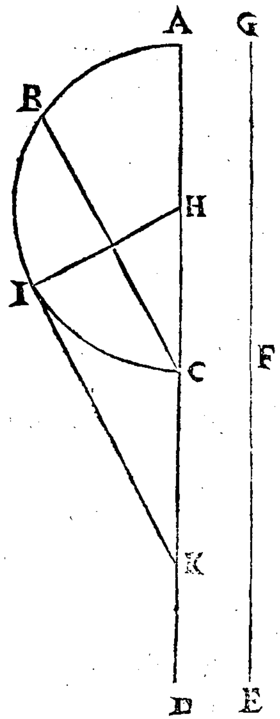
ctum

ctum modò faciat angulum cum dimetiente; dataque ratione quadam, quæ maioris inæqualitatis non ſit: Ducere à conuexa ſemicirculi circunferentia ad aliquod productæ dimetientis ſignum extra circunferentiam exiſtens rectam lineam ipſi angulum facienti parallelam, cuius quadratum datam habeat rationem ad rectangulum contentum ab ipſa tota dimetiente vſque ad iam dictum extra iacens ſignum producta, & parte eiuſdem productæ dimetientis exteriori inter punctum illud, & conuexam circunferentiam iacente.

Expoſitio.

Sit ſemicirculus ABC ſuper dimetientem AC, quæ producatur in partem C quantumlibet vſque ad D; & per primam pet. primi lib. Elem. Eucl. ducatur à puncto C ad quoduis ſemicircunferentiæ punctum recta CB linea faciens angulum ACB cum dimetiente; ſitq; data ratio rectæ lineæ EF ad FG rectam lineam, quippequæ ratio non ſit maioris inæqualitatis: opus eſt à conuexa ſemicircunferentia ad aliquod productæ dimetientis punctum extra ABC circunferentiam iacens rectam ducere lineam iam dictæ angulum facienti parallelam, cuius quadratum eandem habeat rationem ad rectangulum contentum ab ipſa tota dimetiente vſque ad iam dictum extra iacens punctum producta, & eius parte exteriori inter punctum illud, conuexamque circunferentiam iacente, quam habet recta EF linea ad rectam lineam FG. Cùm itaque ſupponatur datam rationem non eſſe maioris inæqualitatis, manifeſtum eſt quòd aut

Determin.



Diuiſio caſuum Problematis.

aut æqualitatis ratio, aut ratio minoris inæqualitatis erit. Omnis enim ratio duplex eſt, vel æqualitatis, vel inæqualitatis: & ipſa quidem æqualitatis ratio vnica tantùm eſt, cùm in alias ſpecies diuidi non poſſit: ratio verò inæqualitatis dupliciter diuiditur, aut enim eſt ratio maioris inæqualitatis, aut minoris. harum autem quælibet in alias adhuc diuiditur ſpecies. Quare quæuis ratio vel erit æqualitatis, vel inæqualitatis maioris, vel minoris. Si igitur data in præſentia ratio fuerit æqualitatis, vt ſcilicet data EF recta linea datæ FG rectæ lineæ ſit æqualis: quæſitum paucis abſoluetur. Ducatur enim per 12 prop. pri. lib. Elem. Eucl. à ſemicirculi centro H ad ipſam BC perpendicularis, quę per ſecundam pet. eiuſdem producta coincidat circunferentiæ ad I ſignum, per quod ducatur per 31 prop. eiuſdem pri. lib. IK parallela ipſi BC, coincidens per 29, & 32 prop. & quintam pet. eiuſdem pri. lib. Elemen. cum ipſa AD in puncto K; tangensq; circulum in puncto I per 29, & 13 prop. primi, & Corollarium 16 prop. tertij lib. Elem. Eucl. Dico ꝙ Quæſitum factum eſt. Nam per 36 prop. eiuſdem tertij lib. quadratum ipſius IK æquale eſt rectangulo ab AK, KC comprehenſo, quẽadmodum etiã EF linea æqualis eſt lineæ FG. Ratio igitur æqualitatis quadrati lineæ IK parallelæ ipſi BC ad rectangulum ab AK, KC contentũ eadẽ eſt, quę lineę EF ad lineã FG. quod eſt primũ propoſitum. Si verò data ratio non fuerit æqualitatis, ſed (quod reliquum eſt) minoris inæqualitatis, videlicet ꝙ linea EF minor ſit quam FG, abſcindatur per 3 prop. pri. lib. Elem. Eucl. ab FG maiore ipſi EF minori æqualis FH, & ſecetur HG per medium in ſigno I per 10 prop. eiuſdem, & à ſemicirculi centro K (vt ſupra) ducatur ad ipſam BC perpendicularis, quæ producta coincidat circunferentiæ ad L ſignum, per quod ipſi BC parallela LM ducatur, coincidens cum ipſa

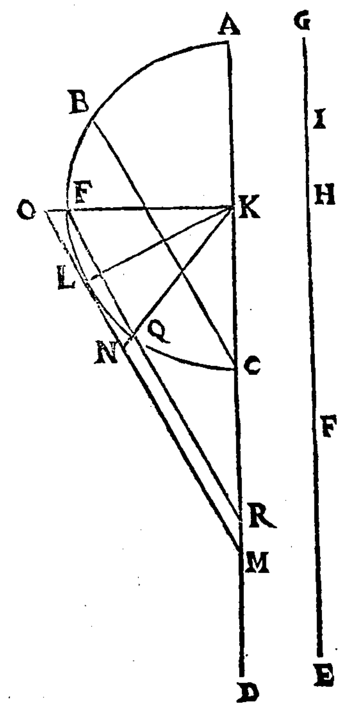
Vide Boëtium in primo libro ſuę Arithmeticæ cap. 17, & 18.

Primus caſus.

Conſtructio primi caſus.

Determinatio.

Demonſtr:

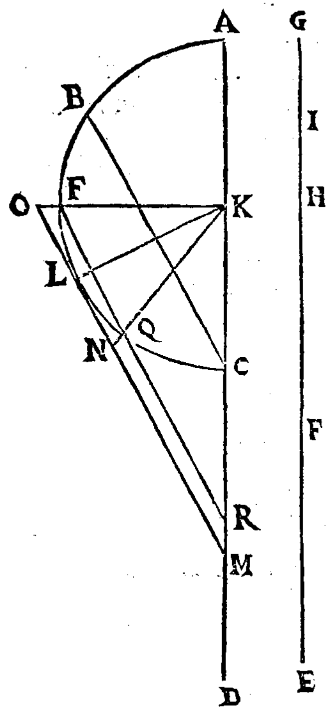


Concluſio.

Secundus caſus.

Conſtructio ſecundi caſus.

ipsa AD in puncto M, tangensque circulum in puncto L rationibus superiùs dictis. Deinde fiat sicut FH ad HI, sic MN ad NL per decimam propositionem sexti libri Elementorum Eucl. & per secundam petitionem, & tertiam prop. primi libri eorundem Elem. fiat LO æqualis ipsi LN, & ducantur per primam pet. eiusdem KN, & KO secantes necessariò semicircunferentiam ad PQ signa, per eandemque primam petitionem ducatur linea recta PQ. Quoniam igitur NL æqualis est ipsi LO, communis verò, & ad rectos angulos ipsa KL: æqualis etiam per quartam prop. primi lib. eorundem Elemen. est KO ipsi KN. est autem & KP æqualis per 15 definitionem eiusdem ipsi KQ, reliqua igitur PO æqualis est ipsi QN per 3 Com. Sent. eiusdem. Parallela ergo est PQ ipsi MO, per secundam partem secundæ propositionis sexti libri Elementorum Eucl. quare ipsi etiam BC parallela est per 30 prop. primi lib. eorundem Elemen. Producatur itaque PQ per secundam pet. eiusdem usq; quo secet ipsam AM in signo R. Secabit enim ipsam; alioqui neque etiam OM, & BC ipsam secarent per vltimã definitionem, & 30 prop. eiusdem primi lib. quod esset contra Constructionem.



Determinatio. His ita constructis aio denique quadratum lineæ QR (quippe quam ipsi BC parallelam esse iam in Constructione constauit) ad rectangulum ab AR, RC contentum eandem habere rationem, quam habet linea EF ad FG lineam. *Demonstratio.* Quum enim per Constructionem sit vt quidem FH ad HI, sic MN ad NL; vt verò HI ad HG, sic NL ad NO: erit ex æquali per 22 prop. quinti libri Elemen. Eucl. sicut FH ad HG, ita MN ad NO. & conuertendo ergo per Corollarium quartæ propositionis eiusdem quinti lib. sicut GH ad HF, ita ON ad NM. & componendo igitur per 18 prop. eiusdem vt GF ad FH, idest per secundam partem septimæ

ptimæ

ptimæ propositionis, & vndecimam propositionem eiusdem quinti lib. ad ipsi æqualem FE, sic OM ad MN, idest PR ad RQ per propositiones vicesimãnonam primi, & quartam sexti, & vndecimam quinti bis sumptas, & 16 prop. eiusdem quinti lib. Elemen. Eucl. semel sumptam. Vt autem PR ad RQ, ita quod à PR, RQ ad id, quod à QR per primam propositionem eiusdem sexti lib. Elemen. æquale verò est quod à PR, RQ ei, quod ab AR, RC per 36 prop. tertij, & primam Com. Sent. primi lib. eorundem Elem. vt igitur GF ad FE, sic quod ab AR, RC ad id, quod à QR per eandem vndecimam prop. quinti lib. bis, & septimam eiusdem semel sumptas. & conuertendo itaque per Corollarium quartę propositionis eiusdem quinti lib. Elem. vt EF ad FG, sic quod fit à QR quadratum ad id, quod ab AR, RC continetur rectangulum. quod est secundum propositum. *Conclusio secundi.* Dato igitur semicirculo, & producta dimetiente, & reliqua vt in propositione. *Conclusio vniuersalis.* Quod faciundum erat. Nunc autem animaduertendum est quòd non immeritò supposuimus in hoc Problemate datam rationem non esse maioris inæqualitatis. *Notandum.* quandoquidem si data ratio maioris esset inæqualitatis, Problema nimirùm esset impossibile. Nam fieri non potest vt quadratum rectæ lineæ à circunferentia ad dimetientem extra circulum productam quomodocunque ductæ maius sit rectangulo à tota dimetiente extra circulum producta, & eius externa parte contento. quæuis enim rectalinea ducta quomodolibet à circunferentia ad dimetientem extra dirculum productam vel tangit circulum, vel secat. quòd si tangat, eius quadratum est æquale iam dicto rectangulo per 36 prop. tertij lib. Elem. Eucl. si verò secet, eius quadratum erit minus eodem rectangulo per secundam partem octauæ prop. tertij lib. eorundem Elem. & secundam, & septimam Com. Sent. huius. Quare conditio illa necessaria est, vt præsens Problema conditionatum sit, atque possibile: non autẽ indeterminatam, ac impossibile. Solent enim Mathematici conditionibus ipsis indeterminata, impossibiliaque Problemata ad determinata, possibiliaque reducere. quemadmodũ nos in præsenti Problemate fecimus, quippequod ab Eutocio in fine 53 prop. pri. lib. Conicorũ Apollonij diminutè, indeterminateq; demonstratũ fuit. *Defectus demõstrationis Eutocij.* qm̃ casus eius non distinxit, sed secundũ casum accipiens in eo propositũ demõstrauit, nullã de primo casu faciẽs mẽtionẽ, nullãq; cõditionẽ adijciens, quę tertiũ, ac impossibilẽ à Problemate casũ excludat.

Lemma

Lemma tertium, ſeu Sumptio tertia.

Theorema.

Propoſitio.

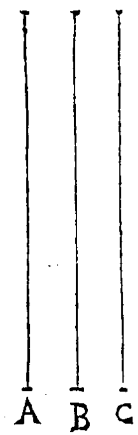
SI tres quantitates ſint continuè proportionales, fuerintq; duæ earum extremæ æquales: media quoq; ipſis æqualis erit. Quòd ſi extremæ inæquales fuerint, media erit maiori quidem minor, minori verò maior.

Expoſitio.

Sint tres quantitates continuè proportionales ABC, ſicut A ad B, ſic B ad C: Dico quòd ſi

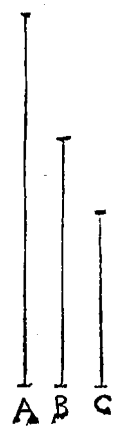
Determinatio.

A, & C æquales fuerint, B quoque vtrique earum æqualis erit: ſi autẽ A, & C inæquales fuerint, verbi gratia quòd A ſit maior quàm C; ipſa quoque B ipſis A, & C inæqualis erit; nempe minor quidem quàm A, maior verò quàm C. Sint itaque primùm A, & C æquales adinuicem.



Demonſtratio primæ partis.

Si igitur B etiam non eſt ipſis æqualis, ſed inæqualis (aut enim æqualis, aut inæqualis) ſit cauſa exempli B maior quàm A, hoc eſt A minor quàm B. erit ergo & B minor quàm C. eadem enim eſt ratio A ad B, quæ B ad C ex ſuppoſitione. igitur A quàm C multò minor erit. quod vtique ſuppoſitioni oppugnat, cùm æquales eſſe iam ſuppoſitæ ſint. Similiter ſi B fuerit minor quàm A, hoc eſt A maior quàm B: erit etiam A multò maior quàm C, quod etiam eſt ſuppoſitioni contrarium. Quare cùm B neq; maior, neque minor ſit quàm A: neceſſariò ipſi æqualis eſt. Cùm autem æqualis ei ſit, etiam ipſi C per primam Com. Sent. primi lib. Elementorũ



Concluſio primæ partis.

Euclidis erit æqualis. Vtrique igitur æqualis eſt. quod eſt primum propoſitionis membrum. Sint ſecundò A, & C inæquales, ſitque gratia exem-

Demonſtratio ſecundæ partis.

pli A maior quàm C. ſi itaque B non fuerit minor quàm A, erit aut ipſi æqualis, aut maior

quàm

quàm ipſa. Sit primùm æqualis. erit igitur ipſi quoque C æqualis, quoniam vt A ad B, ſic B ad C ſupponitur. vnde per eandem primam Com. Sent. A etiam ipſi C æqualis erit, quod eſt contra ſuppoſitionem. Non eſt igitur B æqualis ipſi A. Sit modò maior quàm ipſa, hoc eſt A minor quàm B. ergo & B minor erit quàm C. multò minor igitur erit A quàm C, cuius contrarium ſupponebatur. quare neque etiam maior eſt B quàm A. Cùm itaque B neque maior quàm A ſit, neque ipſi æqualis: neceſſariò minor quàm ipſa eſt, ideſt A maior quàm B. vnde etiam B maior erit quàm C. quod eſt ſecundũ propoſitionis membrũ.

Cõcluſio ſecũdæ partis.

Similiter ſi ſupponatur C eſſe maiorẽ quàm A, oſtẽdetur B eſſe minorẽ quàm C, & maiorẽ quàm A. Perſpicua igitur eſt vtraq; Theorematis pars.

Concluſio totius.

Si ergo tres quantitates ſint continuè proportionales, & reliqua vt in propoſitione. Quod demõſtraſſe oportuit.

Propoſitis iam, atque demonſtratis tribus Lemmatibus, quibus ſequens tertium Elementum egebat: modò conſequens eſt, vt ad ipſum Elementum nos conferamus. Verùm ſi qua eſt Apollonij Propoſitio, quæ correctione, inſtaurationeque indigeat, ſequens quinquageſimatertia potiſſimùm vna mihi eſſe videtur. quandoquidem nonnullis in locis cùm mendoſè legitur, tum propter maximam Apollonij breuitatem obſcuriſſima, ac mutila eſt, tum etiam duas maximas in ſe falſitates continet. Eam igitur qualem pro viribus correxi, atque inſtauraui, talem nunc in medium affero. De ipſius verò mendis, defectibus, ac falſitatibus in ſequẽtis Elementi fine breuiori, quo ad fieri poterit, ſermone aliquid dicam.

Vide in fine ſequẽtis Elementi conici digreſſionem contra Apollonium.

Elementum Conicum tertium, Propoſitio 53 primi libri Conicorum Apollonij.

Propoſitio.

DVABVS datis rectis lineis terminatis ad rectos angulos inuicem iunctis, alteraq; producta in eaſdem partes, vbi eſt rectus angulus: inuenire in producta Coni Sectionem nuncupatam Hyperbolem in eodem plano cum datis lineis iacentem, ita vt producta quidem linea dimetiens ſit Sectionis, Summitas verò Sectionis

P ſit

ſit punctum ad angulum exiſtens, quæ autem ducitur, ordinatim à ſectione ad dimetientem angulum faciens æqualem cuilibet angulo rectilineo dato, poſſit rectangulum inhærens reliquę lineę, & latitudinem habens rectam lineam in dimetiente receptam ab ordinatè ducta vſque ad Sectionis ſummitatem; & excedens parallelogrammo rectangulo ſimili, ſimiliterque iacente ei rectangulo, quod à lineis à principio datis comprehenditur.

Expoſitio.

Sint duæ datæ rectæ lineæ ad rectos angulos inuicem iunctæ AB, & BC, & producatur per ſecundam petitionem primi libri Elementorum Euclidis AB ad D interminatè:

Determinatio.

oportet inuenire in plano tranſienti per ipſas AB, BC Hyperbolem, cuius dimetiens quidem ſit ABD, Summitas verò B, ductæ autem ordinatim à Sectione ad BD facientes angulum æqualem cuilibet angulo dato rectilineo, poſſint rectangula inhærentia ipſi BC, & latitudines habentia rectas in AD dimetiente receptas ab ipſis ordinatè ductis vſque ad B Summitatem; & excedentia parallelogrammo rectangulo ſimili, ſimiliterque iacente ei rectangulo, quod à lineis AB, BC continetur.

Diuiſio caſuū Problematis.

Quoniam autem datus angulus, cui æqualem ordinatè ductæ facere debent aut rectus, aut non rectus eſſe poteſt:

Primus caſus.

ſit priùs rectus.

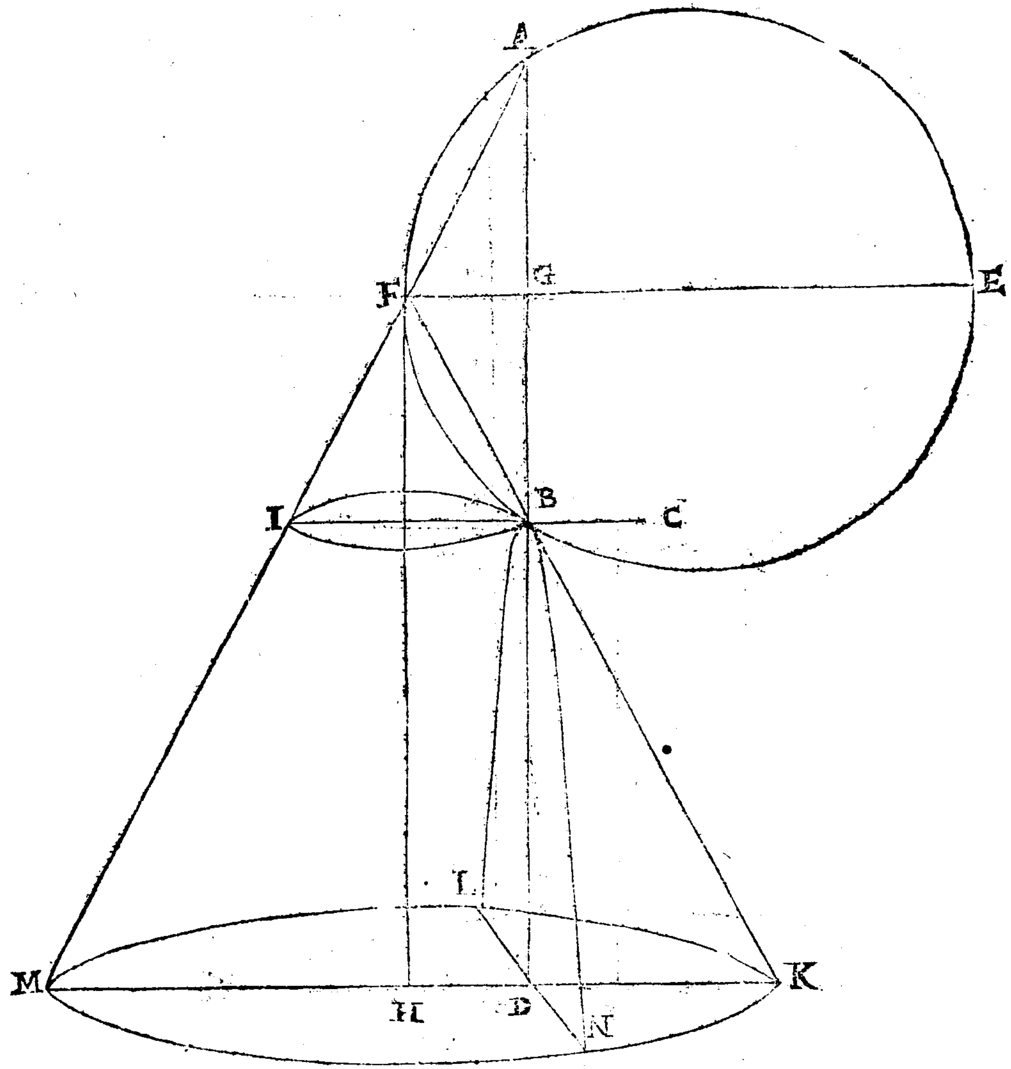
Conſtructio primi caſus.

& exurgat ex AB recta linea planum erectum ad ſubiectum, ſeu propoſitum ipſarum AD, BC linearum planum; in quo quidem erecto plano circa lineam AB per primum huius Elementi Lemma circulus deſcribatur tranſiens per AB ſigna, qui ſit AEBF, cuius vna dimetiens à data recta AB ſic ſecetur, vt pars ipſius dimetiētis in AEB altero circuli ſegmento reſecta ad partem eiuſdem dimetientis in AFB reliquo circuli ſegmento reſectam nō habeat maiorem rationem ea ratione, quam habet linea AB ad BC lineam, ſed vel eandem, vel minorem. aut enim eādem, aut minorem, aut maiorem habebit.

Primi caſus ſubdiuiſio in duo mēbra.

ſit igitur EGF dimetiens illa, cuius pars EG ad partem GF non habet maiorem rationem ea, quam habet AB ad BC, quæ quidem circuli dimetiens (vt ex Conſtructione iam dicti primi Lemmatis manifeſtum eſt) ſecabit lineam AB per medium, & ad rectos angulos

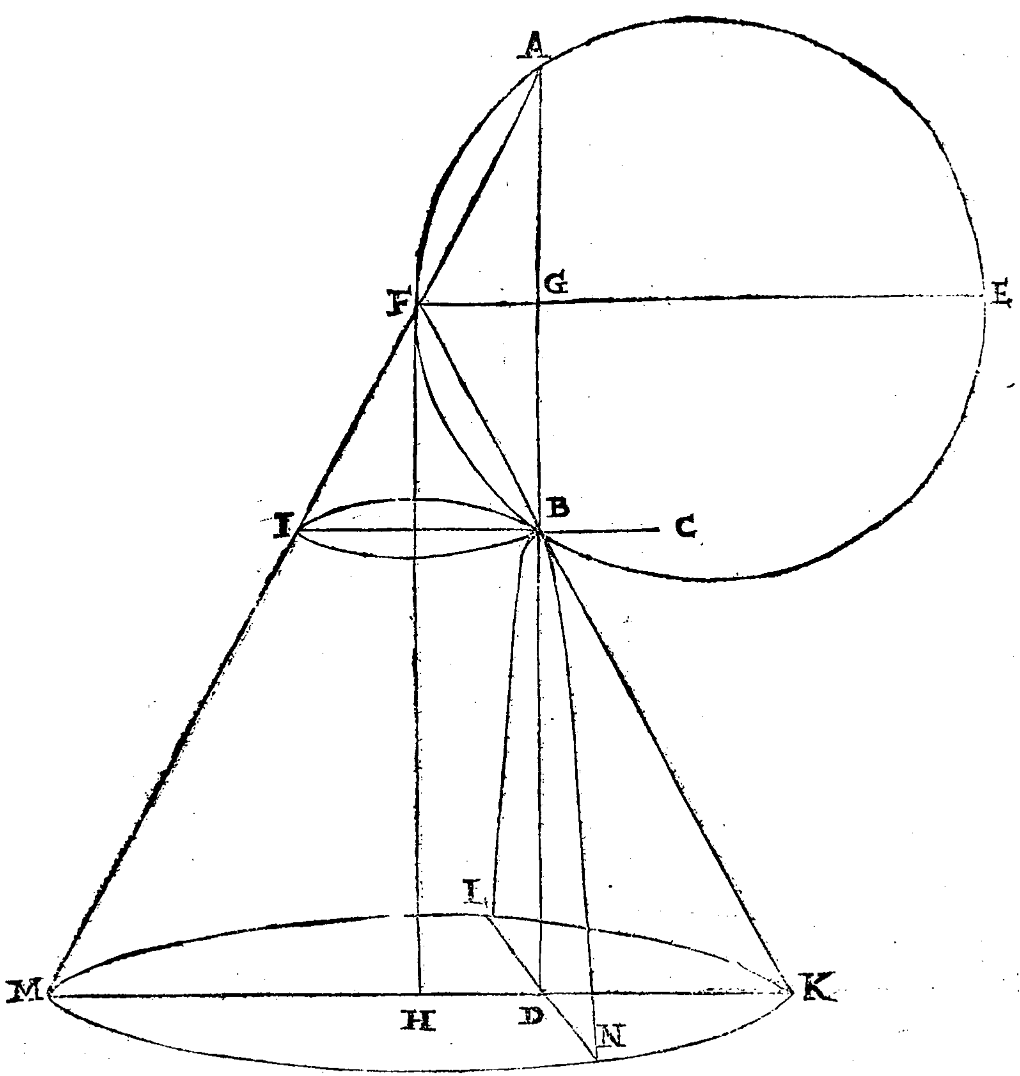
in



in G ſigno. ſi itaque primùm EG ad GF rationem habet eandem, quam AB ad BC, ducatur per punctum F linea FH interminata ex parte H, & ipſi AD parallela per 31 prop. primi lib. Element. Eucl. ducaturque per primam pet. eiuſdem lineæ AF, & FB, & per ſignum B per eandem 31 ducatur BI parallela ipſi FG, & per ſecundam pet. eiuſdem producatur AF quouſq; ſecet ipſam BI in ſigno I. ſecabit enim eam neceſſariò per quin-

Primi mēbri primi caſus conſtructio, quod mēbrū non declarauit Apollonius, ſed vni co verbo tetigit.

P 2 tam

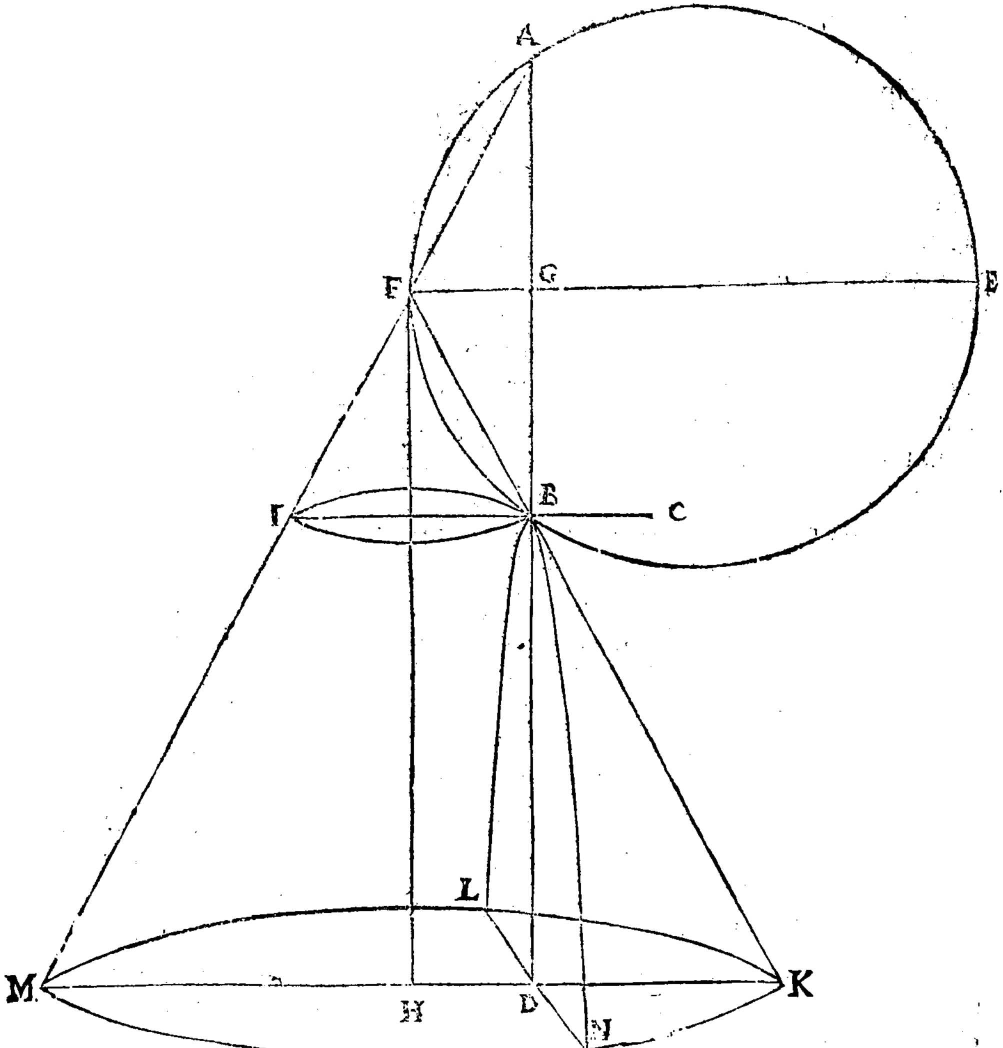


tam petitionem primi lib. Elementorum Euclid. quoniam anguli ABI, IAB sunt duobus rectis minores per Constructionem, & 29, & 32 propositionem eiusdem. Quoniam itaq; anguli AFE, EFB per Constructionem, & quartam petitionem, & quartam propositionem eiusdem primi lib. Elem. æquales sunt: quorum ipse quidem AFE ipsi FIB, ipse verò EFB ipsi FBI per primam, & secundã partem vicesimęnonę prop. primi lib. eorundem Elem.

æqualis

æqualis est: ergo per primam Com. Sent. eiusdem bis sumptam anguli quoque FBI, & FIB inuicem æquales sunt. vnde per sextam prop. eiusdem primi lib. linea FB lineæ FI æqualis est. Intelligatur igitur Conus, cuius Summitas signum F, Basis autem circulus, qui sit circa BI dimetientem, erectus existens ad FBI triangulum. erit ergo Conus Rectus ipse FBI per duodecimam definitionem huius. Cùm enim FI ipsi FB æqualis sit, & angulus FIB angulo FBI: erit axis coni FIB perpendicularis dimetienti IB per Constructionem, & primam, & tertiam partem 29 propositionis, & quartam petitionem, & 26, & quartam propositionem primi lib. Elemen. Eucl. & septimam Definitionem huius: cùm autem IB dimetiens sit communis sectio sui circuli, & trianguli BFI, erit per quartam Definitionem vndecimi lib. Elem. Eucl. idem axis perpendicularis plano basis IB. producatur itaque FB, & FI per secundam petitionem primi lib. Elem. Eucl. quantumlibet in partes IB, & intelligatur cum eis produci Conus FIB interminatè, quippequi productus secetur plano, quod transeat per puncta DH, parallelumque sit ipsi BI circulo: erit igitur sectio circulus per quartam propotionem pribi libri Conicorum Apollonij, seu per quartam petitionem huius, qui sit KLMN, cuius dimetiens per decimamnonam Definitionem huius est ipsa KM communis sectio trianguli FKM, & circuli KLMN: communis autem sectio huius circuli, & subiecti, siue propositi plani est per tertiam propositionem vndecimi lib. Elemen. Eucl. recta linea LN, quippequę erit vtrique ipsarum MK, & BD ad angulos rectos. Cùm enim per Constructionem circulus BI ad triangulum FKM erectus sit, circulus autem KLMN ipsi parallelus: erit etiam ipse KLMN circulus ad idem FKM triangulum erectus. nam si duo plana parallela fuerint, ad quodcunque planum alterum eorum erectum est, ad idem reliquum etiam erectum erit. quod facilè construi, probarique potest per 11, & 16, & 8, & 18 propositionem vndecimi libri Elementorum Euclid. Est autem per Constructionem & subiectum, idest propositum planũ erectum ad idem triangulum. igitur recta linea LN ad eiusdem trianguli planum erecta est per decimamnonam prop. eiusdem vndecimi. quare per tertiam definitionem eiusdem ad omnes etiam tangentes ipsam rectas lineas, & existentes in eodem plano rectos facit angulos. His ita constructis, dico factũ esse quod quęritur; demõstratio autẽ est huiusmodi. Determin. primi membri primi casus.

Quoniam



Demonstratio primi membri primi casus.

Quoniam Conus, cuius Basis circulus KLMN, & Summitas F, sectus est plano per axim faciente per tertiam petitionem huius triangulum FKM; sectus est autem & altero plano, scilicet subiecto, vel proposito secanti basim coni per rectam lineam LN ad rectos angulos existentem ipsi KM basi trianguli per axem; communis autem sectio subiecti plani, & plani FMK, seu per 22 definitionem huius conicæ LBN Sectionis dimetiens, ipsa scilicet DB recta

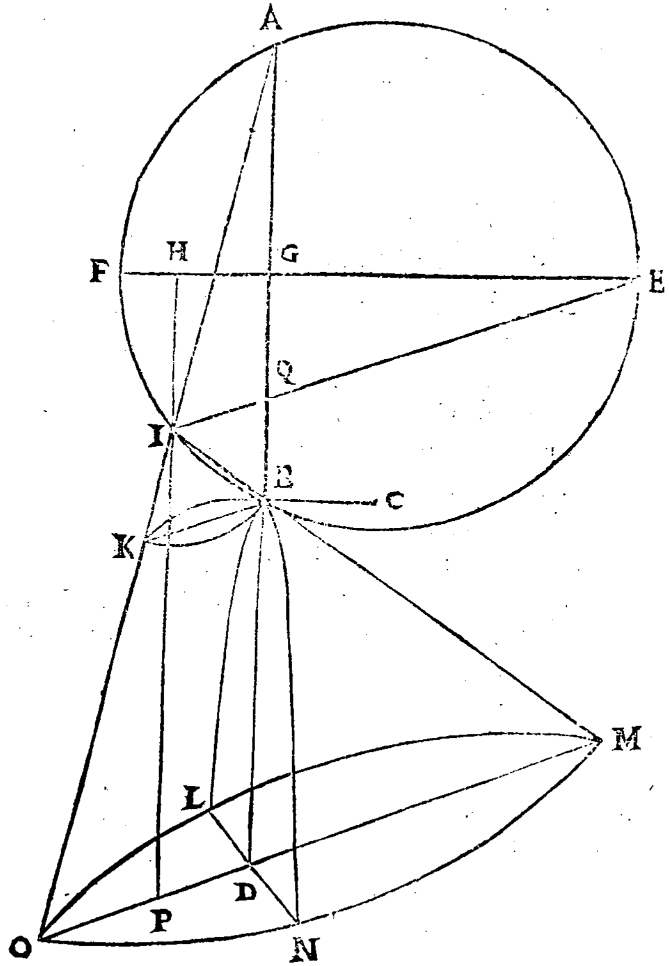
recta linea producta in partem B coincidit per Constructionem ipsi MF lateri trianguli MFK ad A signum: erit Hyperbole ipsa LBN conica Sectio per superiùs demonstratum primum conicum Elementum. cuius Summitas quidem est punctum B per 23 definitionem huius, dimetiens verò BD, ad quam ordinatè ductę rectum angulm efficiunt per 25 Definitionem huius, & ipsi LDN per secundam partem 28 propositionis primi lib. Elem. Eucl. parallelæ sunt: & poterunt rectangula inhærentia cuidam rectæ lineæ, ad quam eam habet rationem linea AB, quam quadratum lineæ FH parallelæ dimetienti BD ad rectangulum à KH, HM; & latitudines habentia rectas lineas in dimetiente BD receptas ab ipsis ordinatè ductis vsque ad Hyperbolis Summitatem; & excedentia rectangulo simili, & similiter iacente ei rectangulo, quod continetur à recta AB linea, & recta illa, cui inhærent dicta rectangula, seu ad quam possunt ordinatim ductæ, vel Rectum formæ Latus. Quòd autem talis linea, ad quam possunt ordinatim ductæ, sit ipsa BC, sic breuissimè liquebit. Quoniam vt AB ad BC, sic EG ad GF per Constructionem, vt autem EG ad GF, ita quod continetur ab EG, GF ad id, quod fit ab FG per primam prop. sexti lib. Ele. Eucl. vel per Lemma 22. prop. decimi libri eorundem Elemen. erit vt AB ad BC, sic quod ab EG, GF ad id quod ab FG per vndecimam propositionem quinti lib. erundem Elemen. æquale autem est quod ab EG, GF ei, quod ab AG, GB per 35 prop. tertij lib. eorundem Elem. ergo per septimam, & vndecimam propositionem eiusdem quinti, vt AB ad BC, sic quod ab AG, GB ad id, quod ab FG. verùm quod ab AG, GB ad id, quod ab FG per 23 propositionem sexti lib. eorundem Elemen. Euclidis rationem habet compositam ex rationibus ipsius AG ad GF, & ipsius BG ad GF: igitur & AB ad BC eandem compositam habet rationem per eandem vndecimam quinti lib. Elem. Sed vt quidem AG ad GF, sic FH ad HM per 29, & 32 primi, & 4 prop. sexti lib. eorundem Elem. vt verò BG ad GF, sic FH ad HK per eãdem 29, & 34 primi, & quartam prop. sexti lib. eorundẽ Ele. igitur per vndecimã prop. eiusdẽ quinti, & primã Com. Sent. huius AB ad BC rationem habet compositam ex ea, quam habet FH ad HM, & FH ad HK, idest eam, quam habet quod fit ab FH ad id, quod ab HM, HK continetur per eandem vicesimamtertiam sexti, & vndecimã quinti lib. Quoniam autem FH per Constructionem

Cōclusio primi membri primi casus.

struɛtionem parallela est ipsi AD, erit per superiùs demonstratum primum Conicum Elementum, & eius definitiones AB quidem Transuersum, BC autem Rectum formæ Latus. Quare factum est id quod quærebatur. Si autem EG ad GF non habuerit

Secundi mēbri primi casus constructio.

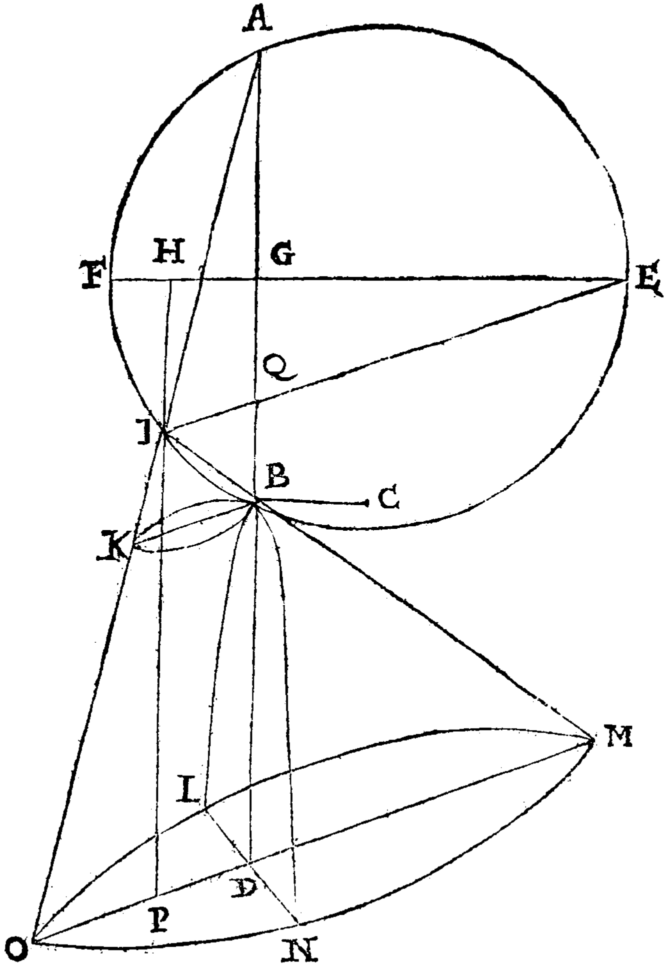
eandē rationem, quā habet AB ad BC, sed minorē: fiat per 12 prop. sexti lib. Element. Eucl. vt AB ad BC, sic EG ad quādam aliam quartam lineam, ad quā vtiq; per suppositionē, & tertiamdecimā propositionem quinti lib. eorundē Elem. habebit EG maiorem rationem quàm ipsamet EG ad GF. vnde per secūdam partem decimę propositionis eiusdem quinti lib. Elemen. ipsa quarta linea erit minor quàm FG. quare per tertiam prop. primi lib. Elem. Eucl. abscindatur ab FG maiore ipsi quartæ minori æqualis, quæ sit GH. erit igitur per secundam partem septimæ propositionis, & vndecimam quinti lib. eorundem Elem. sicut AB ad BC, sic EG ad GH.



quo facto per signum H ducatur per tricesimamprimam propositionem primi lib. Elementorum Euclid. HI parallela ipsi AB, & per primam petitionem eiusdem ducantur rectę lineæ AI, IE, IB. & per B signum ducatur per eandem tricesimamprimam primi BK parallela ipsi IE. & per secundam petitionem eiusdem producatur AI donec secet ipsam BK in signo K. secabit enim eam cùm secet ipsi parallelam IE, alioqui neque etiam ipsam secaret per vltimam definitionem, & tricesimam propositionem eiusdem primi. Quoniam igitur per Constructionem primi Lemmatis huius Elementi, & quartam petitionem primi lib. Elementorum Euclid. anguli AGE, BGE inuicem æquales sunt: necnon linea AG lineæ GB æqualis, & GE communis: erit per quartam propositionem primi, & 28 prop. tertij libri eorundem Elemen. circunferentia AE æqualis circunferentię BE. Quapropter æqualis est angulus AIE angulo EIB per vicesimamseptimam propositionem eiusdem tertij. sed angulus AIE est æqualis angulo AKB per secundam partem vicesimænonæ primi lib. eorundem Elemen. & angulus EIB angulo KBI per primam partem eiusdem: igitur & angulus KBI angulo IKB æqualis est per primam Com. Sent. eiusdem primi lib. Element. bis sumptam. ergo linea quoque BI æqualis est lineæ IK per sextam propositionem eiusdem. modò intelligatur Conus, cuius Summitas punctum I, Basis autem circulus, qui est circa dimetientem BK, erectus existens ad BIK triangulum. Erit igitur Conus iste Rectus rationibus superiùs dictis, quandoquidem æqualis est IB ipsi IK. Producantur itaque per secundam petitionem primi lib. Elemen. Eucl. lineæ BI, IK, IH in partes IBK; & vnà cum eis intelligatur totus protrahi Conus BIK, qui quantumlibet protractus secetur plano, quod transeat per D signum, & parallelum sit ipsi BK circulo. erit igitur sectio circulus per quartam petitionem huius, vel per quartam propositionem primi lib. Conicorum Apollonij. Sit ipse LMNO, cuius dimetiens per 19 definitionem huius est ipsa MO communis sectio trianguli IMO, & circuli LMNO. Communis autem sectio huiusce circuli, & subiecti plani est LDN recta linea per tertiam propositionem vndecimi libri eorundem Element. quæ rationibus superiùs dictis vtrique linearum OM, & DB ad rectos est angulos. His hoc modo constructis, dico quòd quæsitum factum est. Cùm enim Conus, cuius

In hoc Apollonius errorem cōmisit.

Determin.



Demonstratio secundi membri primi casus.

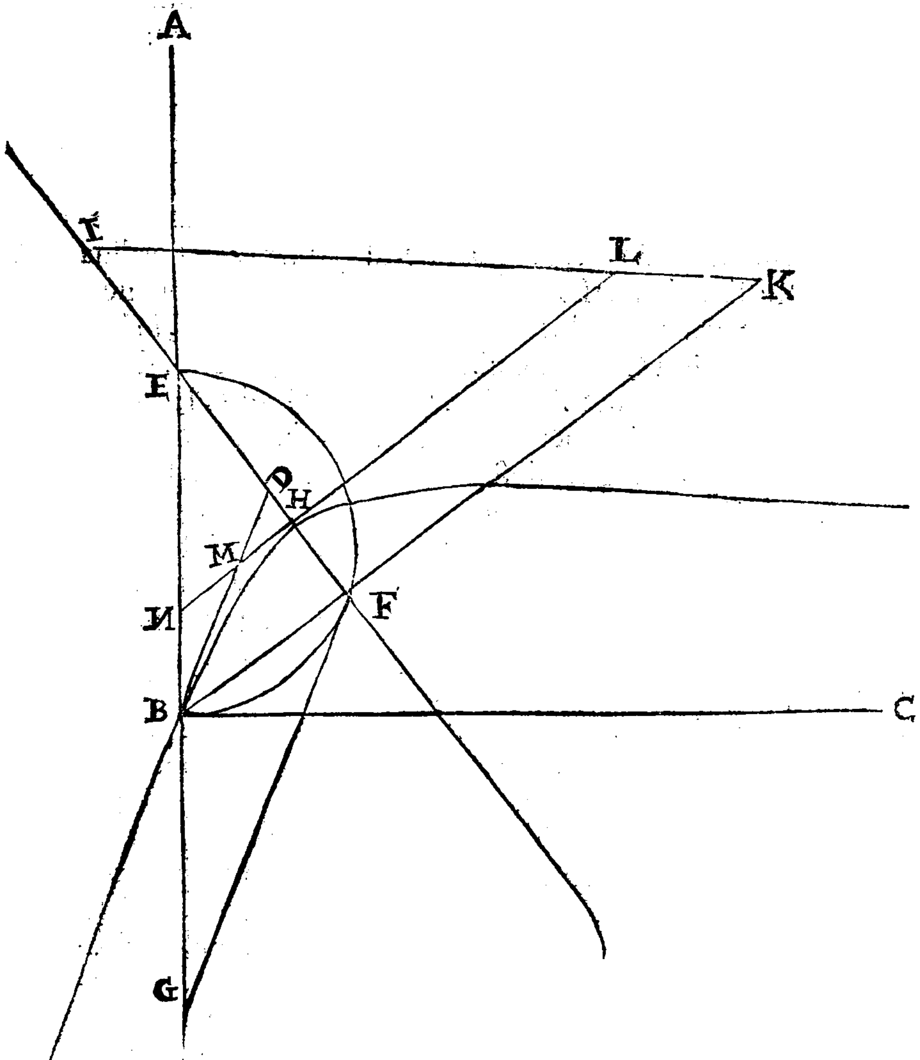
Basis quidem est circulus L M N O, Summitas verò punctum I, sectus sit plano per axim faciente triangulũ I O M; sectus autem sit & altero plano, nempe subiecto secanti basim coni per rectam L D N lineam iacentem ad rectos angulos ipsi M D O basi trianguli per axem; communis autem sectio subiecti plani, & plani M I O, idest per vigesimamsecundam definitionem huius, ipsius L B N conicæ sectionis dimetiens, ipsa scilicet D B producta ad partes B, coincidit ipsi O I lateri trianguli O I M ad signum A: erit Hyperbole ipsa L B N conica Sectio per ante demonstratum primum Elementum conicum; cuius Summitas quidem est punctum

ctum B per vigesimamtertiam definitionem huius: dimetiens verò B D, ad quam ordinatè ductæ faciunt rectum angulum per vigesimamquintam definitionem huius, & ipsi L D N per secundam partem vigesimæoctauæ propositionis primi lib. Elem. Eucl. parallelæ sunt: & poterunt rectangula inhærentia cuidam rectæ lineæ, ad quam habet eam rationem recta linea A B, quam habet quadratum lineæ I P parallelæ dimetienti B D ad rectangulum contentum ab M P, P O; & latitudines habentia rectas lineas in dimetiente B D receptas ab ipsis ordinatè ductis vsque ad B Hyperbolis Summitatem; & excedentia rectangulo simile, similiterq; iacente ei rectangulo, quod comprehenditur à recta A B linea, & illa recta, cui inhærent iam dicta rectangula, siue ad quam possunt ordinatè ductæ, seu Rectum formæ Latus. Quòd autem huiusmodi linea, ad quam possunt ordinatim ductę, nulla sit alia nisi ipsa B C, in hoc quoque secundo primi Casus membro sic manifestum erit. Quoniam per Constructionem, vt A B ad B C, ita E G ad G H; vt autem E G ad G H, sic etiam per primam partem secundæ prop. sexti lib. Elem. Eucl. E Q ad Q I, idest quod continetur ab E Q, Q I ad id, quod fit à Q I per primã prop. eiusdem sexti lib. vel per Lemma 22 prop. decimi lib. eorundem Elem. erit vt A B ad B C, ita quod ab E Q, Q I ad id, quod à Q I per vndecimam prop. quinti lib. eorundem bis sumptam. æquale autem est per 35 prop. tertij lib. eorundem Elem. quod ab E Q, Q I ei, quod ab A Q, Q B: vt igitur A B ad B C, sic quod ab A Q, Q B ad id, quod à Q I per septimam, & vndecimam prop. quinti lib. eorundem Elem. Verùm quod ab A Q, Q B ad id, quod à Q I rationem habet compositam ex ratione ipsius A Q ad Q I, & ipsius B Q ad Q I per 23 prop. sexti lib. eorundem Elem. vt autem A Q ad Q I, sic I P ad P O per secundam partem 29, & tricesimæsecundæ proposi. primi, & quartam proposit. sexti lib. eorundem vt verò B Q ad Q I, sic I P ad P M per primam partem eiusdem 29, & tricesimamquartam, & tricesimamsecundam eiusdem primi, & eandem quartam sexti: igitur per vndecimam propositionem eiusdem quinti Elementorum bis, & primam Com. Sent. huius semel sumptam A B ad B C eam habet rationem, quæ componitur ex ratione, quam habet I P ad P M, & ea, quam habet I P ad P O; idest eam, quam habet quod fit ab ipsa I P quadratum ad rectangulum, quod ab ipsis M P, P O continetur per 23 prop. sexti, & 11 quinti

Q 2 lib.

Cōcluſio ſecundi membri primi caſus.

lib. eorundē Elem. Eſt autē per Conſtructionē I P parallela ipſi AD. Tranſuerſū igitur formę Latus eſt A B, Rectū verò B C per ſuperiùs demōſtratū primū *E*lem. conicū, eiuſq́; definitiones. Patet itaq; ī hoc quoq; ſecūdo primi Caſus mēbro factū eſſe qđ q̄ritur.



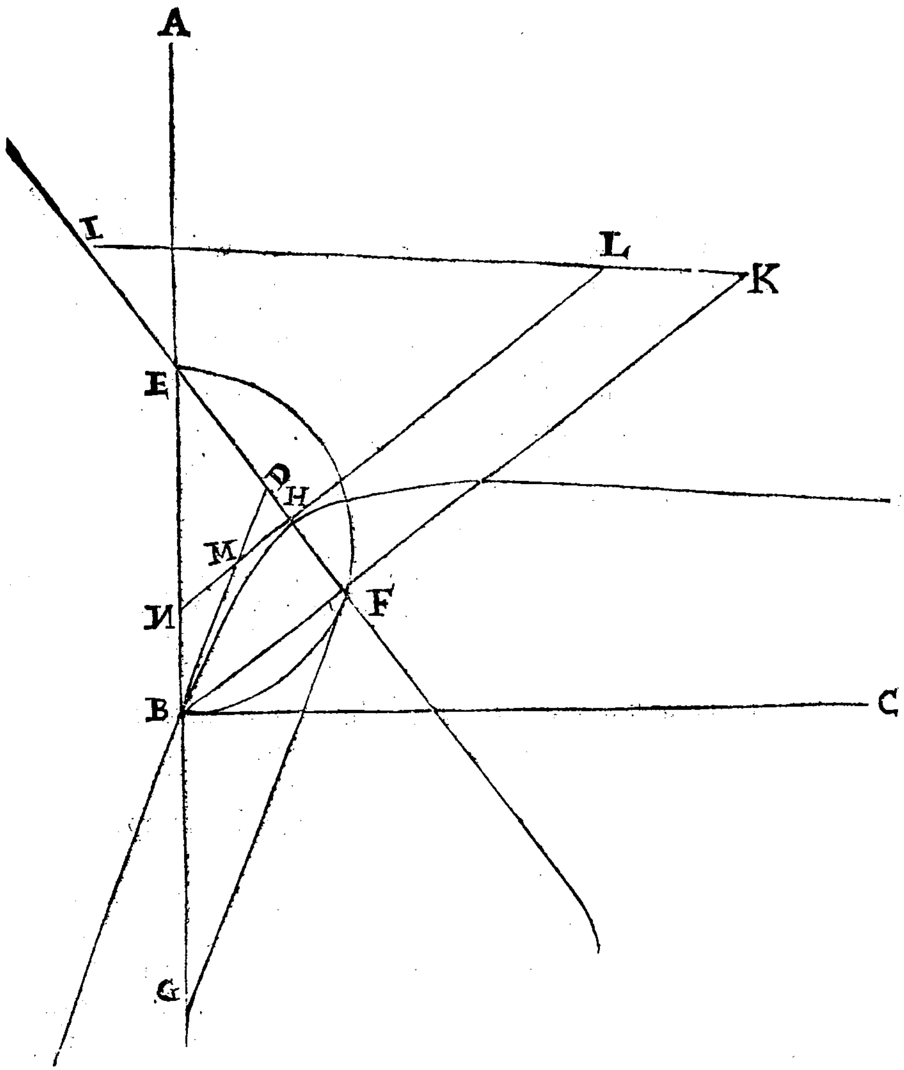
Secundus caſus.
Expoſitio.
Determinatio.

Non ſit autem datus angulus rectus, & ſint datæ rectæ lineę terminatæ A B, & B C ad rectos angulos iunctę: datus autem angulus ſit æqualis angulo A B D. Oportet igitur deſcribere Hyperbolem, cuius dimetiens quidem ſit A B, Rectum verò latus B C, du-

Cōſtructio.

B C, ductæ autem ordinatim ad dimetientem faciant angulum æqualem angulo A B D. Secetur itaque per decimam propoſitionem primi lib. Elementorum Euclid. A B per medium ad ſignum *E*, & ſuper B E linea deſcribatur per tertiam petitionem eiuſdem ſemicirculus B F E, & per ante demōſtratum ſecundum huius Elementi Lemma ducatur F G à conuexa ſemicirculi circunferentia ad *E* B dimetientem extra ſemicirculum productam parallela ipſi B D, faciensq́ue rationem eius, quod fit ab *E* G ad id, quod ab *E* G, G B continetur eandem rationi B C ad duplam ipſius B *E*, hoc eſt ad B A: quam quidem rationem ipſius B C ad B A oportet in hoc ſecundo Caſu non eſſe maioris inæqualitatis. quo facto coniungatur per primam petitionem primi libri *E*lement. Euclid. F D E recta linea, quæ producatur per ſecundam petitio. eiuſdem ad vtramque partem interminatè. deinde per 13 propoſitionem ſexti libri eorundem inter ipſas F *E*, *E* D media proportionalis inueniatur *E H*, cuius extremum *H* neceſſariò cadet inter ſigna D F per præcedens tertium huius Elementi Lemma ſubinde ponatur per 3. propoſitionem primi libri eorundem Elemento. *E* I, ęqualis ipſi *E H*. ducaturq́; per primam petitionem eiuſdem BF, quę per ſecundam petitionem eiuſdem producatur in partem F interminatè faciens angulos ad ſignum F rectos per triceſimamprimam tertij, & tertiamdecimam propoſitionem primi lib. Elemen. Euclidis. poſthęc fiat per 44 propoſitionem eiuſdem bis ſumptam ei, quod fit ab F B quadrato æquale rectangulum contentum ab *H* F, F K. poſtea coniungantur per primam petition. eiuſdem I K. & per *H* ducatur per vndecimam propoſitionem eiuſdem ipſi I F ad rectos angulos H L, quę per Cōſtructionem, & tertiādecimam & triceſimamſecundam propoſitionem, & quintam petitionem primi libri Elementorum Euclid. ſecabit ipſam I K in puncto L: producatur autem per ſecundam petitionem eiuſdem ex altera parte quouſque ſecet etiam ipſam B D in puncto M, & ipſam A B in puncto N. ſecabit enim eas quoque neceſſariò, ſin minus, neque etiam B K ipſi L N per Conſtructionem, & viceſimam octauam prop. primi lib. eorundem *E*lem. parallela ipſas ſecaret per vltimam definitionem, & triceſimam propoſitionem eiuſdem primi, quod eſſet contra Conſtructionem. Poſt hoc duabus datis rectis lineis terminatis ad rectos angulos inuicem iunctis I H, H L, deſcribatur vt ſuperiùs in primo Caſu Hyperbole, cujus dimetiens quidem ſit

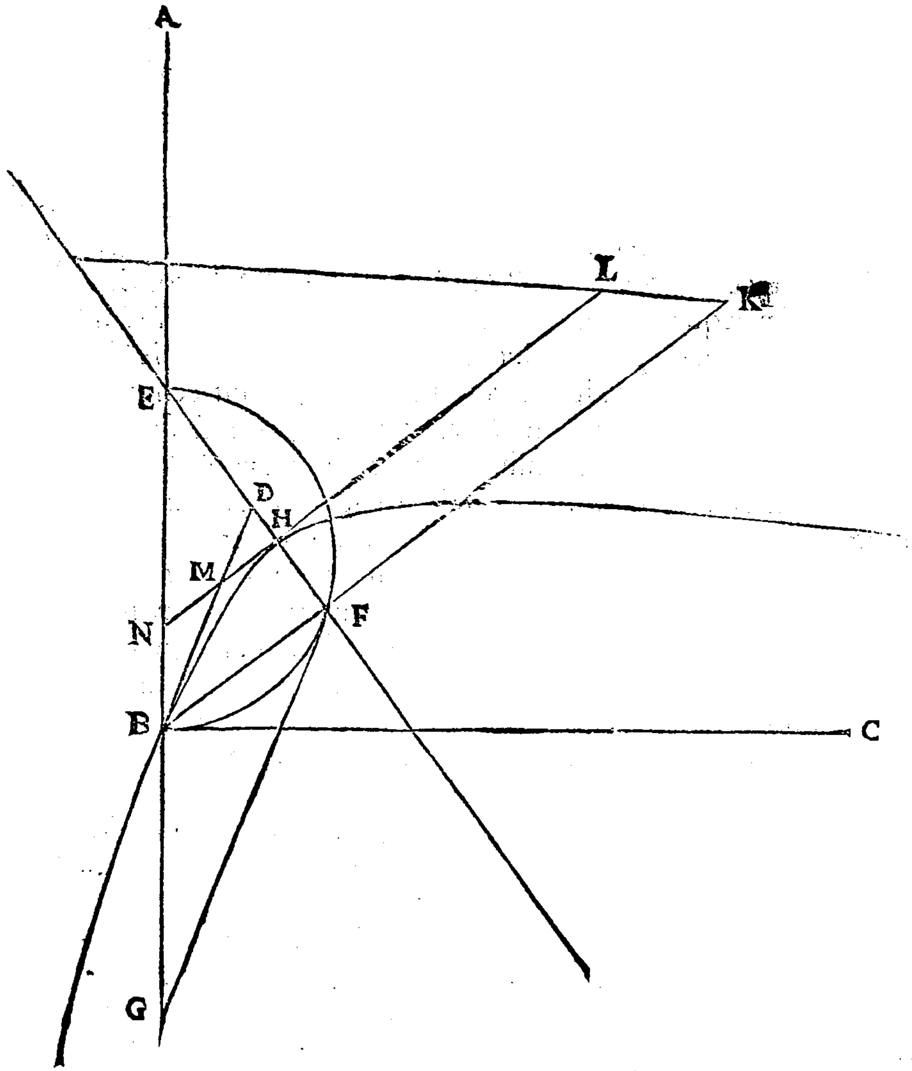
In hoc errauit Apollonius.



fit IF, Tranſuerſum autem Latus IH, Rectum verò HL, ductę autem ordinatim à Sectione ad dimetientem rectum angulum efficientes poſſint rectangula inhærentia lineæ *HL*, & latitudines habentia lineas in dimetiente receptas ab ipſis ordinatè ductis vſque ad H Summitatem Sectionis; & excedentia forma ſimili ei formę, quæ ab IH, HL continetur. Tranſibit itaque ſectio hæc Hyperbole per ſignum B per primum *E*lementum conicum ſupra demõſtratum, æquale enim eſt ex Conſtructione quod fit à BF ei, quod
ab

ab HF, FK comprehenditur: & linea BD Sectionem continget per Conuerſam primæ partis trigeſimæſeptimæ propoſitionis primi libri Conicorum Apollonij (demonſtrat enim Apollonius ibi quòd ſi Hyperbolem recta linea contingens cum dimetiente conueniat,& à contactu ad dimetientem linea ordinatim ducatur: recta linea, quæ in ipſa dimetiente interijcitur inter ordinatè ductam, & centrum ſectionis vnà cũ interiecta inter contingentem,& idem ſectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineę, quæ vocatur ex centro Sectionis.) quod enim ab F *E*, *E* D continetur rectangulum æquale eſt ei, quod ab *E* H fit quadrato per Conſtructionem, & primam partem decimæſeptimæ propoſitionis ſexti libri *E*lementorum *E*ucl. ipſum autem *E* ſignum eſt centrum Hyperbolis per Conſtructionem, & viceſimamſextam definitionem huius, & definitionem Tranſuerſi Lateris: ipſa verò *E*H eſt ea, quæ vocatur ex centro Sectionis, vt in 26 definitione huius declarauimus. Quare AB dimetiens eſt Sectionis per 47 primi lib. Conicorum Apollonij. ibi nanque demonſtrat Apollonius quòd ſi Hyperbolem recta linea contingens, cum dimetiente conueniat: per tactum, & centrum ducta recta linea ad eaſdem partes, in quibus eſt Sectio, rectas lineas in Sectione ductas contingenti parallelas per medium ſecabit. quod equidem dimetienti proprium eſt, vt patet ex eius definitione, quam Apollonius tradidit. At quoniam eſt vt BC ad duplam B*E*, ideſt ad AB, ita quod fit ab FG ad id, quod ab *E*G, GB per Conſtructionem: BC autem ad duplam B*E* rationem habet compoſitam ex ratione BC ad duplam BD, & ex ratione duplæ BD ad duplam B*E* per primam, & vigeſimamtertiam propoſitiones ſexti, & vndęcimam quinti lib. *E*lementorum *E*uclidis: ideſt ipſius BD ad ipſam B*E* per 15 propoſitionẽ eiuſdem quinti lib. ideſt FG ad G*E* per 29 primi, & quartam ſexti, & vndecimam propoſitionem quinti lib. eorundẽ *E*lem. habebit BC ad BA rationem compoſitam ex ratione BC ad duplam ipſius BD, & ex ratione FG ad G*E* per vndecimam quinti lib, *E*lemen. & primam Com. Sent. huius bis ſumptam. quare quod etiam ab FG ad id, quod ab *E*G, GB eam habet rationem, quæ componitur ex ratione BC ad duplam BD, & ex ratione FG ad G*E* per eandem vndecimam. habet autem ipſummet, quod fit ab FG ad id, quod continetur ab *E*G, GB etiam rationem compoſitam ex ratione FG ad G*E*, & ratione FG ad GB
per

Conuerſam 37 prop. primi li. Conicorum Apollonij demõſtrat Fed. Cõmãdinus in commentario illius propoſitionis.



per 23 prop. sexti lib. Elemen. Eucl. ratio igitur composita ex ratione BC ad duplam BD, & ratione FG ad GE eadem est rationi compositæ ex ratione FG ad GE, & ex ratione FG ad GB per eandem vndecimam quinti lib. Elem. Communis demum auferatur ratio FG ad GE. remanebit igitur vt BC ad duplam BD, sic FG ad GB per tertiam Com. Sent. primi lib. Elem. Eucl. Verùm vt FG ad GB, sic MB ad BN per propositiones 29, & 32 primi, & quartam sexti lib. eorundem Elem. sicut igitur BC ad

ad duplam BD, ita MB ad BN per eandem vndecimam quinti. Quod cùm ita sit, erit BC linea, ad quam possunt ordinatim ductæ à Sectione ad dimetientem ABG per quinquagesimam propo. primi lib. Conicorum Apollonij. Nam ibi demonstrat Apollonius quòd si Hyperbolem recta linea contingens, cum dimetiente conueniat; & per tactum, & centrum linea recta producatur; à summitate verò Sectionis ordinatim ducta conueniat & cum ipsa contingente, & cum ea, quæ ducta est per centrum, & tactum; fiatque vt segmentum contingentis inter tactum, & ordinatè ductam interiectum ad segmentum lineæ ductæ per tactum, & centrum, quod itidem inter tactum, & ordinatè ductam interijcitur, ita quędam inuenta recta linea ad duplam contingentis: quæ à Sectione ducitur ad lineam per tactum, & centrum ductam ipsi contingenti parallela poterit spatium parallelogrammum rectangulum, quod inhæret inuentæ lineæ; latitudinem habens lineam interiectam inter ipsam parallelam, & contactum; excedensque forma simili, & similiter posita formę contentæ à dupla eius, quę est inter centrum, & tactum, & ab inuenta linea. Quare AB quidem est latus Transuersum, BC verò Rectum, per definitiones primi conici Elementi superiùs demonstrati. Factum est igitur in hoc etiam secundo Casu quod ab initio propositum fuerat. Duabus itaque datis rectis lineis terminatis ad rectos angulos inuicem iunctis, & reliqua vt in propositione. Quod fecisse oportuit. Animaduertendum autem est quòd licet Casus huius Problematis bifariam diuiserimus, quando scilicet angulus rectus, & quando non rectus supponebatur: nihilosecius posset etiam tres hoc Problema suscipere Casus, quandoquidem ipse non rectus angulus, aut acutus (qualem supra suscepimus) aut obtusus erit.

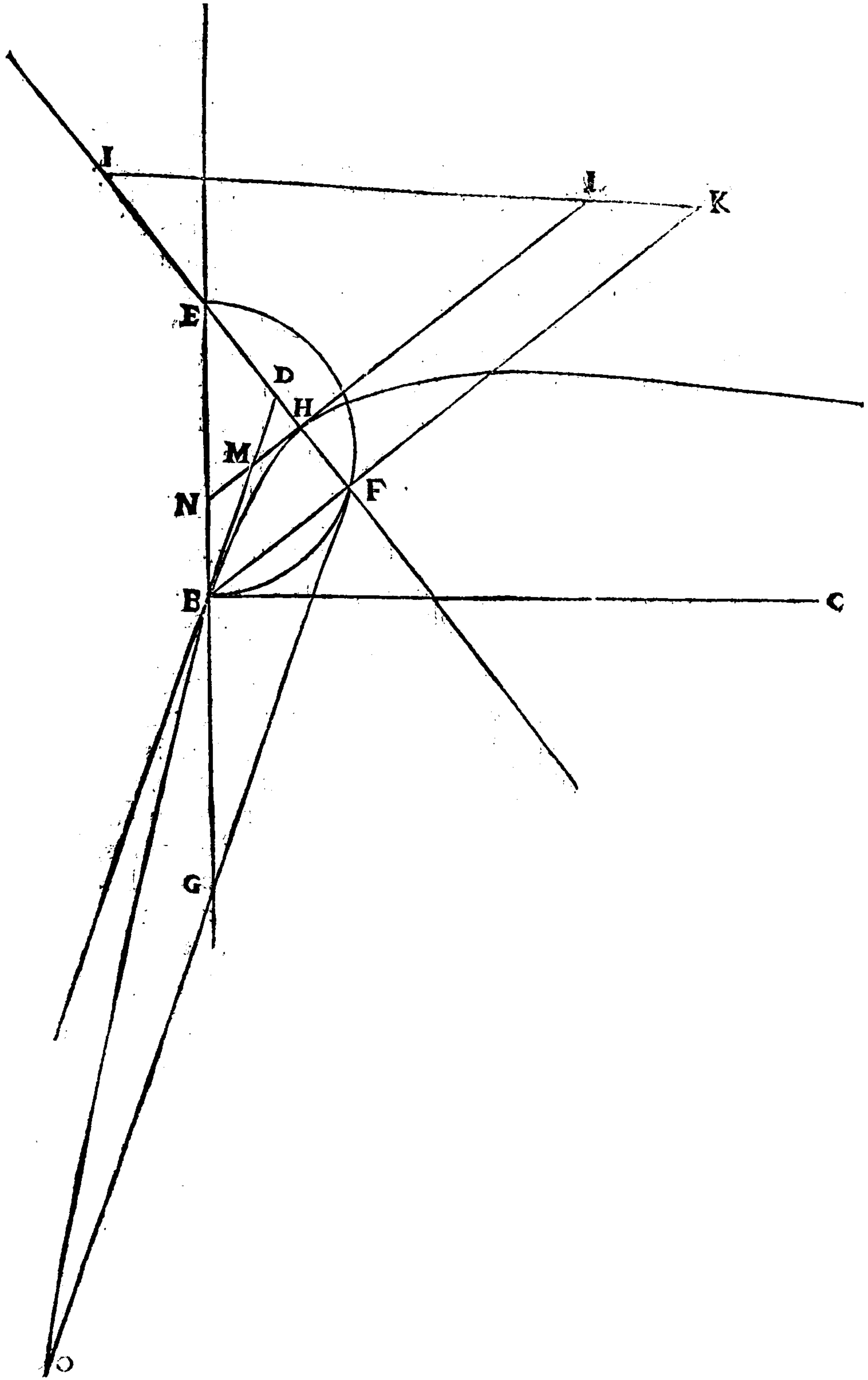
Cōclusio secundi casus.

Cōclusio totius Problematis.

Notandum.

Quoniam autem eadem est tum constructio, tum demonstratio siue acutus, siue obtusus detur angulus: non ab re duobus ex Casibus vnum Apollonius, & nos fecimus.

R Sint



Sint enim vt superiùs datæ rectæ lineę AB, BC terminatæ ad rectos angulos inuicem iunctæ, sitq; datus angulus obtusus, & opus sit facere quod in Problemate quæritur. Si igitur ad datam rectam lineam AB, datumque in ea punctum B, dato angulo obtuso per vicesimamtertiam propositionem primi lib. Elemen. Eucl. æqualis angulus rectilineus constituatur, ita vt recta linea ipsum constituens in partem B producta cadat intra rectum ABC angulum, non secus ac in superiori secundi Casus figura linea BD; fiantque reliqua vt in ipso secundo Casu, producaturq; FG in partem G donec per decimamoctauam propositionem primi lib. Conicorum Apollonij Sectioni occurrat, verbi gratia in puncto O; erit ipsa GO ordinatè ducta ad BG dimetientem, faciens angulum OGB obtusum æqualem per Constructionem, & vicesimamnonam propositionem primi lib. Elemen. Eucl. angulo dato, cæteraque sic se habebunt, vt in secundo Casu.

Digreßio contra Apollonium.

HOC ita declarato, nunc de mendis, defectibus, ac falsitatibus, quæ in præsenti Problemate apud Apollonium leguntur, sermo nobis sit. & primùm quidem loca illa, in quibus litera mendosè legitur indicabo: secundò quæ ab Apollonio prætermissa sint, dicam: tertiò quæ ab eodem falsa dicantur ostendam; duobus attamen priùs adnotatis, primò quòd characteres alphabetici figurarum Apollonij, quos in hoc sermone citabimus, non respondent characteribus nostrarum figurarum: quoniam Apollonius non seruauit ordinem alphabeticum, quem nos diligenter in nostris operibus obseruamus, vt Constructionis ordinem aperiat; secundò ꝙ Apollonius tribus tantùm literis rectangula nominat. Cùm itaq; totam primi casus Constructionem fecisset Apollonius demonstrationem ipsam aggrediens, habet hæc verba. *Quoniam igitur conus, cuius basis est circulus GH, & vertex F, secatur plano ad FGH triangulum erecto, quod facit sectionem circulum: secatur autem & altero plano subiecto, & reliqua.* quæ porrò verba (meo quidem iudicio) sic legenda, corrigendaq; sunt. *Quoniam igitur conus, cuius basis circulus GH, & vertex F, secatur plano per axem faciente triangulum*

Correctio Apollonij.

Not. primū.

Not. secūdū.

De mendis.

Primū mendum.

lum FGH: secatur autem & altero plano subiecto, &c. hæc enim debet esse vera loci illius lectio, quippequæ à duodecima propositione libri eiusdem omnino dependet. Rursus in fine demonstrationis eiusdem leguntur hæc verba. *Quare AB ad BC rationem compositam habet ex ratione FO ad OG, & ex ratione FO ad OH: hoc est ex ratione quadrati FO ad rectangulum GOH. Est igitur vt AB ad BC, ita quadratum* FO *ad GOH rectangulum. atque est* FO *parallela ipsi AD &c.* quæ nimirum verba sic esse legenda censeo. *Quare AB ad BC rationem habet compositam ex ratione FO ad OG, & ex ratione FO ad OH: hoc est rationem quadrati FO ad rectangulum GOH. atque est FO parallela ipsi AD. &c.* Nam falsum quidem est dicere quod AB ad BC rationem habet compositam ex ratione quadrati FO ad GOH rectangulum, quoniam ratio non ex vna ratione, sed ex duabus componi dicitur: illa autem verba *est igitur vt AB ad BC &c.* prorsus eo in loco superuacanea sunt. si enim litera rectè legatur, illud conclusum iam;atque dictum est.

Secundum mendum.

Tertium mẽdum.

Præterea construens secundum casum Apollonius ait *Secetur AB per medium in D, & in linea AD describatur semicirculus A*F*D, & ducatur quædam recta linea* FG *in semicirculum parallela ipsi A*H, *faciensq; rationem quadrati, &c.* quæ verba sic legantur. *Secetur AB per medium in D, & in linea AD describatur semicirculus A* F*D, & ducatur quædam recta linea* FG *à conuexa semicirculi circunferentia ad AD dimetientem extra semicirculum productam parallela ipsi AH, faciensq; rationem &c.* linea enim FG non ducitur à dimetiente in semicirculum, sed à conuexo circunferentiæ ad partem dimetientis extra semicirculum productam. quandoquidem inuento priùs in semicircunferentia puncto F, per illud FG parallela ipsi AH ducitur, vt ex Constructione secundi Lemmatis huius Elementi patet. In his igitur tribus locis apud Apolonium præsens problema (meo quidem iudicio) mendosè legitur. *E*t nil mirum quidem quòd hæc tria menda in hac Apollonij propositione reperiantur, quandoquidem multæ etiam aliæ propositiones in exemplari græco, quod apud Commandinum erat, mendosè leguntur, vt ipsemet Commandinus attestatur in Latina ipsius Apollonij versione corrigens, ac restituens multa loca, quippequæ (vt ipse ait) corrupta in græcis Codicibus erant: vt apud eum cuilibet videre licet in eiùs scholijs, quæ in Apollonium

nium

nium scripsit: videlicet in propositionibus quinquagesimasecunda libri secundi: vigesimaquarta, vicesimaquinta, tricesimasexta, quinquagesimaquinta libri tertij: necnon tricesimaoctaua, quadragesimaprima, quadragesimaquinta, & quinquagesimaquinta libri quarti: ac demum in hac eadem quinquagesimatertia libri primi, in qua preter iamdicta tria menda à nobis restituta (quæ tamen ipse nequaquam adnotauit, licet non parui momenti sint) duos alios locos corruptos legi dicit, eosque sic restituit. Nam in propositione quidem, vbi legitur *Inuenire in linea producta Coni Sectionem, quæ* Hyperbole *dicitur* ait superuacanea esse illa verba *in linea producta* quæ nihilominus necessaria mihi videntur. quia in ipsa producta linea (vt ex iam demonstratis à nobis perspicuè apparet) reuera inuenienda est Hyperbole, cuius ipsa producta recta linea dimetiens esse debet, quemadmodum ipse Apollonius mox rem meliùs declarans subiungit *ita vt producta sit dimetiens Sectionis*: In Constructione verò secundi Casus Problematis, vbi in Codice græco verba Apollonij sic leguntur *faciensq; rationem quadrati* FG *ad rectangulum DGA eandem, quam habet AC ad AD* ibi reuera legendum est, vt rectè Commandinus correxit *faciensq; rationem quadrati* FG *ad rectangulum DGA eandem, quam habet AC ad duplam ipsius AD* quemadmodum ex ijs, quæ apud ipsum Apollonium ibi sequuntur, & ex Constructione nostra ipsius secundi Casus perspicuum est. Atque hæc quidem de mendis breuiter dicta sint. Consequens autem est defectus explicare. Cùm igitur Constructio præsentis Problematis duos (vt superiùs vidimus) habeat Casus, vnumquidem quando rectus est datus angulus, alterum verò quando non rectus existit: quorum casuum primus adhuc duo membra sortitur, alterum quidem quando pars dimetientis in altero circuli segmento resecta eandem habet rationem ad reliquam eiusdem dimetientis partem in reliquo circuli segmento resectam, quam habet AB data linea ad BC lineam datam; reliquum verò quando iam dicta resecta pars ad iamdictam resectam partem habet minorem rationem quàm AB data ad BC datam: ex his vtique duobus membris secundum tantùm Apollonius declarauit, in eoque propositum demonstrauit: primum autem prorsus in-

Quartũ mẽdum Apollonij, quod Cõmandinus ẽt adnotauit.

De defectib. Apollonij.

in-

indeclaratum reliquit. id enim vnico verbo tetigit dicens. *Quòd si vt A B ad BC, ita fuerit E K ad K L, vtemur puncto L.* hoc est producendo per punctum L parallelam ipsi A B D, construemus cætera, quæ demonstrationi sunt necessaria, propositumque demonstrabimus. quod cùm dixisset, mox ad secundum membrum accessit subiungens, *Sin minus, fiat vt A B ad B C, ita E K ad minorem ipsa K L, quæ sit K M, &c.* Vnde manifestum est quòd omiserit Apollonius ibi cuncta ea, quæ à nobis in primo membro primi Casus constructa, demonstrataque sunt. quod equidem non ab re fecisset si primi, secundique membri eadem omnino constructio, demonstratioque foret. quoniam autem tam constructio, quàm demonstratio primi membri discrepat multis à constructione, demonstrationeque membri secundi: idcirco non erant prorsus omittendæ, sed compendiosè potiùs declarandæ, vt earum discrepantia innotesceret. Hæc sunt ea, quæ prætermisit Apollonius. de defectibus igitur hactenus. Modò reliquum est duas, quas commisit falsitates ostendere. Prima quidem falsitas continetur his verbis: *Sit datus angulus primùm rectus: & ex linea A B planũ attollatur erectum ad subiectum planum, in quo circa lineam A B circulus describatur A E B F, ita vt pars dimetientis circuli, quæ in segmento A E B comprehenditur ad partem comprehensam in segmento A F B, non maiorem rationem habeat quàm A B ad B C. & secetur A E B circumferentia per medium in E, ducaturq; à puncto E ad lineam A B perpendicularis E K, quæ producatur ad L: ergo E L dimetiens est circuli. Quòd si vt A B ad B C, ita fuerit E K ad K L, vtemur puncto L: sin minùs, fiat vt A B ad B C, ita E K ad minorẽ ipsa K L, quæ sit K M, &c.* Videtur enim Apollonius ex his verbis velle quòd circa lineã A B describatur circulus ita, vt pars cuiuslibet dimetientis circuli in A E B segmento comprehensa ad reliquam sui partem comprehensam in segmento A F B, non maiorem rationem habeat, quàm A B ad B C. quod nimirùm fieri non potest, quandoquidem infinitæ in eodem circulo dimetientes protrahi possunt rectam A B lineam secantes, ex quibus quædam inuenientur, quæ maiorem etiam rationem habebunt quàm A B ad B C. Quòd autem hæc sit Apollonij mens hinc patet, quia subdidit illa verba. *& secetur A E B circumferentia per medium in E, ducaturq; à puncto E ad lineam A B perpendicularis E K, quæ producatur ad L: ergo E L dimetiens est circuli.* ex his etenim verbis indicat Apollonius quòd supponat iam

De falsitatibus ab eodẽ commissis.

Prima falsitas.

iam factum esse, quod iussit; esse videlicet descriptum circulum circa A B lineam ita, vt cuiuslibet dimetientis pars in A E B segmento comprehensa ad reliquam sui partem in segmento A F B contentam non habeat maiorem rationem quàm A B ad B C: velitq; vt secetur A E B circunferentia per medium in E, ducaturque à puncto E ad lineam A B perpendicularis E K, quæ producta ad L, sit (per vicesimamnonam propositionem tertij, & quintam propositionem, & quartam petitionem, & vicesimamsextam propositionem primi, & Corollarium primæ prop. tertij lib. Elementorum Eucl.) dimetiens circuli; & cum sit dimetiens hac ratione sui partes à recta A B linea resectæ subeant iam dictã affectionem; quippecùm hoc scilicet artificio circulum circa A B lineam descriptum supponat, vt cuiuslibet suarum dimetientium partes ipsi iam dictæ affectioni subijciãtur. quod apertissimè constat, cùm statim subinferat, *quòd si vt A B ad B C ita fuerit E K ad K L, vtemur puncto L: sin minùs, fiat vt A B ad B C ita E K ad minorẽ ipsa K L, quæ sit K M.* ecce quòd statim postquam probauit Apollonius lineam E L esse dimetientem, supponens E K ad K L non habere maiorem rationem quàm A B ad B C: subiunxit quod si fuerit vt A B ad B C, ita E K ad K L, vtetur puncto L: si verò (quod reliquum est) E K ad K L minorem habuerit rationem quàm A B ad B C, faciet vt A B ad B C, sic E K ad minorem ipsa K L, quæ sit K M. Nonne igitur falsitas hæc manifesta est? Quum enim in eodem circulo (vt iam diximus) plures duci possint dimetientes ipsam A B secantes, ex quibus alia quidem habebit eandem rationem, quam habet A B ad B C, alia verò minorem, alia demum maiorem; quonampacto scire potest Apollonius quòd ipsa E L sit ea dimetiens, cuius pars E K ad partem K L non minorem rationem, sed vel eandem, vel maiorem habet? nisi supponat quòd circulus ita circa A B lineam descriptus sit, vt omnes eius dimetientes hoc patiantur? quod vtique falsissimum est, nulloque modo fieri potest. Quòd si supponat Apollonius dimetientem E L eam esse, quam quærimus, ita scilicet inuentam quemadmodum nos in primo huius Problematis Lemmate docuimus: manifestum est ex Constructione ipsius Lemmatis quòd ipsa E L ipsam A E B circunferentiam per medium secat, necnon ipsam A B rectam lineam ad rectos angulos, per mediumque dispescit. Ad quid igitur Apollonius circunferentiam A E B per medium in E secat, & ipsam iam EL ipsi AB perpendicularem ducit; nisi ad probandum q̃ linea EL dimetiens sit, vt ex hoc statim consequatur iuxta iam dictam falsam eius suppositionem quòd EK ad KL non maiorem rationem habet, quàm AB ad BC? etenim sat esse: diceret descriptus itaque sit circa AB lineam circulus ita, vt suæ dimetientis pars EK ad reliquam KL partem habeat non maiorem rationem quàm AB ad BC. talis enim dimetiens eo artificio, qui nos docuimus, reperta necessariò iam dictas facit sectiones. Hæc igitur est prima falsitas Apollonij. Secunda verò maior adhuc est, ac euidentior, quam profectò continent hæc verba. *Non sit autem datus angulus rectus: sintq́; rectæ lineæ datæ AB, AC: & datus angulus sit æqualis ei, qui BAH continetur. Oportet igitur describere Hyperbolem, ita vt eius dimetiens sit AB; & Rectum Latus AC: ductæ verò ordinatim ad dimetientem in angulo BAH applicentur. Secetur AB per medium in D: & in linea AD describatur semicirculus AFD. & ducatur quædam recta linea FG in semicirculum parallela ipsi AH; faciensq́; rationem quadrati FG ad rectangulum DGA eandem, quam habet CA ad duplam AD, &c.* Vbi vult Apollonius quòd ducatur quædam FG recta linea inter semicirculi circunferentiam, & externam dimetientis AD productæ partem, ipsi AH lineæ parallela, cuius videlicet FG parallelæ quadratum habeat ad rectangulum à lineis DG, GA contentum eandem rationem, quam habet data linea CA ad AB datam lineam. Non determinat autem Apollonius qualis nam debeat esse ratio ipsius AC ad ipsam AB; vtrum scilicet æqualitatis, an inæqualitatis maioris, vel minoris. vnde quod fieri præcipit Apollonius erit Problema quoddam indeterminatum, ac impossibile. quandoquidem (vt in secundo huius Problematis Lemmate prope finem adnotauimus) fieri non potest, vt quadratum lineę FG sit vnquam maius rectangulo à lineis DG, GA contento, sed vel ipsi æquale, vel ipso minus erit. Quare si ratio lineæ CA ad lineam AB fuerit maioris inæqualitatis, verbi gratia dupla, seu tripla, vel quadrupla, vel huiuscemodi quædam alia: incassum laboraret quicunque id, quod ab Apollonio iussum est, efficere conaretur. Debebat igitur Apollonius post illa verba, *quam habet CA ad duplam AD*, subiungere, *quæ quidem ipsius AC ad duplam AD ratio non sit maioris inæqualitatis*, vt quod dixerat, hac determinatione possibile redderetur. Cùm autem nullam subiunxerit conditionem, nulli dubium id ab eo præcipi,

Secunda falsitas.

cipi, quod fieri minimè potest. Nam Euclides etiam cùm in vicesimasecunda propositione primi libri Element. dixisset, *Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum construere*, ni mox addidisset, *Oportet autem duas earum reliqua esse maiores omnifariam sumptas*, dubio procul illud Problema indeterminatum esset, ac impossibile. Quapropter hanc etiam secundam Apollonij falsitatem arbitror omnibus iam esse conspicuam. Hæc autem in præsentia de mendis, defectibus, ac falsitatibus, quæ in hoc Problemate apud Apollonium leguntur, breuiter dicta sufficiant. Verumenimuero tribus iam Apollonij Conicis Elementis, videlicet duodecimo, vicesimoprimo, & quinquagesimotertio primi libri sic illustratis: nunc reliquum est, vt ad institutum nostrum reuertamur, Problemaque ab initio nobis propositum iuxta doctrinam Apollonij demonstremus. Repetatur igitur hìc Problema, quod à principio proposuimus.

Exēplum in Euclide.

Epilogus digressionis.

PROBLEMATIS PRAECIPVI DEMONSTRATIO QVARTA

secundùm Apollonium.

DVAS in eodem plano describere lineas alteram rectam, & alteram curuam, quæ nunquam adinuicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò sibijnuicem propiores euadant.

Propositio.

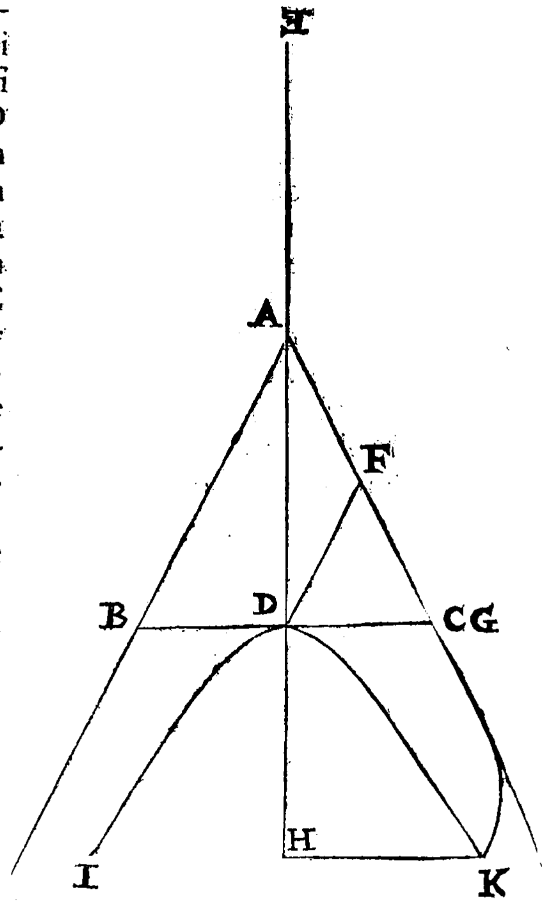
Sint duæ rectæ lineæ AB, AC quemlibet angulum continentes eum, qui est ad signum A. & suscipiatur intra iam dictum angulum quodcunque signum D, à quo ad signum A ducatur per primam petitionem primi libri Elementorum Euclidis recta linea. quippequę vel diuidet angulum BAC per medium, vel non per medium. Diuidat eum primò per medium. & producatur per secundam petitionem eiusdem ipsa DA in partem A. & per

Expositio.

Diuisio casuum Problematis.

Primi Casus constructio.

& per tertiam propoſitionem eiuſdem primi fiat A E æqualis ipſi A D. & per ſignum D ducatur per triceſimam primam propoſitionem eiuſdem D F parallela ipſi A B. & per eãdem tertiam primi fiat F C æqualis ipſi A F. & per primam petitionẽ eiuſdem ducatur C D, quę per ſecundam petitionem eiuſdem producatur quouſq; ſecet ipſam A B in ſigno B. ſecabit enim eam, cùm & D F ipſi parallelam ſecet ratione ſæpe ſuperiùs dicta. Fiat deinde per 44 propoſitionẽ primi lib. Elemen. Eucl. bis ſumptam rectangulum vnũ æquale quadrato lineæ B C. cuius vtiq; rectanguli alterum quidem latus ſit ipſa D E, alterum verò recta D G linea ipſi D E ad rectũ angulum iuncta in puncto D, quæ erit in vna recta linea cũ D C, quoniam anguli A D B, A D C recti ſunt per Conſtructionem, & viceſimamnonam, & ſextam, & quintam, & viceſimamſextam propoſitionem, & primam Com. Sent. primi lib. eorundem Elem. quoties opus fuerit ſumptas. Productaque demum recta linea E A D in partem D per ſecundam petitionem primi lib. eorundem vſque ad ſignum H, deſcribatur per primum Caſum quinquageſimætertię propoſitionis primi lib. Conicorũ Apollonij, ſeu tertij Elementi Conici ſuperiùs demonſtrati Hyperbole in eodem plano cum lineis E D, D G iacens, cuius dimetiens quidem ſit D H tranſiens per A centrum Sectionis, ſummitas autem ſignum



D ad

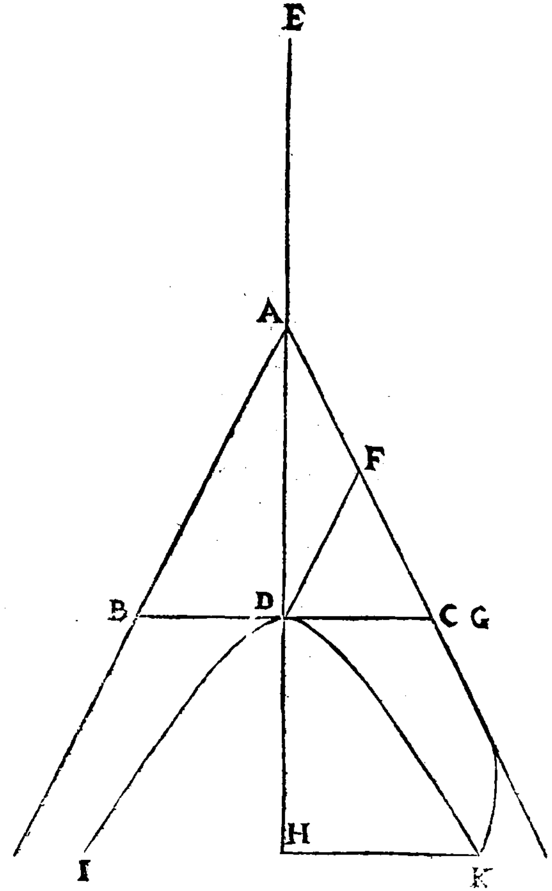
D ad rectum angulum exiſtens; ordinatè verò ductæ à ſectione ad D H eius dimetientem, angulumque facientes æqualem dato angulo A D C recto, poſſint rectangula inhærentia lineæ D G; & latitudinem habentia rectam lineam in dimetiente D H receptam ab ordinatè ducta vſq; ad ſummitatem D; & excedentia parallelogrammo rectangulo ſimili, ſimiliterque iacente ei, quod ab E D, D G continetur rectangulo. Vnde ipſa quidem D G erit Rectum, ipſa verò D E Tranſuerſum formæ Latus. Hæc enim quomodo fiant in illo Elemento demonſtrata fuere. Sit igitur talis Hyperbole deſcripta ipſa I D K. & producantur per ſecundam petitio. primi libri Elementorum Eucl. rectæ lineæ A B, A C in partes B C.

Determinatio.

Dico quòd ſi etiam in infinitum vnà cum ipſa Hyperbole protrahantur, neutra ipſarum vnquam coincidet inflexæ I D K lineæ: & quantò longiùs producuntur, tantò propiùs ipſi I D K lineæ curuę accedunt.

Primæ partis Problematis Demõſtratio.

Quòd itaque nunquam ipſi coincidant, ſic per demonſtrationem indirectam oſtenditur. Si fieri poteſt coincidat A C recta ipſi D K inflexæ ad ſignum K, à quo ducatur per duodecimam propoſitionem primi lib. Elem. Eucl. ordinatè ad D H dimetientem recta linea, quæ ſit K H. erit igitur parallela ipſi C D per primam partem viceſimæoctauæ propoſitionis primi libri Elementorum Euclidis. angulus enim C D A per Conſtructionem rectus eſt, angulus autem D H K ſimiliter eſt rectus per viceſimamquintam definitionem huius. Quoniam igitur per Conſtructionem D F parallela eſt ipſi B A, & C F æqualis ipſi F A: igitur C D æqualis eſt ipſi D B per primam partem ſecundæ propoſitionis ſexti libri Elementorum Eucl. Quare quod fit à C B quadratum quadruplum eſt ei, quod fit à C D per quartam propoſitionem ſecundi libri eorundem. & eſt quod fit à C B per Conſtructionem æquale rectangulo ab E D, D G contento. igitur quod fit à C D quadratum quarta pars eſt rectanguli contenti ab E D, D G. eſt autem eius etiam, quod fit ab E D quarta pars quadratum lineę A D per Conſtructionem, & per eandem quartam ſecundi. ſicut igitur quadratum ipſius A D ad quadratum ipſius D C, ſic per quintamdecimam propoſitionem quinti libri Elementorum Eucl. quadratum totius E D ad rectangulum ab E D, D G contentum. vt autem quadratum ipſius E D ad rectangulum ab E D, D G comprehenſum, ſic linea D E ad lineam D G per primam prop. ſexti, vel per Lemma 22 prop. decimi



libri eorundem Elemento. ergo per vndecimam eiuſdem quinti, ſicut ED ad DG, ſic quadratum lineæ A D ad quadratū lineæ D C. Sed vt quadratū ipſius A D ad quadratū ipſius DC, ſic quadratum ipſius A H ad quadratum ipſius H K per primam partem viceſimæ ſecundæ propoſitionis ſexti libri Elementorum Euclidis. linea enim A D ad lineam D C eſt ſicut A H ad HK per Conſtructionem, & viceſimamnonam propoſitionem primi, & quartam propoſitionem ſexti libri eorundem. Sicut igitur quadratum lineæ A H ad quadratum lineæ H K, ſic per eandem vndecimam quinti linea E D ad DG lineam. Verùm vt *E* D ad D G, ideſt Latus formæ Tranſuerſum ad Rectum, ita quod ab EH, H D ad quadratum lineæ H K per viceſimam primam propoſitionem primi libri Conicorum Apollonij, vel per ſecundum ſuperiùs demonſtratum Conicum Elementum. Et ſicut igitur quadratum lineæ A *H* ad quadratum lineæ H K, ſic quod ab E H, H D continetur rectangulum ad idem ipſius H K quadratum per eandem vndecimam quinti. æquale itaque eſt per primam partem nonæ propoſitionis eiuſdem quinti quod ab E H, H D continetur re-

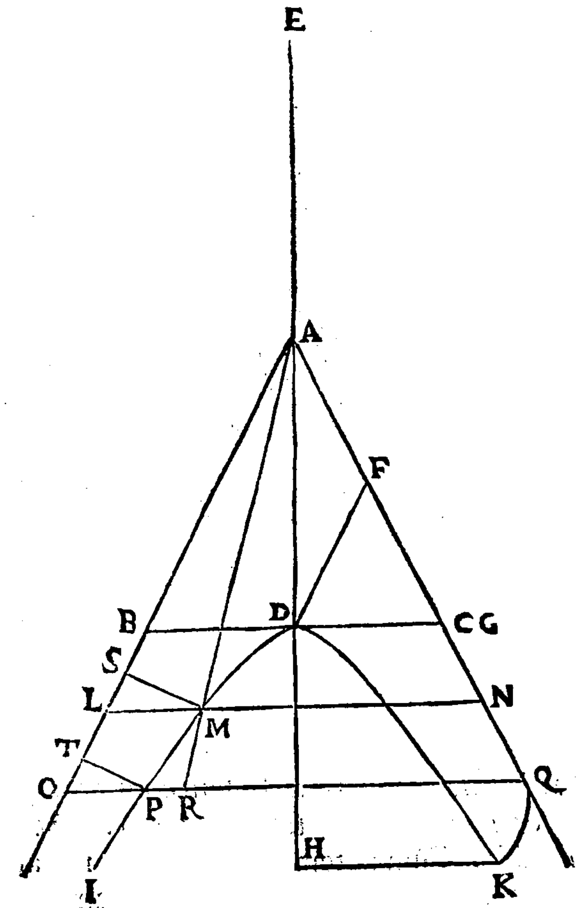
ctangu-

ctangulum ei, quod ab A *H* fit quadrato, quod eſt abſurdum, quoniam oppugnat ſextę propoſitioni ſecundi libri Elemento. Euclidis; quippe quæ oſtendit quadratum ipſius A H maius eſſe quàm rectangulum ab E H, H D contentum, quadrato lineę A D. nam fieri non poteſt vt eędem quantitates ęquales inuicē, & inęquales ſint. Non coincidit igitur ipſa A C recta ipſi D K inflexæ etiam ſi in infinitum producantur. in quocunque enim puncto coincidere ipſi poſita fuerit, idem ſemper abſurdum ſequetur. Similiter autem demonſtrabitur quòd ipſa etiam A B recta, & ipſa D I inflexa in infinitum productæ, nuſquam coincident. Quare patet prima quidem Problematis pars.

Concluſio primæ partis.

Determinatio ſecundæ partis.

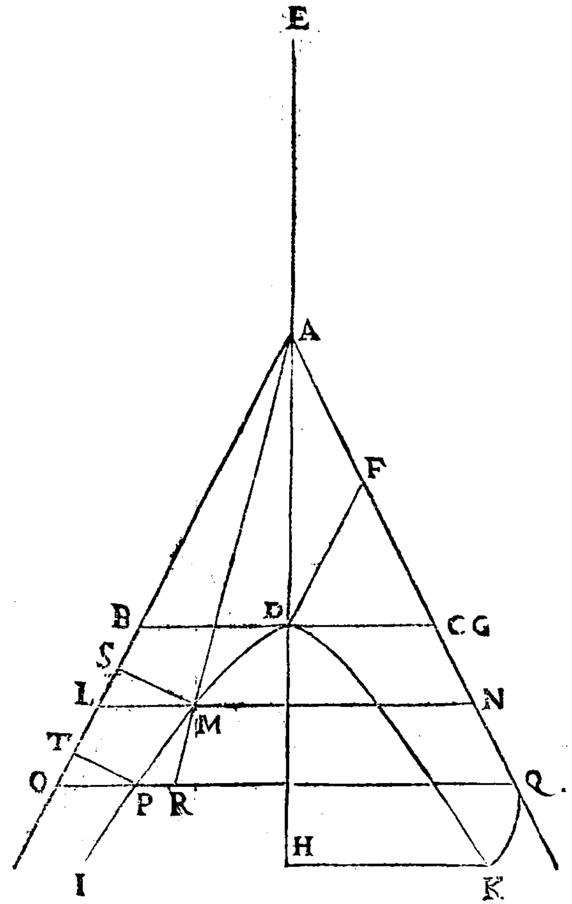
Secunda verò per directam demōſtrationem ſic oſtendatur. Maneant cūcta vt in proxima figura fuere diſpoſita. Dico ꝙ rectæ lineæ A B, A C quantò longiùs in partes B C producētur, tantò ipſi I D K curuæ lineæ propiores fient. Ducantur itaq; per 31 propo. primi libri Elemētorum Euclid.



ipſi

Constructio secundæ partis.

ipsi BDC tāgēti parallelæ LMN, & OPQ. & per primā petitionē eiusdē ducatur AM recta linea, quæ per 2. pet. eiusdē producta in partem M, necessariò secabit Sectionem in signo M. aut enim secabit eam, aut tanget: tangere non potest per Corollarium tricesimæprimæ propositionis primi lib. Conicorum Apollonij (quod



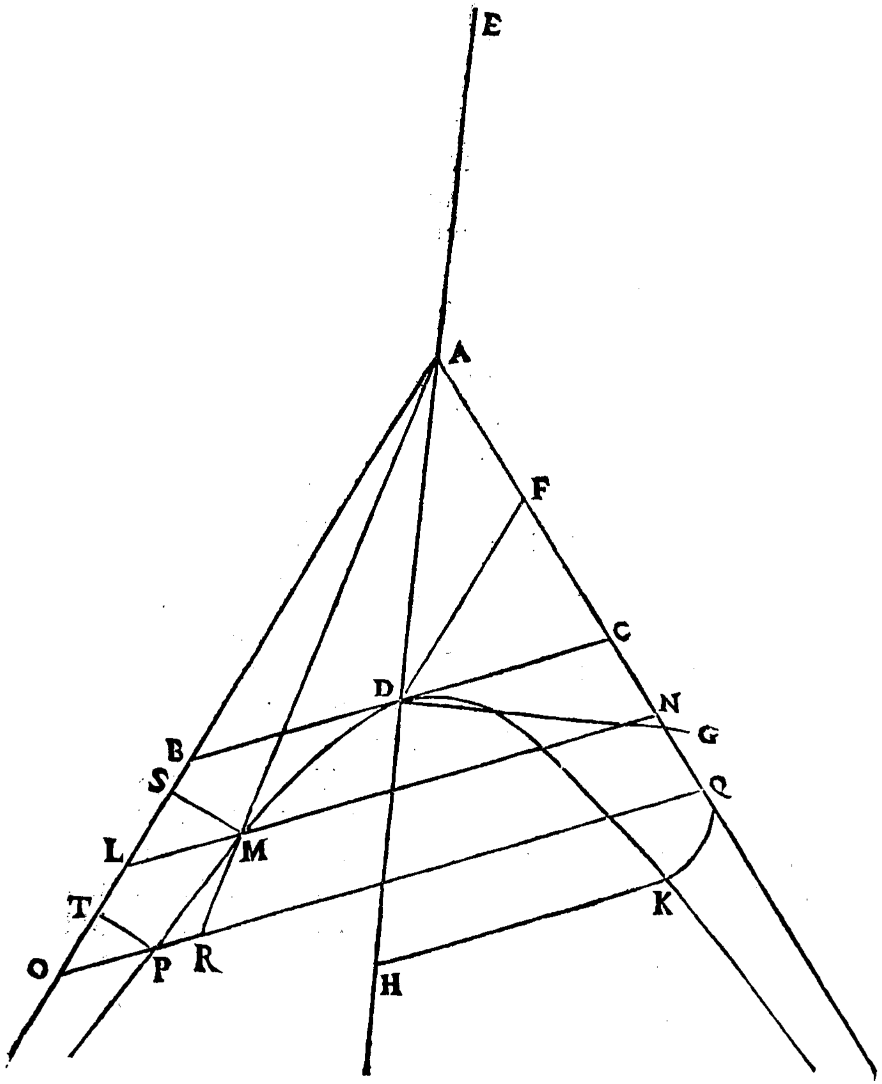
affirmat lineam, quæ Hyperbolem contingit, si producatur secare dimetientem inter summitatem, & centrum Sectionis) ergo necessariò secabit. Cùm autem secet quoque rectam LN lineam, secabit etiam si indirectum producatur ipsam PQ ratione sæpe superiùs allegata. Secet itaque ipsam in puncto R. His ita Constructis

Demonstratio secundæ partis.

structis dico quòd rectangulum contentum ab OP, PQ æquale est ei, quod continetur ab LM, MN rectangulo per decimam propositionem secundi libri Conicorum Apollonij. In illa enim propositione demonstrat Apollonius quodcunque huiuscemodi rectangulorum esse æquale quartæ parti formæ, hoc est quadrato lineæ DC. ideoque omnia talia rectangula per primam Communem Sententiarum primi libri Elementorum Euclidis sibijnuicem etiam æqualia sunt. Cùm igitur quod continetur ab OP, PQ rectangulum ei, quod continetur ab LM, MN rectangulo æquale sit: erit per secundam partem sextædecimæ propositionis sexti libri Elementorum Euclidis, vt PQ ad MN, sic LM ad OP. maior autem est PQ quam MN, quoniam & RQ est maior quàm ipsa MN per vicesimamnonam propositionem primi, & quartam propositionem sexti, & nonam Communem Sententiam eiusdem primi libri Elementorum Euclidis. maior igitur est & LM quàm OP per nonam Communem Sententiam huius. Similiter demonstrabimus quòd etiam quæ sunt ad inferiora, minores sunt. Quoniam itaque OP minor est quàm LM, quarum neutra per Constructionem, & vicesimamnonam, & tricesimamsecundam propositionem primi libri eorundem Elementorum ad rectos est angulos ipsi AO: si à punctis PM ad ipsam AO per duodecimam propositionem eiusdem primi perpendiculares ducantur, vt MS, PT; erit etiam PT minor quàm MS per quartam petitionem, & vicesimamnonam, & tricesimamsecundam propositionem primi, & quartam propositionem sexti libri eorundem, & nonam Communem Sententiam huius. Sunt autem MS, PT minima interualla, quibus puncta MP à recta AO linea distare possint, vt in superioribus ostendimus. propinquior igitur est linea inflexa DI ad rectam AO in signo P, quàm in signo M. idemq; ostendetur de omnibus alijs inferioribus ipsius inflexæ lineæ punctis tam in partes DI, quàm in partes DK. Quare perspicua est secunda quoque Problematis pars.

Cōclusio secundæ partis.

Verùm



Secundi casus Constr.& Demõstr.partium à superioribus differentes.

Verùm si recta DA linea non per medium angulum BAC diuiserit, vt in præsenti figura: construentur, & demonstrabuntur omnia sicut in primo casu his exceptis: primò quòd recta DG non erit in vna recta linea cum ipsa DC: secundò quòd non describetur Hyperbole per primum, sed per secũdum Casum 53 propositionis primi libri Conicorum Apollonij: tertiò ipsam KH ordinatè ductam probabitur esse parallelam ipsi DC contingenti, non

non eo modo, quo in primo Casu probatum fuit, sed per conuersam primæ partis tricesimæsecundæ propositionis primi libri Conicorum Apollonij; quòd scilicet si recta linea conicam Sectionem ad summitatem contingat, ordinatè ductis erit parallela; quæ conuersa quamuis ab Apollonio demonstrata non sit, tamen ex ipsa tricesimasecunda per demonstrationem indirectam facilè probari potest; conuersas enim propositiones ex suis antecedentibus sæpe Mathematici probant: quartò quòd in hoc secundo Casu lineæ LN, OQ, & omnes ipsis parallelæ quandoque possunt ad rectos angulos esse vel ipsi AO, vel ipsi AQ; & tunc in illa parte vbi parallelæ ipse perpendiculares fuerint, non sunt quærenda alia breuissima interualla, quoniam in iam dictis parallelis ea sunt. Duas itaque iuxta doctrinam etiam Apollonij eodem in plano descripsimus lineas alteram rectam, & alteram curuam, ipsas nempe AO, DP, vel ipsas AQ, DK, quæ nunquam adinuicem coincidunt, etiam si in infinitum protrahantur: & quantò longiùs producuntur, tantò sibijnuicem propiores euadunt. Quod erat faciendum.

Conclusio vniuersalis.

Corollarium Primum.

Ex demonstratis manifestum est primò quòd si Hyperbolem ad Summitatem recta linea tangat, & ab ipsa in vtraque dimetientis parte suscipiatur pars æqualis rectæ lineæ potenti quartam partem formæ, seu rectanguli à Recto, & Transuerso lateribus contenti; & à centro Hyperbolis ad sumptos tangentis terminos rectæ ducantur lineæ: erunt non coincidentes Sectioni. & conuersò si dictæ lineæ fuerint Sectioni non coincidentes: partes tangentes inter dimetientem, & non coincidentes receptæ quartam formæ partem poterunt.

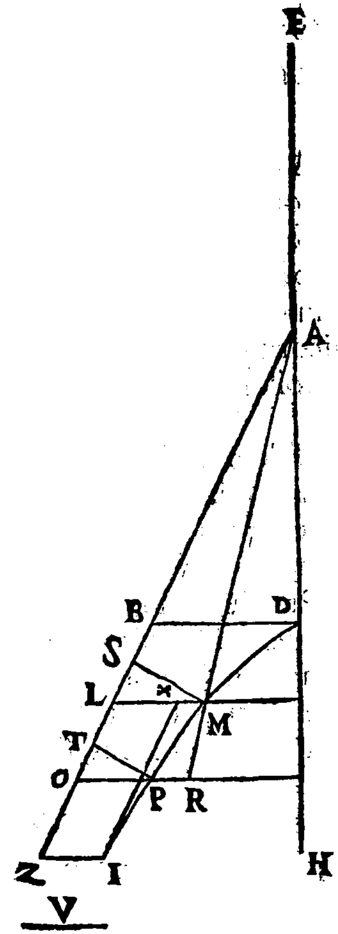
Hoc primum Corollarium omnino perspicuum ex iam demonstratis est, nec vlla declaratione indiget.

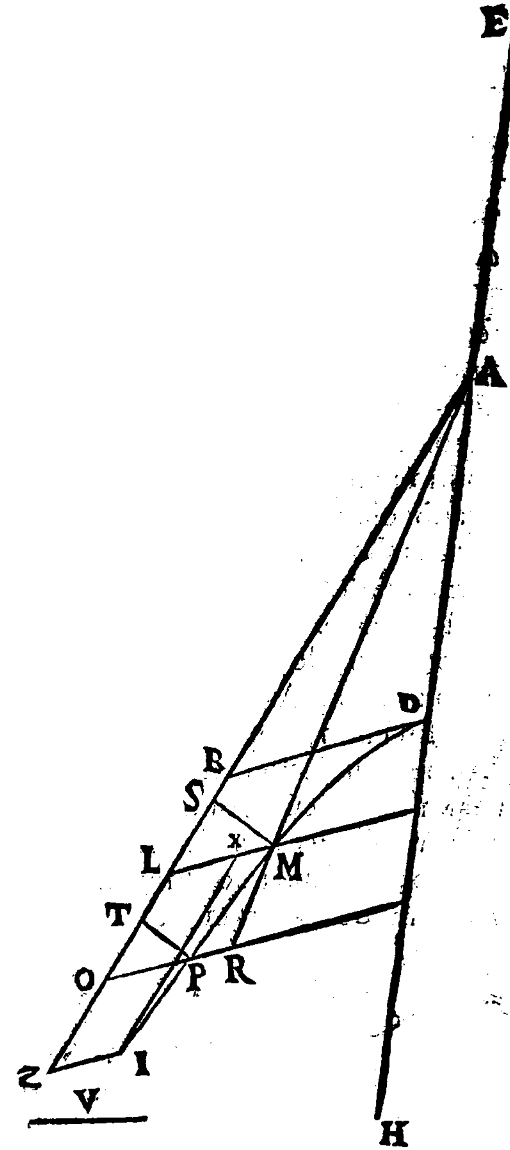
 Corolla-

Corollarium Secundum.

Secundò patet quòd si à quibuslibet Hyperbolicæ lineæ punctis ad non coincidentes rectæ lineæ perpendiculares ducantur: inferiores superioribus minores sunt, & quocunque dato spatio ad minus perueniunt spatium.

Sit enim (exempli gratia) in subscriptis figuris, quæ sunt partes superiorum figurarum datum spatium V. quod vtiq; aut maius, aut minus est quàm LM, aut ipsi æquale. Quòd si maius, vel æquale fuerit: manifestum est ex superioribus quòd OP, necnon TP minus est ipso. Si verò datum V spatium minus quam LM sit. relinquatur per primam propositionem decimi libri Elementorum Euclidis LX minus spatio V. & per punctum X ducatur per tricesimamprimam propositionem primi lib. eorundem Elementorum parallela ipsi SO. quæ per tertiamdecimam propositionem libri secundi Conicorum Apollonij coincidet Sectioni ad vnum punctum. ibi enim demonstrat Apollonius quòd si in loco extra Sectionem inter non coincidentem, & Sectionem intercepta quædam recta linea ducatur alteri non conincidentium parallela: in vno puncto tantùm cum Sectione conueniet. coincidat (verbi gratia) ad signum I, per quod ducatur ipsi LX parallela IZ, quæ necessariò coincidet ipsi LO ad signum Z ratione sæpe superiùs dicta. æqualis igitur est per tricesimamquartam propositionem primi libri Elementorum Eucl. IZ ipsi LX. quare spatium IZ dato V spatio minus est per septimam Com. Sent. huius. Si igitur à puncto I ad rectam AZ lineam perpendicularis ducatur, erit adhuc multò minor dato V spatio per 32, & 19 prop. primi libri eorundem Elem.





Corollarium Tertium.

Tertiò constat quòd omnibus non coincidentibus propiores Sectioni sunt ipsæ AO, AQ, & Angulus BAC ab ipsis contentus minor est quocunque angulo ab alijs non coincidentibus contento.

Nulla enim alia recta linea inter ipsas AO, AQ cadere potest secans angulum BAC, quæ Hyperboli non coincidat. vt demonstrat Apollonius in secunda propositione secundi libri suorum Conicorum Elementorum. Hoc autem Corollarium varijs modis exponit Eutocius in commentarijs suis in quartamdecimam propositionem eiusdem secundi libri Conicorum. Sed non omnia, quæ ibi dicit Eutocius ad propositum Apollonij sunt. vt rectè Federicus Commandinus etiam adnotauit.

Demonstrato iam proposito nobis Problemate iuxta quoque doctrinam Apollonij, placet hoc in loco duas etiam alias eiusdem Problematis demonstrationes subiungere, quas excerpsimus ex Scholijs Pappi Alexandrini in quintum librum Conicorum Apollonij. Ibi enim Pappus propositum nobis Problema dupliciter, scilicet per ressolutionem, compositionemq; demonstrauit. Quamuis autem Federicus Commandinus etiam in secundo libro Conicorum Apollonij eas posuerit, ac breuiter explicuerit: nihilominus non ab re factum iri existimo si nos etiam eas hìc ponamus, faciliorique modo declaremus.

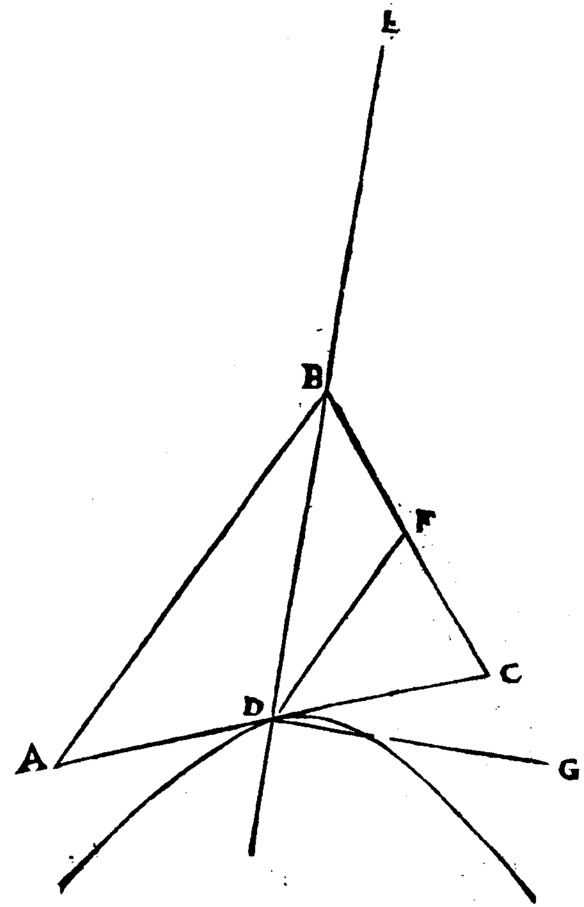
QVINTA PROBLEMATIS DEMONSTRATIO per ressolutionem.

Expositio. POSITIONE datis duabus rectis lineis AB, BC, & signo D dato: propositum sit describere per D signum Hyperbolem circa non coincidentes AB,

Determinatio. BC. Factum itaque sit. Centrum igitur ipsius est

Constructio signum B. Coniungatur ergo recta linea DB per primam petionem primi lib. Elem. Eucl. & per secundam petitionem

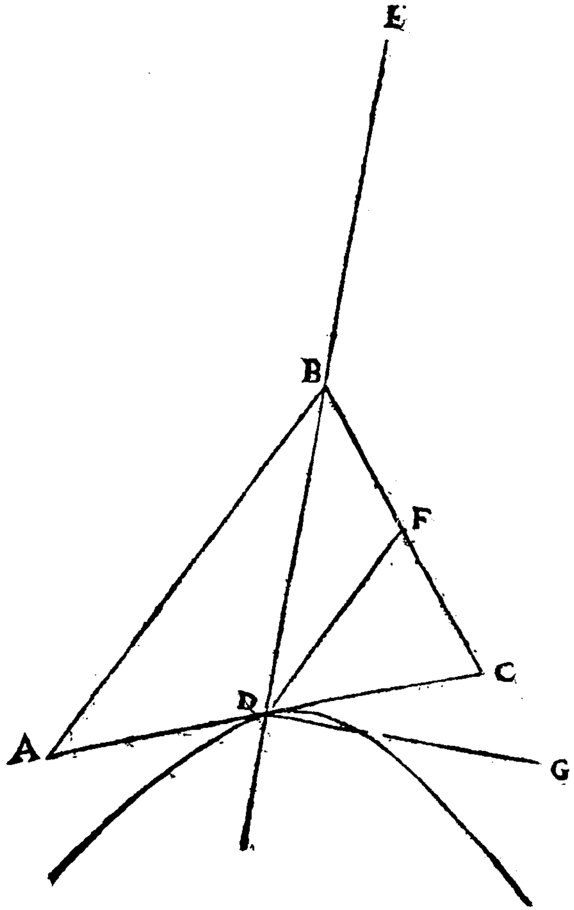
nem eiusdē producatur. Dimetiens igitur est. Ponatur ipsi DB æqualis BE per tertiā prop. eiusdem. Datū est ergo signū B p 25 prop. lib. Datorū Eucl. Quare datum est etiam signum E per 27 prop. eiusdē, dimetiētisq; terminus est. Ducatur à signo D ad lineā BC per 31 prop. primi libri Elem. Eucl. linea DF parallela ipsi AB. Datum est igitur signum F per eandem 25. & ponatur per tertiā prop. eiusdē primi ipsi BF



æqualis FC. Datum est ergo signum etiam C per eandem 27. & per primam petitionem eiusdem primi coniungatur CD, & per secundam petitionem eiusdem producatur ad signum A. Positione igitur data est per eandem vicesimamseptimam. Positione autem data est ipsa quoque AB. datum est ergo signum A per eandem 25. Est autem signum quoque C datum. data est igitur AC tum positione, tum magnitudine per 26 propositione libri Datorū Euclidis. eritq; æqualis AD ipsi DC per primā partē secundæ prop. sexti lib. Elem. Eucl. & 9 Com. Sēt. huius, eò q etiā BF ipsi FC per Constructionem æqualis est. Sit itaq; DG Rectum Latus formæ, quę ipsi ED Transuerso Lateri inhæret. Vtraq; igitur ipsarum AD, DC potest quartam partem rectanguli ab ED, DG cōtenti per secundā partē primi Corollarij præcedētis prop. Demonstr.

vel

vel per tertiam prop. secūdi lib. Conicorū Apollonij, in qua demonstratur ꝙ si Hyperbolē contingat recta linea, cùm vtraq; non coincidentium conueniet, & ad tactum per mediū secabitur: quadratum verò vtriusq; eius segmenti æquale erit quartæ parti formæ, quę ad dimetientē à recto, transuersoq; lateribus constituitur. Sed quadrati etiam ab A C facti quartam partē potest vtraq; earū per quartam propo.



secundi libri Elemen. Eucl. æquale est igitur rectangulum ab E D, D G contentum quadrato ab A C facto per secundam partem nonæ propositionis quinti libri Elementorum Euclidis. Datum autem est quadratum ab A C, datum ergo est etiam rectangulum ab E D, D G. & est data ipsa E D, data est igitur & ipsa G D per secundam partem sextędecimæ, vel primam partem quartædecimæ propositionis sexti libri Elementorum, & secundam propositionem libri Datorum Euclidis. & datur etiam signum G per 27 propositionem libri Datorum. Quoniam igitur positione datis duabus rectis lineis terminatis in eodem plano E D, D G, ad rectos angulos inuicem iunctis; per datum punctum D facta est Sectio Hyperbole, cuius dimetiens quidem est ipsa E D, vertex verò signum D: lineæ autem ordinatè ductæ, ducuntur in dato an-

gulo A D B potentes rectangula inhærentia lineæ D G, latitudines habentia lineas in dimetiente receptas ab ipsis ordinatè ductis vsque ad signum D; excedentia forma simili ei, quæ lineis E D, D G continetur: erit ipsa Sectio Hyperbole positione data per ea, quæ in præcedenti propositione demonstrata sunt, ex doctrina primæ, & quartæ, & quartædecimæ propositionis secundi libri Conicorum Apollonij. Quod fecisse oportuit.

Conclusio.

SEXTA PROBLEMATIS DEMONSTRATIO
per compositionem.

Cōstructio.

COMPONETVR autem præsens Problema hoc modo. Sint ipsæ duæ positione datæ rectæ lineæ A B, B C, datum autem signum D. & iungatur per primam petitionem primi lib. Elem. Eucl. D B, & producatur per secundam petitionem eiusdem ad E, ipsiq; D B ponatur per tertiam prop. eiusdem æqualis B E, & ducatur per 31 prop. eiusdem D F parallela ipsi A B, & per eandem tertiam primi ponatur ipsi B F æqualis F C, & iungatur per eandem primam pet. primi C D, quæ per secundam pet. eiusdem producatur ad A. & per vndecimā prop. eiusdem primi ipsi D E applicetur ad rectos angulos ipsa D G. & quadrato ab A C ponatur æquale rectangulum ab E D, D G contentum per 44 prop. primi lib. Elemen. Eucl. bis sumptam. & describatur, vt in Ressolutione dicebamus, circa dimetientem D E Hyperbole.

Determin.

Dico ꝙ Problema factum est.

Demonstratio.

Cùm enim æqualis sit B F ipsi F C, æqualis erit & A D ipsi D C per primam partem secundæ prop. sexti lib. Elem. Eucl. & nonam Com. Sent. huius. vtraq; igitur ipsarum A D, D C per quartam prop. secūdi eorundem potest quartam partem quadrati ab A C facti, hoc est rectanguli ab E D, D G contenti, hoc est formæ inhærentis dimetienti E D. Quare per primam partē primi Corollarij quartæ Demonstr. libri huius, vel per primam prop. lib. 2 Conicorū Apoll. ipsæ A B, B C rectæ lineæ cum Hyperbolæ nunquam coincidunt: & per secundum Corollarium eiusdem quartæ demonstrationis, vel per 14 prop. eiusdem secundi Conicorum iam dictæ rectæ lineæ in infinitum productæ ipsi Hyperbolæ semper magis appropinquant.

Conclusio.

Quod faciendum erat.

DE DVABVS LINEIS CVRVIS IN EODEM PLANO DESCRIPTIS NVNQVAM COINCIDENTIBVS,

& semper sibi magis appropinquantibus, etiam si in infinitum producantur.

Propositio.

POSITIS duabus Pappi demonstrationibus de linea recta, & curua non coincidentibus, & magis sibi semper appropinquantibus si in infinitum producantur: non erit ab re hoc in loco subscribere quandam etiam aliam demonstrationem Pappi excerptam ex eius Lemmatibus in quintum librum Conicorum Apollonij, qua demonstratur duas Hyperbolas in eodem plano descriptas, in infinitumq; productas nunquam inuicem coire, & semper ad interuallum quolibet interuallo dato minus peruenire. est enim ea demonstratio mutila, mendosaq;, vt Commandinus etiam animaduertit in libro secundo Conicorum Apollonij, vbi eam ipse longo sermone instaurare conatus est. Nos autem breuiori quoadfieri poterit modo eam illustrabimus.

Expositio.

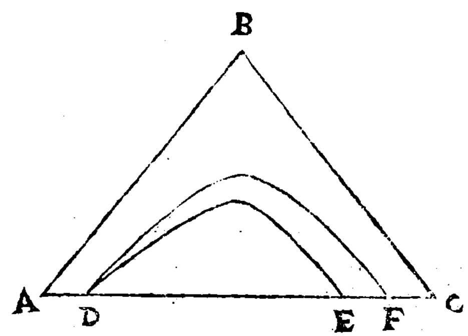
Circa ipsas non coincidentes AB, BC rectas lineas duę Hyperbolę DE, DF describantur.

Determin. primę partis.

Dico eas inuicem non coincidere.

Demonstratio primæ partis.

Nam si fieri potest coincidant ad signum D, & quod in Sectiones ducatur recta linea ADEFC.



erit

erit propter quidem DE Sectionem linea AD æqualis ipsi FC, propter verò Sectionem DE ipsa AD æqualis ipsi EC per vltimam partem octauæ prop. secundi libri Conicorum Apollonij (ibi enim demonstrat Apollonius, quòd si Hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis: producta ex vtraque parte, cum ipsis non coincidentibus conueniet; & lineæ, quæ ex ipsa abscissæ inter Sectionem, & non coincidentes interijciuntur, æquales erunt.)

Conclusio primæ partis.

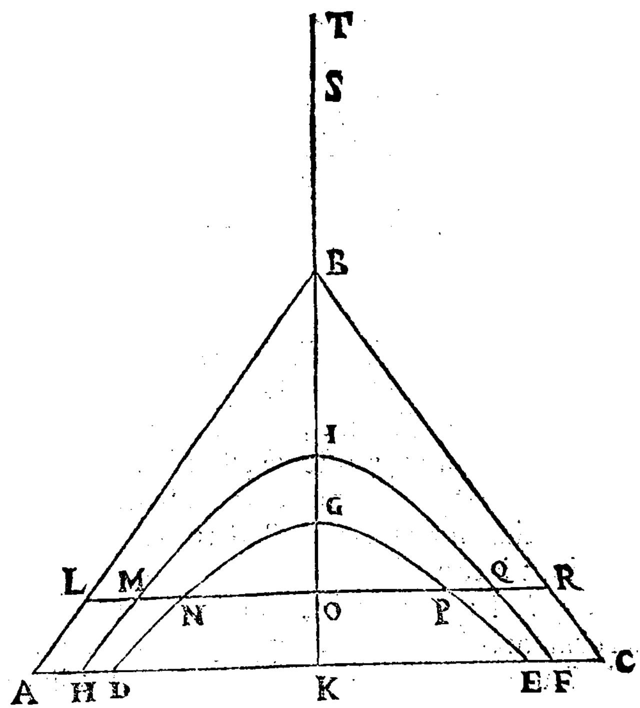
Quare per primam Comm. Sent. primi libri Elementorum Euclidis ipsa CF ipsi CE æqualis erit, quod per nonam Comm. Senten. eiusdem fieri non potest. non igitur Sectiones inter se conueniunt.

Determinatio secundæ partis.

Dico præterea eas, si in infinitum augeantur, ad sese propiùs accedere, & ad minus interuallum peruenire.

Constructio secundæ partis.

Sint duæ Hyperbolæ DGE, HIF circa easdem nō coincidētes AB, BC descriptæ, vt in superioribus docuimus. Et sint rectæ lineæ AHDKEFC, LMNOPQR ad dimetientē Sectionū ordinatim ductæ, quæ sibijnuicem erunt parallelę per 25 definitionem huius, & 28 propositionē primi libri Elementorum Euclidis.

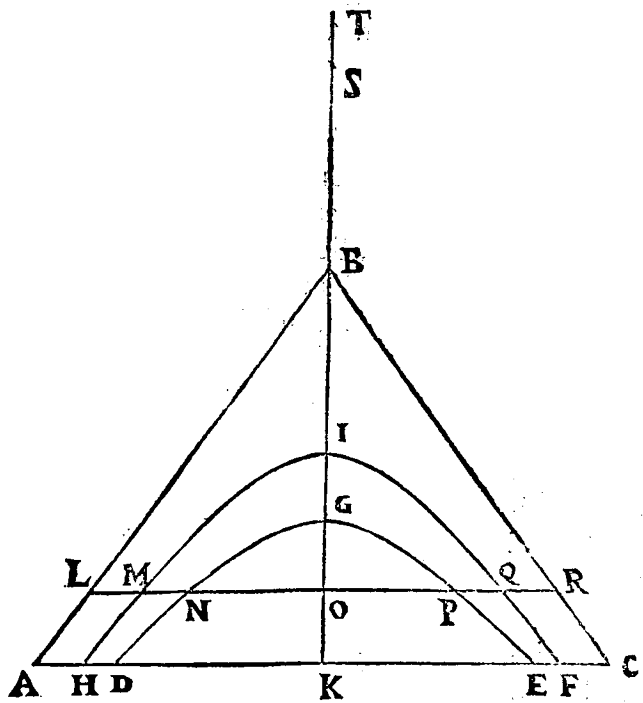


Et sit dimetiens KIB, quæ producatur in puncta S, T ita vt sit SB æqualis ipsi BI; & TB ipsi BG. erit punctum S terminus dimetientis Sectionis HIF, & T terminus dimetientis Sectionis DGE, cùm B sit vtriusque centrum. His it Constructis quoniam per decimam Com. Sent.

huius

Demonstratio secundæ partis.

huius, vel per Corollarium primi theorematis in principio huius operis prędemonstrati linea FK maior est quàm QO, & linea DK maior quàm NO: erit per quintam Comm. Sēt. huius tota DF linea maior quàm tota NQ. est autem (vt in fine huius demonstrationis ostendemus) rectangulum ab FD, DH æquale rectangulo à QN, NM. vt igitur NQ ad DF, ita DH ad NM per secundam partem sextædecimæ propositionis sexti libri Elemen. Euclidis. Sed NQ minor ostensa est quàm DF. ergo & DH quàm NM minor erit per nonam Comm. Sent. huius. idem autem de qualibet etiam inferiori potest ostendi. Quare semper ad minus perueniunt interuallum.



Cõclusio secũdæ partis.

Notandum.

Animauertendum est autem quòd si DH, & NM non sunt breuissima interualla, quærenda sunt ipsa interualla breuissima, quæ reperientur ductis rectis lineis perpendicularibus a punctis D, N ad rectam AB lineam. Hæc autem breuissima duarum Sectionum interualla semper minora fiunt, & Sectiones ad interuallum quolibet interuallo dato minus peruenient. Possunt etenim Sectiones vnà cũ ipsis non coincidentibus produci (vt patet ex Corollario secundo quartæ demonstrationis) donec breuissimum interuallum interiectum inter non coincidentes, & Sectionem DGE sit dato interuallo minus. quare tunc erit

erit interuallum inter Sectiones interiectum multò minus interuallo dato per nonam Communem Sent. primi lib. Elem. Eucl.

Suppositi Demonstratio.

Nunc autem illud est demonstrãdum, quod supra supposuimus, quòd scilicet rectangulum ab FD, DH sit æquale rectangulo à QN, NM. Demonstretur autem sic. Quoniam linea LR secta est per medium in signo O per vicesimamquintam definitionem huius, & per vltimam partem octauæ propositionis secundi libri Conicorum Apollonij, & non per medium in signo M: erit per quintam propositionem secundi libri Elementorum Euclidis rectangulum ab RM, ML contentum vnà cum quadrato ab OM descripto, æquale quadrato ab OL. at quadrato quidem ab OM rectangulum à QN, NM vnà cum quadrato ON est æquale; quadrato verò ab OL æquale est rectangulum ab RN, NL vnà cum quadrato ab ON per eandem quintam propositionem bis sumptam: erit igitur rectangulum ab RM, ML vnà cum rectangulo à QN, NM, & quadrato ab ON, ęquale rectangulo ab RN, NL, & quadrato ab ON per primam Com. Sent. primi lib. Elemen. Eucl. bis, & secundam Comm. Sent. eiusdem semel sumptas. Commune auferatur quadratum ab ON. reliquum igitur ab RM, ML rectangulum vnà cum rectangulo à QN, NM æquale est rectangulo ab RN, NL per tertiam Cõm. Sent. primi lib. eorũdem. ijsdem rationibus rectangulum à CH, HA vnà cum rectangulo ab FD, DH est æquale rectangulo à CD, DA. est autem propter DGE Sectionem rectangulum ab RN, NL æquale rectangulo à CD, DA per primam Com. Sent. primi lib. Elemen. Euclid. cũm eorum vnumquodq; sit æquale quartæ parti ipsius formæ per decimam prop. secundi lib. Conicorum Apollonij, sicut etiam in superioribus diximus: & propter HIF Sectionem rectangulum ab RM, ML est æquale rectangulo à CH, HA per easdem primam Com. Sent. & decimam prop. erit igitur per primmam Com. Sent. bis, & tertiam Com. Sent. semel sumptas primi lib. Elem. Eucl. rectangulum à QN, NM æquale rectangulo ab FD, DH. Quod erat demonstrandum.

Coonclusio suppositi.

Notandum.

Pappi grauissimus error.

Hactenus itaq; Pappi demonstrationes illustrauimus. Animaduertendum est autem ꝗ postquam Pappus de duabus Hyperbolis iam dictam affectionem demonstrasset, subiunxit hæc verba. *Verùm hoc etiã manifestè constat. Si n. vtraq; ipsarum ad nõ coincidentes propius accedit, perspicuũ est quòd etiam ad sese propius accedent.* quæ quidem

Pappi ratio non concludit, vt Commandinus etiam adnotauit. Nam fieri potest vt vtraque Sectionum ad non coincidentes propiùs accedat, sed tamen pari accessionis interuallo, ita vt semper inuicem æquidistent: vel vt earum vtraque ad non coincidentes propiùs semper accedat, celeriùs autem appropinquet ipsis externa quàm interna, ita vt interna ab externa continuè magis recedat: quare ad sese propiùs non accedent, verùm aut æquidistabũt, aut à sese magis, magisq; remouebuntur. Vnde necesse est vt interna celeriori appropinquatione quàm externa ad ipsas non coincidentes propiùs semper accedat. aut enim æqualiter ambæ continuè magis ad ipsas non coincidentes appropinquabunt, aut inæqualiter: & si inæqualiter, dupliciter hoc contingere potest; aut scilicet externa celerius quàm interna, aut è contrario.

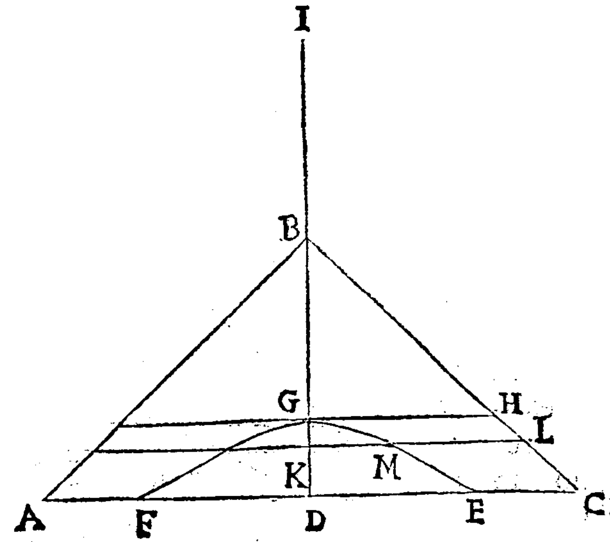
Hactenus in Conis ipsis propositum Problema exercuimus, nunc verò consequens est vt hoc admirandum Geometricum Problema absque etiam Conicorum corporum adminiculo in quocunque nobis obiecto plano verissimam habere actionem certissimis demonstrationibus conuincamus.

DEMONSTRATIO SEPTIMA.

Expositio. SIT quodcunque planum propositum, volo super ipso duas describere lineas alteram rectam, alteram inflexam, quæ duas iam sæpe dictas affectiones subeãt.

Cõstructio. Suscipiatur in proposito plano rectus angulus ABC, qui diuidatur per nonam propositionem primi libri Elementorum Euclidis in duas partes æquales producta recta linea BD, & à signo D per vndecimam propositionem eiusdem erigatur ipsi BD ad rectos angulos recta linea, quæ vtrinque producta secabit per Constructionem, & quintam petitionem eiusdem rectas AB, BC in signis, quę sint A, C. Deinde inter signa D, C; seu D, A quodlibet accipiatur in ipsa ADC recta linea signum E, sitque illud in præsentia susceptum inter signa D, C. & ab ipsa AD ipsi DE per tertiam propositionem primi libri Elementorum Euclid. abscindatur æqualis DF. nanque DA, & DC, & DB inter se æquales sunt; necnon AB ipsi BC per Constructionem,

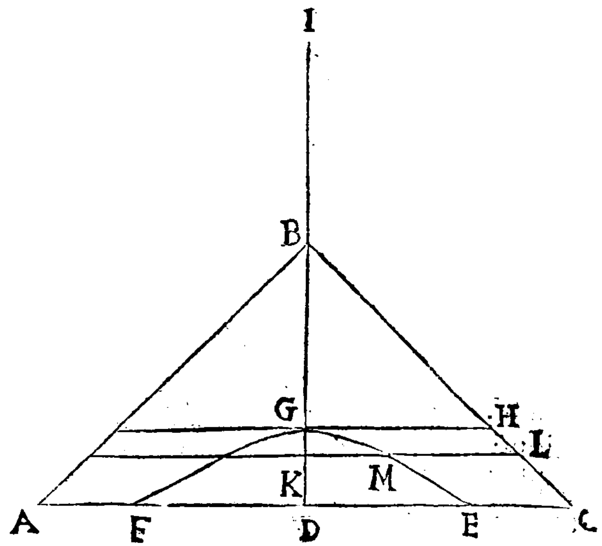
nem,



nem, & 32, & sextam prop. eiusdem primi lib. Elemẽtorum. Subinde ex BD auferatur per eã dẽ tertiã primi pars BG æqualis vni rectæ lineæ, cuius quadratũ sit per vltimã propositionẽ secundi libri Elemẽtorum Eucl. factum æquale parallelogrammo rectangulo ab FE, EC contento. hoc enim commodè fieri potest, quandoquidem quadratum lineæ DC maius quidem est iam dicto rectangulo per sextam propositionem secundi, & nonam Comm. Sent. primi lib. Elementorum Euclidis; æquale verò quadrato lineæ BD per Constructionem, & secundam Comm. Sent. huius. Demum per G signum ducatur per tricesimamprimam propositionem primi lib. eorundem Element. GH parallela ipsi DC secans necessariò per vicesimamnonam propositionem, & quintam petitionem eiusdem primi BC lineam in signo H. & producatur per secundam petitionem eiusdem primi in alteram partem quousque per easdem secet etiam lineam AB. Postea verò producatur DB in partem B interminatè, & fiat per tertiam propositionem eiusdem primi BI æqualis ipsi BG. Ipsa denique GD in aliquot vtcunq; secetur partes, atque per sectionum signa ipsi AC parallelæ ducantur secantes AB, BC rectas lineas. quantò autem crebriores ipsius GD sectiones fient, tantò exactiùs propositum habebitur. earundem itaque sectarum partium prima sit GK, & per signum K ipsi DEC rectæ lineæ parallela ducatur per tricesimamprimam propositionem primi lib. Elementorum Euclid. KL. atque ex ipsa KL dematur KM per

tertiam

tertiã propoſitionem eiuſdem æqualis rectæ lineæ, cuius quadratum per vltimam propoſitionem ſecundi libri eorundem Elementorum factum ſit æquale parallelogrammo rectangulo ab IK, KG comprehenſo. qđ



etiã cõmodè fieri poteſt, quoniã quadratũ lineæ KL maius quidẽ eſt rectãgulo ab IK,KG cõtento, rõnibus ante dictis. His itaq; ſic conſtructis Dico quòd ſi iam dictæ parallelæ crebriores quoad fieri poterit peragantur, atque in ipſis ſimilia ſigna, qualia ſunt E,M pari Conſtructione capiantur, eaque rectis connectantur lineis: inflexa quædam creabitur linea Hyperboles lateri haud abſimilis, cui AB, BC rectæ lineæ continuè propiores fient; nunquam tamen occurrent, etiam ſi in infinitum protractæ fuerint.

Determinatio.

Demonſtratio.

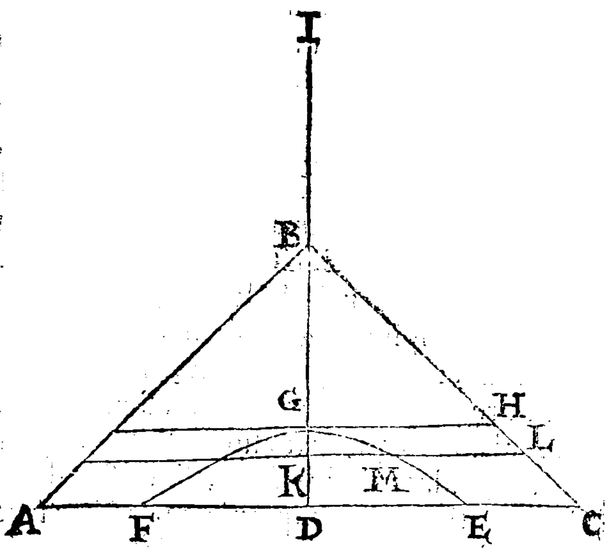
Quum enim per Conſtructionem angulus BDC rectus ſit,& GH parallela ipſi CD: erit per viceſimamnonam propoſitionem primi libri Elementorum Euclidis angulus BGH rectus. ſed angulus GBH itidem per Conſtructionem eſt recti dimidium: ergo per triceſimamſecundam propoſitionem eiuſdem angulus etiam BHG recti dimidium exiſtit. Vnde per ſextam propoſitionem eiuſdem GH æqualis eſt ipſi BG, cuius quadratum æquale per Conſtructionem eſt rectangulo ab FE, EC contento. igitur per ſecundam Com.Sent.huius, & primam Com.Sent.primi lib.Elem. Eucl. quadratum etiam ipſius GH eidem rectangulo ab FE, EC cõprehenſo æquale eſt. Quare per 2 Com.Sent.pri.li.eorundẽ Ele. rectangulum ab FE, EC contentum vnà cum quadrato ipſius DE eſt æquale quadrato ipſius GH ſimul cum eodem ipſius DE

quadra-

quadrato. At rectangulum ab FE, EC contentum cum quadrato lineæ DE per ſextam propoſitionem ſecundi libri eorundem Elementorum æquale eſt quadrato lineæ DC. ergo per primam Com.Sent. eiuſdem primi quadratum etiam ipſius GH cum quadrato ipſius DE æquale exiſtit eidem quadrato lineæ DC. Quadratum autem lineæ DC per quartam propoſitionem ſecundi libri eorundem Elem. æquale eſt quadratis linearum DE, EC, & duplo eius,quod à DE, EC cõtinetur,rectãgulo: igitur per primũ Com.Sent.eiuſdem primi Elementorum,& quadratum lineæ GH cum quadrato ipſius DE eiſdem duobus linearum DE, EC quadratis, & duplo rectanguli à DE, EC comprehenſi æqualia ſunt. Quamobrem per tertiam Comm. Sent. eiuſdem primi Element. communi ablato quadrato lineæ DE, quadratum ipſius GH æquale eſt quadrato ipſius EC, ſimulque duplo rectanguli à DE, EC contenti. Præterea quoniam per Conſtructionem IB æqualis eſt ipſi BG, & GK in rectum additur: erit per ſextam propoſitionem eiuſdem ſecundi Elementorum quadratum ipſius BK æquale rectangulo ab IK,KG contento,& quadrato ipſius BG. & quia per Conſtructionem,& 29, & 32,& ſextam propoſitionem primi libri eorundem Elementorum linea KL æqualis eſt lineæ BK: erit per ſecundam Com.Sent.huius, & primam Com.Sen. eiuſdem primi libri,quadratum ipſius KL æquale rectangulo ab IK,KG contento, & quadrato ipſius BG. Verùm per Conſtructionem rectangulum ab IK, KG, cõprehenſum quadrato ipſius KM eſt æquale.ergo per ſecundam,& primam Com.Sent.primi lib.Elemen.Euclidis quadratum ipſius KL æquale eſt quadratis ipſarum BG, & KM. Sed per quartam propoſitionem ſecundi libri eorund.Element.quadratum KL eſt æquale quadratis linearum KM, ML, & ei, quod bis à KM,ML continetur rectangulo. ergo per eandẽ primam Com.Sent.& duo ipſarum BG, KM quadrata eiſdẽ duobus ipſarum KM, ML quadratis, & duplo rectanguli à KM, ML contenti æqualia ſunt. Quare ablato communi quadrato ipſius KM, erit per tertiam Comm. Senten. eiuſdem primi libri Elemen. quadratum ipſius BG, ſeu ipſius GH (æqualia enim ſunt per ſecundam Com.Sent.huius) æquale quadrato ipſius ML, & duplo eius, quod à KM, ML comprehenditur. Atqui paulo ante oſtenſum eſt idem quadratum lineæ GH eſſe æquale quadrato ipſius EC, & duplo rectanguli à DE, EC contenti:

igitur

igitur per primam Com.Sent. pri.lib. Elem.Eucl.quadratum ipsius ML, & duplum rectanguli à KM, ML comprehensi æqualia sunt quadrato EC lineæ,& duplo eius rectanguli, quòd à DE, EC rectis lineis continetur. Idem autẽ eodem modo potest ostendi in omnibus etiã alijs parallelis per sectiones ipsius DG tam in partẽ C, quàm in partem A ductis. Quapropter per cõuersum Corollarij primæ superiorũ præcipui Problematis demonstrationũ inflexa EGF Hyperboles linea tali Cõstructionis artificio in infinitũ producta, semper ipsis magis, magisq; appropinquabit, nec tamen cũ ipsis vnquã coincidet. In proposito itaque plano duas in vtraque parte descripsimus lineas alteram inflexam, & alteram rectam, inflexas quidem GE, GF; rectas verò BC, BA, quæ iam dictas duas subeunt affectiones. Quod faciendum erat. Conclusio.



DEMONSTRATIO OCTAVA.

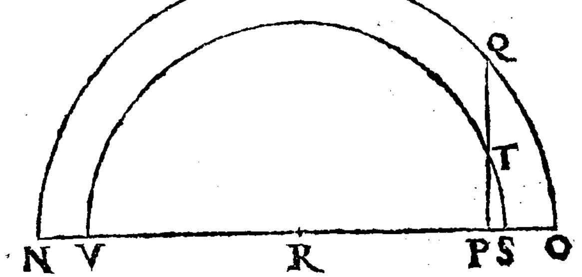
Cõstructio. SIT vt prùs angulus ABC rectus diuisus per lineam BD in duas partes æquales,& ipsa AC ducta, & ipsa DB producta interminatè,& in ipsa DB accipiatur quodlibet signum G, & fiat BI æqualis BG, deinde per vltimam propositionem secundi lib. Elementorum Euclidis fiat quadratum æquale rectangulo ab ID, DG contento, & à linea DC per tertiam propositionem primi libri eorundem Elementorum auferatur DE æqualis lateri iam

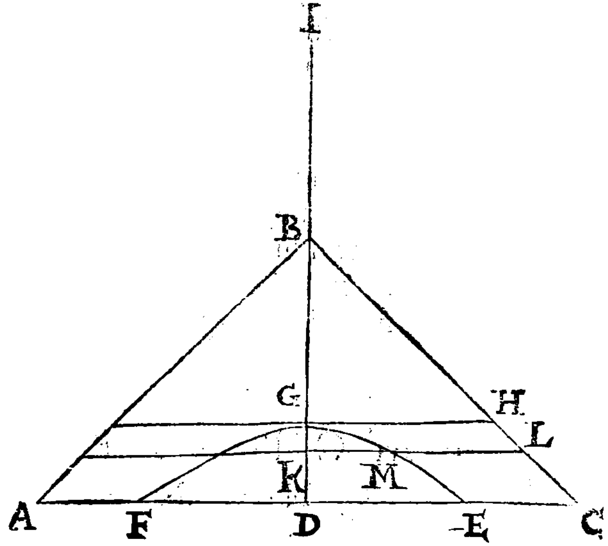
dicti

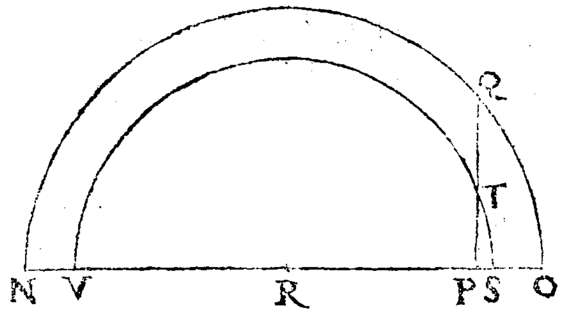
dicti quadrati, subinde similiter in linea GD suscipiantur crebriora quoad fieri potest signa, per quę ducantur vtrinque parallelę ipsi AC, quemadmodum ipsa KL, & per easdem vltimam secundi, & tertiam primi abscindarur ab ipsa KL pars KM potens parallelogrammum rectangulum ab IK, KG contentum, idemque in cæteris parallelis fiat. & à signo G per omnia signa ipsis ME similia rectæ continuentur lineolę. atq; arguatur vt in præcedenti demonstratione (scilicet ibi [Præterea quoniam per Constructionem IB, &c.] & fiat bis illa argumentatio) & propositum concludetur. Conclusio.

DEMONSTRATIO NONA.

SIT rursus quemadmodum superiùs angulus ABC rectus diuisus per lineam rectam BD per medium, & ipsa AC ducta, & DB interminatè producta, & in ipsa BD acceptum quodlibet signum G, factaque BI æqualis ipsi BG. Sumatur deinde recta linea NO æqualis ipsis ID, DG in directum coniunctis. fiatque per tertiam propositionem primi libri Elementorum Euclidis OP æqualis ipsi DG, & erit PN quoque ipsi ID æqualis per tertiam Communem Sententiam eiusdem. Postea verò à signo P erigatur ad angulos rectos ipsi NO per vndecimam propositionem eiusdem primi Elementorum recta PQ interminata ex parte Q, & secetur per decimam propositionem eiusdem recta NO per medium in signo R. & centro R, spatio autem RN per tertiam pet. eiusdem describatur semicirculus NQO secans rectam PQ in signo Q. Cõstructio.







Rursus in quot partes ipsa GD secta fuit in totidem, æqualesq; ipsis per 10 prop. sexti lib. eorundẽ Elem. ipsa quoq; PO secetur, quarũ OS æqualis sit ipsi DK. & similiter centro R, & interuallo RS designetur semicirculus STV secans ipsam quidem PQ rectam lineã in signo T, ipsam verò NR in signo V. His

Determinatio proposito deseruiés.

ita constructis dico ꝙ recta linea PQ potest parallelogrammum rectangulũ ab ID, DG contentum, & recta TP potest rectangulum, quod ab IK, KG comprehenditur. quod sic demonstrabitur.

Demonstr. eiusdem.

Quoniam per 31 prop. tertij lib. Elemen. Eucl. angulus NQO (si NQ, QO rectæ lineæ ductæ intelligantur) rectus est, & PQ per Constructionem perpendicularis ipsi NO: erit per Corollarium octauæ prop. sexti lib. eorundem Elem. ipsa PQ inter ipsas NP, PO media proportionalis. Quare per primam partem 17 prop. eiusdem quadratum ipsius PQ est æquale rectangulo, quod ab NP, PO continetur. Pari ratione quadratum ipsius PT æquale est rectangulo ab VP, PS contento. At rectangulum ab NP, PO contentum rectangulo ab ID, DG contento, & rectangulum ab VP, PS comprehensum rectangulo ab IK, KG comprehenso æqualia sunt per tertiã Com. Sent. huius. Nam NP quidem

dem

dem ipsi ID, & PO ipsi GD per Constructionem æquales positæ sunt. VP autem ipsi IK, & PS ipsi KG sunt etiam æquales: Cùm enim PO ipsi DG, & SO ipsi DK per Constructionem æquales sint: ergo PS ipsi KG per tertiam Com. Sent. pri. lib. Ele. Eucl. æqualis est. cùm autem NR ipsi RO, & VR ipsi RS per 15 defin. eiusdem primi æquales sint: igitur ablatis VR, RS ęqualibus, erit per eandem tertiam Com. Sent. NV æqualis ipsi SO: quare & ipsi KD per primam Com. Sent. eiusdem. Atque idcirco ablatis NV, & KD ab ipsis ID, & NP æqualibus; remanent per eandẽ tertiam Com. Sent. VP, & IK æquales.

Conclusio eiusdem.

Cùm itaque hæc ita sese habeant, manifestum est ꝙ PQ, & PT rectæ lineæ possunt rectangula ab ID, DG, & ab IK, KG comprehensa. Quamobrem si ex DC abscindantur per tertiam prop. primi lib. Elem. Eucl. DE æqualis ipsi PQ, & ex KL similiter KM æqualis ipsi PT (quod rationibus superiùs dictis factu commodum est) ipsæ etiam DE, & KM eadem iam dicta rectangula poterunt.

Applicatio ad propositum.

Similiter autem si centro R, & interuallis reliquis ipsius PO sectionibus semicirculi rectam PQ secantes describãtur; cæteræ quoq; parallelarum per signa ipsius DG ductarum partes talia rectangula potentes in ipsa PQ reperientur. Vnde si ab ipsis parallelis iam dictæ etiam reliquæ partes per tertiam prop. pri. lib. eorundem Elem. resecentur, & à signo G per omnia earum puncta ipsis EM punctis similia rectæ lineolę continuentur: dubio procul superioribus argumentationibus propositum nobis quæsitum factum esse demonstrabitur.

Conclusio vniuersalis

Institutum itaque nobis Problema in quocunque prostrato plano sine vllo Conicorum corporum auxilio tripliciter hucusque iuxta tres diuersas Constructiones demonstrauimus.

Nunc autem nobis ad reliquas etiam eiusdem admirãdi Problematis in quolibet subiecto plano sine corporibus conicis demõstrationes progrediendum est. Quare ab instituto nostro alienũ non erit duas hic demonstrationes subiungere, quibus Iacobus Peletarius in Commentario suo de Contactu linearum conatus est duas lineas in eodem plano sine Cono descriptas ostendere, alteram rectam, alteram inflexam, quæ in infinitum protractæ magis semper sibi appropinquent, nunquam tamen coincidant. Quoniam autẽ istæ duæ demonstrationes eo modo, quo à Peletario declarantur, maximam, meo quidem iudicio, suscipiunt imperfectionem (vt inferiùs in ostendendis Autorum de hac re tractantium defectibus

Iacobus Peletarius in commẽtario de contractu linearum.

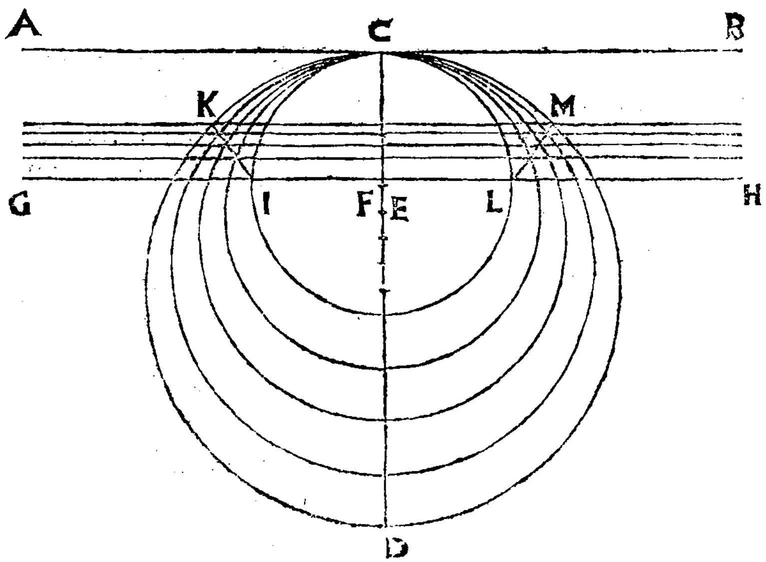
fiet

fiet perspicuum) idcirco non ita ego vt in Commentario Peletarij iacent eas exponam, sed quoad fieri poterit perfectionem eis adhibebo. Harum verò prima sit huiusmodi.

DEMONSTRATIO DECIMA.

Cõstructio.

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD; & secet CD ipsam AB ad angulos rectos in signo C, sitque AB ex vtraque parte indefinitæ quantitatis, CD verò in partem D interminata. Suscipiatur deinde in recta CD signum aliquod E, quo signo facto centro, & interuallo EC per tertiam pet. 1. lib. Elem. Euclid. circulus descri-



batur, qui per Constructionem, & Corollarium 16. prop. 3. libr. eorundem Elem. tanget rectam AB in vnico tantùm signo C. Similiter acceptis in recta ED crebrioribus quoad fieri potest signis procedendo à signo E versus D, & occupãdo interualla vsque ad punctũ C, describantur circuli, qui eadem ratione tangent omnes rectã AB in vno tantũ C signo: eruntq; per Cõstruct. & 30 defin. huius posteriores in descriptione prioribus maiores, & exteriores

circu-

In hoc deficit Peletarius.

circuli. Deniq; per aliquod F signum dimetientis primi, & minoris circuli ducatur per 31. Prop. 1. lib. Elem. Eucl. recta linea parallela ipsi AB secans omnes iam dictos circulos, & ex vtraq; parte indefinitæ quantitatis existens, quæ sit GFH. Manifestum igitur est quòd omnia signa, in quibus GH secat iam dictos circulos, æqualiter à recta AB linea distant. quãdoquidem minimæ eorũ ab ipsa distãtiæ per 32, & 19. Prop. 1. lib. eorundẽ Elemen. sunt perpendiculares ab ipsis ad rectã AB ductæ, quæ omnes inter se sunt parallelæ per 28. Prop. 1. lib. Elem. Eucl. & æquales per 34. prop. eiusdẽ. Si itaque in secundi circuli circunferẽtia inter parallelas AB, GH signũ aliquod sumatur, proculdubio propinquius erit rectæ AB quàm omnia signa, quæ sunt in parallela GH. Sumatur igitur, sitq; proximius lineæ GH, quoad fieri potest, modò nõ tangat ipsam, & vocetur punctũ secundum. per quod iterũ ducatur alia parallela ipsis AB, GH secans eosdẽ circulos, & vtrinq; interminata. & supra ipsam proximè accipiatur tertium signũ in circunferẽtia circuli tertij iuxta descriptionis ordinẽ, per quod rursus ducatur tertia parallela. idemq; in omnibus fiat circulis, hoc tamen animaduerso, quòd tertia parallela sit proximior secundæ quàm secunda primæ, & quarta tertiæ quàm tertia secundæ, & sic in singulis. ac demũ signa illa, per quæ parallelæ ductæ fuerant rectis lineolis cõiungantur, primum. s. cũ secũdo, & secundũ cum tertio, & tertiũ cũ quarto, & sic deinceps.

Determinatio.

Dico itaque quòd ex paruis rectis lineis per illa pũcta ductis quædã creabitur linea, vt IK, vel ex altera parte LM, quæ si eodẽ artificio per circulorum descriptionẽ, & parallelarũ ductũ vnà cum ipsa AB in infinitũ protrahãtur, semper eidem AB propiores euadent, nũquã tamen ipsi occurrent.

Demonstratio.

Nã quòd semper quidẽ ad ipsam propius paulatim accedant, ex Cõstructione patet, cùm primũ signũ ipsi propinquius sit quàm secundũ, & secundum quàm tertium, & tertium quàm quartum, sicq; ordinatim in infinitũ: quòd verò nunquã coniungi possint cũ ipsa, hinc etiã liquet: quoniã si infiniti describantur circuli, infinitisq; parallelis secentur, atq; ipsæ IK, LM lineæ eo modo per sectionũ signa producantur; cõtinuè per circulorũ circunferentias meabunt, ipsasque numquã transgrediẽtur. Cùm autẽ ipsæ circulorũ circunferentiæ nullibi nisi in signo C rectam AB tãgere possint per Corollariũ 16. prop. 3. lib. eorund. Elem. Igitur ipsæ etiã IK, & LM alibi quàm in signo C ipsam nõ tãgent. At neque etiã in signo C ipsã tãgere possunt (alioqui quędã etiã circũferentiarũ signa

signa

ſigna ab ipſo contractus ſigno C diuerſa ipſam A B in eodem C ſigno contingerent, quod abſurdiſſimum eſt, & contra iam dictum corollarium) ergo nullibi cum ipſa vnquam conuenient, etiam ſi in infinitum producantur. Quòd præterea linea I K, ſeu L M atque huiuſcemodi omnes neque rectæ, neque circulares, ſed miſtæ ſint nulli debet eſſe dubium. Nam ſi rectæ quidem eſſent, neceſſariò ipſi A B occurrerēt per quintam petitionem primi libri eorundem Elementorum cùm à minoribus duobus rectis exeant, vt ex Cōſtructione, & 29. propoſitione eiuſdem conſtat ſi perpendiculares à punctis ſectionum ipſius I K, ſeu L M ad rectam A B ductæ intelligantur: at huius contrarium oſtenſum eſt: igitur rectæ lineæ non ſunt. Si verò circulares eſſent, in infinitum protrahi non poſſent quin ſibiipſis coinciderent, figuramque circularem includerent; hoc autem ab his fieri minimè poteſt, cùm per diuerſas cōtinuè circulorum circunferentias ex Cōſtructione pertrāſeant. ergo neque circulares eſſe poſſunt. Neceſſariò igitur miſtam ex recto, & circulari naturam habent, inflexæque lineæ ſunt lateri ipſius Hyperboles aud abſimiles. Duas itaque in eodē propoſito plano hac etiam via deſcripſimus lineas alteram rectam, & alteram inflexam, quæ duas ſæpenumero commemoratus affectiones ſortitæ ſunt. Quod faciendum erat.

Hoc malè probatur à Peletario.

Conclusio.

Quoniam in ſequenti vndecima demonſtratione neceſſarium nobis eſt vti quodam Theoremate, quod Vitellio in 37. prop. 1. libr. ſuæ Perſpectiuę longa, ſatiſq; obſcura demoſtratione demonſtrauit: nō abre factum iri exiſtimo ſi illud hìc in medium adducamus & quadam breui, facilique demoſtratione oſtendamus. Sit igitur Theorema huiuſmodi.

Lemma, ſeu aſſumptum ſequentis XI Demonſtrationis.

Theorema.

Propoſitio.

OMNIVM duorum triangulorum, rectangulorum, quorum vnum laterum vnius rectum angulum continentium fuerit maius altero eorundem laterum alterius, reliquum verò minus reliquo: erit angulus

lus

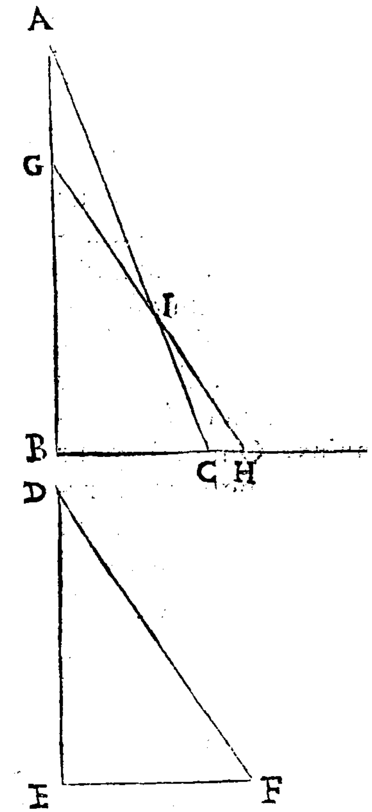
lus acutus vnius maius latus reſpiciens maior angulo alterius, ſuum relatiuum latus reſpiciente, reliquus autem reliquo minor.

Expoſitio.

Sint duo triangula A B C, & D E F habentia angulos, qui ſunt ad B, & E, rectos. & ſit latus quidem A B vnius maius latere D E alterius, latus verò B C minus latere E F. Dico quòd angulus A C B angulo D F E maior eſt, angulus autem B A C angulo E D F minor. Auferatur per tertiam propoſitionem primi libri Elementorum Euclid. abipſa A B æqualis ipſi D E, quæſit B G. & producatur per ſecundam petitionem eiuſdem ipſa B C in partem C quouſque excedat ipſam E F. & à tota ipſa producta per eandem tertiam primi reſecetur pars B H ęqualis ipſi E F. cadetque neceſſariò H punctum extra pūctum C. Ducatur demum per primā petitionem eiuſdem à puncto H ad punctum G recta linea H G, quæ neceſſariò (vt ſenſui patet) ſecabit latus A C, alioqui (vt clarè demonſtrat Vitellio in triceſimaſecunda propoſitione eiuſdem ſui primi libri) duæ rectæ lineæ includerent ſuperficiem. quod eſt cōtra decimam Com. Sent. primi libri Elementorum Euclidis. His ita conſtructis quoniam G B æqualis eſt ipſi D E, & B H ipſi E F, & angulus B angulo E per quartam petitionem eiuſdem (recti enim ſunt) & baſis igitur G H per quartam propoſitionem eiuſdem baſi D F æqualis erit, & totum G B H triangulum toti D E F triangulo erit æquale, & cæteri anguli cæteris angulis æquales erunt ſingulus ſingulo, ſub quibus æqualia latera ſubten-

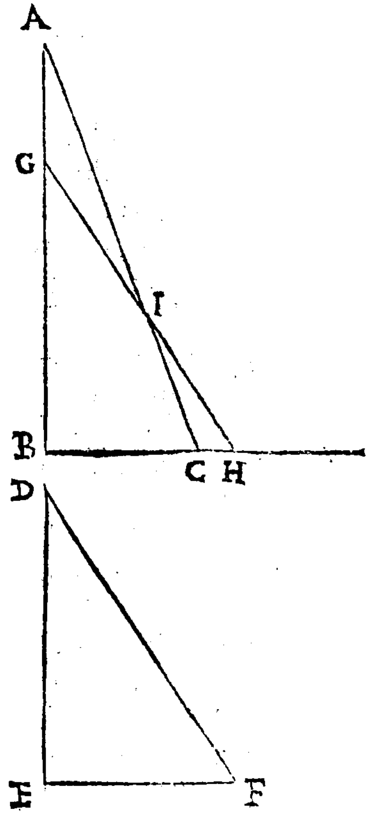
Determinatio.

Cōſtructio.



Demonſtratio.

ſubtensubtēdūt. Angulus igitur BGH angulo EDF, & angulus GHB angulo DFE æqualis est. Sed angulus ACB angulo GHB maior est per sextamdecimam propositionem primi libri Elementorum Eucl. ergo & suo æquali DFE maior erit per septimam Communem Sententiam huius. Quare & angulus BAC minor est angulo EDF per easdem, vel per tricesimamsecundā propositionem primi libri Elementorum Euclidis, & quartam Communen Sententiam huius. Conclusio. Omnium igitur duorum triangulorum rectangulorum, & reliqua, vt in propositione. Quod erat demonstrandum, atq; præassumendum.

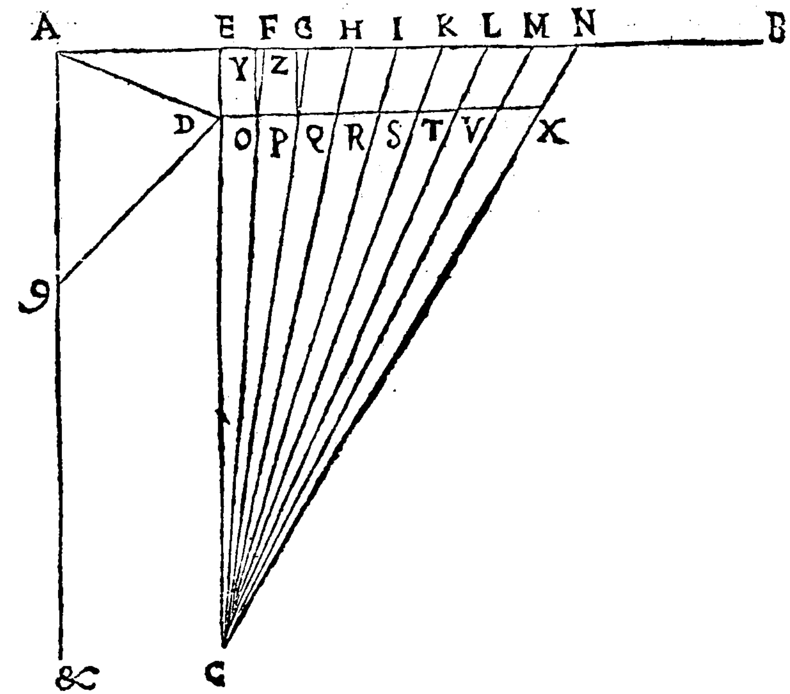


DEMONSTRATIO
VNDECIMA.

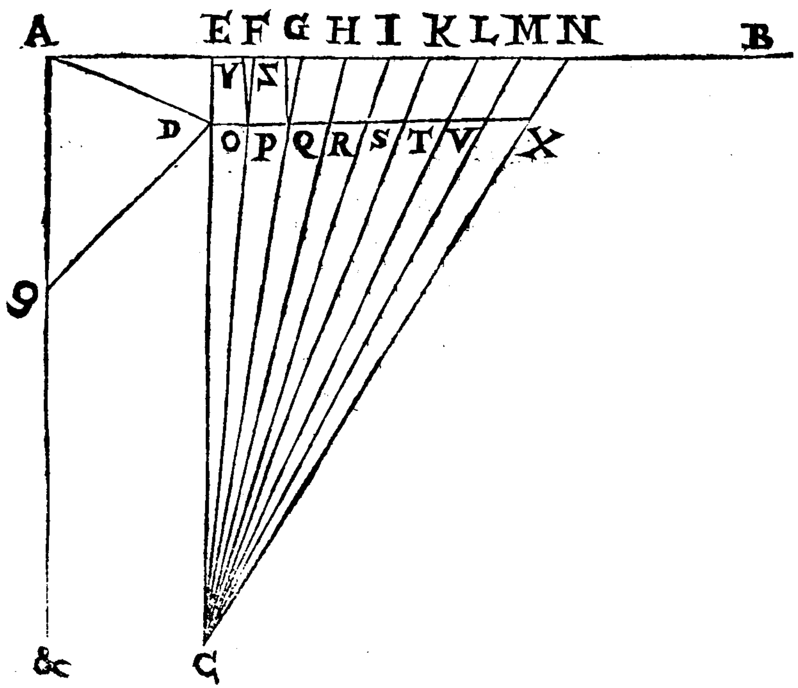
Cōstructio.

SIT rursus AB recta linea, quam secet alia CDE recta linea ad angulos rectos in signo E. sitque ipsa AB in partem B interminata. & suscipiatur in ipsa CE quodcunque signum D, & à signo C ad quælibet signa (sed sint crebriora quoad fieri potest) ipsius EB ducantur per primam petitionem primi libri Elementorum Euclidis rectæ lineæ triangula cum ipsa CE, atque inuicem, & cū partibus ipsius EB facietes, vt ipse CF, CG, CH, CI, CK, CL, CM, CN, & si quæ fuerint plures. Quoniam itaque perspicuum

cuum



cuum est per tricesimamsecundam, & decimamnonam propositionem eiusdem primi libri Elementorum eas quidem ex hisce lineis, quæ à puncto *E* magis remotæ sunt, minùs remotis longiores esse, ipsamque *E*C omnium istarum esse minimam: abscindantur per tertiam propositionem primi libri eorundem Elementorum ab omnibus istiusmodi lineis partes æquales ipsi DE quantacunq; sit, vt ipse FO, GP, HQ, IR, KS, LT, MV, NX. continuentur denique per primam petitionem eiusdem primi omnia hæc abscissionum signa paruis quibusdam rectis lineis, quales sunt DO, OP, PQ, QR, RS, ST, TV, VX. His ita constructis, Determinatio. aio ipsam DOPQRSTVX ex multis illis rectis lineolis compositam lineam quò magis versus partes B vnà cum recta linea AB tali artificio producitur, eò magis ipsi proximari: & nihilosecius cum ipsa nunquam conuenire posse, quamuis etiā in infinitum protrahātur. Prima igitur Quæsiti pars ita demōstratur.



Demonstratio primæ partis.

Hoc Peletarius non demõstrat, sed augatur.

Quoniam ex omnibus rectis lineis à signo C ad rectam AB ductis nulla præter ipsam CE ipsi AB perpendicularis existit per Constructionem, & tricesimamsecundam propositionem primi libri Elementorum Euclidis: ducantur igitur per duodecimam propositionem eiusdem à punctis O, P duæ perpendiculares super ipsam AB, vt OY, PZ. quæ quidem ratione superiùs sæpe dicta sunt minima interualla, quibus signa OP à recta AB distare possint. Quum itaque per tricesimamsecundam, & decimamnonam propositiones primi libri eorundem Elementorum perpendicularis OY minor sit quàm recta FO, ergo & eius æquali DE perpendiculari minor erit per secundam partem septimæ propositionis quinti libri eorundem Elementorum, & nonam Communem Sententiam huius, vel per solam septimam Communem Sententiam huius. minùs igitur distat signum O quàm signum D ab ipsa AB recta linea. Præterea PZ perpendicularis minor est OY perpendiculari. Si enim minor non sit, aut ęqualis, aut maior erit.

erit.

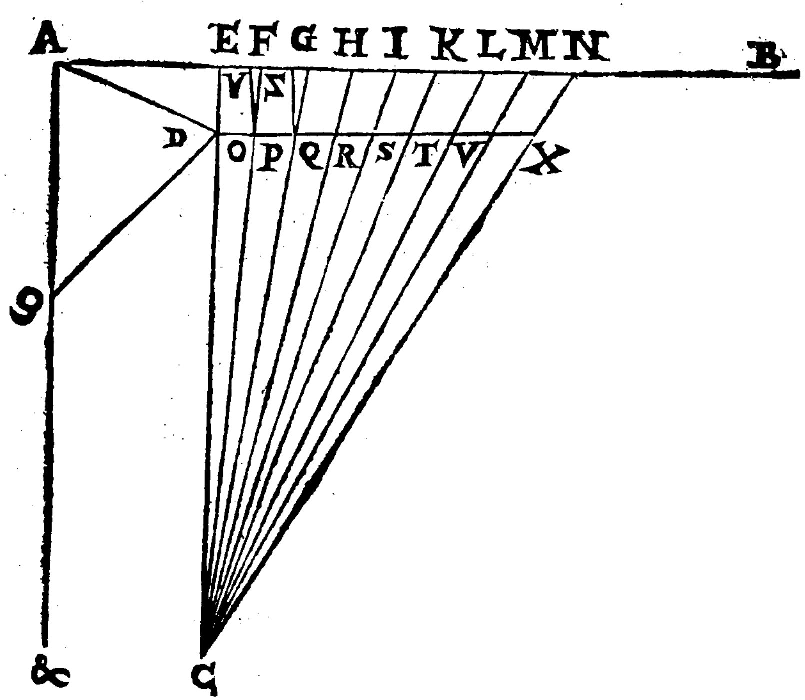
erit. Sit primum æqualis. quoniam autem OF, PG etiam æquales ex suppositione sunt, & anguli ad signa Y, Z recti. ergo per 47 propositionem, & primam Com. Sent. bis sumptas, & tertiam Com. Sent. primi lib. Elemen. Eucl. semel sumptam, & secundam Comm. Sent. huius ter sumptam FY quoque ipsi GZ æqualis erit. quare per octauam propositionem primi lib. eorundem Elementorum angulus OFY angulo PGZ erit æqualis, externus nempe interno, & opposito, quod fieri non potest per 16 propositionem eiusdem. Non est igitur ipsa PZ perpendicularis æqualis ipsi OY perpendiculari. Sit modo maior quàm ipsa. erunt igitur per easdem 47 prop. & primam Com. Sent. primi lib. Elemen. Euclid. bis sumptas, & eandem secundam Comm. Sent. huius semel sumptam quadrata ipsarum OY, YF æqualia quadratis ipsarum PZ, ZG. At quadratum ipsius PZ maius est quadrato ipsius OY per secundam Com. Sent. huius. igitur per quartam Comm. Sent. huius quadratum ipsius GZ minus erit quadrato ipsius FY. ergo & linea GZ minor erit quàm linea FY per eandem secũdam Com. Sent. huius. Cùm itaque in duobus triangulis rectangulis PGZ, & OFY latus quidem PZ latere OY maius, latus verò GZ latere FY minus sit: igitur per 37 propositionem primi libri Vitellionis (quàm superiùs tanquam Lemma præsumpsimus, atque demonstrauimus) angulus OFY minor erit angulo PGZ, externus scilicet interno, & opposito, quod per eandem 16 prop. primi libri Elemen. Eucl. fieri nequit. Non est igitur PZ maior quàm OY. atqui ostensũ est ꝙ neque ipsi æqualis, ergo de necessitate minor quàm ipsa est. minus igitur distat signum P quàm signum O ab eadem AB recta linea. Similiter autem ostendetur in reliquis etiam huiuscemodi perpendicularibus, ꝙ quę à puncto E magis remouentur, minùs ab eo remotis breuiores sunt. Lineam igitur DX versus partes B continuè ipsi AB propiùs admoueri necesse est. Quę quidem est prima quæsiti pars. Secunda verò eiusdem quæsiti pars, quòd scilicet linea DX cum recta AB nunquam conuenire possit, etiã si in infinitũ producantur, sic demonstrandum est.

Conclusio primæ partis.

Demonstratio secundæ partis.

In hac parte demonstranda Peletarius petit principiũ, & falsũ quoddam dicit.

Cùm ex Cõstructione pũcta ipsa D, O, P, Q, R, S, T, V, X, & si qua essent huiusmodi alia, per rectarũ linearum ęqualium, vtputa DE, OF, PG, & reliquarum abscissionẽ capiantur: necesse est inter ipsa sic suscepta signa, & rectam AB tales perpetuò intercipi æquales ad inuicẽ rectas lineas. à punctis autem abscissionũ ad rectam AB



per duodecimam propositionem primi libri Elemen. Eucl. perpendiculares semper duci possunt, quippequę per decimamnonam propositionem eiusdem iam dictis abscissis lineis erunt minores, minimęq; distantiæ, per quas linea D X à recta A B in punctis abscissionum distare possit. Si igitur inter ipsam D X, & A B semper quædam perpendiculares duci possunt (vt ostensum est) igitur tanta semper inter ipsas erit distantia, quanta est ipsarum perpendicularium longitudo. Quare patet etiam secunda pars. Quòd autem linea D X eiusdem naturæ sit, cuius est illa, quam in præcedenti demonstratione per circulos descripsimus, eisdem rationibus conuinci potest. Quinimo hìc quoque eiusmodi circuli describi possunt vtranq; ipsius Quæsiti partem ostendentes, si à signo A rectæ A B per vndecimam propositionem primi libri eorundem Elementorum ad rectos erigatur angulos quędam recta linea A &, in & partem interminata, in qua statuantur centra ipsorum circulorum inæqualium, et rectam A B in A signo tangentium, et per singula lineæ D X signa transientium. Centra autem eorundem circulo-

Cōclusio secūdæ partis.

Quòd sit curua.

Vnitur hæc Demonstratio cum præcedenti.

circulorum in ipsa A & recta linea reperientur, si à signo A ad omnia lineæ D X signa, per quæ circuli transire debent, rectæ lineæ per primam petitionem primi libri eorundem Elementorum quemadmodum ipsa A D ducantur; atque ad ipsa signa, ad ipsasque deductas rectas lineas per vicesimamtertiam propositionē eiusdem primi Elementorum anguli rectilinei versus partes C & constituantur æquales angulis, qui à iam dictis deductis lineis, & à linea A & continentur; ac demum rectæ lineæ, quæ denuo adangulorum constitutionem à signis lineæ D X ducuntur, indirectū protrahantur donec per quintam petitionem primi libri eorundē Elementorum ipsi A & occurrant: vbi enim ipsi occurrent, ibi erunt circulorum cētra per sextam propositionem, & quintamdecimā definitionem eiusdem primi. vt gratia exempli recta linea A D ducta, ad ipsam, ad datumque in ipsa signum D constituatur rectilineus angulus ipsi D A & æqualis; fiatque ita constitutio, vt recta, quæ vnà cum ipsa A D constituendum angulum est cōprehensura, respiciat versus C & partes. ac denique producatur hęc linea quousque secet lineam A & in signo ɔ (secabit enim eam necessariò per quintam petitionem primi libri Elementorum Euclidis; quoniam per Constructionem angulus D A ɔ, & ideo ipsi etiam æqualis per septimam Com. Sent. huius A D ɔ est minor recto) igitur per sextam propositionem primi libri eorundem Elementorum A ɔ, et D ɔ æquales sunt. Quamobrem signo ɔ facto centro primi circuli describendi; et interuallo ɔ A, si ipse primus circulus describatur; eius circunferentia per quintamdecimam definitionem eiusdem transibit per signa A D tangens quidem per Corollarium sextædecimæ propositionis tertij libri Elementorum Euclidis rectam A B in signo A, secans verò inflexam D X in signo D. Hoc itaque pacto cæterorum quoque circulorum centra in linea A & inuenientur, qui nimirum si describantur; rectam lineam A B omnes in A signo contingent, et singuli per singula lineæ D X signa transibunt, ipsiusque naturā, ortum, & affectiones quemadmodum superiùs nobis ostendent. Duas igitur hac quoque via in proposito plano designauimus lineas alteram rectam, alteram inflexam, quæ in infinitum productæ semper sibi propiores euadunt, numquā tamen ad inuicē coëunt. Quod facere oportebat.

In hoc deficit Peletarius.

Conclusio vniuersalis.

AVTORVM

AVTORVM DE HAC RE TRACTANTIVM ERRORES.

Propositum.

EXPEDITIS iam vndecim varijs propositi Problematis demonstrationibus, quæ mihi afferendæ in medium erant, consequens est Autorum, qui de hac re tractarunt deliquia ostendere; nullius equidem malignitatis, mordacitatisue, seu inanis iactantiæ gratia: sed solùm vt huius pulcherrimi, admirandiq; in Geometria Problematis demonstrationes à multis erroribus vindicentur, expurgenturq; ac demum eius veritas candida, ab omniq; macula immunis studiosis relinquatur. Ordo. *In explicandis itaque Autorum defectibus integras eorum demonstrationes haud enarrabo, verùm locos duntaxat eos pertingam, in quibus ipsi (ni fallor) deliquium perpessi sunt. atque non omnia ab eis prætermissa declarabo (multa enim sunt) sed ea tantùm, quæ adeo necessaria mihi videntur, vt sine illis demonstrationes eorum nullæ sint. Siquis verò cuncta, quæ ab ipsis vel omissa penitus, vel obscurè, inordinatè, confuseq; dicta sunt exactè animaduertere voluerit; eorum volumina in principio à nobis commemorata perlegat, nostrasq; superiùs allatas demonstrationes diligenter cum suis conferat.*

DIGRES-

DIGRESSIO CONTRA VERNERVM.

VERVM enimuero vt iam rem ipsam aggrediar Ioannes Vernerus Nurembergensis Mathematicus Clarissimus in libello suo de vigintiduobus Elemẽtis Conicis prope finem Problema, de quo nunc agimus, duobus modis demonstrauit; quorum alter quidem est ille, quem nos in prima nostra demonstratione instaurauimus: alter verò, quem in septima, & octaua, & nona nostris demonstrationibus illustrauimus, atque ampliauimus. Antequam autem ad ipsius Problematis demonstrationem accederet, eas tres ipse propositiones demonstrauit, quas nos etiam ante primam propositi Problematis demonstrationem prædemonstrauimus. Sunt autem apud ipsum decimumseptimũ, decimum octauum, & decimum nonum Elemẽta Conica. quamuis perperam ipse has tres propositiones ordinauerit; quoniam secundam loco primæ, & primam loco secundæ posuit: cùm tamen in ostendendo proposito prius secunda quàm prima abutatur. nos verò eo ordine ipsas disposuimus, quo ipsis vtimur. (Ioannis Verneri prauus ordo.) In tertia itaque harum trium propositionũ, quæ apud nos etiã tertia est, maximè Vernerus defecit. quoniã Theorema illud particulatim proposuit, atque demonstrauit; cùm tamen vniuersè verum sit, atque in proposito nostro in vniuersum tum proponi, tum demonstrari necessariò debeat, alioquin proposito problemati quibusdam in Casibus deseruire non poterit. (Ioãnis Verneri defectus primus.) Sic enim illud Vernerus proposuit. *Si duo data rectangula inæqualium longitudinum quadratis suarum latitudinum iungantur, fuerintq; hæc duo aggregata inuicem æqualia: erit quadratum aggregati maioris longitudinis minus quadrato aggregati breuioris longitudinis.* Si igitur in proposito nostro (vt in primæ nostræ demonstrationis secunda figura) ipsa KO, & PR latera quadratorum, quibus parallelogramma rectangula adiungi debent, haud latitudines ipsorum rectangulorum, sed longitudines ambo; vel alterum quidem longitudo, alterũ verò latitudo fuerint: quid nam dicendum erit? vtrum in his etiam Casibus iam dictum Theorema nobis deseruit? nonne inutile prorsus erit, cùm de illis tantùm rectangulis loquatur, quæ cùm inæquales habeant longitudines, quadratis suarum latitudinum

num iunguntur? Quid enim si quis dubitet vbi rectangulorum latitudines inæquales supponuntur, ipsaque rectangula quadratis suarum longitudinum iunguntur: vel quando latitudo vnius longitudini alterius inæqualis supponitur, ipsorumque rectangulorũ alterum quidem quadrato suæ longitudinis, alterum verò quadrato suæ latitudinis iungitur, sunt autem duo aggregata æqualia; an in his etiam duobus Casibus Theorema verum sit, nec ne? quòd scilicet quadratum aggregati maioris latitudinis minus sit quadrato aggregati minoris latitudinis, vel quòd quadratum aggregati maioris longitudinis minus sit quadrato aggregati breuioris latitudinis. Quòd itaque in his duobus Casibus Theorema illud ita vt à Vernero proponitur, demonstraturque nullum nobis auxilium afferat, perspicuum est. Quòd verò propositum problema iuxta primum nostrum demonstrandi modum duos etiã, quos diximus Casus suscipere possit, quisque cognoscere poterit si modò longe à summitate, modò prope summitatem Hyperbolis parallelas ipsas duxerit. tres enim omnino Casus inueniet. quorum vnus est, quando ambæ parallelæ intra Hyperbolem ab vno eius latere ad alterum ductæ ambabus parallelis inter Hyperbolem, & non coincidentem extra Conum sibi indirectum iacentibus maiores sunt; vt Vernerus accepisse videtur, quẽ Casum tanquam commodiorem nos etiam suscepimus; & in hoc Casu rectangula inæqualium longitudinum quadratis suarum latitudinum iunguntur. Secundus verò Casus est, quando ambæ iam dictę internę parallelæ ambabus eisdem externis indirectum sibi iacentibus minores sunt, verbi gratia si in ipsa iam dicta nostra figura duplæ ipsarum KL, PQ rectarum linearum rectis KO, PR minores essent; atque in hoc Casu rectangula inæqualium latitudinum quadratis suarum longitudinum adiunguntur. Tertius autem Casus est, quãdo altera quidem dictarum internarum parallelarum externa sibi indirectũ iacente parallela minor est, altera verò earundem internarum maior quàm externa ei indirectum iacens; ac demum in hoc casu rectangula latitudinem longitudini inæqualem cùm habeant, alterũ quidem eorum quadrato suæ longitudinis, alterũ verò quadrato suæ latitudinis iungitur. Quòd igitur propositum Problema iuxta primum nostrum demonstrãdi modum duos etiam hosce vltimos Casus suscipere possit credo nemini dubiũ esse. Potest autem hoc etiã sic cõfirmari. Pappus Alexandrinus ostendit (vt superiùs vidimus) quòd,

Tres casus secundæ partis tertij nostri Elementi in principio positi.

Primus Casus.

Secũdus Casus.

Tertius Casus.

quòd circa non coincidentes rectas lineas duæ Hyperbolæ describi possunt, quæ etiam inter sese non coincidentes sunt, & semper sibi magis appropinquant in infinitum productæ. iuxta hanc doctrinam igitur circa non coincidentes rectas lineas huiuscemodi Hyperboles infinitas vnam intra aliam describere possumus. Vnde manifestum est, quòd iam dictæ internæ parallelæ continuè minores, externæ verò maiores fient. Quòd verò iam dictum Theorema in omnibus hisce Casibus vniuersè verum sit, facilè ostendetur si demonstratio illa, qua nos secundam eius partem demonstrauimus, cunctis Casibus coaptabitur. nos enim vniuersaliori quodam modo Theorema illud proposuimus, atque demonstrauimus. cuius secunda quidem pars tribus iam dictis opitulatur Casibus, prima verò quamuis proposito nostro nullum afferat iuuamentum (quoniam nunquam parallelæ intra Hyperbolem ab vno eius latere ad alterum ductæ æquales inuicem sunt, sed basi Coni propinquiores remotioribus semper maiores, vt ex decima Com. Sent. huius, vel ex Corollario primi prædemonstrati Theorematis patet) nihilominus Theorematis vniuersalem doctrinam nobis ostendit. Habet autem & illa prima pars duos Casus. aut enim latera illa, quæ ibi supponuntur æqualia longitudines rectangulorum sunt ambo, aut ambo latitudines. nam alterum quidem longitudo, alterum verò latitudo esse non possunt, cùm aggregata æqualia esse debeant, vt consideranti liquet. Cùm itaque iam dictum Theorema vniuersale sit, & prima quidem eius pars duos suscipiat Casus, secunda verò tres, qui porrò tres Casus eius, de quo sermonem habemus Problematis Constructioni accidere possunt: necessarium mihi visum fuit vniuersè illud proponere, atque demonstrare, vt quod etiam præ manibus habemus Problema vniuersè construi, demonstrariq; posset. Maximum etenim in scientijs vitium est (vt docet Aristoteles) ea, quæ vniuersè demonstrari possunt, particulatim ostendere. Qui namq; omne Aequilaterum, aut Aequicrure, aut Scalenum ostendit tres habere angulos duobus rectis æquales, non demõstrat vniuersè, etiã si in vnaquaq; specie hoc demõstrauerit; sed qui omne Triangulũ quatenus Triangulum est. Hũc igitur errorẽ Vernerus mihi perpessus esse videtur, cùm Theorema illud particulatim proponat, atq; demonstret, credens tamen se vniuersè demonstrare. Non.n. quadratũ aggregati maioris longitudinis quadrato aggregati minoris lõgitudinis propterea minus est,

Quomodo Theorema illud nostrum in tribus casibus demonstretur.

Duo primæ partis casus qui sint.

Lib. Posteriorum.

est, quòd rectangulorum longitudines quidē inæquales sint, aggregata verò æqualia (nam si latitudines etiam, vel latitudo, & longitudo inæquales supponantur, aggregata autem æqualia; eadem affectio sequitur, vt iam diximus) sed quia rectangula quadratis adiuncta vnum quidem commune cum ipsis latus habent, duo verò indirectum iacentia, & in vno rectangulo maiora quàm in altero; aggregata autem æqualia sunt, vt secunda Theorematis pars proposuit. At si tum latera in directum iacentia vnius lateribus indirectum iacentibus alterius, tum aggregata æqualia fuerint: quadrata etiam, quibus rectangula eo modo adiunguntur, æqualia sunt, vt in prima Theorematis nostri parte proposuimus. Hæc igitur sunt subiecta, quibus primò, & per se, & quatenus talia duæ dictæ æqualitatis, & inæqualitatis affectiones insunt; non secus ac Trianguli tres angulos duobus rectis æquales habere. Si enim duo hæc subiecta auferantur, hæ quoque duæ affectiones primò auferuntur: & si hæc ponantur, hæ quoque primò ponuntur, cùm alijs priùs non insint. Sicuti etiam Triangulo ablato, affectio hæc, habere tres angulos æquales duobus rectis primò aufertur: positoque, primò ponitur, quoniam huic primò inest. Ablatis autem rectangulorum longitudinis inæqualitate, & aggregatorum æqualitate; affectio inæqualitatis quadratorum non aufertur. quoniam inest etiam quadratis, quibus rectangula inæqualium latitudinum; siue longitudinis, & latitudinis adiuncta, aggregata æqualia faciunt. Positis rursus illis, affectio primò non ponitur, cùm alijs etiam (vt ostendimus) subiectis priùs inesse possit. Verumtamen quoniam hæc iam conspicua sunt, ad alium Verneri defectum ostendendum accedamus. In vicesimo itaque suo Elemento Conico, vbi Problema, de quo sermonem habemus demonstrauit, in demonstranda secunda eius parte paralogismum quendam commisit, quem etiam omnes alij, quos vidi huiusce rei Autores admiserunt, præter Hieronymum Cardanum, qui rectè quo ad hoc concludit. Paralogismus autem talis est. Cùm Vernerus (vt in primę nostræ demonstrationis secunda figura) parallelam KO parallela PR maiorem esse ostendisset, statim concludens subiunxit. *Ergo signum P propius est rectæ lineæ MH productæ quàm signum K* (quamuis corruptè ibi legatur, *quàm signum O.*) *Horum autem vtrunque signorum KP* (& si ibi etiam mendosè legatur, *OR*) *existit in Hyperbolica sectione GID. & quoniam idem de omni alio*

Secūdus Verneri defectus.

puncto, quod in eadem obliqua linea Hyperbolicæ sectionis GID extiterit, eodem modo demonstrari poterit vsque in infinitum: igitur quantò amplius recta linea MH, & inflexa linea Hyperbolicæ Sectionis GID producantur: eò ampliùs appropinquant, quod Secundo demonstrare oportuit. Hæc sunt eius verba, in quibus concludit lineæ Hyperbolicæ signum P propius esse rectæ MH lineæ quàm signum K, eò q KO recta linea maior est quàm PR. quæ quidem conclusio esset optima si KO, & PR perpendiculares essent ipsi MR rectæ lineæ. tunc enim ipsæ essent minimæ distantiæ, quibus signa KP à recta linea MR distare possint. quoniam autem perpendiculares non sunt (vt ibi ostendimus) atque propterea neque minimæ distantiæ, idcirco paralogismus in conclusione committitur. quandoquidem à causa remota, & extrinseca propositum concluditur. Nam causa maximè propinqua, & immediata maioris appropinquationis signi P ad rectam lineam MR, quàm signi K ad eandem, est minimæ signi K distantiæ maior longitudo, minimæ signi P distantiæ longitudine: non autem cuiusuis distantiæ signi K à recta MR maior longitudo, cuiusuis distantiæ signi P longitudine. Quando enim rem aliquam alicui propinquiorem alia quadam ostendere volumus, non dicimus illam minùs quàm hæc distare iuxta quaslibet earum distantias; sed iuxta minimas, quibus ambæ ab ipsa tertia distare possint. Quamuis itaque parallelarum KO, PR inæqualitas perpendicularium KT, PV inæqualitatis causa sit (vt in superioribus patuit) non ob id tamen hic manendum est, ex hacque remota causa propositum concludendum: verùm vlteriùs progrediendum, quousque immediata reperiatur causa, ex qua propositum rectè concludi possit. veræ enim demonstrationes (quales Geometricæ sunt) ex immediatis causis fieri debent, vt Aristoteles docuit. Qui autem ex causis remotis in Geometria demonstrationes conficiunt, sophisticè quidem demonstrant, paralogismosque committunt. Hęc autem ad Vernerum dicta sufficiant.

Lib. Posteriorum.

DIGRESSIO CONTRA CARDANVM.

HIERONYMVS verò Cardanus Mediolanensis in libro sextodecimo de Subtilitate Problema, de quo loquimur demonstrauit eo demonstrandi modo, cui nos in secunda nostra demõstratione maiorem perfectionem donauimus. Quanuis autem Cardanus ibi dicat se velle vti demonstratione Rabbi Moysis Narbonensis exponentis dictum Rabbi Moysis Aegyptij; nihilominus Demonstratio Cardani à prima, præcipuaque Rabbi Moysis demonstratione tantùm differt, quantùm nostra secunda demõstratio à prima discrepat. nã prima, præcipuaque Rabbi Moysis quidem demonstratio (vt inferiùs manifestum fiet) eadem quasi est cum nostra prima, & cum Verneri demonstratione: Cardani verò demonstratio secundæ nostræ demonstrationi, necnon vltimo ipsius Rabbi Moysis exemplo similis est. In suæ itaque demõstrationis initio peccat Cardanus, quoniã volens probare (exempli gratia in secundæ nostræ demõstrationis figura) quòd planũ ACEF non potest tangere Coni superficiem alibi, quàm in linea AC; petit principium, atque idem per idem probat. Vt autem quod dicimus magis perspicuum fiat, audiamus eius verba. inquit itaque Cardanus. *Sit igitur Conus ABCD: nunc triangnlum nullum* (quanquam ibi *nullo* perperam legatur) *secantem intelligo, sed per ABD intelligo conuexam* (quanuis malè ibi legatur *connexam*) *Coni superficiem, in qua protraho AC à vertice vsque ad basin. Et sit K plana superficies contangens Conum in recta linea AC: quæ superficies intelligatur in infinitum cum Coni superficie extendi. Dico primò hanc superficiem planam non posse tangere Coni superficiem alibi, quàm in linea AC: Quòd si potest, tangat in G, & duco* (licet ibi deprauatè legatur *duo*) *Circulum æquidistantem per G basi BCD:* (vel legatur meliùs, *Circulum per G æquidistantem basi BCD:*) *cùm igitur Circulus sit in vna superficie, erunt puncta contactus plani* K, *& peripheria Circuli illius in vna recta linea, ex demonstratis in vndecimo Elementorum Euclidis. Quamobrem cùm illa linea iam tangat Circuli peripheriam in linea AC, cadet ex demonstratis ab Euclide in tertio Elementorum*

Cardani defectus primus.

mentorum extra circunferentiam Circuli VXG, igitur non tanget illum in puncto G. Hæc sunt verba Cardani, quæ quantùm obscura sint, & non Geometricè dicta, versatis in Geometria iudicãdum relinquo. Hoc autem in primis animaduertam, quòd hæc omnia, quę dicit Cardanus, commodè in nostræ secundæ demonstrationis figura conspici possunt; si per planũ quidem K, nostrum ACEF planum intelligamus; per Circulum verò VXG, ipsum HGI apud nos Circulum. Cùm itaque ita Conum, & planum in linea AC eum tangens Cardanus construxisset, vt verba eius explicant; volens in primis probare illud planum non posse tangere Coni superficiem alibi, quàm in AC linea: incipit hoc indirecta demonstratione ostendere, postea verò directè concludit supponens id, quod à principio probandum suscepit. ac demum hæc eius demonstratio neque directa, neque indirecta Geometrica, sed potiùs Chimerica mihi videtur. Nam directa quidem demonstratio Geometrica directè semper arguendo, & ea, quæ vera sunt supponendo, propositum ex eius causis concludere debet: indirecta verò Geometrica demonstratio supponens statim à principio contrarium eius, quod quæritur, arguensq́ue semper indirectè iuxta secundum Hypotheticarum Aristotelis ratiocinationum modum, deducit tandem nos ad aliquod inconueniens, quod suppositionem fuisse falsam indicat, eiusque contrarium, nempe Quæsitum verum esse demonstrat. At hæc Cardani demonstratio supponit quidem mox à principio contrarium eius, quod quæritur (cùm dicat: *Quòd si potest tangat in G, &c.*) deindè directè semper arguens ad nullum deducit incommodum, sed Quæsitum denique directè concludit illis verbis. *Quamobrem cùm illa linea iam tangat Circuli peripheriam in linea AC, cadet ex demonstratis ab Euclide in tertio Elementorum extra circunferentiam Circuli VXG, igitur non tanget.* Quæ porrò verba nullum absurdum continent, sed propositum directè concludunt. Ni forsan dicat aliquis ad hoc inconueniens hanc demonstrationem deducere, quòd eadem plana superficies eandem Conicam superficiem in eodem signo G priùs tangere supponatur, postea verò non tangere concludatur. Huic autem dictum volo, quòd hoc admitteretur, si illa vltima conclusio, quæ suppositioni oppugnat à Quæsito diuersa esset: quoniam autẽ eadem cum Quæsito est, non possumus dicere ipsam esse incommodum, ad quod deducitur. Nam incom-

Obiectio.

Responsio.

incommodum, ad quod omnis indirecta Geometrica demõstratio deducit, diuersum à Quæsito semper esse debet: alioquin illa demonstratio ex indirecta in directam transiret, nugatioque in eius principio fieret. Exempli gratia volens Geometra probare quòd si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint, latera etiam, quæ sub æqualibus angulis subtendunt æqualia inuicem erunt: atque non potens hoc commodè per demonstrationem directam probare, per indirectam ostendit; & supponit quidē latera esse inæqualia, quod est Quæsito contrarium, ac demum ratiocinando deducit ad hoc absurdum quòd pars sit æqualis toti. quod quidem absurdum idem cum Quæsito non est, sed longè diuersum, vt patet: neque suppositioni illi oppugnat, quæ statim in principio Quæsito contraria posita fuit (quoniã idem cum Quæsito esset, duo enim eidem contraria esse non possunt) sed illi communi sententiæ aduersatur, quæ ait, omne totũ est maius sua parte Quemadmodum igitur in hac indirecta demonstratione inconueniens, ad quod deducitur à Quæsito diuersum est, sic etiam in omnibus alijs demonstrationibus indirectis esse debet: alioquin id, quod diximus sequeretur. Si nanque in iam dicta demonstratione ad contrarium primæ suppositioni incommodum (vt fecit Cardanus) deduceretur, quod idem cum Quęsito est, nempe latera sub æqualibus angulis subtendentia inuicem æqualia esse: non ne hæc potiùs esset directa Quæsiti demõstratio? quid igitur opus esset à principio cõtrarium Quæsiti supponere, si directa demonstratione illud concludi posset? nonne manifesta committeretur nugatio? Quòd itaque nullo pacto huiuscemodi demonstratio in Geometria fieri possit, bonis Geometris perspicuum est. Quanuis ipse Cardanus in sua Logica (quam manuscriptam ipse nobis ostendit) dicat hunc esse quendam pulcrum demonstrandi modum, appellarique Chrysippeum, seu Cornutũ: sed ipse viderit an chimericus potiùs, quàm Chrysippeus sit. Quòd verò Cardanus talem faciat demonstrationem, quæ etiam fuit causa vt committeret petitionem principij, ex eius verbis manifestum est. ait enim. *Dico primò hanc superficiem planam non posse tangere Coni superficiem alibi, quàm in linea AC:* hoc est illud, quod probandum proponit, quòd scilicet superficies plana apud ipsum nominata K, in nostra verò figura A C E F, non potest tangere superficiem conicam alibi, quàm in linea AC. *Quod si potest, tangat in G.* nunc aggreditur indirectam probationem, & statim

Exemplum.

Logica Cardani non extat impressa.

statim à principio supponit Quæsito contrarium, quòd scilicet plana illa superficies non solùm in linea A C tangat conicam superficiem, vt Quæsitum dicebat; sed etiam in alio ipsam tangat signo extra lineam A C iacenti, vt causa exempli insigno G. *Et ducatur circulum P G æquidistantem basi B C D.* hoc construit vt demonstrationi deseruiat. *Cùm igitur Circulus sit in vna superficie, erunt puncta contactus plani K, & periferiæ Circuli illius in vna recta linea, ex demonstratis in vndecimo Elementorum.* hìc demonstrat vnũ, quod ad cõcludendum Quæsitum maximè confert, quòd scilicet puncta contactus plani K, & circunferentiæ ducti circuli (quæ in nostra figura sunt puncta G H) sint in vna recta linea iacente tum in plano K, tum in plano ipsius circuli. sed verba eius obscurè, diminutèque hoc explicant. sic enim illa verba intelligi debent. *Cùm igitur Circulus sit in vna superficie.* hoc est cùm circulus ille ductus vnum sit planum, & ipsum K alterum planum, quæ duo plana ex suppositione in ipsis contactus punctis se secant. *Erunt puncta contactus plani K, & peripheriæ, &c.* hoc est erit cõmunis eorum planorum sectio vna recta linea transiens per illa contactus puncta per tertiam propositionem libri vndecimi Elementorum Euclidis. Talis meo quidem iudicio debet esse verborum illorum sensus. Hucusque autem benè procedit indirecta demonstratio, vt ex nostra secunda demonstratione conijci potest. postea verò subiungit. *Quamobrem cùm illa linea iam tangat circuli peripheriam in linea A C, cadet ex demonstratis ab Euclide in tertio Elementorum extra circunferentiam Circuli V X G, igitur non tanget illum in puncto G.* Hæc sunt illa verba, quæ totam hanc demonstratiunculam euertunt, atque corrumpunt, quæque petitionem principij cõtinent. eorum enim talis est sententia. Cùm ostensum quidem sit vnam esse rectam lineam cõmunem istorum planorum sectionem, quæ transit per illa duo puncta, in quibus planum K tangit conicam superficiem: illa autem recta linea iam tangat circuli circunferentiam in linea A C, cadet per decimamoctauam, & sextamdecimam propositionē tertij libri Elem. Eucl. extra circunferentiam ipsius circuli. Quamobrem neque ipsa recta linea, neque planum K, in quo ipsa est, tanget circuli circunferentiam in signo G; atque idcirco neque etiam Conicam superficiem, in qua iacet circuli circunferentia, in ipso G, signo tangere potest. Hæc itaque est perfecta verborum illorum sententia, quæ directè Quæsitum videtur concludere, & chimericam

cam

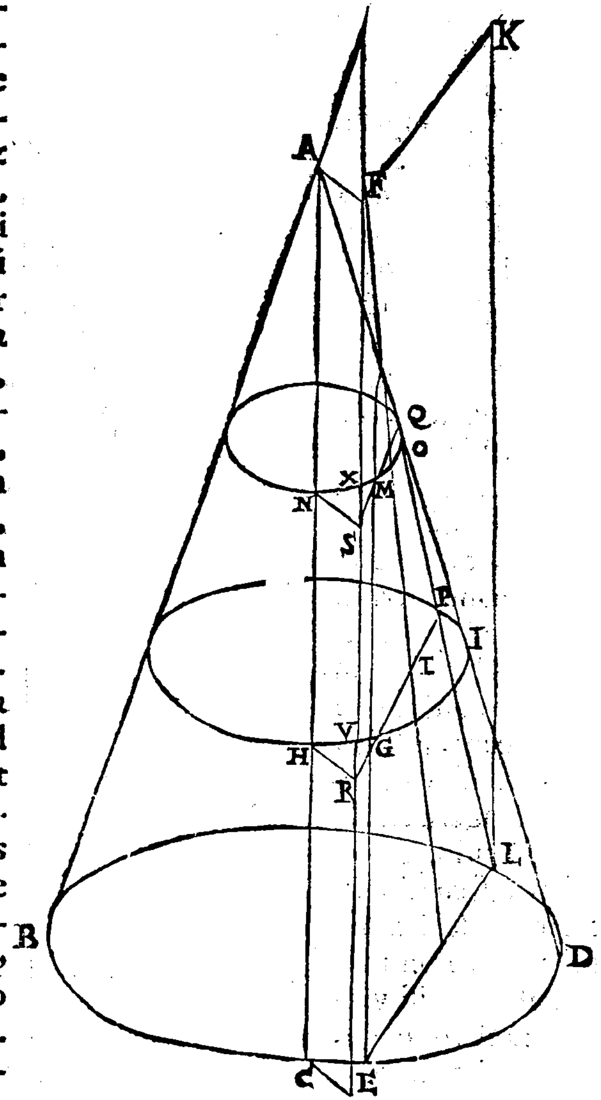
cam illam (quam superiùs diximus) demonstrationem conficere. Fortasse autem directa hæc Quæsiti conclusio bona esset auferendò illam Quæsito contrariam suppositionem in principio positam, nisi (quod peius est) in illis vltimis verbis principium peteret. verùm iccirco nullo modo admittenda est. Cùm enim dicit rectam illam lineam iam tangere circuli circunferentiam in linea A C, tunc nimirùm petit principium. quoniam nequaquam illucusque probauit lineam illam tangere circuli circunferentiam, quod nihilominus tanquam iam probatum inferre videtur. idem autem hoc est ac si supponeret planum K non tangere Coni superficiem alibi quàm in ipsa A C linea, quod vtique probandum ab initio sibi proposuerat. Quòd verò idem sit lineam illam in plano K iacentem tangere circulum in linea A C, ac si dicamus planum K non tangere Coni superficiem alibi quàm in linea A C; non est cognitu difficile. Si enim recta linea in plano K iacens tangat in linea A C circulum in superficie conica descriptum, necessariò rationibus superiùs dictis tum ipsa linea, tum planum K, in quo ipsa iacet, extra circuli circunferentiam cadent; nec tangent conicam superficiem nisi in linea A C, in qua ipsam tangere supponuntur.

Dubitatio. At si quis fortè dicat, cùm supponatur planum K tangere conicam superficiem in linea A C, necnon circulorum omnium basi parallelorum in ipsa descriptorum circunferentias; ex hoc sequi rectas etiam lineas ab ipsa A C recta linea in plano K ductas tangere tum Coni superficiem, tum circulorum in ea sic descriptorum cir-

Solutio. cunferentias: huic respondeo, quòd licet planum K tangat Coni superficiem, & circulorum in ea descriptorum circunferentias in linea A C; non ob id tamen necessarium est vt rectæ etiam omnes lineæ ab ipsa A C in plano K deductæ tangant tum Coni superficiem, tum dictorum circulorum circunferentias: nam Coni quidem superficiem necessariò semper tangent, circunferentias verò circulorum quandoque tangere, quandoque etiam secare possunt, vt manifestum est. Hæc igitur dicta sint ad Cardani falsam, principiumque petentem demonstratiunculam, quam nos in secunda nostra demonstratione cùm indirectè, tum directè instaurauimus. Rursus autem paulo inferiùs paralogismum committit Car-

Cardani defectus secundus. danus his verbis. *Et ducantur rectæ L T, & O M in superficie K* (quamuis ibi corruptè, H legatur) *quæ contingent circulos Q L P, & X O V, quia ducuntur ex loco contactus.* In figura secundæ nostræ demonstra-

demonstrationis intelligantur lineæ quidem L T, & O M esse ipsæ N S, H R: circuli verò Q L P, & X O V, ipsi N M O, H G I. Sententia igitur horum verborũ talis est. & ducantur (vt in nostra iã dicta figura) rectę lineę N S, & H R, quæ contingent circulos N M O, & H G I, quia ducuntur ex loco cõtactus, vbi scilicet planum A C E F tangit circunferentias circulorum N M O, & H G I. Volens itaque Cardanus probare id, quod superiùs supponebat dum petebat principium, nempe lineas N S, & H R tangere circulorum illorũ circunferentias; dicit ꝙ tangunt, quia ex loco contactus ducuntur. Mihi autem malè videtur deduci hæc cõsequentia: ex loco contactus ducuntur, ergo tangunt circulorum circunferentias. non est enim necessarium vt ipsas tangant, sed possunt etiam eas secare, vtputa si ad lineam A C perpendiculares nõ fuerint, vel si etiam productæ Conũ secuerint. nam rectę lineæ circulos tangentes, de quibus hìc Cardanus loquitur, quas etiam Euclides definit in tertio libro Element. definitione secunda, illę sunt, quæ in eodem plano cum circulo iacentes cùm circulum tangant, si produ-

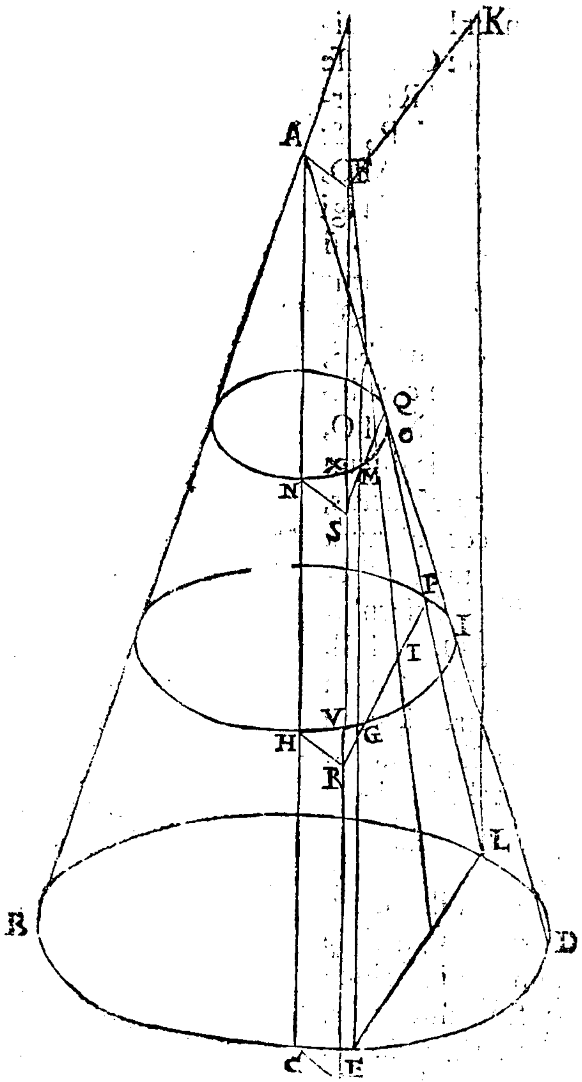


producãtur circulum non secant. animaduertẽdum autem est ꝙ recta linea dupliciter circulũ secare potest: vel quando eius planum secat in eodem & ipsa plano iacens, vel quando eius planum secat in alio ipsa existens plano; hocq; dupliciter, vel intra circũferentiam, vel in circunferentia. quemadmodũ in præsentia lineæ, de quibus Cardanus sermonem habet quamuis ab ipsius plani K cum superficie conica contactu exeant, nihilominus possunt quandoque tangere circulum, quandoque verò secare, secundo scilicet modo secũdi modi secandi: non tangent autem nisi vnico tantùm eo modo, quem diximus. Cùm autem tribus his modis recta linea secare possit circulum, illam tantùm propriè Geometræ circulum secare dicunt, quæ primo secandi modo secat. Ita igitur probanda est hæc consequentia, quemadmodum nos eam in secunda nostra demonstratione probauimus; aliter paralogismus committitur. quandoquidem ex contactu ipsius lineæ, & ex propositione tricesimasexta tertij lib. Elem. Eucl. infertur paulo inferiùs in ipsa Cardani demonstratione (vt etiam in nostra secunda demonstra-

Notandum.

Quot modis Recta linea circulum secare possit.

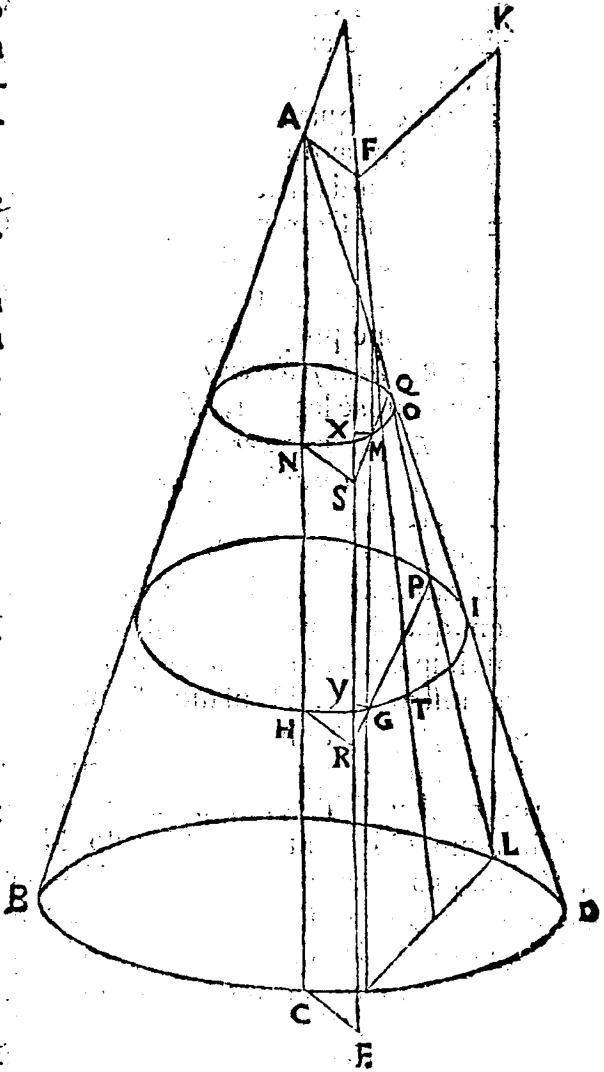
Tribus modis Recta linea circulũ secare potest.



demonstratione conspicere licet) quædam consequentia maximè necessaria ad concludendum Quæsitum, quippe quæ non verificatur, nisi in lineis vnico tantùm illo modo vti diximus Circulum tangentibus. Hoc autem animaduersione dignum esse censui, quoniam Cardanus hìc, quemadmodum etiam plerique alij nesciunt distinguere quænam apud Geometras rectæ lineæ Circulum tangentes; quæque Circulum secantes esse debeant; atque definitionem secundam tertij eiusdem Elem. penitus non intelligunt, vt ibi nos in Commentarijs nostris in Euclidem pleniùs adnotauimus. Hæc etiam ad secundum Cardani defectum dicta sufficiant. Extat autem tertius quoque defectus in ipsa Cardani demonstratione prope finem, vbi habet hæc verba. *Sed MN maior est TR (quia si duceretur per N superficies æquidistans, ipsa* (quanuis mendosè legatur, *ipsum*) *caderet infra R*, sed meliùs legatur *extra R, aliter occurreret* K, *quia Diameter QP est minor XV, & superficies Circulorum sunt æquidistantes) igitur ST maior est GM.* Verba hæc primò obscurè admodum, atque concisè dicta sunt; secundò nihil concludunt. Quare primùm eorum sententiam explicabimus. deinde quòd nil concludant ostendemus. omnia autem, quæ à nobis dicentur, in figura secundæ nostræ demonstrationis inspiciantur; accipiendo scilicet planum K ipsius Cardani pro nostro ACEF plano, & lineam MN ipsius pro linea RP nostra, & punctum N eius pro puncto P nostro, & lineam TR ipsius pro SQ nostra, & punctum R eius pro puncto Q nostro, & lineas ST, GM ipsius pro lineis MS, GR nostris, & Circulum QP ipsius pro Circulo NO nostro, & Circulum VX eius pro Circulo HI nostro. His declaratis, dico quòd verborum Cardani tale sensum est. Cùm ostendisset ipse lineam MS (& loquor nunc in nostra figura) eam habere rationem ad lineam GR, quam habet linea RP ad lineam SQ; volens probare RP esse maiorem ipsa SQ, vt ex hoc concluderet etiam ipsam MS maiorem esse quàm GR: probat hoc illis verbis. *Sed MN maior est TR (quia si duceretur per N superficies, &c.)* quæ verba in nostra figura sic legantur. Sed RP maior est SQ (quia si duceretur per punctum P planum Parallelum plano ACEF, ipsum vtique ductum planum caderet extra punctum Q; aliter occurreret ipsi ACEF plano, quia dimetiens Circuli NO est minor dimetiente Circuli HI, & plana Circulorum ipsorum sunt parallela) igitur

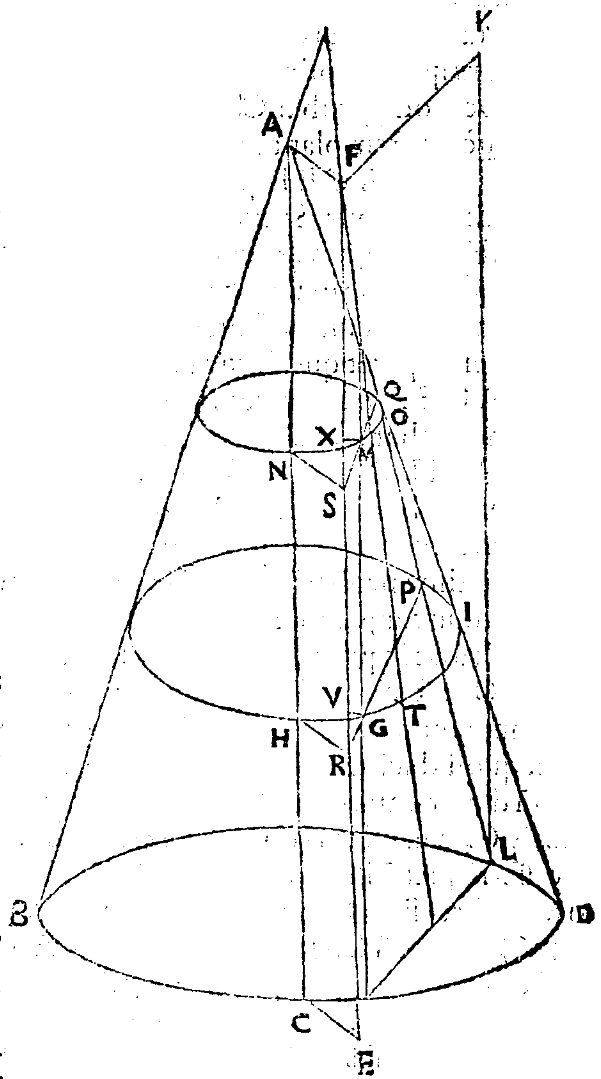
Tertius Cardani defectus.

MS maior est quàm GR. Sic legi debet Cardani verba in nostra figura, quorum (si ita legantur) clara erit sententia: inquit.n.quòd RP maior est quàm SQ, hac scilicet ratione. quia si duceretur p punctum P planum vnum parallelum plano ACEF, ipsũ necessariò caderet extra punctum Q; cadens autẽ extra pũctũ Q, secabit se extra Conum cũ EFKL plano ipsius Hyperboles, & communis eorum sectio erit per tertiam propo. vndecimi lib. Elemẽ. Eucl. recta linea ipsi FE paralella per sextamdecimã propositionem eiusdem; cui quidem parallelæ occurret ipsa SQ si extra Conum producatur, quoniã SQ, & RP parallelæ sũt



per eandem sextamdecimam cùm ex suppositione in parallelis sint planis: quæ autem cùm vna parallelarum coincidit, cũ altera etiam coincidet si in infinitum producãtur per vltimam definitionem,& tricesimam propositionẽ 1.lib.Elemen.Eucl. Quare cùm iam dicta parallela occurrat ipsi SQ extra Conũ productæ, fiet vtique vnũ parallelogrammũ, cuius latera erunt ipsa parallela, & SQ producta,

cta, & SR, & RP. cùm autem parallelogrammorum latera opposita sint æqualia per 34.proposit.eiusd. 1.Elemen.ergo SQ producta tota erit æqualis ipsi RP. igitur per nonã Com.Sent.eiusdẽ primi pars ipsius productæ, ipsa videlicet SQ erit minor quàm RP. Hoc modo probat Cardanus lineam RP esse maiorẽ quàm SQ. Quòd autem planum ipsum, quod per punctum P ducitur parallelum ipsi ACEF plano, necessariè cadat extra punctũ Q, sic probat Cardanus. Si extra punctum Q non caderet, sed in ipso Q, vel intra ipsum; occurreret ipsi ACEF plano: non potest autem ipsi occurrere cùm parallelum ipsi ducatur (parallela enim plana sunt per octauã definit. 11 lib. Elem. Eucl. quæ sibi non coincidunt) ergo patet quòd extra cadet. Quòd verò iam dictũ planũ plano ACEF occurreret si caderet in puncto Q, vel intra ipsum, hinc probat; quia dimetiens Circuli NO est minor dimetiẽte Circuli HI, & plana eorundem Circulorum parallela sunt. Hoc itaque est verborũ sensum. Verùm probatio hæc maximè peccat, quoniam nil concludit, quod quidem facilè cognoscitur. quando enim in vltima probationis particula probat planũ, quod per punctum P ducitur plano ACEF parallelũ occurrere ipsi ACEF plano si cadat in puncto Q, vel intra ipsum; quia dimetiens Circuli NO est minor dimetiente Circuli HI, & plana ipsorũ Circulorum sunt parallela: tunc nil mihi concludere videtur, nã si planum, quod ducitur plano ACEF parallelum, duceretur per extremũ dimetientis Circuli maioris, caderetque in extremo dimetientis Circuli minoris, vel intra eius extremũ, tunc sequeretur ꝙ necessariò planũ illud occurreret ACEF plano, propterea ꝙ dimetiẽs Circuli NO est minor dimetiẽte Circuli HI, & plana eorundẽ Circulorũ sunt inuicẽ parallela. nã dimetiẽtes ipsę cùm sint in planis parallelis,& in plano triãguli per axem Coni (vt patet per quartam petitionem huius) erunt per sextamdecimam propositionem vndecimi libri Elementorum Euclidis inuicem parallelæ: cùm autem sint etiam inæquales, hinc necessariò sequeretur quòd communis sectio plani triãguli per axem Coni,& ipsius plani, quod duceretur plano ACEF parallelum, si caderet in extremitate, vel intra extremitatem dimetientis circuli minoris; occurreret lineæ AC. nam si per terminos duarum linearum parallelarum, & inæqualium rectæ producantur lineæ: illas ad partem minoris parallelæ concurrere est necesse. quod Theorema verissimum est, & ab ab Euclidis Elementis dependet, demonstraturq; à Vitellione in sextadecima propositione primi libri suæ Perspectiuæ. Cùm igitur lineæ illæ in vertice Coni sibi coinciderent, necessariò plana quoque illa duo, in quibus ipsæ sunt, ibidē sese tangerent. Hoc itaque pacto ratio Cardani concluderet, quòd scilicet plana illa sibi occurrerent propterea ꝙ circulorū dimetientes inæquales, & parallelæ sunt, quãuis hoc ad rem nõ esset. At quoniam planum illud non ducitur per extremitatem dimetientis circuli maioris, sed per punctum P; idcirco ratio non concludit. dimetientium enim inæqualitas, & parallela positio non est



causa quòd planum ductum per punctum P plano ACEF parallelum, eidem ACEF plano occurrat (quandoquidem planum ductum per punctum P potest ita produci versus Coni Verticem, vt non tangat etiam ipsas dimetientes; tamen si in signo Q, vel intra ipsum caderet, cum plano ACEF concurrat) sed vera huius concursus causa est linearum RP, & SQ inæqualitas, & parallela

positio. Quòd si dicat aliquis ex inæqualitate dimetientium dependere linearum RP, SQ inæqualitatem, atque iccirco Cardanum ex inæqualitate dimetientium arguere: huic respondeo, quòd tunc fieret Petitio principij. quoniam quod probare vult Cardanus est inæqualitas linearū RP, SQ, quam si immediatè, vel per aliud medium magis remotum supponat; dubio procul principium petit, idemq; probat per idē. talis.n.esset eius argumētatio. Dico ꝙ linea RP est maior SQ, quia si duceretur per signū P planū parallelum plano ACEF, caderet extra signū R; aliter sequeretur hoc absurdum quòd dictum planū occurreret eidem plano ACEF, cui parallelum ducitur; quia dimetiens circuli NO est minor dimetiente circuli HI, & plana ipsorum circulorum parallela sunt. hoc est quia linea RP est maior quàm SQ, qua quidem probatione nil vitiosiùs. Nullo modo igitur hæc Cardani demonstratio seruari potest; quoniam vel nihil concludit, vel principium petit, vt iam ostendimus. Quapropter non est eo modo probandum lineam RP esse maiorem linea SQ, quo Cardanus id probare conatur: sed ita vt nos in secunda nostra demonstratione dedemonstrauimus. Hæc itaque de tribus quoque insignioribus demonstrationis Cardani deliquijs dicta sint.

Obiectio.

Responsio.

DIGRES-

DIGRESSIO CONTRA ORONTIVM.

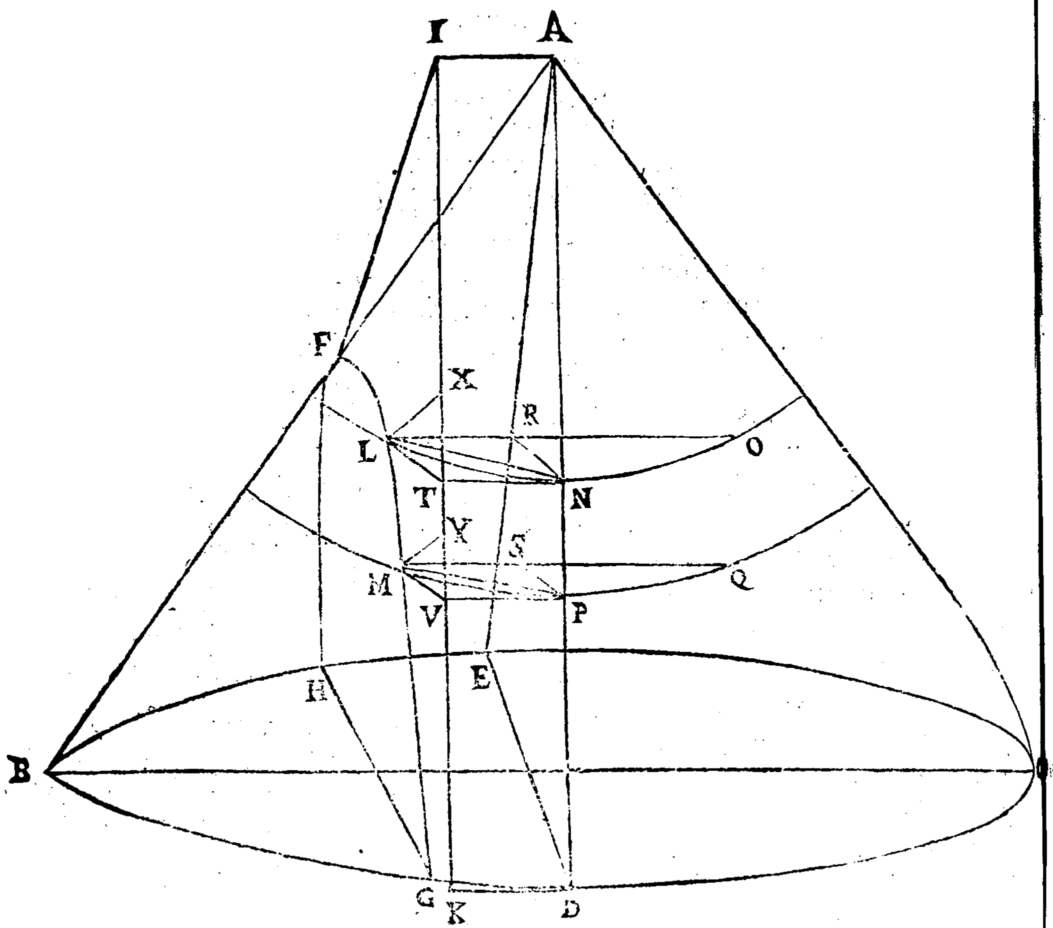
ORONTIVS autem Finæus in libello suo de Speculo ustorio Problema nobis propositum demonstrauit eo demonstrandi modo, quem nos in tertia nostra demonstratione sub perfectione, vniuersalique doctrina redegimus. Nam eius quidem demonstratio cùm maximas habet imperfectiones, tũ particulatim in Cono tantùm rectangulo propositum demonstrat: cùm tamen in omni Cono verum sit. Demonstrat autem Orontius præsens Problema non solùm de duabus lineis recta, & Hyperbolica in eodem plano iacentibus, verùm etiam de duabus dictis lineis nõ in eodẽ plano, sed in vna Coni superficie existentibus, quod nos quoque ad calcem tertiæ nostræ demõstrationis subiunximus. In his itaque duabus suis demonstrationibus præter multa deliquia, & infinitas constructionum, consequentiarumque rationes omissas (vt ex nostra tertia demonstratione quisque conijcere potest) quæ fortasse tolerari possunt; tres potissimùm errores commisit, qui nullo modo tolerandi sunt. Primus error talis est. Volens Orontius probare lineam NR (& loquor in figura nostræ tertiæ demonstrationis) maiorem esse linea PS, ex quo porrò tota illa dependet demonstratio: probat illud ex eo, quòd æquales rectæ lineæ ab inæqualibus circulis inæquales secant circunferentias, minorem quidem à maiori, maiorem verò à minori. Quòd autem hoc suum Theorema verum sit, sic ille confirmat. Quoniam (inquit) plus incuruatur minor, quàm ipse maior circulus. Quantùm autem ratio hæc debilis, inanisque sit, hinc intuendum est: quoniam nos in superioribus ostendimus quòd æquales rectæ lineæ ab inæqualibus circulis inæquales auferunt circunferentias non solùm minorem à maiori, & maiorem à minori; sed etiam maiorem à maiori, & minorem à minori circulo, in minoribus scilicet, atque maioribus circulorum segmentis; & tamen circulus minor semper plus incuruatur quàm maior, ea igitur ratio nulla est. Quare Theorema Orontij non vniuersè verum est, atque indemonstratum remanet, cùm eius ratio non concludat. & consequenter lineam NR linea PS maiorem esse indemonstratum relinquitur. Cùm autem ex hoc

Orontij primus error.

hoc tota dependeat Problematis demonstratio, manifestum est Orontium potiùs nugari, quàm demonstrare. Nos verò vt demonstrationem hanc exactè traderemus, priùs Theorema hoc ad vniuersalem doctrinam redegimus, vniuerseq; demonstrauimus; ex cuius demonstratione Corollarium manifestum excerpsimus, lineam scilicet NR esse maiorem PS. nam harum linearum inæqualitas potiùs est causa inæqualitatis circunferentiarum, quàm è conuerso. quandoquidem in demonstranda circunferentiarum inæqualitate priùs apparet nobis harum rectarum linearum inæqualitas, ex qua postea circunferentiarum quoque inæqualitas concluditur. vt in nostra illius Theorematis demonstratione quisq; conspicere potest. Is itaque sit primus, insignisque Orontij error. Secundus autem est idemmet cum secundo Verneri, quem errorem omnes, quos vidi huius rei Autores commiserunt, præter Cardanum. Tertius verò est huiusmodi. In fine suæ primæ demonstrationis, in qua demonstrat Problema propositum de duabus lineis recta, & inflexa in vna Coni superficie, & non in eodem plano consistentibus: volens probare partem illam Problematis, quæ ait lineas ipsas in infinitum productas nunquam sibi coincidere; probat eam his verbis. *Quantò magis igitur AD, & FG lineæ in continuum producentur ad partes quidem D, & G, tantò propiores euadent: & nihilominus eas tandem conuenire est impoßibile, vtpote, quæ in planis consistunt inuicem parallelis, ex ipsa Constructione, & semper tantùm ad minùs inuicem distabunt, quanta est linea recta vtrique prædictarum superficierum perpendicularis. vtraque igitur propositionis pars verißima relinquitur.* Hæc sunt Orontij verba, quæ per se clara sunt; sed maximã falsitatem continent. Non est enim verum quòd semper tantùm ad minùs illæ duæ lineæ inuicem distabunt, quanta est linea recta vtrique prædictarum planarum superficierum perpendicularis, vt ait Orontius; quoniam recta linea vtrique prædictorum planorum perpendicularis nullo modo potest esse ipsarum linearum distantia, cùm non ambas, sed alteram tantùm earum tangat. Quo nam pacto igitur duæ illę lineæ semper tantùm ad minùs inuicem distabunt, quãta est linea recta vtriq; duorum planorum, in quibus illę lineæ sunt, perpendicularis, cùm ipsa perpendicularis ipsarum linearum distantia esse minimè possit? Exempli gratia in figura Tertiæ nostræ Demonstrationis, quomodo linea FG inflexa à recta AD tantùm ad minùs distabit, quanta

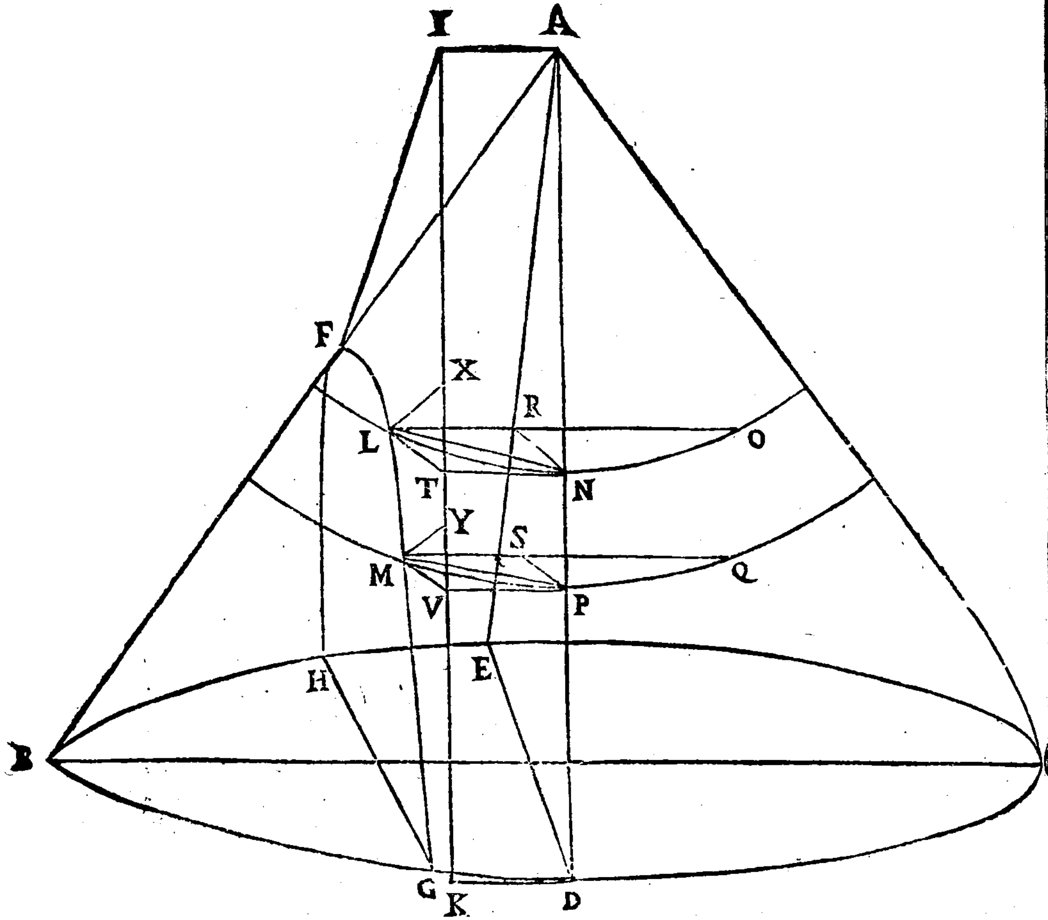
Orontij secũdus error.

Orontij tertius error.



ta est recta linea M S vtriq; tum Hyperbolis, tum per axem trianguli plano perpendicularis, cùm tamen ipsa M S ipsam A D non tangat, ideoque earum linearum distantia esse non possit? quælibet enim duarum linearum distantia terminis suis ambas ipsas attingere debet. quòd autem recta linea vtrique illorum planorum perpendicularis, non possit nisi alteram ipsarum duarum linearum attingere, sic in eadem nostra figura probetur. Si ab aliquo pun- lineę A D erigatur recta linea ad rectos angulos plano A D E, vt ipsa N T; erit per tertiam definitionem vndecimi lib. Elem. Eucl. ad rectos angulos dimetienti circuli conicæ basi paralleli per punctum

ctum illud trāsientis. vnde per 16 prop. tertij lib. eorundē extra ipsum L N O circulum cadet, ideoque non tanget inflexam F G lineam (si enim tangeret, intra circulum caderet per secundam propositionem eiusdem tertij) & nihilosecius vtrique ipsorum planorum perpendicularis est, quoniam duobus planis parallelis existentibus quæ alteri eorum perpendicularis est; reliquo etiam perpendicularis erit, vt patet ex 16 prop. vndecimi, & 29 primi, & tertia definitione vndecimi lib. Elemen. Eucl. vtque probat Vitellio in 23 prop. sui primi libri. idem autem ostendetur de omnibus alijs lineis à recta A D plano A D E, & plano Hyperboles perpendicularibus ductis. Præterea si ab aliquo inflexæ F G lineæ puncto erigatur ad rectos angulos plano Hyperbolis recta linea, quæ (ratione iam dicta) plano etiam A D E perpēdicularis sit, quemadmodum ipsa L R, necessariò cadet intra L N O circulum; quoniam per quintam petitio. primi lib. Element. Eucl. lineæ N R in partes R occurrere debet, cùm anguli R L N, & R N L duobus rectis minores sint. anguli n. R L T, & R N T per Constr. & per tertiā defin. 11 lib. eorundē Elem. recti sunt. Cùm igitur linea L R vtriq; plano perpendicularis intra circulum cadat, manifestum est ꝙ non contingit lineam A D. Similiter autem ostendi potest ꝙ oēs aliæ lineæ, quæ à linea F G inflexa plano Hyperbolico, & plano A D E triangulari perpendiculares ductæ sunt, ipsam A D non tangent; quod erat probandum. Cùm itaq; verum sit ꝙ rectę lineæ vtriq; illorum duorum planorum perpendiculares non possunt nisi alteram ipsarum A D, F G linearū attingere, perspicuum est ꝙ neq; etiā ipsarū distantiæ esse possunt. Quare dictū Orontij falsum omnino relinquitur, ꝙ nēpe duæ illæ A D, & F G lineę semper tantùm ad minùs inuicem distabunt, quanta est linea recta vtrique prædictorum planorum perpendicularis. Quum.n. lineæ L R, & N T sint vtriq; plano perpendiculares, nullę aliæ ab eisdem L, N punctis duci possunt lineę, quæ eisdem planis perpendiculares sint per 13 prop. vndecimi libri eorundem Elemen. at L R, & N T, omnesq; eiusmodi lineę vtrique plano perpendiculares, nullo modo linearum A D, & F G distantiæ esse possunt; non distant igitur semper tantùm ad minùs inuicem, quanta est linea recta vtrique plano perpendicularis: imo semper maiori adinuicem interuallo distabunt, quàm sit linea recta vtriq; ipsorum planorū perpendicularis. Si.n. à puncto L ad rectā A D lineā vna perpendicularis ducatur, erit per 19 propositio-



positionem primi libri Elemen. Eucl. maior quàm L R vtriq; plano perpendicularis; quoniam per tertiam defin. vndecimi lib. eorundem angulum rectum subtendit, eum scilicet, qui ad R signum est. Idẽ etiã verũ erit de oĩbus alijs lineis ab F G linea inflexa ad rectã A D perpendicularibus ductis. at ipsę perpẽdiculares (vt in superioribus dictum est) minimę sunt distantię ipsarũ F G, A D linearũ; plus ergo sẽper inuicẽ distabũt ipsę AD, FG lineę, quàm sit recta linea vtriq; duorũ iã dictorũ planorũ perpẽdicularis. Quãobrẽ patet etiã tertius Orõtij error. Hęc aũt ad Orõtiũ quoq; dicta sint.

DIGRES-

DIGRESSIO CONTRA PELETARIVM.

IACOBVS verò Peletarius in Commentario suo de Contactu linearum rem hãc, de qua laboramus, tetigit. & primùm quidem iuxta Priscorum viam rẽ ipsam breuiter demõstrare tentauit, & vsus est modo demonstrandi Cardani; sed breuiter quidem, ac imperfectè. nam alterũ Problematis membrum, nempe linearum continuam appropinquationem quodam apparẽti signo, debiliq; potiùs coniectura, quàm Geometrica ratione ostendit. Cùm enim (inquit ipse) latus Hyperbolis perpetuò, & gradatim ascendat versus Coni basin, propterea quòd Circuli, quibus Conus ipse cõstat, continuè maiores fiunt versus basim ipsam; recta autem linea, ad quam debet latus Hyperboles approximari, in suo plano immutabilis maneat: procul dubio (inquit) ipsa inflexa linea secũdùm augumentum Circulorum continuè etiam propior fiet ipsi rectæ lineæ. Hoc pacto membrum hoc demonstrat Peletarius. Quantùm autẽ ratio hæc imbecilla sit, à Geometricisque rationibus aliena, nemo est, qui non videat. nullã enim rei causam dicit, sed quandã potiùs probabilem imaginationem. quòd nanque Circuli versus Coni basin maiores semper fiant, latusque Hyperbolis perpetuò, & gradatim versus basim ascendat; verum, & necessarium est. non ex hoc tamen linearum cõtinua appropinquatio necessariò sequitur. Quid enim si quis rectam illam lineam, quæ à centro Hyperboles oritur, quamque in superioribus affectioni iam dictæ succumbere demõstrauimus; nõ debitis conditionibus protrahat? vtrùm cõtinuè lateri Hyperbolis perpetuò, & gradatim versus Coni basim ascendenti appropinquet, & nunquam coincidat? nonne posset etiam ita protrahi vt quantùm inflexa illa linea continuè ascendit, tantùm hæc, scilicet recta illam effugiat, ab eaque recedat? non est igitur causa huiusce affectionis necessaria illa, quam dicit Peletarius; sed contingens quædam, ac probabilis coniectura. quàm alienæ verò huiuscemodi rationes à Geometria sint, audiamus Aristotelem asserentem, simile esse à Rhetorico demonstrationes exigere, & Mathematico probabiliter disputanti assentiri: necnon in Platone Simmiam dicentem. *Quoniam ex apparentibus*

Primus Peletarij error.

Aristoteles 1. Ethic. c. 3.

rentibus demonstrantes vanos esse scio. Multùm itaque deficit Peletarius in iam dicti membri demonstratione. At in reliquo membro demonstrando maximum etiam passus est deliquium. probat enim illud eo modo, quo Cardanus. cùm autem ostendere velit planum, in quo est illa recta linea, quæ Hyperboli semper magis magisque annuere, & nunquam illi occurrere debet; non tangere Coni superficiem, nisi in vna recta linea iam dictæ rectæ lineæ parallela: tali vtitur ratione. Intelligatur (inquit) plana superficies super Cono iacens secundùm longitudinem, quæ quidem superficies vnica sui linea Conum tanget. constat enim ipsa infinitis lineis rectis, & Conus infinitis circulis: linea verò recta siue secet circulũ, siue tangat; eum in vnico puncto secat, & tangit. Hæc est ratio Peletarij, per quam demonstrare credit planum illud nullibi tangere Coni superficiem, quàm in illa recta linea. Quòd autem ratio hæc nil concludat, sic ostendemus. Primò quidem cùm dicit, Linea verò recta siue secet circulum, siue tangat; eum in vnico pũcto secat, & tangit. falsum dicit. Nam nulla recta linea circulum secãs in vno tantùm puncto eum secare potest. Si enim in circuli circunferentia duo quælibet puncta suscepta fuerint, recta linea, quæ ipsa puncta coniungit, tota intra circulum cadit per secundam propositionem tertij libri Elementorum Euclidis: talisque linea iuxta Euclidis doctrinam dicitur secare circulum; quæ si etiam in infinitum vel ex altera, vel ex vtraque parte producatur, semper secans circulũ vocabitur. passim enim Euclides cùm de recta linea circulum secante facit mentionem, semper de illa recta linea intelligit, quæ intra circulum ab vno circunferentiæ puncto ad aliud transit. exempli gratia in tricesimasecunda propositione tertij libri eorundem Elemẽtorum cùm dicit *Si Circulũ tetigerit aliqua recta linea, à contactu autẽ ad Circulũ perducatur quędã recta linea Circulũ secans: anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis Circuli segmentis existunt, angulis.* Similiter cùm in tricesimasexta propositione eiusdẽ dicit *Si extra Circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in Circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem Circulum secet, altera verò tangat: quod à tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam circunferentiam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à tangente describitur quadrato.* Ex his enim, multisque alijs locis manifestum est lineam Circulum secantem eam ab Euclide accipi, quæ circuli circunferentiam in duobus tantùm punctis secat, ipsum

Plato in Phędonẽ.

Secũdus Peletarij error.

ipsum verò Circulum in infinitis. recta nãque linea Circuli circunferentiã cùm bis secet, duobus in punctis secat (omnis enim linea lineam semel secans, in vnico duntaxat puncto secabit) recta verò linea planam figuram vndequaque clausam (qualis est Circulus) si secuerit, infinitis in punctis eam secabit, cùm infinita puncta in ipsa secante recta linea suscipi possint, per quæ figuram ipsam secat: de huiuscemodi igitur rectis lineis Circulũ secantibus omnes boni loquuntur Geometræ, de hisque eorum propositiones veritatẽ dicunt. quæ tamen nullo pacto Circulum, vel eius circunferentiam in vnico puncto secare possunt; sed circunferentiam quidẽ in duobus, Circulum verò in infinitis, vt ostendimus. Falsum igitur dicit Peletarius, cùm asserat rectam lineam in vnico pũcto Circulum secare. si enim Circulũ accipit pro figura plana (vt definitur ab Euclide, vtque ab omnibus optimis Geometris accipitur) quod dicit proculdubio falsum est: si verò Circulum pro Circuli circunferentia intelligit (vt plerique Geometriæ ignari faciunt) rursus falsum dicit. Si autem fortè dicat Peletarius Circulum ego pro circunferentia suscipio, & verum dico, quia rectam lineam secantem intelligo eam, quæ cùm secet circunferentiam in vnico puncto, adhuc non peruenit, vel peruenire non potest ad aliud eiusdem circunferentiæ punctum vt in duobus punctis eam secet, atque idcirco in vnico tantùm puncto eam secabit: huic obiectioni sic occurrendũ est. Linea recta secans Circuli circunferẽtiam dupliciter accipi potest, aut in eodem plano, in quo est ipsa circunferentia, aut non in eodem. quòd si fuerit in eodem plano, atque (vt in obiectione dicitur) ad aliud circunferentiæ signum adhuc nõ peruenit, hæc vtique cùm per secundam petitionem primi libri Elementorum Euclidis in directum, & continuum produci possit; proculdubio in altero quoque puncto circunferentiam ipsam secabit. quare falsum erit dicere quòd linea recta circunferentiam secans, in vnico tantùm eam puncto secat, cùm in alio quoque puncto eam secare possit. At si recta linea circunferentiam secans non in eodem cum ipsa plano fuerit, ideoque ad aliud circunferẽtiæ signum peruenire nõ potuerit; quanuis talis linea (de qua reuera Peletarius impropriè locutus intelligit) circunferentiam in vno tantum puncto secet: tamen impropriè secans circunferentiam, vel secans Circulum dicitur, quoniam nulla alia recta linea secans Circulum, vel Circuli circunferentiam propriè à peritis in Geometria vocatur, præter illã, quam

Obiectio.

Responsio.

quam iam diximus. Quòd si etiam secans circunferentiam, vel Circulum impropriè talis recta linea vocari admittatur, dico quòd ratio Peletarij nil concludit. Intelligatur enim (quemadmodum ait ipse) planum super Conicam superficiem iacens secundùm lõgitudinem. si itaque planum hoc vnica sui linea tangere Conum ea ratione probetur, quia scilicet planum ipsum infinitas in se recipere possit rectas lineas, & Conica superficies infinitos parallelos Circulos, recta verò linea siue secet Circulum, siue tangat; eum in vnico puncto secat, & tangit: dico quòd nihil concluditur. nã omnes quidem rectæ lineæ, quæ Circulos illos tangunt, in vnico puncto tangent, atque extra Conum totæ cadent per sextadecimam propositionem tertij libri Elementorum Euclidis, & eius corollarium. non omnes autem rectæ lineæ, quæ Circulos illos secant, quanuis in vnico etiam puncto secent, totæ extra Conum cadẽt: sed possunt esse quædã rectæ lineæ, quæ in vnico puncto Circulos illos eo modo impropriè secent, & tamẽ totæ intra Conum cadent; & planũ, in quibus illæ sunt, Conum secabit. non concludit igitur ratio hæc: rectæ lineæ Circulum in Coni superficie iacentem tangentes, vel secantes in vnico tangunt, vel secant puncto; ergo planum, in quo sunt illæ rectæ lineæ, vnica sui linea Conum tãget. potest enim etiã non tangere, sed secare, vt iam diximus. Aliter autem hoc probãdum est, quemadmodum nos tum directè, tum indirectè in secunda nostra demonstratione id demonstrauimus. Duos itaque iam dictos cõmisit errores Peletarius in demonstrãdo proposito Problemate breuiter, atque concisè iuxta Antiquorum demõstrationem. Cùm autem hoc modo rem ipsam demonstrasset; subiungit quòd ea inuentio Antiquorum est acuta quidem, & Geometrica prorsus: sed quæ non explicet ex quo genere linearum sit ea, quæ in eodem plano rectæ lineæ semper magis ac magis appropinquat, nunquã ipsi coincidens. non nullis enim (inquit ipse) videri possit recta, propterea quòd rectissimè procedere videtur in superficie Coni, quod Cælius Calcagninus putauit. Quamobrem (inquit) locus postulat vt lineæ illius ortum, rationem, naturamque ob oculos ponam. subiunxitque demum duas illas imperfectas demonstrationes, quas nos superiùs perfectione donauimus; per easque cùm propositum Problema duobus modis demõstrare, tum dictæ lineæ naturã manifestare voluit. In hac autem parte toto cœlo errare mihi videtur. cùm enim dicit Antiquorum inuentionem non expli-

Tertius Peletarij error.

care ex quo genere linearum sit illa iam dicta linea, magnoperè hallucinatur. Nam Apollonius quidem in duodecima propositione primi libri Conicorũ pulcherrimè ortũ, & formam, & naturam, propriamq; eius affectionẽ explicat; quibus omnibus à circulari, & recta distinguitur; inter mistasq; lineas collocatur, & vocatur Hyperbole: vt etiã ipse Peletarius sibi cõtradicens fatetur cùm dicat, *Neque dubium est quin ipsa ex earum sit genere, quas ex Apollonio proponunt, latus scilicet Hyperboles*. Præterea Geminus antiquissimus in Geometria, omnique laude dignus scriptor (referente Proclo in libro secundo Commentariorum in primum librum Euclidis Elementorum Commentario quarto) lineas quidem bifariã diuidebat, in simplices nempe, & mistas: & simplices quidem, in rectas, & circulares; mistas verò, in planas, & solidas: & planas quidem, in sibi coincidentes, vt Cyssoides; & in eas, quæ in infinitum producuntur, vt Helices: solidas verò, in eas, quæ circa Solida sine vlla ipsorum Solidorum sectione describuntur, quales sunt Helices circa Sphæram, vel Conum, vel Cylindrum descriptæ; & in eas, quæ ex Solidorum sectione oriuntur, vt tres Conicæ Sectiones, Parabole scilicet, Hyperbole, & Ellipsis. Eccè quàm dilucidè Geminus, & Proclus declarant illius lineæ naturam esse non rectam, neque circularẽ, sed ex his mistã. Aristoteles etiã in primo de Cœlo tres ait esse motus rectum, circularem, & tertium ex his mistum; quoniam (inquit) tres sunt etiã lineæ, recta, & circularis, & ex his mista. cùm autẽ linea illa, de qua loquimur, neque recta, neque circularis sit, sed Hyperbole; necessariò ex genere mistarum erit. Ioannes etiam Vernerus Problema, de quo agimus, sic proposuit. *Duas producere lineas alteram rectam, alteram inflexam, quæ Hyperbole Coni Sectio est, quæ quantò ampliùs producuntur, eò magis vicissim appropinquant, nunquàm coincidentes, etiam si in infinitum producantur*. Similiter Hieronymus Cardanus sic Problema proponit. *Duas inuenire lineas in eodem plano, quarum altera erit recta, reliqua latus Hyperboles, quæ semper sibi inuicem magis approximabuntur, & nunquam se tangent*. Omnes itaque tam Prisci, quàm Recentiores Autores lineam hanc Hyperbolem, ac propterea ex genere mistarũ esse explicãt, præter Calcagninum, qui reuera deceptus est; quoniam in Epistola, quam scripsit ad Iacobũ Zienglerum, ambas iam dictas lineas rectas esse ait. Malè igitur Peletarius Antiquorum inuentionem, mentemq; percepit, cùm dicat eos genus illius lineæ non explicasse. Verùm in

Apollonius.

Geminus.

Proclus.

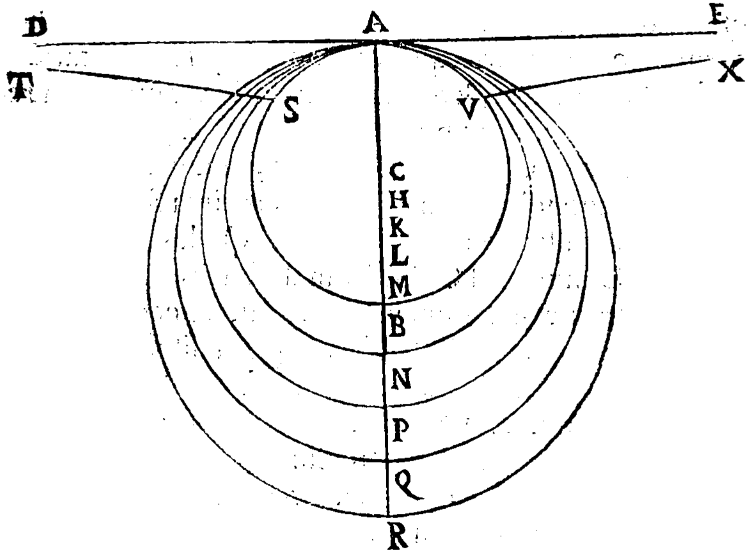
Aristoteles primo de Cœlo tex. 5.

Io. Vernerus.

Cardanus.

Cęlij Calcagnini error.

duabus illis demonstrationibus, in quibus ipse ortum, rationem, & naturam illius lineæ ob oculos ponere inquit, in multos etiam insigniores errores ellapsus est. quos vt facilè possimus ostendere, verba eius in medium adducemus, quæ sunt huiusmodi *Sit itaque Circulus ABA, cuius centrum C, & diameter AB: sitq́; linea recta DE circulum tangens in A puncto. tum inter duo puncta C, & B diametri suscipiatur plura cętra (ac nūc quatuor suscepisse satis sit) H, K, L, M.*



super quibus describantur quatuor circuli ANA, APA, AQA, & ARA, transeuntes inter DE rectam, & ABA peripheriam, seq́; inter se tangentes interiùs in A puncto. Et manifestum est, horum quatuor Circulorum peripherias paulatim, & per momenta propiores fieri ipsi rectæ DE, prout maiores fiunt. Iam sumatur punctum S in peripheria AN proximè A punctum: post in peripheria AP, aliud punctum, quod propiùs accedat ad rectam DE, quàm punctum S. Quod quoniam sua nota commodè signari nequit, vocetur punctum secundum. Sit deinde in peripheria AQ aliud punctum, quod propiùs sit ipsimet DE, quàm punctum secundum, dicaturq́; punctum tertium. Demum in peripheria AR, sit punctum propiùs accedens ad eandem DE, quàm tertium: atque hoc nominetur punctum quartum. Sicq́; continuè intel-

ligantur

ligantur circuli duci per contactum A, prioribus maiores, quorum centra in AB linea: atque in ijs notentur ordinatim puncta propiora lineæ DE. Tandem per hæc puncta primum, secundum, tertium, quartum, & si qua essent plura, ducatur linea ST: quam manifestum est paulatim accedere ad DE, non secus quàm circulorum puncta, per quæ ipsa educitur: & tamen nunquam coniungi posse cum ipsa, etiam si ambæ infinitè protrahantur, scilicet si infiniti ducantur circuli, per quos transeat ST. Quotquot enim ducentur, ij vnico puncto A tangent lineam DE, ex 15 prop. tertij lib. Elem. Eucl. Cōstat igitur lineā ST vtcunq; accedat ad lineam DE, cum ea nunquā conuenire posse. Et quidem hoc ipsum intelligi volo in alteram partem de linea VX. Hæc est prima Peletarij demonstratio, quæ maximam habet imperfectionem, & primùm in hoc peccat, quòd non docet Geometricam inuentionem punctorū illorū, per quæ linea illa inflexa, & mista transire debet: sed absolutè inquit accipi punctum secundum, quod propiùs accedat ad ipsam rectam DE lineam quàm primum: & similiter tertium, quod propiùs sit ipsimet quàm secundum: & quartum demum propiùs accedens ad eandem quàm tertium; sicque continuè. quasi per se manifesta essent talia punctorum illorum loca, vel quasi vbicunque ea quis accipiat intentum haberet. Quid autem si quis accipiat illa puncta continuè propiora tangenti DE rectæ lineæ, sed non eo ordine, quo nos in nostra decima demonstr. docuimus; vtrùm ei Quæsitum benè succedat? Nonne posset quis illa puncta sic suscipere, vt posteriora quidem prioribus magis ad rectam DE lineam accederent: Hyperbolicam autem lineam minimè crearent? Dubio procul hoc in figura superiùs à nobis allata inspicienti, considerantique conspicuum est. Necessarium igitur erat puncta illa determinatè ostendere, atque demonstrare, vt nos ibi fecimus. Cùm enim Peletarius sic puncta illa indeterminatè accipi iubeat, idem est ac si duas illas lineas ita vt ab initio proponitur designare iuberet; quæ quidem est pura petitio principij. Præterea cùm dicit punctum primum S accipi debere proximè A punctum, quandam determinationem imponere videtur, quæ vana est. nil refert enim si punctum primum accipiatur vel proximè contactum A, vel etiam remotissimè ab eo, in extremitate scilicet dimetientis primi circuli contactui opposita: dummodo reliqua puncta omnia ad easdem partes, & rectæ DE tangenti lineæ semper propinquiora sumantur. Determinationem igitur posuit Peletarius,

Quartus error Peletarij.

Quintus error Peletarij.

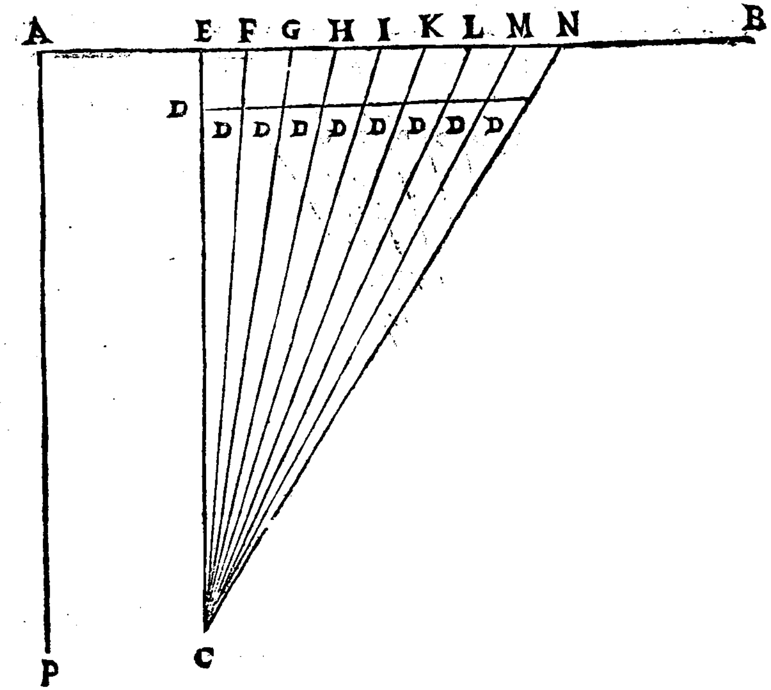
rius, vbi necesse non est; illamque omisit, quæ summopere necessaria erat, & in qua demonstrationis tota vis consistit. At neque etiam ratione probauit lineam illam esse Hyperbolicam, sed potiùs quadam hoc friuola persuasione confirmauit, dicens, *Hac igitur linea mistam habet naturam ex recto, & circulari: atque ob id inter vtrunque perpetuò consistit: constatq; infinitis lineis, in se quodam modo recuruis, seu refractis. Sed cùm circuli per A ducti, contigui propter infinitatem intelligantur, fit vt linea ST, aut VX, vix aliter sensui quàm pro vnica linea obijciantur. vbi verò spatia interijciuntur, manifesta euadit lineæ conformatio mista. Neque dubium est, quin ipsa ex earum sit genere, quas ex Apollonio proponunt, latus scilicet Hyperboles.* His verbis probat ipse cuiusmodi sit genus illius lineæ. Sed hæc debilis potiùs persuasio mihi videtur, quàm Geometrica ratio. possunt enim ex multis, infinitisque lineis in se quodam modo recuruis, seu refractis aliæ quoque lineæ creari tum simplices, tum mistæ: simplices quidem, vt lineæ refractæ, quas compositas Geminus vocat: mistæ verò, vt Parabole, Ellipsis, Cyssoides, Helix plana, & aliæ huiusmodi, quæ tamen Hyperbolicæ non sunt, neque Hyperboles passionem illam subeunt. Cùm autem ait, *Neque dubium est, quin ea ex earum sit genere, &c.* sibi contradicit in ijs, quæ superiùs dixerat. quòd scilicet antiqui ex quo linearum genere illa sit non explicent. In secunda verò duarum illarum demonstrationum adhuc quosdam commisit errores prioribus insigniores; qui etiam vt commodè agnoscantur, verba eius subscribam. *Atque adeo vt eius lineæ designationem rursus sensui euidentiorem exhibeam, aliud inuentum ascribam, mihi à Mathia Schenckio, ludi literarij apud Augustanos magistro, mechanicè quidem monstratum: sed quod in demonstrationem redigere placuit. Est enim ob linearum rectarum, quæ solæ hic requiruntur, constitutionem perspicua. Ea verò est huiusmodi. Sit recta linea AB, in qua incidat recta CDE: quæ ab ipso extremo E sic sensim moueatur versus terminum B, vt eadem ipsa extremitate E continuos faciat angulos cum linea AB: veluti apparet in punctis F, G, H, I, K, L, M, N; per quæ sic transit extremitas E, vt portio quidem CD semper longior fiat, prout inclinat linea CDE in lineam AB. Sed portio DE semper vna, eademq; maneat: scilicet vt sint DE, DF, DG, & reliquæ deinceps inter se æquales: ipsa verò CDE sic ambulet, vt nunquam discedat à puncto C immobili: nimirùm vt spatium CE perpetuò sit*

idem.

Sextus error Peletarij.

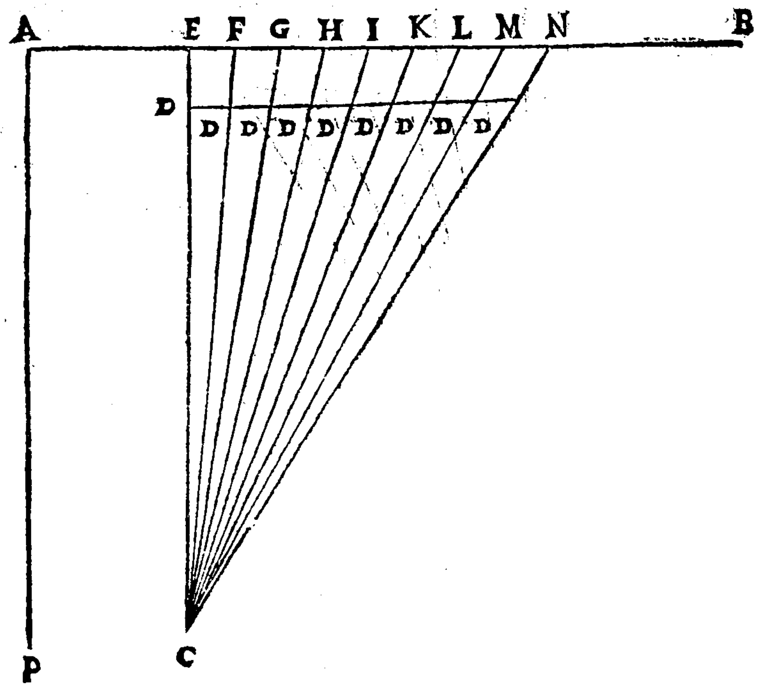
Septimus error.

Mathias Schenckius.



idem. Ac iam manifestum est, punctum D continuè propiùs admoueri ipsi AB lineæ, prout anguli qui ad F, G, H, I, cæteriq; deinceps, acutiores paulatim fiunt: neque tamen ad ipsam peruenire posse. sic enim oporteret ipsum C punctum ad eandem AB peruenire: quod est præter hypothesin: quum ipsius distantia à lina AB, vna esse ponatur. Iam si per singula puncta D ducatur linea, vtiq; continuè propiùs accedet ad rectam AB: neq; vspiam cum ipsa coibit, sicut neq; punctum ipsum D ambulans. Ex quo habetur ratio expeditissima describendi eiusmodi lineas: quæ tantò facilior est cæteris, quantò minus indiget Circulorum officio. Quod tamen huc etiã poterit adhiberi. nimirum si ducatur perpendicularis AP: in qua statuantur centra Circulorum inæqualium: quorum vnusquisque educatur per punctum A, ad contactum scilicet rectæ lineæ AB, & per singula puncta D: velut in superiore demonstratione fecimus. Sed eos Circulos hic non descripsimus, ne figurationem conturbarent. Hæc est secunda Peletarij demonstratio, quæ potiùs mechanicum quoddã opificium est, quale ipsi à Matthia SchencKio fuit ostensum, quàm Geometrica demonstratio, licet ipse in perspicuam demonstratio-

nem



nem id redegisse dicat. perspicua verò eius demonstratio talis est, quòd nil concludat. Nam volens probare cōtinuam iam dictarum duarum linearum appropinquationem, tali ratione vsus est. *Ac iam manifestum est punctum D continuè propius admoueri ipsi AB lineæ, prout anguli qui ad F, G, H, I, cæteriq; deinceps, acutiores paulatim fiunt*. Quæ quidem ratio mihi videtur esse maxima nugatio. Quomodo enim angulorum illorum diminutio, linearum ipsarum appropinquationis est causa. nam posita causa ponitur & effectus. at si ponatur ipsa angulorum diminutio, propinquitas linearum minimè ponitur. possumus enim creare quandam etiam inflexam lineam ab ipsa AB continuè magis atque magis recedentem, cùm tamen illorum angulorum eadem continua diminutio maneat. Quoniam igitur nullam aliam huiusce rei causam præter hāc affert Peletarius, nugari potiùs quàm demonstrare mihi videtur. Quomodo verò pars hæc Problematis iuxta hāc viam exquisitè demōstrari debeat, in vndecima demōstratione nostra docuimus. Rursus volens Peletarius reliquam Problematis partem demonstrare, dicebat. *Neq; tamen ad ipsam peruenire posse. Sic enim oporteret ipsum C pun-*

Octauus error.

Nonus Peletarij error.

C punctum ad eandem AB peruenire: quod est præter hypothesin. quum ipsius distantia à linea AB vna esse ponatur. Quibus in verbis primò mihi videtur mendosè legi *ipsum C punctum*. non video enim quomodo sequi possit hæc consequentia; nempe si linea illa, quæ transit per puncta D perueniret ad ipsam AB, quòd oporteret ipsum C punctum ad eandem AB peruenire. fieri enim facilè potest quòd linea illa ad lineam AB perueniat puncto C in loco suo immobili manente, vt cuique manifestum est. Credo igitur literam esse corruptam, & quòd loco C debeat legi D. sed si ita sit, nil in hac etiam parte concludit, imo petit principium, & quoddam maximè falsum dicit. idem enim est dicere lineam per puncta D transientem nunquam peruenire posse ad ipsam AB, quia pūctum D perueniret ad eandem, quod est præter suppositionem; ac si dixisset lineam per puncta D transientem ad ipsam AB peruenire non posse, quia ipsamet per D puncta transiens linea ad eandem AB perueniret, quod est præter suppositionem. Sicque supponeret quod à principio demonstrare suscepit. idem enim est supponere ipsum D punctū ambulans ad lineam AB peruenire non posse, perinde ac si lineam per omnia puncta D transientem ad eandem AB lineam nunquam peruenire posse supposuisset. Præterea quoddam maximè falsum subiunxit. Cùm enim dixisset esse præter suppositionem quòd punctum D ambulans possit vnquam ad lineam AB peruenire, volens ostendere hoc esse contra suppositionem, subdidit. *quum ipsius distantia à linea AB vna esse ponatur*. Quasi dicat vnam, eandemque puncti D ambulantis à linea AB distantiam suppositam fuisse, quoniā scilicet lineæ DE, DF, DG, DH, & reliquæ eiusmodi æquales adinuicem positæ fuerant. Verùm quòd quidem ipsæ DE, DF, DG, DH, & eiusmodi aliæ non sint veræ distantiæ puncti D à linea AB; hinc manifestum est, quia perpendiculares non sunt: quòd autem veræ distantiæ puncti D ab ipsa AB linea eædem esse supponi nō debeant, hinc etiam patet, quòd linea per puncta D transiens ad ipsam AB magis ac magis accedere demonstranda est. Quomodo igitur vndequaque falsum non est quod dicit Peletarius, nempe ipsius D puncti ambulantis ab ipsa AB linea distantiam vnam supponi? Si nanque de veris distantijs hoc intelligatur, omnino à veritate alienum est: si autem de non veris distantijs; impropriè quidem dictum, nilque concludens propter petitionem principij,

Decimus error.

vt

Vndecimus error Peletarij.

vt iã ostensum est. Postremò denique volens Peletarius ostendere quòd in hac etiam secunda Constructione, & figura possunt describi Circuli præcedentis Cõstructionis, atq; eodem modo hìc quoque propositum concludi: dixit quòd hoc fieri poterit, si ducatur perpendicularis AP, in qua statuantur centra Circulorum inæqualium, quorum vnusquisque educatur per punctum A, ad contactum scilicet rectæ lineæ AB, & per singula puncta D: velut (inquit) in superiori demonstratione fecimus. Animaduertendũ autem est quòd alio hìc artificio Circuli describendi sunt longè diuerso à superiori describendi modo. nam ibi quidem centra circulorum ad libitum in ipsa AB recta linea accipiebantur, quoniam circuli per nullum aliud punctum nisi per punctum A transire debebant. hìc verò cùm circuli describendi non solùm per signum A, verumetiam per omnia signa D iam data transituri sint: idcirco quodam alio indigemus artificio, per quod centra ipsorum circulorum describendorum in AP linea reperiantur. hoc autem artificium non docuit Peletarius, cùm in hac parte multùm deficiat: nos verò in calce ipsius vndecimæ nostræ demonstrationis ad hoc etiam suppleuimus. Hæc demum ad Peletarium quoque dicta in præsentia sufficiant. aliàs enim maximos huius viri defectus, erroresque tum in eius Commentarijs in Euclidem, tum in tribus suis Commentarijs de Dimensione circuli, de Contactu linearum, & de Constitutione Horoscopi pleniùs ostendemus.

LIBELLI RABBI MOYSIS NARBONENSIS DILVCIDATIO.

Proœmium.

OSTENSIS iam, atque declaratis Autorum defectibus, reliquum est vt dilucidemus Rabbi Moysis Narbonensis libellum in Italica lingua scriptum, Mantuæq; impressum anno à Natalibus Christi M. D. L. cui titulus est. Opus nouum Geometricum ad demonstrandum quomodo super vna plana superficie duæ lineæ possint exire, quæ procedentes semper inuicem appropinquent, nunquam tamen sibi occurrant. Titulus libri. *In eo itaque Libello ipse Rabbi Moyses post quoddam breue proœmium, per quod intentionem suam proponit; se nempe demonstraturum Problema illud admirandum in Geometria, quippe quod nos iam vndecim varijs modis demonstrauimus: decem & octo propositiones in medium affert, quibus totum propositum absoluit, demonstratq; primùm rem ipsam haud dissimili demonstratione à nostra prima superiùs allata; deinde quodam etiam exemplo, quod magis sensu percipi potest rem apertiùs declarat. Ex illis autem decem & octo propositionibus nouem quidem sunt Quæsito conferentes, reliquæ verò Quæsito propriæ, ipsumq; demonstrantes. Talis quidem est ipsius Rabbi Moysis in eo Libello intentio, libelliq; diuisio.*

Propositum Rabbi Moysis.

Diuisio libri.

Obſcuritatis cauſæ. *diuiſio. Qui porrò maximè obſcurus eſt tum quoniam ex Hebraico ſermone in Italicum malè fuit tralatus: tum quia multis in locis mendosè legitur: tum demum quòd Autor ipſe propoſitiones ſuas non demonſtrat rationibus Geometricis, ſed duntaxat proponit eas, exemplisq́ue numerorum confirmat: adde etiam quia ipſe quædam omiſit, quæ neceſſariò declaranda, demonſtrandaq́ue erant.*

Propoſitũ Dilucidatoris. *Quare Libellum hunc nobis dilucidare volentibus opus eſt propoſitiones illas latinitate fideliter donare, & mendis expurgare, Geometricisq́ue rationibus demonſtrare, ac demum ea adijcere, quæ ab Autore prætermiſſa fuere. Sit igitur prima Propoſitio huiuſmodi.*

PRO-

PROPOSITIO PRIMA, THEOREMA I.

SI trianguli vni lateri quotlibet rectæ lineæ parallelæ duo reliqua eius latera ſecantes ducantur: triangula partialia in eo facta ſibiinuicem, & toti ſimilia ſunt. Propoſitio.

Probatur hæc Propoſitio per ſecundam partem viceſimænonæ propoſitionis primi, & quartam propoſitionem, & primam definitionem ſexti libri Elementorum Euclidis. Demonſtratio.

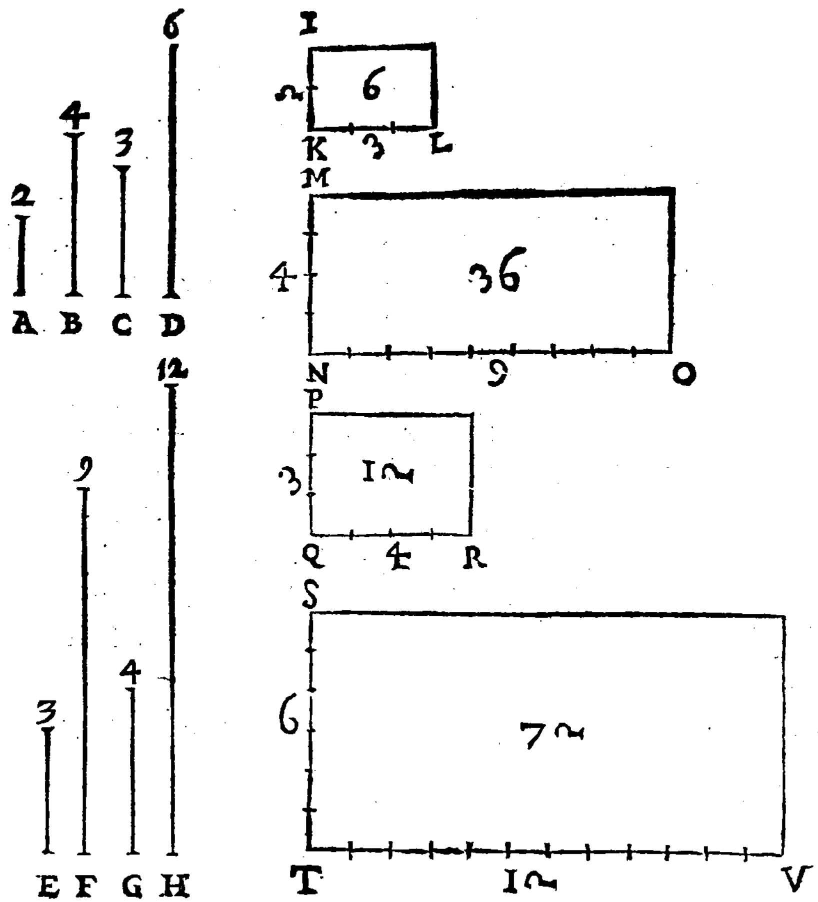
PROPOSITIO SECVNDA, THEOREMA II.

SI aliquot rectæ lineæ proportionales fuerint, quadrata etiam earum proportionalia erunt. Et ſi quadrata aliquot proportionalia fuerint, latera quoque ipſorum proportionalia erunt. Propoſitio.

Hæc patet ex viceſimaſecunda propoſitione libri ſexti eorundem Elementorum. Demonſtratio.

PROPOSITIO TERTIA, THEOREMA III.

SI aliquot rectæ lineæ proportionales ab aliquot totidem numero rectis lineis proportionalibus multiplicentur: rectangula ab illis contenta proportionalia erunt. Similiter ſi aliquot proportionales numeri alios totidem numeros proportionales multiplicent: qui producuntur, proportionales erunt. Propoſitio.



Expoſitio.

Sint quatuor rectæ lineæ A, B, C, D proportionales, ſcilicet vt A ad B, ſic C ad D; & quatuor aliæ E, F, G, H proportionales, nempe vt E ad F, ſic G ad H; & multiplicetur A ab E, & fiat rectangulum IKL: & B ab F, & fiat MNO: & C à G, & fiat PQR: & D ab H, & fiat STV. Dico quòd ſicut IKL rectangulũ ad ipſum MNO, ſic PQR ad STV.

Determinatio. Demonſtratio primæ partis.

Cùm.n.ratio quidem IK ad MN eadem eſt cum ratione PQ ad ST, ratio verò KL ad NO eadem cũ ratione QR ad TV ex ſuppoſitione: erit ratio cõpoſita ex rõnibus PQ ad ST, & QR ad TV eadẽ rationi compoſitæ

compoſitæ ex rationibus IK ad MN, & KL ad NO per primam communem ſententiam huius. At rectangulum etiam IKL ad MNO per viceſimam tertiam propoſitionem ſexti libri Element. Euclidis eandem habet rationem compoſitam ex ratione ipſius IK ad MN, & ipſius KL ad NO: ergo IKL rectãgulum ad MNO compoſitam habet rationem ex rationibus PQ ad ST, & QR ad TV per vndecimam propoſitionẽ quinti libri eorundem Elementorum. ſed eandem habet etiam rationem per iam dictam viceſimamtertiam propoſitionem ipſum PQR ad STV. igitur per eandem vndecimam quinti ratio rectanguli IKL ad rectangulum MNO eadem eſt rationi ipſius PQR ad ipſum STV rectangulum. quæ eſt prima propoſitionis pars.

Concluſio primæ partis.

Similiter autem ſi numeri tum lineis, tum ſuperficiebus adſignentur; ſecunda quoque pars demonſtrabitur per primam communem ſententiam huius ſemel ſumptam, & quintam propoſitionem octaui, & vndecimã quinti libri Elementorum Euclidis bis ſumptas. numeri nanque linearum A, B, C, D; & E, F, G, H, erunt latera numerorum planorum areas ſuperficiales rectangulas denotantium.

Demonſtratio ſecundæ partis.

Vtraque igitur propoſitionis pars vera, & perſpicua eſt. Si aliquot itaque rectę lineæ proportionales fuerint, & reliqua vt ſupra. quod oportebat demonſtrare.

Concluſio vniuerſalis.

PROPOSITIO QVARTA, THEOREMA IIII.

IN præſenti propoſitione applicat Rabbi Moyſes affectionem pręcedentis Theorematis quibuſdam rectis lineis proportionalibus, quæ in duobus ſimul iunctis triangulis ſunt. Nõ indiget autem probatione, quia per præcedentem patet. Nos verò ne tot demonſtrationibus, & figuris legentium mentem conturbemus: nullum huius propoſitionis exemplũ ſubijcimus, idemque in prima, & ſecunda propoſitione fecimus, faciemuſque in multis alijs ſequentibus. Satis enim erit ſi percepta ex Elementis Euclidis earum veritate, ipſas demum præcipuo noſtro propoſito applicauerimus.

PROPO-

PROPOSITIO QVINTA.
THEOREMA V.

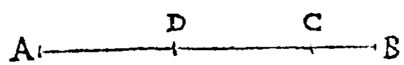
Propoſitio. SI ab aliquo puncto dimetientis Circuli ad circunferētiam recta linea ad angulos rectos ducatur: erit quod à dimetientis partibus ab illa perpendiculari abſciſis continetur rectangulum æquale quadrato ipſius perpendicularis.

Demonſtr. Hæc probatur per triceſimamprimā prop. tertij, & per corollarium octauæ propoſitionis ſexti, & per primam partemdecimæ ſeptimæ propoſitionis eiuſdem ſexti libri Elementorum Euclidis.

PROPOSITIO SEXTA.
THEOREMA VI.

Propoſitio. SI recta linea ſecetur vtcunque, deinde alterum ex eius ſegmentis per medium ſecetur: rectangulū à tota, & inſecto priorum ſegmentorum contentum ſuperatur à quadrato, quod fit ab eodem priori ſegmento, & ab altero poſteriorum ſegmentorum tanquam ab vna linea, quadrato alterius poſterioris ſegmenti.

Expoſitio. Sit recta linea A B, quæ ſecetur primùm vtlibet in ſigno C, deinde alterum ſegmentorū ipſius vtpote A C



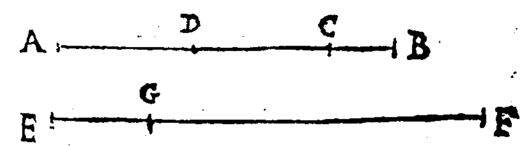
Determinatio. ſecetur per mediū in ſigno D. Dico ꝙ rectangulum ab A B, B C compreheſum ſuperatur à quadrato ipſius D B, quadrato ipſius D C, vel ipſius D A. **Demonſtratio.** Hoc enim patet ex ſexta propoſitione ſecundi libri Elementorum Euclidis, præſenſque propoſitio parum ab illa differt.

PRO-

PROPOSITIO SEPTIMA.
THEOREMA VII.

Propoſitio. SI fuerint duæ rectæ lineæ, quarū altera quidē ſecta ſit vt in præcedenti propoſitione proponitur, altera verò ita ſecetur vt totius ipſius ſecūdæ lineę quadratū ad quadratum, quod fit ab inſecto priorū primæ lineæ ſegmentorum, & ab altero ſecundorum tanquam ab vna linea eam habeat rationem, quam habet quadratum alterius ſegmētorum ſecundæ lineæ ad rectangulum contentum à tota prima linea, & iam dicto illius priori ſegmento: habebit etiam eandem rationem exceſſus quadrati totius ſecundæ lineę ſupra iam dictū quadratū alterius ſuorum ſegmētorum ad exceſſum quadrati ab inſecto priorum primę lineæ ſegmentorum, & ab altero ſecundorum tanquam ab vna recta linea facti ſupra rectangulum, quod à tota prima linea, & eodem eius priori ſegmento comprehenditur.

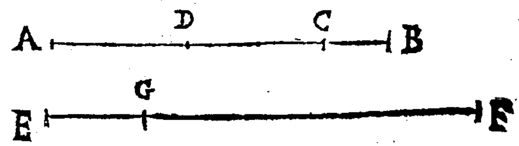
Expoſitio. Sit A B quidem recta linea ſecta vt in præcedēti propoſitione proponitur inſignis C, D; recta verò E F ita ſecetur in ſigno G, vt quadratum



totius E F ad quadratum ipſius D B eandem habeat rationem, quam habet quadratum alterius ſegmentorum lineæ E F, verbi gratia ipſius G F ad rectangulum contentum ab A B, B C. **Determinatio.** Dico quòd eandem met quoque rationem habebit exceſſus quadrati lineæ E F ſupra quadratum ipſius G F ad exceſſum quadrati

lineæ

lineæ DB ſupra rectangulum ab AB, BC cōprehenſum. *k Demõſtrõ.* Hæc etiã patet ex decimanona propoſitione quinti lib. Elementorum Euclidis.



Verùm quod in Conſtructione huius Theorematis præcipitur, ſcilicet, vt recta linea EF ita ſecetur in ſigno G, vt quadratum ipſius EF ad quadratum ipſius DB eandem habeat rationem, quam habet quadratum ipſius GF ſegmenti ad rectangulum ab AB, BC contentum: facilè fieri poteſt per quoddam Problema quaſi ſimile primo noſtro Problemati in principio huius operis demonſtrato, quod tale ſit. Dato Parallelogrammo rectangulo, & duobus quadratis: inuenire tertium quadratum, quod habeat eandem rationem ad datum rectangulum, quam habet alterũ datorum quadratorum ad reliquum. Quod quidem Problema eodem modo, eiſdemque Euclidis propoſitionibus conſtruitur, ac demonſtratur quemadmodum illud iam dictum in principio demonſtratũ; vtendo inſuper Corollario quartæ propoſitionis quinti, & nona propoſitione ſexti libri Elementorum Euclidis. *Caſus Conſtructionis Theorematis huius.* Adnotandum autem eſt, quòd iam dicta huius Theorematis Cõſtructio tres Caſus ſortita eſt. Aut enim ſecanda EF recta linea maior eſt quàm AB data recta linea iam ſecta, aut minor, aut ipſi æqualis. & quilibet horum trium Caſuum duo membra poteſt habere. Nã alterum rectæ EF lineæ ſegmentum, cuius quadratum eandem habere debet rationem ad rectangulum ab AB, BC contentum, quam habet quadratum totiùs EF ad quadratum ipſius BD, duobus modis ab ipſa EF linea abſcindi poteſt; vel ex parte E, vt ſit EG; vel ex parte F, vt ſit FG. in quibus omnibus Caſibus eadem eſt Conſtructio, atque Demonſtratio. *Notandum.* Hoc autẽ, quod præcipitur commodè fieri poteſt, quoniam tertium ipſum inueniendum quadratum eſt ſemper minus ipſo quadrato dato, à cuius latere ſecando abſciſio iam dicta facienda eſt; vt patet ex ſuppoſitione, & decimaquarta propoſitione quinti libri Elementorum Euclidis, & prima communi ſententia huius.

PROPO-

PROPOSITIO OCTAVA, THEOREMA VIII.

Propoſitio. SI recta linea ſecetur vtcunq;: quadratum totius ſuperat quadratum alterutrius ſegmentorum, rectangulo bis à ſegmentis comprehenſo vnà cum quadrato reliqui ſegmenti.

Expoſitio. Hæc ex quarta propoſitione ſecundi libri Elementorum Euclidis omnino manifeſta eſt, ab illaque parum diſcrepat.

PROPOSITIO NONA, THEOREMA IX.

Propoſitio. SI Conus à Vertice ad baſim plano ſecetur: communes plani, & ſuperficiei conicæ ſectiones vnà cum baſis conicæ dimetiente triangulum rectilineum faciunt vocatum triangulum per axem. cuius duo latera ſupra Coni baſim conſiſtentia ſi rectæ lineæ baſi trianguli parallelæ ſecuerint, omnes illæ rectæ lineæ erunt dimetientes circulorum in ſuperficie conica circunferentias habentium. atque ex eis tum dimetientibus, tum circulis baſi propinquiores quidem maiores remotioribus ſunt.

Expoſitio. Tres hæc propoſitio partes habet. Prima, quòd Coni ſectio à vertice vſque ad baſim, triangulum fit, quod triangulum per axem definiuimus. Secunda, quòd rectæ lineæ baſi trianguli parallelæ duo eius latera ſecantes, ſint dimetientes circulorum in ſuperficie conica circunferentias habentium. Tertia, quòd dimetientes, & circuli baſi conicæ propinquiores, maiores remotioribus ſint. *Demonſtratio.* Harum igitur trium partium prima quidem ſenſui patet, & à plerisq;

Ee qui

qui de Conicis scripsére tanquam Petitio ponitur; ab Apollonio autem in propositione tertia primi libri Conicorum, & à nonnullis alijs demonstratur. Secunda verò probatur ab eodem Apollonio in quarta propositione primi libri eorundē, & ab alijs: à nonnullis autem tanquam Petitio supponitur. Tertia autem pars facilè probari potest. Quòd enim dimetientes basi propinquiores remotioribus maiores sint probatur per secundam partem vicesimænonæ propositionis primi, & quartam propositionem sexti, & nonam Com. Sent. eiusdem primi libri Elemen. Eucl. & nonam Com. Sent. huius: vel per easdem propositiones vicesimamnonam primi, & quartam sexti, & nonam Com. Sent. primi, & per quartamdecimam propositionem quinti libri eorundem. Hoc autem probato, patet etiam circulos basi propinquiores circulis à basi remotioribus esse maiores per tricesimam definitionem huius. Tota igitur hæc propositio perspicua est.

Conclusio.

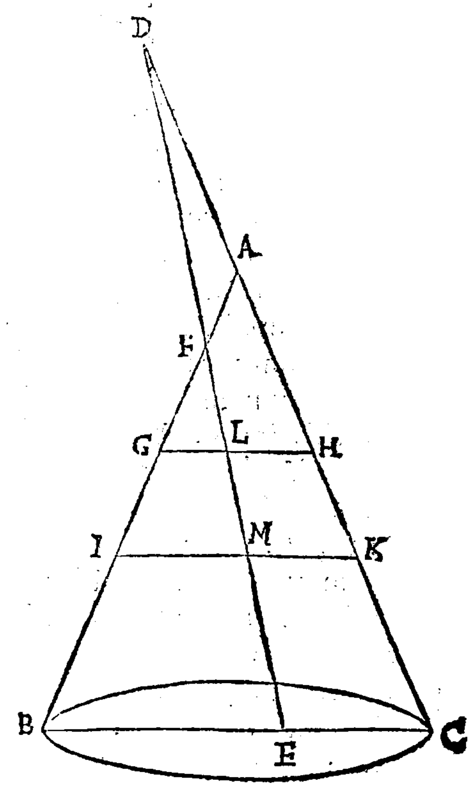
Propositiones hucusque demonstratæ Quæsito conferentes sunt: sequentes autem Quæsito propriæ erunt.

PROPOSITIO DECIMA, THEOREMA X.

Propositio.

SI iam dicti trianguli per axem in Cono facti latus alterum versus Coni verticem indirectum producatur, & ab eius extremitate extra Conum existente ad conicæ basis dimetientem recta linea ducatur secans reliquum trianguli latus, & omnes rectas lineas basi parallelas: erit ratio rectanguli contenti à partibus cuiuscunque parallelæ ad rectangulum comprehensum à tota partibus ipsis conterminali versus Coni verticem extensa, & parte ipsius conterminalis intra Conum existente, sicut rectanguli comprehensi à partibus cuiuscunque alterius parallelæ ad rectangulum contentum à tota similiter ipsis conterminali, & eius parte intra Conum existente. Et rectangula, quæ continentur à partibus parallelarum basi propinquiorum, erunt semper maiora rectangulis, quæ à partibus parallelarum à basi remotiorum continentur.

Expositio.



Sit iam dictū triangulum per axem in Cono factum ABC, cuius latus AC versus Coni verticem in directū producatur vsque ad D, & à puncto D ducatur DE secans ipsam quidem BC basim trianguli, siue conicæ basis dimetientem in signo *E*: reliquum verò trianguli latus AB in signo F. sintq; ipsi BC basi parallelæ GH, & IK, quas secet ipsa DE in signis L, M. Dico itaque rectangulum à GL, LH contentum ad rectangulū, quod à DL, LF continetur eandem habere rationē, quā hābet rectāgulū ab IM, MK ad rectangulum à DM, MF comprehensum: Et quòd rectangulum ab IM, MK contentum maius est rectangulo à GL, LH comprehenso.

Determinatio.

Demonstratio primæ partis.

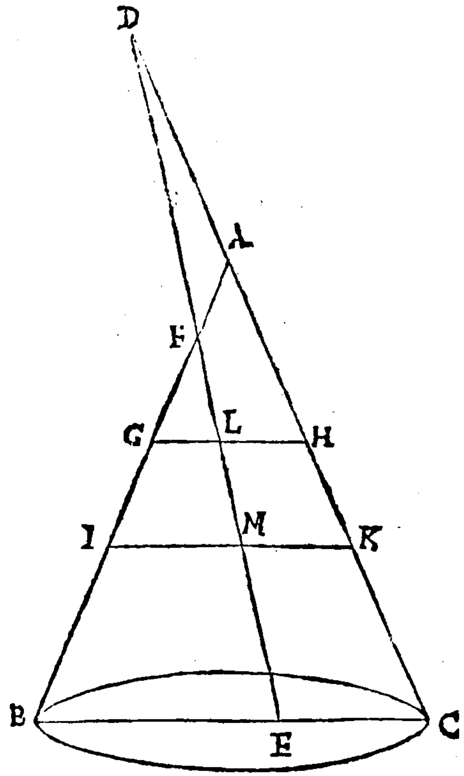
Quum enim in triangulo quidem BEF ipsæ GL, IM basi BE parallelæ sint, in triangulo verò DEC ipsæ LH, MK basi EC similiter sint parallelæ: erit triangulum FGL simile triangulo FIM, & triangulum DLH triangulo DMK per primam propositionem huius Dilucidationis bis sumptam. Sicut igitur GL ad LF, sic IM ad MF, & quemadmodum HL ad LD, ita KM ad MD per primam definitionem

finitionem sexti libri Elementorũ Euclidis bis sũptam. Quare si quatuor, quæ in F I M triangulo proportionales ostẽsę sũt lineæ in quatuor, quæ in triangulo D M K similiter sunt ostensæ proportionales vnaquæq; in suã correspondentẽ multiplicentur, prima scilicet in primam, & secunda in secũdam, & tertia in tertiã, quartaq́; in quartã: fient rectangula ab ipsis comprehẽsa inuicem proportionalia; nempe sicut primum ad secũdum, ita tertium ad quartum per tertiam propositionem huiusce Dilucidationis. At primum quidẽ est, quod à GL, LH: secũdum verò, quod à DL, LF: tertium autem, quod ab IM, MK: quartum denique, quod à DM, MF continetur. Igitur sicut quod à GL, LH ad id, quod à DL, LF; ita quod ab IM, MK ad id, quod à DM, MF. Patet itaque prima propositionis pars. Et nunc quidẽ in proposito nostro præcipuo demonstrauimus id, quod Rabbi Moyses in duobus simul iunctis triangulis frustratoriè in quarta propositione declarauit. Vanum est enim in Geometria bis idem repetere. Secunda verò pars propositionis perspicua est ex tertia communi sententia huius. Partes nanque parallelarum basi propinquiorum partibus remotiorum maiores sunt vnaquæque sua correspondenti, ipsa scilicet IM maior quàm GL, & ipsa MK maior quam LH. Quòd autem hoc verum sit, duobus illis modis probari potest, quibus in præcedenti propositione dimetientes propinquiores basi, maiores esse remotioribus probatum fuit. Vtraque igitur propositionis pars

Conclusio primæ partis.

Secundæ partis demostratio.

Cõclusio secũdæ partis.



pars clara iam est. Si ergo iam dicti trianguli per axem in Cono facti latus alterum versus Coni verticem in directum producatur, & reliqua vt in propositione. Quod demonstrandum erat.

Cõclusio totius propositionis.

PROPOSITIO VNDECIMA.

THEOREMA XI.

SI in recta linea ab extremitate producti lateris trianguli per axem ad Coni basin (vt præcedens propositio proposuit) deducta aliquot puncta intra Conum accipiantur, ab eisque rectæ lineæ plano ipsius trianguli ad rectos angulos erigantur Conicæ occurrentes superficiei: erit ratio quadrati vniuscuiusque ipsarum ad rectos angulos erectarum ad rectangulum contentum à tota sua conterminali versus Coni verticem extensa, & parte ipsius conterminalis intra Conum existente, sicut ratio quadrati cuiuslibet alterius ad angulos rectos erectæ ad rectangulum à tota similiter sua conterminali, & eius parte intra Conum existente comprehensum. Et quadratum ad angulos rectos erectæ propinquioris basi maius erit quadrato remotioris ad angulos rectos erectæ lineæ. Vnde ipsa etiam linea ad rectos angulos erecta basi propinquior remotiore maior erit.

Propositio.

Sit

Expoſitio.

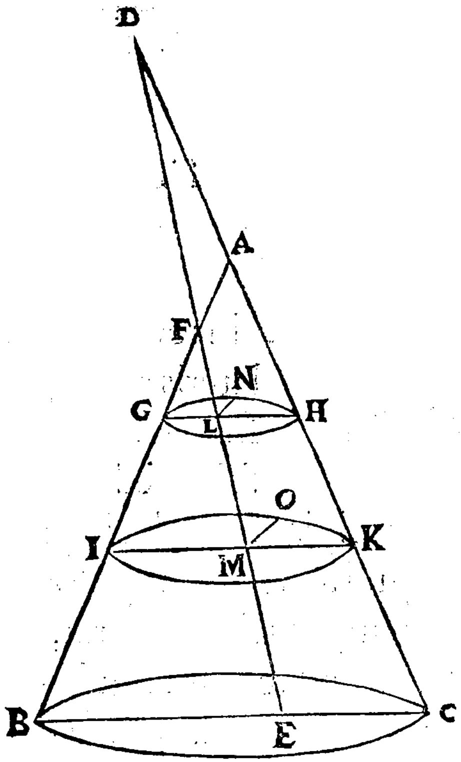
Sit eadem figura, quæ in præcedenti propoſitione, & à punctis L, & M intelligãtur duæ rectæ lineæ L N, M O ad rectos angulos erectæ plano trianguli A B C conicæ occurrentes ſuperficiei inſignis N, O.

Determinatio.

Dico quòd ratio quadrati lineæ L N ad rectangulum à D L, L F contentum, eſt ſicut ratio quadrati ipſius M O ad rectãgulum à D M, M F cõprehenſum.

Cõſtructio.

Intelligãtur duo plana conicæ baſi parallela Conum ſecãtia, quorum cõmunes ſectiones cum plano triãguli A B C ſint per tertiam propoſitionem vndecimi libri Elemẽtorum Euclidis rectæ lineæ G L H, & I M K. communes verò eorũdem planorum, & conicæ



ſuperficiei ſectiones ſint per quartam petitionem huius circulorũ circunferentiæ, quæ porrò tranſibunt per ſigna N, O, quoniam ipſę L N, M O in eodem ſunt plano cum ipſis G H, I K per ſecundam propoſitionem eiuſdem vndecimi. ipſæ autem G L H, & I M K erunt per eandem quartam petitionem huius dimetientes eorum circulorũ.

Demonſtratio primæ partis.

Quoniam itaque rectæ lineæ L N, & M O ex ſuppoſitione ad rectos ſunt angulos plano trianguli A B C: ergo per tertiam definitionem eiuſdem vndecimi Elementorũ ipſis etiã G L H, & I M K dimetientibus ad rectos ſunt angulos. Quare per quintam propoſitionẽ pręſentis Dilucidationis quadrata ipſarum L N, M O æqualia ſunt rectangulis à G L, L H, & ab I M, M K contentis. igitur per primam partem ſeptimę propoſitionis quinti libri Elementorum Euclidis ratio quadrati lineæ M O ad rectangulum à D M, M F contentum, eſt ſicut ratio rectanguli ab I M, M K contenti ad idem à D M, M F contentum rectangulũ.

ſimiliter

ſimiliter eadem erit ratio quadrati lineæ L N ad rectangulum à D L, L F comprehenſum, quæ etiã eſt rectanguli à G L, L H comprehenſi ad idem iam dictum rectangulum. eſt autem per præcedentem propoſitionem ratio eius, quod à G L, L H ad id, quod à D L, L F continetur, ſicut eius, quod ab I M, M K ad id, quod à D M, M F comprehenditur. ergo per vndecimam prop. quinti libri eorundem Elemen. bis ſumptam eadem erit ratio quadrati lineæ L N ad id, quod à D L, L F, quæ eſt quadrati lineæ M O ad id, quod à D M, M F comprehenditur rectangulum. Quæ quidem eſt prima pars propoſitionis.

Concluſio primæ partis.

Secunda verò pars patet ex quinta huius Dilucidationis, & ex ſecunda parte præcedentis prop. & ex prima, & ſecunda parte ſeptimæ prop. eiuſdem quinti Elem. & ex nona Com. Sent. huius: vel ex eadem quinta prop. & ſecunda parte præcedentis, & ex ſeptima Com. Sent. huius: vel ex eadem quinta, & ſecunda parte præcedentis, & prima parte 14 prop. quin. lib. Elemen. Eucl.

Demonſtratio ſecundæ partis triplex.

Cùm enim rectangulum à G L, L H contentum æquale ſit quadrato ipſius L N, & rectangulum ab I M, M K cõprehenſum, quadrato ipſius M O per iam dictam quintam prop. Dilucidationis; ipſum autem, quod ab I M, M K continetur maius ſit contento à G L, L H per ſecundam partem præcedentis; neceſſariò quadratum etiam ipſius M O quadrato ipſius L N maius erit, propter iam dictas propoſitiones, & Communes Sententias. Quæ eſt ſecunda pars propoſitionis.

Cõcluſio ſecundæ partis.

Ex hac autem ſecunda parte, & ex ſecunda Com. Sent. huius patet etiam tertia propoſitionis pars.

Demonſtratio tertiæ partis.

Tota igitur hæc propoſitio perſpicua eſt.

Concluſio eiuſdem.

Si itaque in recta linea ab extremitate producti lateris trianguli, & reliqua, vt in Theoremate. Quod demonſtraſſe oportuit.

Concluſio vniuerſalis.

Adnotandum autem eſt, quòd tertiam huius propoſitionis partem tacuit Rabbi Moyſes tanquam manifeſtam, quoniam autem abſque ea propoſitum præcipuum concludi non poteſt (vt inferiùs conſtabit) idcirco eam nos adiunximus, ac demonſtrauimus.

Notandum.

Quanuis autem tota præſens propoſitio eadem ſit cum propoſitione ſecunda trium in principio huius operis poſitarum, nihilominus placuit hìc quoque eam ponere, atque demonſtrare ne ordinem Elementarem huius Dilucidationis diſcerperem, & præſertim cùm demonſtratio hæc aliquantulum ab illa diuerſa ſit.

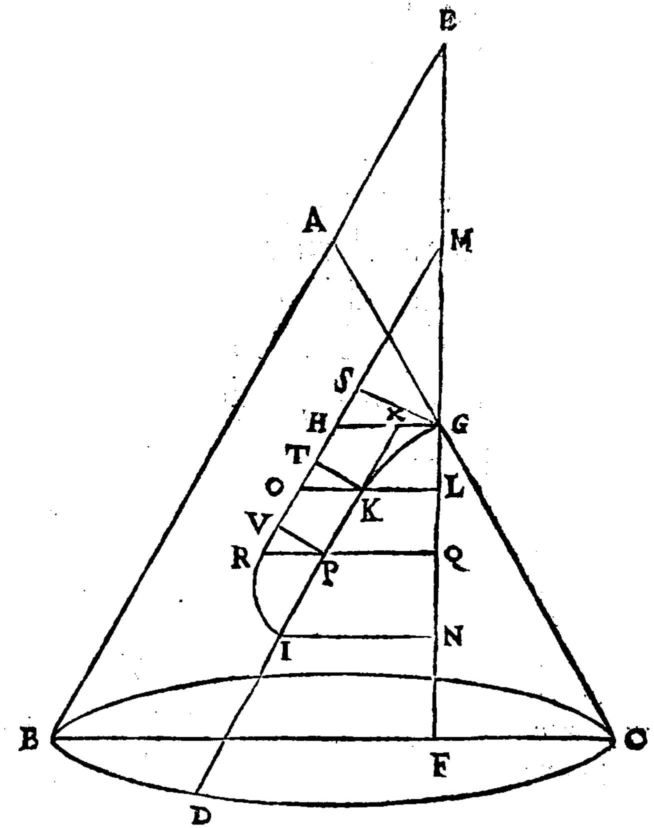
PROPO-

PROPOSITIO DVODECIMA.
THEOREMA XII.

Propositio. SI à signo, in quo linea recta ab extremitate producti lateris triãguli per axem ad Coni basim deducta reliqum trianguli latus secat, quædam recta linea plano trianguli ad rectos angulos erigatur parallela illis, quæ intra Conum (vt proponit præcedens propositio) eidem plano ad rectos angulos erectæ sunt; atque pars ipsius lineæ ab extremitate deductæ extra Conum iacens per medium secetur, & à puncto huiusce sectionis ducatur recta linea secans extra Conum omnes iam dictas parallelas in directum productas: quadrata totarum earum parallelarum productarum ad quadrata suarum conterminalium ad bipertitam vsque sectionem se extendentium eandem rationem habebunt.

Præsens propositio nulla prorsus indiget declaratione; quoniã posita hìc primæ nostræ demõstrationis secunda figura, facilè potest ex prima, & secunda huius Dilucidationis propositionibus demonstrari. Demonstratio. Cùm enim per iam dictã primã Dilucidationis propositionẽ sit vt GH ad GM, sic LO ad LM; & QR ad QM, & si quæ essent aliæ parallelæ: manifestum est per secundam eiusdem Dilucidationis quòd sicut etiam quadratum ipsius GH ad quadratum ipsius GM, ita quadratum ipsius LO ad quadratum ipsius LM, & quadratum ipsius QR ad ipsius QM quadratũ. Reponatur igitur hìc figura illa, quæ etiam sequentibus propositionibus deseruiet, & omnia clara erunt.

PRO-

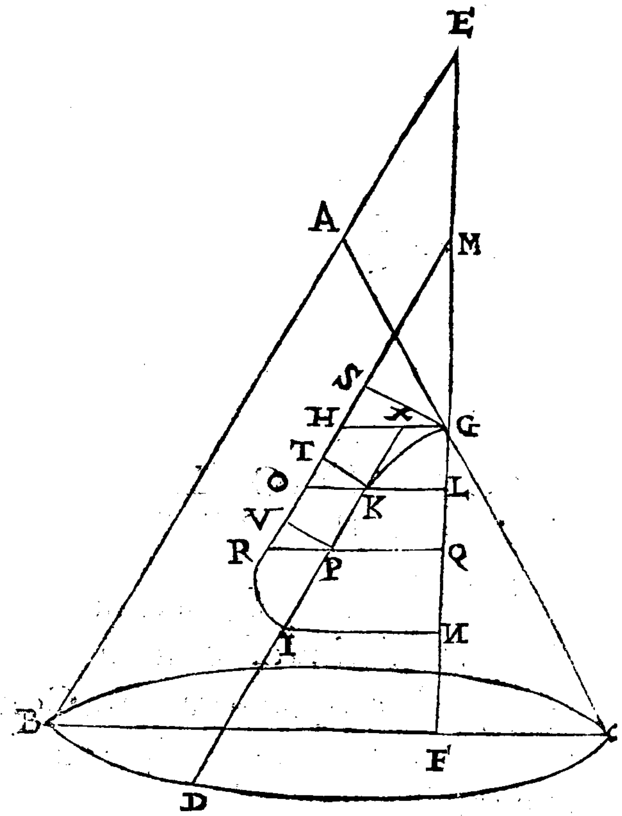


PROPOSITIO TERTIADECIMA.
THEOREMA XIII.

CVNCTIS ita se habentibus vt in præcedenti propositione, si quadratum parallelæ, quæ tota extra Conum est, ad suæ conterminæ vsque ad bipartitam sectionem peruenientis quadratum eandem habuerit ratio nem, quam habet quadratum factum ab interna par- Propositio.

te cuiuslibet reliquarum parallelarum ad rectangulum comprehensum à tota eiusdem internę partis conterminali vsque ad extremitatem producti lateris trianguli per axem perueniente, & eius conterminalis parte intra Conum existente: quadrata quoque totarum reliquarum parallelarum ad quadrata suarum conterminalium vsque ad bipartitam sectionem peruenientium eandem habebunt rationem, quam habent quadrata internarum partium parallelarum ad iam dicta rectangula.

Demonstratio. Propositio hæc facilè probari potest per primam partem vndecimę propositionis huius Dilucidationis, & per præcedentem, & per vndecimam propositionem quinti libri Elemen. Euclidis toties sumptã, quoties oportuerit; si hic quoque præcedentis propositionis figura repetatur. Notandum. Notandum autem quòd in hac propositione supponitur quod fiat quadratum lineæ GH ad quadratũ lineæ GM, sicut quadratum lineæ LK ad rectangulum ab EL, LG contentum,



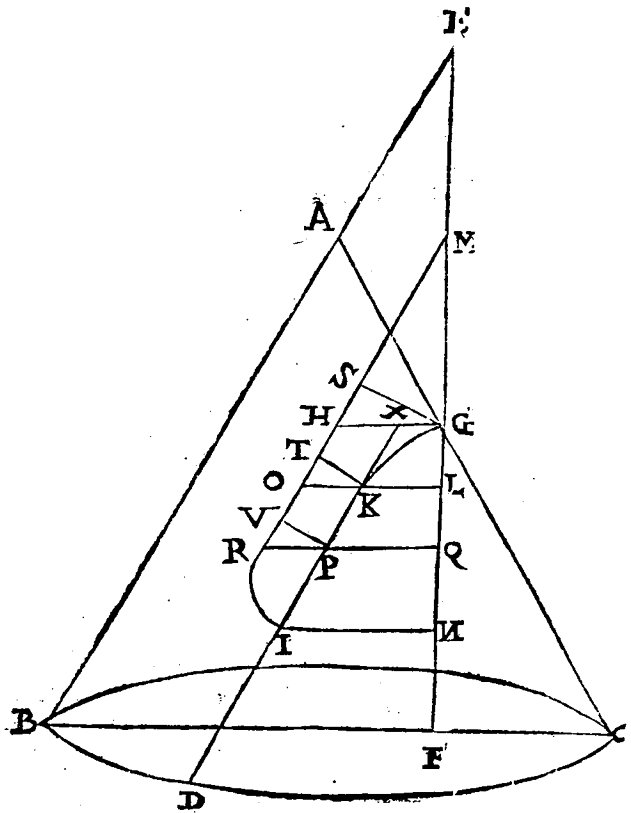
tum, quod quidem fiet per primam huius operis propositionem coadiuuante Corollario quartæ propositionis quinti libri Elementorum Euclidis.

PROPOSITIO QVARTADECIMA, THEOREMA XIIII.

IN hac Propositione concludit Rabbi Moyses alteram præcipui quæsiti partem (nempe duarum in eodem plano describendarum non coincidentium linearum continuam appropinquationem) iuxta numerorũ exempla, quæ in superioribus propositionibus ipse posuit. Quoniã autem nos nullum exemplum in numeris dedimus, cùm propositum nostrum sit Geometricis tantùm rationibus Quæsitum demonstrare: idcirco nulla habita huius propositionis tanquam frustratoriæ (qualis etiam quarta fuerat) expositione, ad sequentes nobis transeundum est, quæ propositum nostrum Geometricè concludent.

PROPOSITIO QVINTADECIMA, THEOREMA XV.

Propositio. OMNIBVS eo modo iacentibus, quo propositio tertiadecima proposuit: excessus quadratorum totarum parallelarum partim intra partim extra Conũ iacentium supra quadrata suarum internarum partium eam habebunt rationem ad excessus quadratorum linearum ipsis parallelis conterminalium vsque ad bipartitam illam sectionem supra rectangula contenta à totis conterminalibus vsque ad extremitatem Producti triangularis lateris peruenientibus, & partibus earundem conterminalium internis, quam habent quadrata totarum ipsarum parallelarum ad quadrata ipsarum conterminalium vsque ad bipartitam sectionem se extendentium : nec non eam, quam habent quadrata internarum partium parallelarum ad iam sæpe dicta rectangula.



Duas hæc etiam propositio partes habet, quarum prima quidẽ patet ex tertiadecima, & septima propositione huius Dilucidationis : secunda verò probatur per primam partem huius propositionis,& per tertiamdecimam huius Dilucidationis,& per vndecimam propositionem quinti libri Elementorum Euclidis,vt in proxima figura declarari potest.

Demonstratio.

PROPO-

PROPOSITIO SEXTADECIMA.

THEOREMA XVI.

MANENTIBVS cunctis vt in præcedenti propositione : necessariò excessus, quo iam dicta rectangula à conterminalium vsque ad bipartitam sectionem se extendentium quadratis superantur, nil aliud est nisi quadratum rectæ lineæ, quæ in ipsa cõterminali inter lateris triangularis sectionem, & bipartitam diuisionẽ recipitur. Vndè excessus, quo quadrata internarum partium parallelarum à totarum parallelarum quadratis exceduntur æqualis est quadratò primæ parallelæ, quæ tota extra Conum iacet. Necnon isti omnes excessus quadratorum totarum parallelarum supra quadrata suarum internarum partium inuicem æquales sunt.

Præsens propositio tres habet partes, quarum prima quidẽ patet ex sexta propositione huius Dilucidationis. Cùm enim ipsa E L vtcunque in signo G secta sit,alterum autem ipsius segmentum, nempe G E per mediũ in signo M sit diuisum, proculdubio per ipsam sextam propositionem rectangulum à tota E L, & insecto eius segmento L G contentum superatur à quadrato ipsius M L ex eodem priori G L segmento,& altero secundorum segmentorum nempe G M constantis, quadrato eiusdem G M lineæ.[1]idemque in cæteris etiam ostendetur. Secunda autem probatur per primam partem præsentis,& præcedentis,& per duodecimam huius Dilucidationis, & per vndecimã propositionẽ quinti libri Elementorum Euclidis, & primam partem nonæ propositionis eiusdem quinti : Vel per secundam partem præcedentis,& suppositionem tertiædecimæ propositionis huius Dilucidationis, & eandem vndecimam quinti, & primam partem nonæ propositionis

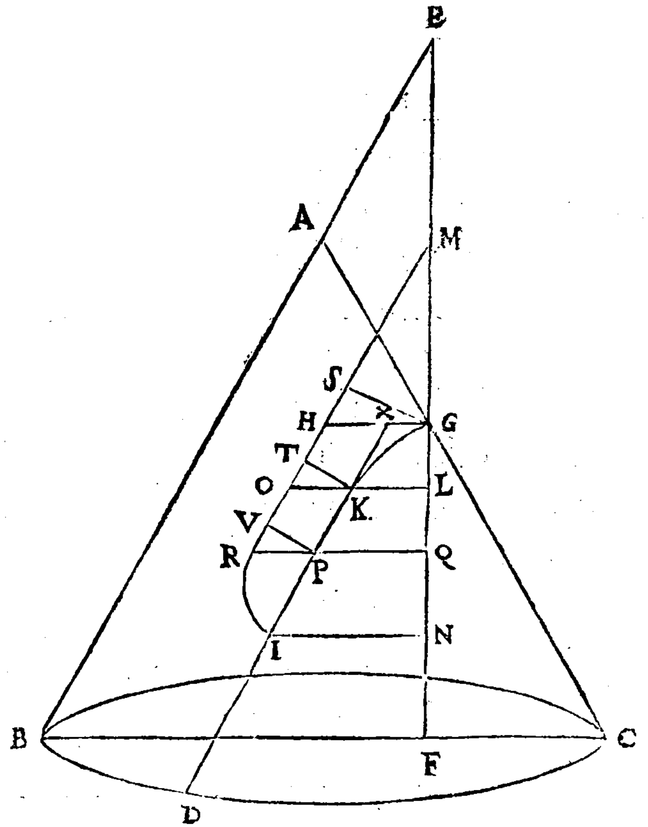
Demonstratio primæ partis.

Demonstratio secundæ partis duplex.

nis

Prima Demonſtratio ſecundæ partis.

nis eiuſdē. Cùm enim exceſs⁹ quadrati L O ſupra quadratū L K ad exceſſū quadrati L M ſupra rectangulum contentum ab EL, LG, ideſt p primam partē præſentis propoſitionis ad quadratū G M habeat rationē ſicut quadratum L O ad quadratū L M per primā partē præcedentis :



quadratum autem L O ad quadratum L M eam habeat rationem, quam quadratum G H ad quadratum G M per duodecimā propoſitionem huius Dilucidationis : ergo per vndecimam propoſitionem eiuſdem quinti Elementorum exceſſus quadrati L O ſupra quadratum L K eam habebit rationē ad exceſſum quadrati L M ſupra rectangulum contentum ab E L, L G, ideſt ad quadratum G M, quam habet etiam quadratum G H ad idem G M quadratum. igitur per primam partem nonæ propoſitionis eiuſdē quinti Elemētorum exceſſus quadrati L O ſupra quadratum K L æqualis eſt quadrato lineæ G H. Idem quoque de exceſſibus quadratorum cæterarum parallelarum totarum ſupra quadrata ſuarū internarum partium oſtēdetur. Præterea quoniam per ſecundam

Secunda Demonſtratio ſecundæ partis.

partem

partem præcedentis propoſitionis exceſſus quadrati L O ſupra quadratum K L ad exceſſum quadrati L M ſupra rectangulum comprehenſum ab E L, L G, ideſt ad quadratum G M eandem habeat rationem, quam habet quadratum K L ad iam dictum rectangulum : quadratum autem L K ad iam dictum rectangulum eam habet rationem (per ſuppoſitionem tertiædecimę propoſitionis huiuſce Dilucidationis) quam habet quadratum G H ad idem G M quadratū : erit per eandem vndecimā, & primā partem nonæ prop. quinti lib. Elem. Eucl. exceſſus quadrati L O, quo ſuperat quadratum L K, æqualis quadrato G H. Idem autem hoc quoque ſecundo modo de cæteris etiam quadratorum parallelarum totarū ſupra quadrata ſuarum internarum partium exceſſibus demonſtrabitur. Patet igitur vtroque modo ſecunda propoſitionis pars. Tertia verò ex ſecunda iam demonſtrata, & ex prima communi ſententia primi libri Elementorum Euclidis manifeſta eſt. Tota igitur hæc propoſitio perſpicua relinquitur. Manentibus igitur cunctis, & reliqua vt ſupra. Quod demonſtrandum erat.

Tertiæ partis Demonſtratio.

Concluſio vniuerſalis.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

THEOREMA XVII.

Continens alteram partem demonſtrationis duodecimæ.

Propoſitio.

CVNCTIS ſimiliter vt in præcedenti iacentibus, exceſſus quadratorum totarum parallelarum ſupra quadrata ſuarū internarum partium nil aliud eſt niſi duplum rectanguli ab interna, & externa parallelarum parte contenti, vnà cum quadrato externæ partis earundē. Vndè quadrata externarū partium baſi Conicæ propinquiorum quadratis externarum partium à baſi remotiorum minora ſunt. Nec non ipſæ externæ parallelarū partes baſi propinquiores externis partibus à baſi remotioribus ſunt minores.

Tres

Primæ partis demonſtratio.

Tres hæc quoque partes habet, quarum prima quidem ex octaua huius Dilucidationis omnino clara eſt. Secunda verò facilè demonſtrari poteſt per ſecũdam partem tertiæ propoſitionis illarum trium, quas in operis initio demonſtrauimus, peracta ſcilicet Conſtructione

Secundæ partis Conſtructio.

Intelligatur enim duplum rectanguli ab LK, KO Contenti, quod eſt per primam propoſitionem ſecundi libri Elementorum Euclidis rectangulum à KO, & dupla ipſius KL contentũ, quadrato ipſius KO ſic eſſe adiunctum vt proponit illa iam dicta tertia propoſitio: necnon duplum rectanguli à QP, PR contenti, ideſt rectangulum à PR, & dupla ipſius PQ contentum, eodem modo quadrato ipſius PR adiectum eſſe.

Demonſtratio ſecundæ partis.

Cùm itaque duo hæc aggregata rectangula per primam partem huius propoſitionis ſint exceſſus quadratorum LO, & QR ſupra quadrata KL, & PQ, quippe qui exceſſus per tertiam partem præcedentis propoſitionis inuicem æquales eſſe demonſtrati ſunt: cumque linea PQ maior ſit quàm KL per tertiã partem vndecimæ propoſitionis huius Dilucidationis, ideoque dupla etiam lineæ PQ maior ſit quàm dupla lineę KL per quintamdecimam propoſitionem quinti libri Elementorum Euclidis: igitur per ſecundam partem, illius iam cõmemoratæ tertiæ propoſitionis quadratum lineæ KO maius eſt quadrato lineæ PR. idemque de cæteris etiam externarum partium quadratis demonſtrari poteſt.

Cõcluſio ſecũdæ partis.

Patet itaque ſecunda etiam propoſitionis pars. cuius vtique demonſtrationem obſcurè admodum, & caliginosè Rabbi Moyſes declarat, quoniam tertiam illam propoſitionẽ à nobis in ſuperioribus demonſtratã ipſe ſicco pede præterijt, ex qua nimirùm tota huius ſecundæ partis demonſtratio dependet.

Rabbi Moyſis defectus primus.

Tertiæ partis demonſtratio.

Ex hac autem ſecunda propoſitionis parte iam demonſtrata, & ex ſecunda communi ſentẽtia huius tertia quoque propoſitionis pars explorata relinquitur.

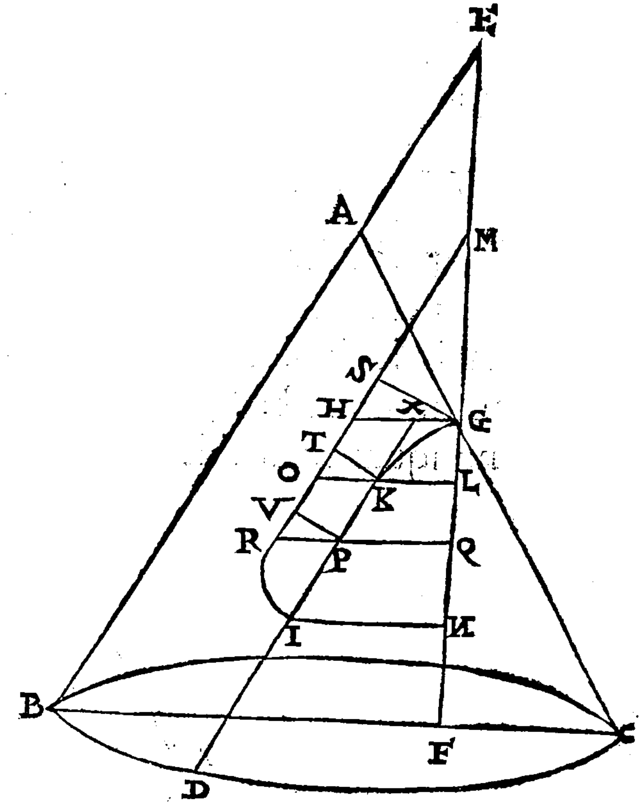
Concluſio vniuerſalis.

Quare tota propoſitio candore luceſcit. Cunctis igitur, &c. vt ſupra. Quod erat demonſtrandum. Verum enimuero cùm ex tertia parte huius propoſitionis pateat externas parallelarum partes conicæ baſi propinquiores externis earundem partibus à baſi remotioribus eſſe minores, idemque de cunctis externis eiuſmodi partibus in infinitum oſtendi poſſit: habemus iam alterum præcipui noſtri Quæſiti membrum veluti demonſtratum, quòd ſcilicet duæ lineæ in eodem plano iacentes quantò longiùs producuntur, eò magis ſibi inuicem propiores fiant.

Demonſtratio alterius partis Quæſiti principalis.

Nã recta MR linea, quæ à bipartita illa ſectiobe extra Coni ſuperficiem protracta fuit

fuit



fuit ſecans omnes illas parallelas extra Conum productas, in eodemque plano cũ dicta recta linea iacentes: necnõ inflexa GKPID linea latus Hyperboles factæ (vt ex ſuperioribus cõſtructionibus, & viceſimaprima definitione huius manifeſtum eſt) ab eodem plano Conum ſecante, eò magis ſibi appropinquant, quãtò lõgiùs verſus Coni baſim in eodem iam dicto plano producuntur. Quod quidẽ ſic breuiter concludatur. Quoniam KO maior eſt quàm PR, vt fuit oſtenſum, igitur & KT minima diſtãtia puncti K à recta MR maior eſt quàm PV minima diſtãtia puncti P ab eadem MR recta linea. hæc enim in noſtra prima demonſtratione ſatis ſuperque demonſtrata fuere. Idem autem de omnibus etiam alijs inflexæ GKPID lineæ à recta MR minimis diſtantijs oſtendetur.

Cõcluſio alterius partis Quæſiti præcipui.

Alterum igitur Quæſiti præcipui membrum clarum eſt. In quo ſanè demonſtrando Rabbi Moyſes paralogiſmum illum committit, quem etiam omnes, quos legimus huiuſce rei Autores præter Cardanum cõmiſerunt: quãdoquidem ex ipſarum KO, & PR, cæterarumq; ſimilium inæqualitate, duarum linearum, inflexæ ſcilicet GKPID, & rectæ MR continuam verſus Coni baſim appropinquationem concludit.

Rabbi Moyſis defectus ſecundus.

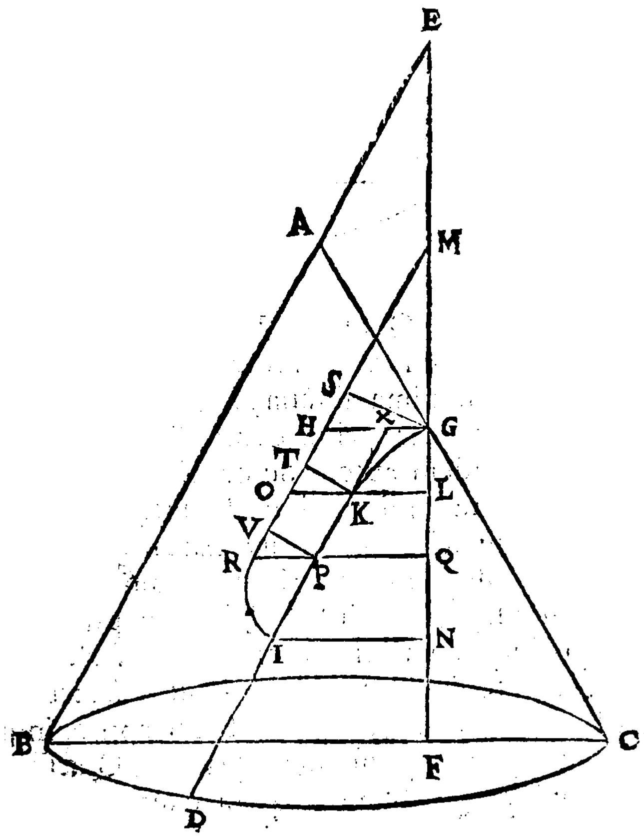
Demonſtrato igitur altero præcipui Quæſiti membro, ad reliquum nobis pergendum eſt, quod in ſequenti propoſitione demonſtrabitur.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

THEOREMA XVIII.

Continens reliquam partem demonstrationis duodecimæ.

Propositio. OMNIBVS eodem modo vt in præcedenti dispositis, illæ iam dictæ duæ lineæ, Hyperbolica scilicet, & recta in eodem ambæ plano existentes, & quò magis producuntur, eò magis sibi inuicem proximãtes, vt in præcedenti demonstratum est: si etiam in infinitum protrahantur, nunquam coincident.



Sit

Sit hìc quoque figura superiorum propositionum posita. Dico itaque duas lineas inflexam scilicet GKPID, & rectam MR in eodem plano iacentes, & quantò magis versus Coni basin producuntur, eò magis sibinuicem proximantes: si etiam in infinitũ protrahãntur, nunquam sese contingere. Nam si fieri potest tangant se in aliquo signo exempli gratia in signo *I*, à quo ad GF rectam lineam ducatur (vt in prima nostra demonstratione docuimus) *I*N recta linea perpendicularis in planum trianguli ABC, & parallela ipsis GH, & K*L*, & PQ rectis lineis. Erit igitur per primam partem vndecimę huius Dilucidationis ratio quadrati lineæ *I*N ad rectangulum ab EN, NG comprehensum, sicut ratio quadrati lineæ K*L* ad rectaugulum ab E*L*, *L*G contentum. Sed ratio quadrati lineæ *K*L ad rectangulum ab EL, LG cõtentum per tertiãdecimam huiusce Dilucidationis est sicut ratio quadrati lineæ LO ad quadratum lineæ LM, ergo per vndecimam propositionem quinti libri Elementorum Euclidis vt quadratum ipsius IN ad rectangulum ab EN, NG contentum, sic quadratum ipsius LO ad quadratum ipsius LM. quadratum autẽ ipsius LO ad ipsius *L*M quadratum eandem habet rationem, quam ipsius *I*N quadratum ad quadratum ipsius MN per duodecimam huius Dilucidationis: igitur per eandem vndecimam quinti vt quadratum IN ad rectangulum ab EN, NG, sic etiam idem *I*N quadratum ad quadratũ ipsius MN. quare per secundam partem nonæ propositionis eiusdem quinti Elementorum quadratũ lineæ MN æquale est rectangulo ab EN, NG contento, quod est absurdum: quoniam reuera quadratum ipsius MN superat rectãgulum ab EN, N*G* contentum quadrato lineæ *G*M, vt in sextadecima Dilucidationis huius demonstratum fuit. Non tangit igitur recta linea MR inflexam *G*KPID in signo *I*. Similiter autem ostendetur quòd neque etiã in alio puncto dictæ lineæ sese tangere possunt. Nullibi ergo se contingent si etiam in infinitum producantur. Omnibus itaque eodem modo, &c. vt in propositione. Quod demonstrasse oportuit. Verùm hoc etiam demonstrato, vniuersum iam precipuum nostrum Quæsitum luce clarius est. Hactenus igitur totam Rabbi Moysis demonstrationem iam dilucidauimus, ad perfectionemque Geometricam quoad fieri potuit redegimus, quæ quidem erit duodecima præcipui nostri Problematis demonstratio.

Expositio. Determinatio. Constructio, & Demõstratio reliquæ partis Quæsiti præcipui. Conclusio eiusdem reliquæ partis. Conclusio vniuersalis.

DILVCIDATIO VLTIMAE PARTIS LIBELLI RABBI MOYSIS,

Quę continet aliam ſenſu magis perceptibilem pręcipui Problematis Demonſtrationem, quæ erit Propoſiti noſtri xiij, & vltima.

POST ipſam autem iam dilucidatam demonſtrationem volens ipſe Rabbi Moyſes oſtendere quodam etiam ſenſu magis perceptibili exemplo quòd cauſa huiuſce admirandi effectus in præfatis lineis ſupra Conum deſcriptis non aliunde prouenit niſi ab ipſa tumoſa, montoſaq́; Coni rotunditate: reducit per imaginationem Conum in plano, in quo reperit quaſdam à conica ſuperficie diſtantias, quæ quantò magis Conus creſcit baſim verſus, tantò minores fiunt; & nunquam tamen adeo decreſcunt, quòd nullæ prorſus euadant. quo quidem in plana ſuperficie oſtenſo, reducit iterum per excogitationem Conum ipſum cum omnibus deſignatis lineis, vt iacebat in plano, ad corpus conicum, in cuius conica ſuperficie oſtendit eaſdem iam dictas permanere diſtantias continuè verſus Coni baſim decreſcentes, & nunquam euaneſcentes. Poſtea docet per extremitates dictarum diſtantiarum Cono infixas curuam, ſeu Hyperbolicam lineam in quodam plano deſignare, & per alteras earundem diſtantiarum extremitates extra Conum iacentes rectam ducere lineam in eodem plano cum ipſa Hyperbolica iacentem, quippe quæ tantò eidem Hyper-

Hyperbolicæ propior fiet, quantò longiùs ambæ eodem in plano verſus Coni baſim vnà cum toto ipſo Cono producentur: nunquam tamen ipſam tanget, etiam ſi in infinitum protrahantur. Verumtamen quoniam exemplum hoc ipſius Rabbi admodum obſcurè, perplexè, conciſeq́; ab ipſo declaratur; & præſertim quia Lemma quoddam Geometrica nimirùm demonſtratione indigens ſicco pede præterire videtur, in quo tota huius exempli vis conſiſtit: idcirco hæc vltima pars à nobis leuiter prætereunda non eſt, ſed maximè illuſtranda, atque dilucidanda. Pulcrum ſiquidem exemplum hoc eſt, & ſenſu perceptibilem rei veritatem Geometricis rationibus confirmatam ob oculos per quandam imaginationem expeditiſſimè ponit. Agè igitur illud Lemma priùs demonſtremus, quod ipſe Rabbi indemonſtratum reliquit. Sit autem Theorema huiuſcemodi.

Lemma ſequentis Demonſtrationis.

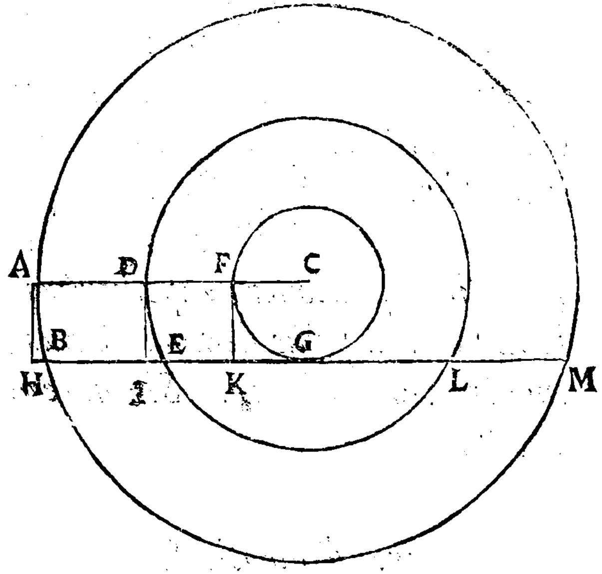
Theorema.

SI quotlibet circuli concentrici in eodem plano deſignati fuerint, in eiſque duæ rectæ lineæ parallellæ ducantur altera quidem tangens vltimum interiorem circulum, & ſecans reliquorum circulorum circunferentias, altera verò à communi centro exiens, ſecansque omnes circulorum circunferentias; & à punctis, vbi linea à cen- Propoſitio.

à centro exiens circunferentias ſecat, ad reliquam parallelam perpendiculares rectę ducantur lineæ: erunt ipſius rectæ lineæ interiorem vltimum circulum tangentis partes inter ipſas perpendiculares, & circulorum circunferentias receptæ, quò magis à iam dicto contactu remotæ, eò quidem minores.

Expoſitio.

Sit circulus AB, cuius centrum C, & intra ipſũ alius DE circulus habens idem centrũ, & intra hunc tertius circulus FG prioribus concentricus, & à dato pũcto G (quodcunque ſit) ducatur per decimamſeptimam propoſitionẽ tertij libri Elementorum Euclidis recta linea tangens datum circulum FG in ipſo ſigno G, & ſecans circunferentiam quidem DE in ſigno E, circunferentiam verò AB in ſigno B, quæ per ſecundam petitionem primi libri eorundem producatur vltra ſignum B interminatè. & per punctum C ducatur per triceſimamprimam propoſitionem eiuſdem primi libri Elemẽtorum parallela ipſi BG, quæ ſit CFDA. & à ſignis ADF erigantur per vndecimam propoſitionem eiuſdem primi ad rectos angulos ipſi AC ipſæ AH, DI, FK rectæ lineæ, quæ productæ ſecent ipſam GB ex parte B interminatam in ſignis HIK: Secabunt enim eam neceſſariò cùm ſecent ipſi parallelam AC ratione ſæpe ſuperiùs dicta. erunt itaq; ipſæ AH, DI, FK perpendiculares ſuper ipſam GH per tertiam partem viceſimænonæ propoſitionis, & decimam definitionem primi libri Elementorum Euclidis; cadentque per ſextamdecimam propoſi-



propoſitionem tertij lib. eorundẽ extra circulorũ circunferentias, quas tangunt per Corollarium eiuſdem ſextædecimæ. His ita expoſitis dico lineam EI minorem eſſe ipſa GK, & ipſam BH ipſa EI.

Determinatio.

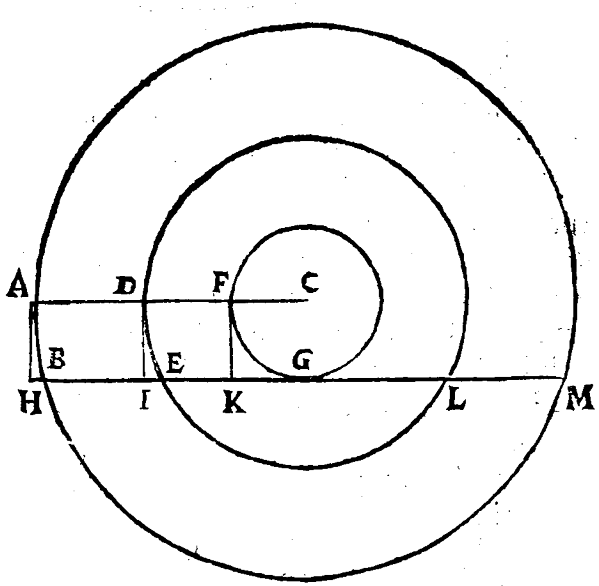
Si enim ita non fuerit, ſit ſi fieri poteſt EI æqualis ipſi GK, vel maior quàm ipſa; & producatur per ſecundam petitionem primi libri eorundem ipſa HG in partem G quouſque ſecet ex altera parte circũferentias circulorum ipſius quidem DE in ſigno L, ipſius verò AB in ſigno M.

Cõſtructio.

Demonſtratio indirecta.

Quoniam igitur FK, & KG tangunt circulum FG, æquales ſunt per triceſimamſextam propoſitionem tertij, & primam Communem Sent. primi libri Elementorum Euclidis, & per ſecundam Com. Sent. huius. eſt autem FK æqualis ipſi DI, necnon ipſi AH per triceſimamquartam propoſitionem eiuſdem primi Elementorum. ipſę enim FK, DI, AH inuicem parallelæ ſunt per ſecundam partem viceſimæoctauæ propoſitionis primi libri eorundem. & ipſa igitur GK ipſis DI, & AH æqualis eſt per primam Comm. Sent. eiuſdem primi bis ſumptam. ſi ergo EI ſit æqualis ipſi GK, erit etiam æqualis ipſi DI per eandem primam Com. Sent. eſt autem rectangulum ab LI, IE contentum æquale quadrato ipſius DI per iam dictam triceſimamſextam tertij. igitur per eandem ſecundam Comm. Sent. huius, & per primam Com. Sent. eiuſdem primi Elemen. quod ab LI, IE continetur æquale eſt quadrato ipſius EI, totum ſcilicet ſuæ parti per tertiam propoſitionem ſecundi libri Elementorum Euclidis, quod fieri non poteſt per nonam Com. Sent. primi libri eorundem. Non eſt igitur EI æqualis ipſi GK. Sit modò maior quàm ipſa, erit etiam maior quàm DI per ſecundam partem ſeptimæ propoſitionis quinti libri Elementorum Euclidis, & nonam Com. Sent. huius. quare per ſecundam Comm. Sent. huius quadratum lineæ EI maius erit quadrato lineæ DI. Cùm autem rectangulum ab LI, IE contentum æquale ſit quadrato ipſius DI, erit per primam partem eiuſdem ſeptimæ quinti, & nonam Com. Sent. huius dictum rectangulum minus quadrato ipſius EI, totum videlicet ſua parte per eandem tertiam ſecundi, quod vtique abſurdum priore peius eſt. Non eſt ergo EI maior quàm ipſa GK: oſtenſum autem fuit quòd neque etiam ipſi æqualis: neceſſariò igitur minor quàm ipſa eſt. Præterea ſi BH minor non eſt quàm EI, ſit primò ipſi æqualis. Quoniam itaque rectangulum quidem, quod ab LI, IE æquale eſt quadrato ipſius DI per triceſimamſextam propoſi-

propoſitionem libri tertij Elemen. Euclidis,quod verò ab MH, HB ſimiliter quadrato AH per eandem, quadratum autẽ AH quadrato DI per triceſimãquartam propoſitionẽ primi libri Elemẽ. Eucl. & ſecundam Comm. Sent. huius eſt æquale: igitur per primam Com.Sent. eiuſdẽ primi Elementorum bis ſumptam rectangulum ab *LI, IE* contentum æquale erit contento ab MH, HB rectangulo. ſed contentum ab LI, IE cõtento ab *LI*, BH eſt æquale per ſuppoſitionem, & tertiam Com. Sent.huius: ergo & contentum ab MH, HB æquale erit contento ab *LI*, BH per primam Communem Sent.eiuſdem primi Elementorum, quod vtique eſt maximum inconueniens,quoniam reuera contentum ab *LI*, BH minus eſt contento ab MH, HB per primam propoſitionem ſexti libri eorundem Elem. accepta enim BH pro communi altitudine,quemadmodum baſis MH baſi LI per nonam Comm.Sent. primi eorundem maior eſt, ita etiam contentum ab MH, HB contento ab *LI*, BH maius erit per nonam Com.Sent. huius. Non eſt igitur BH ipſi EI æqualis. Sit modò maior quàm ipſa. erit itaque rectangulum ab MH, HB comprehenſum maius rectangulo ab LI, IE comprehenſo per tertiam Comm.Sent. huius. hoc autem fieri non poteſt, quoniam paulo antè duo iam dicta rectangula æqualia inuicem eſſe oſtenſa ſunt. Non eſt ergo BH maior quàm *EI*: at oſtenſum eſt quòd neque etiam æqualis ipſi eſſe poteſt: de neceſſitate igitur minor quàm ipſa erit. Quare demonſtratum eſt ipſam BH ipſa *EI*, ipſamque *EI* ipſa GK minorem eſſe. Idem autem eodem modo de cæteris quoque huiuſcemodi rectis lineis, ſi etiam infiniti eſſent concentrici



centrici

centrici deſcripti circuli, oſtendi poteſt. Patet ergo propoſitum indirectè. Poſſumus autem & directè breuiter idem ſic demonſtrare. Quoniam quadratũ ipſius GK quadrato ipſius FK per triceſimamſextam prop.tertij,& primam Com.Sent.primi libri Elementorum Euclidis æquale eſt; atque idcirco quadrato etiam ipſius DI per ſecundam Comm. Sent. huius, & eandem primam Com.Sent. primi. Eſt autem quod etiam ab LI, IE continetur rectangulum per eandem triceſimamſextam tertij æquale eidem ipſius DI quadrato: igitur per eandem primam Comm.Sent.rectangulum ab LI, IE contentum quadrato ipſius GK erit æquale. Sed quadratum ipſius EI minus eſt per tertiam propoſitionem ſecundi libri Elementorũ Euclidis rectangulo ab LI, IE contento: ergo per ſecundam partem ſeptimæ propoſitionis quinti libri eorundem, & nonam Communem Sententiam huius quadratum ipſius EI minus eſt quadrato ipſius G*K*. quare per ſecundam Communem Sententiam huius linea E*I* quàm linea GK minor erit. Rurſus contentum ab L*I*, *I*E rectangulum æquale eſt ei,quod ab MH, HB continetur rectangulo (vt ſuperiùs oſtenſum eſt) & per tertiam propoſitionem ſecundi libri Elementorum Euclidis,quod quidem ab L*I*, *I*E continetur æquale eſt contento ab LE, E*I*, ſimulque ipſius E*I* quadrato: quod verò ab MH, HB ei, quod ab MB, BH, vnà cùm quadrato ipſius BH. habemus ergo duo rectangula alterum ab LE, E*I*, & alterum ab MB, BH contenta, quæ duobus quadratis, linearum ſcilicet E*I*, & BH ita adiungi poſſunt, vt vnum quidem cum ipſis commune latus habeant, duo verò duobus indirectum iacentia: atque duo hæc aggregata inuicem æqualia ſunt,vnum autem vnius rectanguli latus ex indirectum iacentibus, ipſum nempe EL minus eſt per nonam Communem Sententiam primi libri Elementorum Euclidis vno ex eiſdem alterius rectanguli lateribus, vtpotè ipſo BM: igitur per ſecundam partem tertiæ propoſitionis in principio huius libri demonſtratæ quadratum lineæ BH quadrato ipſius E*I* minus eſt. vnde per ſecundam Communem Sententiam huius linea quoque BH quàm ipſa *EI* minor erit. Similiter autem de quibuſcunque etiam alijs huiuſcemodi lineis idem oſtendetur. Perſpicuum igitur eſt propoſitum etiam directè. Si itaque quotlibet circuli concentrici in eodem plano deſignati fuerint, & reliqua vt ſuperiùs. Quod demonſtrandum erat.

Cõcluſio indirectæ demonſtrationis.

Demonſtratio directa.

Cõcluſio directæ demõſtrationis.

Concluſio totius.

Hh Hoc

Hoc itaque Theorema proposito nostro maximè necessarium ipse Rabbi prætermisit. Cùm enim dixisset distantiam E I minorem esse distantia G K, similiterque ipsam B H ipsa *E I*, & sic de cæteris eiusmodi: hoc porrò nulla alia ratione probauit, nisi quia (inquit ipse) maiores circuli minorem habent incuruationem. quæ quidem ratio peiùs concludit quàm illa Orontij ratio ab incuruatione circulorum ipsa quoque suscepta, quam in superioribus tanquam nil concludentem redarguimus.

Rabbi Moysis defectus tertius.

DECIMATERTIA, ET VLTIMA PRAECIPVI PROBLEMATIS DEMONSTRATIO.

Expositio.

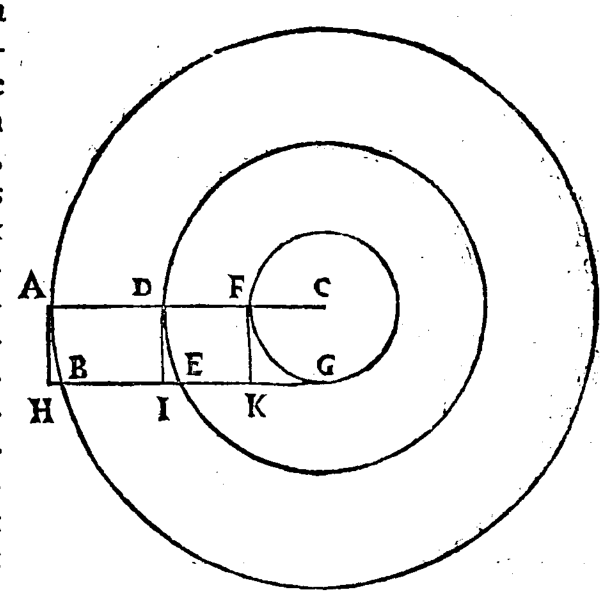
CVM à nobis proximum Lemma Geometricè iam demonstratum sit, proposito nostro nunc illud applicantes dicimus. Quòd si Conum aliquem imaginemur esse supra basim suam compressum, totumque in plano iacentem: tunc quidem omnes circuli, qui in eius conica superficie basi paralleli erant, in vno, eodem [illegible]ue plano iacebunt idem commune centrum circunstantes, qu[illegible] vtique priùs Coni fastigium erat: latus verò Coni erit [illegible] [illegible]entro communi concentricorum circulorum exiens, [illegible] [illegible]lorum ipsorum circunferentias ex altera parte sec[illegible] [illegible]amodum linea C A in superiori figura, quæ etiam hìc [illegible]etenda est præter lineam G L M, vt cuius hoc loco nullus sit [illegible]us futurus.

Cōstructio.

Si igitur Conum hunc ita compressum, totumque in vno plano prostratum, ad suam pristinam montosam, tumosamque rotunditatem restitutum esse intellexerimus; & eius latus, nempe ipsam A C à basi vsque ad verticem iam ascendisse: proculdubio statim inueniemus etiam rectæ quidem A C parallelam, ipsam scilicet G H simul cum perpendicularibus A H, D I, F *K* circulos tangentibus eleuatam in aërem extra Conum, & remotam à punctis B, E, G conicæ superficiei iuxta distantias B *H*, E I, G K quamuis non minimas.

Demonstratio.

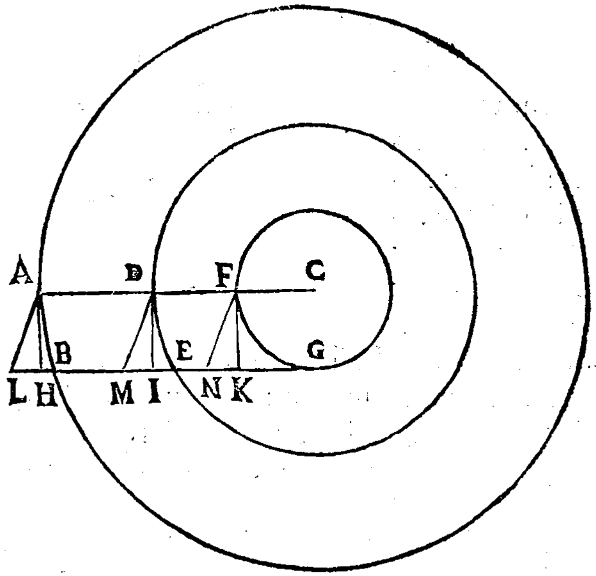
Quæ profectò distantiæ quemadmodum priùs in Cono supra basim suam toto compresso continuè versus ipsam basim, scilicet vltimum exteriorem AB circulum imminuebantur (vt demonstratū fuit in proximo Lemmate) nec tamē vnquam puncta H, I, K, vel



vel alia eis similia circulorū circunferentias tangere poterāt, quoniam lineæ A *H*, D *I*, F K, & omnes eis similes semper extra circulos cadebant per sextamdecimam propositionem tertij libri Elemen. Euclidis: ita nunc etiam iam dictæ distantię eędemmet quæ in plano erāt permanentes continuè versus Coni basim imminuentur, nunquam tamen prorsus delitescent, quoniam nunc quoque ipsę A *H*, D *I*, F K lineæ ipsis A C; & G *H* parallelis perpendiculares sunt, & circulos tangunt, totæque extra ipsos cadunt. Si itaque ipsæ B *H*, *E I*, G K in Cono iterum extructo distantiæ essent minimæ, per quas recta G *H* linea à punctis B, E, G in conica superficie iacentibus distare possit: nimirùm haberemus propositum iuxta hāc quoque imaginariam, sensu perceptibilem, exemplaremq; demonstrationem. nam imaginaremur planū quoddam ab ipsa G *H* linea Conum versus exurgere, ipsamque superficiem conicam penetrare; quod vtique planum cùm per Coni verticem non transeat, neque basi conicæ parallelum sit; designaret nimirùm per quintam petitionem huius in conica superficie sub recta G *H* linea quandam inflexam lineam, scilicet communem dicti secantis plani, & conicæ superficiei sectionem per signa B, E, G transientem, quæ in eodem esset plano cum ipsa G *H*, propiorque ei fieret in signo E quàm in signo G, & in signo B quàm in E signo, & sic in cæteris vsque in infinitum, si vnà cum toto Cono produci intelligantur. At quoniam ipsæ porrò distantiæ B *H*, *E I*, G K non sunt minimæ, quibus G *H* recta linea ab ipsis B, E, G signis distare possit, vt in superioribus à nobis satis superque demonstratum fuit; idcirco hìc quoq; opus est minimas

nimas

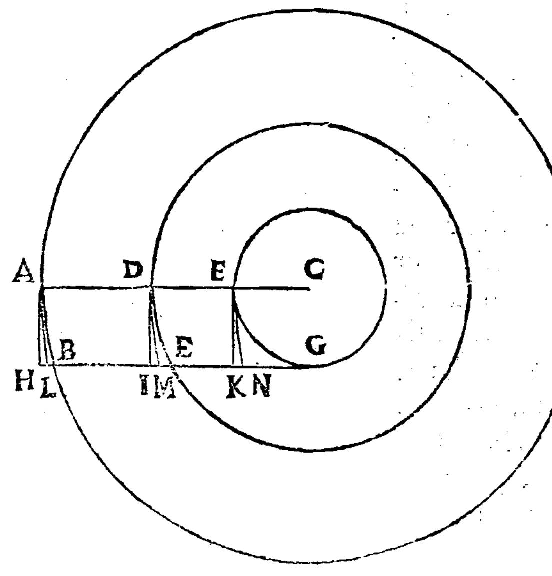
nimas reperire diſtantias,in eiſque propoſitum concludere ne paralogiſmus (quem ſuperiùs diximus) committatur. fortaſſe enim ad hoc reſpiciens ipſe Rabbi cùm dixiſſet duci tres illas lineas A *H*, D *I*, F K inuicem parallelas, & ipſis A C, G *H* perpendiculares: ſubiūxit, *vel ſint etiam remotiores à circulis quàm ipſæ perpendicuares.* quales ſcilicet in ſequenti ſecunda figura ſunt ipſæ A L, D M, F N. quæ quidem inuicem parallelæ ſunt, non tamen ipſis A C, G L parallelis perpendiculares: ſed à circulis remotiores quàm ipſæ A*H*, D*I*, F K perpēdiculares. putans fortaſſe Rabbi Moyſes diſtantias BL, EM, GN eſſe in Cono rotundo minimas illas diſtantias, quas quęrimus: vel has quidem eſſe maiores (vt etiam in plano ſunt) ipſis



B*H*, *E I*, G K diſtantijs; ipſas verò B*H*, E *I*, *G* K eſſe dictas minimas. nam in ipſis etiam BL, E M, GN verum eſt dicere quòd diſtātia *E* M minor eſt quàm G N, & BL quam *E* M. cùm enim ipſæ AL, D M, F*N* inuicem parallelæ ſint; ſunt autem ipſę etiam A C, GL: igitur per triceſimamquartam propoſitionē, & primam Communem Sententiam primi libri Elementorum *E*uclidis bis ſumptas L M æqualis eſt ipſi *H I*, & M*N* ipſi *I K*. quare ablatis communi *H* M, & communi *I N*: erit per tertiam Communem Sententiam eiuſdem bis ſumptam *H L* æqualis ipſi *I* M, & *I* M æqualis ipſi K*N*. Si ergo ipſis B*H*, *E I*, G K iam demonſtratis inæqualibus diſtantijs ipſæ *H* L, *I* M, K*N* æquales adiungantur diſtantiæ: erit per quartam Communem Sententiam eiuſdem tota diſtantia B*L* minor quàm tota *E* M; & ſimiliter tota *E* M minor

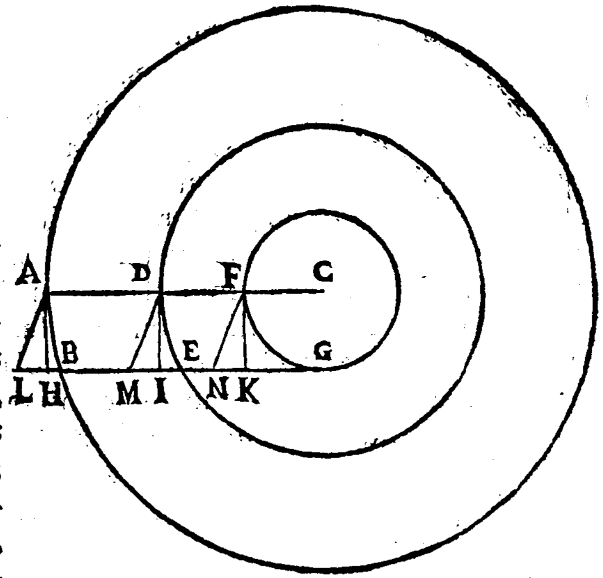
minor quàm tota G*N*. Quod erat demonſtrandum. *H*oc modo igitur ipſæ Rabbi oſtendit, concluditque propoſitum. Verùm hìc magnopere animaduertendum eſt, quòd ipſæ, quæ à nobis quærun tur minimæ diſtantiæ, non ſunt neque ipſæ B*H*, *E I*, G K, vti diximus: neque ipſæ B L, *E* M, G*N*, vt fortè Rabbi putauit. hæ namque nec in plano, nec in rotundo Cono minimæ poſſunt eſſe diſtantiæ, cùm ipſis B *H*, *E I*, G K non minimis in vtroque Cono diſtantijs maiores in vtroque Cono ſint: in plano quidem, vt patet per nonam Communem Sententiam primi libri Elementorum Euclidis: in rotundo verò, quia obtuſiorem ſubtendunt angulum, contentum ſcilicet à recta G L, & qualibet ipſarum B *H*, *E I*, *G*K diſtantiarum, vt in rotundo Cono inſpicienti manifeſtum eſt. *N*on ſunt itaque minimę diſtantiæ neque ipſæ B *H*, *E I*, G K, neque ipſæ B L, *E* M, G N: neque vllæ aliæ, quæ commodè in plano poſſint oſtendi. quum etenim reuera earum extremitates inter ſigna B, *H*; & *E*, *I*; & G, K caderent, quales ſunt in ſequenti tertia figura ipſæ B L, *E* M, G N; fieri verò nequaquam poteſt per ſextādecimam propoſitionē tertij libri Elem. Eucl. vt inter ipſas A *H*, D *I*, F K perpendiculares, & circulorum circunferentias vllæ rectæ lineæ cadant, quæ ipſas minimas diſtantias in recta G *H* linea diſtinguant: idcirco malè in plano ipſæ veræ minimæ diſtantiæ oſtendi poſſunt. ni fortè quis exempli cauſâ inter ipſas A *H*, D*I*, F K perpendiculares, & circulorum circunferentias quaſdam rectas lineas falsò deſignatas ſupponat, vt nos in præſenti figura fecimus, vt verum minimarum

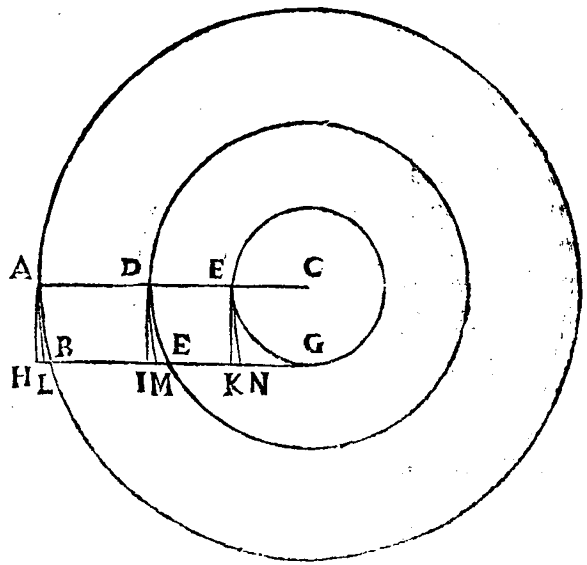
Cōcluſio ipſius Rabbi imperfecta in non minimis diſtātijs. Notandum.



minimarū distantiarum locum, quem in rotundo Cono sortitę sūt, in plano etiā ostēderemus. hæc autem fuit causa ꝙ ipse Moyses malè minimas ipsas ostenderit distantias. nam si ipsas quidem B *H*, *E I*, G *K* pro minimis accepit distantijs; superuacaneū erat ipsas etiā BL, EM, GN (& loquor nunc in præcedenti secūda figura) cōtinuè decrescentes, & nunquam delitescentes ostendere. Satis enim esset per ipsas minimas distantias propositum concludere. si verò ipsas BL, EM, GN distantias accepit (vt credo) tanquam minimas, dupliciter deceptus est: primò quoniam ipsę tum in plano tum in rotundo Cono nequaquam minimæ sunt, vt iam ostendimus: secundò quia si etiam essent minimæ, paralogismum maximum ipse cōmittit dum per hasce, scilicet BL, EM, GN distantias concludit intentum; quandoquidem nō eædemmet ipsę permanent

Error ipsius Rabbi.

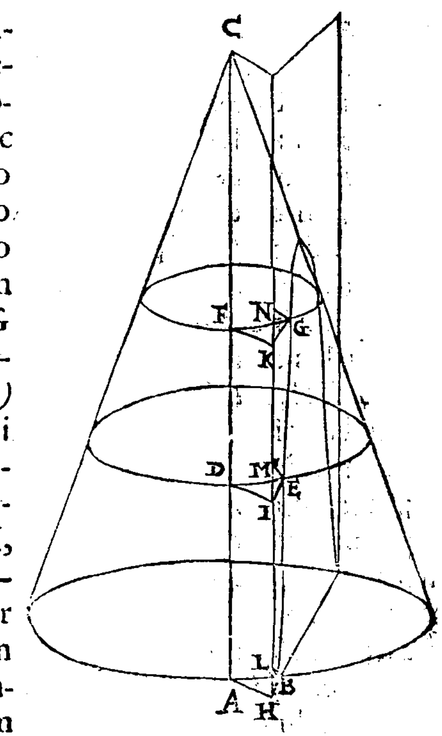




permanent

permanent in Cono rotundo, quæ in plano Cono sunt, quod vtiq; ipsis B *H*, *E I*, G K accidebat, sed variæ fiunt: atque propterea non rectè concludit ipse Rabbi cùm ex earum continua in plano diminutione, & ineuanescentia, in rotundo etiam Cono eas continuè decrescere, & nunquam aboleri ostendit. Quum itaque minimæ distantiæ, per quas recta G *H* à punctis B, E, G distare potest commodè in plano ostendi non possint: alio quodam artificio in rotundo Cono reperiendæ sunt, atque ex ipsarum B *H*, *E I*, G K non minimatum distantiarum tum in plano, tum in rotundo Cono perpetua versus Coni basim decretione, nullaque exinanitione, in ipsis veris minimis distantijs in rotundo Cono repertis propositum nostrum concludendum est. Repertis igitur in plano (vt in superioribus figuris) ipsis B *H*, *E I*, G K non minimis distantijs continuè decrescentibus, & nunquam euanescentibus, quæ etiam in rotundo Cono eandem subeunt affectionem, cùm in extruendo Cono eædemmet permaneant, nec vllam varietatem suscipiant: si voluerimus virtute istarū ipsas quoque minimas in extructo Cono rotundo reperire distantias idem patientes, ducātur à signis B, E, G (& quicquid nunc dicam, in Cono rotundo intelligendum est) ad rectam G *H* lineam perpendiculares per duodecimam propositionem primi libri Elementorum Euclidis, quæ sint B *L*, E M, G N. quæ profectò erunt minimæ, quas quærimus distantię per decimamnonam propositionem primi libri eorundem; cùm omnes aliæ rectæ lineæ ab eisdem B, E, G punctis ad eandem G *H* rectam lineam ex quauis parte ductæ maiorem per tricesimamsecundam propositionem eiusdem primi libri Elemen. subtendant angulum, nempe rectum. *Hæ* itaque sic repertæ minimæ distantiæ quoniam per secundam partem

Modus reperiendi minimas distantias in Cono rotundo.

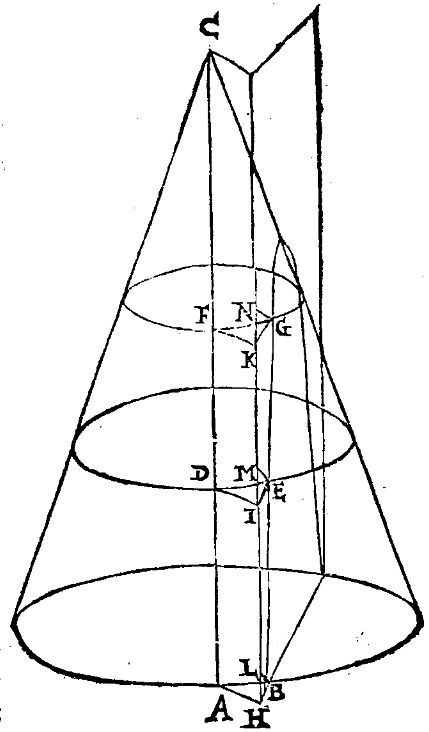


vicesimæ-

viceſimæ octauæ propoſitionis eiuſdem primi inuicem parallelæ ſunt, & vnà cum parallelis *BH*, *EI*, GK non minimis diſtantijs, & cum recta linea G*H* triangula claudunt ſimilia per ſecundam partem viceſimænonæ, & triceſimæſecundę propoſitionis, & tertiam Communem Sententiam primi, & quartam propoſitionē, & primam definitionem ſexti libri Elementorum Euclidis: igitur quemadmodum *EI* minor eſt quàm GK, & BH minor quàm *EI*; ſic etiam *E*M minor erit quàm GN, & LB quàm *EM*. per nonam Communem Sententiam huius. ac demum hæc continua decretio ſimiliter de omnibus alijs huiuſcemodi minimis diſtantijs demōſtrari poterit, nec vnquam tales diſtantiæ minimæ ita imminui poſſunt vt recta G*H* linea ipſam inflexam in Coni ſuperficie iacentem tangat. Si enim inter dictas duas lineas rectam ſcilicet, & inflexam maiores illæ diſtantiæ BH, *EI*, GK ſemper ſunt, vt ſuperiùs oſtendimus; tantò magis illæ minores diſtantiæ erunt, atque idcirco nunquam illę duę lineæ propiùs ſemper ſibi in eodem plano accedentes ſeſe contingere poterunt, etiam ſi in infinitum verſus Coni baſim vnà cum toto Cono protractæ fuerint. Quoniam autem hæc, quę diximus ægrè in plano conſpici poſſunt, extruatur Conus ille, quem ſuperiores figuræ in plano compreſſum eſſe oſtendunt, & fiant omnia ſicut diximus, propoſitumque liquebit haud diſſimiliter quàm in noſtra ſecunda demonſtratione. Poſtremò verò docet Rabbi Moyſes duas iam dictas lineas expeditiſſima quandam via in eodem plano deſignare, quæ talis eſt. Fiat Conus ex Rapa, vel quadam alia tractabili, facileque ſectili materia, in quo ducatur primùm à vertice vſq; ad baſim recta linea, qualis eſt ipſa ADFC: deinde ſecetur Conus plano quopiam parallelo ſuperficiei planæ trianguli per axem,

Cōcluſio perfecta in minimis diſtātijs.

Expeditiſſima via in Cono rotundo deſcribendi duas lineas in eodē plano, nūquam coincidentes, & ſemper ſibi magis appropinquantes.



cuius trianguli latus eſt ipſa AC recta linea; planumque illud ſecans Conum ſit verbi gratia Papyrus: poſt modum deſignetur in ipſo Papyro linea BEG iuxta communem ipſius plani, & conicæ ſuperficiei ſectionem, quæ nimirum erit inflexa, Hyperbolicaue linea rationibus ſuperiùs dictis: poſtea ducantur à punctis A, D, F rectæ lineæ AH, DI, FK ad angulos rectos ipſi AC, quæ tangant circulos in ſignis ADF; & producantur quouſque occurrant in H, I, K punctis plano ſecanti Conum extra conicam ſuperficiem producto; & ducatur recta linea tranſiens per H, I, K puncta; ac demum inueniantur (vt docuimus) minimæ diſtantiæ GN, EM, BL, quæſitumq; factum erit. Recta.n. HK, & inflexa GEB ſemper propiores fieri, & ſibi nunquam occurrere ſuperioribus rationibus demonſtrabuntur, eruntque ambæ in eodem Papyro plano deſignatæ. Hoc modo ipſe Rabbi cōſulit expeditè propoſitum aſſequi poſſe. Veruntamen (vt mihi videtur) neque Rapa ipſa, neque lignum, neque aliud corpus opacum ſatis commodum eſſet ad extruendos Conos ipſos, & faciendas in eis debitas ſectiones, & protrahendas lineas tum rectas, tum circulares, tum etiam miſtas, punctaq; omnia ſectionum literis alphabeticis obſignanda, propoſiti demonſtrandi gratia. nam ipſorū corporū opacitas eſſet nobis impedimento, vt non oēs, quas libuerit lineas protraheremus, vel protractas vno oculorum intuitu ſimul cōſpiceremus. ni forte fortuna corpora illa conica diaphana, atque omni ex parte conſpicua eſſent; vtpotè Vitrea, vel Cryſtallina, vel cuiuſdā alius eiuſmodi materiæ tranſparentis. quod tamen eſſet factu admodū difficile propter earum materiarum fragilitatem. Meliùs igitur erit Conos ipſos conſtruere lineis æneis, vel ferreis, vel etiā (ſi quis vellet) argenteis, & aureis. doctrina ſiquidem hæc adeo digna, & nobilis eſt, vt argento, atq; auro, & alia (ſi qua eſſet) præcioſiori materia Coni ipſi confici mereantur. nam ſi talibus materijs Coni extruantur, dubio procul puris materialibus lineis oēs in eis debitæ ſectiones: necnon lineæ rectæ, circulares, & miſtæ oculis vno intuitu repræſentari: punctaq; omnia ſectionum, & linearū extrema literis alphabeticis ſuper paruiſſima facta ex Papyro quadrata deſcribi, ac demum in Cono tenaci quadam materia debitis locis applicari, vel etiam (quod melius eſt) in ipſa eadem metalli materia exculpi poterunt. Tot autem pro Dilucidatione quoq; libelli Rabbi Moyſis Narbonenſis à nobis dicta ſufficiant.

De materijs Conorū extruendorū.

Materiæ cōmode ad extruēdos Conos.

PERORATIO.

HAEC igitur Camille vir clarissime circa ipsum admirandum Geometricum Problema iam à te mihi propositum erant dicenda. Quoniam autem ad finem suscepti negotij Dei Opt. Max. auxilio peruenimus, modò reliquum est, vt eum Rabbi Moysis Aegyptij locum excerptum ex primi libri capite septuagesimotertio sui operis inscripti Director dubitantium, quippequem in huius operis Præfatione tetigimus, diligenter exponamus, sicut ibi promisimus.

FINIS.

PARS QVAEDAM EXCERPTA EX CAPITE LXXIII

Primi Libri Operis Rabbi Moysis Aegyptij, quod vocatur Director dubitantium.

SCIAS igitut lector huius capitis quòd cùm cognoueris animam cum suis virtutibus, fueritque tibi certa quælibet pars earum iuxta veritatem suæ essentiæ: scies quòd virtus imaginatrix inuenitur in quamplurimis animalibus, nempe in omnibus animalibus perfectis, quę habent cor. quòd enim imaginatio in his existat, notum est. & homo non discrepat ab eis imaginatione. & operatio imaginationis non est operatio mentis, sed ipsi opposita. quoniam mens dissoluit composita, & separat eorum partes, & facit ea simplicia, & incomposita in essentia, & causa eorum: & considerat ex vna re multas, inter quas est differentia apud mentem, quemadmodum est differentia inter duo indiuidua speciei humanę apud imaginationem. Præterea in mente separatur res vniuersalis ab indiuidua, & non verificatur aliqua demonstratio nisi in vniuersali. & in mente dignoscitur prædicatum substantiale ab accidentali. Verùm imaginatio nullam harum operationum habet. quoniam ipsa non con-

Quo differat mens ab imaginatione.

Mentis operationes.

Imaginationis operationes.

 siderat

ſiderat niſi indiuiduum compoſitum eo modo, quo à ſenſibus apprehenditur: vel coniungit res in eſſentia diuerſas, easque componit vnam partem cum alia, & ex omnibus vnum conficit corpus, aut vnam virtutem ex virtutibus corporalibus. quemmadmodum poteſt imaginari Phantaſia hominem cum capite equi, habentem alas, & id genus alia. quod quidem vocatur falſitas, & mendacium. cùm nulla res exiſtens in rerum natura ei correſpondeat. Nec vllo pacto poterit imaginatio rem vniuerſalem conſiderare, ſeque abſtrahere à materia dum conſiderat; quanuis etiam ipſa forma eſſet penitus in infinito gradu ſeparata. Quare non eſt in Imaginatione certa cognitio. Ampliùs audi quantùm nos iuuarunt ſcientiæ Mathematicæ, & quàm magnum bonum eſt, quod ab ipſis per ſuas præmiſſas didicimus. Scias quòd quædam ſunt, quæ cùm in Imaginatione conſiderantur, non apprehenduntur: ſed inuenitur impoſſibilitas impreſſionis eorum, ſicut impoſſibilitas coniunctionis duorum contrariorum. Poſtea verò demonſtratione verificabitur exiſtentia illius rei, quæ videbatur impoſſibilis Imaginationi: exiſtentiaque ipſam reperiet. Exempli gratia ſi excogitaueris Sphæram rotundam magnam cuiuſuis quantitatis, licet etiam eam imaginatus fueris magnam ſecundùm amplitudinem Sphæræ Vniuerſi: poſthoc excogitaueris dimetientem tranſeuntem per eius Sphæræ centrum: deinde imaginatus

Cõfirmat exẽplis duobus Mathematicis Mentis ab Imaginatione diſcrepantiam.

Exemplũ primũ Aſtrologicum.

natus

natus fueris duos homines ſtantes ſuper duabus extremitatibus ipſius dimetientis, ita vt pedes eorum ſint oppoſiti ſecundùm dimetientis rectitudinem, ſintque dimetiens, & pedes in vna recta linea: Neceſſe eſt quòd dimetiens ſit aut è regione Opaci, aut non è regione; ſi fuerit è regione, cadent ambo; ſi verò non fuerit è regione, cadet alter eorum, qui eſt in inferiori parte, alter autem ſtabit. Hoc modo conſideratur hoc ab Imaginatione. Nihilominus demonſtratione notum eſt quòd terra rotunda ſit, necnon poſita ſuper duabus dimetientis extremitatibus: & vtriuſque habitantium in duabus extremitatibus caput eſt verſus cœlos, & pedes ipſius ſunt oppoſiti verſus pedes alterius exiſtentis in extremitate dimetientis: nec fieri poteſt vt alter eorum cadat. quoniam non eſt verum quòd alter eorum ſupra, & alter infra ſit: ſed vterque eorum eſt tum ſupra tum infra, cùm fuerint relati adinuicem. Similiter demonſtratum eſt in libro ſecundo de Conicis, quòd poſſunt in eodem plano exire duę lineę, quæ in principio ſunt aliquantulùm diſtantes ab inuicem, & quantò magis protrahuntur, diminuitur diſtantia, & appropinquant ſibi: nec tamen inuicem coniunguntur, licet in infinitum producantur, alteraque alteri appropinquet. Iſtud autem non poteſt excogitari, neque in Imaginationem cadit. Earum duarum linearum altera eſt recta, & altera curua, ſicut ibi declaratum eſt.

Exemplum ſecũdũ Geometricum.

Ecce

Ecce igitur quòd nota est existentia eius, quod excogitari non potest, nec ab imaginatione comprehendi; imo est impossibile apud ipsam. Similiter autem demonstrata est impossibilitas eius, quod imaginatio affirmat, verbi causa quòd Deus sit corpus, aut virtus in corpore. quoniam apud imaginationem non reperiuntur nisi res corporeæ, &c.

Exemplum tertium Metaphysicum.

FRANCISCI BAROCII COMMENTARIVS.

QVANDOQVIDEM in Præfatione nostri Operis, in quo admirandum illud Geometricum Problema tredecim modis demonstrauimus; verba Rabbi Moysis Aegyptij, quibus iam dicti Problematis mentionem fecit, exponere promisimus: in præsentia tempus, & locus expostulat, vt promissionem nostram adimpleamus. Quoniam autem in principio iam dicti Operis nostri inter Autores, qui Problema illud imperfectè demonstrarunt, ipsum quoque Rabbi Samtou posuimus, de cuius imperfecta Demonstratione nullum verbum in Opere nostro fecimus (omnium siquidem imperfectas Demonstrationes ventilauimus præter Demonstrationem innominati Autoris, cùm eadem cum Orontij Demonstratione sit; & ipsius Rabbi Samtou, quam tanquam omnium imperfectissimam Opere nostro indignam iudicauimus) non ab re factū iri existimo, vt ipsius etiā nondū (ꝙ ego sciā) ex Hebraico in Latinū sermonē cōuersæ Demōstrationis maxima imperfectio cognoscatur, si eam in fine huiusce nostri Cōmentarij subscripserimus, de eaque breuiter sententiā nostrā in medium attulerimus. Primùm igitur ad expositionem verborum Rabbi Moysis Aegyptij accedentes dicimus, quòd volens ipse Moyses in capite septuagesimotertio primi libri sui Operis inscripti Director dubitantium docere quo differat Mens ab Imaginatione, inquit quòd quilibet Philosophiæ studiosus cùm cognouerit Animam cum suis virtutibus, id est potentijs, earumq; partibus iuxta veritatem suæ essentiæ: sciet ꝙ virtus Imagi-

Imaginatrix multùm à Mēte differt. Et primùm quidē ostēdit ipse Rabbi differentiā Mentis ab Imaginatione ex hoc, ꝙ Mens quidē in nullo alio animali reperitur, nisi in homine, qui rationis est particeps; Imaginatio verò inuenitur non solùm in homine, verumetiam in quamplurimis animalibus irrationalibus, nempe in omnibus animalibus perfectis, quæ habent cor. Philosophi enim, qui de animalibus scripsere, animalia perfecta ab imperfectis hoc distinxerunt; quòd perfecta quidem habent cor, imperfecta verò cor de carent. & perfecta quidem animalia ponunt omnes Imaginationem habere, & quo ad Imaginationem ab homine minimè discrepare. quam quidem Mentis ab Imaginatione differentiam à subiecto desumptam cùm ita Rabbi Moyses explicuerit, volens adhuc meliùs Mentem ab Imaginatione iuxta quoque earum operationes distinguere, ait quòd operatio Imaginationis non est operatio Mentis, sed ipsi opposita; vt ex ipsa operationum varietate duarum etiam harum Animæ potentiarum ostendat discrepantiam. Quòd autem Imaginationis operatio Mentis operationi opposita sit, probat primum rationibus Naturalibus comparando Mentis operationes operationibus Imaginationis: deinde quadam alia ratione idem probat, quam duobus Mathematicis exemplis confirmat; ac demum alio quodam Metaphysico exemplo earundem operationum discrepantiam comprobat. Ait igitur quòd Mens quidem dissoluit composita, & separat eorum partes, & facit ea simplicia, & incomposita in essentia, & causa eorum: & considerat ex vna re multas, inter quas est differentia apud Mētem, quemadmodum est differentia inter duo indiuidua speciei humanę apud Imaginationem. quoniam (inquit) ipsa Imaginatio non considerat nisi indiuiduum cōpositū eo modo, quo à sensibus apprehēditur: vel coniungit res in essentia diuersas, easque componit vnam partem cum alia, & ex omnibus vnum conficit corpus, aut vnam virtutem ex virtutibus corporalibus. quemadmodum potest imaginari Phantasia hominem cum capite Equi, habentem alas, & id genus alia. quod quidem vocatur falsitas, & mendacium; cùm nulla res existens in rerum natura ei correspondeat. Ecce pulcherrima comparatio operationis Mentis operationi Imaginationis, per quam sibiinuicem oppositæ ostenduntur. Nam imaginatio quidem considerat indiuiduum compositum eo modo, quo à sensibus apprehenditur: verbi gratia hominem hūc, vel illum quatenus magnus est, vel paruus;

Comparatio prima operationis Mētis operationi Imaginationis.

& al-

& albus, vel niger; & doctus, vel ignarus; & calidus, vel frigidus; alijsque similibus accidentibus præditus: vel etiam coniungit res in essentia diuersas, easque componit, & ex omnibus vnum conficit corpus, aut vnam virtutem ex multis virtutibus corporalibus, aut quamlibet sibi placuerit Chimeram conformat. Mens verò è contrario ipsum hominis indiuiduum varijs accidentibus præditum, ex diuersisque partibus, & Elementis compositum dissoluit in partes, & simplicia tum elementa, tum accidentia; & considerat ex vna re multas quoad vniuscuiusque seorsum essentiam, & causam, dignoscens, atque distinguens prædicatum substantiale ab accidentali. inter quas partes simplices ea est apud Mentem differentia, qualis est inter duo composita speciei humanę indiuidua apud Imaginationem. Quare manifestum est quòd Mentis operatio prorsus Imaginationis operationi opposita sit. Præterea (inquit) in Mente separatur res vniuersalis ab indiuidua, & non verificatur aliqua demonstratio, nisi in vniuersali. At Imaginatio (inquit) nullo pacto poterit rem vniuersalem considerare, seque abstrahere à materia dum considerat; quamuis etiam ipsa forma esset penitus in infinito gradu separata. Hæc est alia pulcherrima comparatio operationis Mentis ad operationem Imaginationis, ex qua etiam euidenter apparet hasce duas operationes esse sibi oppositas. Mens enim vniuersalia considerat separans ea à particularibus, & indiuiduis; & abstrahens à quacunque materia; in ipsisque vniuersalibus tantùm demonstrationes suas facit. Imaginatio verò res particulares, & indiuiduas, atque in aliqua materia immersas considerat. quamuis etiam ipsæ formæ, quæ ab Imaginatione apprehenduntur essent penitus in infinito gradu separatę. hoc est quòd tales essent, vt ab omni materia separatæ prorsus existerent. cuiusmodi sunt, quæ à Philosophis substantiæ separatæ vocantur. vt Deus, Angeli, Dæmones, & ipsa hominis Mens. quæ profectò separatæ substantiæ nullo pacto ab Imaginatione apprehendi, cognoscique possunt, nisi falso modo corporeæ, materialesq; à sensu sibi offerantur. Vnde cùm Imaginatio neque in vniuersalibus demonstret, neque abstrahat à materia, non immerito inquit ipse Rabbi Moyses [Quare non est in Imaginatione certa cognitio.] Hactenus Rabbi Moyses iam dictis naturalibus rationibus probauit operationem Mentis esse oppositam operationi Imaginationis. Nunc autem idem quadam alia ratione probat, quam

Secũda cõparatio operationis Mẽtis ad operationẽ Imaginationis.

duobus

duobus Mathematicis exemplis confirmat dicens [Ampliùs audi quantùm nos iuuarunt scientiæ Mathematicæ, &c.] Quædam (inquit Rabbi Moyses) sunt, quæ cùm Imaginatione considerantur, non apprehenduntur statim ab ipsa Imaginatione: imo videntur ei esse ex numero eorum, quæ fieri non possunt; quemadmodum fieri non potest vt duo contraria simul in eodem subiecto, eodemmet tempore coniungantur: postea verò (inquit Rabbi) Demonstratione verificabitur existentia illius rei, quæ videbatur Imaginationi fieri minimè posse; veraque ipsius rei existentia rem ipsam ita se habere reperiet. Hoc est quibusdam rebus Imaginatio non assentit, donec discurrens cogitatio causas earum inueniat, ex quibus earum affectiones ita se habere demonstret, Mensque demum eas tanquam euidentes percipiat, tuncque Imaginatio Menti consentiens conquiescat. Hac itaque ratione ipse Rabbi probat Mentis operationem ab operatione Imaginationis multùm differre, imo inter se oppositas esse. quam equidem rationem duobus Mathematicis exemplis confirmat his verbis [Exempli gratia si excogitaueris Sphæram, &c.] Primum Mathematicum, nempe Astrologicum exemplum est huiusmodi. Si quis excogitauerit Sphæram quandam magnam cuiuslibet quantitatis, licet etiam eam imaginatus fuerit eius amplitudinis, cuius est Sphæra Mundi: posthoc excogitauerit duos homines stantes super extremitatibus dimetientis iam dictæ Sphæræ, ita vt pedes eorum sint indirectum oppositi secundùm dimetientis ipsius rectitudinem, vt scilicet Antipodes sint. necesse est ipsam dimetientem esse sitam respectu excogitantis aut à parte dextra ad sinistram ipsius Sphæræ, aut à parte Ante ad partem Retro, aut à parte Superiori ad Inferiorem. id enim significant illa ipsius Rabbi verba [aut è regione Opaci, aut non è regione] nam illa quidem particula [è regione Opaci] significat situm dimetientis, vel à parte dextra Sphæræ excogitatæ ad sinistram, vel à parte Ante ad Retro respectu excogitantis: illa verò [non è regione] denotat situm ipsius dimetientis à parte superna Sphæræ excogitatæ ad infernam respectu eiusdem excogitantis. Si igitur dimetiens ipsa (vt ipsius Rabbi verbis vtar) fuerit è regione Opaci, videbitur excogitanti quòd cadent ambo illi Antipodes, quoniam neuter eorum habet caput sursum, & pedes deorsum, sed è regione Opaci; & ideo pedibus in Opaco, idest in Sphæra ipsa

Primum Mathematicum Exemplum.

Kk Opaca

Opaca excogitata inſiſtere minimè poſſunt: Si verò non fuerit è regione, videbitur excogitanti ꝙ cadet alter eorum, qui eſt in inferiori Sphæræ parte; alter autem ſtabit, cùm in ſuperiori Sphæræ parte ſit. Hoc itaque pacto hæc ab Imaginatione conſiderantur. nihilominus Aſtrologis demonſtratione notum eſt quòd globus Terrę, & Aquæ rotundus ſit, & ſuper duabus ſuæ dimetientis extremitatibus habitent Antipodes, & vtriuſq; eorum caput ſit verſus Cœlos, & pedes verſus centrum Vniuerſi: nec fieri poteſt vt alter eorum cadat. quoniam non eſt verum (vt Imaginatio falsò imaginabatur) quòd alter eorum ſupra, & alter infra ſit: ſed vterque eorum eſt tum ſupra, tum infra cùm relati fuerint adinuicem. reuera autem vterque habet caput quidem ſurſum; pedes verò deorſum. quippequum Surſum quidem ſecundùm Philoſophos, & Coſmographos verſus Cœlum, Deorſum verò verſus centrum Vniuerſi ſemper ſit: & omne graue ſui natura deorſum, quemadmodum om-

Lactantij Firmiani, & aliorum error.

ne leue ſurſum tendat. quam profectò rem Lactantius Firmianus, nonnullique alij Philoſophi cùm iuxta Mentis veram perceptionem non intellexiſſent, ſed iuxta falſam Imaginationis apprehenſionem excogitaſſent, negarunt Antipodes dari, quia (inquiunt ipſi) ſi darentur, caderent. Sequitur autem ipſe Rabbi comprobans ean-

Secundū Mathematicum Exemplum.

dem rationem ſecundo Mathematico, ſcilicet Geometrico exemplo his verbis [Similiter demonſtratum eſt in libro ſecundo de Conicis, &c.] Ait igitur quòd demonſtratum eſt in libro ſecundo Conicorum Elementorum Apollonij Pergæi (vt in ſuperiori noſtro Opere in quarta Demonſtratione declarauimus) quòd poſſunt in eodem plano deſignari duæ lineæ, altera recta, & altera curua, quæ in principio ſunt aliquantulum ab inuicem diſtantes, & quantò magis protrahuntur, diminuitur inter eas diſtantia, & appropinquant ſibi: nec tamen inuicem vnquam coniunguntur, licet in infinitum producantur. Iſtud autem (inquit ipſe Rabbi) non poteſt excogitari, neque in Imaginationem cadit, nec ab ea comprehendi poteſt; imò apud ipſam Imaginationem ex eorum eſt numero, quæ nequaquam fieri poſſunt: cuius tamen rei exiſtentiam eſſe veram euidenter Mens ipſa percipit, cùm à cogitatrice diſcurrenti Animæ virtute, ſeu potentia, quæ à Græcis διάνοια dicitur, ita ſe habere Geometricis rationibus demonſtratum fuerit. Quæ quidem Rabbi Moy-

Vide quæ in Præfatione dicta ſunt.

ſis verba ſic exponenda, intelligēdaq; ſunt (quemadmodum etiam in Prefatione ſuperioris Operis noſtri diximus) alioquin falſum di-

cerct.

ceret. falſum enim eſt quòd prorſus rebus iam dictis Imaginatio non aſſentiat, ac conquieſcat poſtquam demonſtratæ, & vt veræ à Mente perceptæ fuerint. Poſtremò verò ſequitur Rabbi confirmans operationem Imaginationis eſſe oppoſitam operationi Men-

Tertiū Exēplum Metaphyſicum.

tis tertio quodam Metaphyſico exemplo ſic dicens [Similiter autem demonſtrata eſt impoſſibilitas eius, quod Imaginatio affirmat: verbi cauſa quòd Deus ſit corpus, aut virtus in corpore. quoniam apud Imaginationem non reperiuntur niſi res corporeæ.] Hoc tertium exemplum Metaphyſicum, quo etiam probat idem quod ab initio propoſuerat, videlicet Imaginationis operationem non eſſe eandem cum Mentis operatione, imo ipſi oppoſitam, tale eſt. Quoniam à Metaphyſicis quidem demonſtratum eſt quòd Deus ſit incorporeus, & virtus ſine corpore, & immaterialis, & eo modo à Mente percipitur; Imaginatio verò, cùm non apprehendat niſi res corporeas, & materiales, idcirco affirmat Deum eſſe corporeum, aut virtutem in corpore: hinc quoque perſpicuum eſt operationem Imaginationis, operationi Mentis oppoſitam eſſe. Hæc autem pro declaratione, dilucidationeq; verborum, & mentis Rabbi Moyſis Aegyptij in ſeptuageſimotertio capite primi libri ſui Operis vocati Director dubitantium breuiter à nobis quoq; dicta ſint.

Modò reliquum eſt vt demonſtrationem ſuperiùs dictam ipſius Rabbi Samtou expoſitoris iam dicti operis appoſitam in commentario eiuſdem ſeptuageſimi tertij capitis dicti Operis, qualiſcunque ſit ex Hebraico in Latinum ſermonem fideliter conuerſam hìc ſubiungamus, noſtrumque de ipſa iudicium afferamus.

Rabbi Samtou Demonſtratio.

Propoſitio.

Dari duas lineas, inter quas à principio ſui ortus ſit diſtantia determiuata, & quò magis procedant, ſibi inuicem proximiores fieri: & fieri non poſſe vt coincidant, licet in infinitum producantur; & vnam iſtarum linearum eſſe rectam, alteram verò curuam.

Expoſitio.

Supponamus hoc vnum ſuppoſitum dicentes demonſtrationem huius Theorematis explicari corpore ſolido in figura conica formato, cuius de-

ſcriptio

scriptio sit huiusmodi. Vt sit latũ ab inferiori sui parte circulari, & in angustum paulatim tendat, quousque terminetur in punctum. & pars lata

Conus quid sit.

istius Coni, vocatur Basis; & pars altera angusta, siue acuta, dicitur Caput. Animaduerte centrum circuli Basis esse è directo Capitis, seu Verticis Coni per lineam rectam, vt si produxeris lineam à centro circuli basis ad verticem, siue caput Coni, ad Apicem ipsius terminabitur.

Basis, & sumitas Coni q̄ sint.

& hæc linea protensa à centro Basis ad apicem Coni, vocatur Columna, idest Axis, siue recta linea perpendicularis; quia veluti columna astat super centro Basis.

Axis Coni qui sit.

& idcirco linea recta illa, quæ nobis apparet in hoc solido corpore Cono vocato, illa sanè est linea, quæ diuidit ipsum Conum in duas partes æquales. cuius diuisio à puncto capitis ipsius Coni incipit, & in punctum circunferentiæ circuli ipsius basis terminatur.

Lateris Coni, & Trianguli per Axẽ Coni descriptio.

Quapropter hoc conicum corpus in duas æquales partes diuiditur describendo hanc lineam prædicto modo. Verùm linea curua erit quæcunque linea describetur prope rectam lineam dictam vel ad sinistras, vel ad dextras; quæ diuidet Conum in partem dimidio minorem, & necessariò erit curua, cùm non transeat per punctum Apicis ipsius Coni.

Hyperboles descriptio.

quia cùm apponitur super figuram Hyperbolicam, necessariò magis distat à linea recta in principio ipsius Coni, quàm pars illius altera, quæ est ad basim. veluti infra demonstrabimus. Sequitur ergo hanc lineam diuidentem Conum in partem dimidio minorem, esse curuam. quia ducitur, siue accommodatur super figuram Hyperbolicam. & hoc sensui palam est.

Constructio, Determinatio, & Demõstratio primæ partis.

Probemus ergo sic dicentes: Supponamus inter hasce duas lineas, rectam scilicet, & curuam intercedere superficiem vnius palmi, & hæc superficies sit æqualis quantitate palmi in omnibus Coni lateribus ad faciem Coni. hoc est vt semper superficies inter hasce duas lineas prædictas per distantiam vnius palmi tum ad caput ipsius Coni, tum ad basim intercedat. Et dicamus manifestum esse distantiam maiorem inter hasce duas lineas intercedentem esse versus caput Coni. nam quò magis accedit linea illa curua versus caput, eò magis augebit flexum in arcus formam; & quò magis flectetur in formam arcus, augebitur quæ inter ipsas intercedit distantia. & erit chorda istius arcus maior quàm partes chordarum cæterarum, quæ fient ad basim. & probatio ipsius hæc erit. Quòd si fingamus produci perpendicularem à dicta recta linea versus lineam curuam, & applicemus super dictam lineam curuam perpendicularem paruam, quæ attingat vno sui extremo lineam perpendicularem à dicta linea recta protensam, & altero sui extremo attingat lineam curuam: & fingamus extendi chordam à principio illius lineæ perpendicularis super lineam rectam appositæ; à capite ipsius, quo coniungi-

tur

tur cùm linea recta; & hæc extendatur versus caput perpendicularis paruæ lineæ super lineam curuam constitutæ, qua parte curuæ coniungitur. Sequetur ergo absque dubio chordam maiorem esse in hac parte prope Coni sumitatem, quàm in cæteris Coni partibus ad basim. eo quòd diameter, siue subtendens angulum laterum, quæ sunt lineæ descriptæ super lineis dictis, est maior quàm in cæteris partibus inferioribus. quia est diameter, siue subtendens angulum duorum maiorum laterum. & manifestum est diametrum, siue subtendentem maiorum laterum maiorem esse quàm diameter laterum minorum. Quòd si produxerimus dictis lineis similes lineas versus basim ipsius Coni, tunc erit chorda illa minor; quia linea perpendicularis parua, quæ ducitur, minor quàm illa recta linea existit, & magis propinqua lineæ illi curuæ; quia quo magis tendit versus basim, eò magis minuit curuitatem. Quòd si apponamus chordam super dictas perpendiculares paruas versus basim positas super dictam lineam rectam, & curuam; quæ chordæ ducantur à principio vnius perpendicularis in alterum; tunc chorda hæc erit minor quàm chorda illa, quæ facta fuit versus Coni sumitatem; quia latera harum linearum sunt parua, & hac de causa necesse erit vt sit diameter, siue subtendens minor. & idcirco erit chorda minor quàm chorda versus caput Coni producta. Quapropter ex hoc patet omne magis curuum maiorem habere chordam: & quò minùs fuerit curuum, minorem. Idcirco quò magis fuerit distantia inter duas illas lineas, eò maior in illa linea curua erit curuitas. & quò magis illa linea curua versus basim ibit, rectitudinem aliquantum emulabitur. & huic argumentum erit, quòd linea illa curua versus Coni caput magis distat à linea recta quam cæteræ partes illius lineæ curuæ versus basim. Si supposueris enim produci lineas perpendiculares à linea illa recta in curuam illam lineam, videbimus sensu ipso, & ratione quoque lineam curuam magis distare à recta prope Coni sumitatem, quàm prope basim. Quare quò magis procedant iam dictæ lineæ per Conum versus basim, eò propiores inter se fient, quia curuitas inter ipsas intercedens minuetur: & nunquam coincident, quoniam inter ipsas superficies permanens palmi distantia è regione intercedit, sicuti supposuimus.

Demonstratio secundæ partis.

quòd si coincidant, falsum sequetur, esse superficiem illius lineæ paruæ curuæ æqualem superficiei lineæ maioris rectæ.

Conclusio.

Et Deus nos ab erratis vendicet.

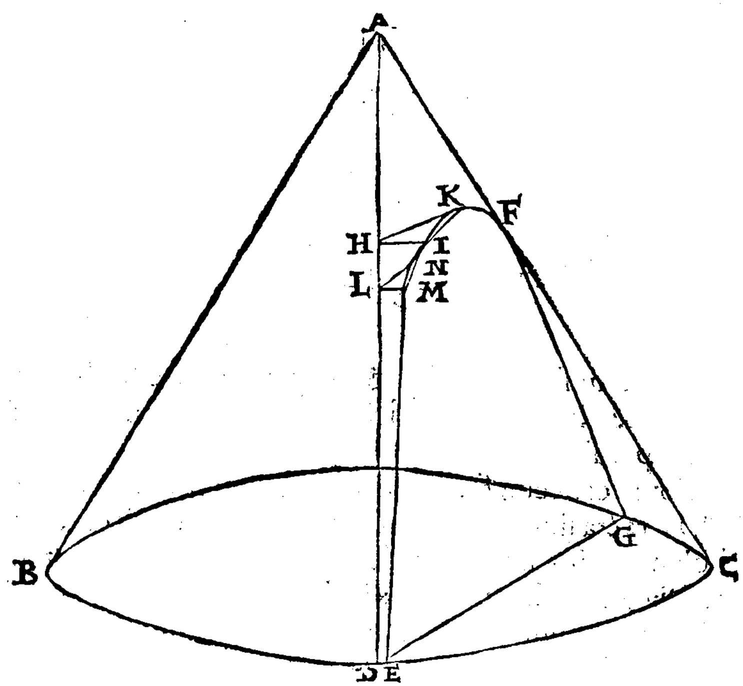
Sequitur

Sequitur Commentarius Francisci Barocij.

Hæc est itaque Rabbi Samtou Demonstratio, qua conatur ipse quoque demonstrare dari duas lineas alteram rectam, & alteram curuam, quæ quò magis producuntur, eò proximiores sibi inuicem fiant: & nunquam coincidant, etiam si in infinitum protrahantur. Quam porrò affectionem de duabus illis lineis demonstrat, de quibus etiam Orontius, & Innominatus Autor eam obscurè, imperfecteque demonstrarunt. quorum Demonstrationem nos in superiori nostro Opere in fine tertiæ nostræ præcipui Problematis Demonstrationis instaurauimus, atque dilucidauimus. Sunt autem duæ illæ lineæ latus Hyperboles, & latus Trianguli per Axem Coni, ambæ in eadem conica superficie, sed non in eodem plano iacentes. Demonstratio verò ipsius Rabbi Samtou non est eadem cum iam dicta Orontij, & Innominati Autoris Demonstratione, sed ab eis omnino diuersa. Quam eo quidem in loco nostri Operis posuissemus, si instauratione digna nobis visa fuisset. quoniam autem omnium de hac re demonstrationum imperfectissima est, & multis obscuritatibus, defectibus, superfluitatibus, grauissimisque erroribus vndequaque referta, idcirco noluimus eam inter nostras Demonstrationes interserere; sed hoc in loco potiùs eam transferre voluimus cuiusmodi in Hebraico sermone legitur, ac imperfectiones eius breuiter ostendere. Primùm itaque cùm iam dictam admirandam propositionem in modum Theorematis ipse Rabbi proposuerit, eius expositionem aggrediens declarat breuiter, & satis obscurè, & improprijs Geometriæ terminis, ac phrasibus (vt legenti Geometriæ non ignaro perspicuum erit) quasdam definitiones, videlicet Coni; & Basis, & Summitatis, & Axis eius; necnon Lateris Coni, & Trianguli per Axem; ac demum Hyperboles. quas nos in principijs superioris Operis nostri dilucidè tradidimus, ac declarauimus. Postquam autem iam dictas definitiones tradidit, mox demonstrationem suam aggreditur, ibi [Probemus ergo sic dicentes, &c.] Quæ quidem quàm obscura, confusa, atque imperfecta sit, licet cuilibet in Geometria versato Lectori perspicuum esse facilè poterit: nihilominus quasdam eius obscuritates, confusiones, imperfectiones, falsitatesque adnotabo. Primùm itaque Demonstratio ipsa obscurissima est, quoniam nulla

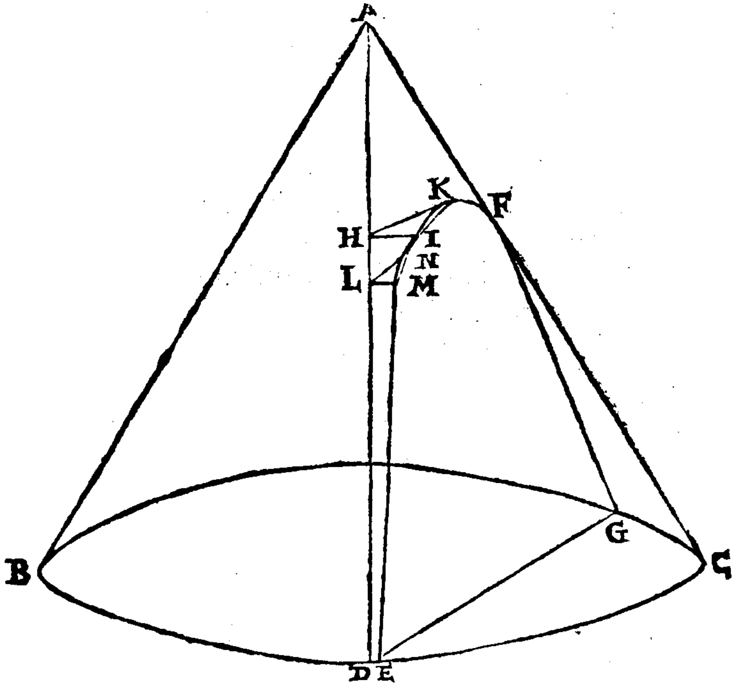
ipse

ipse Rabbi figura vsus est. & quanuis in principio Expositionis dixerit se supponere quòd Demonstratio huius Theorematis corpore Conico explicanda sit, nihilominus debebat eam saltem in figura plana corpus conicum representante declarare, quemadmodum cæteri omnes Autores fecerunt. Verùm vt defectus, & imperfectiones, erroresque grauissimos huiusce Demonstrationis facilè possimus ostendere, necessarium nobis est in figura conica plana demonstrationem ipsam explicare. quicquid autem in ipsa plana conica figura dixerimus, in Cono rotundo corporeo intelligantur. Sit igitur Conus Rectus ABC, in quo sit Latus quidem Expositio.



Trianguli per Axim recta AD linea; Latus verò Hyperboles EFG, sit curua linea EF. Ait ergo Rabbi [Supponamus inter hasce duas lineas, rectam scilicet, & curuam intercedere superficiem vnius palmi, & hæc superficies sit æqualis quantitate palmi in omnibus Coni lateribus ad faciem Coni. hoc est vt semper superficies inter hasce duas lineas prædictas per distantiam vnius palmi tum ad Caput ipsius Coni, tum ad Basim intercedat.] Quod autem his verbis dicere vult, tale est. Supponamus hasce duas propositas

tas



tas lineas, rectam scilicet A D, & curuam E F, esse designatas à communibus sectionibus superficiei conicæ, & duorum planorum sibi inuicem parallelorum secantium Conum, alterum quidem eorum per Coni verticem, faciendo Triangulum per Axem, cuius latus est A D recta linea; alterum verò non per verticem, faciendo Hyperbolem, cuius latus est ipsa curua E F linea. & distent hæc duo parallela plana ab inuicem vnius palmi distantia. Ecce igitur quomodo candidissimam hanc suppositionem ipse Rabbi verbis obscurissimis, falsisque verborum sensibus proposuit. Videtur enim dicere, quòd supponatur inter illas duas, rectam scilicet, & curuam lineas interiectam esse superficiem vnius palmi ad faciem Coni, nempe in ipsa externa conica superficie. quod porrò falsum est. quoniam latitudo superficiei conicæ interiectæ inter iam dictas duas lineas, non debet esse, neque supponi eiusdem semper quantitatis in omnibus Coni partibus (vel, vt ipse impropriè ait, lateribus) tam versus sumitatẽ, quàm versus basim ipsius: cùm reuera superficies ipsa conica inter illas duas lineas interiecta, latior versus Coni summitatem, quàm versus basim ostendenda sit; si

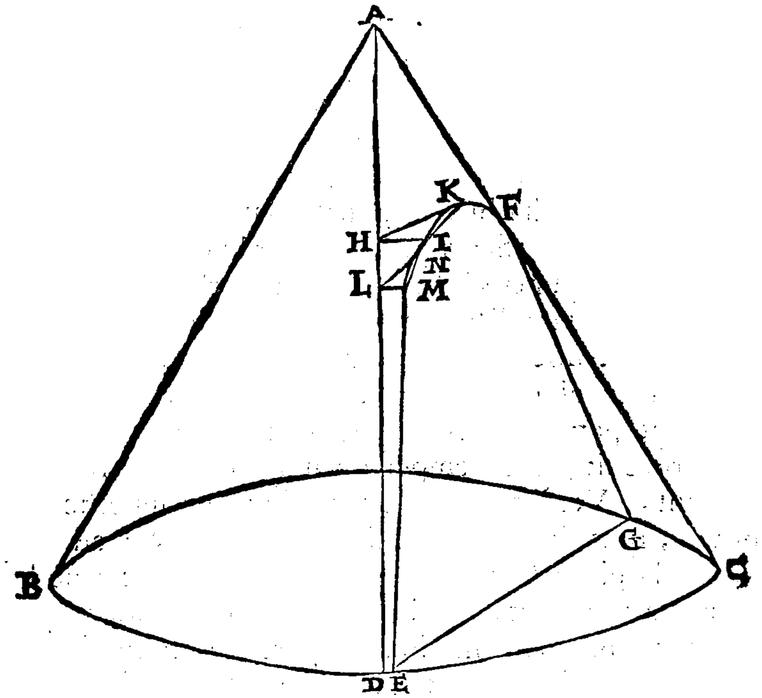
Primus error ipsius Rabbi Samtou.

nimirum

nimirum ipsæ duæ lineæ magis sibi semper versus Coni basim appropinquari debeant, vt proponitur. Si autem intelligit superficiem planam inter duas illas propositas lineas interiectam vnius palmi latitudinis, esse planam superficiem, quæ secet planum Trianguli per Axem in latere ipsius Trianguli, & planum Hyperboles in recta linea secante duobus in punctis latus ipsius Hyperboles; quippequæ plana superficies procedat per lineas rectas ductas ab aliquibus duobus punctis ipsius lateris Hyperbolici perpendiculares ad propositam iam dictam rectam lineam, siue Latus Trianguli per Axem Coni. hoc etiam supponi non debet, quoniam falsum est, & contrarium ei, quod est præcipuè demonstrandum; nempe iam dictas perpendiculares, per quas latitudo ipsius planæ superficiei procedit, fieri semper eò minores, quò basi propinquiores sunt. Verùm neque etiam de plana superficie intelligere potest, quæ sit perpendicularis, siue erecta ad duo iam dicta parallela plana Conum secantia; quoniam licet de hac superficie plana verum sit, quòd eius latitudo sit eiusdem quantitatis, vtputa vnius palmi in omnibus suis partibus; nihilosecius verba eius nullo modo de hac superficie intelligi possunt. cùm hæc superficies non intercedat inter iam dictas duas propositas lineas, quoniam ipsas ambas attingere minimè potest, sed inter iam dicta duo parallela plana intercedit, quæ ipsas duas propositas lineas efficiunt. Quare nullo pacto illa verba accommodari possunt, vt veritatem exprimant; licet ipse seipsum exponens eandem falsitatem repetat, cùm dicat ipsam vnius palmi suppositam superficiem inter illas duas lineas prædictas intercedere. Quum autem hoc modo suppositionem hanc proposuisset, sequitur determinans primam Theorematis sui partem, inquiens [Et dicamus manifestum esse distantiam maiorem inter hasce duas lineas intercedentem, esse versus caput Coni. nam quò magis accedit linea illa curua versus caput, eò magis augebit flexum in arcus formam; & quo magis flectetur in formam arcus, augebitur quæ inter ipsas intercedit distantia. & erit chorda istius arcus maior quàm partes chordarum cæterarum, quæ fient ad basim.] Hæc est eius Determinatio, cuius sensus (quamuis ex eius verbis ægrè eliciatur) talis est. Dicimus distantiam maiorem esse inter hasce duas lineas, scilicet A D, & E F interiectam versus caput, siue summitatem Coni, quàm

Determinatio primæ partis Theorematis.

Ll versus



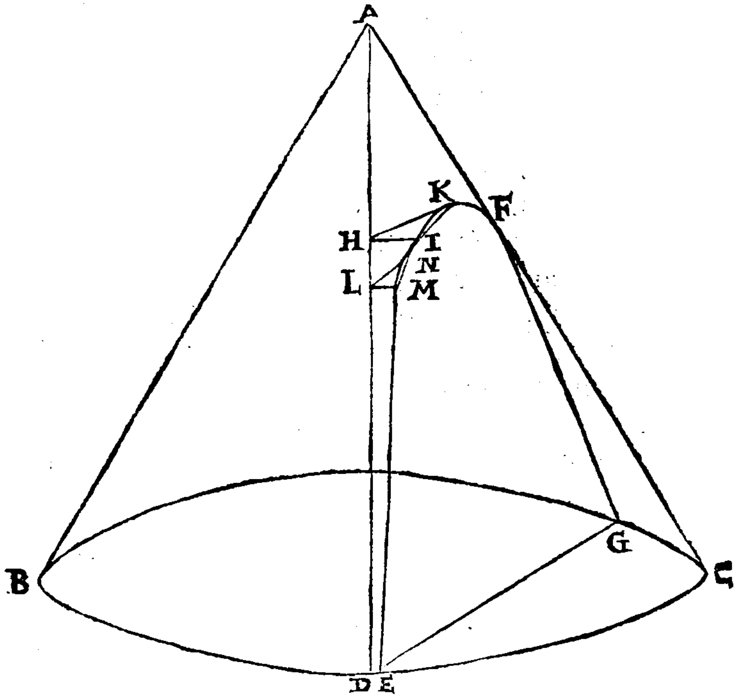
versus basim ipsius; vt proposuit prima pars Theorematis; quam videtur confirmare prius quadam probabili non Geometrica ratione desumpta à maiori ipsius curuæ lineæ incuruatione, deinde vult probare idem alia ratione Geometrica desumpta ab inæqualitate quarundam chordarum subtendentium quosdam arcus ipsius inflexæ Hyperbolicæ lineæ. Quam inæqualitatem determinans proposuit illis verbis [& erit chorda istius arcus maior quàm partes chordarum cæterarum, quæ fient ad basim.] hoc est chorda arcus Hyperbolicæ lineæ versus summitatem Coni existens, erit maior quàm cæteræ chordæ arcuum Hyperbolicæ lineæ versus Coni basim existentes. quamuis ipse malè, & confusè loquutus chordas ipsas inferiores, vocauerit partes cæterarum chordarum. Hoc autem perperam, & obscurè, atque confusè proposuit; quoniam adhuc non declarauit quænam istæ arcuum inæquales chordæ sint, & quomodo reperiantur; ex quarum inæqualitate propositum demonstraturus est. Inæqualitatem autem harum chordarum demonstrat construens, atque arguens hoc modo, hisceque verbis [Et probatio ipsius hæc erit. Quòd fingamus produci perpen-

Determinatio.

Constructio.

perpendicularem à dicta recta linea versus lineam curuam] quæ scilicet sit in figura à nobis apposita, ipsa recta HI linea [& applicemus super dictam lineam curuam, perpendicularem paruam, quę attingat vno sui extremo lineam perpendicularem à dicta linea recta protensam, & altero sui extremo attingat lineam curuam.] quæ quidem parua perpendicularis, quam superiùs chordam vocauit, sit ipsa IK perpendiculariter erecta super ipsam HI. [& fingamus extendi chordam à principio illius lineæ perpendicularis super lineam rectam appositæ; à capite ipsius, quo coniungitur cum linea recta; & hæc extendatur versus caput perpendicularis paruæ lineæ super lineam curuam constitutæ, qua parte curuæ coniungitur.] quæ demum erit recta HK linea, quam ipse impropriè chordam nominat, cùm nullius arcus chorda sit. potius enim ipsa IK parua perpendicularis ab ipso vocata, chorda hìc quoque quemadmodum superiùs vocanda erat, quia chorda arcus Hyperbolici est. Sed ipse (vt inferiùs etiam videbitur) confundit hosce Geometricos terminos, & eas rectas lineas, quæ reuera chordæ sunt, non vocat chordas; eas autem, quæ chordæ non sunt, appellat modò chordas, modò diametros, modò subtendentes angulum, modò subtendentes latera, vel laterum. Hisce ita constructis, probat propositũ hoc modo. videlicet ꝙ si fecerimus aliud triãgulum inferius simile ipsi HIK triangulo iam facto, quale est ipsum LMN; sequetur ipsam HK esse maiorem ipsa LN. quia subtendit angulum rectum contentum à duobus HI, IK lateribus maioribus quàm duo latera LM, MN continentia angulum rectum subtensum à linea LN. Quòd autem latera HI, IK lateribus LM, MN maiora sint, ex hoc confirmat. quia cùm iam probasset illa probabili, friuolaq; maioris incuruationis ratione rectam HI maiorem esse recta LM; probat similiter eademmet maioris flexus ratione rectam quoque IK maiorem esse recta MN. ex quo probat etiam rectam HK esse maiorem recta LN: ex quarum inæqualitate demum concludit duarum propositarum linearum maiorem appropinquationẽ versus basim Coni, quàm versus Apicem. Hęc est tota Demonstratio primæ partis Theorematis ipsius Rabbi Samtou, explicata ab ipso multis obscuris, improprijs, confusis, perplexisque verbis, ac superuacaneis repetitionibus (vt quilibet lector in ipsa eius litera cognoscere poterit) ab illis verbis [Sequetur ergo absque dubio chordam, &c.] vsque ad illa verba [quia curuitas

Demõstratio primæ partis.



Secũdus Error ipſius Rabbi Samtou.

uitas inter ipſas intercedens minuetur:] Quæ quidem Demonſtratio grauiſſimè peccat primùm in hoc, quòd cùm probaſſet iam illa ſua probabili ratione perpendiculares rectas lineas HI, LM, quę ſunt minimæ duarum propoſitarum linearum diſtantię, eſſe inęquales; non concludit ex earum inæqualitate propoſitum, ſed fruſtra probat etiam linearum HK, LN non minimarum diſtantiarum inæqualitatem, ex qua malè concludit propoſitũ, ſicuti etiam omnes Autores fecerunt præter Cardanum. Secundò peccat hęc Demonſtratio, quia non demonſtrat niſi illa friuola, & probabili ratione incuruationis maioris inæqualitatem linearum IK, MN, ex qua concludit inæqualitatem ipſarum HK, LN: ita vt tota hæc Demonſtratio in ipſa nullius momenti ratione conſiſtat. & quod peius eſt peccat etiam magnoperè in hoc, quòd non docet quo artificio ipſe duæ IK, MN chordæ paruæ inæquales in ipſa Hyperbolis curua linea reperiendæ ſint, vt Geometricè, & non probabiliter earum inæqualitas demonſtrari poſſit. Verùm cùm ita primam ſui Theorematis partem ipſe Rabbi demõſtraſſet, concludit etiam ſecundam ex ſuppoſitione, quòd ſcilicet non coincidant ſibi inuicem

Tertius Error eiuſdem.

Quartus Error eiuſdem.

Demonſtratio ſecundæ partis.

cem ipſæ duæ propoſitę lineæ. quoniam (inquit) inter ipſas permanens ſuperficies palmi diſtantia è regione (hoc eſt æquidiſtanter) intercedit, ſicuti ſuppoſuimus. quod ita intelligendum eſt vti ſuperiùs diximus, perinde ac ſi dixiſſet. quoniã inter ipſa parallella Hyperbolis, & Trianguli per Axem plana permanet ſemper eadem palmi diſtantia, ſicuti ſuppoſuimus. alioquin falſum hic quoque quemadmodum ſuperiùs diceret. Poſtea volens ex hoc inferre abſurdum, ſiue inconueniens, quod ſequeretur ſi coinciderent; q ſcilicet duo iam ſuppoſita parallela plana Hyperbolis, & Trianguli per Axem inuicem coinciderent, quòd ſuppoſitioni oppugnat: infert ipſe quoddam aliud abſurdum à iam dicto diuerſum, his verbis [Quòd ſi coincidant, falſum ſequetur, eſſe ſuperficiem illius lineæ paruę curuæ æqualem ſuperficiei lineæ maioris rectæ.] quorum ſanè verborum (meo quidem iudicio) nullus eſt ſenſus, qui propoſito applicari poſſit. & ego ingenuè fateor me nequaquam intelligere quænam ſit ſuperficies illius lineæ paruæ curuæ, neque illa ſuperficies lineæ rectæ maioris, cui æqualis concludatur illa minoris lineæ paruæ curuæ ſuperficies. prorſusq; demum (vt hoc imperfectionum huiuſce Demonſtrationis ſigillum ſit) neſcio quid ſibi vir iſte iam dictis verbis voluerit. ipſe viderit an Deus eum ab erroribus vendicarit, quemadmodum in fine huiuſce ſuæ Demonſtrationis illum depręcatus eſt. Hęc autem de hac etiam Demonſtratione, eiuſq; imperfectionibus à nobis ſatis ſuperque dicta ſint.

Quintus Error ipſius Rabbi Samtou.

Commentarij Franciſci Barocij Finis.

INDEX LOCVPLETISSIMVS EORVM, QVAE TOTO OPERE CONTINENTVR.

A

B

C

Cardani

Q

R

Samtou

S

T

V

FINIS.