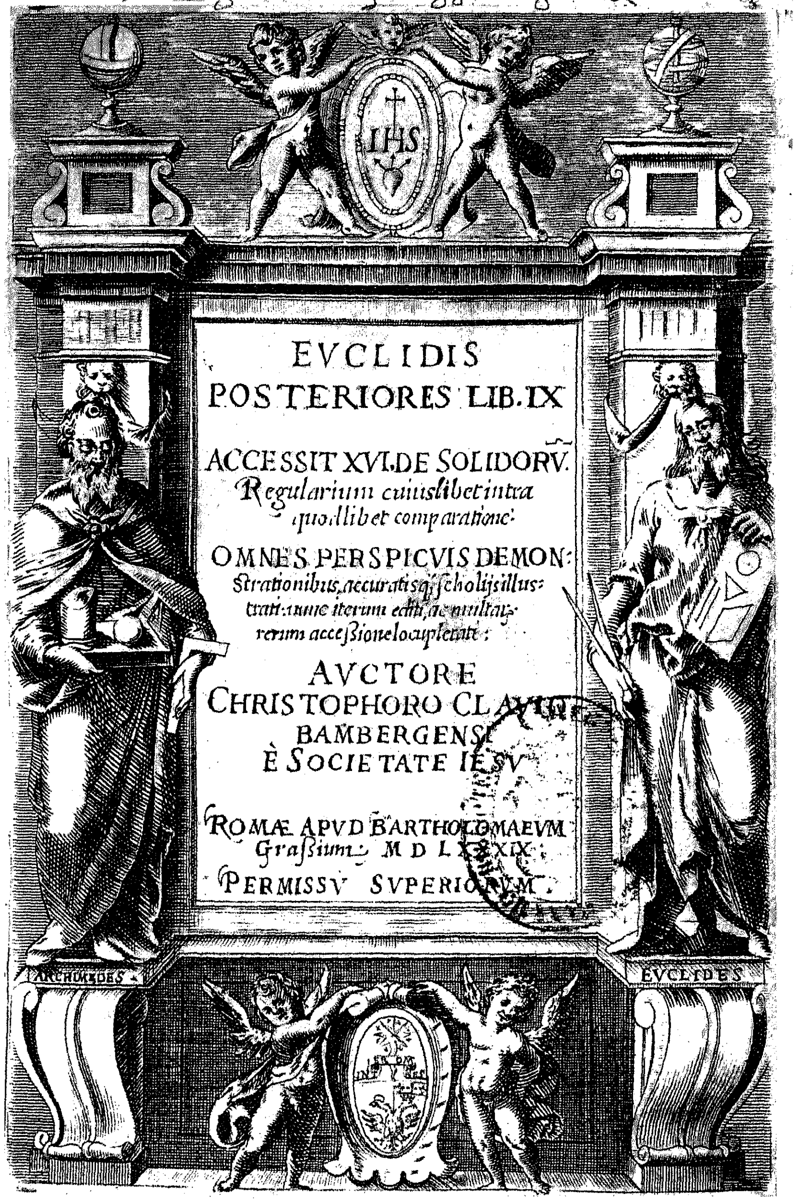
Del colegio de la comp.a de Jesus de granada   Lib.



EVCLIDIS POSTERIORES LIB. IX

ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV̄.
Regularium cuiuslibet intra
quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONſtrationibus, accuratisq; ſcholijs illuſtrati: nunc iterum editi, ac multarum rerum acceſsione locupletati:

AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI
È SOCIETATE IESV

ROMAE APVD BARTHOLOMAEVM
Graſsium. M D LXXXIX.
PERMISSV SVPERIORVM.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, ſecundũ quam vnumquodq; eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verum ante ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſerere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeò, vt abſque eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neque ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quod abſque eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quam ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vſum, neq; exprimi queãt, neq; intelligi. Nam non rarò pleraque laterum ſunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel, ſi non ſunt Irrationales, longitudine certè inter ſe ſunt incommenſurabiles, atque adeo ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, *atque intelligentia cum numeris eſt implicata, & coniuncta, vt abſque his nullo modo cognoſcantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ ſuus ordo, ratioq; conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectioneſque, quantum eæ rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur.*

INCIPIENS igitur more ſuo a principijs, definit initio vnitatem, docetque eam eſſe, ſecundum quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum eſſe dicitur. Nam ſecundum vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere ſolemus. Cæterum vnitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus cōpoſita, manifeſtum eſt, numerum quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes: Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipſo numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidē partes, nimirum in 8. vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum quælibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

EX his ſequitur, omnes numeros, quotcunque ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos vna eademque menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cum plurimæ earum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, vt clariſſime lib. 10. oſtendetur.

III.

PARS eſt numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON eſt diſſimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ expoſuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc ſolum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12.18.24.30.60.630. &c. quia ille ſingulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum ſinguli hi metiantur, vt perſpicuum eſt.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen ſibi ſumit, per quem ipſa numerum, cuius pars eſt, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit ſeptima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, ſed partes appellari: cuiuſmodi eſt numerus 5. ſi conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, niſi per ſuas vnitates, pars ipſius dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars eſt numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimaſoctauas numeri 18. Ex quibus liquido conſtat, Euclidem nomine partis intellexiſſe partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, ut uolunt nonnulli; alioquin ſuperuacanea eſſet hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum menſura vtrumque eorum metitur, & eum ſcilicet, qui partes *dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt ſi communis duorum numerorum menſura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintę. Tales partes ſunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum menſura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus ſex decimas eiuſdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis menſura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.*

QVOD ſi roges, cur Euclides hoc loco non ſolum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars eſt, verum etiã illum, qui partes: non autem idipſum quinto lib. in magnitudinibus pręſtiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quę maiorem non metitur, partes appellauit; ſed tantũ eam, quę maiorem metitur, partem. Reſpondemus, huius rei cauſam eſſe, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars eſt, aut partes, vt propoſ. 4. huius lib. oſtendetur; pars quidem, cum ipſum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter ſe res habet. Non enim, propoſitis duabus magnitudinibus inęqualibus, neceſſario minor aut pars, aut partes eſt maioris, cum eę perſępe ſint incommenſurabiles, vt aperte liber decimus demonſtrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam ſolum in magnitudinibus commenſurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, ſi illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille ſolum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoq; ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quẽ minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor eſt pars, ſit viciſſim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars eſt numeri 30. & hic illius multiplex eſt, &c. Si vero maiorem minor non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex eſſet, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et viciſſim, ſi maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur. Nam ſi metiretur minor maiorem, eſſet per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus eſt, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, ſiue in duas partes ęquales, cum eorum dimidia ſint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt a pari.

OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perſpicue colligi poteſt, vnitatem in numeris prorſus eſſe indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi poſſet. Nam huius imparis 11. dimidia pars eſſent quinque vnitates & ſemis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parẽ.

QVIA numerus par eſt, qui biſariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. Metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD ſi numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CÆTERVM ſi rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perſpicuum erit, fieri poſſe, vt vnus idemque numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdũ, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, ſecundum eos, ſit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propoſitus numerus par 24. neq; pariter par ſit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparẽ 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed

apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriuſque, vt conſtat. Itaque tria conſtituentur genera numeri paris inter ſe maxime diuerſa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibuſdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, vt perſpicuum eſt & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio iſta, tantum, quam illi apponunt, & ex propoſ. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeſte omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum deniq; quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonſtratque omnes numeros a binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantum, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, eſſe pariter impares tantum, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxt, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe, & pariter impares, ut ſunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonſtrationibus illarũ propoſitionum, hos poſtremos numeros, alioſque ſimiles, vere eſſe, ſecundum traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi ſint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus Primus; quales ſunt omnes iſti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.&c, Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatẽ, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15.8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem vero iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum vtrumque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter ſe dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quamquam poſtremi duo habeant communem menſuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quiuis numerus, dici poſſunt, licet improprie, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerũ quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quẽ numerus quiſpiam metitur.

NVME-

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3.5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe compoſiti, licet non quilibet ſit compoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quiſpiam metitur, compoſitus nominatur. Vt hi numeri 15.24. compoſiti inter ſe ſunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe compoſiti erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & ſe ipſum, & reliquos duos metitur, licet per ſe ſumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus

numerus 8.ſexie fuerit compoſitus, toties nimirum, quot ſunt in multiplicante 6.vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque viciſſim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6.ſi numerum 6.octies ſumpſerimus, toties ſcilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimuſque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000.20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic ſumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600.456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7.in numerum 9. vel e contrario. Et ſic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus ſit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium eſt vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio ſiue ductus vnius numeri in alium ita quoque deſcribi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, eſt inuẽtio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quã alter multiplicantium ad unitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, ſiue ductu 6.in 8.gigni numerum 48.qui ita ſe habet ad 6.vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda eſt hæc alia docens, quid ſit numerum diuidere numerum: quippe quæ neceſſaria omnino ſit ad ea, quæ nos in ijs, quæ ſequuntur, ſumus demonſtraturi.

NVMERVS numerũ diuidere dicitur, cũ numerus acceptus fuerit, qui ſuis unitatibus indicat, quoties diuidẽs numer⁹ in diuiſo cõtinetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum ſumptus fuerit numerus 8.qui octo ſuis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6.in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8.diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6.qui ſex ſuis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 8.in diuiſo 48.contineri ſexies.

HINC fit, numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad vnitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque Diuiſio vnius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

DIVISIO numeri per numerum, eſt inuentio numeri, qui ad unitatem habet eandem proportionẽ, quam numerus diuiſus ad diuidentẽ.

ITA vides ex diuiſione numeri 48. per 6.procreari numerum 8.qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48.per 8.produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, vt C, ad vnitatẽ D: Ex definitione autẽ diuiſionis, ita quoq; ſe habet A, ad B, vt C, ad vnitatẽ D; perſpicuũ eſt, numerũ ex C, in B, genitum eſſe numerum A; cum tam ille genitus, q̃ A, eandẽ proportionẽ habeat ad B, quã C, ad D, vnitatẽ.

A,48. B,8. C,6. D,1.

HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id eſt, Numerus fractus numerum fractū, vel integer fractum, vel fractus integrum (ſiue fracti adhæreant integris, ſiue non) multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiſo continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuiſus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compoſitus, quot ſunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per ſui ſemiſſem duntaxat eſt in $\frac{1}{2}$. ſumendus eſt numerus 20. per ſemiſſem quoq; ſui, quæ eſt 10. Ita quoque viciſſim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. ſi $\frac{1}{2}$ ſumptus fuerit vicies, toties ſcilicet, quoties vnitas eſt in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem eſſe proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita eſſe 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. ſe mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit per tertiam ſui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. ſumptus fuerit per ſui ſemiſſem, quia & $\frac{1}{2}$. ſemiſſem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$, qui numerus tertia pars eſt numeri $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{3}{6}$. & ſemiſſis numeri $\frac{1}{3}$. ſiue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda ſit, in Arithmetica docuimus, demonſtrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum ſumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiſo numero 10. ita vt eadem proportio ſit procreati numeri 20. ad 1, quæ numeri diuiſi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$. quando ſumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiſo $\frac{1}{6}$ ſed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem ſit qui $\frac{3}{6}$. liquidò conſtat

tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat diuiſio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuiſioneq; fractorum diximus, planiora fient.

X V I.

CVM autem duo numeri mutùo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia ſecundum ſuas vnitates in longum, & latum diſpoſitas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera ſunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, ꝙ ipſum cōtineant, non ſecus, ac rectæ lineæ angulum rectū ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius ſunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum diſpoſitæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiuſque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides ſolum definit planū quadrangularem rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorum diſputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ altera parte longiori, ſimiles ſint, & æquales, ſiue ambitũ, ſiue aream, capacitatemue ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. qđ ad ambitũ ſpectat: tamẽ ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab ijſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

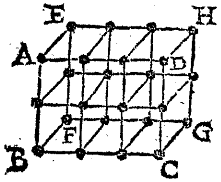
QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quòd quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum: Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem aliquando dici poſſe numerum planum, quamuis impropriè; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes,

producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. ſolidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum diſpoſitæ referunt figuram quandam ſolidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimenſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicãtes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primũ multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. baſis ſolidi numeri longa quatuor unitates, & lata duas: Et ſi hæc baſis in 3. multiplicetur, hoc eſt, ſi accipiatur ter, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At ſi numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur baſis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro baſe, quæ bis ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & BF, latitudo, duas complectitur; ſuperponentur ei duæ aliæ baſes ſimiles, & æquales, vt totus numerus ſolidus contineat 24. vnitates, eiuſque altitudo B A, vnitates tres. Similiter, ſi baſis ſit A B F E, ſex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ tres baſes ſimiles, & æquales, fietque totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinem B C, habens quatuor vnitatum. Si deniq; baſis ſit ABCD, 12. vnitatũ, cuius longitudo BC, quatuor cõtinet, & latitudo AB, tres, ſuperponetur illi alia baſis ſimilis, & æqualis EFGH, conſtabitq; totus numerus ſolidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinẽ dabũt AE, vel BF. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de alijs numeris ſolidis iudicandũ erit.

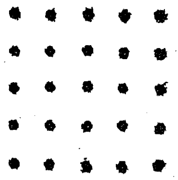


DENIQVE & vnitas interdum ſolidus appellabitur numerus, etſi non proprie, quia eius latera ſunt tres vnitates, ipſam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreãtes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione datam; quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

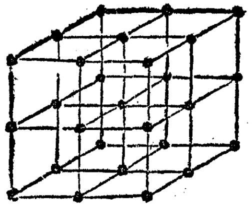


PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum vnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero ab Arithmeticis pleriſque appellatur.

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoque illum numerũ vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius unitates in longum, latum, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eędem partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, comprehẽdit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultipliciue, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; æque multiplex eſt, neque eadem pars, neque eædem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nimirũ triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eædem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales.*

Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eãdem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, ꝙ primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et e contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eædem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habẽt. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundẽ ad æquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionẽ, vel ad quos idẽ eandem habet proportionẽ, æquales eſſe. Cũ enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe eundẽ æqualiter cõtineant, eandemq;

inſuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium ſit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque inſuper eorum partem, uel partes; perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; inſuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque inſuper illorum partem, vel partes, ſecundum hanc eandem definitionem; manifeſtũ eſt, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe:

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quam minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem eſſe: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi recte hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, ſiue integri numeri ſimul adſint, ſiue non. Nam quatuor hi numeri ſunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. *quia primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt, nimirum duplus, vt patet, ſi priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad* $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. *& poſteriores quoque ad eandem denominationem, vt ad* $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. *Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales ſunt* $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. *cum primus ſecundi, & tertius quarti ſit eadem pars, nimirum ſemiſſis, vt conſtat, ſi priores duo ad hos eiuſdem denominationis reuocentur,* $\frac{19}{8}$. $\frac{38}{8}$. *& poſteriores duo ad hos* $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$. *atque ita de cæteris.*

XXI.

SIMILES plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero ſit ſimilis, non neceſſe eſt, quælibet duo illius latera quibuſuis duobus lateribus huius eſſe proportionalia; ſed ſatis eſt, illum habere aliqua duo latera, quæ ſint proportionalia quibuſdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, ſi ſecundum ſuas vnitates in formam planam redigantur, prout latera aſſumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. ſimiles ſunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia ſunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eiſdem non ſint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo, vt duo numeri ſolidi ſimiles ſint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia ſint tribus quibuslibet lateribus alterius; ſed ſufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, ſi ſecundum vnitates in formam ſolidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri ſolidi 192. & 24. ſunt ſimiles, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. ſunt proportionalia, licet his eiſdem nequaquam proportionalia ſint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE poſſunt duo numeri plani, vel ſolidi, eſſe ſimiles, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. ſimiles, vt dictum eſt; & tamen ſi latera prioris ſumantur 3. & 8. nulla reperientur in poſteriori illis proportionalia. Sic etiam ſolidi ſimiles ſunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris aſſumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in poſteriori.

HÆC porro ſimilitudo planorum, & ſolidorum reperitur quoque in fractis numeris, ſiue in integris cum fractis. Nam ſi ſumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tã duo priores, quàm duo poſteriores inter ſe multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri ſimiles, &c.

Dixi, plerunq;, quia fieri poteſt, vt interdum integri numeri gignantur. Nam ſi duo latera ſint $\frac{2}{3}$. 6. *& alia duo* $1\frac{1}{3}$. 12. *quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum* 4. *poſteriora vero numerum* 16.

X X I I.

PERFECTVS numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes ſuæ partes ſimul ſumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales ſunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiuſmodi ſunt hi numeri 6. 28. 496. *Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat* 1. 2. 3. *quæ ſimul ſumptæ conficiũt numerum* 6. *Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ ſunt hæ* 1. 2. 4. 7. 14. *quarum ſumma conſtituit ipſum numerum* 28. *Tertius demum numerus has partes habet aliquotas* 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. *quas omnes in vnam ſummam collectas componere numerum* 496. *perſpicuum eſt. Qui autem numeri perfecti ſint, & qua via, ac ratione procreentur, (ſunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonſtrabitur ab Euclide propoſ. vltima lib. 9.*

QVOD ſi partes omnes aliquotæ alicuius numeri ſimul acceptæ maiores ſint ipſo numero, dici ſolet numerus ille, Abundans: ſi vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide ſumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus eſſet perfectus, cum ſuis ipſius partibus ſit æqualis, ſi quilibet numerus minor numeri maioris pars dici poteſt, ſiue eum metiatur, ſiue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propoſitis adiungendæ mihi videntur ex Campano, alijſq; ſcriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime ſuccedent poſtulata, & communes animi notiones, præſertim eæ, quibus in demonſtrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

NVME-

X X I I I.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. *metiri dicitur numerum* 12. *per* 3. *quia multiplicatus per* 3. *producit* 12. *Eademque ratione numerus* 3. *eundem numerum* 12. *metietur per* 4. *cum ex multiplicatione* 4. *in* 3. *numerus* 12. *producatur. Hoc autem ita eſſe, hac ratione fiet perſpicuum. Cum numerus* 4. *metiatur* 12. *per* 3. *faciet* 4. *ipſum* 12. *toties compoſitus, quoties eſt vnitas in* 3. *Quare per defin.* 15. *numerus* 3. *multiplicans numerum* 4. *producet* 12. *Quia vero vt propoſ.* 16. *huius lib. oſtendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione* 4. *in* 3. *qui ex* 3. *in* 4. *manifeſtum relinquitur, eundem numerum* 12. *procreari, ſi numerus* 4. *multiplicet numerum* 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. *metiri dicitur numerũ* $13\frac{5}{12}$. *per* $5\frac{3}{4}$. *quia multiplicatus per* $5\frac{3}{4}$. *gignit* $13\frac{5}{12}$.

X X I I I I.

PROPORTIO numerorum eſt habitudo quædam vnius numeri ad alterũ, ſecundum quod illius eſt multiplex, vel pars, parteſve; vel certe illum continet ſemel, aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. *cum numero* 4. *conferatur ea ratione, qua illius multiplex eſt, nimirũ quintuplus, dicetur hæc cõparatio, habitudove, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus* 20. *cum numero* 60. *confertur, ſecundum quod illius tertia pars eſt; & ſic de reliquis.*

QVÆ

QVÆ cum ita ſint, perſpicuum eſt, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq́; inſuper illius partem, vel eaſdem partes, vt ſupra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, ſiue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadẽ proportione minores ſumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum: Er ſemper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC deſinitio, vt ad magnitudines pertinet, copioſe explicata eſt defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc transferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum componi

dicitur ex propottionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita ſe habere, pluribus verbis a nobis demonſtratum eſt ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuerſaque; de compoſitione, diuiſione, & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi ęquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero ſumi poſſe maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione conſurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem ęque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

QVORVM idẽ numerus ęque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quę in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum metitur.

NAM vnitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito vnitates, ipſum conſtituit. Quamobrem ipſum metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum ex ſuis vnitatibus conſtitutum.

VI.

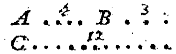
OMNIS numerus ſe ipſum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquẽ produxerit, metietur multiplicãs productum per multiplicatũ, multiplicatus autem eundem per multiplicantẽ.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A, vnitates; perſpicuum eſt B, metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonſtrabitur propoſ. 16. huius lib.



VIII.

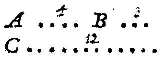
SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente ſunt, vnitates, hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per deſin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum a B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipſum C, producit, per deſin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum producere ipſum C.



X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

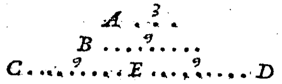
METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipſis compoſitum B D. Cum enim A, metiatur ipſos BC, C D; erit tam BC, quam C D, ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo B C, in partes B E, E C, ipſi A,

æquales, & ipſo C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

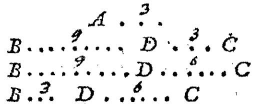
METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D; erit CD, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo C D, in partes C E, E D, ipſi B, æquales; metietur A, ipſos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum CD, ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.



XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

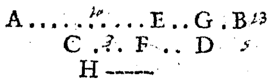
METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & BC, & B D; erit tam BC, quam BD, ipſius A, multiplex, aut certè B D, ipſi A, æqualis erit.



Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus D C, vel vna pars numeri B C, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C. Quod eſt propoſitum.

I. THEOR. I. PROPOS. I.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentē, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio ꝓpoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erūt.



SINT duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B; Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & C D, numerum A E, (quod C D, vel pars ſit ipſius A E, vel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) [a] metietur quoque H, ipſum A E: At H, metitur quoque totum AB. [b] Igitur & reliquum EB, metietur. Metitur autem EB, ipſum CF. [a] Igitur & H, ipſum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur, [b] metietur quoq; reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipſum E G; [c] metietur etiam H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, totum E B. [d] Reliquam igitur vnitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.

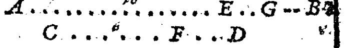
[a] 11. pron.
[b] 12. pron.
[c] 11. pron.
[d] 12. pron.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

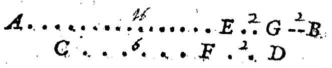
SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas.

SINT duo numeri inter ſe primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequā ad vnitatē detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus G B, præcedētem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum F D, metitur; & FD, ipſum EG, [e] metietur quoque GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſe ipſum metiatur, [f] metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF. [g] Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipſum F D, poſitus ſit metiri;



[e] 11. pron.
[f] 10. pron.
[g] 11. pron.

[a] 10. pron. [a] metietur quoque ipſum CD, ex CF, F D, compoſitum. At
[b] 11. pron. vero CD, metitur ipſum AE. [b] Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipſum EB, metiatur, vt oſtenſum eſt; [c] metietur & ipſum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.



[c] 10. pron.

EODEM modo & hoc verum eſt.

SI propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad unitatem uſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

[d] 1. ſeptimi. NAM ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem vſque perueniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, [d] vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.

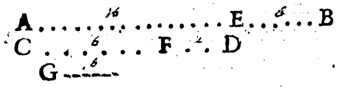
[e] 1. ſeptimi. EX his facile dignoſcemus, an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detracto ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi, [e] vt Euclides demonſtrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperiori huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, oſtenſum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

2.

DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidẽ peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB; & EB, ipſum CF; [b] metietur quoque FD, ipſum CF; atq; adeo cum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipſum EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.



[a] 1. ſeptimi.

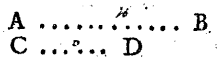
[b] 11. pron.
[c] 10. pron.
[d] 11. pron.
[e] 10. pron.

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quam FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoque G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At vero EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem.

[f] 11. pron.
[g] 12. pron.
[h] 11. pron.
[i] 12. pron.

Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum A B, C D.

QVOD ſi minor numerus C D, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.



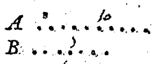
COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.

HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademque ratio eſt de cæteris.

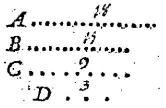
SCHOLIVM.

EX ijs quæ dicta ſunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

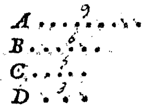


[a] 2. ſeptimi.

SI vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, [a] ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numerum D, communem menſuram.



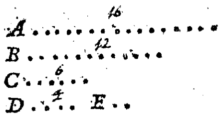
QVOD ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter ſe primi, vel non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita vt habeant numerum communem menſuram, metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, per coroll. huius propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſim.



[a] 2. ſeptimi.

[b] 11. pron.

Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti. [a] Inuenta enim numerorũ C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B; [b] metietur quoque E, eoſdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.



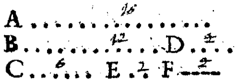
SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

3.

TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. [c] Sit D, maxima menſura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C. Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si vero D, non metiatur ipſum C; erunt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A, B, C, inter ſe compoſiti metietur quæcunque illorum menſura communis, per coroll propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti. a 2. ſeptimi. [a] Sit eorum maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim ſit eorum menſura communis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipſos A, & B; b 11. pron. [b] metietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.



QVOD autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quam E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propoſ 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communẽ. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quã E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis nõ primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem menſuram.

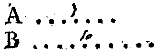
HOC etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximum illorum menſuram communem: Eademque in cæteris eſt ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter ſe, maxima eorum communis menſura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium numerorum: ſi quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis menſura, &c. Reliqua vero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

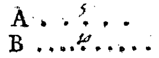
THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

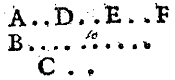
SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B. Sint enim primum A, & B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars eſt numeri B; perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B, tot nimirum, quot ſunt in A, vnitates.



SINT deinde A, & B, non primi inter ſe, ſed inter ſe compoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito, manifeſtum eſt A, partem eſſe numeri B, ex defin. 3. huius lib.



SED iam A, non metiatur ipſum B, [a] inuenta autem maxima eorum menſura communis a 2. ſeptimi. ſit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. b 3. defin. [b] Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cum ipſum metiatur; erit quoque AD, pars eiuſdem B: ſimiliter & DE, & EF; Ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B, tot videlicet,

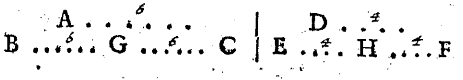


videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

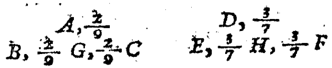
SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ eſt numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, ſimul vtriuſq; numeri B C, & E F, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt vel A, ipſius BC, vel D, ipſius E F.



Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, propterea quod eadem pars eſt A, ipſius BC, quæ D, ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, ſimul æquales ipſis B G, & E H, ſimul: Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C, & H F, ſimul æquales: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, ſimul vtriuſque B C, & EF, ſimul, quæ eſt A, ipſius BC, vel D, ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: ut in hoc exẽplo apparet, vbi numerus A, numeri B C,



& numerus D, numeri EF, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A, D, vtriuſque BC, EF, ſimul eadem pars oſtendetur, qua A, ipſius BC: ſi nimirum BC, EF, diuidantur in partes B G, GC; EH, HF, ipſis A, D, æquales, &c.

QVOD ſi quando contingat, numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. *ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones* $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. *quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales* $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. *ſecũda in has tres* $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. *tertia verò in has quatuor,* $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

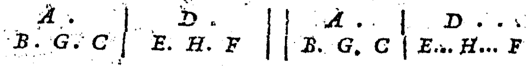
RVRSVS quando adſunt integra, reuocanda prius erũt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. *ſecandus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem,* $\frac{31}{7}$. *deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio* $\frac{93}{21}$. *cuius tres partes æquales ſunt* $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. *Atque hæc in ſequentibus quoque propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoque ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.*

EODEM modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus ſimul

ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

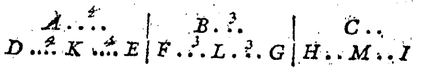
HOC autem perſpicue in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.



POSSVMVS etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorũ, eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

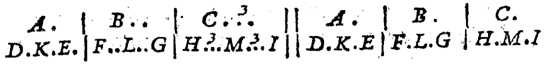
SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, ſinguli ſingulorum eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omnium numerorum DE, FG, HI, ſimul eandem eſſe partẽ, quæ eſt A, ipſius DE.



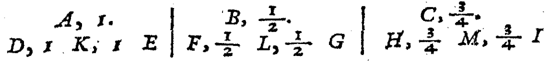
Diuiſis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tã numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, ſimul æquales ipſis DK, FL, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales C, & HM; erunt quoque A, B, C, ſimul æquales ipſis DK, FL, HM, ſimul. Simili ratione erunt A, B, C, ſimul æquales ipſis KE, LG, MI, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, ſimul ipſorum DE, FG, HI, ſimul, quæ A, ipſius DE.

IDEM ſequitur; ſi loco vnius numerorum A, B, C,

ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.



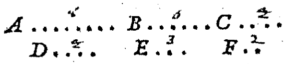
HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam ſi quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonſtrabitur: etiamſi aliqui numerorum ſint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.



THEOREMATI quoque primo quinti lib. ſimile proponemus, in hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

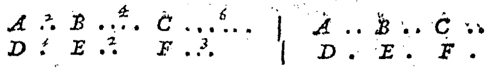
DEMONSTRATIO eadem hic eſt, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonſtrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, ſinguli ſingulorum. Dico & omnes A, B, C, ſimul omnium D, E, F, ſimul tam multiplices eſſe, quam eſt A, multiplex ipſius D.



Cum enim tam ſit multiplex A, ipſius D, quã eſt B, ipſius E, & C, ipſius F; erit e contrario D, eadem pars ipſius A, quæ E, ipſius B, & F, ipſius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonſtrata ſunt, erunt D, E, F, ſimul eadem pars *ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.*

SI numeri A, B, C, fracti ſint, & ipſorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quàm multiplex eſt vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonſtratione liquet.

QVOD ſi loco vnius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonſtrabitur, vt ex ſequentibus figuris apparet.

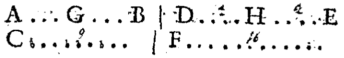


6.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum A B, & DE, ſimul vtriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt A B, ipſius C, vel DE, ipſius F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorũ C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eædem partes eſt numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt AG, numeri C, eadem eſt DH, numeri F; a erit vterque A G, D H, ſimul eadem pars vtriuſque C, F, ſimul, quæ AG, ipſius C, vel DH, ipſius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, ſimul eadem pars vtriuſq; C, F,



a 5. ſ primi.

C, F, ſimul, quæ GB, ipſius C, vel HE, ipſius F: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars eſt numerorum C, F, ſimul, quæ pars eſt AG, ipſius C; quot partes eædem eſt numerus AB, ipſius C, vel DE, ipſius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus A B, D E, ſimul, vtriuſque numeri C, F, ſimul, quæ A B, ipſius C, vel D E, ipſius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

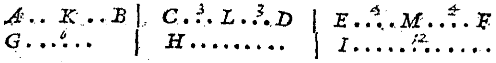
EADEM hæc propoſitio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonſtratione: vt hoc exemplum demonſtrat.

A, $\frac{1}{9}$ *G*, $\frac{2}{9}$ *B* *D*, $\frac{4}{7}$ *H*, $\frac{2}{7}$ *E*
C, $\frac{3}{9}$ *F*, $\frac{6}{7}$

SED & hanc propoſitionem ad quotcunque numeros ſiue integros, ſiue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtrauimus in ſcholio præcedenti; vt hic perſpicuum eſt.



THEOR. 5. PROPOS. 7.

7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadẽ pars erit, qualis totus totius.

SIT

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem eſſe partem reliqui FD, quæ eſt totus AB, totius CD.

A ..^{4}. E .. B
G ..^{4}. C ...^{8}... F ..^{4}. D

Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ eſt AE, ipſius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem eſt pars ipſius CF; quæ EB, ipſius GC; [a] erit vterque AE, EB; ſimul eadem pars vtriuſque ſimul CF, GC, quæ AE, ipſius CF, hoc eſt, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem ſit pars vtriuſque numeri FG, CD; erunt ipſi numeri FG, CD, inter ſe æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipſius FD, quæ ipſius GC, hoc eſt, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 5.eptimiſ.

SCHOLIVM.

$A,\ \frac{3}{8}\ E,\ \frac{2}{5}\ B$
$G,\ \frac{4}{5}\ C,\ \frac{6}{8}\ F,\ \frac{4}{5}\ D$

LOCVM etiam habet hæc propoſitio, unà cum eius demonſtratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum eſt, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamſi ablata ſit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris & ablata, & reliqua ſit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A . E .^{3}. B / *G ..^{6}.. C .. F ..^{6}.. D* | *A .^{3}. E . B* / *G .. C ..^{6}.. F .. D* | *A . E . B* / *G..C..F..D*

CÆTERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. ſimile hoc demonſtrabimus, tã in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit; vt totus totius.

QVOD

QVOD quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita eſſe multiplicem, vt eſt totus AB, totius CD. Cum enim AB, ipſius CD, ſit æque multiplex, atque AE, ipſius CF; erit e contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. [a] Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac proinde e contrario EB, ita multiplex erit ipſius FD, vt AB, ipſius CD, eſt multiplex.

A ..^{6}... E ..^{4}.. B
C .^{3}. F .^{2}. D

[a] 7.ſeptimi.

QVOD ſi ex CD, ablata fuerit vnitas CF; vel reliqua ſit vnitas FD: vel denique in integris & ablata ſit vnitas CF, & alia reliqua FD; idem demonſtrabitur, vt hæc exempla commonſtrant.

A .^{3}. E ...^{6}... B / *C . F .. D* | *A ..^{2}.. E .. B* / *C .. F . D* | *A ..^{4}.. E ..^{2}.. B* / *C . F . D*

THEOR. 6. PROPOS. 8.

8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eaſdem eſſe partes reliqui FD, quæ totus AB, eſt totius CD.

A ..^{6}.. K ..^{6}.. E ..^{4}.. B
C ....^{18}.... F ..^{8}.. D
G ..^{6}.. L .. I ..^{6}.. M .. H

Sumpto enim numero GH, æquali ipſi AB; erit GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, hoc eſt, quæ AE, ipſius CF. Diuiſo ergo GH, in partes GI, IH numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam

GI,

A ..6.. K ..6.. E ..4.. B
C ....18........ F ..6.. D
G ..6.. L .. I ..6.. M .. H

GI, quam IH, ipſius CD, quæ tam AK, quam KE, ipſius CF. Cum ergo CD, numerus maior ſit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipſius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipſius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipſis AK, KE; erit GL, eadem pars ipſius CF, quæ AK, eiuſdem CF, hoc eſt, quæ GI, ipſius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, ſit eadē pars, quæ ablatus GL, ablati CF,[a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento oſtendemus MH, eandem eſſe partē ipſius FD, quæ eſt totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem eſt pars ipſius CD, quæ eſt tam LI, quam MH, ipſius FD; erit vterque GI, IH, ſimul eędem partes ipſius CD, quę vterque LI, MH, ipſius FD, Eſt autem GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH, Igitur & vterque LI, MH, ſimul eædem partes erit ipſius FD, quæ AB, ipſius CD. Quia vero ſi ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, ſimul æquales ſunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, ſimul erat eiuſdem FD, Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum,

[a] 7. ſeptimi.

S C H O L I V M.

$A, \frac{2}{19}\ K, \frac{2}{19}\ E, \frac{6}{19}\ B$
$C, \frac{6}{19}\ F, \frac{9}{19}\ D$
$G, \frac{2}{19}\ L, \frac{3}{19}\ I, \frac{2}{19}\ M, \frac{3}{19}\ H$

IN numeris fractis eadem hæc propoſitio eodem prorſus modo demonſtrabitur, vt hic manifeſtum eſt.

NON demonſtrauit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non conſtabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri eaſdem eſſe partes, quæ eſt numerus AE, numeri CF, ibi vero perſpicuum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem eſſe partem, quæ eſt AE, ipſius CF. Licet enim ipſius EB, duplum aſſumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, ſit ita ſubmultiplex numeri aſſumpti GC, vt AE, eſt ſubmultiplex ipſius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti,

A ..4..
B ..2.. G ..2.. C
D ..6..
E ..6.. H ..6.. F

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, ſintque A, BC, minores ipſis D, EF, ſinguli ſingulis. De his enim propoſitio intelligenda eſt. Dico & viciſsim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D, qualis eſt, aut quales BC, ipſius EF. Diuiſis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter ſe ſunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipſius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipſius HF;[a] ac propterea & vterque BG, GC, ſimul, nimirum BC, ſecundus vtriuſque EH, HF, ſimul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipſius EH, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 5. vel 6. ſeptimi.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{11}$
B, $\frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C
D, $\frac{7}{22}$
E, $\frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

IN numeris fractis propoſitio hæc, vnà cum eius demonſtratione locum etiam habet, vt hic perſpicuum eſt.

QVOD ſi loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars ſit, quæ alter numerus alterius: Erit viciſſim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ ſecundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, ſi loco partium aſſumamus partem in demonſtratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A .
B . G . C
D 6
E ......6 H ......6 F

10.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

A..G.. B
C......
D.....H.....E
F...............

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, ſintque AB, C, ipſis DE, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiã intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſsim, numerum AB, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri DE, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipſius C, quæ tam DH, quam HE, ipſius F. [a] Viciſsim ergo eadem pars erit, aut partes AG, ipſius DH, & GB, ipſius HE, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipſius DH, quæ GB, ipſius HE. [a] Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriuſque DH, HE, ſimul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipſius DH, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 9. *ſeptimi.*

[a] 5. *vel* 6. *ſeptimi.*

SCHOLIVM.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

A, $\frac{2}{15}$ G, $\frac{2}{15}$ B
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{3}{10}$ H, $\frac{3}{10}$ E
F, $\frac{9}{10}$

12.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

A............. E...... B
C...... F... D

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB, ad totum CD. Cum enim ſit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [b] erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, ęque multiplex. Quo poſito, erit e contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipſorum CD, CF. [c] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea e con-

[b] 20. *defin.*

[c] 7. *ſeptimi.*

e contrario AB, ipſius CD, & EB, ipſius FD, æque multiplex erit. [a] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[a] 20. defin.

SIT deinde AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo poſito, [b] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [c] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . E . . B
C . . . . . . F . . . . D

A . . . . E . . B
C . . . . . . F . . . D

[b] 7. vel 8. ſeptimi.

[c] 20. defin.

CONTINEAT tertio AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quo poſito, erit e contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonſtrabimus. [d] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, e contrario AB, ipſum CD, & EB, ipſum FD, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes, vt mox oſtẽdemus.[e] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[d] 8. ſeptimi.

[e] 20. defin.

A . . . . . . E . . . B | A . . . . E . . . . B
C . . . .   F . . D | C . . . . .   F . . . . D

QVOD ſi AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perſpicuum eſt reliquum EB, quoque eſſe æqualem reliquo FD. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, ſunt æqualia. Itaque ſi fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò conſtat in his exemplis, quæ exemplis tertij caſus demonſtrationis reſpondent.

$A, \frac{6}{9}\ E\ \frac{3}{10}\ B$ | $A, \frac{14}{21}\ E\ \frac{28}{29}\ B$
$C, \frac{4}{9}\ F\ \frac{2}{10}\ D$ | $C, \frac{5}{21}\ F\ \frac{10}{29}\ D$

LEMMA.

LEMMA.

QVOD autem, ſi AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem illius vel partes; e contrario CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, ſit eædem partes: Et ſi CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, ſit eædem partes; e contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonſtrabimus. Contineat primum AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, nimirum ſemel, vel bis, vel ter, &c. eandemque inſuper partem; GB, quidem ipſius CD, & HE, ipſius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, ſint vel æquales ipſis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuiſis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipſis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipſius CD, ſit eadem pars, quæ HE, ipſius CF. Similiter diuiſis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eiſdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cum enim AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel

A . . N . . O . . G . . B
C . . I . . K . . D
A . . . P . . . Q . . . H . . . E
C . . . L . . . M . . . F

certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri C F, in AH; proptereaque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo vna pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ vna pars numeri C F, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri C D, æqualis ſit multitudini partium numeri C F; erit C D, eædem partes numeri A B, quæ C F, ipſius A E.

A . . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . O . . . F

CONTINEAT deinde AB, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, videlicet ſemel, bis, ter quaterue, &c. eaſdemque inſuper partes illius; numerus quidem A B, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, ſint rurſum vel æquales ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices. Diuiſis igitur numeris G B, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipſius G B, multitudini partium ipſius HE, æqualis. Simili modo, diuiſis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipſius C D, multitudini partium ipſius C F, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri G B, eadem pars eſt numeri C D, quæ vnaquæque

partium numeri H E, eſt numeri C F. Denique diuiſis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eiſdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim A G, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices; erunt vel tot partes in A G, A H, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipſius C D, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipſius CF, in A H; proptereaq́; multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partiū numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partiū numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atq; adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri C F, eſt numeri A E. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF; erit CD, eædem partes numeri A B, quæ C F, ipſius A E. Quod eſt primo propoſitum.

IAM vero ſit C D, ipſius A B, & C F, ipſius A E, eædem partes. Dico e contrario A B, ipſum CD, & A E, ipſum CF, æqualiter continere, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Diuiſis enim numeris C D, C F, in partes numerorum A B, A E, erunt eæ multitudine inter ſe æquales. Item diuiſis numeris A B, A E, in partes partibus numerorum C D, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter ſe æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri C D, in A B, ſupereritque eadem pars, vel partes ipſius CD, quoties omnes partes numeri C F, *continentur in* A E, *& quæ pars, aut partes ipſius* C F, *ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum* CD, CF, *&* A B, A E. *Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum* A B, A E, *contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *& inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum* C D, C F, *multitudine æquales. Quam ob rem* A B, *ipſum* C D, *&* A E, *ipſum* C F, *æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.*

13.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

A .... C .. E ...
B .... D .... F ......

SINT quotcunq; numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico eſſe quoq; omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D. F, ſimul, vt eſt A, ad B. Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem,[a] eadem pars eſt, aut partes A, ipſius B, quæ C, ipſius D, & E, ipſius F; [b] erit quoque vterque A, C, ſimul vtriuſq; B, D, ſimul eadem pars, aut partes, quæ A, ipſius B, vel E, ipſius F. Rurſus quia

[a] 20. defin.
[b] 5. vel 6. ſeptimi.

vterque

vterque A, C, ſimul, tanquam vnus, vtriuſq; B, D, ſimul, tanquam vnius, eadem pars eſt, aut partes, quæ E, ipſius F; [a] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, ſimul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, ſimul eadem pars, vel partes, quæ A, ipſius B. [b] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

[a] 5. ſeptimi.
[b] 20. defin.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo poſito, erit e contrario B, ipſius A, eadem pars, quę D, ipſius C, & F, ipſius E; Atq; adeo vt prius, [c] erunt omnes B, D, F, ſimul, omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æque multiplices. [d] Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hic apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius lib.

A .... C .... E ......
B .... D .. F ...

[c] 5. ſeptimi.
[d] 20. defin.

A ... C ...... E .... | A ... C ... E ...... | A ... C ... E ...
B . D .. F ... | D . D . F .. | B . D . F .

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. [e] Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; Erit per lemma pręcedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, [f] erunt omnes B, D, F, ſimul omniũ A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario cõtinebunt omnes numeri

A .... C .... E ....
B ...... D ... F ....

[e] 20. defin.
[f] 6. ſeptimi.

A, C, E,

A,C,E, ſimul, omnes numeros B,D,F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes, [a] Quare eadem proportio eſt omnium A,C,E, ſimul, ad omnes B,D,F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

[a] 20. defin.

SINT quarto & vltimo A,C,E, ipſis B,D,F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiũt A,C, ſimul æquales ipſis B,D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A,C,E, ſimul, omnibus B,D,F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A,C,E, ſimul ad omnes B,D,F, ſimul, cum vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A....C...E.....
B....D...F.....

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nã ſint primum A, & C, minores quã B, & D; & A, quoq; minor, quam C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes. [b] Viciſsim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: [c] Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A...C......
B....D........

[b] 9. vel 10. ſeptimi.

[c] 20. defin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes. [d] Viciſsim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, vel partes: Atque adeo e contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. [a] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A......C...
B........D....

[d] 9. vel 10. ſeptimi.

[a] 20. defin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo poſito, erit ob eãdem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo e contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [b] Viciſsim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes, [c] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A....C........
B...D.....

[b] 9. vel 10. ſeptimi.

[c] 20. defin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [d] Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea e contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A........C....
B......D...

[d] 9. vel 10. ſeptimi.

[e] 20. defin.

SINT quinto A, & C, ipſi B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; [f] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A...C....
B...D....

[f] 20. defin.

SINT

A .... C ....
B .... D ....

SINT ſexto A,& C,ipſis B,& D,æquales,at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D,vel æque multiplices ſunt, vel certe illi hos equaliter continent,eandemque inſuper partem, vel partes; [a] erit vt A,ad C,ita B,ad D.

[a] 20.defin.

A ..... C .....
B ... D ...

SINT ſeptimo ac vltimo A,& C, inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint quam B,& D,ſiue minores,ſiue equales. [b] Quoniam igitur,ob eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes;vel certe A,ipſum B,& C,ipſum D,æqualiter continet,eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca, ſi quatuor numeri proportionales ſint, & viciſsim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

[b] 20.defin.

S C H O L I V M.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas,demonſtrabis eodem modo propoſitionem hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari,etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eoſque demonſtrationibus certiſſimis confirmare,vna cum lemmate propoſ.11. vt earũ veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim,& nonnulli alij interpretes,illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium,vt perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus,vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum,& ab Euclidis inſtituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi,& tertius quarti æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere,cum primus ſecundi,& tertius quarti, eadem pars eſt, vel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15.

SI ſint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur,& in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

A .... D ....
B .... E ......
C .... F ...
G .... H ....

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D,E,F,ſitque vt A,ad B,ita D,ad E;& vt B,ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniã .n. eſt,vt A,ad B,ita D,ad E; [a] erit viciſsim, vt A,ad D,ita B,ad E: Similiterque,eãdem ob cauſam, cum ſit,vt B,ad C, ita E,ad F; erit viciſsim, vt B,ad E, ita C,ad F. Igitur erit vt A, ad D,ita C,ad F; (Cũ enim vtraque proportio A,ad D,& C,ad F,eadem ſit proportioni B,ad E, vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt,vt mox oſtendetur.) [b] Ac proinde viciſsim, vt A,ad C,ita D, ad F.

[a] 13.ſeptimi.

[b] 13.ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiã quemadmodũ C,ad G,ita F,ad H; Dico adhuc eſſe, vt A,ad G,ita D,ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris,eſſe vt A,ad C, ita D, ad F; ponatur autem

vt C,

vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

A. D...
B.. E......
C... F.........
G. H...

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſint

A .... B .... C ....
D .... E ...... F ...

eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſiue numeri ſint integri, ſiue fracti; ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel

partes

---

partes. [a] *Quare numeri A, D, C, F, proportionales ſunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum.*

[a] 20. defin.

HOC idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propoſ. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 16.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tettium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, ęque. Dico viciſsim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum E F, æque metiri. Diuiſo enim numero BC, in vnitates B G, GH, HC, & numero E F, in partes E I, IK, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturq́; æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipſum EI, atque vnitas GH, ipſum IK, & vnitas HC, ipſum K F: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, ſimul numerorum E I, I K, K F, ſimul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compoſitus, numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compoſitum æque metietur. Si

A. D..
B.G.H.C E..I..K..F

Vnitas

vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris, propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur, atque numerus D, numerum EF; erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, æque metietur.

HÆC propoſitio fractis numeris conuenire non poteſt. Nã ſi vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur viciſſim æque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & ſecundus integer quartum fractum; [a] *ſed ſolum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam ſecundus ad quartum.* — a 15. defin.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

17.

SI duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

E.
A . . .   B . . . .
D .... C ....

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipſum B, multiplicans faciat C; [b] erit C, ex B, toties compoſitus, quot ſunt in A, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. [a] Viciſsim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rurſus eodem modo, quia B, multiplicans ipſum A, facit D; [b] erit D, ex A, toties compoſitus, quot ſunt in B, vnitates; atq; adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerũ C, æque. Aeque igitur numerus A, vtrumq; numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter ſe æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo ſeſe multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 15. defin.

a 15. ſeptimi.
b 15. defin.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propoſitio ita demonſtranda eſt. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque eſt D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propoſ. 14. ac proinde æquales inter ſe erunt C, & D. Quod erat oſtendendum.

E.

$A,\ \frac{2}{3}.\qquad B,\ 4\frac{5}{7}.$

$D,\ 3\frac{1}{7}.\qquad C,\ 3\frac{1}{7}.$

POTEST hæc eadem propoſitio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipſum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, ſi B, ipſum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipſum B, faciat C, oſtendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, ſi numerus B, ipſum A, multiplicet, [c] *etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur.*

E.
A . . .   B . . . .
C ....

c 15. defin.

Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipſum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipſum B.

QVOD ſi numeri A, & B, ſint fracti ambo, vel vnus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.

E .
A ...   B ....
C ....

18. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compoſitus toties, quoties vnitas F, eſt in A: ſimiliterque toties E, compoſitus erit ex C, quoties eadem vnitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æque metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod oſtendendum erat.

F .
A . . .
B . . C . . . .
D...... E ....

[a] 15. defin.

[b] 20. defin.

[c] 13. ſeptimi.

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem oſtendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propoſ. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico eſſe vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [a] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipſos A, & B, facit D, & E; [b] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . B . . . . . .
C . . .
D .... E ....

[a] 16. ſeptimi.

[b] 17. ſeptimi.

SCHOLIVM.

LIQVIDO conſtat, eandem hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari, ſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propoſitionem, & præcedentem, ad quotcunq; numeros cum Campano accommodabimus, ſiue numeri omnes ſint integri, ſiue non; hac ratione.

SI numerus qnotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eaſdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc eſt, eſſe, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nã cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; [a] erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E ...... F .... G ....

[a] 17. vel 18. ſeptimi.

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C.

in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc eſt, vt A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propoſ. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. ſcripſimus.

A . . .
B . .
C . . . . .
D . . . .
E . . . .
F . . . .
G . . . .

[a] 17. ſeptimi.

[b] 18 ſeptimi.

SED iam ſit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipſi F, producto ex B, ſecundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales eſſe, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipſi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rurſus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædẽ ſint proportioni G, ad F, eædem inter ſe erunt, per lemma propoſ. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 17. ſeptimi.

[d] 18. ſeptimi.

SCHOLIVM.

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſ. locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiã ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

I T A enim oſtenſum eſt numerum E, qui ſit ex A, antecedente in D, conſequentem, æqualem eſſe numero F, qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.

S E D & ſequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propoſ. 19. demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundũ, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

S I T primum maior proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus; ſiue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propoſ. 19. lib. 9. oſtendemus ſi numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quàm E, ad B: ac proinde A, maior erit, quã E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.

A .... E ......
B ....
C ....
D ......

a 19. ſeptimi.

F I A T deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (ſiue E, numerus ſit integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

b 19. ſeptimi.

QVOD

QVOD ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam oſtendi poteſt. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quàm C, ad D: hoc eſt, maior eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, ſiue ex B, in C, quàm ex D, ſecundo in A, tertium, ſiue ex A, in D, vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quàm ex B, in C. quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quàm ex B, in C; hoc eſt, maior ex B, in C, ſiue ex C, in B, quàm ex A, in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum, vt iam eſt demonſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

A ..... E ......
B ....
C ...
D ..

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui a medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, erit vt

B, ad C,

B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.

A.........
B......D......
C....

[a] 19. ſeptimi.

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 19. ſeptimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundũ, quam ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſ. liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt

A	*A* ....
B ...... *D*	*B* ...... *D* ......
C	*C* ....

habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appoſitis exemplis apparet, etiamſi numeri ſint fracti, vel partim fracti, partim integri.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt ſit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, æque metiri ipſos E, F; maiorem quidem AB, ipſum maiorem E, at minorem CD, ipſum minorem F: hoc eſt, antecedentem, ipſum antecedentem, & conſequentem, ipſum conſequentem. Cum enim ſit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit viciſsim, vt AB, ad E, ita CD, ad F; Atque adeo cum AB, CD, minores ſint, quam E, F; [b] erit AB, ipſius E, & CD, ipſius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuiſis namque, ſi fieri poteſt, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG, ipſius E, & CH, ipſius F, eadem pars. [c] Erit ergo, vt AG, ad E, ita CH, ad F; [d] & viciſsim, vt AG, ad CH, ita E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem habebunt proportionem, quam AB, CD. Quod eſt abſurdum; cum AB, CD, in ſua proportione ponantur minimi. Nõ ergo AB, ipſius E, & CD, ipſius F, eædem partes ſunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB, ipſum E, & CD,

A...G..B
C..H.D
E..........
F......

[a] 13. ſeptimi.
[b] 20. defin.
[c] 20. defin.
[d] 13. ſeptimi.

ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq́; duos eſſe in ſua proportione minimos. Hoc enim poſito, oſtendetur eodem modo, primum metiri ſecundum; & ſecundum, tertium, vt in hoc appoſito exemplo apparet, vbi tertius numerus ſecundo æqualis eſt. Quamuis autem dari non poſſint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in ſua proportione ſint minimi, niſi primus ſit vnitas; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq́; duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

A ----- G --- B
C ..... H ..... D
E ......
F ....

PARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit

A ... K ... B   C .. L . D   E .... M .... F
G ....   H ......   I ....

proportio AB, ad CD, quæ CD, ad EF, ſiue non; ita vt non poſſint reperiri alij numeri ipſis AB, CD, EF, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, vt AB, ad CD; & ſecundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis AB, CD; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt AB, ad CD; & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, metiri æque. Cum enim ſit vt AB, ad CD, ita G, ad H; [a] erit viciſſim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum ſit vt CD, ad EF, ita H, ad I; [b] erit quoque viciſſim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. [c] Quare AB, ipſius G, & CD, ipſius H, & EF, ipſius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF: atque adeo AK, ipſius G, & CL, ipſius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt AK, ad G, ita CL, ad H; [e] & viciſſim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL, ad EM, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod eſt abſurdum, cum hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, æque metietur. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionũ, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C, Dico A, B, C, ipſos D, E, F, æque

A ..   B .....   C ...
D ..... E .... F ......

[a] 13. ſeptimi.
[b] 13. ſeptimi.
[c] 20. defin.
[d] 20. defin.
[e] 13. ſeptimi.

A.. B..... C...
D.... E.......... F.....

æque metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipſos D, E; eademque ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, æque metiatur, ac B, ipſum E; metientur æque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

CÆTERVM hæc propoſitio cum ſuo ſcholiò nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus alijs propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Eæ enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligendæ. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Aliæ autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod ſatis eſt ſemel hoc loco monuiſſe.

19. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim ſit vt A, ad B, ita E, ad F;

[a] erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum ſit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, ęqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, ſecundo in D, tertium, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

A............. H...
B... D....
C...... E.........
G........ F..

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc eſſe, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione ſumuntur, eſtque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, erit rurſus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor, ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales; qui bini ſumantur, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur propoſitio in numeris fractis, vt conſtat.

QVONIAM verò Euclides ex illis ſex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonſtrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris oſtendit, nimirum eum, qui a permutata proportione ſumitur, propoſ. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propoſ. 14. & 22. huius lib. non alienum a noſtro inſtituto erit, breuiter reliquos quatuor modos oſtendere in numeris, & alia quædam quinti libri ſequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.

[a] *19. ſeptimi.*

[b] *19. ſeptimi.*

[c] *19. ſeptimi.*

I.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et inuerſa ratione, ſiue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, ſiue inuerſa ratione, eſſe vt B, ad A, ita D, ad C. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D, [a] *erit viciſſim A, ad C, vt B, ad D. Rurſus quia eſt B, ad D, vt A, ad C,* [b] *erit viciſſim B, ad A, vt D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

A...... C...
B.... D..

[a] 13. ſeptimi.
[b] 13. ſeptimi.

II.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diuiſi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo eſſe, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim ſit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] *erit viciſſim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE,* [d] *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc eſt, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* [e] *Viciſſim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.*

A...... C... B
D.... F.. E

[c] 13. ſeptimi.
[d] 11. ſeptimi.
[e] 13. ſeptimi.

EADEM ratione demonſtrabimus Diuiſionem rationis conuerſam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuiſionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuiſionem rationis contrariam, eſſe quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim eſt, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.

III.

SI diuiſi numeri proportionales ſint: Hi quoque compoſiti proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo eſſe, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim ſit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [a] *erit viciſſim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF;* [b] *Ac proinde AB, BC, ſimul ad DE, EF, ſimul, vt BC, ad EF:* [c] *Et viciſſim AB, BC, ſimul, hoc eſt, totus AC, ad BC, vt DE, EF, ſimul, hoc eſt, totus DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.*

A...... B... C
D.... E.. F

[a] 13. ſeptimi. ſepti-
[b] 12. mi.
[c] 13. ſeptimi.

SIMILITER Compoſitio rationis conuerſa, & contraria oſtendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim eſt, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit rurſus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis contrariam eſſe quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

IIII.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.

SIT

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuerſionem rationis eſſe quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit viciſſim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* [b] *Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* [c] *Viciſſim igitur, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.*

[a] 13. ſeptimi.
[b] 11. ſeptimi.
[c] 13. ſeptimi.

A ...... C ... B
D .... F .. E

RVRSVS ex his facile demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, ſecundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, ſecundum, ita EH, ſextus ad F, quartum. Dico ita eſſe AG, compoſitum ex primo & quinto, ad C, ſecundum, vt eſt DH, compoſitus ex tertio & ſexto, ad F, quartum. Cum enim ſit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad FH. Quoniam igitur eſt vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rurſus ſit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod eſt propoſitum.

A ...... B .. G | *D .... E ... H*
C .... | *F ......*

EODEM modo & hoc Theorema oſtendemus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquũ GB, eſſe ad C, vt eſt reliquus HE, ad F. Cũ enim ſit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rurſus ſit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex æqualitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod eſt propoſitum.

A ...... G .. B   D .... H ... E
C ....   F ......

ITEM & hoc demonſtrabimus.

VII.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.

SIT vt primus A, ad ſecundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintũ CG, ita tertius D, ad ſextum FH. Dico ita eſſe A, primum ad BG, compoſitũ ex *ſecundo & quinto, vt eſt D, tertius ad EH, compoſitum ex quarto & ſexto. Cum enim ſit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur eſt vt BC, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH; & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo eſt, vt A, ad CG, ita D, ad FH; & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex æqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod eſt propoſitum.*

A . . . . . .   D . . . .
B . . . . C . . G   E . . . . . . F . . . . H

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebũt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K: Hoc eſt, ſit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe FI, habet ad K. Cum enim ſit, vt AB, primus ad E, ſecundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, ſecundum, ita GH, ſextus ad K, quartum; erit quoque vt AC, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FH, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt AC, primus ad E, ſecundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, ſecundum, ita HI, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FI, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, ſi plures fuerint.

A . . . . B . . . . . . C . . . . D | F . . G . . . H I
E . . . . | K . . . . .

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc eſt, ſit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad FI. Cum enim ſit, vt E, primus ad AB, ſecundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, ſextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad AC, ſecundum, ita K, tertius ad FH, quartum; Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM vero, his demonſtratis, oſtendentur nouem vltimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuere; ſi pro magnitudinibus intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur ijdem modi hoc lib. demonſtrati; Vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eædemq́; prorſus demonſtrationes adhibeantur.

21.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quã ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æque; atque adeo ſecundum eundem numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; [b] metietur & viciſsim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; [c] metietur quoque viciſsim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri, minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

A .... B ....
C ------ D ---
E ----

a 21. ſept.
b 15. ſept.
c 15. ſept.

22.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cũ ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi mẽſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem menſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At vero ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties cõpoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [a] fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [b] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cum D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A .... B .....
C-----
D----- E-----

a 9. pron.
b 18. ſept.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarũ proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari nõ poſſint, quamuis proportio

A ...... B .... C ....
D ---- E ------ F ---
G -----

duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis; nimirum D, E, F; minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æque per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus; atque adeo ſecundum vnum eundem numerum, qui ſit G; ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æque metitur; [a] metietur quoque viciſſim æque vnitas numerum D; & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æque, atque vnitas ipſos E, F; Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionū A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt. a 15. ſept.

IAM vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties, quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F; fit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

24.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter ſe primi A, & B; & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C; metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D.

A .... B .....
C .... D----

Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipſum A; [a] metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cum habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. a 11. pron.

25.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundē primus erit.

A .... B ...
C ....
D ....
E ---- F ----

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi; ſit eorum communis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; [c] & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idē D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; [d] erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; [e] erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum ſint inter ſe primi, [f] in ſua proportione minimi erunt.

b 9. pron.
c 6. ſept.
d 19. ſept.
e 25. ſept.
f 13. ſept.

[a] 21. ſept. erunt. [a] Aeque igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habētes, nimirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiã primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

26.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquũ primus erit.

SINT inter ſe primi A, & B, gignaturque C, ex A, in ſe ipſum. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Sumpto enim D, æquali ipſi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi ſunt, [b] erit numerus ex A, in D, hoc eſt, ex A, in ſe genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte oſtendemus, numerum ex B, in ſe genitum, ad A, primum eſſe. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.... B.......
C................
[b] 26. ſept. D....

27.

THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumq; C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter ſe primos eſſe. Cum enim vterque A, & B, primus ſit

ad C; [a] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad eundem C, primus. Rurſus cum vterque A, & B, ad D, ſit primus, erit eodem modo E, ipſis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus eſt ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat oſtendendum. [a] 26. ſept. [b] 26. ſept.

A..... B...
E................
C... D..
F........

28.

THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt: Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque eſſe inter ſe primos. Cũ enim A, B, ſint inter ſe primi, [c] erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter ſe erunt. [c] 27. ſept.

A...	B..
C..........	D....
E...........................	F.......
G, 81.	H, 16.
I, 243.	K, 32.

RVRSVS

[a] 27. ſept. RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, [a] erit
& C, factus ex A, in ſe, ad B; & D, genitus ex B, in ſe, ad
A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D, primus. Vterque
[b] 28. ſept. igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [b] Ac proinde
E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in
D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H;
cum A, & C, primi ſint
[c] 26. ſept. ad B, [c] erit quoque E, ex
ipſis genitus, ad B; primus: Eademque ratione
& F, ad A, primus erit.
Quia igitur vterque A,
E, ad vtrumque B, F, pri-
[d] 28. ſept. mus eſt; [d] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B,
in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eo-
[e] 26. ſept. dem modo cum A, & E, primi ſint ad B, [e] erit & G, ex ip-
[f] 28. ſept. ſis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A; [f] Quare &
I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B; in H, primus
erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, ſit primus. Si
duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod
oſtendendum erat.

A . . .   B . .
C . . . .   D . . .
E . . . . F . . . .
G, 81.   H, 16.
I, 243.   K, 32.

29.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi AB, BC. Dico & vtrumque ſimul AC, primũ eſſe & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur D, metitur
[g] 12. pron. totum AC, & ablatum AB; [g] metietur quoque reliquum BC. Non igitur primi inter ſe ſunt AB, BC, cũ eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, oſtendemus eundem eſſe primum.

A . . . . B C
D -----

SED iam vterque AB, BC, ſimul, primus ſit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB, BC, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D,
[a] 10. pron. metitur AB, & BC; [a] metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compoſitum; Ac proinde AC, AB, non ſunt inter ſe primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Sunt igitur AB, BC, inter ſe primi. Eodemque argumento oſtendemus AB, BC, inter ſe primos eſſe, ſi AC, ad BC, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad unum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim AC, ad AB, primus eſt, erunt AB, BC, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & AC, ad BC, primus erit, per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. 32.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos,

primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos, præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A..... B........
C---

33.

THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciãt C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem vnũ ipſorum A, & B, ſi non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur vero ipſum C, toties, quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B Quia igitur numerus genitus ex D primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, ſecũdum, ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia vero primus D, ad A, primus eſt, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A; in ſua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſe ſe

A.... B......
C.................
D... E.......

[a] 19. ſept.
[b] 31. ſept.
[c] 23. ſept.
[d] 21. ſept.

mutuo

mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad unum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoque ad vnum ipſorũ A, B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterque A, & B, ad D, primus. [a] Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur vel metiri ipſum C, vel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad vtrumque.

A... B....
C..........
D........

[a] 26. ſept.

30.

PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerũ primũ eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si vero cõpoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel cõpoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; [b] metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus.

[b] 11. pron.

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia vero numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes pręcedentes, [a] metietur quoque compoſitum A. Quod eſt propoſitum.

A ....

B ...., C ...

[a] 11. pron.

ALITER. Quia numerus A, compoſitus eſt; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico eſſe primum. Si enim B, non eſt primus, metiatur eum, ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B, & B, ipſum A; [b] metietur quoque C, minor ipſo B, ipſum A. Quod eſt abſurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo eſt numerus B. Omnem igitur compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonſtrandum.

A ....

B ... C --

[b] 11. pron.

31.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel eſſe primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur propoſitum: Si vero compoſitus; [c] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat oſtendendum.

A ....

[c] 33. ſept.

34.

PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdẽ proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Si vero non ſunt inter ſe primi, [a] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per E, F, G; [b] fit, vt D, ipſos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A ...... B .... C ....

D ..

E ... F .. G ....

H ---- I ---- K ----

L -----

[a] 3. ſept.

[b] 9. pron.

QVOD vero E, F, G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propoſ. 21. huius lib. oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [c] fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K. producat numeros A, B, C; [d] & viciſsim L, ipſos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [e] erit, vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipſos A, B, C, metiatur; non erit D, ma-

[c] 9. pron.

[d] 8. pron.

[e] 19. ſept.

D, maxima menſura communis numerorum A, B, C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, ſed ipſi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E, F, G, per quos D, maxima menſura numerorum A, B, C, ipſos A, B, C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque eſt in cæteris ratio.

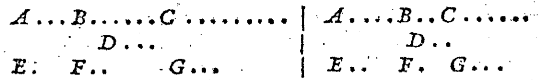
SCHOLIVM.

EX his facili uia comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continue proportionales. Vt ſi proponantur continue proportionales A, B, C, D, E,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis menſura eos metitur.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum



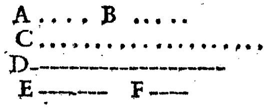
E, F, G, per hanc propoſ. inuentorum eſſe vnitatem; quando ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A, B, C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc inuentos E, F, G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36.

36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſeſeque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [a] metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, [b] tam ex A, in E, quam ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium; [c] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter ſe, [d] & ob id, in ſua proportione minimi) [e] æque metientur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [f] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B,



[a] 7. pron.

[b] 9. pron.

[c] 19. ſept.

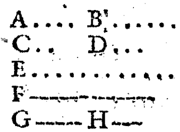
[d] 23. ſept.

[e] 21. ſept.

[f] 17. ſept.

metientur alium numerum minorem ipſo C; atq; adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter
[a] 35. ſept. ſe. [a] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A,
[b] 19. ſept. ad B, vt C, ad D. Quo poſito, [b] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cũ tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus a C, ip-
[c] 7. pron. ſum E, producat; [c] metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod vero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H.
[d] 9. pron. Quo poſito, [d] fiet F, tam ex A, in G, quã ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, ſit & ex A, primo in G, quartum,
[e] 19. ſept. & ex B, ſecundo, in H, tertium; [e] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G;
[f] 21. ſept. [f] metientur ipſos H, & G, æque; nimirum C, ipſum H; & D, ipſum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E,
[g] 17. ſept. & F; [g] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B; metientur alium numerum ipſo E, minorem; atque adeo E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.



COROLLARIVM.

HINC fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur.

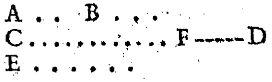
SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, ſitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum CD, metiri. Si enim E, ipſum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidã minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties poteſt, numerum, ſi fieri poteſt, FD, minorem ſe, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipſum E, metitur, & E, ipſum CF; [a] metietur quoque tam [a] 11. pron.
A, quam B, ipſum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [b] metientur & reliquum [b] 12. pron.
FD. Eſt autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur.



Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare E, ipſum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerũ quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

36.

PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerũ.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres
a 36. ſept. numeri A, B, C, metiantur. [a] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipſum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipſum D, metiuntur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt A, B, C, alium numerum E, ipſo D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo, cum A, & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem iidem
b 37. ſept. A, & B, metiuntur; [b] metietur quoque D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum.

A...B....C......
D............
E ----------

c 36. ſept. SED iam C, non metiatur ipſum D, inuentum, [c] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim cum metiantur, ita oſtendetur. Cũ A, & B, metiantur ipſum D, & D,
d 11. pron. ipſum E; [d] metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri

A..B...C....
D......
E.............
F--------

poteſt,

---

poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quo-
a 37. ſept. niam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; [a] metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipſum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo cum C, & D, metiantur ip-
b 37. ſept. ſum F; [b] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonſtrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum DE, ſitque F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum DE, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem DG, relinquatque numerum GE, ſe minorem.

A..B...C....
D.....................G----E
F............

Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur; & F, ipſum
c 11. pron. *DG; [c] metientur quoque A, B, C, eundem DG; Ac proinde,*
d 12. pron. *cum & totum DE, ponantur metiri; [d] metientur & reliquũ*

GE,

G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum D E.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

A . . . .
B . . . .   C . . .

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam a B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque metitur; [a] & viciſsim vnitas æque ipſum B, & C, ipſum A, metietur; atque adeo eadem pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 15. *ſept.*

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

A . . . .
B . . .   C . . . . .

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cum B, pars denominetur a C; ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque. [a] Viciſsim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 15. *ſept.*

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

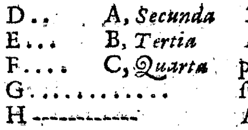
NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

D . .   A, *Secunda*
E . . .   B, *Tertia*
F . . . .   C, *Quarta*
G . . . .
H————————

SINT datę partes A, B, C; Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, ſiue qui ipſas denominent, D, E, F; [b] minimusq; quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cum D, E, F, ipſum G, metiantur, [c] habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod vero G, ſit minimus illas partes habens, perſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt,

[b] 38. *ſept.*

[c] 39. *ſept.*



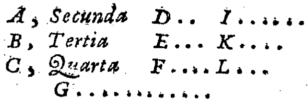
a 40. ſept.

H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [a] metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor ſit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, ſed ipſe G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum ſit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

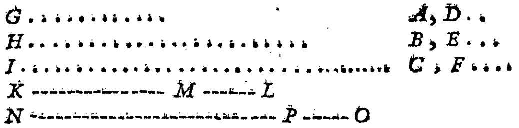
b 15. ſept.

QVOD ſi ſumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipſius G, denominatæ ſcilicet à D, E, F. Cum enim D, E, F, ipſum G, metiantur per I, K, L; metietur æque vnitas ipſos I, K, L, & numeri D, E, F, ipſum G. [b] Viciſſim ergo metietur quoque vnitas ipſos D, E, F, & numeri I, K, L, ipſum G; atque adeo vnitas ipſorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipſius G. Cum ergo vnitas ſit pars ipſorum D, E, F, ab ipſis denominata; erunt & I, K, L, ipſius G, partes denominatæ à D, E, F.



EX his autem ſequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Oſtenſum enim eſt, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum eſſe, qui habeat partes A, B, C, cuiuſmodi ſunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, ſi inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur ſecundus numerus poſt minimum, tertius, quartus, &c. eaſdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F; ſit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerum, qui eaſdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas ſcilicet à D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ipſius G; [a] metientur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & reliquos multiplices ipſius G. [b] Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.



a 11. pron.
b 39. ſept.
c 40. ſept.
d 12. pron.

QVOD autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus eas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius K L, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipſo G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; [c] metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum KM, ſibi æqualem. [d] Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt huiuſmodi partes habens.

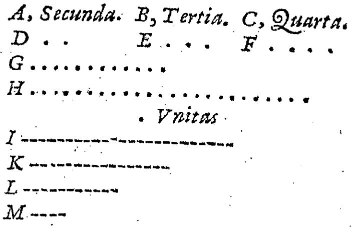
NON

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet NO, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex NO, relinquatur PO, [a] 40. ſept. *minor ipſo G. Quia igitur NO, partes habet A, B, C,* [a] *metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem NO, per coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum NP, ablatum ipſi H, duplo æqualem.* [b] 12. pron. [b] *Igitur & reliquum PO, idem G, metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.*

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendusq; ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatq; G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur.



Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars

eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine cõtinens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ita vt K, ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] *Atq; adeo* [a] 15. defin. *ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq; cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I;* [b] *erit, vt H, ad I, ita G, ad K.* [b] 17. ſept. *Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propoſ. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autẽ H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.*

H.	G.	F.	Vnitas.
I.	K.	L.	M.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hæc partem a 3. denominatam; & hæc aliam a 4. & hæc aliam à 5. & hæc denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

QVOD

QVOD ſi numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant; duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

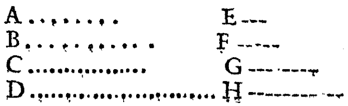
EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. I. PROPOS. I.

I.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habẽtium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunq; numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, [a] erit, ex æquali-



[a] 14. ſept.

[a] 23. ſept. [b] 21. ſept.

æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H; [a] Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur. [b] Igitur tam A, ipſum E, quàm D, ipſum H, æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

P E R S P I C V V M autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint, ſiue A, B, C, D, ſint continue proportionales, vt vult Euclides, ſiue non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diuerſæ ſunt, quemadmodum in ſuperiori eadem ſemper proportio reperitur.

A . . . . *E* - - -
B . . . . *F* - - - - -
C . . . . *G* - - - - - -
D . . . . *H* - - - - - - - - -

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſerit quiſpiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, ſeipſum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C, D, E, eſſe tres minimos in proportione A, ad B; hoc eſt, eſſe vt C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales ſint in data proportione A, ad B, ſic oſtendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; [c] erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rurſus cum ex B, in A, & B, fiant
D, &

[c] 17. ſept.

[a] 17. ſept.

D, & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales ſunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione ſint minimi, ita demonſtrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati ſunt ex A, & B, in ſe ipſos; [b] ſunt autem A, & B, inter ſe primi, quòd minimi ſint in ſua proportione; [c] Erunt & C, E, extremi, inter ſe primi. [d] Quare C, D, E, minimi ſunt in ratione A, ad B.

A . . B . . .
C . . . . D . . . . . E . . . .
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

[b] 24. ſept. [c] 29. ſept. [d] 1. octaui.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos eſſe in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales ſint in ratione A, ad B, ita demonſtrabimus. Quoniam A, multiplicans ipſos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, numeri F, G, H, eaſdem proportiones, quas C, D, E, hoc eſt, quam habet A, ad B. Rurſus quia A, & B, ipſum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; [e] erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi ſint, ita perſpicuum fiet. [f] Quoniam A, & B, minimi in ſua proportione, ſunt inter ſe primi; factique ſunt C, & E, ex A, & B, in ſe ipſos; Item procreati ſunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E; [g] erunt & F, I, extremi, inter ſe primi. [h] Quare F, G, H, I, in ſua proportione, quæ eſt A, ad B, minimi ſunt.

[e] 18. ſept. [f] 24. ſept. [g] 29. ſept. [h] 1. octaui.

NON aliter, ſi ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c.
Quod faciendum
erat.

SCHO-

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, [a] numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipſos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propoſ. 18. huius lib. demonſtrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipſos G, H. I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi ſint, oſtendetur, vt prius.

[a] 18. ſept.

NON aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, ſiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Itaque ſiue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A.. B..
C.... D...... E.........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint continue proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione

trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verū quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt ijs, qui per hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hāc propoſ. Si vero dati, maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi. quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales: ſumptisq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atq; ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eadēq; ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erūt. Eadēq; ratio eſt de quatuor, aut pluribus.

A--- B------C-------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

Quòd ſi A, dicatur minor, quàm F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt, quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si vero A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non ſunt. quod eſt contra hypotheſim. Cum ergo A, minor non ſit, aut maior, quàm F; æqualis omnino erit; ideoq; vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitũ.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonſtratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones a numero A, horum vero a B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium ſint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniẽdorum, qui ſi per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis eſt ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicãt, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderantur octo numeri minimi in proportione ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis ſecundæ, ſeu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione ſeſquialtera, hoc eſt, a 2. Quod ſi optentur quinque numeri minimi in proportione ſeſquiquin-

ta,ſumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. eſt primus quinque numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet; 625.750.900.1080.1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non poſſunt inueniri (quod mirum videri poſſit) plures numeri continue proportionales, quam propoſiti ſunt. Neque enim poſt 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neq; in priori exemplo poſt 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandẽ cum eis rationem habentium; Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

A,8. B,12. C,18. D,27.
E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

SINT numeri A,B,C,D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A,& D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E,F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G,H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K,L,M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K,L, M,N, æqualis ſit multitudini A, B,C, D. Quoniam igitur A,B,C,D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis equales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometricè demon-

demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2. propoſ. præcedentis K,& N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A,& D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inueniri non poſſent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc Theorema primi eſt conuerſum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſunt in ſua proportione, vt conſtat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, velut hic demonſtratum eſt. At vero primum theorema, prout ſpectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, vt ex ſcholio propoſ. 1. huius lib. liquet; Tamen non ſemper e contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, vt manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6.10.13.18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. 4.

RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A,ad B,& C,ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus.[a] Inuento numero E,minimo,quem metiantur B,& C,ſecundus & tertius;quoties B,ipſum E,metitur, toties A,metiatur ipſum F;& quoties C, eundem E, toties ipſum G,metiatur D.Dico F, E, G, minimos eſſe in proportionibus datis.Quod enim deinceps datas proportiones habeant,ita oſtēmus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipſos F, & E, hoc eſt, per eundem numerum; metiantur per H. Quo poſito, [b] A, & B, multiplicantes ipſum H, producent F,& E. [c] Quare erit vt A,ad B, ita F, ad E. Eadem ratione,cum C,& D,æque metiantur ipſos E, & G; erit vt C,ad D,ita E,ad G.Igitur F,E, G, deinceps proportionales ſunt in rationibus A,ad B,& C,ad D.Quod autem minimi ſint,ſic manifeſtum erit. Si non ſunt minimi,erunt aliqui illis minores, ſingulis ſinguli,in eiſdem rationibus:ſint,ſi fieri poteſt,I, K, L. Quia igitur A, & B,minimi ſunt in ſua proportione; [d] ipſi ęque metientur I,& K,in eadem proportione exiſtentes, nimirum B, ipſum K, conſequens conſequentem. Eademque ratione C,& D,æque metientur K, & L, nimirum C, ipſum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipſum K,metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus,quem B,& C,metiuntur,minorem maior.Quod eſt abſurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis F,E,G,in rationibus A,ad B, & C, ad D; Ac propterea ipſi F,E,G,minimi ſunt in datis rationibus.

A, 6. B, 5. C, 4 D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I—— K —— L ——

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A,ad B;C,ad D;& E,ad F; inueniendique ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus.[f] Inuento rurſum numero G,minimo,quem metiantur B,ſecundus,& C,tertius;quoties B, ipſum G, metitur,toties metiatur A,ipſum H; & quoties C, ipſum G, toties D,ipſum I,metiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I,metitur,aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipſum I,metitur,toties F, metiatur ipſum K.Dico H,G,I,K,minimos eſſe in datis rationibus.Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales,conſtat.Cum enim A, & B, ipſos H, & G, æque metiantur;erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H,ad G.Eadem ratione erit,vt C, ad D,ita G,ad I:& vt E,ad F,ita I,ad K;quòd tam C,& D,ipſos G,& I,quā E,& F,ipſos I,& K,metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi,ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis,ſinguli ſingulis,ſi fieri poteſt L,M,N,O.Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; [a] ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem,nimirum B, conſequens conſequentem M.Eodem modo C,& D,æque metientur M,& N, nimirum C,antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metiantur; [b] metietur eundem M,& numerus G,minimus,quem B,& C,metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H,G,I,K; Ac proinde H,G,I,K, in datis rationibus minimi ſunt.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,5. F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.
L—— M —— N —— O ——

SED iam E, non metiatur ipſum I. [c] Inuento ergo numero K,minimo,quem E, & I, metiantur; quoties I, ipſum K, metitur, toties quoque G, ipſum L;& H, ipſum M, metiatur:& quoties E,metitur K,toties metiatur F, ipſum N.Dico M,L, K,N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H,G,I, ipſos M, L, K, æque metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H,ad G,ita M,ad L;& vt G,ad I, ita L, ad K:Eſt autem eadem ratione,vt H,ad G, ita A, ad B; & vt G,ad I,ita C,ad D;quòd & A,B,ipſos H, G; & C, D,ipſos G,I,metiantur æque.Igitur vt A,ad B,ita M,ad L;& vt C,ad D,ita L,ad K. Atqui vt E,ad F,ita quoque

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O—— P —— Q —— R ——

a 36. ſept.
b 9. pron.
c 18. ſept.
d 21. ſept.
e 37. ſept.
3 36. ſept.

a 21. ſept.
b 37. ſept.
c 36. ſept.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O----- P ---- Q---- R -----

eſt K, ad N, cum E, F, æque ipſos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si namque non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt; [a] ipſi æque metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes, nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atq; adeo cum B, & C, ipſum P, metiantur; [b] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia vero oſtenſum eſt, eſſe vt G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, cum metiatur G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [c] quod E, F, in ſua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiuſdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipſum Q; [d] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; proptereaque ipſi M, L, K, N, minimi ſunt.

[a] 21. ſept.
[b] 37. ſept.
[c] 21. ſept.
[d] 37. ſept.

QVOD ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipſum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipſum N, non metiatur; [a] ſumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipſum O, metitur, toties metiatur K, ipſum P; & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties vero S, eundẽ O, metitur, toties T, ipſum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,3. T,2.
M,48. L,50. K,30. N.105. O,70.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105.
R,144. Q 120. P,90. O,315. V,70.

[a] 36. ſept.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nõ minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorũ numerorũ deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtũ eſt.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius ſit & antecedens, & cõſequens, licet proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, ſi ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eiſdem rationibus deinceps proportionales, vt conſtat ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

SINT

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; poſterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propoſ. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, ſunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [b] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24. B, 48.
G, 18.
C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

EODEM argumento oſtendemus, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, ſi latera E, & F, loca inter ſe permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; [c] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rurſum A, G, B, deinceps proportionales ſunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [d] Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Quod demonſtrandum erat.

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F. 16. E, 3.

[a] 17. ſept.
[b] 27. defin.
[c] 17. ſept.
[d] 27. defin.

SCHOLIVM.

ESSET hoc loco diſputandum de compoſitione proportionum, quemadmodum in expoſitione defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in ſcholio propoſ. 23. lib. 6. facturos nos hoc loco recepimus.

recepimus. Sed quia res hæc accuratè explicari non poteſt ſine fractorum numerorum operationibus, quas ad finem lib. 9. demonſtrabimus; differendam eam eundem in locum cenſuimus. Hoc Lectorem commonere volui, vt ſciat, vbi res hæc pertractetur à nobis, & cur eam hic, vt polliciti ſumus, non exponamus.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neq; alius quiſquam vllum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proxime inſequẽtem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipſum B, non metiatur; neque B, ipſum C, neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quod vero nec alius quiſquam illorum vllum metiatur, ſic demonſtrabimus. [a] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A. ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero eſt vt A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipſum G, metietur, cum vnitas omnem numerum metiatur. [b] Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; nõ metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium a ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtra-

A, 16. B. 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

[a] 2. octaui.
[b] 3. octaui.

monſtrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quod enim nullus proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neque D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neq; alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur e contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundum D, non metitur; [a] neq; alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare e contrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

[a] 6. octaui.

SED & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, perſpicuum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum B; & B, ipſum C; & C, ipſum D; & D, ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D; [a] metietur quoque B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur; [b] metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

[a] 11. pron.
[b] 11. pron.

SED iam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: ſit autem A, ipſius B, multiplex; erit & B, ipſius C; & C, ipſius D; & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime inſequentis multiplex eſt. Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex; metietur e contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, vt demonſtratum eſt; Ac propterea e contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

CONVERTEMVS etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema, quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum a ſecundo metiatur; neque primus ſecundum metietur. Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius a ſecundo ſit multiplex: neque primus ſecundi multiplex erit.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quiſque nullum à ſecundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, ſecũdum. Si enim A, primus ſecundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunque alius quemlibet ſequentium. Quod eſt abſurdum, cum neque primus, neque alius quiſquam vllum à ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, ipſum B, metietur.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

IAM vero A, primus, vel alius quiſquam nullius a ſecundo B, ſit multiplex. Dico neq; A, primum multiplicem eſſe B, ſecundi. Si namque A, primus multiplex eſſe dicatur B, ſecundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet ſequentium, ex iis, quæ ſecundo theoremate huius ſcholij demonſtrauimus. Quod eſt abſurdum. Neque enim primus, neque alius quiſquam vllius a ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A, ipſius B, multiplex erit.

7\.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur ſecundum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A,

primus

primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: [a] neq; alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atque idcirco, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] *6. octaui.*

SCHOLIVM.

VT theorema, quod ſecundo loco in ſcholio præcedentis propoſ. demonſtrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propoſ. hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquã cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neque alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſ. 6, & 1. theoremate ſcholij præcedentis.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

8\.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C,D; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G,H,I,K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad B, atq; adeo vt E, ad F, ita G, ad K. [a] Quare cum G, & K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorũ numerorum; [b] ac propterea in ſua proportione minimi; [c] æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur; toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G,H,I,K, numeros E, L, M, F; æque metiantur, ſinguli ſingulos. [d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F, producũt; in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G,H,I,K, ſunt continue proportionales. Igitur & E,L,M,F, continue proportionales ſunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A,24.	C,36.	D,54.	B.81.
G,8.	H,12.	I,18.	K,27.
E,32.	L,48.	M,72.	F,108.
A,40.	C,20.	D,10.	B,5.
G, 8.	H,4.	I, 2.	K,1.
E, 8.	L, 4.	M,2.	F,1.
A,27.	C,9.	D,3.	B,1.
G,27.	H,9.	I, 3.	K,1.
E,108.	L,36.	M,12.	F,4.

a 3. octaui.
b 23. ſept.
c 21. ſept.
d 9. pron.

SCHOLIVM.

NON ſolum ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F, quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B.

Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hæc propoſitio vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas, exiſtentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalẽ. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; ſuperparticularis vero inter numeros ſola vnitate differentes; ſuperbipartiens denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neque inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros ſola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interijcitur ſolum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri AB, CD, (ſiue CD, vnitas ſit, & AB, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus EF, minor vnitate quam AB, maior vero quam CD, vnitate quoque. Dico EF, non eſſe medium proportionalẽ inter AB, CD. Si enim dicatur eſſe AB, ad EF, vt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipſi EF, æquali, vt reliqua ſit vnitas GB; & ex EF, numero EH, ipſi CD, æquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum, ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipſis EF, CD, æquales ſint, ex conſtructione. [a] Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum

A..G.B	A......G.B
E.H.F	E.....H.F
C.D	C.....D

HF, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo EF, medius proportionalis eſt inter AB, & CD.

ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt. quod fieri non poſſe, proxime demonſtrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt ſit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniã vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ſenarium AE. Igitur D, metitur totum AE, & ablatum AB: [a] 11. pron. [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatẽ BE. Quod eſt abſurdum.

A . . . . . B . E
D . .   D . . .
C .

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergo; vt prius, D, metiri quinariũ AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE: [b] 11. pron. [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem EB, metietur. Quod eſt abſurdum.

A . . . . E . B
D . . . .
C .

EX quibus fit, neque illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; neque illud, quod in ſeſquioctaua poꝛportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu vulgo Secunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuiſa eſſe dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo oſtenſum ſit, inter numeros duplæ proportionis, & ſuperparticularis, qualis eſt ſeſquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perſpicuum eſt, Diapaſon, & Tonum, bifariam ſecari non poſſe. Vnde Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapenten, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc vero in ſeſquitertia conſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inæquales. Ita quoque Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, ſecari ſolet. Sed de his plura apud Muſicos reperies.

RVRSVM ex his demonſtrari poteſt, proportionem diametri cuiuſuis quadrati ad latus eiuſdem, numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus, quadratum diametri duplum ſit quadrati ex latere deſcripti; quadratorum vero proportio ſit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quòd inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam ſecet, vt oſtendimus; manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt, diametrum eſſe lateri incommenſurabilem. quæ de re plura ad 9. & vltimam propoſ. lib. 10. ſcribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

A,8. C,12. D,18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos
medij continue proportionales C, D. Dico totidem ca-
dere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec
non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. In-
uentis enim duobus numeris
E, & F, minimis in ratione
a 2.octaui. A, ad C; [a] ſumantur in eadē
proportionē tres minimi G,
H, I; & quatuor K, L, M, N,
& ſic deinceps, donec multi-
tudo aſſumptorum æqualis
ſit multitudini A, C, D, B.
b 1.octaui. Quoniam ergo A, B, extremi inter ſe primi ſunt; [b] erunt
A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem
& totidem K, L, M, N, ex conſtructione, in eadem pro-
portione minimi. Igitur K, L, M, N, ipſis A, C, D, B, æqua
les ſunt, ſinguli ſingulis, vt K, ipſi A; & N, ipſi B, ne mino
res minimis dentur. Quia vero, vt conſtat ex demonſtra-
tione propoſ. 2. huius lib. E, ſeipſum multiplicans produ
c 7. pron. xit G, multiplicans vero ipſum G, fecit K, [c] metietur E,
d 5. pron. ipſum G, per E; & G, ipſum K, per eundem E: [d] Metitur
autem & vnitas ipſum E, per E. Aeque igitur metietur
vnitas ipſum E, & E, ipſum G, & G, ipſum K; Ac propte-
rea eadem pars erit vnitas ipſius E, & E, ipſius G, & G,
e 20.defin. ipſius K. [e] Proportionales ergo ſunt deinceps, vnitas;
& numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifeſtum ſit ex
eadem demonſtratione propoſ. 2. huius lib. quòd F, ſe ip-
ſum multiplicans producat I, multiplicans vero ipſum
f 7. pron. I, faciat N; [f] metietur F, ipſum I, per F, & I, ipſum N, per
g 5. pron. eundem F: [g] Metitur autem & vnitas ipſum F, per F.
Aeque igitur metietur vnitas ipſum F, & F, ipſum I, & I,
ipſum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius F,
h 20.defin. & F, ipſius I, & I, ipſius N. [h] Proportionales ergo ſunt cō
tinue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam mul
titudo E, G, K, quam F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis ſit
multi-

multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perſpicuũ eſt ex propoſ. 2. huius lib. Nam duo E, F, ſunt ſecundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, ſeu A, ſibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, ſiue B, ſibi æqualē, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM

PERSPICVVM autem eſt, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc eſt, quas habet E, & F, numeri ad vnitatem; id quod in ſcholio propoſ. 2. huius lib. quoque aſſeruimus.

CONSTAT etiam ex demonſtratione hac, ſi numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit; & rurſum multiplicet productum; & ſic deinceps: omnes productos eſſe continue proportionales ab vnitate. Oſtenſum enim eſt & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione ſunt procreati, ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. continue eſſe proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A, B, & vnitatem, quotcunq; numeri medij continue proportionales; inter A, quidē & vnitatē, numeri C, D, E: At vero inter B, & vnitatē, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidē medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

Multiplicantes enim ſe mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rurſus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sũt inter vtrumque A, B, & vnitatē. Quoniam igitur eſt, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E; & E, ad A; æque metietur vnitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A: [a] Metitur autem vnitas ipſum C, per C. Igitur & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur. [b] Quare C, ſeipſum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, ſeipſum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rurſus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G; hoc eſt, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Poſtremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ a nobis ſunt demonſtrata ad propoſ. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc eſt, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [f] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca ſi inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 5. pron.
[b] 9. pron.
[c] 17. ſept.
[d] 17. ſept.
[e] 18. ſept.
[f] 18. ſept.

SCHOLIVM.

EX his conſtat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F.

PATET etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratum enim eſt, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales ſunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I.

SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum, continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem & vnita-

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

unitatem, numerus A; At inter F, & unitatem numerus E; [a] cadet quoq; inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo, per ſcholium huius propoſ. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & ſit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui ſint K, L; quot nimirum cadunt inter utrumque C, G, & vnitatem. Necnon inter D, H, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Eſt autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata eſt proportionis C, ad K; & eſt vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationẽ habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & ſic de cæteris.

[a] 10. octa.

HOC idem demonſtrabimus, ſi fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium; & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rurſum, proportionis B, ad F, eſſe duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in ſe fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Poſtremo ex F, quoq; in ſe fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab vnitate, vt cõſtat ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata eſt rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius ſcholij: Eſt autem, ex defin. eiuſdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate eſt ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiuſdem, ex defin. duplicata eſt ratio A, ad G. Quare cum ſit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata eſt rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius ſcholij; quòd tam B, N, quam F, Q, ſint ab vnitate cõtinuè proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdẽ argumẽtis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata eſt rationis B, ad A; quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. & eiuſdẽ triplicata eſt ratio D, ad A, ex defin. Igitur eſt D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo eſt A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata ſit proportionis A, ad F:

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

Proportio

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas H, 2.
C, 36. . G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius ſcholij, ꝓpterea quòd tam A, K, L, quam F, Q, R, cõtinuè proportionales ſunt ab vnitate, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eſt ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata eſt rationis B, ad F, ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, ſunt continuè proportionales ab vnitate ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata eſt eiuſdem rationis B, ad F. Non ſecus demonſtrabimus rationem E, ad I, eſſe quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM *omnino demonſtrabitur, ſi numeri vnius ordinis deſinant in vnitatem, vt ex hac ſubiecta figura eſt manifeſtum, in qua I, eſt vnitas.*

CÆTERVM *theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propoſ. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonſtratis efficiemus propoſitionem hanc 10. Euclidis magis vniuerſalem, hoc modo.*

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

A, 162. Q, 216. R, 288, S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

CADANT *inter vtrumque numerorum A, B, & aſſumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C; & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc eſt, D, ad G: Sed per theor. 2. huius ſcholij, ratio quoque E, ad H, duplicata eſt eiuſdem rationis D, ad G. Igitur eſt vt K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L;*[a] *cadet quoque vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, ſi in eadem proportione D, ad G; ſumantur quatuor minimi numeri, oſtendemus, inter F, & I, duos medios cadere, ſicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quinque numeri minimi.*

[a] 8. octaui.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

HOC *etiam verum eſt, ſi loco alterius numeri, nimirum B, vnitas aſſumatur, veluti perſpicuũ eſt in hac ſubiecta figura in qua numerꝰ B, vnitas eſt, caduntque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot ſcilicet inter A, & B, cadunt, &c.*

EX *his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero aſſumpto C, propinquiores.*

THEOR. 9. PROPOS. 11. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationē.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, eſſe duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans ſeipſum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati; & ipſum D, multiplicās fecit E, ex conſtructione; [a] erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rurſus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex conſtructione; & multiplicans ſeipſum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; [b] erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales ſunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem ſit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

[a] 17. ſept.

[b] 17. ſept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonſtratum eſt.

PARI ratione liquet, numerū medium proportionalem E, & vtrūlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, E, B, proportionales ſint oſtenſi in ratione C, ad D, hoc eſt, eſſe A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipſum E, antecedens antecedentem; quandoquidem eſt E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A. Igitur E, & A, menſuram communem habent C; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum E, conſequens conſequentem. Quare cum & latus D, metiatur ſuum quadratum B; habebunt E, & B, communem menſuram D; Ideoque compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A; poſteriorum vero E, B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

A, 9. E, 21. B. 49.
G, 3. D, 7.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et ꝓportionē A, ad B, cubi ad cubū, tripli-

A,27. H,36. I,48. B,64.
E,9. G,12. F,16.
C,3. D,4.

triplicatam eſſe proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, ſeipſum faciat E; & D, ſeipſum multiplicans faciat F; At C, & D, ſe mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes vero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, ſeipſum, & D, multiplicans fe-
[a] 17. ſept. cit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione,
[b] 17. ſept. cum D, multiplicans C, & ſeipſum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; proptereaque E, G, F, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D. Rurſus, quia ex defin. cubi, C, ipſum E, multiplicans fecit A; & ex
[c] 17. ſept. conſtructione multiplicans ipſum G, fecit H; [c] erit vt E, ad G, hoc eſt, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipſum G, multiplicans fecerit, ex conſtructione, numerum I; multiplicans vero ipſum F, ex defin. cubi, fecerit
[d] 17. ſept. cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F, hoc eſt, vt C, ad D, ita
[e] 18. ſept. I, ad B: [e] Eſt autem & H, ad I, vt C, ad D; quod C, & D, ipſum G, multiplicantes fecerunt ex conſtructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue ſunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus; cum ſit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HIC quoque manifeſtum eſt, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo conſtat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, H, I, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metictur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo & ipſum H, quòd H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atque adeo inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt, priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum vero trium H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.

A,27. H,36. I,48. E,64.
E,9. G,12. F,16.
C,3. D,4.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 12.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & rurſum multiplicãtes ipſos G, H, I, G,H,I, faciant K,L,M, & ita deinceps. Dico quoque D, E,F, & G,H,I, & K,L,M, continue eſſe proportionales. Multiplicantes enim A, & B, ſe mutuo faciant N; & B, C, ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F,

A, 2. B, 4. C, 8.
D,4. N,8. E,16. O,32. F, 64.
G,8. P,16. Q,32. H,64. R,128. S,256. I,512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y,512. Z,1024. a,2048. M,4096.

faciat R, S. Simili modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T,V,X; & B, multiplicans R,S,I, faciat Y,Z, a. Quoniam igitur A, multiplicans ſeipſum, & B, fecit D, & N; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicãs A, & ſeipſum, fecit N; & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D,N,E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; [b] erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit, vt B, ad C, ita O, ad F; proptereaq; & E, O, F, continue proportionales ſunt in ratione B, ad C, ſeu A, ad B. Quare cum D,N,E, in eadem ratione ſint continue proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F; atque adeo D,E,F, continue proportionales ſunt.

[a] 17. ſept.

[b] 17. ſept.

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; [c] erit quoque, vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E,O,F, fecit H,R,S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7. H,R,S, proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo, cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; [d] erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H,R,S,I, proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cũ G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales.

[c] 18. ſept.

[d] 18. ſept.

NON diſsimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum; &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco ꝓducti D,E,F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorũ A,B,C. Nam D, ad E, habet proportionẽ duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri ſecundo loco geniti G,H,I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionẽ totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A,B,C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeri G, H, I; & rurſum ex eiſdẽ in hos numeri K, L, M. Dico D,E,F; & G,H,I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales. Nã ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A,D,G,K, quam B,E,H,L; & D,F,I,M, continue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D,E,F, cõtinue ſunt ꝓportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodẽ modo oſtẽdemus G,H,I, eſſe proportionales cõtinue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K,L,M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

A,2. B,4. C,8.
D,4. E,16. F,64.
G,8. H,64. I,512.
K,16. L,256. M,4096.

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione datorum numerorum; ſecundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eãdem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etiamſi plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui ſe ipſos multiplicantes faciant E, F, G, H; poſtea vero multiplicantes ipſos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, ex demonſtratis, proportionales ſunt in ratione A, ad B: Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc eſt, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſe ipſos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in ſe ipſos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2. B, 4. C, 8. D. 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

PROBL. 12. PROPOS. 14. 13.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonſtratione propoſ. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; [a] metietur quoque A, primus ſecundum E. Quare cum ſit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

[a] *7. octaui.*

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt demonſtratum eſt propoſ. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, ſecundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. ſcholij propoſ. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, ſe ipſum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem ſe mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demõſtratione propoſ. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; [a] metietur quoque idem A, primus H, ſecundum. Cum ergo ſit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

[a] *7. octaui.*

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales ſunt in ratione G, ad D, vt oſtenſum eſt propoſ. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D; metietur & A, ipſum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propoſ. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaque ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

15.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Nõ metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; [a] metietur & quadratus A, quadratũ B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

[a] 14. octa.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 14. octa.

15.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; [a] metietur quoque A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

[a] 15. octa.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; [b] metietur etiam C, latus latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim nõ metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 15. octa.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

a 14. & 15. octaui.

NAM ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. [a] *Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

b 14. & 15. octaui.

A,36. B,9.
C,6. D,3.
A,64. B,8.
C,4. D,2.

QVOD ſi latus C, lateris D, multiplex ſit; metietur latus D, latus C. [b] *Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur; Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.*

c 16. & 17. octaui.

A,49. B,9.
C,7. D,3.
A,125. B,8.
C,5. D,2.

AT vero ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non ſit multiplex; non metietur B, ipſum A, quadratus quadratū, aut cubus cubum. [c] *Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.*

d 16. & 17. octaui.

SIMILITER ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex; non metietur D, latus latus C. [d] *Igitur nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

16.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri ſimiles A,B, & latera illius ſint C,D; huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C,D, ſe mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo ſe multiplicantes faciant B; ſitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E, hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; [b] erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A,12. G,18. B,27.
C,6. D,2. E,9. F,3.

a 17. ſept.

b 17. ſept.

QVIA vero, cum A, G, B, ſint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quā habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVIA oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, aſſumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentē, quòd ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cum ſit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes *antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoque erunt inter ſe compoſiti.*

EX *qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.*

18. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorũ duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios ꝓportionales, & proportionẽ A, ad B, eſſe triplicatam eius, quã habẽt latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Itẽ D, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicãtes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; [a] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [b] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [c] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [d] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

[a] 17. ſept.
[b] 17. ſept.
[c] 17. ſept.
[d] 18. ſept.

QVONIAM vero, cum A, M, N, B, ſint proportionales continue; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

Ex ijs, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiã eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ra-

in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc eſt; eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem; quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cum enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L; metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K, ipſum B, quòd B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I. [a] Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quam D, quam E; Ideoque compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A, antecedentes antecedentẽ; metientur quoque F, G, H, ipſum M, conſequentes conſequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipſum N; (Cum enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeo F, G, H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At vero F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

A, 36. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10.

[a] 11. pron.

QVIA vero ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſiue primum latus ducatur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium; ſiue primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſiue denique ſecundum in tertium, & productus numerus in primum: Quin etiam, propoſitis quotuis numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunq; ordinem inter ſe permutent. Quæ quidem res magnum vſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

SINT primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E; [a] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [b] ita quoque eſt F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, [c] ita eſt A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, productũ ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.

E, F,
D, A,
B, unitas.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt G, ad vnitatem, [f] ita etiam eſt G, ad B, eò quòd G, factus eſt ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita eſt B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus eſt ex A,

E, G,
D, B,
A, vnitas.

[a] 15. defin.
[b] 15. defin.
[c] 15. defin.
[d] 19. sept.
[e] 15. defin.
[f] 15. defin.
[g] 15. defin.

ex A, in B: Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem:[a] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod eſt ſecundum.

[a] 19. ſept.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atq; ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundẽ E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Itẽ ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Itẽ ex A, in C, & ex ꝓducto in D, & ex producto in B: Itẽ ex A, in D, & ex producto in B, & ex ꝓducto in C: Itẽ ex A, in D, & ex producto in C, & ex ꝓducto in B: Itẽ ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex producto in D: Itẽ ex B, in C, & ex producto in D, & ex ꝓducto in A: Itẽ ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter ſe, fiant 11. multiplicationes diuerſæ producentes eundem ſemper numerum. Quoniam enim vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus fit, ſiue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D; ſiue prius in D, deinde hic productus in C, conſtat id, quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

DEINDE quia vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perſpicuum eſt, eundem numerũ gigni tũ ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tũ ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. quod eſt ſecũdũ.

TERTIO quoniam, vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus procreatur, ſiue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; ſiue prius in D, deinde hic ꝓductus in B, patet, eundẽ generari numerũ tũ ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, Cũ ergo ille ſit æqualis proxime oſtẽſus primo ꝓducto, erit & hic æqualis eidẽ, ꝙ eſt tertiũ.

QVARTO quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idẽ numerus

fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

QVINTO quoniã, vt demonſtratũ eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idẽ numerus ex A, in C, & ex producto in D, et ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cũ ergo ille ſit oſtenſus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintũ.

SEXTO, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quàm ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod eſt ſextũ.

SEPTIMO quia, vt in tribus oſtẽdimus, idẽ numerus gignitur, ſiue ꝓductus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, ſiue prius in D, deinde hic ꝓductus in A; cõſtat eũdẽ numerũ fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in A, qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex ꝓducto in D. Sed hic proximè oſtẽſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille, ꝙ eſt ſeptimũ.

OCTAVO quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

NONO quia, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex ꝓducto in C, & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

DECIMO

DECIMO quoniam, vt in tribus eſt demonſtratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco eſt oſtenſum, æqualis eſt ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in B. Igitur & hic. Quod eſt decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

POSTREMO quoniam, vt oſtenſum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D; qui ex C, in D, & ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod eſt vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum eſt in quinq; vel pluribus numeris; dummodo interdum in quinq; aſſumatur id quod iam in quatuor demonſtratum eſt; & in ſex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque ſemper numerus ex continua eorum multiplicatione inter ſe procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E; conſtituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter ſe ordinem permutent, eundem ſemper gignent numerum: ac proinde tam ſecundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent; eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorſus numerum procreet, quem primus, & ſic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

17.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, eſſe planos ſimiles. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi ſunt in ratione A, ad C; [a] metientur D, & E, ipſos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipſos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C. [c] Item G, eoſdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B; [d] erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G; & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera oſtenſa ſint eſſe proportionalia, hoc eſt, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A, B, plani ſimiles. Quare ſi inter duos numeros vnus, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

[a] 21. ſept.
[b] 9. pron.
[c] 9. pron.
[d] 17. ſept.

19.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes ſolidi ſunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, eſſe ſimiles ſolidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E, & G, plani ſimiles: ſint ipſius E, latera H, I; ipſius vero G,

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

[e] 20. octa.

latera

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi ſint in ratione A, C, D, [a] æque metiuntur ipſos A, C, D, eiuſdem rationis cum illis; metiantur per M. Eodemque modo, [b] quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [c] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eoſdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus eſt autem E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, ſolidus eſt numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, ſolidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, vt oſtendimus; [d] erit C, ad D, vt M, ad N: [e] Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quòd N, multiplicans E, & F, fecerit ipſos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos ſimiles E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propoſ. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo ſunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A, & B. Quam ob rem, ſi inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 21. ſept.
[b] 21. ſept.
[c] 9. pro.
[d] 18. ſept.
[e] 17. ſept.

SCHOLIVM.

DVO exempla appoſuimus, in quorum priori liquido conſtat, vnitatem E, eſſe planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet impropriè, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem a numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cum Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamque ſine vlla exceptione demonſtret.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 20.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

A, 9. B, 54. C, 324.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; [a] erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 20. octaui

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; [b] erunt A, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quã ob rẽ, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendũ.

[b] 21. octaui

SCHOLIVM.

HAEC eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio pręcedentium duarum propoſitionum; quam qui diligēter examinare velit, inueniet ſane mācam eſſe, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunque lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibuſdam lateribus vnius proportionalia ſint quędam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, ſi duorum planorum ſimilium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum eſſe, & ſi duorum ſimilium ſolidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubum: quod tamen in demonſtratione pro conceſſo, atque omnibus perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36. & 64. ſimilibus, ſatis eſt, vt duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamſi prior ſit quadratus, habens duo latera ęqualia 6. & 6. merito dubitare quis poſſit, immo omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc eſt, inter ſe quoque ęqualia, atque adeo eſſe quadratum: quemadmodum etiam manifeſtum eſt, hiſce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non reſpondere alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles, cur ſine demonſtratione vlla cōcedemus, his lateribus prioris ęqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter ſe ęqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in ſe faciat A; erunt D, & A, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant medij proportionales multitudine ęquales, nimirum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. inter vnitatem, atque C, numerum, nimirum vnus, qui ſit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri ſunt continue proportionales; producetur C, ex E, in ſe ipſum, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

A, 36.	B, 48.	C, 64.
D, 6.	E, 8.	
vni-	tas	

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B; & B, ad C; metietur D, ipſum A, & F, ipſum C, ęque, ex iis, quę oſtendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniā extremi D, F, minimorū trium numerorū, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. ſunt quadrati: Eſt autem & A, quadratus, ex hypotheſi; [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero eſt, ex ęquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F; [b] cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; [c] metietur idem & ſecundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipſum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipſius K. [d] Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata eſt rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc eſt, H, ad F: Eſt autem & ratio C, ad F, eiuſdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo ſint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde I, & C, ęquales ſunt. Exiſtente ergo L, quadrato, ex conſtructione, & C, quadratus erit.

A, 36.	B, 48.	C, 64.
G, 18.		H, 32.
D, 9.	E, 12.	F, 16.
L, 64.	K, 8.	I, 4.

[a] 11. octaui

[b] 8. octaui

[c] 7. octaui

[d] 11. octaui

ALITER. [e] Quoniam A, & C, ſimiles plani ſunt; ſint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipſius A; at F, G, ipſius C; ita vt ſit D, ad E, ſicut F, ad G: aſſumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in ſe, [f] erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo ſit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, me-

A, 36.	B, 48.	C, 64.
H, 6.		I, 8.
D, 3. E, 12.		F, 4. G, 16.

[e] 20. octaui

[f] 20. ſept.

[a] 8. octaui.

[b] 20. ſept.

dius proportionalis H;[a] cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui ſit I. Quare cum F, I, G, ſint continue proportionales;[b] idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in ſe ipſum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in ſe ipſum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

A,36. B,48, C,64.
H,6. I,8.
D,6. E,6. F,8. G,8.

SINT rurſum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, ſit cubus. Dico & D, quartum, cubum eſſe. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in ſeipſum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in ſe facit F, & in F, facit A; erunt, ex ſcholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertēdo ꝓportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum inter numerum D, & vnitatē, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. ſcholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui ſint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue ſunt proportionales: fiet H, ex G, in ſe, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. a nobis eſt demonſtratū. Quare D, cubus eſt, ex definitione, cuius latus G.

A,64. B,160. C,400. D,1000.
F,16. H,100.
E,4. G,10.
vnitas

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipſum A, & H, ipſum D, æque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonſtrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi ſunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Eſt aūt & A, cubus, ex hypotheſi;[c] cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui ſint I, K. Quoniam autem, ex æquo, eſt vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H;[a] cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui ſint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum,[b] metietur idem & L, ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O.[c] Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P. cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.

A,64. B,160. C,400. D,1000.
K,32. M,500.
I,16. L,250.
E,8. F,20. G.50. H,125.
P.1000. O,10. N,5.

[c] 12. octaui

[a] 8. octaui

[b] 7. octaui.

[c] 12. octaui

THEOR. 22. PROPOS. 24.

22.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; ſitque A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratū. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D;[d] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E;[e] cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt continue proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus;[f] erit & B, tertius, quadratus. Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendū.

A, 36. F. 48. B. 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

[d] 11. octaui

[e] 8. octaui

[f] 22. octaui

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum

exhiberi

exhiberi nullo modo poſſe in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, [a] eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati; cum primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, eſſent omnes hi dupli numeri 4.8.16.32.64.128. &c. quadrati. Primo enim 4. exiſtente quadrato, [b] eſſet & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. &c. quod eſt abſurdum. [c] Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, ſi eſſent quadrati: cum tamen in ſcholio propoſ. 8. huius lib. demonſtratum ſit, inter numeros duplæ proportionis quoſuis non poſſe cadere medium proportionalem.

[a] 24. octaui
[b] 24. octaui
[c] 11. octaui

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, [d] caderet inter eos medius proportionalis. [e] Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non poſſe, demonſtratum a nobis eſt in ſcholio propos. 8. huius lib.

[d] 11. octaui
[e] 8. octaui

THEOR. 23. PROPOS. 25.

23.

SI duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus, & ſecundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubū; ſitq; A, cubus. Dico & B cubum eſſe. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D; [f] cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui ſint E, F; [g] cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui ſint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, ſunt continue proportionales, & A, primus eſt cubus; [a] erit & B, quartus cubus. Quocirca, ſi duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.8.	G,12.	H,18.	B,27.
C,64.	E,96.	F,144.	D,216.

[f] 12. octaui
[g] 8. octaui

[a] 23. octaui

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, [b] eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus.

[b] 25. octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26.

24.

SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani ſimiles A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendã quadratum. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles; [c] cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione cõtinua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum ſit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, vt eſt quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

[c] 18. octaui

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

ſimiles plani numeri rationẽ inter ſe habent, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM

FACILE etiam demonſtrabimus conuerſum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter ſe,
[a] 11. octaui *quam quadrati C, D. Dico A, B, eſſe planos ſimiles.* [a] *Quo-*
niam enim inter quadratos C, D, cadit
vnus medius proportionalis: Et eſt, vt C,
[b] 8. octaui *ad D, ita A, ad B;* [b] *cadet quoque me-*
[c] 20. octaui *dius proportionalis inter A, & B.* [c] *Qua-*
re A, & B, plani ſimiles ſunt.

A, 8.	*B, 18.*
C, 16.	*D, 36.*

EX hoc perſpicuum eſt planos numeros, qui ſimiles non ſunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; eſſent, vt modo demonſtratum eſt, plani ſimiles. quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT ſimiles ſolidi A, B. Dico eſſe, vt A, ad B, ita
cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum.
[d] 19. octaui Quia enim A, B, ſunt ſolidi ſimiles; [d] cadent inter eos
duo medij proportionales, qui ſint C, D. Sumptis autem
quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua propor
tione A, C, D, B; erũt extremi E, H, ex coroll. 1. propoſ. 2

huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo ſit A, ad B, vt E, ad H; conſtat ita eſſe A, ad B, vt eſt cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo ſolidi numeri rationem habent inter ſe, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 240.	C. 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonſtrabimus; ſcilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter ſe,
quam cubi C, D. Dico A, B, ſolidos eſſe
ſimiles. Nam cum ſit A, ad B, vt C,
ad D; [a] *cadant autem inter C, D, cu-* [a] 12. octaui
bos duo medij proportionales; [b] *cadent* [b] 8. octaui
quoque inter A, B, duo medij. [c] *Sunt ergo A, & B, ſolidi* [c] 21. octaui
ſimiles.

A, 16.	*B, 54.*
C, 64.	*D, 216.*

EX his omnibus perſpicue infertur, nullos numeros haben
tes duplam proportionem, vel ſuperparticularem, vel ſuperbi
partientem, eſſe ſimiles planos, vel ſolidos. Si enim eſſent ſimi-
les plani, [a] *caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod* [a] 18. octaui
fieri non poſſe, iam dudum oſtenſum eſt in ſcholio propoſ. 8. hu-
ius lib. Eadem ratione non erunt ſimiles ſolidi, cum inter eos
cadere non poſſint duo medij proportionales. [e] *Nam alias cade* [e] 8. octaui
rent quoque duo medij inter minimos earũdem proportionum
numeros. Quod fieri non poteſt, quod hi vel ſola vnitate, vel
certe binario tantum inter ſe diſtent, ut in ſcholio pradicto tra
ditum eſt; inter quos certum eſt, non poſſe intercipi duos nume-
ros, nedum duos medios proportionales.

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi eſſe poſſunt plani ſimiles, vel ſolidi, cum non poſſint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui ſit nume rus primus, latera habet ſolummodo vnitatem, & ſeipſum, quamuis impropriè. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ conſtat non eſſe proportionalia. Quiuis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit, latera tantum habet duas vnitates, & ſe ipſum. Vt hi numeri ſolidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt, ea non poſſe eſſe proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo huiuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani vel ſolidi ſimiles; [a] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter ſe primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poſſit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in ſcholio propoſ. 24. lib. 7. demonſtrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod abſurdum eſt. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi.

a 18. & 19. octaui

EX his ſequitur, ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minorem numerare maiorem. Nam ſi eum non numeraret; [b] eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi: ac proinde, vt proximè oſtendimus, non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. quod abſurdum eſt, & contra hypotheſim. Verum hoc oſtenſiuè quoque ita demonſtrabimus. Sint primum duo numeri plani ſimiles A, B, ſitq; A, minor, primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint C, vnitas, & numerus D, ipſi A, æqualis; quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem, metiatur primum numerum A: ſint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt ſit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F. [c] Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertiũ: Fit autem ex C, vnitate in F, ipſemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. [a] Quare D, ipſum F, metietur. [b] Metitur autem F, ipſum B, quòd B, gignatur ex E, in F. [c] Igitur & D, id eſt, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod eſt propoſitum.

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

b 31. ſept.

c 19. ſept.

a 4. pron.
b 4. pron.
c 11. pron.

HINC Perſpicuum eſt, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proximè oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti. quod eſt contra hypotheſim.

SINT deinde duo ſolidi ſimiles A, B, ſitque A, minor primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ſint ſolidi ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint B, C, vnitates, & numerus D, ipſi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem, metiatur numerum primum A: ſint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt ſit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur eſt C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. [d] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipſemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. [e] Quare D, ipſum G, metietur. [f] Metitur autẽ G, ipſum B, quòd G, latus ſit ipſius B. [g] Igitur & D, hoc eſt, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod eſt propoſitum.

A, 3. B, 24.
B, 1. C. 1. D, 3. E, 2. F, 2 G, 6.

d 19. ſept.
e 4. pron.
f 4. pron.
g 11. pron.

ATQVE ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proximè oſtendimus. Cum ergo & ſe ipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe compoſiti: quod eſt contrà hypotheſim.

ITAQVE facilis admodum eſt inuentio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum neuter quadratus ſit, aut cubus;

erunt

erunt illi ipſi per ea, qua tradita ſunt, plani ſeu ſolidi non ſimiles.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter vero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles, [a] *haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato,* [b] *eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum. ponitur enim non quadratus.*

[a] *26. octau*
[b] *24. octaui*

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, vt 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles, [c] *haberent proportionem, quã cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit,* [d] *eſſet & 40. cubus, quod eſt abſurdum. ponitur enim non cubus.*

[c] *27. octaui*
[d] *25. octaui*

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS
ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

SI duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani ſimiles A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum ſint plani ſimiles [b], vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt ſint continue proportionales D, E, C. Itaq; cũ tres D, E, C, continue ſint proportionales, ſitq; primus D, quadratus, ex conſtructione; [d] erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

[a] *17. ſeptimi.*
[b] *18. octaui*
[c] *8. octaui*
[d] *22. octaui*

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; ſimiles plani erunt.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratũ. Dico A, B, eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, quadratũ. Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B, fecit D, & C; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; [d] Ac propterea A, & B, ſimiles plani ſunt. Quare ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes, &c. Quod demonſtrandũ erat.

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

[a] 17. ſept.
[b] 11. octaui
[c] 8. octaui
[d] 20. octaui

SCHOLIVM.

EX his demonſtrabimus quatuor inſequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, ſe mutuo multiplicãtes faciãt C. Dico C, eſſe quadratum. Cum enim A, & B, ſint ſimiles plani, nimirum quadrati; [e] erit C, ex eis productus, quadratus.

A, 4. B, 25.
C, 100.

[e] 1. noni

II.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; ſitque A, quadratus. Dico & B, quadratum eſſe. Cum enim A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratũ: [a] erunt A, & B, ſimiles plani: [b] atque adeo inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D. [c] Quare A, exiſtente quadrato, erit & B, quadratus.

A, 9. D, 12. B, 16.
C, 144.

[a] 2. noni
[b] 18. octaui
[c] 22. octaui

III.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; ſitque A, quadratus. Dico B, non quadratum eſſe. Si enim B, dicatur eſſe quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius ſcholij; Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur quadratus eſt B, numerus.

A, 4. B, 20
C, 80.

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non eſſe quadratum. Nam ſi C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, ſitque A, quadratus; eſſet & B, ex theor. 2. huius ſcholij, quadratus: Quod eſt abſurdum, & contra hypoteſim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20.
C, 180.

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

A, 8.	
E, 16.	D, 4.
F, 32.	C, 2.
B, 64.	Vni-. tas.

FACIAT cubus A, ſeipſum multiplicans numerũ B, Dico B, eſſe cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in ſe fiat D, & idcirco ex C, in D, ipſe cubus A, gignatur. Quia igitur C, ſeipſum multiplicãs fecit D: [a] metietur C, ipſum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipſum C, per C. Igitur eadem pars eſt vnitas ipſius C, quæ C, ipſius D, nimirum denominata a C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rurſus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipſum A, per C, Metiebatur autem & C, ipſum D, per C. Eadem ergo pars eſt C, ipſius D, quæ D, ipſius A; [e] ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: ſed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipſum B, metitur per A, quòd A, ſe ipſum multiplicans fecerit B; [g] metitur vero & vnitas ipſum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipſius A, quæ A, ipſius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirũ E, & F. Cũ ergo quatuor numeri A, E, F, B, ſint continue proportionales, & A, primus ſit cubus, [k] erit quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus ſe ipſum multiplicans, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 7. pron.
[b] 5. pron.
[c] 20. defin.
[d] 7. pron.
[e] 20. defin.
[f] 7. pron.
[g] 5. pron.
[h] 10. defin.
[i] 8. Octaui.
[k] 23. Octaui.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

A, 8.	B, 27.
D. 64.	C, 216.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D; [a] eritq; D, cubus. Quoniã vero A multiplicans A, & B, fecit D, & C; [b] erit vt A, ad B, ita D ad C. [c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [e] Ac propterea D, exiſtente cubo, & C, cubus erit. Quocirca ſi cubus numerus cubũ numerum multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 3. noni.
[b] 17. ſept.
[c] 12. octaui
[d] 8. octaui.
[e] 23. octaui

5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, [f] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [g] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [h] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [i] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [k] Ac proinde exiſtente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem ſi cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat.

[f] 3. noni.
[g] 17. ſept.
[h] 12. octaui
[i] 8. Octaui
[k] 23. octaui

SCHOLIVM.

EX his & hac, quæ ſequuntur, facile demonſtrabuntur, videlicet.

I

SI cubus numerus non cubum numerum multi-

multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

A,8. B,20. C,160.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non eſſe cubum. Si enim C, ſit cubus; [a] & multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.

[a] 5. noni

II.

SI cubus numerus, numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

A,8. B.17. C,136.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non eſſe cubum. Si namque B, ſit cubus, [b] & factus C, cubus erit. quod eſt contra hypotheſim.

[b] 4. noni

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

SI numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat: Et ipſe cubus erit.

A,8. B,64. C,512.

MVLTIPLICANS ſeipſum numerus A, faciat B, cubũ. Dico & A, cubũ eſſe. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in ſe faciat B, & ipſe C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis ſit, vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ ad definitionem cubi ſcripſimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; [c] erit & A, cubus. Quare ſi numerus ſe ipſum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonſtrandum.

[c] 3. noni

SCHOLIVM.

ALIAM demonſtrationem interpretes Euclidis hoc loco

loco

loco adducunt, & quidem longiorem. Poſtquam enim demonſtrarunt C, factum ex A, in B, eſſe cubum, inferunt: [a] Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. [b] Quoniam vero eſt vt B, ad C, ita A, ad B, quòd A, multiplicans A, & B, ipſos B, & C, fecit; [c] cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales. [d] Atque adeo exiſtente B, cubo, & A, cubus erit. Verum noſtra demonſtratio breuior eſt, & planior, vt perſpicuum eſt.

A,8. B,64. C,512.

[a] 12. octaui
[b] 17. sept.
[c] 8. octaui
[d] 23. octaui

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus ſolidus erit.

A,6. B,11. C,66.
D,2. E,3.

NVMERVS compoſitus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, eſſe ſolidum. Cum enim A, ſit compoſitus, [e] metietur eum, præter vnitatẽ, numerus aliquis: metiatur D, ipſum A, per E. Quo poſito, [f] multiplicante D, ipſum E, producetur A. Cum ergo B, ipſum A, multiplicãs fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorũ D, E, B; Ac propterea ſolidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter ſi compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

[e] 13. defin.
[f] 9. pron.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem eſt cubus, & duos intermittẽtes omnes: Septimus vero cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittẽtes omnes.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M. Dico tertiũ quidẽB, ab vnitate eſſe quadraũ,& vnũ intermittẽtes

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.
H,6561.I,19683.I,K.59049. L,177147. M,531441.

omnes,quales ſunt D,F,H,K,M: Quartum autem C,cu-
bum,& duos intermittentes omnes,cuiuſmodi ſunt F,I,
M:ſeptimum vero F,cubũ ſimul,& quadratum, & quin-
que intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam enim
eſt vnitas ad A, vt A, ad B;æque metietur vnitas nume-
a 5. pron. rum A,& numerus A,numerum B: a Metitur autem vni-
tas numerum A,per A. Ergo & A, ipſum B,per A,metie-
b 9. pron. tur; b Atque adeo A,multiplicans A,ipſum B,producet.
Quare B,quadratus eſt. Quia vero tres deinceps propor
c 22. octaui tionales ſunt B,C,D,& eſt B,quadratus; c erit & D,qua-
dratus. Eadem ratione aſſumptis tribus deinceps propor
d 22. octaui tionalibus D,E,F,cum D,ſit quadratus, d & F, quadratus
erit; Nec non & omnes vnum intermittentes.

RVRSVS quia eſt vnitas ad A, vt B, ad C; æque me-
e 5. pron. tietur vnitas numerũ A,& numerus B, numerũ C; e Me-
titur autem vnitas ipſum A,per A. Igitur & B, ipſum C,
f 9. pron. per A, metietur; f atque adeo B, ipſum A, multiplicans
procreabit numerum C. Quare cum A, ſeipſum multipli-
cans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt eſt oſten-
ſum; erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps propor-
g 23. octaui tionales ſunt C,D,E,F, & eſt C, cubus; g erit & F, cubus.
Eodem argumento, aſſumptis quatuor deinceps propor
h 23. octaui tionalibus F,G,H,I, cum F, ſit cubus; h & I, cubus erit;
atque omnes ſemper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, ſeptimus ab vnitate oſtenſus eſt & quadratus, & cubus: ipſe erit cubus ſimul & quadratus: Atque eodem modo M, ſeptimus ab F, intermiſsis nimirũ quinque G, H, I,K,L, cubus erit ſimul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint,&c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

HOC theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quę ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes vero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimooctauo, vigeſimoquarto, & alijs, quę metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigeſimus quintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate, Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem ſit quadratus, Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, ſitque primum A, proximus vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint,[a] iam demōſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue proportionales ſint A, B, C; ſitque A, quadratus;[b] erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cū C, ſit quadratus;[c] & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati ſunt. Idē oſtēdemus, ſi plures numeri ſint cōtinue proportionales.

Vnitas, A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

Vnitas. A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F.4096.

[a] 8. noni

[b] 22. octaui

[c] 22. octaui

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi,[d] iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque, metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B:[e] Metitur autem vnitas numerū A, per ipſummet A Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur;[f] Atque adeo cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit.[g] Quare B, cubus eſt. Quoniam vero quatuor continue proportionales ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus,[h] & D, cubus erit. Eademq; ratione, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus ſit;[a] & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi ſunt. Non ſecus demonſtrabimus, omnes cubos eſſe, ſi plures continue proportionales fuerint. Quocirca, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

Vnitas. A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

[d] 8. noni

[e] 3. proni

[f] 9. pron.

[g] 3. noni

[h] 23. octaui

[a] 23. octaui

SCHOLIVM.

NON demonſtrauit Geometra, ſi numerus, qui poſt vnitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicue hoc ipſum ex demonſtratis colligitur. Nam ſi proximus vnitati ſit cubus ſimul, & quadratus: qua parte eſt cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte eſt quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt; vt demonſtratum eſt. Omnes igitur erunt cubi ſimul, & quadrati.

VERVM tota propoſitio facilius ita poterit demonſtrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos eſſe. Quoniam enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, ſeipſum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans B, facit C, ſuntque A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. Rurſus quia ex eodem ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, ſuntq; A, C, quadrati; erit ex eodē ſcholio propoſ. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo ſcholio propoſ. 10. lib. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

Vnitas. A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes eſſe cubos. Quia enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. cubus A, ſeipſum multiplicans facit B;[b] erit & B, cubus. Item quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans B, facit C, ſuntq; A, B, cubi,[c] erit & C, cubus. Rurſus quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans C, facit D, ſuntq; A, C, cubi;[d] erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex eo ſcholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.

Vnitas. A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

[b] 3. noni

[c] 4. noni

[d] 4. noni

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem, non ſit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem, non ſit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcũq; numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I,&c.& primum A, proximus vnitati nõ ſit quadratus. Diço nec aliũ vllũ eſſe quadratũ, præter tertiũ ab vnitate, & vnũ intermittẽtes omnes, hoc eſt, pręter B,D,F,H.&c. Si enim pręter hos alius eſt quadratus, ſit quadratus E. [a] Cum ergo & D, ſit quadratus; ſitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: [b] ſed B, tertius ab vnitate eſt quadratus. [c] Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod eſt abſurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus eſt. Eadem ratione oſtendemus, nullum alium, præter dictos, quadratum eſſe.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16. E,32. F,64. G,128. H,256.
I,512. K,1024. L,2048. M,4096.

a 8. noni
b 8. noni
c [illegible] octaui

SED iam A, proximus vnitati non ſit cubus. Dico nec alium vllum eſſe cubum, pręter quartum ab vnitate, & duos

intermittẽtes omnes, videlicet præter C,F,I.&c. Nam ſi præter hos alius poteſt eſſe cubus, ſit D, cubus. [a] Cũ ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D,E,F, eandem habeant rationem, quã tres A,B,C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: [b] Sed C, eſt cubus, cum ſit quartus ab vnitate. [c] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod eſt contra hypotheſim. Non igitur D, cubus eſt. Quod ſi E, credatur eſſe cubus; [d] cum & C, cubus ſit, ſitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; exiſtente C, cubo, [e] erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non eſſe, ita quoque eadem ratione oſtendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, eſſe cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 8. noni.
b 8. noni
c 23. octaui
d 8. noni.
e 23. octaui

SCHOLIVM.

NON eſt autem neceſſe, ſi numerus, qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul, & quadratum, prater ſeptimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus poſſit eſſe cubus ſimul, & quadratus, non exiſtente primo ab vnitate cubo ſimul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui poſt vnitatem, cubus quidem, non autem ſimul & quadratus. Dico B, tertium eſſe cubum ſimul & quadratum; cubum quidem, [f] quod primo exiſtente cubo, omnes cubi ſint; [g] quadratum vero, quod tertius ſit ab vnitate.

Vnitas. B,8. B,64.

f 9. noni.
g 8. noni

SIT deinde A, poſt vnitatem quadratus quidem, non autem ſimul & cubus. Dico quartum C, eſſe cubũ ſimul & quadratũ; [h] Cubum quidem, quod quartus ſit ab vnitate; quadratum vero,

Vnitas. A,4. B,16. C,64.

h 8. noni

[a] 9. noni *ro, [a] quod primo exiſtente quadrato, omnes ſint quadrati.*

SIT poſtremo A, poſt vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium eſſe cubum ſimul & quadratum, præter ſeptimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non exiſtente quadrato, [b] nullus alius quadratus ſit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittẽtes omnes, cuiuſmodi ſunt, vt in ſcholio propoſ. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, ſeptimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusſeptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non exiſtente cubo, [c] nullus alius ſit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales ſunt, vt ex eodem ſcholio apparet, quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. perſpicuum eſt, tantummodo ſeptimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos eſſe ſimul, & cubos, & ſic de cæteris. Nam in hæc loca ſola incidunt quadratus, & cubus ſimul, vt liquido conſtat ei, qui recte propoſitionem hanc & octauam huius libri expenderit.

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

[b] 10. noni

[c] 10. noni

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim ſit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) [a] æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat oſtendendum.

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

[a] 20. defin.

[b] 5. pron.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus a minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet prooportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſe ipſum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

[c] 9. pron. *HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſe ipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore diſtat, quantum minor ab vnitate, propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, [c] producatur ille, quem metitur. Ergo C, ſe ipſum multiplicans gignet F; cum F, tantum abſit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque*

que B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

11.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D, Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namque non metitur ipſum A; [a] erit E, cum primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, [b] atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præcedẽtis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium, [c] Quare erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, ſint inter ſe primi; [d] ac proinde in ſua proportione minimi; [e] metietur æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, [f] atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B, [g] atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cum A, & E, ſint inter ſe primi; [a] ac propterea in ſua proportione minimi; [b] metietur æque A, ipſum G, & E, ipſum B. Metiatur E, ipſũ B, per H: [c] ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A, atque idcirco A, ſe ipſum multiplicans facit B, vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertiũ, & ex A, medio in ſeipſum, [d] Quare erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter ſe primi ſint; [e] ac proinde in ſua proportione minimi; [f] æque metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum. Metitur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus quoſcunque alios numeros primos ipſum D, metientes metiri quoque ipſum A; Eademque erit ratio ſi C, vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

Vnitas. A,10. B,100. C,1000. D,10000.
E,5. H,20. G,200. F,2000.

[a] 31. ſept.
[b] 9. pron.
[c] 19. ſept.
[d] 23. ſept.
[e] 21. ſept.
[f] 9. pron.
[g] 9. pron.
[h] 19. ſept.

[a] 23. ſept.
[b] 21. ſept.
[c] 9. pron.
[d] 20. ſept.
[e] 23. ſept.
[f] 21. ſept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipſum A, metiri. Si enim nõ metiatur; [g] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicãs facit B, vt ex ſcholio propoſ. prędentis conſtat, [h] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi ſunt; ſit autem C, ex A, in B, per idem ſcholium præcedentis propoſ. [i] erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi ſunt; & ſit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. [k] erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſim. Metitur ergo E, ipſum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296.
E,3.

[g] 31. ſept.
[h] 27. ſept.
[i] 26. ſept.
[k] 26. ſept.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui

maior

maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum unitati non metiens, metiri poteſt vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonſtratum eſt: quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propoſitionis demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demõſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod uidetur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, quod non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propoſitionibus, quæ ſequũtur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturque ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum nõ dicturum fuiſſe, ſi diligentius uim huius demonſtrationis expendiſſet, vel certe, ſi expendit, eam in memoriam reuocaſſet; quandoquidem ipſo longe prior Euclides vſus eſt hoc etiam demonſtrãdi modo, vt ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demoſtrandi vſus eſt Theodoſius lib. 1. ſphæricorum propoſ. 12. vt ibidem monuimus.

CAETERVM ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcumque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipſum. [a] Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes ſubſequentes, [b] quod ſemper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris; [c] manifeſtum eſt, quod & ille omnes metiatur.

[a] 12. noni
[b] 11. noni
[c] 11. pron.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcũque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum autem eſt, E, non eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, & metiatur extremum D; [a] metietur quoque ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt, ſed compoſitus; [b] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium eſſe non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; [c] metietur quoque ille alius primus eundem D, [d] atq; adeo & ipſum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipſum E, metitur. Metiatur iam E, ipſum D, per F. Dico F, diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipſum D, per aliquem ipſorum A, B, C; [e] & viciſsim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,) metietur D, per E. [f] Cũ ergo quilibet ipſorũ A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipſorũ A, B, C; erit E, idẽ qui aliquis ipſorũ A, B, C; qđ eſt cõtra hypotheſim. ponitur. n. E, nõ idẽ, qui aliquis ipſorũ A, B, C. Nõ igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniã vero E, metitur D, per F; [g] metietur viciſsim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus: ſi enim ſit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; [i] atque adeo eum aliquis

Vnitas, A,5. B,25. C,125. D,625.
E ---- H ---- G ---- F ----

[a] 12. noni
[b] 33. ſept.
[c] 11. pron.
[d] 12. noni
[e] 8. pron.
[f] 11. noni
[g] 8. pron.
[h] 12. noni
[i] 23. ſept.

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.
E---- H---- G---- F----

aliquis numerus primus metietur. quem rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A. Si namque alius primus quã A, metiatur F; cum F, metiatur D, extremum; [a] metietur quoque ille alius primus eundem D; [b] atque adeo & ipſum A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, ipſum F, metitur. Iam vero quoniã E, metitur D, per F; [c] fiet D, ex E, in F. Fit autem & D, ex A, in C, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium; [d] Ac proinde erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipſum E, vt oſtenſum eſt. Ergo & F, ipſum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuerſus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter, G, diuerſum eſſe ab A, B, & nõ primum, ſed compoſitum, quẽ ſolus A, primus metiatur: quemadmodum id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diuerſus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B; metiaturq; F, ipſum C, per G; metietur vtique F, ipſum C, per aliquem ipſorum A, B; [e] & viciſsim aliquis ipſorum A, B (videlicet is, per quem F, ipſum C, metitur) metietur C, per F. [f] Cum ergo quilibet ipſorum A, B, metiatur C, per aliquem ipſorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim F, non eſſe eundem, quem aliquem ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſorum A, B, ſed diuerſus. Quoniã autem F, metitur C, per G; [g] metietur uiciſsim G, ipſum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metiaturque vltimum C; metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod eſt abſurdum. Non ergo G, primus eſt, ſed compoſitus; [i] ac proinde cum aliquis primus metietur. quem dico nullum alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quam A, metiatur G; cum G; metiatur C, vltimum; [k] metietur quoque ille alius

[a] 11. pron.
[b] 12. noni
[c] 9. pron.
[d] 19. ſept.
[e] 8. pron.
[f] 11. noni.
[g] 8. pron.
[h] 12. noni
[i] 33. ſept.
[k] 11. pron.

---

alius primus eundem C; [a] atque adeo & ipſum A, vnitati proximum, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, ipſum G, metitur. [b] Iam vero quia C, fit ex F, in G; quòd F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in ſcholio propoſ. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, ſecundo in G, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, vt demonſtratũ eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur. metiatur per H. Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, vltimũ (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A; quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.

NAM ſi H, idem ſit qui A; metiaturque G, ipſum B, per H; metietur vtique G, ipſum B, per A, [d] Et viciſsim A, ipſum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipſum B, per A, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. [e] Iam uero quia B, fit ex G, in H; quòd G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in ſe ipſum. [f] Quare erit vt H, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, vt eſt demonſtratum: Igitur, & H, ipſum A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

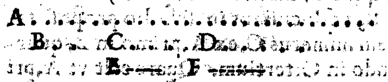
THEOR. 14. PROPOS. 14.

14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

[a] 12. noni
[b] 9. pron.
[c] 19. ſept.
[d] 8. pron.
[e] 9. pron.
[f] 20. ſept.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [a] multiplicans E, ipſum F, faciet A. [b] Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorũ E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt quam A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.



[a] 9. pron.
[b] 32. ſepti.

SCHOLIVM

ADDIT hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoq; alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compoſitus.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primò H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus, ſed compoſitus: [c] Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E.

[c] 2. octaui

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O. 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H ---- F, 2. G, 3.

Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M; metitur autem H, ipſum A; erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum; ſi vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt cõſtat ex demõſtratione propoſ. 2. lib. 8. erit, ex ſcholio eiuſdẽ propoſ. 32. li. 7. rurſus H, cõpoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi vero ad I; cum I, gignatur ex F, in ſe ipſum; erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. lib. 7. Quòd ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.

DEINDE metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N; erit vt prius H, compoſitus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad N, qui quidem fit ex F, in K; erit H, eodem modo compoſitus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G; erit quoque H, compoſitus vel ad F, vel ad G. Quòd ſi H, ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propoſ. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad L, cum L, gignatur ex G, in ſe; compoſitus quoque erit H, ad G. Quòd ſi H, ſit primus, probabimus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.

PRAETEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compoſitus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propoſitum; ſi vero ad L; cum L, producatur ex G, in ſe; erit quoque H, ad G, compoſitus. Quòd ſi H, primus ſit, oſtendemus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.

EODEM modo ſi H, non primus metiatur vltimum E, oſtendemus H, compoſitum eſſe ad G; Si vero H, primus *ſit, eum metiri ipſum G; atque ita in cæteris eadem ſemper erit demonſtratio.*

ITAQVE ſi H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipſum F, vel ad eum compoſitus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipſum G, vel ad eum compoſitus erit: Si deniq; H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipſum F, vel ipſum G, aut ad alterutrum erit compoſitus. Id quod perſpicuum eſt ex ipſa demonſtratione.

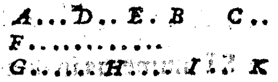
DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis ſecundo libro Euclides demonſtrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema ſequens demonſtrandum Theon quædam aſſumit in numeris, quæ demonſtrata ſunt de lineis libro ſecundo, perinde ac ſi eadem de numeris eſſent oſtenſa: non alienum inſtituto noſtro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonſtrata ſunt de lineis, hoc loco de numeris demonſtrare. Quod idē & Barlaam monachum feciſſe a nonnullis eſt traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in ſecundo libro tenuiſſe conſpicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, ſeceturque ipſorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & qualibet parte numeri diuiſi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem eſſe numeris G H, H I, I K, hoc eſt, toti numero G K, ex GH, H I, I K, compoſito.



Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; [a] metietur A B, ipſum F, per C, hoc eſt, A B, pars erit ipſius F, denominata à C. Eadē ratione AD, ipſius G H; & D E, ipſius H I; & E B, ipſius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ A B, ipſius F. Quia vero per ea, quæ ad propoſ. 5. lib. 7. demonſtrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars eſt, quæ A D, ipſius GH; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipſius F; [b] Ac proinde inter ſe æquales erunt F, & G K. Quod eſt propoſitum.

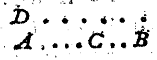
[a] 2. pron.

[b] 4. pron.

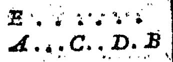
II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, CB. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, ſimul æquales eſſe numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis ſit ipſi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc eſt, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc eſt, ex A B, in A C, & in C B. quod eſt propoſitum.



IDEM demonſtrabitur, ſi A B, in plures partes, quam in duas ſecetur, vt ex appoſita ſecunda figura apparere poteſt. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc eſt, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc eſt, ex A B, in ſingulas partes A C, C D, D B.



III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & vna parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub partibus continetur, numero, & illi, qui a prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus A B, diuiſus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti A C, æqualis ſit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex, A C, in A B; vel (quod idem eſt) ex AB, in A C, æqualis numeris factis ex D, hoc eſt, ex AC, in C B, & ex D, hoc eſt, ex AC, in A C, quadrato ſcilicet ipſius AC. Quod eſt propoſitum.

D . . . .

A . . . . C . . . . B

IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

SIT numerus A B, diuiſus in A C, C B. Dico numerum quadratum ex A B, factum æqualem eſſe quadratis partium A C, C B, vna cum numero, qui fit bis ex parte A C, in partem C B. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipſius A B, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex A B, in A C, & in C B. Eſt autem numerus, qui fit ex A B, in A C, per 3. theorema, æqualis numero genito ex A C, in C B, vna cum quadrato ipſius A C: Item numerus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, vna cum quadrato ipſius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium A C, C B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . C . . . . B

V.

SI numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, n. AB, ſecetur in partes æquales A C, C B; & non æquales A D, D B. Dico numerum ſub partibus inæqualibus A D, D B, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij C D, (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipſius C B, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C D, D B, vnà cum plano numero bis cōprehenſo ſub C D, D B; numero vero comprehenſo ſemel ſub CD, DB, vna cū quadrato ipſius D B, æqualis ſit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; fit, vt ſi hic numerus factus ex C B, in D B, ſumatur pro quadrato ipſius DB, vna cum numero facto ex C D, in D B; numerus quadratus ipſius C B, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C D, vna cum reliquo numero facto ex C D, in D B, ſemel, & numero ex C B; hoc eſt, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis eſt numerus, qui fit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipſius CB, æqualis erit quadrato ipſius C D, vna cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc eſt, numerus factus ex AD, in D B, vna

A . . . . . C . . . D . . B

cum quadrato ipſius C D, æqualis erit quadrato ipſius C B. Quod eſt propoſitum.

V I.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim AB, ſecetur in partes æquales AC, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto B D, tanquam vno, nimirum ex A D, in adiectum B D, vna cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem eſſe quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto B D, tanquam vno, hoc eſt, quadrato ipſius C D. Cum enim quadratus ipſius C D, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C B, B D, vna cum numero bis comprehenſo ſub CB, B D, hoc eſt, quadratis partiũ C B, BD, vna cum numeris ſub C B, B D, & ſub A C, B D, comprehenſis; numeris autem contentis ſub C B, B D, & ſub AC, BD, & ſub BD, BD, hoc eſt, quadrato ipſius BD, æqualis ſit ex 1. theorem. numerus factus ex AD, in BD; fit, vt ſi hic numerus factus ex A D, in B D, ſumatur pro quadrato partis B D, vna cum numeris factis ex C B, in B D, & ex AC, in BD, quadratus ipſius CD, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius CB, vna cum numero facto ex A D, in B D; hoc eſt, numerus factus ex A D, in B D, vna cum quadrato ipſius C B, æqualis ſit quadrato ipſius C D. quod eſt propoſitũ.

A . . . . C . . . . B . . . D

V I I.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis eſt numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus A B, in partes A C, C B. Dico quadratum totius A B, vna cum quadrato partis C B, æqualem eſſe numero bis, qui fit ex toto A B, in dictam partẽ CB, vna cum quadrato reliquæ partis A C. Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius A B, æqualis ſit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; ſi quadratus ipſius CB, addatur communis; erũt quadrati numerorum AB, CB, ſimul, æquales quadratis numerorum AC, C B, C B, vna cum numero qui fit bis ex A C, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, æqualis eſt, per 3. theorema, numerus qui fit ex A B, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, bis, æqualis eſt, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur ſi pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, bis, ſumatur numerus factus bis ex AB, in C B; erunt quadrati numerorum A B, CB, ſimul, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C B, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod eſt propoſitum.

A . . . . C . . . . B

V I I I.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes A C, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem eſſe quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis ſit di-

A . . . C . . . B . . . D

A . . . C . . . B . . . D

ctæ parti C B; cum quadratus totius AD, compoſiti ex A B, & B D, ſiue dicta parte C B, ſit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vna cum numero qui fit bis ex AB, in BD, hoc eſt, quadratis numerorum AB, CB vna cum eo, qui fit bis ex A B, in CB; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum AB, CB, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC; fit, vt ſi pro quadratis numerorum AB, CB, ſumatur numerus factus bis ex AB, in C B, vna cũ quadrato ipſius AC, quadratus factus ex A D, æqualis ſit numero, qui fit quater ex AB, in CB, una cum quaduato reliuqæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS ſit numerus AB, in partes æquales A C, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem AC, vel C B, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D, æqualis ſit, ex 4. theorem: quadratis numerorum A C, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CD; Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc eſt, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipſius DB, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc eſt, ex AC, & CD. Igitur, ſi pro quadrato ipſius D B, vnà cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, ſumantur quadrati ipſorum AC, CD, erunt

A . . . . C . . . D . . B

quæ

quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium A D, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus A C, CD, fiunt. Quod eſt propoſitum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero compoſito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus AB, diuiſus in partes duas æquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compoſiti ex toto AB, & adiecto B D, & quadratũ adiecti numeri BD, vtroſque ſimul, duplos eſſe quadratorum, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex CD, compoſito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, C D, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc eſt, ex CB, in CD; ſi communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum A D, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipſius BD, vna cum numero bis qui fit ex C B, in CD, æquales ſunt quadrati numerorũ CB, C D; & quadrato ipſius C B, æqualis eſt quadratus ipſius A C. Igitur ſi pro quadrato ipſius B D, vna cum numero, qui fit bis ex C B, in CD, ſumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc eſt, numerorum A C, C D: erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorum A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

A . . . C . . . B . . D

IAM

IAM vero theorema 11. lib. 2. non poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonſtrabimus.

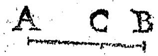
DIVIDATVR, ſi fieri poteſt, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus ſub extremis A B, C B, æqualis eſt quadrato numeri medij A C; [a] *erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Eſt autem A B, maior quam A C. Igitur & A C, maior eſt quam C B. Ablato iam C D, qui ipſi C B, ſit æqualis, erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad C D. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, eſt vt A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum;* [b] *erit quoque vt totus A B, ad totum A C, vel vt detractus A C, ad detractum C D, ita C B, ex A B, reſiduus, hoc eſt, C D, ipſi C B, æqualis, ad A D, ex A C, reſiduũ. Quia igitur eſt vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & eſt A C, maior quam C D; erit quoque C D, maior quam A D. Ablato ergo D E, qui ipſi A D, ſit æqualis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaque quia eſt, vt totus A C, ad totum C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum;* [c] *erit quoque vt totus A C, ad totum C D, vel vt detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, reſiduus, hoc eſt, D E, ipſi A D, æqualis, ad E C, ex C D, reſiduum. Quare cum ſit vt C D, ad D E, ita D E, ad E C; ſit autem C D, maior, quam D E; erit etiam D E, maior, quam E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipſi E C, æqualis; & ſic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod eſt abſurdum: cum numerus non poſſit diuidi in infinitum. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partiũ factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum.*

[a] *20. ſept.*

[b] *11. ſept.*

[c] *11. ſept.*

ALITER. Quoniam numerus A B, in C, ita diuiſus eſt, vt is qui fit ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipſius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B, in C B, vna cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, vna cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cum æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur ſub A B, C B, vna cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.



VERVM hoc idem clarius demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erũt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, nimirũ A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtũ eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib 8. D, ſeipsũ multiplicantẽ facere A; multiplicantẽ vero ipſum E, facere B; atq; E, ſeipſum multiplicantẽ facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; [b] erit & vterq; D, E, ſimul ad quẽlibet illorũ primus. Itaq; cũ tã cõpoſitus ex D, E,

A, 9 B, 12.
C, 16.
D, 3. E, 4.

[a] *24. ſept.*

[b] *30. ſept.*

a 26.ſepti.
b 27.ſept.

D,E,quam ipſe D,ad E,primus ſit; a erit quoq; numerus factus ex D,E,tanquam vno, in D,ad eundem E,primus; Qui autem fit ex D,E,tanquam vno,in D,æqualis eſt per 3.theorema ſcholij pręcedẽtis,&numero A,facto ex D,in ſe,& numero B,facto ex D,in E.Igitur & A,B,compoſiti, primi ſunt ad E; b Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

c 30.ſept.
d 26.ſept.
e 27.ſept.

DEINDE quia,vt prius, c vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorũ D, E; efficitur, (cum tam cõpoſitus ex D, E, quam ipſe E, primus ſit ad D,) d numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D,E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3.theorem. ſcholij antecedẽtis,& numero C,facto ex E,in ſe,& numero B,facto ex D,in E.Igitur & B,C,ſimul cõpoſiti,ad D,primi ſunt, e atq;adeo & ad ipſum A, qui factus eſt ex D,in ſe,primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

B,12. C, 16.
A,9.
D,3. E,4.

f 30.ſept.
g 26.ſept.
h 27.ſept.
i 30.ſept.

POSTREMO quia,vt prius, f vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt;atq; adeo è contrario, quilibet ipſorũ D,E,primus eſt ad compoſitum ex D, E, g erit quoq; qui fit ex D, in E, ad compoſitũ ex D, E, primus; h Ac proinde & idem qui fit ex D,in E, ad eũ qui fit ex D, E, tanquã vno,in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D,E,tanquam vno,in ſe, ęqualis eſt, per 4.theorem. antecedẽtis ſcholij,eis qui fiunt ex D, & E,in ſe ipſos, vna cum eo qui ex D,in E, bis. Igitur & factus ex D, in E,primus erit ad eos, qui fiunt ex D,&E,in ſe ipſos,& ex D, in E,bis. Quoniã ergo duo numeri ſimul,videlicet compoſitus ex ijs,qui fiunt ex D, & E,in ſe ipſos,& ex eo,qui fit ex D,in E,atq;is qui fit ex D,in E,primi ſunt ad aliquẽ ipſorũ,nimirũ ad eũ,qui fit ex D, in E,vt oſtenſũ eſt, i Erunt etiam duo illi,nimirum compoſitus ex ijs,qui fiũt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E,atque is,qui fit ex D, in E,inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex ijs,qui fiunt ex D, & E,in ſe ipſos,atq;

A,9. C,16.
B,12
D,3. E,4.

a 30.ſept.

is,qui fit ex D,in E,ad aliquem ipſorum, nimirum ad eũ qui fit ex D, in E, primi ſunt, vt oſtẽſum eſt; a erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cum igitur ex D, & E, in ſe ipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quam ob rem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipſum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales,fuerint minimi omnium eandẽ cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes ſimul compoſioos, eſſe primos; Videlicet A, B, C, ſimul ad D; & A, B, D, ſimul ad C; & A, C, D, ſimul ad B; & B, C, D, ſimul ad A. *Si enim A, B, C, ſimul non ſunt primi ad D, erunt A, B, C, ſimul, atque D, compoſiti inter ſe; atque adeo eos aliquis numerus communis menſura metietur. Metiatur eos numerus E, ſi fieri poteſt; ſumãturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales ſunt, & minimi; metitur autẽ E, aliquẽ eorũ, nimirũ D metietur quoq; E, alterum ipſorum F, G, vel certe compoſitus erit ad alterum ipſorum F, G, ex ſcholio propoſ. 14. huius libri. Atque idcirco ipſum E, & alterũ ipſorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E;*

A,8. B,12. C,18. D 27.
E --- F,2. G,3. H ---

A,8. B,12. C,18. D,27.
E ---- F,2. G,3. H, ----

& E, ponatur metiri compoſitum ex A, B, C, & ipſum D; [a] metietur quoque H, eundem compoſitum ex A, B, C, & ipſum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipſorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propoſ. 2. lib. 8. [b] metietur quoque H, medios B, G; [c] ac propterea & compoſitum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totũ compoſitum ex A, B, C, & detractum compoſitum ex B, C, vt demonſtrauimus; [d] metietur quoque idem H, reliquum A. Metiebatur autem & ipſum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter ſe compoſiti. [e] Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur compoſiti inter ſe ſunt compoſitus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter ſe primi.

a 11. pron.
b 11. pron.
c 10. pron.
d 12. pron.
e 3. octaui

RVRSVS, ſi A, B, D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rurſum ex ſcholio propoſ. 14 huius lib. vel metietur alterum ipſorum F, G, vel compoſitus erit ad alterum ipſorum F, G. Metiatur ergo H, ipſum E, & alterum ipſorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compoſitum ex A, B, D; [f] metietur etiam H, eundem compoſitum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipſorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propoſ. 2. lib. 8. medios B, C, [g] metietur quoque H, ipſos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compoſitum, ex A, B, D, & detractum B, [h] metietur quoque H, compoſitum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F, G, quorum F, ipſum A; & G, ipſum D, metitur, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. [i] metietur etiam H, alterum ipſorum A, D. [k] Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter ſe compoſiti. [l] Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur A, B, D, ſimul compoſiti, ad C, compoſiti ſunt. Ergo primi. Quod eſt propoſitum.

f 11. pron.
g 11. pron.
h 12. pron.
i 11. pron.
k 12. pron.
l 3. octaui

NON aliter oſtendemus & A, C, D, compoſitos, eſſe ad B, primos; nec non & B, C, D, ſimul ad A. Eademque ratio eſt de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter ſe fuerint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SINT primi inter ſe A, & B Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C.

A. . . . .
B. . . . . .
C ---------

Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, [a] atque adeo in ſua proportione minimi; [b] ipſi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes, nimirum A, ipſum B, & B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, B, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 23. ſept.
b 21. ſept.

18.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

A,8. B,12. C,18. D,27. E----

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi, [c] minimi in ſua proportione. [d] Igitur æque metientur ipſos B, & E; nimirum A,

c 23. ſept.
d 21. ſept.

ipſum

A,8. B,12. C,18. D,27. E----

ipſum B, & D, ipſum E. At qui eſt vt A, ad B, ita B, ad C: Ergo cum A, metiatur ipſum B; & B, ipſum C, metietur; [a] atque ob id & A, ipſum C, metietur. Et quia eſt vt B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipſum C; metietur & C, ipſum D. Quare A, metiens ipſum C, [b] metietur quoque ipſum D. Metitur vero & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, D, inter ſe primos. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 11. pron.
[b] 11. pron.

PROBL. 1. PROPOS. 18. 19.

DVOBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

A,4. B,7.

A,4. B,6. D,9. C,36.

DATI duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſiderare, an inueniri poſsit tertius ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter ſe ſunt, aut non. Si ſunt inter ſe primi [c] perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si vero non ſunt A, & B, inter ſe primi; multiplicans B, ſe ipſum faciat C. Aut igitur A, metitur ipſum C, aut non. Metiatur primum A, ipſum C, per D. Dico ipſis A, B, inueniri poſſe tertium proportionalem, immo ipſum D, eſſe tertium proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D, [d] fiet C, ex A, in D: Fit autē ex conſtructione, idem C, ex B, in ſe ipſum. Igitur, qui continetur ſub extremis A, D, æqualis eſt ei, qui ex medio B, deſcribitur; [e] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus eſt tertius proportionalis ipſis A, B.

[c] 16. noni
[d] 9. pron.
[e] 20. ſept.

A,6. B,4. D---- C,16.

SED non metiatur A, ipſum C. Dico ipſis A, B, nō poſſe reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri poteſt, inuentus ſit D, ita vt ſit A, ad B, quemadmodum B, ad D Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita B, ad D; [a] erit numerus contentus ſub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe ipſum, hoc eſt, ipſi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; [b] metietur A, ipſum C, per D: ſed & non metiri ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, ſecundo in ſe ipſum. Eadem via conſiderabimus, an ipſis B, & A, inueniri poſsit alius tertius numerus, ad quem ita ſit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis conſiderauimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] 20. ſept.
[b] 7. pron.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri.

A,8. B,12. C,18. E,27. D,216.
A,4. B,8. C,9. E,18. D,72.

SINT dati tres numeri A, B, C, ſiue deinceps proportionales, ſiue non; oporteatque conſiderare, an poſſit reperiri quartus ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. Multiplicans B, ipſum C, faciat D. Aut igitur A, ipſum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipſum D, per E. Dico ipſis A, B, C, inueniri poſſe quartum proportionalem, immo ipſum E, eſſe quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; [c] fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per conſtructionem. Igitur qui ſub extremis A, E, continetur, æqualis eſt ei, qui ſub B, C, ſecundo, & tertio cōtinetur; [d] Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuētus eſt E, ipſis A, B, C, quartus ꝓportionalis.

[c] 9. pron.
[d] 19. ſept.

SED iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A,B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalẽ. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E; ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A,B,C, E, proportionales ſunt, [a] erit numerus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; [b] metietur A, ipſum D, per E: ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſsit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis conſiderauimus, an poſsit, &c. Quod erat faciendũ.

A,4. B,6. C,9. E---- D,54.
A,3. B,4. C,10. E---- D,40.

a 19. ſept.
b 7. pron.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16.17.18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primũ, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3.8. ſi quadratus numerus ſecundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$. *hoc modo. 3.8.*$21\frac{1}{3}$. *Quia enim diuiſis 64. per 1. fit numerus* $21\frac{1}{3}$. *producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis* $21\frac{1}{3}$. *per diuiſorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8. in ſe; [c] erunt 3. 8.* $21\frac{1}{3}$. *continue proportionales.*

c 20. ſept.

DATIS autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9.6.20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertiũ genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$. *hoc modo 9.6,20.*$13\frac{1}{3}$

Cum enim diuiſis 120. per 9. fiat $13\frac{1}{3}$. *producetur numerus diuiſus 120. ex multiplicatione Quotientis* $13\frac{1}{3}$. *per diuiſorem 9. ex ijs, quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autẽ idem numerus diuiſus ex ſecundo in tertium. [a] Igitur quatuor numeri 9.6.20.*$13\frac{1}{3}$. *proportionales ſunt.*

a 19. ſept.

EX his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus commandinus, quatuor membris hoc problema abſoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; Aut non deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quo nam modo diligentiſſimi Euclidis interpretes, & in alijs quidẽ demonſtrationibus vigilantiſſimi, in ſecundo membro huius problematis demonſtrando dormitarint, & quaſi ſui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, cumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati non ſint deinceps proportionales, ſed eorum extremi inter ſe primi, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa Nam falſitas huius rei perſpicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. ſunt inter ſe primi, & nihilominus eis adiungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, eſſe vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio ſit ſubdupla? Idem videri poteſt in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3.9.4.12. Item 2.10.3.15. Item 5.10.6.12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium ſunt inter ſe primi, cum tamen ipſis adiungatur poſterior quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartum proportionalem. Quod autem vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare contendunt, perſpicuum fiet, ſi demonſtrationem ipſam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter ſe primi. Dico ipſis inueniri nullo modo poſſe quartum proportionalem. Si enim poteſt inueniri, ſit ille D, ita vt ſit quẽadmodum A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed ſunt A, C, inter ſe primi, [a] & ob id minimi. [b] Igitur metientur æque ipſos C, E, nimirum A, ipſum C; & C, ipſum E. At vero & A, ſe ipſum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter ſe. Quod fieri non poteſt. Ipſis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

A,3. B,6. C,8. D,16. E ---

[a] 23. ſept.
[b] 21. ſept.

HÆC eſt eorum demonſtratio; in qua aſſumunt eſſe vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri poſſe, nuſquam demonſtrarunt: Immo hoc ipſum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis poſſit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc conſtet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro conceſſo aſſumant, vt hic idem fieri non poſſe, oſtendant; liquido conſtat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonſtrando. Quin etiam, quotieſcunque quatuor numeri dantur proportionales, ſed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter ſe ſunt, quales ponuntur eſſe A, B, C, D; nulla ratione fieri poteſt, vt detur alius, ad quem ita ſe habeat quartus, ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquam conceſſum, atque probatum aſſumunt; quandoquidem ſine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeat quartus D, vt B, ſecundus ad C, tertiũ. Hoc vero non poſſe fieri, facile demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, ſintque A, & C, primus, & tertius, inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, vt ſit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, ſi poteſt fieri, vt B, ad C,

ita D, ad E. Eſt ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipſi oſtenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo fieri poteſt, vt D, ad E, ſit, quemadmodum B, ad C. Quare apertiſſime falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.

A,4. B,12. C,3. D,9. E ---

PRIMVM vero membrum perſpicue & aperte oſtendunt. Nam ſi tres numeri deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; [a] manifeſtum eſt, ex demonſtratis, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſoluimus.

[a] 17. noni

THEOR. 18. PROPOS. 20.

21.

PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorũ numerorũ.

SINT propoſiti primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros. [b] Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas EF. Aut ergo totus D F, primus eſt, aut non primus. ſit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures propoſita multitudine A, B, C.

A,2. B,3. C,5.
30 1
D ----------- E . F

[b] 38. ſept.

SED iam non ſit primus D F. [c] Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipſorũ A, B, C, eundẽ eſſe. Si namque G, ſit idẽ, qui vnus ipſorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipſum D E; & G, eundẽ DE, metietur. Quare G, metiens totum DF, & detractum D E, [d] metietur quoq; EF, reliquũ, numerus vnitatẽ. Quod eſt abſurdum. Ergo G, primus non eſt idem, qui vnus ipſorum A, B, C; Ac pro-

A,3. B,5. C,7.
105 1
D --------------- E. F
53
G -------

[c] 33. ſept.
[d] 11. prop.

inde inuenti ſunt primi numeri A,B,C,G, plures propoſita multitudine primorum numerorũ A,B,C. Eademq; via plures inuenientur quam A,B,C,G, ſi ſumatur minimus, quem ipſi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema inſtar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propoſitis, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum.

NAM ſi primi quotcunque propoſiti ſint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuerſum, videlicet D F, ſi primus eſt, vel certe G, qui ipſum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium ſextum inueniemus; & ſic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

22. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compoſitum AD, parem eſſe. Cum enim A B, B C, CD, ſint pares, habebunt ſinguli ſingulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipſius A B; & F, ipſius BC; & G, ipſius CD. Quoniam igitur eſt vt AB, ad E, ita B C, ad F; & CD, ad G; (quod ſemper ſit proportio dupla.) [a] erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E,F,G, ſimul. Eſt autem AB, ipſius E, duplus Igitur & totus A D, compoſiti ex E,F,G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F,G, compoſitum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

A......B....C........D
E...F,.. G....

[a] 12. ſept.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipſornm ſit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D. D E. Dico & totum compoſitum A E, parem eſſe. Cum enim A B, BC, CD, DE, ſint impares; differet quilibet vnitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [a] Quare, & compoſitus ex ipſis par erit. Eſt autem & multitudo vnitatum detractarum par. [b] Igitur & totus A E, compoſitus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat oſtendendum.

A...B.....C.......D.........E

[a] 21. noni

[b] 21. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorũ multitudo impar eſt, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compoſitum, imparem eſſe. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione;

A . . . . B . . . C . . . . E . D

ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus CE, par. a Eſt autē & A C, compoſitus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. b Igitur & AE, compoſitus ex paribus AC, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod oſtendendum erat.

a 22. noni

b 21. noni

SCHOLIVM

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate c Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rurſus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari ſola vnitate differat. Quod eſt propoſitum.

c 21. noni

25.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par CB. Dico & reliquum AC, parem eſſe. Aut enim CB, par detractus dimidia pars eſt ipſius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor. Sit primū dimidia pars.

A . . . . . . C . . . . . . B

Cum igitur ipſi C B, pari æqualis ſit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

SED iam CB, par detractus maior ſit, vel minor dimidia parte ipſius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; ſit D B, dimidia pars ipſius A B; & E B, dimidia ipſius C B. Itaque cum ſit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad EB, dimidiū; erit permutando vt AB, ad C B, ita DB, ad EB; & diuidēdo vt A C, ad D E; ita C B, ad EB; Rurſuſque permutando, vt A C, ad D E, ita CB, ad E B. Atqui C B, ipſius E B, duplus eſt: Igitur & AC, ipſius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod DE, ſit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detrahatur, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . . . C . . D . . . E . . . . B

A . . . . . . D . . . C . . E . . B

THEOR. 23. PROPOS. 25. 26.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus ſit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; a erit & reliquus A D, par. Dempta ergo vnitate CD, reliquus A C, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . C . D . . . . B

a 24. noni

THEOR. 24. PROPOS. 26. 27.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem eſſe. Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CaB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari A D, par auferτur C D; b erit & reliquus A C par. Quare ſi ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demōſtrādū.

A . . . . C . . . . . . D . B

b 24. noni

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

A . D . . . . C . . . . . . B

EX impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum AC, imparem eſſe. Detracta enim A D, vnitate ex impare A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus DC, par quoq; erit; a 24. noni Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

29. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit:

A . . . B . . . .
C. . . . .

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot in A, ſunt vnitates. Quare cum B, ſit par; componetur C, ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot ſunt vnitates in A; [b] Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat.

b 21. noni

SCHOLIVM.

EADEM demonſtratione oſtendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM

NAM rurſus C, componetur ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot in A, continentur unitates, &c.

A . .   *B* . . . .
C . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in ſe multiplicatum procreare parem: vt patet, ſi pares A, & B, ponantur æquales.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

A . . .   B . . . . . .
C. . . . .

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparē eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot ſunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, ſit impar; componetur C, ex imparibus ipſis B, æqualibus, quorum multitudo impar eſt, nimirũ æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. [a] Igitur C, impar erit. Quocirca ſi impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

a 23. noni

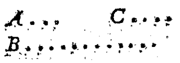
COROLLARIVM.

HINC ſequitur, Imparem numerum in ſe multiplicatum gignere imparem: vt conſtat, ſi impares A, & B, ponantur æquales.

EX

EX CAMPANO.

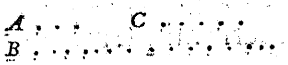
NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.



METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem eſſe. Nam ſi impar ſit; [a] erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod eſt abſurdum, cum ponatur par. Eſt ergo C, par.

[a] 29. noni

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

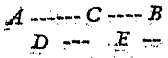


METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem eſſe. Si enim ſit par; [b] erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod eſt abſurdum; cum impar ponatur. Eſt ergo C, impar.

[b] 28. noni

SCHOLIVM.

EX his clariſſimè quoque demonſtrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non poſſe accommodari: Id quod etiam in ſcholio propoſ. 14. huius lib. aliter oſtendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonſtraturos. Secetur enim, ſi fieri poteſt, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in CB, factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C.



Aut igitur vtraque pars AC, CB, impar eſt, aut maior A C, impar, & minor CB, par; aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut deniq; vtraque pars A C, C B, par. Sit primum vtraque pars AC, C B, impar, [c] ideoque totus numerus A B, par. [d] Igitur qui fit ex A B, in CB, par eſt: qui vero ex A C, in ſe fit, impar eſt, ex Coroll. huius propoſ. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in ſe; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non poteſt.

[c] 22. noni
[d] 28 noni.

DEINDE ſit A C, impar, & C B, par, ideoque ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus A B, impar. [a] Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par eſt: & numerus ex impare A C, in ſe genitus, impar, ex coroll. huius propoſ. 29. erit rurſus ille par huic impari æqualis. quod eſt abſurdum.

[a] 28. noni

TERTIO ſit A C, par, & C B, impar; ideoque ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus A B, impar. [b] Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem CB, factus, impar eſt: & numerus ex pare A C, in ſe genitus, par, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. erit rurſus ille impar huic pari æqualis. quod abſurdum eſt.

[b] 29. noni

QVARTO ſit vtraque pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad CB; [c] erunt D, E, inter ſe primi: ac proinde ambo pares non erunt, ſed vel vterque impar, vel vnus impar; & alter par. Et quia eſt, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad AC, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus DE, ad D: [d] Eſt autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex AB, in CB, æqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoque vt totus D E, ad D, ita D, ad E, [e] ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipſius D. Totus ergo numerus D E, ſectus eſt in partes D, E, quarum vel vtraque impar eſt, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto DE, in partem E, æqualis ſit quadrato alterius partis D. quod fieri non poſſe, iam demonſtratum eſt in numero A B, quando vtraque pars A C, C B, vel impar eſt, vel vna impar, & altera par. Conſtat ergo propoſitum.

[c] 24. ſept.
[d] 20. ſept.
[e] 20. ſept.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiũ quoq; ipſius B, metiri. Metiatur A, ipſũ B, per C. Erit ergo,

ergo, ex ijs, quæ in antecedente propoſ. ex Campano demonſtrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiā partem habebit. Itaque cum A metiatur B per C, [a] metietur quoque C, ipſum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipſius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionē lib. 7 docuimus. Quoniam vero eſt vt C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B: Eſt autem C, pars ipſius B, denominata ab A, vt oſtenſum eſt; erit & dimidium ipſius C, dimidij ipſius B, pars ab eodem A, denominata, [b] Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendū.

A . . .   C . . . .
B . . . .

[a] 8. pron.

[b] 40. ſept.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

34.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit; & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C. Dico A, ad C, quoque primum eſſe. Si enim A, C, non ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis numerus, qui ſit D; qui neceſſario impar erit. Nā ſi ſit par, cū metiatur imparem A; [c] erit A, factus ex D, pari in eum numerū, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metitur; (eſt enim C, par, cum dimidium habeat B.) [d] metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipſos A, B, primos inter ſe metitur Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt. Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad aliquem numerum primus ſit, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . . .   B . . . .
C . . . .   D - - - -

[c] 28. noni

[d] 30. noni

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus eſt, primum quoque eſſe non ſolum ad eius duplum, vt Euclides demonſtrauit, ſed etiam ad eius quadruplum, octuplum, ſedecuplum, & ſic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam ſi primus eſt ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus eſt: Et ſimiliter ad octuplum, qui quadrupli duplus eſt, &c.

[a] 31. noni

THEOR. 30. PROPOS. 32.

35.

NVMERORVM à binario duplorum vnuſquiſque pariter par eſt tātum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque ſint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, eſſe pariter pares tantum. Quod enim ſint pariter pares, perſpicuum eſt, Nam expoſita vnitate, cum A, ſit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [b] Quare A, quēlibet ipſorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem ſequentem metietut per aliquem ipſorum A, B, C, D, E; qui cum omnes ſint pares, vtpote dupli a binario; metietur quemlibet ipſorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

[b] 11. noni

QVOD autem ijdem numeri ſint pariter pares tantum, liquido etiam conſtat. Cum enim A, B, C, D, E, ſint ab vnitate continue proportionales, ſitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirū binarius; [c] nullus alius quemlibet ipſorum metietur, præter ipſos A, B, C, D, E;

[c] 13. noni

P   qui

qui cum ſint omnes pares ; metietur quemlibet ipſorum par numerus per parem numerum tantum : Ac propterea quilibet pariter par eſt tantum . Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui ſint pariter pares tantum.

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.

I ---- H ---- G -----

Sint. n. A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic demonſtratis omnes ſunt pariter pares tantum. Dico nullum alium eſſe pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo ſi ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantũ inueniri, nullo relicto. Si enim fieri poteſt, ſit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia ſit H. Erit igitur H, numerus par : (Nam ſi dicatur impar, cum ſit ipſius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipſum G, per H, numerum imparem ; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod eſt abſurdum : ponitur namque pariter par tantum) cuius rurſum dimidia pars ſit I. Erit igitur rurſum I, par numerus; (Nam ſi dicatur impar, cum ſit ipſius G, pars quarta ; metietur numerus par 4. ipſum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod eſt abſurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit ſemper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipſius I, dimidia pars vnitas, ita vt ſit I, binarius. Igitur H, G, ſunt a binario I, dupli ; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipſorum A, B, C, D, E, F. ponitur autẽ, non eſſe. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius pariter par eſt tantum, præter eos, qui a binario ſunt dupli.

36.

THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem : Pariter impar eſt tantum.

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, eſſe pariter imparem tantum. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniã A, dimidium habet imparem; metietur binarius numerus par ipſum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar eſt. Quod autem idem A, ſit pariter impar tantum, hoc modo demonſtrabimus. Sit B, dimidia pars ipſis A; & C, binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantum ; ipſe erit quoque pariter par. Quare cum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur fit A, ex D, in E: ſed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartũ æqualis eſt ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium, [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipſum B, metietur, par imparem. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca ſi numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . .

A . . . .
B . . . . .   C . .
D -----   E -----

[a] 9. pron.

[b] 19. ſept.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi omnium numerorum imparium dupli ſumantur, inuenientur omnes numeri, qui ſunt pariter impares tantum.

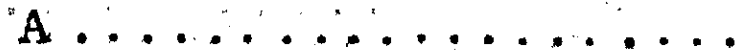
Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

Quod enim quilibet illorum ſit pariter impar tãtum, conſtat ex hac propoſitione ; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi ſoli ſint pariter impares tantum, perſpicuum erit ex ſequenti theoremate, in quo demõſtratur, omnes pares, qui nec a binario ſunt dupli, neque dimidios habent impares, eſſe pariter pares, & pariter impares. Cum ergo *nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum; manifeſtum eſt, nullum alium, præter ipſos, eſſe pariter imparem tantum; ſed vel eſſe pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparem.*

37. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.

PAR numerus A, neque ſit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, ſed parem. Dico A, & pariter parem eſſe, & pariter imparem. Quod enim ſit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par eſt.



QVOD autem idem A, ſit etiam pariter impar, ita oſtendemus. Diuiſo A, bifariam, & eius dimidio rurſus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam ſi in binarium incideremus, eſſet A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod eſt abſurdum. Igitur cum in imparem incidamus; metietur ille impar ipſum A, per numerum parem: Alias ſi per imparem metiretur, [a] cum impar imparem multiplicans faciat imparem; eſſet A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod eſt abſurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo viciſsim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur eſt & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque a binario duplus ſit, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] *29. noni*

SCHOLIVM.

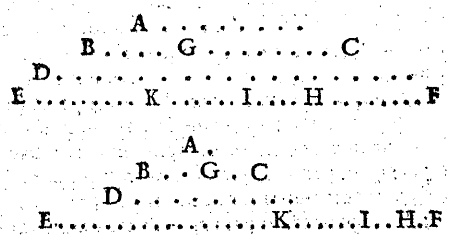
FACILE ex hic inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares ſint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario ſunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propoſ. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. ſcripſimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo: Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, ſecundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico eſſe vt BG, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, ſimul. Detrahatur F I, ipſi B C, & F K, ipſi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis eſt ipſi B C, & ablatus FH, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero eſt vt A, ad BC, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt EF, ad D, ita D, ad BC, & BC, ad A; Atque



A.
B . . G . C
D . . . .
E . . . . .K. . . . . .I. . H . F

eſt K F, ipſi D, & I F, ipſi B C, & H F, ipſi A, æqualis: Erit quoque vt EF, ad K F, ita K F, ad IF, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt EK, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad HF; a Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, HF, hoc eſt, totus E H, ad D, B C, A, ſimul, (quibus ſumpti ſunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc eſt, vt B G, ad A; ſunt enim B G, & A, ipſis I H, & HF, æquales. Quare ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 12.ſept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam ſummæ quotcunque numerorum cõtinue proportionalium, ſi modo primus, ſecundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim ſit vt exceſſus ſecundi ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes; Si primus a ſecundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus ſecundi ad primum, ita reliquus vltimi ad aliũ: Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota ſumma. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuidatur in exceſſum ſecundi: vt liquet ex ſcholio propoſ. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus eſt, ſunt, exceſſus ſecundi, primus, & exceſſus vltimi: Vt in exemplo appoſito, ſi primus numerus, nimirũ vnitas, detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui exceſſus, 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe vt 2. ad 1. ita 2186. ad ſummã omniũ, excepto vltimo, ſi ſecũdus numerus 1. multiplicetur per tertiũ 2186. fiet numerus 2186 qui ſi diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187. qui ſi addatur ſummæ inuentæ 1003. procreabitur ſumma omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

THEOR. 34. PROPOS. 36.

39.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, eſſe numerũ perfectum. Quot enim ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ab E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; a Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis eſt facto ex D, ſecundo in E, tertium: Factus eſt autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; b ideoque I, ipſum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipſius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, ſintque reliqui exceſſus M, N. c Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E. (Cum enim G, duplus ſit ipſius E, ablatusque ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E, G, H, I, ſimul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ------ 62. H, 124. I, 248. F ------ 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ----- P ----

a 19.ſept.
b 7.pron.
c 35.noni

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D.16.
E,31. G——62. H,124. I,248. F—— —496
K,31.M,31. L, 31. N. 465.
O—— P——

compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex LN, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, ſimul. Quare cum vnitas, & omnes numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipſum F; (Cum enim F, factus ſit ex E, in D; [a] metietur D, ipſum F; [b] atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A,B,C, [c] qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cum I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, [d] metientur quoque eundem F, numeri E,G,H, [e] qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, vt mox oſtendemus; Erunt unitas & numeri A,B,C,D,E,G,H,I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cum æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C,D,E,G,H,I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; [f] atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium; [g] ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cũ A,B, C, D, ab unitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [h] vltimum D, nullus alius, præter A,B,C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A,B,C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipſum P, metietur. Cum ergo E, primus ſit, [i] erunt E, & P, inter ſe primi; [k] ideoq; in ſua proportione minimi: [l] Ac proinde æque metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. [m] Nullus vero alius præter A,B,C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorũ A,B,C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B,C,D, tot ab E, ſumantur dupli E,G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; [n] Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, [a] atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt abſurdum. ponitur enim O, diuerſus ab omnibus A,B,C,D,E,G,H,I. Non igitur alius numerus O, ipſum F, metitur, ſed ipſum ſoli A, B, C,D,E,G,H,I, metiuntur. Quam ob rem, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 7. pron.
[b] 11. pron.
[c] 11. noni
[d] 11. pron.
[e] 11. noni
[f] 9. pron.
[g] 19. ſep.
[h] 13. octaui
[i] 31. ſept.
[k] 23. ſept.
[l] 21. ſept.
[m] 13. octa.
[n] 19. ſept.

[a] 19. ſept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam ſummã colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorũ, perfectus. Quod ſi ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continue dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab vnitate, excluſa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipſa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facile ex ſubiectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1.2. primus eſt; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1.2.3. Item, quia cõpoſitus ex his 1.2.4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 7. in 4. eſt perfectus habens has partes aliquotas 1.2. 4. 7. 14. At vero quia compoſitus ex his 1.2.4.8. hoc eſt, 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compoſitus ex his 1.2.4.8.16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1.2.4.8.16.31.62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam propor-

proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. ſeptimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, expoſuimus. hinc exordientes.

I

QVOLIBET numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuiſus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiſo A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in E, tertium; [a] erit vt B, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod eſt propoſitum.

A, 48.
B, 8. C, 3.
D, 6. E, 16.

[a] *19. ſept.*

I I.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, ſint Quotiens F, G, H, I. Dico eſſe, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifeſtum eſt ex theoremate 1. proxime demonſtrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Itẽ cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita H, ad G. Itèm cum duo D, E, diuidentes A; faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, ſi plures fuerint: Quod eſt propoſitum.

A, 48.
B, 3. C, 4. D, 8. E, 6.
F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

I I I.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales eſſe. Quoniam enim per 2. theorema eſt, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc eſt, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc eſt, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod eſt propoſitum.

A, 15.
B, 1. C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15, G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

IIII.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum ſumma D: Et totidem alij E, F, G, quorum ſumma H; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A, B, C, ſigillatim, ita H, ad

A, 3. B, 6. C, 20.
D, 29.
E, 6. F, 12. G, 40.
H, 58.

E, F, G, ſigillatim. Cum enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G. quod eſt propoſitum.

QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod eſt propoſitum.

DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A. ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdẽ proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq; proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quæq; per ſuum, diuidatur. Eademq; ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſ.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes;

Et horum ſecundorum Quotiẽtum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitũ: procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT cõtinue proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorũ ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotiẽtes F, G, H, I, & horum ſumma K, per eos diuiſæ faciat Quotientes L, M, N, O, Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuorſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandẽ continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A, B, C, D: Et Quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quã numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cũ ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L. &c. quod eſt propoſitum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8

E. 15.

F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

K, 2S $\frac{1}{8}$.

L, $1\frac{7}{8}$. M, $3\frac{3}{4}$. N, $7\frac{1}{2}$. O, 15.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorũ ab extremis æqualiter diſtantium, vel deniq; (ſi Quotientum numerus

merus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D, E, F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum ſumma O. Dico ſumma O, æqualẽ eſſe numerũ qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, ſunt continue proportionales cõuerſo ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H. [a] *Igitur idem numurus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M. Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H, I, K, L, M, N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N; producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32.
G, 63.
H, 63. I, $31\frac{1}{2}$. K, $15\frac{3}{4}$. L, $7\frac{7}{8}$. M, $3\frac{15}{16}$. N, $1\frac{31}{32}$.
O, $124\frac{1}{2}$.

[a] 19. ſept.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè proportionales A, B, C, D, E, quorũ ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum ſumma M. Dico ſumma M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in ſeipſum. Quod enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L. & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, cõtinue proportionales ſunt; [b] *erit numerus ex H, in K, genitus, id eſt, ſumma M, æqualis numero, qui ex I, in ſeipſum ducto generatur. quod eſt propoſ.*

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16.
F, 31.
G, 31. H, $15\frac{1}{2}$. I, $7\frac{3}{4}$. K, $3\frac{7}{8}$. L, $1\frac{15}{16}$.
M, $60\frac{1}{16}$

[b] 20. ſept.

HINC fit, quando numerus terminorum eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius latus, ſiue radix, eſt medius terminus.

ITAQVE ſi inueniendi ſint quotcunque numeri continue proportionales in data proportione, quorũ ſumma æqualis ſit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant: accipiendi ſunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam ſi eorum ſumma per ipſos ſigillatim diuidatur; erunt Quotientes quæſiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perſpicuum eſt. Quod ſi deſiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum ſumma ſit numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix ſit medius terminus: ſumendi ſunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumq; ſumma per eos ſigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæſiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile ſanè eſt, poſſe reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium ſumma æqualis ſit producto ex primo in vltimum; & ex quibuſlibet duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant, inter ſe multiplicatis; & denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio termino in ſeipſum multiplicato.

SIC etiam ſi quis optet duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero producto ex vno in alterum, ſumat duos numeros in data proportione quoſcunque, eorumq; ſummam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæſitos, vt oſtenſum eſt: quia videlicet eorum ſumma æqualis eſt numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc eſt, in ſecundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione ſeſquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque ſumma 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. ſunt numeri quæſiti. Habent enim proportionem ſeſquiquintam datam, & tam eorum ſumma, quàm numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum

DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem, & numerator C, ſit vnitas. Dico ita eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quòd minutia AB, diuiditur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot vnitates ſunt in A, ita vt quælibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B.[a] Igitur eadem pars eſt vnitas C, numeri A, quæ minutia C B, minutiæ A B; ac proinde eſt, vt vnitas C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia AB, ad minutiam CB. quod eſt propoſitum.

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

[a] 20. defin.

QVONIAM vero minutiæ ſunt fractiones, ſiue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuſpiam numeri, (Neque enim eorum ſententiam probare poſſum, qui exiſtimant, eas reſpectu ſolius vnitatis eſſe accipiendas; propterea quòd falſo putant, earum demonſtrationes non poſſe omnes explicari in numeris integris, ſed ſolum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonſtrationes quibuſuis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonſtrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam ſtudioſus lector addiſcat, veras eſſe demonſtrationes, quas afferimus.

SINT

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. eſt 4. & $\frac{6}{11}$. ſunt 24. perſpicuum eſt, ita eſſe 4. ad 24. vt eſt numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porrò propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. in vniuerſum de quibuſcunq; duabus minutijs eiuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiuſuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia.

SIT minutia quæcunque A B. Dico eſſe numeratorem A, ad denominatorem B, vt eſt minutia AB, ad ſuum integrũ. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis ſit eidem denominatori B, ita vt ſuo integro ſit æqualis. Quando enim numerator denominatori eſt æqualis, minutia ſuo integro æquiualet; quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipſum integrum diuiſum eſt, ac proinde totum integrum contineat.[a] Quoniã igitur eſt, vt A. ad C, ita minutia A B, ad minutiam CB: Et vt C, ad D, ita minutia CB, ad minutiam DB; erit ex æquo vt A, ad D, hoc eſt, vt numerator A, ad denominatorem B, ipſi D, æqualem, ita minutia AB; ad minutiam D B, hoc eſt, ad integrum. quod eſt propoſitum.

A, 3. C, 1. D, 5.
B, 5. B, 5. B, 5.

[a] 1. huius

ALITER. Sit primum datæ minutiæ A B; numerator A, vnitas, ita vt minutia ſit pars aliquota integri C, ſiue C, ſit vnitas, ſiue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipſi AB, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas eſt in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, ſit pars numeri B, ab ipſo B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; eadem pars erit vni-

A, 1. C, 1.
B, 5. C, 30.

Q tas

a 20. defin. *tas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C.* [a] *Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod eſt propoſitum.*

DEINDE *non ſit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ A B.* [b] *Et quia eſt, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutiæ A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proxime demonſtrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod eſt propoſitum.* — b 1. huius

A,3. D,1. C,1.
B 5. B,5. C,30.

ITAQVE *ſi data minutia* $\frac{3}{5}$. *ſit huius numeri integri 30. erit eius* $\frac{1}{5}$. *numerus 6. ac proinde* $\frac{3}{5}$. *numerus 18. vbi vides ita eſſe 18. ad 30. vt eſt 3. ad 5. numerator ad denominatorem.*

III.

MINVTIA quælibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata.

SIT *qualibet minutia A B. Dico eam eſſe partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam.* [c] *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad ſuum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrũ C, ſit pars denominatoris B, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore B.) ab ipſo denominatore B, denominata; (Cum enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrum toties acceptum, quoties vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore) erit quoque minutia A B, numeratoris A, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties eſt vnitas in numeratore A.) eadem pars a denominatore B, denominata. quod eſt propoſitum.* — c 2. huius

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

PONATVR *minutia* $\frac{3}{5}$. *eſſe huius integri 30. cuius* $\frac{3}{5}$. *ſunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia* $\frac{3}{5}$. *ſumitur reſpectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) liquido conſtat, 18. eſſe quintam partem numeratoris, hoc eſt, trium vnitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquã, a denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt, quinque vnitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.*

IIII.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD *prima propoſitione oſtẽſum eſt de duabus minutijs, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonſtratur hic de quibuſuis minutijs. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt A, ad C, numerator ad numeratorem.* [a] *Quia enim eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B;* [b] *(Nam, cum ſit, vt C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B. quod eſt propoſitum.* — a 2. huius — b 2. huius

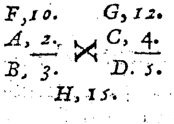
A, 6. C, 3.
B, 7. B, 7.

DATAE minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. ſint huius integri 28. cuius $\frac{6}{7}$. ſunt 24. & $\frac{3}{7}$. ſunt 12. vbi perſpicuum eſt, ita eſſe 24. ad 12. vt eſt numerator 6. ad numeratorem 3:

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam CD; vt eſt F, ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H; [a] erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, [b] ita eſt minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia A B, ad integrum, ita F, ad H. Rurſus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D. ad C, ita eſt integrum ad minutiam CD. (Nam [d] cum ſit, vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum; erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam C D. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiam C D. quod eſt propoſitum.



[a] 18. ſept.
[b] 2. huius
[c] 18. ſept.
[d] 2. huius

F.	A B.
H.	Integrum.
G.	C D.

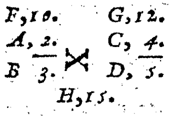
SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. ſint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiuſdem, 24. Perſpicuum autem eſt, ita eſſe 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati ſunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE ſi productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: ſi minor, minor: Et ſi maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc eſt demonſtratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoſcendum, vtra duarum minutiarum maior ſit.

VI.

INTEGRVM ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita eſſe integrum ad ſummã minutiarum A B, C D, vt eſt H, ad ſummam numerorum F, G. [a] Quoniam enim eſt, vt minutia A B, ad minutiã CD, ita F, ad G; erit componendo, vt ſumma minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita ſumma numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita eſt G, ad H, (Nam [b] vt minutia C D, ad integrum, ita eſt C, ad D. [c] Et vt C, ad D, ita eſt G, ad H: propterea quòd C, D, ipſum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt ſumma minutiarũ AB, CD, ad integrum, ita ſumma numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad ſummam minutiarum AB, CD, ita H, ad ſummam numerorum F, G. quod eſt propoſitum.



[a] 5. huius
[b] 2. huius
[c] 18. ſept.

AB, CD.	F, G.
CD.	G.
Integrum.	H.

SINT rurſus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$, ſunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem 24. ac proinde ſumma minutiarum 44. Vbi vides, ita eſſe integrum 30. ad hanc ſummam

ſummam 44. vt eſt 15. ex denominatoribus productus ad 22. ſummam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

V. I I.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita eſſe minutiam AB, ad minutiam AC, vt eſt denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [a] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt aut D, ad E,* [b] *ita eſt minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod eſt propoſitum.*

D, 105. E, 35.
A, $\frac{5.}{7.}$ ✕ A, $\frac{5.}{21.}$
B, C,

[a] 17. ſept.
[b] 5. huius

DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. ſint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. ſunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiuſdem 10. Manifeſtum autẽ eſt, ita eſſe 30. ad 10. vt poſterior denominator 21. ad priorem 7.

V I I I.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, ſitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales eſſe. [a] *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo ſunt minutiæ AB, CD. quod eſt propoſitum.*

A, $\frac{3.}{4.}$ C, $\frac{9.}{12.}$
B, D,

[a] 2. huius

SED ſint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico eſſe, vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales ſint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [b] *Eſt autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod eſt propoſitum.*

[b] 2. huius

DEINDE ſit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorẽ eſſe minutiam AB, quàm CD. [c] *Cum enim ſit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrũ; & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AB, ad integrum, quàm minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo eſt minutia AB, quàm minutia CD. quod eſt propoſitum.*

A, $\frac{3.}{4.}$ C, $\frac{2.}{3.}$
B, D,

[c] 2. huius

VERVM ſit iam minutia AB, maior, quàm minutia CD. Dico maiorem eſſe proportionem A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quàm minutiæ CD, minoris ad idem integrum. [d] *Cũ ergo ſit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod eſt propoſitum.*

[d] 2. huius

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. integer numerus ſit 24. cuius tã $\frac{3}{4}$. q̃ $\frac{9}{12}$. ſunt 18. ac proinde æquales ſunt minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$ eiuſdem numeri 24. ſunt 16. vbi manifeſtum eſt, nume-

rum 18. maiorem eſſe numero 16. ideoq́; minutiam $\frac{3}{4}$, maiorem eſſe minutia $\frac{2}{3}$.

I X.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores: ſunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior eſt: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator.

$$\frac{A,\ 6.}{B,\ 9.} \qquad \frac{C,\ 2.}{D,\ 3.}$$

SINT duæ minutiæ AB, CD, ſitq́; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipſas æquales eſſe: Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] *ac proinde minutiæ æquales erunt. quod eſt propoſitum.*

[a] 8. huius

SED. ſint iam minutiæ æquales AB, & CD. Dico ita eſſe A, ad C, vt B, ad D. [b] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod eſt propoſ.*

[b] 8. huius

$$\frac{A,\ 6.}{B,\ 9.} \qquad \frac{C,\ 3.}{D,\ 5.}$$

DEINDE ſit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem eſſe minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quã C, ad D, [c] *ac propterea maior erit minutia AB, quàm CD. quod eſt propoſitum.*

[c] 8. huius

VERVM ſit iam minutia AB, maior quàm CD. Dico maiorem proportionem eſſe A, ad C, quàm B, ad D. [d] *Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod eſt propoſitum.*

[d] 8. huius

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc eſt, 60. æqualem eſſe minutiæ $\frac{2}{3}$. id eſt, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id eſt, 60. maiorem eſſe minutia $\frac{3}{5}$ hoc eſt, numero 54.

X.

DVAS minutias diuerſatum denominationum ad alias duas eiuſdem denominationis illis æquales reducere.

$$\begin{array}{ccccc} E,\ 10. & & & F,\ 9. \\ A,\ \frac{2.}{3.} & & \times & C,\ \frac{3.}{5.} \\ B, & & & D, \\ & & G,\ 15. & \end{array}$$

DVÆ minutiæ AB, CD, habeant diſſimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarũ numeratores E, F & denominator idem G, eſſe æquales minutijs AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; [a] *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* [b] *Quare minutiæ AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* [c] *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* [d] *Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod eſt propoſitum.*

[a] 18. ſept.
[b] 8. huius
[c] 18. ſept.
[d] 9. huius

X I.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

$$A,\ 1. \qquad \frac{B,\ 6.}{C,\ 6.}$$

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiã BC, vnitati A, æqualem eſſe. [e] *Quia enim eſt, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Eſt autem B, ipſi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id eſt, vnitati, erit æqualis. quod eſt propoſitum.*

[e] 2. huius

DEINDE ſit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator.

A, 7.	B, 42.
D, 1.	C, 6.

tor. Dico minutiã BC, integro A, æqualem eſſe. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia A D, tot vnitatibus æqualis, quoties vnitas eſt in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarum AD, BC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandẽ proportionem habeant, [a] ipſæ inter ſe æquales erunt. Quare cum minutia A D, ſit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui eſt vnitas; erit quoque minutia B C, eidem integro A, æqualis. quod eſt propoſitum.

[a] 8. huius

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

A, 3.	C, 6.	A, 3.
B, 8.	B. 8.	D, 4.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par eſt, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam eſſe minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, CB, eundem habeant denominatorem; [b] erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad A B, minutia ad minutiam. Eſt autem C, ipſius A, duplus ex conſtructionẽ. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod eſt propoſitum.

[b] 4. huius

RVRSVS quia minutiæ A B, A D, eundem habent numeratorem; [c] erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Eſt autem B, ipſius D, duplus; per conſtructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod eſt propoſitum.

[c] 7. huius

A, 6.	A, 6.	D, 3.
B, 11.	C, 22,	B, 11.

DEINDE dimidianda ſit minutia A B. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par eſt, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtrãq; minutiam A B, D B, dimidium eſſe minutiæ A B. Cum enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem; [a] erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo B, ſit per conſtructionem ipſius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod eſt propoſitum.

[a] 7. huius

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denominatorem; [b] erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, ſit ipſius A, dimidium, ex conſtructione; erit & minutia DB, minutiæ AB, dimidium. quod eſt propoſitum.

[b] 4. huius

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. ſi vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri poteſt) ſi denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ ſumetur pars tertia, quarta, &c. ſi denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri poteſt) ſi numeratoris tertia pars, quarta, &c. ſumatur. Quod eodem modo demonſtrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, reſpectu integri numeri E, ſiue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat ſimplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem eſſe ſimplici minutiæ F G, reſpectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rurſus H, ex C, in B. Et a 2. huius

[a] Et quoniam eſt, vt A, ad B, ita minutia AB, ad ſuum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum eſt E: [b] Item vt A, ad B, ita eſt F, ad H; quòd A, B, ipſum C, multiplicantes faciãt F, H: Erit quoque, vt minutia AB, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rurſus [c] quia eſt, vt C, ad D, ita minutia C D, ad ſuum integrum E: [d] Item vt C, ad D, ita eſt H, ad G; quod B, ipſos C, D, multiplicans fecerit H, G: Erit quoq; vt C D, minutia ad ſuum integrum E, ita H, ad G. Quoniã igitur eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad H: Et vt minutia CD, ad E, integrũ, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ CD; ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E; quòd ſimplex minutia K, æqualis poſita ſit datæ minutiæ A B, minutiæ CD; cum eius valorem reſpectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia ſimplex K, ad integrum E. [e] Cum ergo quoque ſit, vt F, ad G, ita minutia FG, ad idem ſuum integrum E; æquales erunt minutiæ ſimplices K, & FG: ac proinde cum minutia K, æqualis ſit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque ſimplex minutia FG, æqualis datæ minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod eſt propoſitum.

b 18. ſept.

c 2. huius

d 17. ſept.

e 2. huius

F, 6. H, 9.

A, 2. C, 3. E, 1.

B, 3. D, 4. E, 24.

G, 12. K, $\frac{1}{2}$.

A B. F.

C D. H.

E. G.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. ſunt 12. qui numerus eſt $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquiualet qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

SIT primum AB, minutia minutiæ CD. Ex A, in C, fiat E; & ex B, in D, fiat F. [a] Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ AB, reſpectu minutiæ C D; reducta erit data minutia minutiæ ad ſimplicem minutiam E F. quod eſt propoſitum.

a 13. huius

E, 6.

A, 2. C, 3.

B, 3. D, 4.

F, 12.

DEINDE ſit AB, minutia minutiarum C D, E F, ita vt C D, ſit minutia minutiæ E F; & AB, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C; & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe. [b] Nam minutia GH, æqualis eſt minutiæ A B, minutiæ C D, reſpectu minutiæ EF, tãquam integri cuiuſdam. [c] Item minutia I K, æqualis eſt minutiæ G H, (hoc eſt, minutiæ A B, minutiæ CD.) minutiæ EF, reſpectu integri, cuius E F, eſt minutia; & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum. quod eſt propoſitum.

G, 6. I, 6.

A, 2. C, 3. E, 1

B, 3. D, 4. F, 2.

H, 12. K, 24.

b 13. huius

c 13. huius

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductę in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductę, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda ſit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Itẽ ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem eſſe; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicãs AB, facit G, H;[a] erit vt A, ad B, ita G, ad H,[b] ac proinde minutiæ AB, GH, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,[c] metietur C, ipſum F, per D:[d] Metitur autem & vnitas ipſum D, per D. Eadem igitur pars eſt C, ipſius F, quæ vnitas ipſius D. Cum ergo vnitas ſit ipſius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipſius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipſius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia eſt minutiæ F, reſpectu integri G, ſuntque numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;[e] conſtituet C, minutia minutiæ F, reſpectu integri G, minutiam ſimplicem M, (quas minutias G, F, M, ſeorſum ſcripſimus) reſpectu eiuſdem integri G; cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores ſint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus

G, 24.   K, 8.

$\frac{A,\ 2.}{B,\ 3.}$ F, 12. $\frac{C,\ 3.}{D,\ 4.}$

H, 36.   L, 9.

C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$. M, $\frac{1}{8}$.

a 17. sept.
b 11. huius
c 7. pron.
d 2. pron.
e 15. huius

quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus eſt numerus K,) conſtituet minutia C, minutiæ F, reſpectu integri G, minutiã ſimplicẽ eiuſdẽ integri G, cuius numerator eſt unitas, & denominator numerus K, qualis eſt minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ CD, qui conſtituit C, minutiam minutiæ F, reſpectu integri G, pars erit ipſius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipſum G, metietur per K; toties nimirum ſumptus, quoties vnitas eſt in K, numero. Eadem prorſus ratione demonſtrabimus, D, metiri ipſum H, per L, numerum. Quod eſt propoſitum.

XVI.

DVAE minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſsim ducti gignũt numeros æquales, æquales ſunt: Et minutiarũ æqualium numeratores in denominatores viciſsim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: ſintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales eſſe. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis eſt numero F, facto ex C, ſecundo in B, tertiũ;[a] erit vt A, primus ad C, ſecundũ, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem.[b] Quare minutiæ A B, CD, æquales ſunt. VEL ſic.[c] Quoniam eſt, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam C D; Eſt autem E, ipſi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod eſt propoſitum.

E, 24.   F, 24.

$\frac{A,\ 2.}{B,\ 3.} \times \frac{C,\ 8.}{D,\ 12.}$

a 19. ſept.
b 9. huius
c 5. huius

SED

SED ſint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerũ E, æqualem quoque eſſe numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [a] erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem. [b] Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, ſecundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL ſic. [c] Quoniam eſt, vt minutia AB, ad minutia CD, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod eſt propoſitum.

$$\begin{array}{cccc} & E,\ 24, & & F,\ 21. \\ G,\ 1\frac{3}{4} & A,\ \underline{2} & \times & C,\ \underline{7} \\ & B,\ 3 & & D,\ 12. \end{array}$$

DEINDE ſit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque AB, maiorem eſſe minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, ſit ex G, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in B, tertium, [d] erit vt G, primus ad C, ſecundum, ita B, tertius ad D, quartum: Eſt autẽ maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; ꝙ A, maior ſit quã G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D; [e] ac proinde minutia AB, maior erit, quàm minutia CD. VEL ſic. [f] Quoniam eſt, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Eſt autem E, maior quàm F; erit quoque minutia AB, maior quàm minutia CD. quod eſt propoſitum.

VERVM ſit iam minutia AB, maior quàm minutia CD. Dico & numerum E, numero F, eſſe maiorem. Cum enim maior ſit minutia AB, quàm minutia CD, [g] erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quàm A, habebit ad C, eandẽ proportionem, quam B, ad D, qui ſit G. [h] Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartũ, qui ex C, ſecundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quàm ex G, in D; propterea quòd A, maior eſt quàm G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus. VEL ſic. [i] Quoniam eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: Eſt autem AB, minutia maior quàm minutia CD; erit quoq; E, maior quàm F. quod eſt propoſitum.

ATQVE hæc eſt quoque demonſtratio eius regulæ, quam in Arithmetica præſcripſimus ad dignoſcendum, vtra

[a] 9. huius

[b] 19. ſept.

[c] 5. huius

[d] 19. ſept.

[e] 9. huius

[f] 5. huius

[g] 9. huius

[h] 19. ſept.

[i] 5. huius

duarum minutiarum propoſitarum maior ſit. Id quod etiam ad 5. propoſitionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, ſint inter ſe primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, ſed ipſa iam in minimis erit terminis conſtituta. Reducatur enim ſi fieri poteſt, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, ſit æqualis. [a] Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in ſua proportione: [b] ſunt autem & minimi, cum primi inter ſe ſint. quod eſt abſurdum.

$$\begin{array}{ll} A,\ \underline{11}. & C.\ \underline{\vdash} \\ B,\ 12. & D,\ \vdash \end{array}$$

SI vero A, B, non ſint inter ſe primi; [c] ſit eorum maxima menſura C, quæ metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem eſſe datæ minutiæ AB, & in minimis terminis conſtitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; [d] producentur A, B, ex C, in D, E. [e] Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, [f] ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima menſura numerorum A, B, metitur ipſos per D, E; erũt ex coroll. propoſ. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod eſt propoſitum.

$$\begin{array}{ccc} A,\ \underline{36}. & & D,\ \underline{3} \\ B,\ 48. & & E,\ 4. \\ & C,\ 12. & \end{array}$$

[a] 8. huius

[b] 23. ſept.

[c] 2. ſept.

[d] 9. pron.

[e] 17. ſept.

[f] 8. huius

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri poteſt, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam, *cuius denominator datus ſit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus; æqualem eſſe minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E,*[a] *fiet D, ex B, in E: Factus eſt autem idem D, ex A, in C.*[b] *Igitur erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita E, tertius ad C, quartum;*[c] *ideoque minutiæ AB, EC, æquales erunt. quod eſt propoſitum.*

$$\begin{array}{ll} A,\ \underline{3.} & E,\ \underline{9} \\ B,\ 4. & C,\ 12. \\ \multicolumn{2}{c}{D,\ 36.} \end{array}$$

[a] 9. pron.
[b] 19. ſept.
[c] 8. huius

QVOD ſi B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, ſi fieri poteſt, ad minutiam E C. Quia ergo minutiæ A B, E C, æquales ſunt;[d] *erit vt A, ad B, ita E, ad C.*[e] *Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, ſecundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C.*[f] *Igitur B, metietur D, per E. quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſum D, non metiri.*

$$\begin{array}{ll} A,\ \underline{3.} & E,\ \underline{-} \\ B,\ 4. & C,\ 10. \\ \multicolumn{2}{c}{D,\ 30.} \end{array}$$

[d] 8. huius
[e] 19. ſept.
[f] 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorẽ diuiditur, numerus Quotiens eſt minutia, cuius numerator eſt numerus minor diuiſus, denominator vero maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem eſſe minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B.[g] *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, numerus diuiſus ad diuidentem, hoc eſt, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad vnitatem; erit ex defin. Diuiſionis minutia A B, Quotiens diuiſionis numeri A, per numerum B. quod eſt propoſitum.*

A, 6. B, 11.

$$\begin{array}{l} A,\ \underline{6.} \\ B,\ 11. \end{array}$$

[g] 2. huius

HINC fit, ſi diuiſo numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid ſuperſit; Quotienti integro inuento addendam adhuc eſſe minutiam, cuius numerator ſit numerus ex diuiſione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui neceſſario minor eſt numero diuidente, diuidendus adhuc eſt per eundem numerum diuidentem, qui maior eſt. Verbi gratia. Diuiſo numero 23. per 4. Quotiens integer eſt 5. & ſuperſunt 3. adhuc diuidenda per 4.[a] *Fit ergo minutia* $\frac{3}{4}$*. ita vt totus Quotiens ſit 5* $\frac{3}{4}$*.*

[a] 19. huius

X X.

MINVTIAS plures in vnam ſummam colligere.

SINT primum addendæ duæ minutiæ A B, C B, eiuſdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat ſumma D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam D B, eſſe ſummam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominatorem;[b] *erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et componendo, vt A, C, ſimul ad C, ita minutiæ A B, C B, ſimul ad minutiam C B.*[c] *Vt autem C, ad D, ita quoque eſt minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A, C, ſimul ad D, ita minutiæ A B, CB, ſimul ad minutiam D B. Cum ergo A, & C, ſimul æquales ſint ipſi D, ex conſtructione; erunt quoque minutiæ A B, C B, ſimul æquales minutiæ D B. quod eſt propoſitum.*

$$\begin{array}{lll} A,\ \underline{3} & C,\ \underline{4} & D,\ \underline{7} \\ B,\ 10. & B,\ 10. & B.\ 10. \end{array}$$

[b] 4. huius
[c] 4. huius

DEINDE ſint addendæ duæ minutiæ A B, C D, diuerſarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem poſterioris; & C, numerator poſterioris in B, denominatorem prioris, collectaque ſit ſumma E, ex duobus illis productis, cui ſupponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorũ B, D, procreatus. Dico

$$\begin{array}{lcll} A,\ \underline{2} & \times & C,\ \underline{3} & E,\ \underline{17.} \\ B,\ 3 & & D,\ 4. & F,\ 12. \end{array}$$

$$\frac{A,\ 2}{B,\ 3} \times \frac{C.\ 3}{D,\ 4.} \qquad \frac{E,\ 17.}{F,\ 12.}$$

minutiam E F, *eſſe ſummã ex datis duabus minutijs* A B, C D, *collectam.*[a] *Quoniam enim eſt, vt integrum ad ſummam duarum minutiarum* A B, C D, *ita* F, *ex denominatoribus productus ad* E, *ſummam productorum ex numeratoribus in denominatores viciſſim ductis; erit conuertendo, vt ſumma minutiarum* AB, CD, *ad integrum, ita* E, *ad* F:[b] *Vt autem* E, *ad* F, *ita quoque eſt minutia* E F, *ad idem integrum. Igitur erit, vt ſumma minutiarum* AB, CD, *ad integrum, ita minutia* EF, *ad idem integrum. Quapropter ſumma minutiarum* A B, CD, *æqualis erit minutiæ* EF: *ac proinde minutia* EF, *ſumma erit ex minutijs* A B, C D, *collecta. quod eſt propoſitum.* V E L *ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim, & ex multiplicatione denominatorum inter ſe, fiunt duæ minutiæ eiuſdem denominationis, minutijs* AB, CD, *æquales, vt ex demonſtratione propoſ. 10. cõſtat: ſi ſummæ* E, *productorum ex numeratoribus in denominatores ſupponatur* F, *communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia* E F, *ſumma minutiarũ* AB, CD, *hoc eſt, duarum illarum eiuſdem denominationis, ad quas* A B, C D, *reductæ ſunt, vt initio huius propoſitionis eſt demonſtratum.*

I A M *vero datis pluribus minutijs, addendæ primum erunt duæ primæ: deinde hæc ſumma cum tertia coniungenda, atque hæc ſumma cum quarta, & ſic deinceps, donec omnes abſoluantur.*

Q V O D *ſi dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra ſeorſum, & minutiæ ſeorſum.*

S I N T *verbi gratia,* $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. *minutiæ huius integri 60. cuius* $\frac{2}{3}$. *ſunt 40. &* $\frac{3}{4}$. *ſunt 45. Ex 40. & 45. fit ſumma 85. hoc eſt, totus numerus integer 60. & inſuper 25. vnitates, quæ faciunt* $\frac{5}{12}$. *integri 60. quemadmodum ex* $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. *collecta eſt ſumma* $\frac{17}{12}$. *id eſt, ſemel 1. & inſuper* $\frac{5}{12}$.

I T A *etiam ſumma minutiarum* $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. *eſt* $\frac{21}{27}$. *hoc eſt, in minimis terminis* $\frac{7}{9}$. *Si igitur illarum minutiarum integrum ſit 36. erit* $\frac{1}{3}$. *ipſius 12. at* $\frac{4}{9}$. *eiuſdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc eſt* $\frac{7}{9}$. *ipſius integri 36.*

[a] 6.huius

[b] 2.huius

X X I.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

E X *maiore minutia* A B, *detrahenda ſit minor* C B; *ſintque primum hæ minutiæ eiuſdem denominationis.* Detracto *numeratore* C, *minoris minutiæ ex* A, *numeratore maioris, reliquus ſit numerus* D, *cui idem denominator* B, *ſupponatur.* Dico

$$\frac{A,\ 7}{B,\ 10.} \qquad \frac{C,\ 3}{B,\ 10.} \qquad \frac{D,\ 4}{B,\ 10.}$$

minutiam D B, *reliquam eſſe poſt detractionem minutiæ* C B, *ex minutia* A B. *Quia enim* C, *ex* A, *ſubtractus relinquit* D; *componetur* A, *ex* C, & D. *Minutia ergo* A B, *cuius numerator* A, *ex numeratoribus* C, D, *collectus eſt, ſumma eſt duarum minutiarum* CB, DB, *vt in prima parte antecedentis propoſ. oſtenſum eſt. Quare detracta minutia* C B, *ex minutia* A B; *reliqua fiet minutia* DB. *quod eſt propoſitum.*

D E I N D E *minutiæ* AB, CD, *habeant diuerſos denominatores, detrahendaque ſit minor* CD, *ex maiore* A B. *Ex* C, *numeratore minoris in* B, *denominatorem maioris fiat* E; & *ex* A, *numeratore maioris in* D, *denominatorem minoris fiat* F: *atque* E, *ablatus ex* F, *relinquat* G, *cui*

$$F,\ 15. \qquad E,\ 8.$$

$$\frac{A,\ 3}{B,\ 4} \times \frac{C,\ 2}{D,\ 5} \qquad \frac{G,\ 7}{H,\ 20.}$$

ſupponatur denominator H, *ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus.* Dico *minutiam* G H, *eſſe reliquam poſt detractionem minutiæ* C D, *ex minutia* A B. *Quoniam enim* D, *multiplicans* A, B, *facit* F, H;[a] *erit vt* A, *ad* B, *ita* F, *ad* H:[b] *vt autem* A, *ad* B, *ita eſt minutia* A B, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* F, *ad* H, *ita minutia* A B, *ad integrum. Rurſus quia* B, *multiplicans* C, D, *facit* E, H;[c] *erit vt* C, *ad* D, *ita* E, *ad* H:[d] *Vt autem* C, *ad* D, *ita eſt minutia* C D, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* E, *ad* H, *ita minutia* CD, *ad integrum. Quia igitur eſt, vt* E, *primus ad* H, *ſecundum, ita minutia* C D; *tertius numerus ad inte-*

[a] 17.ſept.

[b] 2.huius

[c] 17.ſept.

[d] 2.huius

grum, quartum numerum; [a] Et vt G, quintus ad eundem ſecundum H, ita minutia G H, ſextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. ſcholij propoſ. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus ſimul, ad H, ſecundũ, ita minutiæ C D, G H, tertius & ſextus numerus ſimul, ad integrum. Vt autem E, G, ſimul ad H, ita eſt F, ipſis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutiæ C D, G H, ſimul ad integrum. Cum ergo oſtenſum ſit, vt eſt F, ad H, ita eſſe minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrum, iia minutiæ C D, G H, ſimul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutia A B, & minutiæ C D, G H, ſimul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod eſt propoſitum. VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim, & ex ductu denominatorum inter ſe, gignuntur duæ minutiæ eiuſdem denominationis minutijs datis æquales, vt ex demonſtratione propoſ. 10. conſtat; ſi E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, ſupponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propoſ. oſtenſum eſt.

[a] 2. huius

IAM vero ſi dentur integra vna cum minutijs, ſubtrahenda erunt integra ſeorſum ab integris, & minutia à minutia. Quòd ſi minutia detrahenda, maior ſit, quàm ea, à qua fieri debet ſubtractio, [b] reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit ſubtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærẽtis. Vt ſi ſubtrahẽda ſint 6 $\frac{2}{5}$. ex 10 $\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit 4 $\frac{7}{20}$. At ſi ſubtrahenda ſint 4 $\frac{6}{7}$. ex 20 $\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cũ $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebuntq; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua eſt minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit 15 $\frac{25}{28}$.

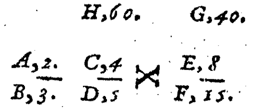
[b] 11. huius

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{2}{5}$. id eſt, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt, ex 30. ſuperſunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: [a] Eritq; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicans A, F, facit E, H; [b] erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F; [c] erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D: [d] Et vt A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. quod eſt propoſitum.



A.	G.
E.	F.
B.	H.

[a] 5. huius

[b] 17. ſept.

[c] 17. ſept.

[d] 2. huius

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quòd vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datę minutiæ non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

[a] 11. huius

SI vero integris minutiæ adhæreant, [a] reuocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhęrentis vnus numerator conſtitui. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accõmodemus, nõ erit minutia producta cũ integro numero aſſumpto conferenda, vt in additione, ac ſubtractione factũ eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti: quia cum comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc eſt, cum eius quadrato. Itaque ſint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Neceſſe eſt ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiuſdem faciãt numerum, qui conſtituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in ſe producitur: Id quod liquido conſtat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. ſunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc eſt, quadrati ipſius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia AB, per minutiam CD, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam EF, eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ AB, per minutiam CD. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [b] gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F. [c] Igitur minutia AB, producta eſt ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam CD: ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad 1. Quocirca cum ſit, vt AB, minutia diuiſa ad CD, minutiam diuidentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex defin. Diuiſionis minutia EF, Quotiens diuiſionis minutiæ AB, per minutiam CD. quod eſt propoſitum.

$\begin{array}{l}A,\ \underline{12}\\ B,\ 16.\end{array}$	$\begin{array}{l}C,\ \underline{3}\\ D,\ 8.\end{array}$	$\begin{array}{l}E,\ \underline{4.}\\ F,\ 2.\end{array}$
$\begin{array}{l}A,\ \underline{6}\\ B,\ 8.\end{array}$	$\begin{array}{l}C,\ \underline{3}\\ D,\ 8.\end{array}$	$\begin{array}{l}E,\ \underline{2.}\\ F,\ 1.\end{array}$
$\begin{array}{l}A,\ \underline{3}\\ B\ 8.\end{array}$	$\begin{array}{l}C,\ \underline{3}\\ D,\ 4.\end{array}$	$\begin{array}{l}E,\ \underline{1}\\ F,\ 2.\end{array}$

[b] 9. pron.
[c] 22. huius

DEINDE numeri C, D, minutiæ CD, non metiantur numeros A, B, minutiæ AB. [a] Reducatur minutia AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: q̃d quidem fiet, ſi K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propoſ. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, Quotiens diuiſionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propoſ. demonſtratum eſt. quod eſt propoſitum.

[a] 15. huius

$\begin{array}{l}E,\ \underline{24.}\\ F,\ 36.\end{array}$	$\begin{array}{l}A,\ \underline{2}\\ B,\ 3.\end{array}$	K, 12.	$\begin{array}{l}C,\ \underline{3.}\\ D,\ 4.\end{array}$	$\begin{array}{l}G,\ \underline{8}\\ H,\ 9.\end{array}$
$\begin{array}{l}E,\ \underline{90}\\ F.\ 135.\end{array}$	$\begin{array}{l}A,\ \underline{6}\\ B,\ 9.\end{array}$	K, 15.	$\begin{array}{l}C,\ \underline{3}\\ D,\ 5.\end{array}$	$\begin{array}{l}G,\ \underline{30}\\ H.\ 27.\end{array}$

QVIA vero G, H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum eſt, ſatis eſt ad diuiſionem cuiuſuis minutiæ per quamlibet minutiam, ſi numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & poſterior H, denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum eſt in omnibus minutijs, ſiue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, ſiue non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda ſecundum doctrinam propoſ 15. reuocatur, vt ex eius propoſ. demonſtratione liquet, atque in hoc appoſito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B,

$\begin{array}{l}E,\ \underline{48.}\\ F,\ 54.\end{array}$	$\begin{array}{l}A,\ \underline{8.}\\ B,\ 9.\end{array}$	K, 6.	$\begin{array}{l}C,\ \underline{2.}\\ D,\ 3.\end{array}$	$\begin{array}{l}G,\ \underline{4}\\ H,\ 3.\end{array}$	$\begin{array}{l}H,\ \underline{24}\\ L,\ 18.\end{array}$

metiũtur per G, H; & numeros E, F, procreatos ex A, B in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiũtur per K, L: atque adeo tam minutia G H, quàm K L, Quotiens eſt minutiæ A B, per minutiam C D, diuiſæ.

IAM vero ſi numerus integer diuidendus ſit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, ſupponenda eſt ei vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appoſito priori exemplo perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda ſit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in poſteriori exemplo apparet.

$$\frac{8}{1.}\qquad\frac{1}{2.}\qquad\frac{16}{1.}$$

$$\frac{1}{2.}\qquad\frac{8}{1.}\qquad\frac{1}{16.}$$

QVOD ſi minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſ. diximus.

VERVM quia non facile eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; ſatius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. vt hic uides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ ſemper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.

$$\frac{3}{4.}\qquad\frac{7}{2.}\qquad\frac{21}{8.}$$

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{5}{8}$. id eſt, minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proximè inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſupra fuit, ex diuiſione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inſerere.

SIT minutia A B, in minutiam C D, inſerenda, ſitque primum ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, vnius particulæ minutiæ C D, ad minutiã C D: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F. cui addatur A, numerator prioris, & compoſito numero G, ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo ſenſu, quem diximus, hoc eſt, minutiam G H, æqualem eſſe minutiæ A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia vnius particulæ minutiæ C D, [a] reducitur ad ſimplicem minutiam A H, cuius numerator idem eſt, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appoſito hoc exemplo apparet. Item minutiæ F H, minutiæ C D, æqualis eſt, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat F, H;

$$\begin{array}{ccc} & F,\ 24. & \\ \frac{A,\ 3}{B,\ 4.} & \frac{C,\ 6}{D,\ 7.} & \frac{G,\ 27.}{H,\ 28.}\end{array}$$

$$\frac{A,\ 3}{B,\ 4.}\qquad\frac{1}{D,\ 7.}\qquad\frac{A,\ 3}{H,\ 28.}$$

[a] 14. huius

F, H; [a] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [b] ac propterea minutiæ C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H; cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, ſummam eſſe minutiarum F H, A H, vt initio propoſ. 20. oſtenſum eſt; hoc eſt, ſummã ex minutia A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia C D, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D; id eſt, æqualis eſt minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, ſimul. quod eſt propoſitum.

P, 119. M, 59. K, 14.

$\frac{A,\ 1}{B,\ 2.}$ $\frac{C,\ 3}{D,\ 4.}$ $\frac{E,\ 2}{F,\ 3.}$ $\frac{G,\ 4}{H,\ 5.}$

Q, 120. N, 60. L, 15,

IAM vero ſi plures minutiæ A B, C D, E F, G H, ſint inſerendæ, hoc eſt, ſi minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore poſtremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiuſdẽ penultimæ minutiæ EF, vt fiat numerus K, Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiuſdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adijciatur A, numerator eiuſdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur ſemper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiuſdem proximè antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; poſt hæc N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex inſitione datarum minutiarum produci in eo ſenſu, quem expoſuimus. Nam vt in duabus minutijs oſtenſum eſt, minutia KL, producitur ex inſitione minutiæ EF, in minutiam GH, hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ GH, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis poſitam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [b] æqualis eſt minutiæ KL: [c] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtrauimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia MN, ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [d] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus, [e] æqualis eſt minutiæ MN, [f] quod numeratores harũ minutiarum ad denominatores eãdem proportionem habeãt, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propoſ. 20. monſtratum eſt;

[a] 17. ſept.
[b] 8. huius

[a] 14. huius
[b] 8. huius
[c] 17. ſept.
[d] 14. huius
[e] 8. huius
[f] 17. ſept.

eſt ; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H ; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ C D, quod eſt propoſitum. Eademque ratio eſt de pluribus.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, ſenſu; hoc eſt, minutiam GH, æqualẽ eſſe ſummæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [a] reducitur ad minutiam ſimplicem E H, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat: [b] Minutia quoque F H, æqualis eſt minutię C D; [c] quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quę ex ijs, quæ ad initium propoſ. 20. oſtendimus, æqualis eſt ſummæ minutiarum E H, F H,) æqualis ſummæ collectæ ex minutia C D; (hoc eſt, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutiæ C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideo minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc poſteriori ſenſu. quod eſt propoſitum.

E, 18.	F, 24.	
A, 3	C, 6	G, 42
B, 4.	D, 7.	H, 28.

A, 3	C, 6	E, 18
B, 4.	D, 7.	H, 28.

[a] 14. huius

[b] 8. huius

[c] 17 ſept.

QVOD ſi plures ſint minutię inſerendę A B, C D, E F, G H, hoc eſt, minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H ; & minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H ; & minutia E F, minutiæ G H, addendæ ſint ad minutiam G H, ita agendum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam, vt in duabus minutijs demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia CD, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus; [b] æqualis eſt minutiæ K L; [c] quòd numeratores harũ minutiarũ ad denominatores habeant proportionẽ eandẽ: quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cũ minutia M N, cuius numerator M, cõflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt,

P, 232.	M, 104.	K, 20.	
A, 1	C, 3	E, 2	G, 4
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

P, 232.	M, 104.	K, 20.	
A, 1	C, 3	E, 2	G, 4.
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

[a] 14. huius

[b] 8. huius

[c] 17. ſept.

gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, ſummæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH. Rurſus minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH,[a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autẽ Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autẽ eſt idem Q, ex B, in N, procreatus,[b] æqualis eſt minutiæ MN;[c] quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis ſit, ex ijs, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G. producitur, denominator autem eſt Q; atque ex minutia cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoque erit ſummæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH. quod eſt propoſitum. Eademq́; de pluribus eſt ratio.

[a] 14. huius

[b] 8. huius

[c] 17. ſept.

DE PROPORTIONVM compoſitione.

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorum demonſtrationes pertinent, reliquum eſt, vt compoſitionem proportionum explicemus: id quod ad propoſ. 5. lib. 8. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in ijs propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatam,

aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicataue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus cõpoſita ſit verè totũ quippiã, cuius partes ſint proportiones, ex quibus cõponi dicitur, vt plerunq; interpretes Eucl. exiſtimant, ex hoc perſpicuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cũ hæc compoſitio intelligẽda ſit, ſiue maior quantitas cũ minore, ſiue minor cũ maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtẽdimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolũ duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt, partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorẽ eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partẽ æqualem eſſe toti? Sic etiã, ſi, poſitis his tribus terminis nõ cõtinuè proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8, verè coacervaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdẽ auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quam totũ, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundũ, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimũ. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris vero 3. & 16. Quoniã igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionẽ 24. ad 48. compoſitã eſſe ex proportionibus laterum, hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componẽs, (ſi hæc cõpoſitio eſt vera additio.) nimirũ proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportionẽ videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. verè totũ eſt, & eius partes componẽtes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harũ ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirũ proportio quadru

24.	48.
12.2.	3.16.

pla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quòd ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentiũ, nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti, proportioni videlicet 24. ad 48.

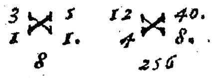
24. 48.
12. 2. 12. 4.

Et ſubtracta proportionẽ 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior eſt quàm totũ, hoc eſt, quàm proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totũ non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12 ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis cõtinuentur adhuc alij tres termini hoc modo. 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadẽ proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorũ. Huc accedit, quòd ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplã, non autem noncuplam, vt prædicti auctores uolunt, quanquã nõcupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis nen videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiã communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplã, propterea quòd duo mouẽtia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autẽ ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationẽ compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorũ agentiũ vires nõ poſſe dimidiari, eo quòd inter duos numeros, qui proportionẽ agentis ad patiens exprimunt. nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. nõ poſſet habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat: agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiuſmodi compoſitionem proportionũ non eſſe additionem, ſed proportionũ continuationẽ, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus compoſita propter terminorum cõtinuationem, quemadmodũ & ad defin. 10. lib. 1. explicauimus, cur, poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorũ proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirũ additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio, fieri debent per proportionũ denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cũ denominatori cuiuſlibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit unitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab unitate denominata.) quarũ quælibet æqualis eſt fractioni, quã conſtituũt duo quicunq; numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedẽte fiat numerator, & ex cõſequente denominator: manifeſto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorũ numerorũ nõ differre, ſiue per proportionũ denominatores, ſiue per numeros earundẽ proportionũ quoſcunq;, poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarũ, inſtituãtur, vt egregie Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM .n. ſint in vnã ſummã colligẽdæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniã denominatores sũt 3. & 5. ex quorũ additione fit sũma 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis. quæ sũma etiã colligitur, ſiue denominatores, ſuppoſita prius vnitate cuilibet illorũ, inſtar minutiarũ addãtur, ſiue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent



fracti numeri, poſitis terminis conſequẽtibus ſub antecedentibus, in unã ſũmã colligãtur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. poſteriori autẽ 256. ad 32. quarũ vtraq; octupla eſt. Sic etiã ex proportione dupla ſuperquadrupartiẽte ſeptimas, & ſeſquialtera, quarũ denominatores ſunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. repeɾiuntur, fit proportio quadrupla ſeſquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quãdo per denominatores inſtituitur operatio, reuocandi prius ſunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factũ eſt. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligendum eſt.

18	✕	3		54	✕	6
7		2		21		4.
57				342		
14.				84.		

DEINDE ſi ex proportione octupla ſubtrahatur proportio tripla: Itẽ ex proportione quadrupla ſeſquidecimaquarta deducatur proportio ſeſquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla ſuperquadrupartiens ſeptimas, vt hic perſpicuum eſt.

8	✕	3	256	✕	12		57	✕	3	342	✕	6
1		1.	32		4.		14		2.	84		4.
5			640				72			864.		
1.			128.				28			336.		

TERTIO ſi multiplicanda ſit prorortio tripla per 2. vel quod idem eſt, per proportionẽ duplam: Item proportio ſeſquialtera per ſupertripartientem quintas; inſtituenda erit operatio, vt hic vides, produceturq; ibi proportio ſextupla, hic autem dupla ſuperbipartiens quintas.

3—2 6	12—10 120	3—8 24	9—16 144
1—1. 1.	4—5. 20.	2—5. 10.	6—10. 60.

QVARTO & vltimo ſi proportio ſextupla diuidẽda proponatur per proportionẽ triplã: Itẽ proportio dupla ſuperbipartiens quintas per proportionẽ ſeſquialterã, ſi diuiſoris termini permutentur, vt in diuiſione minutiarum docuimus, ita inſtituetur operatio.

6—1 6	120—4 480	24—2 48	144—6 864
1—3. 3.	20—12. 240.	10—3. 30.	60—9. 540.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re diſcrepare, niſi quòd in proportionibus neceſſe non eſt interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionũ à nobis præſcriptam, quam auctores additionem falſo nũcupant, cum proportionum compoſitione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defi. 5. lib. 6. egit, conuenire, atq; adeò compoſitionẽ illam Euclidis verè eſſe multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonſtrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, ſiue æquales, ſiue inæquales; ducaturq; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex cõſequente vero B, in conſequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, eſſe compoſitam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt ſi proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. ſi autem fuerint inæquales, dicatur ex illis compoſita, ex ſententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G; [a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rurſus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autẽ proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eædẽ ſint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonſtratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cũ enim compoſitio proportionum ab Euclide deſcripta reſpondeat multiplicationi denominatorum inter ſe, vt ibi demonſtrauimus, noſtra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum nõ differat, liquido conſtat, compoſitionem illam proportionum eſſe multiplicationem, quam tradidimus.

A,6.	C,12.	A,3	C,6
B,2.	D,4.	B,2.	D,5.
E,72.	F,8.	F,18.	F,10.
G,24.		G,12.	

[a] 18. ſept.
[b] 17. ſept.

EADEM ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non eſſe aliud, quàm diuiſionem à nobis explicatam, eſſeque compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi uolunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem eſt, ac ſi termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eam, quæ relinquitur, ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C.

A, 9.	C, 3	A, 4.	C. 6.
B, 1.	D, 1.	B, 2.	D, 3,
E, 9.	F, 3.	E, 8.	F, 12.
G, 27.		G, 24.	

a 18. ſept. b 17. ſept. *Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [a] erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G ad F, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem eſt, quæ G, ad F,) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt, C, ad D, & E, ad F: ac proinde ſubducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis nõ videt, hoc potius eſſe diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit? Atque hæc de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conſcriptum.*

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

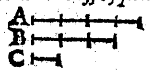
ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantum ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad diſputationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium, quarum cauſa numerorum tractationem ab eo ſuſceptam eſſe ſuperius diximus. Nam ſine cognitione harum linearum complures magnitudines cum ſolidæ tum planæ, neque perfecte intelligi poſſunt, neq; cum res tulerit, in opus atque uſum conferri; propterea ꝙ plerunq; latera earũ incõmenſurabilia ſunt: Id qđ & de pla-

nis ipſis atque ſolidis dici poteſt, quippe cum & hæc incommēſurabilia ſæpenumero exiſtāt, vt ad finem huius libri demonſtrabimus. Quoniam vero hic liber multis obſtructus eſt difficultatibus, ob linearum, de quibus diſſerit, obſcuritatem; omnes neruos induſtriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide ſunt demonſtrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt ſine multo labore a quouis, qui præcedentiũ tamen librorum demonſtrationes recte intellexerit, poſſit percipi. Neque enim in eorum poſſum ſententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam eſſe neceſſariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, ſermonem inſtituit: Immo contra perſuaſum mihi prorſus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abeſt, vt exiſtimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quod ille demonſtrationes ad vſum poteſt reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de cauſa & nos priora decem theoremata ſecundi lib. numeris accōmodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vſurpaſti, vt ea res & maiori voluptati eſſet, & commodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putauimus, Cum enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adhiberentur, tenebras potius offuſuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perſpicuitatis; quippe ita ingenia ſtudioſorum pro adiumēto, ac luce, quam his noſtris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minuſq; demonſtrationes ipſas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſolæ neceſſariæ ibi fuerunt, nemo fere ſit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſe ipſos, quan

do volunt.

do uolunt, præſertim cum iam hoc ipſum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accurate.

ITAQVE, vt ad inſtieutum redeamus, inchoans rem ipſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commenſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadē menſura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mēſura C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B,) dicuntur commenſurabiles. Eodem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorũ & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quã dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commēſurabiles dicuntur ſuperficies, quas vna, & eadem ſuperficies metitur; Item corpora, ſolidauè commenſurabilia, quæ metitur idem corpus, ſeu ſolidum.



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES magnitudines ſunt, diameter quadrati cuiuſuis, & latus eiuſdem; quoniam nullam habent menſuram communem, vt propoſitione vltima huius lib. demonſtrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommenſurabiles, quibus ſcilicet menſura aliqua communis dari nullo modo poteſt, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri poſſint. Rurſus, ſuperficies dicentur incommenſurabiles, & ſolida incommenſurabilia, quæ nullam admittunt menſuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commēſurabiles

ſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas in expoſitione defin. 1. commẽſurabiles ſimpliciter diximus: quædam vero longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linearum, quæ ſunt incommẽſurabiles longitudine, aliæ ſunt eiuſmodi, vt earũ quadrata ſint commenſurabilia; aliæ vero ita ſe habent, vt & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt commẽſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt, ſecundum earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiuſque lineæ, quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.

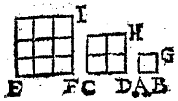
QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia commenſurabiles, non autem commenſurabiles longitudine; reſpondendum eſt, lineas longitudine commẽſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione commenſurabilium magnitudinum, cũ huiuſmodi lineas una communis menſura metiatur, vt dictũ eſt: At vero quoniã lineas potentia commenſurabiles nulla communis menſura metiri poteſt, ſed tantummodo earum quadrata idem ſpacium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt eæ propria definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, quarum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.

HABENT autem lineæ cõmenſurabiles tã lõgitudine quàm potentia, hanc quaſi conuenientiã inter ſe, & cõnexionem, vt lineæ longitudine cõmenſurabiles, ſint etiã commenſurabiles potentia, ita vt nullæ lineæ dari poſſint commenſurabiles lõgitudine, quin earum quadrata commẽſurabilia quoque ſint; quoniam quadratum ex communi earũ menſura deſcriptum metitur tanquã menſura communis earum quadrata, vt in ſubiecta figura apparet: ſicut enim recta A B, metitur rectas CD, EF, ita quoq; quadratũ AG, quadrata CH, EI, metitur: Non autẽ, vt omnes lineæ potentia cõmenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles longitudine; multæ enim lineæ ſunt potentia commenſnrabiles, hoc eſt, quadrata habent commenſurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommenſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur, Rurſus inter lineas incommenſurabiles tam longitudine quàm potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles; ſint etiam incommenſurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommenſurabiles, cum tamen potentia, hoc eſt, ſecundum earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. huius libri.



V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunq; rectæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis, erũt omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum: Item quædam illi incommenſurabiles longitudine tantum; quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur varijs in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quamquàm eius verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdã dici poſſe propoſitæ rectæ lineæ commenſurabiles longitudine, & potentia, quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa propoſita, ratione cuius aliæ commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non ſemper notæ ſunt, quamuis ſingulæ ſeorſum ſumptæ exiſtant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunque partes æquales poſſit diuidi.

VI.

ET huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex poſitione, vt illa, ſed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex ſententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem eſt, linea recta, cuius quadratum eſt 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali, (eſt enim tam numerus 20. quàm 1000. commenſurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine ſit eidem incommenſurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non poſſit exprimi.

VII.

HVIC vero incommenſurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tãtum ſunt commenſurabiles propoſitæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido conſtat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propoſitæ rectæ Rationali incommenſurabiles ſunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifeſtum eſt, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. ſeu (quod idem eſt) lineam, cuius quadratũ eſt 20. vel 1000. &c. non poſſe appellari Irrationalem, cum non ſit longitudine, & potentia, ſed longitudine tantum Rationali lineæ propoſitæ incommenſurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a propoſita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea deſcriptum, Rationale vocatur, quia & ipſum certum eſt, ac notum, comparationeque illius aliæ ſuperficies, commenſurabiles, incommenſurabileſue dicuntur.

IX.

ET huic commenſurabiles quidem, Rationalia.

OMNES planæ ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex poſitione, vt illud, ſed quia cum eo collatæ reperiūtur ei vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potētia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies planæ quadrato à Rationali linea deſcripto incommenſurabiles, Irrationales uocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatijs incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidē quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia; ſi uero non fuerint quadrata, ſed aliæ quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COL-

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia commenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturque in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potētia, atq; potentia tātum: *apponere fere ſemper vocibus iſtis:* commenſurabiles, ac incōmenſurabiles: *Vix autem, & rariſſimè his:* Rationales, & Irrationales: *Recte enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus uero recte Rationales longitudine & potentia, uel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, ut uarie, & obſcure in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibuſque, nec non Rationalibus, Irrationalibuſque ſint locuti.*

CÆTERVM his definitionibus adiungemus poſtulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum uſus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPO-

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cum maior infinita non ſit, minor vero infinite poſſit augeri; perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem. Cōſtat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum cenſeri eiuſdem magnitudinis, cum alterutra ita poteſt multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuerſi eſſe generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

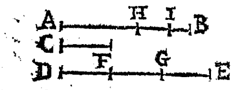
HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quod fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quod ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolum voce numeri in vocem magnitudinis.

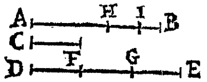
CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendũ nobis fuit a numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani neglex imus; vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autē Campani ſeriem demōſtraret. Quod ſi vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

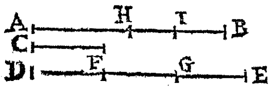
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quędam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarũ AB, ſit maior. Dico ſi ex A B, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tādem magnitudinē quandam, quæ minor ſit quã C. Multiplicetur.n. C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit quã AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quã AB. Diuiſa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipſi C, æquales, detrahatur ex A B, maius quã dimidium AH, & ex reliqua H B, maius quam dimidiũ HI; atq; hoc ſemper fiat, donec partes ipſius AB,





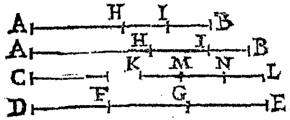
multitudine æquales ſint partibus ipſius D E. Sint ergo iam partes AH, HI, I B, tot, quot ſunt ipſæ DF, FG, GE Quia igitur DE, maior eſt quã A B; At ex DE, ablatũ eſt DF, minus quã dimidiũ, vel certe dimidiũ, ſi DE, ipſius C, ſit duplex; ex A B, vero maius quã dimidiũ AH: Erit reliquum FE, reliquo H B, maius. (Cum enim DE, maior ſit quam AB; ſi ex D E, dimidium auferretur, necnon & ex A B, dimidium, eſſet quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex A B, Si ergo ex D E, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rurſus quoniam FE, maior eſt quàm HB, auferturq; ex FE, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, ſi F E, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo I B: atque ita procedendo oſtẽdemus tandem poſtremam partem ipſius DE, qualis hic eſt GE, maiorem eſſe poſtrema parte ipſius A B, qualis hic eſt IB. Dum ergo G E, poſtrema pars ipſius D E, æqualis ſit ipſi C; erit quoque C, maior quam I B, poſtrema pars ipſius AB. Relicta igitur eſt I B, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonſtrandum.



IDEM demonſtrabitur, ſi ex A B, auferatur dimidium A H, & ex reliquo H B, rurſus dimidiũ HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo H B, nec non & reliquum G E, maius reliquo I B; cum ex maiori D E, ablatum ſit D F, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori A B, dimidium A H, &c.

ALITER. Facta conſtructione, vt prius, ſumatur K L, ita multiplex ipſius I B, vt eſt multiplex D E, ipſius C. Diuiſa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipſi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero

vero A H, maior eſt quam H B, vel certe illi æqualis, ſi ablatum ſit dimidium ex A B; & H B, maior eſt, quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc eſt, quam K M. Rurſus quia HI, maior eſt quam IB, vel certe illi æqualis; eſt autem IB, ipſi M N, æqualis: erit quoque H I, maior quam M N, vel illi æqualis; atque adeo tota A I, maior, quã tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota K L: Eſt autem DE, maior adhuc, quam AB. Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cũ ſit, vt D E, ad C, ita K L, ad IB; (Sumpta enim fuit K L, ipſius I B, tam multiplex, quam multiplex eſt DE, ipſius C,) erit quoq; C, maior quam IB. Ac proinde relicta eſt I B, minor quam C. Quod erat demonſtrandum. [a] 14. quinti.



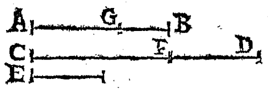
SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonſtratione huius Theorematis apparet. duas quantitates inæquales propoſitas debere eſſe tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem poſſit ſuperare. Id quod ad propoſ. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propoſitis A B, C D, quarũ minor AB, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B; & ſic deinceps, alterna quadam detractione,auferatur ſemper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB,CD, incommenſurabiles eſſe. Si enim non ſunt incommenſurabiles, metietur eas aliqua menſura communis. Metiatur eas ſi fieri poteſt, magnitudo E,quæ vel æqualis eritipſi AB, vel minor. Detracta autẽ AB,ex CD,quoties poteſt,relinquat FD,ſe minorẽ, ita vt A B,ipſam C F, metiatur. Rurſus detracta F D,ex AB,relinquat ſe minorẽ GB,ita vt F D, metiatur ipſam [a] 1.decimi AG;atq; hoc ſemper fiat. [a] Relinquetur ergo tandem ex CD,vel AB,magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB,ablata ex C D,relinquat F D, ſe minorẽ, erit CF,ablata maior, quam dimidia ipſius C D; alias ſi eſſet dimidia,vel minor quam dimidia,poſſet adhuc AB, detrahi ex C D. Eodem modo erit A G, ablata ex A B, maior quam dimidia ipſius A B: Et ſic deinceps ſemper fiet.Quare cum ſemper auferatur maius, quam dimidiũ, [b] 1.decimi [b] relinquetur tãdem magnitudo quædam minor quã E.) Sit ergo iam relicta GB,minor quam E.Quoniam igitur [c] 2.pron. E,metitur AB;& AB,metitur C F; [c] metietur quoque E, [d] 3.pron. ipſam CF:Metitur autem E,& totam CD.[d]Igitur E, reliquam quoque FD,metietur.At FD,metitur A G:[e] quare [e] 2.pron. & E, ipſam A G, metietur. Metitur autem E, & totam [f] 3.pron. AB:[f] ergo E,reliquam etiam GB,metietur,maior minorem.Quod eſt abſurdum. Non ergo AB,CD,magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt.Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.



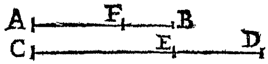
SCHOLIVM I.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, de trahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommenſurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturq; minor AB,ex CD,& reliqua ſit ED.Item ED, ex AB,auferatur,relinquaturque FB,& ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt,metiatur F B,præcedentem ED.Quoniam igitur FB,metitur ED;& ED,metitur A F; [a] *metietur quoque F B, ipſam A F: Metitur autem & ſe ipſam:*[b] *Igitur FB,& totam A B, metietur:Metitur autem A B,ipſam CE.*[c] *Igitur & F B,ipſam C E; metietur. Ponitur autem & FB,metiri ipſam E D:* [d] *Igitur & F B,totam C D,metietur. Oſtenſa eſt autem & F B, ipſam AB,metiri.Quare FB,vtramq; A B,C D,metitur,quod eſt abſurdum. ponuntur enim A B,C D, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.*

[a] 2.pron.
[b] 1.pron.
[c] 2.pron.
[d] 1.pron.



SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione:Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum.ponuntur enim commenſurabiles.

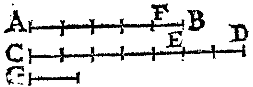
ITAQVE facile ex his dignoſcemus,an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles,nec ne.Nã detractæ ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione,ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commẽſurabiles,cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt cõſtat ex *demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si uero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.*

3

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam A B, C D, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties poteſt, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B, & hoc ſemper fiat alterna quadã detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iã F B, reliqua pręcedentem ED. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, ita oſtendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur A F; [a] metietur quoque FB, ipſam A F: At metitur F B, & ſe ipſam [b] Igitur FB, totam A B, metietur; [c] atquę adeo & ipſam C E, quam A B, metitur. Cum ergo, & ipſam ED, metiatur; [d] metietur quoq; F B, totam CD. Metitur ergo FB, utramque A B, CD. Quare vtriuſque A B, C D, communis menſura eſt FB.

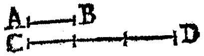


[a] 2. pron.
[b] 1. pron.
[c] 2. pron.
[d] 1. pron.

QVOD autem FB, ſit maxima earum communis mẽſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quam F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem & AB, ipſam CE; [a] metietur quoq; G, ipſam CE: At metitur quoq; totam C D [b] Igitur G, reliquam quoque ED metietur: Metitur autem ED, ipſam AF. [c] Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; [d] metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis menſura eſt ipſarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis menſura eſt.

[a] 2. pron.
[b] 3. pron.
[c] 2. pron.
[d] 3. pron.

QVOD ſi minor magnitudo AB, metiatur maiorẽ C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa AB, ambarum maxima menſura communis; cum & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.



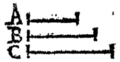
COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

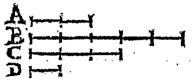
ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt FB, eſſe maximam menſuram communem ipſarum A B, C D. Demonſtratum enim eſt ibi, magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam menſuram F B. Eademque eſt ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

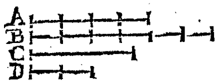
EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propo. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuũ eſt, omnes tres A, B, C,



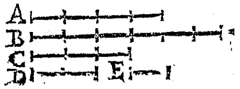
eſſe incommenſurabiles, quod nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A, & B.



SI vero A, & B, fuerint commenſurabiles, ſit earum maxima communis menſura inuenta D; quæ ſi metiatur quoque magnitudinem C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cum habeant communem menſuram D.



QVOD ſi D, maxima menſura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commenſurabiles, vel non. Si ſunt incommenſurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommenſurabiles. Si enim credantur eſſe commenſurabiles, metietur earum maxima cõmunis menſura ipſam D, maximam menſuram magnitudinũ A, & B, per coroll. huius propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommenſurabiles. Quod eſt contra hypotheſim.



SI vero C, & D, ſunt commenſurabiles, erunt quoque tres A, B, C, cõmenſurabiles.[a] Inuenta enim E, maxima menſura ipſarum C, & D; cũ E, metiatur D; & D, ipſas A, & B; [b] metietur quoque E, ipſas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

[a] *3. decimi*

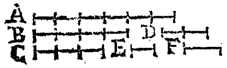
[b] *2. pron.*

SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, ſint commenſurabiles, nec ne. Nam ſi datæ ſint quatuor, experiemur id primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C, quarum maximam mẽſuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima menſura ipſarũ A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perſpicuum eſt D, maximam eſſe menſuram omnium trium A, B, C. Nam ſi maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadẽ, per coroll. propoſ. 3. huius lib. maximam menſuram ipſarum A, B, nempe ipſam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non poteſt, Si uero D, non metiatur C, erunt ſaltẽ D, C, commenſurabiles. Cum enim A, B, C, ſint commenſurabiles, metietur quælibet menſura earum cõmunis ipſam D, maximam menſuram ipſarum A, B, per coroll. præcedentis propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoq; ipſam D; erunt D, & C, commenſurabiles.[b] Sit igitur E, maxima menſura ipſarum inuenta. Dico E, maximam menſuram eſſe datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoq; E, ipſas A, & B. Metitur autem & ipſam C: Igitur E, menſura eſt communis ipſarum A, B, C, quemadmodum aſſeruimus.



[a] *3. decimi*

[b] *3. decimi*

[c] *2. pron.*

QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit F, maior quam E, ſi fieri poteſt, earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximã mẽſuram D, per coroll. præcedẽtis propoſ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E, ex eodem corol. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROL-

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt ratio.

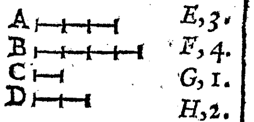
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, quam tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua vero omnia abſoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

LEMMA.

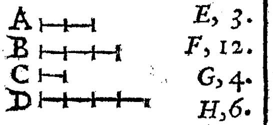
SI ſint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eiſdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo eſſe, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam. n. ex ijs, quæ ad defi. 5.

lib. 6.



lib. 6. a nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perſpicuum eſt, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe vt A, ad D, ita E, ad H. Quod eſt propoſitum.



IDEM ſequitur, ſi magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo eſt, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cum non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituũt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa tantum eſt in quãtitatibus eiuſdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cum omnes demonſtrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEO.

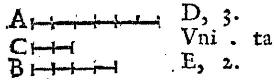
THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eos habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerum.[a] Sit enim earum maxima menſura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Eſt autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipſam B, atq; vnitas numerum E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationem habent, &c. Quod erat dqmonſtrandum.

[a] 3.decimi



SCHOLIVM.

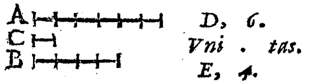
CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, Hæ enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atq; adeo in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quam numerus ad numerum, quia commenſerabilia ſunt, atque idcirco menſuram habent communem, ipſiſque demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, cõmunis menſuræ ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat, commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quãcumque communem earum menſuram, nihilominus hoc theorema demõſtrabimus eodem argumẽto. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac poſteriori demnnſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionẽ cum illis, vt ex appoſita figura apparet. Quoniã vero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omniũ eandem cum ipſis proportionẽ habentiũ; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam communem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.



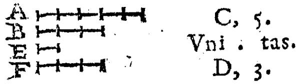
THEOR. 4. PROPOS. 6.

6.

SI duę magnitudines inter ſe proportionem

tionem habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

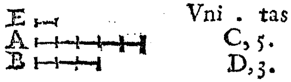
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines eſſe commenſurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuiſa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni ęqualis ſit magnitudo E. Deindequoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C; continebit æqualiter A, ipſam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Eſt autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipſam F, & vnitas ipſum D, æque metiatur. Igitur per lemma propoſ. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiã vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A. ad F; [a] ac ꝑpterea B, & F, magnitudines æquales inter ſe ſunt. Quocirca cum E, ipſam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipſam B: Metiebatur autem & ipſam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; [b] Ac proinde A, & B, magnitudines commenſurabiles inter ſe ſunt. Si igitur duę magnitudines inter ſe proportionẽ habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 9. quinti

[b] 1. defin.

ALITER. Quot ſunt unitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuiſa magnitudo A, quarum partium uni æqualis ſit magnitudo E. Quoniam igitur eſt vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipſam A, & vnitas ipſum C, æque metiãtur; ponitur que vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idẽ lemma ſuperius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, [a] commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

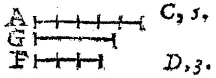


[a] 1. den.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates ſunt in C; et ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonſtratum eſt.

HINC rurſus apparet, quanam arte poſsit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inueniẽda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D: [b] Deinde accipiẽda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, ſint continue proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta.



[b] 13. ſexti

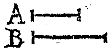
SCHOLIVM

IN hoc etiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tãtum; quoniam habent, vt ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

7. o.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.



SINT incommenſurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum; [a] erũt ipſæ commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommẽſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 6. decimi

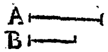
SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue longitudine tantum, ſemper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias, vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

8. o.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.



NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incõmenſurabiles eſſe. Si enim A, & B, credantur eſſe cõmenſurabiles; [a] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 5. decimi

SCHOLIVM.

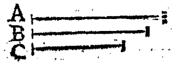
QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendũ eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſario & potentia incommenſurabiles eſſe, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; immo nullo modo talem proportionem habere poſſunt, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

SI ſint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportionales

nales; ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundã.

SINT continue proportionales tam quantitates A,B,C, quam D,E,F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non; ſitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque eſſe vt A, ad B, ita D, ad E.



D, 49.
E, 42.
F, 36.

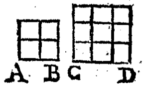
Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F; proportionis D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales ſunt.

IDEM ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quã tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

7. THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commẽſurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. Quoniam.n. rectæ AB, CD, longitudine ſunt commẽſurabiles;[a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerũ: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, numerus ad numerũ F:[b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD:[c] Itẽ & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratũ ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerũ quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitũ.



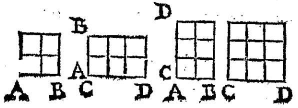
E, 2. F, 3.
G, 4 H, 9.

[a] 5. decimi

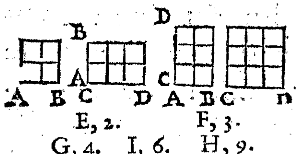
[b] 20. ſexti

[c] 11. octa.

ALITER. Poſita eadẽ conſtructione, cõtineatur rectangulum BD, ſub rectis AB, CD. Et E, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G,

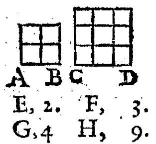


E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.



H, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 11. lib. 8. atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdẽ propoſ. Quoniam igitur eſt A B, ad C D, vt E, ad F: [a] Vt autem AB, ad C D, ita eſt quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem A B, ſi CD, ponatur baſis rectanguli; Item vt E, ad F, ita eſt G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rurſus quia eſt A B, ad CD, vt E, ad F, [b] Vt autem AB, ad CD, ita eſt rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, ſi AB, ponatur baſis rectanguli; Item vt E, ad F, ita eſt I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua ſunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propoſ. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod eſt propoſitum.

SIT ſecundo quadratum ex A B, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, eſſe longitudine cõmẽſurabiles. Sint. n. numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex C D, vt quadratus numerus G, ad quadratũ numerũ H: [c] Habet aũt quadratũ ex AB ad quadratũ ex CD, proportionẽ duplicatam lateris AB, ad latus C D; [d] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales ſunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem



[a] 1. ſexti

[b] 1. ſexti

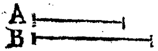
[c] 20. ſexti

[d] 11. octaui

habeant, quam numeri E, F, [a] ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. [b] Quia igitur eſt vt AB, ad CD, ita quadratũ ex AB, ad rectangulũ BD; Itẽ vt A B, rurſum ad C D, ita rectãgulũ BD, ad quadratũ ex CD, vt ſupra diximus; erũt quadratũ ex AB, rectangulũ BD, & quadratũ ex CD, continue proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineã CD: Sunt autẽ & numeri G, I, H, cõtinue proportionales in rõne numeri E, ad numerũ F, vt ſupra oſtendimus; poniturq; quadratũ ex AB ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratũ numerũ H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, vt G, ad I, hoc eſt, vt E, ad F; [c] ideoq; AB, CD, rectæ, proportionẽ habẽtes, quã numeri E, F, cõmenſurabiles ſunt lõgitudine. Qđ eſt propoſitũ.

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ; erunt A, B, longitudine cõmenſurabiles, vt iã eſt demonſtratũ. Quod eſt abſurd. ũponũtur enim longitudine incõmenſurabiles. Non ergo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, proportionem habet, quã numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quod eſt propoſitũ.



QVARTO, ac poſtremo quadratũ ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Dico eas longitudine eſſe incõmenſurabiles. Si enim longitudine cõmenſurabiles credãtur; habebũt earũ quadrata, vt eſt demõſtratũ, proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. qđ eſt abſurdũ. ponuntur. n. non habere. Nõ ergo longitudine cõmenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitũ. Igitur quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia com

[a] 6. decimi

[b] 1. ſexti

[c] 6. decimi

menſurabiles eſſe: Quæ vero potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ vero potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

QVONIAM .n. quadrata linearum longitudine commēſurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonſtratum eſt, hoc eſt, ſimpliciter quam numerus ad numerum; [a] ipſa commēſurabilia erũt; [b] Ac propterea & latera ipſorum potentia commenſurabilia exiſtent. Quare lineæ longitudine commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt.

[a] 6. decimi
[b] 3. defin.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed tamē, quam numerus ſimpliciter ad numerum, [c] potētia quidem commenſurales ſunt, [d] cũ earum quadrata commēſurabilia ſint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum; perſpicuum eſt, lineas potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine commenſurabiles eſſe. Solum enim eæ lineæ potentia commenſurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque ſunt commenſurabiles, vt conſtat ex ſecunda parte huius theorematis.

[c] 3. defin.
[d] 6. decimi

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ſed tamen, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles quidem ſunt longitune, at potentia commenſurabiles, vt modo diximus; liquido conſtat, lineas longitudine incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles eſſe.

ſolum enim eæ lineæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [a] potētia quoque incommenſurabiles ſunt, [b] cum earum quadrata incommenſurabilia ſint.

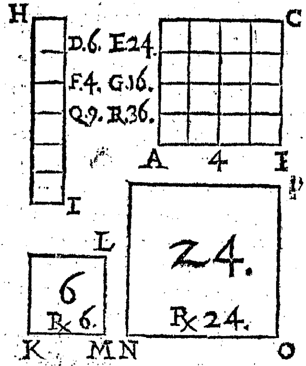
[a] 4. defin.
[b] 8. decimi

POSTREMO lineas potentia incommenſurabiles, eſſe omnino & longitudine incommenſurabiles, perſpicuum eſt. Nam ſi longitudine eſſent commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim potentia incommenſurabiles. Quamobrem lineæ potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt.

SCHOLIVM.

VT autem ſcopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter conſiderãda ſunt hæc, quæ ſequuntur. Primum lineas rectas longitudine commenſurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non ſolum eſſe eas, quæ numeris exprimi poſſunt, ſi cũ linea Rationali propoſita comparentur; quales ſunt illæ, quæ in demonſtratione ſunt poſitæ: (eſt enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis poſſunt numeris efferri, ſi cum Rationali linea propoſita conferantur: Deinde econtrario, quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorũ lineæ, ſeu latera, ex ſecunda theorematis parte, longitudine ſunt commenſurabilia, non ſolum ea eſſe intelligenda, quæ continent totidem quadratas menſuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ reſoluitur, quot ſunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipſis proportionem habentibus; cuiuſmodi ſunt quadrata in demonſtratione deſcripta: (continet enim quadratum ex A B, quatuor menſuras quadratas, & quadratum ex C D, nouem; quot nimirum vnitates ſunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures menſuras quadratas complectuntur, quã ſunt unitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe numero enim lineæ datæ cõmenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Raeionali lineæ propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratas menſuras, vel plures continent, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expreſſa numero 4. cuius quadratum A C, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, [a] vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectangulum H I, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [b] atq; ipſi H I, quadratum æquale conſtituatur KL, cuius latus KM. Poſtremo per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratum N P, ita ſe habeat KL, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniã igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratũ K L, ad quadratum N P, per conſtructionem; Continet autem quadratum KL, 6. mẽſuras quadratas, qualium 16. continet quadratũ Rationale A G: (conſtructum enim eſt quadratum K L, æquale rectangulo H I, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris.) continebit quadratum NP, earundem menſurarum quadratarũ 24. ac propterea



[a] 26. octaui

[b] 14. ſecũdi

pterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erũt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntq; lineæ Rationali AB, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeãt, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla uidelicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. [a] Quare longitudine commenſurabiles ſunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi cõſiderentur eædem lineæ KM, NO, ſimpliciter, & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum .n. proportionem habeant ſubduplam, ſi K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.

[a] 6. decimi

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerũ G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor unitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadẽ proportione ſumantur Q, R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata K L, NP, quam ſunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cũ alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus cõſtituatur; manifeſtũ eſt, in hoc theoremate intelligenda quoq; eſſe quadrata proportionẽ habentia, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, quę pauciores quadratas mẽſuras, vel plures cõprehẽdũt, quã vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur

cum

cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadē quadrata KL, NP, conſiderentur abſolute, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB. deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot unitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nã ſi recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum KL, quatuor menſuras quadratas, & quadratum NP, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eædem lineæ ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quã quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis lõgitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur a rectis lineis longitudine inter ſe commẽſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpe numero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

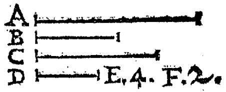
COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplũ eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplã proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera, nempe diameter, & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabilia. Hoc etiam nos demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. Quod tamen clarius oſtendet Euclides propoſ. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

11.
10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, ſitque A, prima ſecundæ B, commenſurabilis. Dico & tertiam C, quartę D, commenſurabilem eſſe. Quoniam. n. A, & B, inter ſe commenſurabiles ſunt,[a] habebit A, ad B, proportionem quã numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F.[b] Quare C, & D, commenſurabiles inter ſe ſunt.



SED ſit iam A, ipſi B, incommenſurabilis. Dico & C, ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Quoniam. n. A, & B, incommenſurabiles ſunt,[c] non habebit A, ad B, proportionem

[a] 5. decimi

[b] 6. decimi

[c] 7. decimi

tionem, quam numerus ad numerum : Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [a] Quare C, & D, incommenſurabiles ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

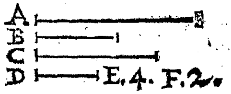
a 8. decimi

SCHOLIVM.

QVOD ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commenſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus poſteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.

SI autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commenſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cõmenſurabilis eſt potentia ipſi B, [b] erunt earum quadrata commenſurabilia, [c] ac propterea proportionem habebunt, quã numerus ad numerum. [d] Eſt autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propoſitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earum quadrata figuræ ſimiles ſimiliterq; deſcriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ. [e] Quare commenſurabilia erunt; [f] Ac propterea lineæ C, D, potentia commenſurabiles. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ. 8. huius lib. Sunt autem potentia commenſurabiles, vt oſtendimus: Igitur potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitũ.

b 3. defin.
c 5. decimi
d 22. ſexti
e 6. decimi
f 3. defin.



EADEM ratione, ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommenſurabilis. Nam ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles; erunt ipſarum potentiæ commenſurabiles; ac propterea ipſæ potentia tantum commenſurabiles erunt. Igitur, vt nunc oſtendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commenſurabiles; Ac idcirco longitudine tãtum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS ſi quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida; ſequetur nihilominus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines commenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ longitudine ſint commenſurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandẽ, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [a] atque adeo commenſurabiles erunt. Si vero lineæ lõgitudine incommenſurabiles ſint, ſiue potentia commenſurabiles exiſtant, ſiue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. [b] Quare incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

a 6. decimi
b 8. decimi

EODEM modo, ſi priores duæ magnitudines fuerint ſuperficies, vel ſolida, poſteriores vero duæ, lineæ, demõſtrabimus, ſi plana, vel ſolida commenſurabilia ſint, vel incommenſurabilia, lineas longitudine commenſurabiles eſſe, vel incommenſurabiles. Si enim plana, ſolidaue commenſurabilia ſint, [c] habebunt ipſa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cũ ipſis rationẽ habentes, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ; ac propterea longitudine commenſurabiles erunt, vt diximus in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Si vero plana, vel ſolida ſint incommenſurabilia, nõ habebũt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipſis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommenſurabiles erunt per ea, quæ docuimus in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Quod eſt propoſitum.

c 5. decimi

LEMMA A.

DVOS numeros planos innenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani nnmeri non ſimiles, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non ſit ſicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perſpicuũ igitur eſt E, F, numeros planos eſſe, planos autem diſsimiles; quoniam latera proportionalia non ſunt. quod facere oportebat.

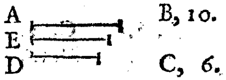
A, 2.	C, 3.
B, 6.	D, 16.
E, 12.	F, 48.

HÆC eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errãt autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpe numero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti, 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus poſterioris 6. & 8. vt conſtat; quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & 6. non ſint proportionalia lateribus poſterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſimiles, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura ſcripſimus in defin. 21. lib. 7. & in ſcholio propoſ. 23. lib. 8.

PROBL. 3. PROPOS. 11. 10. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta propoſita A, cui primum inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad qua-



dratum numerum: Deinde ex corollario propoſ.6.huius lib.reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerũ C. Dico D, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine tantum Quod enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.[a] Igitur rectæ A, & D, longitudine incomenſurabiles ſunt. Quod autem tantum longitudine ſint incommenſurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C,[b] ipſa commẽſurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantum incommenſurabiles ſunt.

a *9. decimi*

b *6. decimi*

SIT iam eidem rectæ propoſitæ A, inueniẽda linea incommeſurabilis lõgitudine, & potẽtia.[c] Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incõmenſurabiles, media proportionalis. Dico E, ipſi A, incomenſurabilẽ eſſe longitudine, & potẽtia. Quoniam.n.eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propoſ.20. lib.6.vt A, ad D; & A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum[d] erit & quadratum ex A, incommenſurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potẽtia ſunt incõmenſurabiles; ac proinde ex coroll.propoſ.9.huius lib. & omnino lõgitudine incõmenſurabiles ſunt. Eſt igitur E, ipſi A, incommenſurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propoſitæ recte lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonſtrandum.

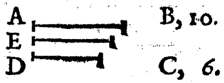
c *13. ſexti*

d *10. deci.*

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, ita vt ab ea menſura cæterarum ſumantur; erit & recta D, per defin.6.Rationalis, quia potentia illi eſt commenſurabilis, licet eidem longitudine incommenſurabilis ſit. At vero E, Irrationalis, ex defin.7.cum Rationali A, incommenſurabilis ſit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demonſtratione huius theorematis liquido conſtat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commenſurabiles, vel quod idem eſt, inter duas longitudine tantum incommenſurabiles, eſſe vtrilibet illarum incommenſurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. Ex eo enim quod recta A, D, ſunt longitudine tantum incommenſurabiles, vel commenſurabiles potentia tantum, demonſtrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine, & potentia: Eodemque argumento oſtendemus eandem longitudine, & potentia ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Cum enim recta D, E, A, ſint continue proportionales, erit ex coroll.propoſ.20.lib.6.vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Eſt autem recta D, recta A, incommenſurabilis longitune,[a] Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommenſurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin.incommenſurabiles ſunt potentia. atque adeo & longitudine, per coroll. propoſ. 9. huius lib.



a *10. deci.*

IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propoſitio à Theone propoſitioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum eſſe puto, cum ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitione decima demõſtretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

12.
8.

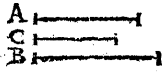
QVAE eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe commenſurabiles. Cum enim A,& C, ſint commenſurabiles, [a] habebit A,ad C,proportionem,quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D,ad numerũ E. Rurſus quia C, B, commenſurabiles ſunt, habebit quoque C,ad B,proportionem, quam numerus ad numerum : habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] ſumanturque tres numeri H,I,K,minimi deinceps proportionales in proportionibus D,ad E,& F,ad G;ſitque H, ad I, vt D,ad E,hoc eſt, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc eſt, vt C, ad B. Quoniam igitur eſt A,ad C,vt H,ad I;& C,ad B, vt I,ad K; erit ex æquo A,ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H,K, [c] inter ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini commenſurabiles ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 5. decimi

[b] 4. octaui

[c] 6. decimi



D. 10. E, 8.
F, 2. G, 3.
H, 5. I, 4. K, 6.

SCHOLIVM.

QVOD ſi magnitudines A,B,C,ſint lineæ, atq; A,& B, ipſi C,longitudine commenſurabiles exiſtant, erunt quoq; A, & B,inter ſe longitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A,& B,proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commenſurabiles erunt, vt ad propoſ. 6. diximus. Si vero A,& B,fuerint ipſi C,potentia commenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo & A, B, inter ſe commenſurabiles potentia. Cum enim A, & C,ſint potentia commenſurabiles, [d] erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C,per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C,ad quadratum ex B, vt numerus ad numerũ, nimirũ vt F, ad G. [e] Sumptis ergo in eiſdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus; erit rurſum ex æquo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, vt numerus H, ad numerum K. [a] Quare quadrata ex A, & B, commenſurabilia ſunt; atque adeo lineæ A, B, potentia commenſurabiles, Non tamen ex hoc ſequitur, A, & B, potentia tantum eſſe commenſurabiles. Poſſunt enim eſſe duæ lineæ lõgitudine inter ſe cõmenſurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantũ ſit commenſurabilis; quales ſunt duæ Rationales longitudine inter ſe cõmenſurabiles, potentia vero tantum Rationali expoſitæ cõmmẽſurabiles, quas quidem inueniemus poſtea in ſcholio 2. propoſ. 19. huius lib.

[d] 5. decimi

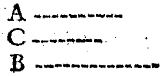
[e] 4. octaui

[a] 6. decimi

SED & conuerſum quodammodo huius theorematis demonſtrabimus hoc modo.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera vero ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis.

SINT enim A, & B, commenſurabiles, ſitq; A, ipſi C, commenſurabilis. Dico & B, eidem C, commenſurabilem eſſe. Cum enim tam B, quam C, ipſi A, ſit commenſurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

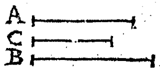


QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine, ſit autem A, ipſi C, commenſurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commenſurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipſi A, longitudine ſit commenſurabilis, erunt etiam B, C, inter ſe commenſurabiles longitudine, vt oſtendimus. At vero ſi lineæ A, & B, potentia tantũ ſint cõmẽnſurabiles, & A, ipſi C, commenſurabilis ſiue longitudine, & potentiæ, ſiue potentia tantũ, colligemus quidẽ eodem argumento, reliquã B, eidem C, potentia eſſe commenſurabilẽ; quia vtraq; B, C, ipſi A, hac ratione potentia eſt cõmenſurabilis ex hypotheſi. Non autẽ colligere licebit, ſi A, ipſi C, cõmenſurabilis ſit longitudine, reliquam B, eidẽ C, longitudine commenſurabilẽ eſſe, quia non vtraque B, C, ipſi A, longitudine cõmenſurabilis eſt, ſed C, quidẽ longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypotheſi conſtat.

12.
0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera vero incommenſurabilis: Incommenſurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, ſit ipſi C, commenſurabilis, & B, eidem C, incommenſurabilis. Dico A, & B, inter ſe incommẽſurabiles eſſe. Si enim B, dicatur eſſe cõmenſurabilis ipſi A;
[a] 12. deci. cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponitur enim B, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi A, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duę magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommenſurabiles.
[b] 12. deci. *Si enim longitudine commenſurabiles eſſent, [b] oſtenderemus quoque B, C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis, ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommenſurabilis; erunt A, & B, potentia incommenſurabiles. Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoque B, & C, potentia commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſi C, potentia incommenſurabilis.*

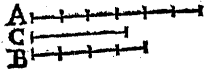
QVONIAM vero hæc propoſitio 13. apud Theonem lemma eſt, fit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac ſeriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

lemma

13.
8.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.



SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommẽſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem: Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cũ & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis;
[a] 12. deci. [a] erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

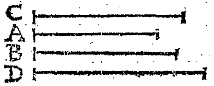
SCHOLIVM.

HIC quoque, ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si
[b] 12. deci. *enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, [b] eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (Cum hoc poſito, vtraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, ipſi C, longitudine*

dine incommenſurabilis. Quod ſi A, & B, cõmenſurabiles ſint potentia tantum, & A, ipſi C, potentia incommenſurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipſi C, potentia incommenſurabilem eſſe. Alias ſi B, C, potentia eſſent commenſurabiles; [a] & A, C, potentia commenſurabiles eſſent. (cum hoc poſito, vtraque A, C, ipſi B, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod non ponitur. [a] 12. deci.

COLLIGVNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis ſequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonſtrantur, perutile.

QVAE incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt.



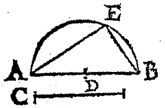
SINT duæ magnitudines incommẽſurabiles A, B, quibus commenſurabiles ſint C, & D, nempe C, ipſi A, & D, ipſi B. Dico C, & D, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam. n. A, & C, commenſurabiles ponuntur, & eſt A, ipſi B, incommenſurabilis; [b] erit quoque reliqua C, eidem B, incommenſurabilis. [b] 14. deci. *Rurſus quia D, & B, commenſurabiles ponuntur, & eſt B, oſtenſa ipſi C, incommenſurabilis; [c] erit & D, reliqua eidem C, incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.* [c] 14. deci.

SI autem magnitudines A, B, C, D, ſint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommenſurabiles, vel longitudine & potentia; ſint autem C, D, ipſis A, B, longitudine commenſurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incõmenſurabiles. Si vero A, & B, incõmenſurabiles ſint potẽtia, & ipſis potẽtia tantũ cõmenſurabiles C, & D; oſtendemus ſimiliter C, & D, potẽtia eſſe incõmẽſurabiles; vt perſpicuũ ẽ.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inęqualibus, inuenire id, quo maior plus poteſt, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatque inuenire, quo A B, plus poſſit quam C. Diuiſa AB, bifariam in D, deſcribatur ex centro D, & interuallo D A, vel D B, ſemicirculus A E B, [a] in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturque recta E B. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectę E B. [a] 1. quarti *[b] Cum enim angulus E, in ſemicirculo rectus ſit; [c] erit quadratum ex A B, ęquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco A B, plus poterit quam AE, hoc eſt, quam C, quadrato rectę E B. Quod eſt propoſitum.* [b] 31. tertij [c] 47. primi



Similiter

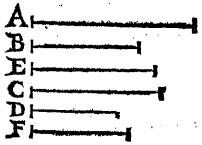
DVABVS datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam aliter tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo datę duę rectæ AE, EB, quæ ſi coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta A B, [d] quippe cum quadratum ex AB, ęquale ſit quadratis ex A E, E B. [d] 47. primi

THEOR. 12. PROPOS. 15.

14.
12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quã quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quã ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incõmenſurabilis lõgitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.



SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, poſsitque A, prima plus quam B, ſecunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus poſsit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si vero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilẽ eſſe. Quoniam.n. eſt vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autẽ quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotheſim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commẽſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] *22. ſexti*

[b] *22. ſexti*

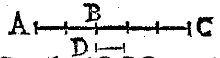
SCHOLIVM.

EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantũ commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

15.
9.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt.

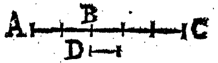


COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilem eſſe. [a] Sit enim ipſarum AB, BC, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, [b] metietur quoque D, totam A C, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commẽſurabiles. Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commenſurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.

[a] *3. decimi*

[b] *1. pron.*

SED



SED iam tota A C, ex A B, B C, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum A B, B C, nempe ipſi A B. Dico & AB,BC, inter ſe commenſurabiles eſſe.[a] Sit enim D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; [b] metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB,BC; commenſurabiles erunt AB,BC, inter ſe. Eodē argumento oſtendemus AB, B C, eſſe commenſurabiles, ſi AC, ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines cōmenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 3. deci.
[b] 3. pron.

COROLLARIVM.

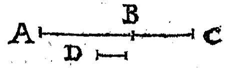
HINC ſequitur, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ commenſurabilem eſſe. Vt ſi AC, ipſi A B, ſit commenſurabilis, eſſe quoque eandem A C, reliquæ BC, commenſurabilem. Nam vt in poſteriori parte theorematis oſtenſum eſt, ſemper D, communis menſura totius A C, & ablatæ A B, cum metiatur totam A C, & ablatam A B, metietur quoque reliquam B C, ex 3. pronunciato. Quare commenſurabiles ſunt AC, B C. Quod eſt propoſitum.

16. THEOR. 14. PROPOS. 17.

9. SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quę a principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incōmenſu-

rabiles A B,B C. Dico totam quoq magnitudinem AC, vtrique ipſarum AB, BC, incommenſurabilem eſſe. Si enim non eſt vtrique incommenſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt, nempe ipſi A B, [a] ſitque D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam AB; [b] metietur quoque D, reliquam BC; Ac proptea cum D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commēſurabilis eſt AC, ipſi AB; Eademque ratione neque ipſi BC, commenſurabilis erit. Quare vtrique ipſarum AB, B C, incommenſurabilis eſt.



[a] 3. decimi
[b] 3. pron.

SED iam tota AC, compoſita ex AB, BC, incommēſurabilis ſit vni ipſarum componentium, nempe ipſi AB. Dico quoque AB, BC, incommenſurabiles eſſe. Si enim ſint commenſurabiles, [c] erit quoque tota A C, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis Quod eſt abſurdum. Ponitur enim AC, alteri ipſarum, nempe ipſi AB, incommenſurabilis. Non ergo commēſurabiles ſunt AB, BC. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, incommenſurabiles eſſe, ſi A C, ipſi B C, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 16. deci.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ incommenſurabilem eſſe. Nempe ſi A C, incommenſurabilis ſit ipſi A B, eſſe quoq; eandem AC, reliquæ B C, incommenſurabilem. Si enim AC, ipſi B C, foret commenſurabilis, eſſet quoque A C, ex coroll. præcedentis propoſ. reliquæ AB, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. ponitur enim incommenſurabilis. Non eſt ergo A C, ipſi B C, commenſurabilis, ſed incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM eſt, in duabus proximis antecedentibus propoſitionibus, earumque corollarijs, ſi de lineis agatur, intelligendas eſſe lineas longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles. Aſſumitur enim ad vtriuſque propoſitionis demonſtrationem communis menſura D, &c. quam quidem ſolum lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

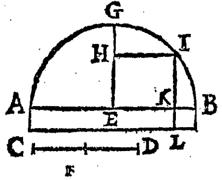
HOC lemma demonſtrauimus nos in ſcholio propoſ. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

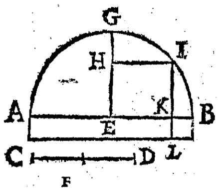
QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, abſolui poſsit ex propoſ. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea deſcripti minor ſit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propoſ. illa 28. lib. 6. hoc eſt, quadratum ex dimidio minoris lineæ deſcriptum,

(quod quidem quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti, ex ſcholio propoſ. 4. lib, 2.) minus ſit quadrato ex dimidiata parte maioris deſcripto : (quod quidem applicatum eſt ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, abſolui hoc poſſit per propoſ. 28. lib 6. libet tamen idipſum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior ſit, oporteatque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidẽ parallelogrammum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta C D, deſcripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, ſemicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque A E, dimidia ipſius AB, hoc eſt E G, ipſi A E, æqualis, maior quam C F, dimidia ipſius C D. Poſita igitur E H, æquali ipſi C F, agatur per H, ipſi A B, parallela H I, demittaturque I K L, ad A B, perpendicularis, & ſit K L, ipſi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum BL. Dico parallelogrammum A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata BL, æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam. n. KI, media proportionalis eſt inter AK, KB, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. tradidimus;[a] erit rectangulum ſub A K, K B, hoc eſt, rectangulum A L, æquale quadrato ex KI, hoc eſt, quadrato ex EH;[b] (eſt enim K I, ipſi



[a] 17. ſexi

[d] 34. primi



KI,ipſi EH,æqualis,ob parallelogrammum E I,)hoc eſt,quadrato ex C F: Eſt autem quadratum ex C F, quarta pars quadrati ex CD; quod quadratum ex C D,per ſcholiũ propoſ. 4.lib.2.quadruplũ ſit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectam A B, applicatum deficienſque quadrato B L, æquale eſt quartæ parti quadrati ex C D, deſcripti. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate abſoluemus & hoc problema, quod ſequitur, in hunc modum.

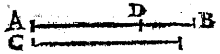
DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectãgulum ſub partibus contentum, æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quam quadratum a dimidia linea deſcriptum.

SIT enim recta data A B, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex C F, non maius quam quadratum ex dimidia A E, ita vt latus CF, non maius ſit latere A E. Educta ergo ad AB, perpendiculari E G, ſit EH, æqualis ipſi CF. Deinde acta HI, parallela ipſi A B, demittatur IK, perpendicularis ad A B. Quibus peractis oſtendemus, vt prius, rectangulum ſub partibus AK, KB, æquale eſſe quadrato ex I K, hoc eſt, quadrato ex C F, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale eſt poſitum quadratum ex C F. Quod eſt propoſitum. Diximus autem, rectilineum datum non debere eſſe maius, quam quadratum ex dimidia linea deſcriptum; quia ſi maius eſſet, eſſet quoque recta C F, maior quam recta EG. Quare ex EG, abſcindi non poſſet recta ipſi C F, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

LEMMA

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.



SINT duę rectę inęquales A B, & C; & ad maiorem A B, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ſitque illud æquale quartę parti quadrati ex minore C, deſcripti, ita vt D B, latus ſit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico ſegmẽta AD, DB, inęqualia eſſe. Si enim AD, DB, ſegmenta dicantur eſſe ęqualia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad A B, deficienſque figura quadrata ex D B, deſcripta, æquale ſit rectangulo ſub AD, DB; ſit autem quod ſub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipſius AB, deſcriptum; atque adeo ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplũ erit ipſius parallelogrammi: Eſt autem & quadratum ex C, per hypotheſim, quadruplum eiuſdem parallelogrammi applicati, nempe quartę partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex A B, & C, æqualia ſunt, atque rectę A B, & C, ęquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim inæquales, & A B, maior. Inęqualia igitur ſunt ſegmenta AD, D B. Quod eſt propoſitum.

HOC facile etiam apparet ex conſtructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abſciſſa ſit per *ſit per conſtructionem, E H, æqualis dimidiatæ parti ipſius CD, nempe ipſi C F, ductaque H I, parallela ipſi AB, & tandem demiſſa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione ſint A K, K B; manifeſtum eſt AK, KB, ſegmenta eſſe inæqualia, cum A B, in E, ſecta ſit bifariam. Immo hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.*

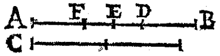
17.
13.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſsit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

SINT

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, deſcripti, per lemma ſecundum præcedentis propoſ. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum ſub A D, B D, faciatque ſegmenta AD, DB, longitudine commenſurabilia. Dico AB, plus poſſe quã C, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quoniã.n. per 3. lẽma præcedentis propoſ. AD, maior eſt, quam DB; diuidatur AB, bifariam in E, & ipſi E D, æqualis ſumatur E F. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales ſint, & ablatæ quoque EF, ED; erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuiſa eſt bifariam in E, & non bifariam in D; [a] erit rectangulum ſub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli ſub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex EB: Eſt autem quadruplo rectanguli ſub AD, DB, æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum ſub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale eſt quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum eſt ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum F D, dupla ſit ipſius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale eſt quadratum ex AB. (quod quadratum ex AB, quadruplum ſit per ſcholiũ propo. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipſius AB.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia ſunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus poteſt quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur FD, demonſtrare oportet longitudine commenſurabilem eſſe ipſi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commenſurabiles; [b] erit quoq; tota AB, parti DB, commenſurabilis longitudine. Eſt autem & ipſi DB, compoſita ex DB, AF, longitudine commenſurabilis: (quod compoſita ex DB, AF, dupla ſit ipſius D B) Igitur cum vtraque A B, & compoſita ex D B, A F, longitudine ſit commenſurabilis ipſi D B; [c] erunt quoque AB, & compoſita ex D B, A F, longitudine inter ſe commenſurabiles; Ac propterea cum A B, compoſita ex A F,

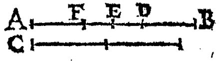


Y DB,

[a] 5. ſecũdi

[b] 16. deci.

[c] 12. deci.



DB, tanquam una, & ex FD, cōmēſurabilis ſit longitudine cōpoſitæ ex A F, D B; erit eadem AB, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. commenſurabilis lōgitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D, longitudine ſibi commenſurabilis.

SED iam AB, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, ęquale parallelogrammū applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine eſſe commenſurabiles. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus AB, plus poſſe, quam C, quadrato rectæ FD. Quare cū, AB, ponatur plus poſſe, quam C, quadrato rectæ lōgitudine ſibi cōmenſurabilis; erit recta AB, ipſi FD, lōgitudine cōmenſurabilis. Igitur cū tota A B, cōpoſita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commenſurabilis ſit longitudine ipſi FD; erit eadem AB, longitudine cōmenſurabilis reliquæ compoſitę ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Eſt autem & compoſita ex AF, DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis, cum ipſius ſit dupla: Igitur cū vtraque AB, DB, longitudine ſit cōmenſurabilis compoſitæ ex AF, D B; [a] erunt quoq; AB DB, longitudine inter ſe commenſurabiles: Atque adeo cum tota AB, compoſita ex AD, DB, commenſurabilis ſit lòngitudine ipſi DB; [b] erunt ipſæ AD, DB longitudine quoque inter ſe commenſurabiles. Quocirca ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonſtrandum.

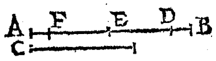
[a] 12. deci.

[b] 16. deci.

18. THEOR. 16. PROPOS. 19.

14. SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autē parti quadrati, quod ſit a minore, æquale parallelogrammū ad maiorē applicetur deficiēs figura quadrata, & in partes incōmenſurabiles lōgitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quātum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incōmenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quam minor, quātum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autē parti quadrati, quod ſit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

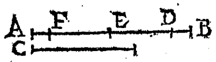
SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minore deſcripti applicetur ad AB, per 2. lemma propoſ. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incōmenſurabiles. Dico AB, plus poſſe quá C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus A B, plus poſſe quam C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonſtrare oportet ipſi A longitudine eſſe incommenſubilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommenſurabiles; [a] erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommenſurabilis. Sed D B, longitudine commenſurabilis eſt compoſitæ ex DB, AF, cum hæc illius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commēſurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipſa DB, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ AB: [b] erit quoque reliqua compoſita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommenſurabilis: Ac propterea cum A B, compoſita ex AF, DB, tanquam una, & ex F D, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex A B, D B, erit eadem A B,



[a] 17. deci.

[b] 14. deci.

per coroll.propoſ.17.huius lib.& reliquæ F D,longitudine incommenſurabilis.Ergo A B,plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D,longitudine ſibi incommēſurabilis.



IAM vero A B, plus poſſit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommēſuraBilis;& quartæ parti quadrati ex C,æquale parallelogrāmum applicetur ad AB, deficiēs figura quadrata,faciatque in recta AB,partes AD,DB.Dico & rectas AD, DB, eſſe incommenſurabiles longitudine.Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus vt prius,rectam AB,plus poſſe quam C,quadrato rectæ FD.Quare cum AB,ponatur plus poſſe,quā C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; erit AB,ipſi FD,incommenſurabilis longitudine.Igitur cum tota AB,compoſita ex FD,& ex AF,DB, tamquam vna,longitudine incommenſurabilis ſit ipſi F D; erit eadem AB,per coroll.propoſ.17.huius lib.& reliquæ compoſitæ ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis : Eſt autem compoſita ex AF,DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis,cum illa huius ſit dupla. Igitur cum duarū linearum commenſurabilium, nempe quæ ex A F, DB, componitur,& DB,ipſa compoſita ex A F,DB,longitudine incommenſurabilis ſit rectæ A B; [a] erit & reliqua DB,eidem AB,longitudine incōmenſurabilis ;Ac proinde cum tota AB,compoſita ex AD,DB, incommenſurabilis ſit ipſi DB, longitudine ; [b] erunt & ipſę A D, DB, longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales,quartę autem parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 14. deci.

[b] 17. deci.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus;nunc ad Rationales & Medias tranſit in ſequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonſtratum eſt, lineas longitudine commenſurabiles, omnino & potentia cōmenſurabiles eſſe,potentia vero commenſurabiles,nō omnino & longitudine, ſed poße & longitudine commenſurabiles eße,& incommenſurabiles ; manifeſtum eſt, ſi expoſitæ Rationali aliqua linea cōmenſurabilis fuerit longitudine,illam Rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine,ſed etiam potentia:longitudine enim commenſurabiles,omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si vero expoſitæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis , ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis , & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia . Quod ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia,longitudine fuerit incommenſurabilis ; dicetur & ſic Rationalis , potentia tantum ipſi commenſurabilis .

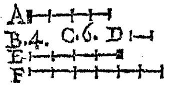
LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt,vel potentia ſolum.Sunt autem & aliæ lineæ , quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt , potentia autem ſolum cōmenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur Rationales,& commenſurabiles inter ſe , quatenus Rationales; commenſurabiles , inquam , inter ſe vel longitudine & potentia , vel potentia ſolum : Et ſi quidem longitudine , dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur , etiā potentia commenſurabiles eſſe; Si vero potentia inter ſeſo-

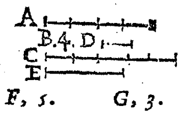
ſe ſolum ſunt commenſurabiles : dicuntur ipſæ quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.

SCHOLIVM.

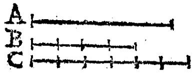
ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearũ Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe cõmenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis : Aut denique vtraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes, quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliã E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cum habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarũ vna, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.



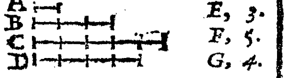
IAM vero D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cum ergo & inter ſe ſint longitudine commenſurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.



POSTREMO expoſitæ Rationali A, [a] inueniatur recta B, longitudine tantum incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erũt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolum eſſe cõmenſurabiles. Quoniam. n. A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeo & potentia; [b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolum potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.



QVOD ſi quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe commẽſurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mẽſura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipſi A, æqualibus, quot ſunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem menſuram A, longitudine commenſurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe eſſe commenſurabiles, facile hoc modo demonſtrabimus. [d] Quoniã Rationales lineæ

[a] 11. deci.

[b] 12. deci.

[c] 14. deci.

[d] 6. defin.

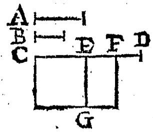
[a] 12. deci.

ſunt, quæ expoſitæ Rationali ſunt commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] quæ autem eidem commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt; manifeſtum eſt, Rationales lineas quaſcunque inter ſe commenſurabiles eſſe.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum ſub A, & B, comprehenſum. Ex quantacunque.n. linea recta CD, abſcindatur CE, ipſi A, æqualis, & EF, ipſi B. Deinde ſuper CE, deſcribatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum ſub CE, & EF, hoc eſt, ſub A, & B. [a] Quoniam igitur eſt vt CE, ad EF, hoc eſt, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc eſt, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, ſub A, & B, comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, vt quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.



[b] 1. ſexti

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod eſt propoſitum.

LEMMA

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit nãq; C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia, quod nimirum ab expoſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur B, Rationale eſt, [a] erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B, [b] inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile, [c] Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. defin.

[b] 12. deci.

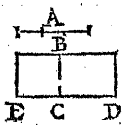
[c] 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

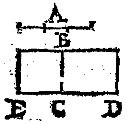
19.
15.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulũ BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorũ. (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorũ, quos in ſcholio 2. antecedẽtis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarũ



BC,



BC,CD,Rationali expoſitę A,ſit æqualis,vel neutra,ſed tamen ei vtraque commenſurabilis ſit aut longitudine,aut potentia tantum . Dico B D, rectangulum Rationale eſſe . Deſcribatur.n. ex altera earum,nempe ex BC,quadratum BE. Quoniam igitur B C,Rationalis Rationali expoſitæ A, commenſurabilis eſt vel longitudine & potentia , vel potentia ſolum;[a] erit quoque quadratum BE,ex BC,deſcriptum quadrato ex A, commenſurabile:[b] Eſt autem quadratum ex A, Rationale , ratione cuius reliqua Rationalia uocantur , vel Irrationalia.[c] Igitur & B E, illi commenſurabile,Rationale eſt. Quia vero BC,hoc eſt, EC,& CD,longitudine commenſurabiles ſunt;(ponuntur enim BC,CD,Rationales inter ſe longitudine commenſurabiles.)[d] & eſt vt E C,ad CD,ita EB,ad B D;[e] erunt quoque E B,BD,commenſurabilia . Quare ex lemmate 4.antecedẽtis propoſ. BD, Rationali BE,comménſurabile, Rationale eſt . Quod igitur ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis , &c. Quod erat demonſtrandum .

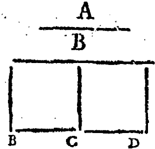
a 3. defin.
b 8. defin.
c 9. defin.
d 1. ſexti
e 10. deci.

20.
16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei , ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

SIT rurſum expoſita Rationalis A,& alia Rationalis BC,ſecundum aliquem modorum, quos in ſcholio 2. propoſitionis 19. expoſuimus ,hoc eſt, ſiue B C, æqualis ſit Rationali expoſitæ A , ſiue non , commenſurabilis tamen ei vel longitudine & potentia , vel potẽtia tantum . Applicetur autẽ ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens C D. Dico CD, Rationalẽ eſſe,& ipſi BC,commenſurabilẽ longitudine . Deſcribatur.n. exBC,quadratũ B E; quod ſimili-



ter,

ter,vt in antecedenti propoſ.oſtendemus Rationale eſſe. Quia igitur B E,B D, Rationalia ſunt ,[a] ipſa commenſurabilia erũt quadrato ex linea Rationali expoſita A,deſcripto;[b] Ac propterea & cõmenſurabilia inter ſe erũt:[c] Eſt autẽ vt BE,ad BD,ita EC,hoc eſt,B C,ad CD.Igitur & BC,C D, cõmenſurabiles ſunt longitudine , vt in ſcholio propoſ. 10.huius lib.docuimus.Eſt ergo CD,ipſi BC,cõmenſurabilis lõgitudine:[d] ſed & Rationalis,quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expoſitæ A, commenſurabilis ſit , vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib.demõſtrauimus.Quare latitudo CD, Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis ipſi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur,latitudinẽ efficit,&c. Quod erat demonſtrandum .

a 9. defin.
b 12. deci.
c 1. ſexti
d 6. defin.

LEMMA.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt .

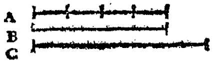
POSSIT recta A, ſpatium Irrationale , hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe.

Si enim dicatur Rationalis;erit eius quadratum Rationale *quoque , vt in demonſtratione propoſ.* 20. *huius lib. oſtenſum eſt . quod eſt abſurdum . ponitur enim Irrationale . Non ergo A , Rationalis eſt . Igitur Irrationalis .*

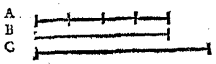
HOC idẽ conſtat ex definitione 11 *.huius lib.Vbi lineæ potẽtes ſpatia Irrationalia,vocãtur Irrationales.*

LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire .



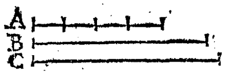
DVO genera ſunt linearum Rationalium *potentia tantum inter ſe commenſurabiliũ . Aut enim altera earum eſt æqualis expoſita* Ra-



Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, [a] inueniatur C, longitudine tantũ incõmenſurabilis, ſeu (quod idẽ eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt; (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum commenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

[a] 11. deci.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantũ incommenſurabilis [b] inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraque B, C, expoſitæ Rationali A, ſit potentia commenſurabilis; [c] erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles.



[b] 11. deci.

[c] 6. deſin.

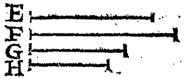
SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD ſi inueniendæ ſint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur nempe, A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potentia tantũ commenſurabiles inter ſe. Quod enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtructione; ſimiliterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G. vt A, ad C; ſimiliterq; quadratũ ex E, ad quadratũ ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.) [a] erunt ipſa inter ſe commẽſurabilia, ac propterea & rectæ ipſæ potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam qnadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. [b] Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

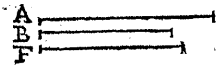
A, 5.
B, 7.
C. 3.
D, 2.



[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus



C, 10.
D, 6,
E, 7.

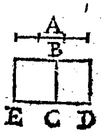
omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autẽ alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E,[a] commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus; (quòd D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoque plani non ſimiles, ac proinde ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)[b] erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.

[a] 6. decimi
[b] 9. decimi

21.
19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.



SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum B D, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi BD, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ uocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus.[a] Et quoniam eſt vt E C, hoc eſt, B C, ad C D, vt BE, ad BD. Eſt autem BC, ipſi CD, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipſi B D, incommenſurabile.[b] Quare cum B E, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A: ſit autem B E, ipſi B D, incommenſurabile;[c] erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A, eidem B D, incommenſurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expoſitæ incommenſurabile exiſtens,[d] Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum BD, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.

VOCETVR autem hæc linea potens ipſum BD, Media,[e] propterea quod media proportionalis ſit inter duas B C, C D, Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratũ æquale ſit rectangulo BD, ſub ipſis B C, C D, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 1. ſexti.
[b] 9. defin.
[c] 14. deci.
[d] 10. defin.
[e] 17. ſexti

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur.[a] Cum enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur.

[a] 17. ſexti

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non ſolum recta potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt, vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint cōtinue proportionales, quales ſunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22 lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum proportionale eſt inter quadrata rectarum B C, C D, ideoque Medium appellari poteſt.

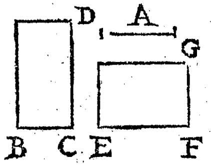
HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quale eſt Medium B D. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaq; non reciprocantur, rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehēſo æquale eſt, ita vt ipſũ poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

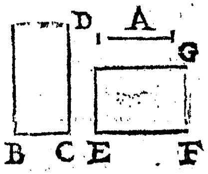
22.
20.

QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.



SIT linea Media A, & Rationalis BC, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum;[a] appliceturque ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato

[a] 45. pri.



æquale eſt, faciatq; latitudinem
CD. Dico CD, Rationalem eſſe,
& ipſi B C, longitudine incom-
menſurabilẽ. Quoniam.n. A, Me
dia eſt, ipſa poterit rectangulum
ſub duabus rectis Rationalibus
potentia tantum inter ſe com-
mẽſurabilibus contentum; alias
non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG,
ſub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commen-
ſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt
[a] 14. ſexti etiam ipſum BD; æqualia erunt B D, & E G, [a] lateraque
idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nem
[b] 22. ſexti pe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D; [b] Ac propterea
quoque vt quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita
quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratũ
ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quod re-
ctæ B C, E F ponantur Rationales; atque adeo inter ſe
commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽ-
[c] 10. deci. tia tantum.) [c] Igitur & quadratum ex F G, commenſu-
rabile erit quadrato ex C D; propterea que & rectæ F G,
CD, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cum
FG, Rationalis expoſitę Rationali ſit commenſurabilis,
ſi ipſa non eſt expoſita Rationalis; erit quoque C D, ex-
poſitæ Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in
ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo C D, ex defini-
tione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incom
menſurabilis ipſi BC. Quoniã.n. EF, FG, Rationales ſunt
potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine
incommenſurabiles; & eſt vt EF, ad F G, ita quadratum
ex EF ad rectangulum EG, ſub E F, FG, contentum, ex
[d] 10. deci. lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. [d] erit quadratum ex
E F, incommenſurabile rectangulo E G, atque adeo re-
ctangulo B D, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum
ex EF, commenſurabile eſt quadrato ex CD. (quod EF,
CD, Rationales ſint, atque idcirco ſaltem potentia com
menſurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commen
ſurabile ſit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem
[e] 13. deci. quadrato ex EF, incommenſurabile; [e] incommenſurabi-
lia

lia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Eſt au-
tem ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex
CD, ad rectangulũ BD, vt recta CD, ad rectam BC. [a] In- [a] 10. deci.
commenſurabiles ergo ſunt longitudine CD, & BC. Ra
tionalis ergo eſt CD, & Rationali B C, longitudine in-
commenſurabilis. Quamobrem, quod a Media fit, ad
Rationalem applicatum, &c. Quod demonſtrandum
erat.

SCHOLIVM.

*FACILIVS quam ex propoſ. 45. lib. 1. applicabimus
ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, ſi ipſis B C, &
A, [b] ſumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim* [b] 11. ſexti
BC, A, & CD, proportionales ſint; [c] erit rectangulum B D, [c] 17. ſexti
*ſub extremis B C, C D, contentum æquale quadrato mediæ
proportionalis A.*

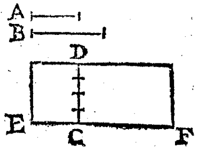
*HAC arte vtendum erit & in ſequentibus, quando ad
aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale qua-
drato cuiuſpiam lineæ rectæ.*

*PORRO ex hoc theoremate manifeſtũ eſt, omne Me-
dium, hoc eſt, ſpatium, quod linea Media poteſt, æquale eſſe
cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus
potentia tantum commenſurabilibus. Nam ſi illi Medio ad
Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet
id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine li-
neæ Rationali incommenſurabile. Quare rectangulum hoc
applicatum Medio æquale, Medium erit ſub duabus Ratio-
nalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atq;
hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium
cõtentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commen
ſurabilibus.*

THEOR. 21. PROPOS. 24. 23. 21.

MEDIAE cõmenſurabilis, Media eſt.

SIT Mediæ A, recta B, commenſurabilis ſiue longi-
tudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, Me-
diam eſſe. Expoſita enim ſit Rationalis C D, [d] ad quam [d] 45. primi
applicetur rectãgulũ DE, æquale quadrato ex A, Media.



Quoniam igitur D E. Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit C E, latitudinem; [a] erit C E, Rationalis ipſi C D, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus ad CD, Rationalem [b] applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erũt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, DE, DF, commenſurabilia.[c] Eſt autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF.[d] Igitur EC, C F, longitudine ſunt commenſurabiles: Sed EC, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi C D, incommenſurabilis.[e] Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ C D, ſit commenſurabilis; (Nam cum E C, C F, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & E C, ipſi CD, commenſurabilis ſaltem potentia, quod Rationalis ſit; erit & CF, eidem C D, commenſurabilis potentia, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus.) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commenſurabiles, [f] Ac proinde recta B, potens rectangulum DF, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, Media eſt. Mediæ igitur commenſurabis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

[a] 23. deci.

[b] 45. primi

[c] 1. ſexti

[d] 10. deci.

[e] 14. deci.

[f] 22. deci.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſſe. Poſtquam. n. demonſtratum eſt DF, commenſurabile eſſe Medio DE, oſtenſum ex eo mox fuit D F, eſſe quoque Medium. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

SIT ſpatium D F, ſpatio Medio DE, commenſurabile. Dico & DF, Mediũ eſſe. Poſſit enim A, Media ipſum D E, Mediũ. (Nam cum D E, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Media dicitur, vt

in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipſum D F. Quoniam igitur D E, D F, commenſurabilia ſunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipſis æqualia, commenſurabilia. Quare A, B, rectæ potentia ſaltẽ ſunt cõmenſurabiles; Atq; idcirco exiſtente A, Media, erit & B, illi commenſurabilis Media, vt in hoc theoremate oſtenſum eſt. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim ſpatium, quod poteſt Media, Medium appellatur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus.

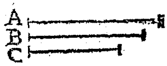
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius lib. de Rationalibus dictum eſt, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commenſurabilem, dici Mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed & potentia; Vniuerſe enim quæ longitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui ſi inueniantur duæ rectæ commenſurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; [a] *erit vtraque B, C, Mediæ A, commenſurabilis, Media. Cum ergo A, B, ſint longitudine commenſurabiles; & A, C, potentia tantum; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commenſurabiles; & A, C, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*



[a] 24. deci.

SCHOLIVM.

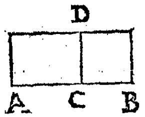
QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commenſurabilis, Media ſit; nõ tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis; cum duæ Mediæ dari poſſint prorſus incommenſurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ ſint duæ Mediæ longitudine & potentia incommenſurabiles.

24.
23.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

CONTINEATVR rectangulum AD, ſub Medijs AC, CD, longitudine cõmenſurabilibus. Dico AD, Medium eſſe. Deſcribatur ex CD, Media quadratũ BD, quod erit Medium. [b] Et quoniam eſt vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autẽ AC, CB, hoc eſt, AC, CD, longitudine cõmenſurabiles; [c] erunt AD, DB, cõmenſurabilia. Quare ſpatium AD, Medio DB, cõmenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. præcedentis propoſ.



[b] 1. ſexti

[c] 10. deci.

---

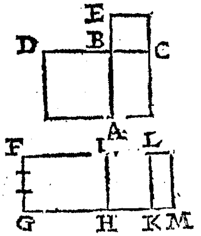
propoſ. Quod ergo ſub Medijs longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

25.
23.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD ſub Medijs potentia tantũ commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

SIT rectangulum A C, comprehenſum ſub Medijs AB, BC, potentia tantum commẽſurabilibus. Dico AC, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum F H, quadrato AD, ex AB, deſcripto æquale; & ad HI, rectangulum I K, rectangulo A C, æquale; & denique ad K L, rectangulum L M, æquale quadrato CE, ex BC, deſcripto; eritque totũ F M, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero AD, CE, Media ſũt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, ([b] eſt enim & KL, Rationali F G, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, [c] erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipſi FG, ſeu KL, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earũ quadrata A D, C E, atque adeo & ipſis æqualia rectangula F H, L M, commenſurabilia: [d] Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta G H, ad K M. [e] Igitur G H, K M, longitudine inter ſe commenſurabiles ſunt. Quare G H, K M. Rationales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali vero F G, ſolum commenſurabiles potentia,



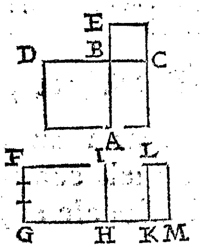
[a] 45. primi

[b] 34. primi

[c] 23. deci.

[d] 1. ſexti

[e] 10. deci.



potentia,cum ei oſtenſæ ſint longitudine incommēſurabiles;[a] Ac propterea rectangulum ſub ipſis G H, KM,Rationale eſt. Et quoniam eſt, vt DB,ad BC,ita A B,ad BE;(quod DB,B C,ipſis AB,BE,ſint æquales, vtraque vtrique.)[b] & vt DB,ad BC, ita AD,ad A C;& vt AB,ad BE,ita A C, ad C E; erit quoque vt AD, ad AC, ita A C,ad C E;atque adeo A D, A C, C E, proportionalia ſunt.Igitur & illis æqualia FH,H L,L M, proportionalia erunt:[c] Habent autem rectæ G H,H K,K M, eaſdem proportiones,quas rectangula FH,HL,LM.Igitur & rectæ GH,HK,KM,proportionales ſunt;[d] proptereaque rectangulum ſub GH,KM,quadrato ex HK,æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale.Igitur & quadratum ex HK,Rationale eſt;ideoque & recta HK,Rationalis erit;[e] & ob hoc ipſi FG,Rationali expoſitæ,hoc eſt,ipſi H I,commenſurabilis vel longitudine,& potētia,vel ſolū potētia.Et ſi quidē HK,ipſi HI, longitudine ſit cōmenſurabilis;[f] rectangulū H L, ſub Rationalibus HI,HK,lōgitudine cōmenſurabilibus contentum,hoc eſt,AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK,ipſi H I, potentia ſolum commenſurabilis ſit;[g] erit rectangulum HL,ſub Rationalibus H I,H K,potentia tantum commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC,illi æquale,Medium. Eſt ergo AC,rectangulum ſub Medijs A B, B C, potentia tantum commenſurabilibus contentum, vel rationale,vel Medium. Quocirca,quod ſub Medijs potentia tantum commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45.propoſ. lib. 1. applicabimus ad H I,rectangulum ipſi A C, æquale,[h] *ſi tribus rectis H I,AB,BC,quarta proportionalis ſumatur pro latere HK.*[i] *Nam rectangulum ſub extremis HI,HK, æquale erit rectangulo ſub medijs A B, B C.*

HAC

[a] 20. deci.
[b] 1. ſexti
[c] 1. ſexti
[d] 17. ſexti
[e] 6. defin.
[f] 20. deci.
[g] 22. deci.
[h] 12. ſexti
[i] 16. ſexti

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Medijs potentia tantum commenſurabilibus eſſe vel Rationale, vel Mediū; docebit Euclides propoſ. 28. quanam ratione inueniendæ ſint duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propoſ. vero 29. duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his,[a] *rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale;*[b] *Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum rectāgulum eſſe Irrationale, appellarique Medium, & rectam, que ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat,*[c] *rectangulum comprehenſum ſub duabus Medijs longitudine commenſurabilibus eſſe Medium;*[d] *Rectangulum autem ſub duabus Medijs potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.*

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere; nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulū A C, comprehenſum ſub duabus Medijs A B,B C, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico AC, neque Rationale eſſe,neq; Mediū, &c. Constructis.n. eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH,K M, Rationales eſſe, & ipſi FG, longitudine incōmenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponūtur incōmenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earū quadrata A D, C E, atque adeo ipſis æqualia rectangula F H,L M, incommenſurabilia:[e] *Vt autem FH, ad L M, ita eſt recta GH, ad rectam KM.*[f] *Igitur rectæ G H, K M, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare G H, K M, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles;*[g] *Ac propterea*

pterea

[a] 20. deci.
[b] 22. deci
[c] 25. deci.
[d] 26. deci.
[e] 1. ſexti.
[f] 10. deci.
[g] 22. deci.

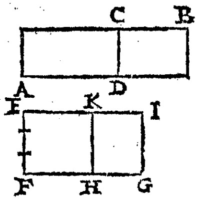
pterea rectangulum ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod
Medium appellatur; & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ
a 17. ſexti *dicitur Media.* [a] *Poteſt autem rectangulum ſub ipſis G H,*
K M, recta H K: (Nam, vt prius, oſtẽdemus tres GH, HK,
KM, eſſe proportionales) Igitur HK, Irrationalis eſt, & Me-
dia. Quare I K, Rationale non eſt: ſi enim Rationale
b 21. deci. *eſſet,* [b] *faceret ipſum ad Rationalem H I, applicatum la-*
titudinem H K, Rationalem, & ipſi H I, longitudine com-
menſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt H K,
Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque I K, Medium
c 23. deci. *eſt; Si enim eſſet Medium,* [c] *faceret ipſum applicatum*
ad Rationalẽ HI, latitudinẽ HK, Rationalẽ, & ipſi HI, lon
gitudine incommenſurabilẽ. quod eſt abſurdũ. oſtenſa eſt. n.
H K, Irrationalis, & Media. Itaque cũ I K, neq; Rationale
ſit, neq; Medium; neceſſario neq; A C, illi æquale, Rationale
erit, neq; Medium, ſed tertium quoddã genus conſtituet, nem
pe æquale erit ipſi I K, quod ſub Rationali, & Media, cõtine-
tur, cũ HI, Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus
efficitur, rectã quæ poteſt ſpatiũ ſub duabus Medijs lõgitudi-
ne & potentia incommenſurabilibus) quales ponuntur AB,
BC, cõprehenſum, poſſe quoq; rectangulũ ſub Rationali, & Ir
rationali, quæ Media vocatur, contentũ. Quod eſt propoſitũ.

26.
22.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangu-
lo DB. Dico DB, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri po-
teſt, DB, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea EF;
d 41. primi [d] ad ipſam applicetur rectangulũ EG, Medio AB, æqua-
le; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt ſit reliquũ
HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqua-
lia Medijs AB, AC, Media; & HI; æquale Rationali DB,
Rationale. Quoniam ergo Media EG, E H, ad Rationa-
e 23. deci. nalem EF, ſunt applicata; [e] erunt rectæ F G, F H, Ratio-
nales



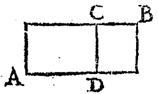
nales, & ipſi E F, incommenſura-
biles longitudine. Rurſus, quia
Rationale HI, applicatum eſt ad
Rationalem HK; ([a] eſt enim re- a 34. pri.
cta HK, Rationali E F, æqualis)
[b] erit recta HG, Rationalis, & ip b 21. deci.
ſi EF, longitudine commenſura-
bilis. Quare cum HG, EF, longi-
tudine ſint commenſurabiles; &
EF, ipſi FH, longitudine incom-
menſurabilis, vt eſt oſtenſum; [c] erit & H G, eidem F H, c 14. deci.
longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt F H, ad
HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulũ ſub F H, H G,
ex tertio lemmate propoſ. 19. huius lib. [d] Igitur quadra- d 10. deci.
tum ex F H, incommenſurabile eſt rectangulo ſub F H,
HG. Sed quadrato ex F H, commenſurabile eſt quadra-
tũ ex HG; (quod ſint ambo ex lineis Rationalibus F H,
H G, deſcripta) [e] atque adeo & duo quadrata ex F H, e 16. deci.
HG, ſimul, quadrato ex F H, commenſurabilia ſunt: Et
rectangulo ſub F H, H G, commenſurabile eſt id, quod
bis continetur ſub FH, HG, (quia hoc illius eſt duplũ.)
Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſten-
dimus, & duo quadrata ex FH, H G, ſimul incommenſu-
rabilia ſunt rectangulo ſub FH, HG, bis. [f] Quare & com f 17. deci.
poſitũ ex quadratis rectarũ FH, HG, & ex rectãgulo bis
ſub FH, HG, incõmenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis
rectarũ FH, HG. [g] At quadratis ex FH, H G, vna cum re g 4. ſecũdi
ctãgulo bis ſub F H, H G, æquale eſt quadratum ex FG.
Igitur & quadratũ F G, incommenſurabile eſt cõpoſito
ex quadratis rectarum F H, H G: Eſt autem compoſitum
hoc Rationale, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. quod
oſtenſum ſit cõmenſurabile quadrato Rationali ex FH.
Igitur cũ huic cõpoſito, quod Rationale eſt, incõmenſu
rabile ſit quadratũ ex FG, [h] erit quadratũ ex F G, Irratio h 10. defin.
nale; [i] ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod i 11. defin.
eſt abſurdũ. oſtenſa enim eſt F G, Rationalis longitudi-
ne ipſi EF, incõmenſurabilis. Nõ ergo D B, quo Medium
AB, ſuperat Mediũ AC, Rationale eſt. Quã ob rem Me-
diũ nõ ſuperat Mediũ Rationali. Quod erat oſtẽdendũ.

SCHO-

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat rationale Rationali.



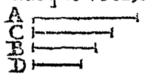
RATIONALE enim A B, ſuperet Rationale AC, ſpatio DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale. Quoniã.n. AB, AC, Rationalia ſũt; [a] *erunt A B, A C, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ;*[b] *atque adeo & inter ſe commenſurabilia. Quare cum totum A B, compoſitũ ex A C, D B, commenſurabile ſit ipſi A C; erit quoque idem A B, reliquo DB, commenſurabile, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem A B, Rationale. Igitur & D B, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.*

[a] *9. defin.*
[b] *12. deci.*

27.
O.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.



EXPONANTVR per lemma 2. propoſ. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles [c] inter quas media proportionalis ſumatur C; [d] fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, eſſe Medias potentia tantum commẽſurabiles, quæ Rationale cõprehendant. Quoniam.n. A, B, Rationales ponũtur potentia tantum commenſurabiles; [e] erit rectangulum ſub ipſis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo [f] cum ipſum poſsit recta C, erit C, Media. Et quoniam eſt vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque A, B, potentia tantũ commenſurabiles; erunt quoque C, D, ſolum commenſurabiles

[c] *13. ſexti*
[d] *12. ſexti*
[e] *22. deci.*
[f] *17. ſexti*

---

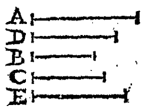
potentia, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus. [a] Eſt ergo & D, Mediæ C, commenſurabilis, Media. Quare inuentæ ſunt Mediæ C, D, potentia tantũ commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Rationale. Quoniam.n. eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita eſt C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [b] poterit rectangulum ſub ipſis C, D, comprehenſum. Eſt autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C, D, potenta tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

[a] *24. deci.*
[b] *17. ſexti*

PROBL. 5. PROPOS. 29.

28.
O.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.



EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles; [c] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [d] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe, potentia tantum commẽſurabiles, quæ Medium cõtinent. Quoniam.n. A, B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, atque adeo & quadratum ex D,[e] quod illi æquale eſt,[f] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E; ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erũt quoque D, E, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D, Media ſit, [g] erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis,

[c] *13. ſexti*
[d] *12. ſexti*
[e] *17. ſexti*
[f] *22. deci.*
[g] *24. deci.*

rabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum cõmenſurabiles. Dico iam ipſas continere Mediũ. Quoniam. n. eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; a 16. ſexti erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [a] Rectangulum igitur ſub D, E, æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autẽ quod ſub A, C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, b 22. deci. [b] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem ſe mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

A, 6.	*C, 12.*
B, 4.	*D, 8.*
E, 24.	*F, 96.*

QVONIAM autem in lib. 9. c 28. & 29 noni. *[c] oſtenſum eſt, ſi impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem vero, ſi impar multiplicet imparem; perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorum vterq; par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera ſumpta, ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus, impar; horum vero par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.*

LEMMA

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

INVENIANTVR per ea, quæ in ſcholio proximo dicta ſunt, duo plani ſimiles AB, & C, quorum vterque vel par ſit, vel impar.[a] Et quoniam, ſiue a 24. & 26 noni. *a pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto BD, ex AB, qui æqualis ſit ipſi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiſo bifariã in E; Dico numerum factum ex AB, in BD,[b] qui quidem quadratus eſt,* b 1. noni *compoſitum cum quadrato numeri ED, facere quadratũ. Quoniam. n. numerus AD, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compoſiti faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod eſt propoſitum.*

A ..... E ..... D .... B
C ....

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, quando AB, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum exceſſus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus ſit.

QVOD ſi numeri ſumãtur AB, & C, nõ ſimiles, vterq; tamẽ par, vel impar; inuenti erunt eodẽ modo

duo

duo quadrati numerorum B E, E D, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex A B, in B D, non eſt quadratus. Si enim quadratus eſſet, [a] numeri A B, B D, hoc eſt, AB, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

[a] 2. noni.

SCHOLIVM II.

ITAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, deſcripti ſunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratũ ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiã quadratus eſt.

A ..... E ..... D ....B
C ....

SI vero inueniendi ſint duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non ſimiles, quorũ vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragẽda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex B E, æquale eſſe quadrato ex D E, vna cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare exceſſus quadratorum ex BE, ED, eſt numerus factus ex A B, in B D, qui cum non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent A B, B D, plani ſimiles. quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A ... E ... D .... B
C ....

HOC poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

SINT duo numeri plani ſimiles A B, *& C, pares, vel impares, vt in lemmate pręcedẽti, fiatque eadem conſtructio, ita vt rurſus quadratus, qui fit ex multiplicatione ſimilium numerorum* A B, D B, *inter ſe, vna cum quadrato ex* D E, *æqualis ſit quadrato ex* BE. *Auferatur deinde ex* DE, *vnitas* E*F. Erit ergo quadratus ex* D*F, minor quadrato ex* DE, *quod & latus* D*F, latere* DE, *minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A*B, *in* BD, *alter vero ex* D*F, in ſe fit, compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is vel maior quadrato ex* B*F, vel æqualis, vel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex* B *F; ac propterea latus ipſius maius latere* B *F. Erit ergo latus ipſius vel æquale numero* B E, *vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros* B E, B *F, ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur; Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quam* B F, *minus vero quam* BE.) *Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex* B E, *æqualis ſit quadratus numerus*

A ..*H*..*I*. E . *F*. *G*. . .D....... B
C ....

A.. H .. I. E. F. G... D........B
C........

compoſitus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cũ eidem quadrato ex BE, ſit oſtenſus in præcedenti lẽmate æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex DE, Ablato ergo communi, eo ſcilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri DE, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex D F, in ſe fit, æquale eſt numero BE. Sed neque maius. Sit enim, ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quam BF, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe fit, (cum hic cõpoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex AB, in B D. vna cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter fit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neque æquale,

neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

SIT iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in BD, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt AD, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex ijs, quę ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex H B, in BD, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato D F: Igitur qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex DF, æqualis eſt ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex H B, in B D, ei qui fit ex AB, in B D, æqualis. Quare cum H B, A B, multiplicantes eundem B D, producant æquales numeros;[a] habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipſi A B, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, quadrato ex BF, æqualis.

[a] 18. ſepti.

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex AB, in B D, vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere B F, minus, quod ſit BG, ita vt qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ſit quadrato ex B G. Sumatur

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B
C . . . .

autem ipſius E G, duplus A I. Quoniam igitur totus A D, totius F D, duplus eſt, & ablatus A I, ablati E G; erit rurſus & reliquus I D, reliqui G D, duplus; ac propterea I D, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis quadrato ex B G: ponitur autem eidem quadrato ex B G, æqualis qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Igitur qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis eſt ei, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex D G, minor eſt, remanebit qui ex I B, in B D, maior eo, qui ex A B, in B D, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F. Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

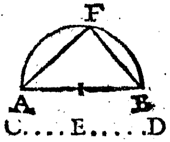
IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratũ in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

29.
17.

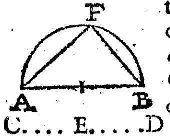
INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis A B, & inueniantur ex ijs, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum exceſſus D E, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ, 6. huius lib. fiat vt C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in ſemicirculo A B F, circa diametrum A B, deſcripto: ac denique connectatur recta F B. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; [b] erit quadratum ex A B, æquale duobus quadratis ex A F, & F B; hoc eſt, recta A B, plus poterit quam A F, quadrato rectæ F B. Et quia eſt quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, vt numerus C D, ad numerum D E; [c] erunt quadrata ex A B, A F, commenſurabilia; atque adeo cum quadratũ ex A B, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali A B, deſcriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, proptereaq; & recta A F, ipſum deſcribẽs, Rationalis. Rationales ergo ſunt A B, A F; atq; adeo cõmenſurabiles ſaltẽ potentia. Quia vero quadratũ ex A B, ad quadratũ ex A F, proportionẽ non habet, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; (cũ neq; quadratus numerus C D, ad non quadratũ D E, proportionem habeat, quã quadratus ad quadratũ; alias & D E, quadratus eſſet, [d] vt in Arithmeticis eſt demonſtratũ. qđ nõ ponitur) [e] erũt rectæ A B, A F, longi-



[a] 31. tertij
[b] 47. pri.
[c] 6. decimi
[d] 24. deci.
[e] 9. decimi

longitudine incommenſurabiles : Sunt autem commenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur A B, A F, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles.



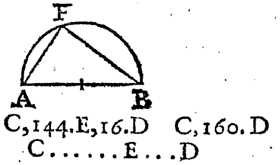
IAM vero, quoniam eſt vt CD, ad DE, ita quadratũ ex AB, ad quadratum ex A F; erit per conuerſionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratum numerum CE, ita quadratũ ex A B, ad quadratum ex F B. (ſicut.n. CD, ſuperat DE, quadrato CE, ita etiã quadratum ex AB, ſuperat quadratum ex AF, quadrato ex FB.)[a] Quare rectæ A B, F B, longitudine commenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tãtum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſsit, quam minor A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.

[a] 9. decimi

30.
18.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſsit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.



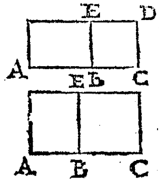
EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propoſ. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compoſitus C D, non ſit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, ſecetur ĩ duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD. ad neutrum ipſorũ CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratũ, alias ſecundum priorem modum, eſſet totus C D, etiam quadratus: iuxta poſteriorem vero, quilibet ipſorum C E, E D, quadratus quoque,[a] vt in Arithmeticis oſtenſum eſt, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturq; AF, in ſemicirculo AFB, circa AB, deſcripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quam AF. quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia ſolum commenſurabiles: Eadem enim hic eſt demonſtratio, quæ in præcedenti propoſ. Quoniã vero rurſus, vt prius, eſt per conuerſionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratũ ex F B: Non habet autem C D, ad C E, proportioné quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.[b] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum cõmenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſsit quam minor AF, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod erat faciendum.

[a] 24. octaui

[b] 9. decimi

LEMMA.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum conſtitutæ, quarũ A B, maior ſit. Dico eſſe, vt A B, ad B C, ita rectangulum ſub A B, B *C, ad quadratum ex* B *C. Deſcribatur.n. ex BC, quadratũ* BD, *compleaturq; rectangulũ A D; eritque rectangulum A E, ſub A B,* BC, *contentum; quod* BE, *ipſi* BC, *ſit æqualis:*[c] *perſpicuum autem eſt, eſſe vt A B, ad* BC, *ita* A *E, ad* B *D.*

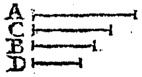
[c] 1. ſexti

EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris, vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua AB, minor eſt, quam BC.

31. 24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.



[a] REPERTAE ſint duæ Rationales A, B, potẽtia tantum commẽſurabiles, ita vt A, maior plus poſſit quã B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniã igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolum commenſurabiles; [b] erit rectangulum ſub A, B, Irrationale, & recta C, ipſum potens, linea Media. Et quia eſt vt A, ad B, ita C, ad D; ſunt autẽ A, & B, potentia tantũ commenſurabiles, erũt quoque C, & D, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus. [c] Quare D, Mediæ C, commenſurabilis, Media quoque eſt. Inuentæ ergo ſunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim ſit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; ſit autẽ vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; [d] Ac propterea rectangulũ ſub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale ſit; erit & rectangulũ ſub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles, Rationale. Quoniam vero eſt vt A, ad B, ita C, ad D: poteſt autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, ex conſtructione; [a] poterit quoque C, plus quã D, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus poſſit quam minor D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendũ erat.

[a] 30. deci.
[b] 22. deci.
[c] 24. deci.
[d] 17. ſexti
[a] 11. deci.

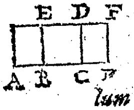
QVOD ſi repertæ ſint A, B, Rationales potentia tantum commneſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam B, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, oſtendemus eodem modo, inuentas eſſe duas Medias C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus poſſit quam minor D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonſtrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem ſine ipſo oſtendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonſtratione hanc noſtram contulerint. Immo rectas C D, Medias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic oſtendimus, ac in propoſ. 28. huius lib.

LEMMA.

SI ſint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur.



SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum conſtitutæ. Dico eſſe vt AB, ad C D, ita rectangulum ſub AB, B *C, ad rectangulum ſub BC, CD. Deſcribatur. n. ex* BC, *quadratũ* B C D E, *perficiaturque rectangulum* a 1. ſexti

lum AF; Eritque A E, contentum ſub A B, B C; & C F, ſub B C, C D; quod B E, C D, ipſi B C, æquales ſint. [a] *Perſpicuum autem eſt eſſe AB, ad C D, vt AE, ad CF. Quod eſt propoſitum.*

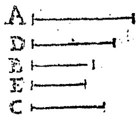
32.
26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

b 30. deci.
c 13. ſexti
d 12. ſexti

SINT inuentę tres Rationales A, B, C, potentia tãtum commenſurabiles, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. [b] Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commenſurabilibus, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia ſolum commenſurabilis, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demõſtrauimus.) [c] Et ipſarum A, B, ſumatur media proportionalis D; [d] fiatque vt D, ad B, ita C, ad E.



e 17. ſexti
f 16. ſexti

Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt vt A, ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C: [e] Eſt autem rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex D; [f] & rectangulo ſub B, C, æquale rectangulũ ſub D, E, quòd proportionales ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolum commenſurabiles. Ergo & D, E, potentia ſolũ commenſurabiles ſunt, vt in ſcholio propoſ. 10. huius

lib.

a 22. deci.
b 24. deci.
c 22. deci.
d 15. deci.

lib. oſtendimus. [a] Quia vero D, potens ſpatium ſub A, B, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Irrationalis eſt, & Media; [b] erit quoque E, ipſi oſtenſa commenſurabilis, Media. Inuẽtæ ergo ſunt duę Mediæ D, E, potentia ſolum commenſurabiles. Et quia oſtenſum eſt rectangulo ſub B, C, [c] quòd Mediũ eſt, (quòd B, C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles,) æquale eſſe rectangulum ſub D, E; erit rectangulum ſub D, E, Medium. Denique quia oſtendimus eſſe vt A, ad C, ita D, ad E; poteſt autem A, plus quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ex conſtructione; [d] poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine ſibi commẽſurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus poſsit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quod erat faciendum.

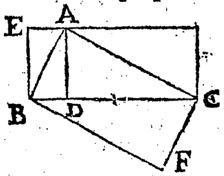
QVOD ſi repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, reliqua autem conſtruantur, vt prius, demonſtrabimus ſimiliter, inuentas eſſe duas Medias D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus poſsit quam minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facile apparere poteſt ex adducta demonſtratione,

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, a quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum ſub CB, BD, æquale eſſe quadrato ex AB: contentum autem ſub BC, CD, æquale quadrato ex A C: & contentum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum denique ſub B C, AD, æquale contento ſub A B, A C.

QVO-

QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta A B, *media proportionalis eſt inter* CB, BD; [a] *erit* ([a] 17. ſexti)



rectangulum ſub C B, BD, *quadrato ex* AB, *æquale.*

EADEM *ratione erit rectangulū ſub* BC, CD, *æquale quadrato ex* A C; *quoniā per idem coroll.* A C, *media proportionalis eſt inter* BC, CD.

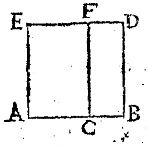
RVRSVS quia ex eodē coroll. A D, *inter* BD, DC, *media eſt proportionalis, erit eodem modo rectāgulum ſub* BD, DC, *æquale quadrato ex* A D.

[b] 8. ſexti *POSTREMO,* [b] *quia triangula* ABC, ABD, *ſimilia ſunt; erit vt* B C, *ad* A C, *ita* A B, *ad* AD.
[c] 16. ſexti [c] *Quare rectangulum ſub* BC, A D, *æquale eſt rectangulo ſub* AB, AC. *Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum* C E, *contentum ſub* B C, A D:
[d] 41. primi *Item rectangulū* AF, *ſub* AB, AC, *contentū.* [d] *Quoniam igitur rectangulum* C E, *duplum eſt trianguli* ABC, *necnon & rectangulum* AF, *eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula* C E, AF. *quod eſt propoſitum.*

LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta AB, *non bifariam in* C, *ſitque maior pars* AC. *Dico eſſe vt* AC, *ad* C B, *ita rectangulum ſub* AB, AC, *ad rectangulum ſub* AB, CB. *Deſcribatur enim ipſius* AB, *quadratum* ABDE, *ducaturque* C F, *ipſi* A E, *parallela; eritq;* AF, *contentum ſub* AB, AC, *&* C D, *contentum ſub* A B, C B;



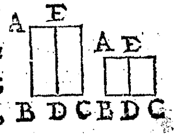
quod AE, CF, *ipſi* AB, *æquales ſint.* [a] *Quoniam igitur eſt vt* A C, *ad* C B, *ita* A F, *ad* C D; *conſtat propoſitum.* [a] 1. ſexti

EADEM ratione erit, vt minor pars B C, *ad maiorem* CA, *ita* BF, *contentum ſub* A B, B C, *tota, & minore parte, ad* CE, *contentum ſub* AB, CA, *tota, & maiore parte.*

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inequales A B, B C, *angulum rectum conſtituentes* ABC, *ſeceturque minor* B C, *bifariam in* D. *Dico rectāgulum ſub* A B, B C, *duplum eſſe rectanguli ſub* AB, BD. *Cōpleatur .n. rectangulum* AC, *ſub* A B, B C; *ducaturq;* DE, *ipſi* AB, *parallela; eritq;* BE, *contentum ſub* AB, *&* BD, *dimidia minoris.* [b] *Quoniam igitur* AC, *ipſius* BE, *duplum eſt, quod & baſis* B C, *dupla ſit baſis* BD; *conſtat propoſitum.* [b] 1. ſexti



EODEM

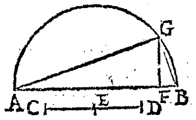
EODEM modo, ſi BC, *ſecta bifariam, ſit maior, erit quod ſub* AB, BC, *continetur, duplum eius, quod continetur ſub* AB, *minore &* B D, *dimidia maioris, vt ex ſecunda figura apparet.*

33.
27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Medium.

a 31. deci. a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia ſolum commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſsit, quã minor C D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; ſeceturq; CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex CE, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & ſit illud, quod ſub AF, FB, continetur. Poſtremo deſcripto ſemicirculo AGB, circa AB, erigatur F G, ad A B, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus poteſt, quam CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, applicatumque eſt ad AB, rectangulum ſub AF, FB, æquale quartę parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipſi *b 19. deci.* FB, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt A F, ad FB, ita per lemma 2. propoſitionis antecedentis, rectangulum ſub AB, AF, ad rectangulum ſub AB, FB; Rectangulum vero ſub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum ſub AB, FB, quadrato ex GB, eſt æquale, per lemma

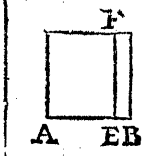


1. eiuſdem antecedentis propoſitionis; a quòd angulus AGB, rectus ſit in ſemicirculo AGB. *a 31. tertij* Igitur quoque erit vt AF, ad F B, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cum AF, FB, longitudine ſint incõmenſurabiles, b erũt quadrata ex AG, GB, incommenſurabilia. *b 10. deci.* c Igitur rectæ A G, G B, potentia incommenſurabiles ſunt. *c 4. defin.* Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale eſt, d æqualeque quadratis ex A G, G B; *d 47. primi* erit etiam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rurſus, quia ex 1. lemmate propoſitionis præcedentis, rectangulum ſub AF, FB, quod quadrato ex CE, ęquale eſt factũ, e æquale eſt quadrato ex FG; *e 17. ſexti* (propterea quòd angulus AGB, rectus eſt, & FG, ad A B, perpendicularis) erunt quadrata ex F G, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare C D, dupla exiſtens ipſius CE, dupla etiam erit ipſius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propoſitionis, rectangulum ſub AB, CD, duplum erit rectanguli ſub AB, FG. (cum FG, dimidia ſit minoris C D,) f Sed rectangulum ſub A B, *f 22. deci.* CD, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt. Igitur & rectangulum ſub A B, FG, illi commenſurabile, cum ſit eius dimidium, Mediũ eſt, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Atqui rectãgulo ſub AB, FG, per 1. lemma propoſitionis præcedentis, æquale eſt rectangulum ſub AG, G B. Contentũ igitur ſub A G, GB, Medium quoque eſt: Oſtenſum autem eſt compoſitũ ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciũt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in ſcholio quodam antiquo, fieri poſſe, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea A B, & duo numeri C, *D, quorum C, maior ſit, non habentes proportionem, quam*



quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem deſcripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniã igitur eſt vt C, ad D, ita quadratũ ex AB, ad quadratum ex AE; Non habet antẽ C, ad D, proportionẽ quam [a] 9. decimi *quadratus ad quadratũ; [a] erunt latera AB, AE, dictorum quadratorũ proportionẽ non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommenſurabilia; Ac propterea cum AB, tota longitudine ſit incommenſurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliquæ EB, longitudine* [b] 1. ſexti *incommenſurabilis, ex coroll. propoſ. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita eſt quadratum ex AB, ad AF. Igitur* [c] 10. deci. *cum AB, AE, incommenſurabiles ſint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommenſurabilia. Quare quadrato ex AB, exiſtente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommenſurabile, Irrationale. Eodemque argumento oſtendemus BF, Irrationale eſſe. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perſpicuum eſt, ex duobus Irrationalibus confici poſſe Rationale. Quod eſt propoſitum.*

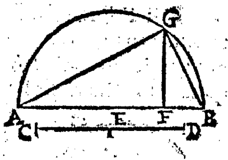
AT vero ſi AF, FB, Rationalia ſint, oſtendemus & totũ AFB, ex ipſis compoſitum Rationale eſſe. Cum enim vtrumque AF, FB, Rationale ſit; erunt ipſa inter ſe commenſurabilia. [d] 16. deci. *[d] Igitur & totum AFB, ex ipſis compoſitum vtrique eorum commenſurabile erit. Quare AFB, totum commenſurabile vtrique Rationali AF, FB,* [e] 9. defin. *[e] Rationale quoque eſt. Quod eſt propoſitum.*

34.
28.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum Rationale.

[a] 32. deci. [a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus poſſit quã minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſuaabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propoſ. Oſtendemus igitur ſimiliter, vt in propoſ. antecedenti, rectas AG, GB, potentia eſſe incommenſurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] 47. primi [b] æquale exiſtens quadratis rectarũ AG, GB, Medium eſt; erit quoque cõpoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rurſus vt in antecedẽti propoſitione, oſtẽdemus rectangulũ ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG; atque adeo illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum rectangulum ſub AB, CD, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. rectangulo ſub AB, FG, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB Igitur & rectangulum ſub AG, GB, Rationale eſt: Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum AG, GB, eſſe Medium. Igitur duę rectæ AG, GB, quæ oſtẽſæ ſunt potentia incommenſurabiles, faciũt compoſitum ex earum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem comprehenſum, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



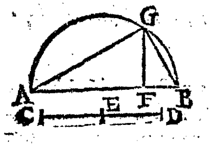
35.
29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis

dratis Medium,& rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

a 33. deci. a REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus poſsit quam minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantque reliqua, vt in propoſ. 34. Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas A G, G B, potentia incommenſurabiles eſſe. Et quia quadratum ex Media A B, Medium eſt, b 47. primi b, & quadratis rectarum A G, G B, æquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus, vt in 34. demonſtrabimus, rectangulum ſub A B, C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G, atque adeo illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum ex conſtructione, rectangulum ſub A B, C D, Medium ſit: erit quoque rectangulum ſub AB, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, quod illi per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æquale eſt, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi C D; Eſt autem eidem C D, ipſa C E, longi- c 13. deci. tudine commenſurabilis, quod illa huius ſit dupla; c erũt A B, C E, longitudine incommenſurabiles: Sed vt A B, ad C E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, C E, hoc eſt, ad rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, (ſunt enim rectangula ſub A B, FG, & ſub AG, GB, per d 10. deci. 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æqualia,) d Igitur quadratum ex A B, incommenſurabile eſt rectangulo ſub A G, G B. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.



SCHO-

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud abſoluemus, quod ad propoſ. 24. huius lib. nos demonſtraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitũ ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulũ Medium, Mediæ, incommenſurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia eſſent commenſurabiles, eſſent & earum quadrata, hoc eſt, compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum ſub A G, G B, commenſurabilia: quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur A B, potens compoſitũ ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum ſub AG, G B, id eſt, media proportionalis inter A G, G B; inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

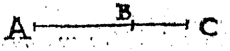
PRINCIPIVM SENARIORVM per compoſitionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. 36.

30.

SI duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duę Rationales A B, BC, potentia ſolum commenſurabiles, inuentæ per 2. lem-



ma propoſ.21.huius lib. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quoniã.n. AB, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi BC; & vt AB, ad B C, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex B C, per lemma propoſ.31.huius lib. [a] erit rectangulum ſub AB, BC, quadrato ex B C, incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt quadratum rectæ AB; (omnia enim ſunt Rationalia) [b] atque adeo & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quę in ſcholio propoſ.14. huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub AB, BC, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compoſitũ ex eo, quod bis ſub AB, BC, & ex compoſito quadratorum rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum ex tota AC. ([c] Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vna cũ rectangulo ſub AB, BC, bis) compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, [d] incommenſurabile erit: Eſt autem cõpoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale, quod commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex BC, Rõnali. Igitur quadratũ ex A C, quadrato Rõnali ex BC, incommenſurabile; [e] Irrationale eſt; atq; adeo & recta ipſa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt alij loquuntur, Binomiũ, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia ſolum commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 10. deci.
[b] 16. deci.
[c] 4. ſecũdi
[d] 17. deci.
[e] 10. defin.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nã recta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, [f] Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At vero compoſita ex ipſis, [g] Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.

[f] 22. deci.
[g] 37. deci.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

37.
31.

SI duæ Mediæ potentia tantum cõmenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentę AB, BC, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quia.n. AB, eſt ad BC, vt rectangulũ ſub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propoſ.31.huius lib. eſt oſtenſum; ſunt autem A B, B C, longitudine incommenſurabiles; [b] erunt rectangulum ſub AB, BC, & quadratum ex B C, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub AB, B C, commenſurabile eſt, quod ſub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia ſint commenſurabiles, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia, [c] atque adeo & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex BC, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub AB, BC, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea, quæ in ſcholio propoſ.14.huius lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex A C, [d] quod huic compoſito æquale eſt, [e] incommenſurabile quoque eſt rectangulo ſub A B, BC, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub AB, BC, cõmenſurabile rectangulum ſemel ſub AB, BC, cũ hoc ſit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AB, BC: Ponitur autẽ rectangulum ſub AB, BC. Rationale. [g] Irrationale ergo eſt qua

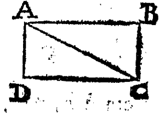
[a] 28. deci.
[b] 10. deci.
[c] 16. deci.
[d] 4. ſecundi
[e] 17. deci.
[f] 13. deci.
[g] 10. defin.

a 11. defin. dratum ex A C, [a] & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

LEMMA.

QVOD ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectan gulum, Irrationale eſt.

CONTINEATVR rectangulum ABCD, ſub Rationali A *B, & Irrationali B C. Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe* b 21. deci. R*ationale,*[b] *faciet ipſum ad Rationalem* A*B, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod eſt abſurdum. ponitur enim BC, Irrationalis. Non ergo* A *C, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.*

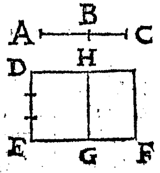


38.
32.

THEOR. 27. PROPOS. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs ſecũda.

c 29. deci. COMPONANTVR duæ Mediæ [c] ſuperius inuentę A B, B C, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineãt. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Exd 45. primi ponatur enim Rationalis D E, [d] ad quam applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato A C; & cõpoſito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eãdem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex A C, hoc eſt, rectangulũ DF, [a] æquale eſt duobus quadratis ex AB, BC, a 4. ſecundi vna cum rectangulo bis ſub A B, B C; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub AB, BC, continetur. Quoniã vero, ex hypotheſi, rectangulum ſub A B, B C, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſurabile, hoc eſt, H F, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commenſurabilium, commenſu b 16. deci. rabilia ſunt; [b] erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumque quadratorũ ex Medijs A B, BC, Medium eſt. Igitur & DG, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, appli c 34. primi cantur ad Rationalem D E; ([c] eſt enim G H, Rationali d 23. deci. DE, æqualis.)[d] erunt eorũ latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommẽſurabiles. Rurſus quia AB, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt; & eſt vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum ſub AB, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommenſurabile rectangulo ſub A B, BC, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex AB, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C; & rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt, quod continetur bis ſub AB, BC, cum hoc illius ſit duplum. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulũ DG, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, e 1. ſexti. rectangulo HF.[e] Cum ergo ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad f 10. deci. GF;[f] erit EG, ipſi GF, longitudine incommenſurabilis: oſtenſum autem iam fuit E G, G F, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt EG, GF, potentia tantum commeng 37. deci. ſurabiles,[g] ac propterea, & tota EF, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex A C, ipſi DF, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta A C, Irrationalis eſt. Vocetur autem



tem ex binis Medijs ſecunda, ſeu vt alijs placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſitione lineã Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineã Irrationalẽ AC, quę componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit cõpoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineę, qua maior pars minorem ſuperat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, ſitque maior pars AB; *in qua ſumatur BC, minori parti* BD, *æqualis, vt ſit* AC, *exceſſus, quo* AB, *ſuperat BD, hoc eſt,* BC, *ipſi* BD, *æqualem. Dico quadrata rectarum* AB, BD, *ſimul maiora eſſe rectãgulo bis ſub AB BD, quadrato rectę AC. Quo-*
a 7. ſecundi *niã.n. quadrata ex* AB, BC, [a] *æqualia ſunt rectangulo bis ſub* AB, BC. *vna cum quadrato ex* AC; *eſtq; BC, ipſi BD, æqualis: erunt quoq; quadrata ex* AB, *BD, æqualia rectangulo bis ſub* AB, *BD, vna cũ quadrato ex* AC. *Quare quadrata ex* AB, BD, *maiora ſunt, quã rectangulum bis ſub* AB, BD, *quadrato rectæ* AC. *quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

39.
33.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quę faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ [a] ſuperius inuentæ a 34. deci.
AB, BC, potẽtia incommenſurabiles, facientes quidem
compoſitũ ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulũ
vero ſub ipſis contentũ, Mediũ. Dico totã AC, eſſe Irra-
tionalẽ. Quoniã. n. rectangulũ ſub AB, BC, Mediũ poni
tur, erit & rectãgulũ bis ſub AB, BC, illi cõmenſurabile,
Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atq; adeo Irratio
nale. Ponitur autẽ compoſitũ ex quadratis rectarũ AB,
BC, Rõnale. [b] Incõmenſurabile ergo eſt rectangulũ bis b 10. defin.
ſub AB, BC, compoſito ex quadratis rectarum AB, BC.
[c] Igitur & rectangulum bis ſub AB, BC, vna cum qua- c 17. deci.
dratis ex AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incom-
menſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB,
BC. Cum ergo hoc compoſitum ponatur Rationale;
[d] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irra- d 10. defin.
tionale; [e] Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt. Voce- e 11. defin.
tur autẽ Maior, quia [f] cum poſsit duo quadrata ex AB, f 4. ſecundi
BC,

B C, & rectangulum bis ſub AB,BC; compoſitum ex quadratis rectarum AB,B C, per lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub A B, B C, Medium; recte vocabitur A C, Maior, ſiquidem a Rationali, quod maius eſt, nomen conuenit imponere. *Si* duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

40.
34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

[a] *31. deci.*

COMPONANTVR duæ rectæ [a] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium; rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quoniam.n. compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod uero continetur bis ſub A B, B C, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod ſub AB, BC, ſemel cõtinetur, Rationale ponatur; [b] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB,BC. [c] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, vna cum rectãgulo bis ſub AB,BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo bis

[b] *10. defin.*
[c] *17. deci.*

bis ſub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, BC, vt diximus, ſit Rationale; [a] erit quadratum ex A C, illi incommenſurabile, Irrationale; [b] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum ſcilicet bis contentum ſub A B, B C. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] *10. defin.*
[b] *11. defin.*

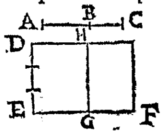
41.
35.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

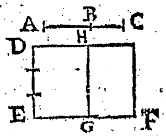
SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciãt & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

[c] *36. deci.*

COMPONANTVR duæ rectæ [c] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum. Dico totam AC, Irrationalem eſſe Exponatur enim Rationalis DE, [d] ad quam applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex A C; Et compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, alterum æquale applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc eſt, rectangulum D F, [e] æquale eſt cõpoſito ex quadratis rectarũ AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum H F, æquale rectangulo



[d] *45. primi*
[e] *4. ſecũdi*



gulo bis ſub AB, BC. Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum DG, quam rectangulum ſub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis ſub A B, B C, nempe ipſum H F, (cum illi ſit commenſurabile) Medium ponitur, [a] facient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC: Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; [b] erunt & DG, HF, incõmenſurabilia. Quare [c] cum ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [d] erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles: Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; [f] ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA

SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualiũ ſimul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rurſus inæqualiter in D, ſintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam poſteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, ſimul maiora eſſe quadratis ex AD, DB, ſimul. Diui*ſa enim AB, bifariam in E,*

cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, [a] æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale eſt eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratũ ex EC, maius ſit quadrato ex ED; erit reliquũ rectangulũ ſub AC, CB, minus reliquo rectangulo ſub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis ſub AC, CB, minus erit rectangulo bis ſub AD, DB. Quoniã vero quadratum ex AB [b] æquale eſt tã rectangulo bis ſub AC, CB, vna cũ quadratis ex AC, CB, quã rectãgulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectãgulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis ſub AC, CB, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.

SED cadat iã D, inter A, E. Quoniã igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quã partes AD, DB; erit AD, (quæ minor eſt poſteriorũ) maior quam CB; (quæ priorũ minor eſt) ac proinde cũ AE, EB, æqua-

[a] 23. deci.
[b] 13. deci.
[c] 1. ſexti.
[d] 10. deci.
[e] 37. deci.
[f] 11. defin.

[a] 5. ſecũdi
[b] 4. ſecũdi

quales ſint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE.

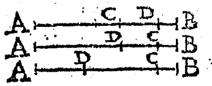
Itaque quia rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex *a 5.ſecundi* *EC, æquale eſt quadrato ex E B: Item rectangulum ſub A D, D B, vna cum quadrato ex D E, æquale eſt quadrato ex AE, hoc eſt, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub A D, D B, vna cum quadrato ex D E. Igitur vt prius, demonſtrabimus quadrata ex AC, CB, maiora eſſe quadratis ex A D, DB. Quod eſt propoſitum.*

42.
36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, C B, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt vult propoſ. 37. huius libri.



Dico A B, ad aliud punctũ diuidi nõ poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterũ in ſua nomina ad D. Conſtat ergo AB, in C, nõ diuidi bifariã. Nam ſi bifariã diuideretur, eſſent AC, CB, lõgitudine cõmenſurabiles. quod eſt abſurdum, ponuntur enim Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles. Eodẽ modo neque ad D, bifariã ſecabitur AB, cum & AD, DB, Rationales ſint potentia tantũ cõmenſurabiles. Secatur ergo A B, tam ad C, quã ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales ſunt, quã partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedẽs, quadrata ex AC, CB, vel minora ſũt quadratis ex AD, DB, vel maiora, (Neque enim partes A D, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione ſecaretur A B, ſecunda diuiſione in eadem nomina, in quæ ſecta eſt diuiſione prima. quod non ponitur.) Quia vero ſi ab æqualibus inæqualia demantur, reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis eſt, vt in pronũciatio 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis ſub A D, D B, [a] quod tam illa, quam hæc æqualia ſint quadrato ex A B; fit, vt qui exceſſus fuerit ablati compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, idem ſit reliqui rectanguli bis ſub A C, C B, & reliqui rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A B, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales ſint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cũ Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt. [b] Quoniam vero rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt, erit & quod bis ſub A C, C B, illi cõmenſurabile, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub A D, D B, Medium erit. [c] Quare cum Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtẽdimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Nõ igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat

pun-

a 4.ſecundi

b 22. deci.

c 27. deci.

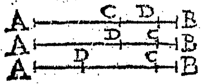
punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

43. 37.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſito 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctū diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantnm commenſurabiles, continenteſque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicū que punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub AC, CB, ei, quod continetur ſemel ſub AC, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub AD, DB. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CD, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commenſurabilia. [a] Quare & com-



[a] 16. deci.

poſitum

poſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, DB. [a] Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarū AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.

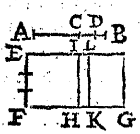
[a] 27. deci.

44. 38.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

QVAE ex binis Medijs ſecunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs ſecunda A B, diuiſa ad punctū C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, Medię ſint potētia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſitione 43. quadrata ex AC, CB, vel maiora eſſe quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur Rationalis E F, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis ſub AC, CB; quandoquidem quadratum ex AB, [c] æquale eſt quadratis ex AC, CB, &

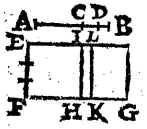


[b] 45. pri.

[c] 4. ſecundi.

rectan-

rectangulo bis ſub AC,CB.Eodem modo ſi ad E F,applicetur EK,quadratis ex A D,D B,æquale ; erit reliquum LG, æquale rectangulo bis ſub AD, DB, comprehenſo.



Et quia quadrata ex AC, CB,inæqualia ſunt quadratis ex AD,DB;erũt quoque rectangula EH,EK, quæ illis æqualia ſunt,inæqualia ; ac propterea & rectæ F H, F K, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex A C, C B, maiora ſunt, per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub AC,CB;erit & EH,maius quam I G; ac propterea EH,*maius quam dimidium ipſius* EG, ideoque & recta F H, maior quam dimidiũ ipſius F G. Eadem ratione oſtẽdemus FK,maiorẽ eſſe dimidio ipſius FG. Inæquales ergo ſunt partes FH,HG,partibus FK,KG,ſingulæ ſingulis.Quoniã vero AC,CB, Mediꝫ ſunt,& potẽtia commẽſurabiles;erũt & earũ quadrata Media, & commenſurabilia . [a] Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit . Cum ergo vtrũque ipſorũ ſit Medium,erit quoque compoſitũ ex ipſis,hoc eſt,EH,per coroll.propoſ.24.huius libri,Medium.Eademque ratione Medium erit E K.[b] Quare E H, E K, ad Rationalem EF,applicata faciunt latitudines FH,FK, Rationales ipſi EF, longitudine incommenſurabiles.Eodem modo cũ rectangulum ſub AC,CB, ponatur Mediũ, erit & quod bis ſub AC,CB,hoc eſt,IG,illi commẽſurabile, Mediũ, ex coroll.propoſ.24.huius lib.Quare cum applicetur ad Rationalem HI,[c] erit HG,Rationalis ipſi H I,longitudine incommenſurabilis . Non aliter oſtendemus L G, Medium eſſe,& KG,Rationalem ipſi KL, lõgitudine incommenſurabilem. Rurſus quia A C, C B, longitudine ſunt incommenſurabiles;& eſt vt AC,ad C B,ita per lẽma 3.propoſ.19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub AC,CB,[d] erit quadratum ex AC,rectangulo ſub AC,CB, incommenſurabile . Sed quadrato ex AC,cõmenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AC,CB;(cum enim AC,CB,potentia ſint commẽſurabiles , atq; adeo ipſarum quadrata cõmenſurabilia; [e] erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum

quadrato

[a] 16. deci.

[b] 23. deci.

[c] 23. deci.

[d] 10. deci.

[e] 16. deci.

---

quadrato ex A C, commenſurabile .) Rectangulo uero ſub AC,CB,commenſurabile eſt,quod bis ſub AC,CB. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum EH,incommẽſurabile eſt,per ſcholiũ propoſ. 14. huius libri,rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt,ipſi IG.Quocirca [a] cũ ſit,vt EH,ad IG, ita FH, ad HG,[b] erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles.Oſtenſæ ſunt autem & Rationales . Rationales ergo ſunt FH,HG,potentia ſolum commenſurabiles.[c] Igitur FG,tota Irrationalis eſt,quæ ex binis nominibus appellatur,diuiſaque in nomina ad punctum H. Eodem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K.Quod fieri non poteſt, [d] vt demonſtratum eſt in præcedentibus . Igitur A B, ex binis Medijs ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctũ,quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina . Quod erat oſtendendum.

[a] 1. ſexti

[b] 10. deci.

[c] 37. deci.

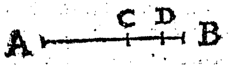
[d] 43. deci.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.
39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt AC,CB,potentia ſint incommenſurabiles,facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale;rectangulum vero ſub ipſis Mediũ, vt vult propoſ.40.huius lib.Dico AB,non poſſe diuidi ad aliud punctũ in alia nomina , quæ ſcilicet lineæ incõmenſurabiles quoq; ſint potẽtia,facientes compoſitum ex ipſarũ quadratis Rõnale, & rectangulũ ſub ipſis Mediũ Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D,extiterit, demõſtrabimus ſimiliter,vt in propoſitione 43.exceſſum cõpoſiti ex quadratis rectarum AC,CB,& compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB Sed exceſſus compoſiti ex



quadratis

quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatiũ eſt Rationale: (quia cũ utrũque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoq; eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub AC, CB, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub AD, DB. a Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

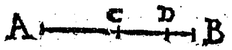
a 27. deci.

46.
40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum uero ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius libri. Dico AB, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis Mediũ, & rectangulũ ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum



exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectãguli bis ſub AD, DB, eundẽ eſſe; qui eſt cõpoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB. Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale eſt; quod oſtendemus, vt in propoſ. 44. Igitur & exceſſus cõpoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quia vero compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: a Medium autem non ſuperat Medium Rationali; non erit eorum exceſſus ſpatiũ Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

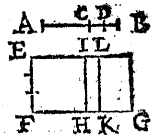
a 27. deci.

47.
41.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media A B, diuiſa in ſua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet ſint etiã lineæ potentia incõmenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarũ quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctũ D, exiſtat. Conſtructio autẽ eadem fiat, quæ in propos. 45. oſtẽdemusq; vt ibi, partes F H, H G, partibus F K, KG, inæquales eſſe ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadra-



quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalem EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis)[a] faciunt latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipſi EF, incomēſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG, [b] eſtq; vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtēdimus: Sed oſtēſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potētia ſolũ cōmenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, [c] iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

[a] 23 deci.

[b] 1. ſexti

[c] 43. deci.

DEFINITIONES
SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecũda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomẽ; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

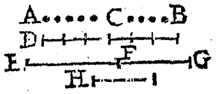
NVMERVS dictarum ſex linearũ, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniã nomina lineæ, quæ ex binis noĩbus dicitur, ſunt lineæ Rõnales potentia tantũ commenſurabiles, non poterit vtrumq; nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomina ipſa eſſent quoq; lineæ longitudine inter ſe cõmenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus. quod nõ ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile, vt manifeſtum eſt.

RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commenſurabile eſt longitudine expoſitæ lineæ Rationali; & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cũ minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipſorum nominum expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans; ſecundam, quintam; & tertiam, ſextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49. 48. 42.

INVENIRE ex binis nominibus primam.



REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs, quæ in ſcholio 2. propo. 29. huius libri ſcripſimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem nõ habeat, quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commẽſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam. n. quadrata ex EF, FG, cũ proportionem habeant, quam numeri AB, AC, [a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa autem eſt EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis eſt. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia ſolum commenſurabiles;

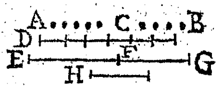
[a] 6. decimi

[b] 9. deci.

[a] 37. deci.

les;[a] Atq; idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cum enim ſit vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior, quam A C; erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniã igitur eſt vt A B, numerus ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex F G; erit quoque, per conuerſionem rationis, vt A B, ad C B, videlicet ad exceſſum, quo antecedens AB, ſuperat conſequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex E F, ſuperat conſequens quadratum ex F G: Habet autem A B, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportiotionem habebũt quam numerus quadratus ad numerum quadratum;[b] ac proinde rectæ E F, H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectę H, ſibi longitudine commenſurabils; eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

[b] 9. deci.



49.
43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in precedenti propoſitione, expoſitaq; Rationali quadã D; ſumatur ei longitudine cõmenſurabilis FG. Erit ergo & F G, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum AB, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex E F. Dico EG, eſſe ex binis nominibus ſecundam

[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

[c] 37. deci.

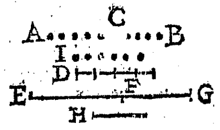
dam. Quoniã. n. quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri A C, A B,[a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectę FG, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis eſt. Quia vero A C, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati.[b] Incõmenſurabiles ergo ſunt longitudine rectę F G, EF. Sũt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles;[c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quę ex binis nominibus dicitur. Dico & ſecundam eſſe. Cũ enim ſit vt numerus AC, ad numerum A B, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex E F: Et conuertendo vt A B, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; ſit autẽ AB, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propoſ. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in precedenti propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilẽ eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quã minus FG, quadrato rectę H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtq; minus nomen FG, expoſitę Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſecunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundam. Quod erat faciendum.

50.
44.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum



cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum ; Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel ſola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidẽ, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum : binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt ſi AC, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi AC, ſit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Expoſita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propoſ. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionẽ habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commenſurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc eſt, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ; [b] erũt D, & EF, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. [c] Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia. Igitur cum E F, oſtenſa ſit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad AC, hoc eſt, quadratum ex EF, ad quadratũ ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] erunt EF, F G, longitudine incommenſurabiles. Sũt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

[c] 6. decimi

[d] 9. decimi

[e] 37. deci.

---

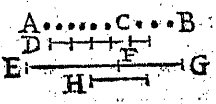
eſſe. Quoniam. n. eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autẽ I, ad AC, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratũ, Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [a] ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex F G; Eſt autem AB, maior quam A C; erit & quadratũ ex EF, maius quam quadratum ex FG, Sit ergo maius, per lemma propoſ. 14. huius lib, quadrato rectæ H, Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commẽſurabilis; & neutra ipſarum EF, FG, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratum eſt; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

[a] 9. decimi

PROBL. 16. PROPOS. 52.

51.
45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.



REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB, ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Ratiõaalis quædam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & E F, Rõnalis, cũ Rationali D, commenſurabilis ſit. Quod ſi reliqua cõſtruantur, vt in propoſ. 49 oſtendemus ſimiliter, vt ibi, totã EG, ex binis nominibus eſſe. Dico & quartam eſſe. Erit enim rurſus

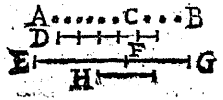
rurſus, vt in 49. propoſ. quadratum ex EF, maius quam quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectę H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propoſ. per conuerſionem rationis eſt, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non eſt autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratū ex EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum quadratū.
[a] 9. deci. [a]Longitudine ergo incōmenſurabiles ſunt rectę EF, & H. Itaq; cū maius nomen EF, plus poſsit, quam minus FG, quadrato rectę H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & maius rurſus nomen EF, longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

52.
46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in pręcedenti propoſ. fiat conſtructio, vt in propoſ. 50. hoc eſt, ſumatur FG, longitudine commenſurabilis expoſitę Rationali D, &c. Oſtendemus ergo vt in propoſ. 50. EG, eſſe ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. Demonſtrabimus enim eodem modo, vt in 50. propoſ. quadratum ex EF, maius eſſe, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propoſ. 49. oſtenſum eſt, per conuerſionem rationis, eſt vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratū ex H. Oſtendemus, vt in propopoſitione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incōmēſurabiles eſſe. Quare cum maius nomen plus EF, poſsit, quam minus FG, quadrato rectę H, ſibi longitudine incommmenſurabilis, & minus nomen FG, longitudine commenſurabile expoſitę Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.



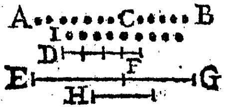
PROBL.

53.
47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus ſextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non ſimilibus, quorum neuter ſit quadratus, & compoſitus ex ipſis AB, non ſit quoque quadratus, habeatq; ad neutrū ipſorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, ſi numerus quilibet nō quadratus diuidatur in duos numeros inter ſe primos.[a] Nam hac ratione & totus ad vtrūque ipſorum [a] 30. ſept.
primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quę ad finē lib. 8. demonſtrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis eſt quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, nō quadratos proportionem nō habebit, quā quadratus ad quadratū. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratū ex D, ad quadratū ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib. & reliqua fiat, vt in propoſ. 51 oſtendemuſq; vt ibi, rectas D, & EF, eſſe longitudine incommēſurabiles, atq; totā EG, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextā eſſe. Demonſtrabimus. n. ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & FG, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeq; quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49. per conuerſionem rationis, eſſe vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; [b] erunt rectę EF, & [b] 9. deci.
H, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum maius

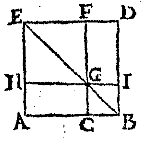


nomen

nomen EF, plus poſsit, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommẽſurabilis, & neutrum ipſorum nominum EF, F G, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque; erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineę, & quadratum dictæ partis.



*SECTA ſit recta A*B, *vtcunq; in* C. *Deſcribatur ex AB, quadratum A* B *D* E, *in quo diameter ducatur* B E: *Ducta autem ex* C, *recta* C*F, ipſi* BD, *parallela, quę diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi AB, parallela HI.* Erunt *igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. FH,* CI, *quadrata partium A*C, CB; *vtrumq; autem rectangulorum* DG, *GA, comprehenſum ſub eiſdem partibus: At vero rectangula* CD, *AI, ſub tota A*B, *& parte* C*B, contenta.* Dico *DG, mediũ proportionale eſſe inter quadrata FH, CI:* At *CD, mediũ eſſe proportionale inter quadrata* AD, CI. *Quoniã. n.* [a] *vt HG, ad* GI, *ita eſt tam FH, ad DG, quã* AG, *ad* CI; *erit vt FH, ad DG, ita* AG, *ad* CI: [b] Eſt *autem* AG, *ipſi DG, æquale. Igitur erit quoque vt* FH, *ad DG, ita DG, ad* CI; *Atq; adeo D G, medium proportionale eſt inter quadrata* FH, CI.

[a] 1. ſexti.

[b] 43. prim.

RVRSVS quia eſt [a] *vt* AB, *ad CB, ita tam* AD, *ad* CD, *quam AI, ad CI; erit vt AD, ad* CD, *ita* A*I, ad CI: Eſt autem* A *I, ipſi* C *D, æquale. Igitur erit vt AD, ad* C D, *ita quoque CD, ad CI. Quare* C D, *medium proportionale eſt inter quadrata* A D, C*I.* E*odem modo erit* AF, *medium proportionale inter quadrata* A D, *FH.*

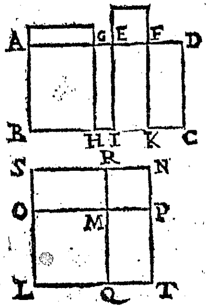
[a] 1. ſexti.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

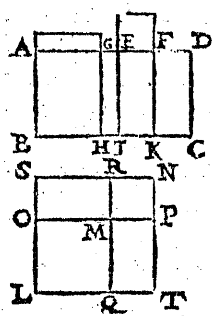
54.
48.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD, Dico rectam lineã, quę poteſt ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit. n. ipſius AD, maius nomẽ AE. Erũt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & deniq; AE, expoſitæ Rationali AB, longitudine commenſurabilis erit. Secetur ED, bifariã in F. Quia igitur AE, plus poteſt quam ED, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commẽſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ex E D, hoc eſt, quadrato ex EF, æquale parallelogrammũ ſub AG, GE, cõtentum, per 2. lemma propoſ. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; [b] in partes longitudine cõmenſurabiles ipſam diuidet. Quare AG, GE, partes inter ſe



[b] 18. deci.



[a] 14. ſecun.

ter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducantur iam per puncta G,E,F, ipſis AB,DC, parallelæ GH,EI,FK.[a] Et parallelogrammo A H, æquale quadratum fiat L M; At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N; coniunganturq; quadrata LM,MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnã rectam lineam conſtituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnã rectam QR, vt demonſtratum eſt a nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea quod anguli OMQ, PMR, ad verticem M, ſunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales ſint, ideoque & tota OP, toti QR; [b] ſit autem O P, ipſis S N, LT; & QR, ipſis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoque quadratum.

[b] 34. primi.

QVONIAM vero rectangulum ſub AG, GE, æquale eſt, per conſtructionem, quadrato ex EF; [c] erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE; [d] Ac propterea & vt AH, ad EK, ita E K, ad GI. Quare EK, medium proportionale eſt inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, MN, medium proportionale eſt TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur eſt T M, ipſi E K. [e] Cum ergo ipſi T M, æquale ſit M S, [f] & ipſi E K, æquale ſit F C; erit & M S, ipſi FC, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti rectangulo A C, æquale eſt; atq; adeo recta OP, poteſt ſpatiũ AC, contentum ſub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

[c] 17. ſexti
[d] 1. ſexti.
[e] 43. primi
[f] 36. primi

QVONIAM enim A G, G E, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles; [g] erit & tota AE, vtrique ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem A E, cum ſit maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commenſurabilis longitudine: Igitur & AG, GE, eidem AB, ex ſcholio propoſ. 12. huius

[g] 16. deci.

lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atque adeo cum A B, ſit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. [a] Quare rectangula A H, G I, ſub Rationalibus longitudine cõmenſurabilibus cõtenta Rationalia ſunt; Ideoque & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, Rationalia erũt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rõnales erũt.

[a] 20 deci.

ET quoniam A E, ipſi E D, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis A G; & ipſi ED, commenſurabilis eſt longitudine E F, eius dimidia; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & A G, E F, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & A H, EK, [b] eandem proportionem habentia, quam A G, E F, [c] incommenſurabilia ſunt, ac proinde & L M, MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. [d] Igitur & rectæ O M, M P, longitudine ſunt incommenſurabiles, [e] cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autem & OM, MP, Rationales oſtenſæ. Igitur OM, MP, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. [f] Quapropter tota O P, potens ſpatium AC, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 1. ſexti
[c] 10. deci.
[d] 10. deci.
[e] 1. ſexti.
[f] 37. deci.

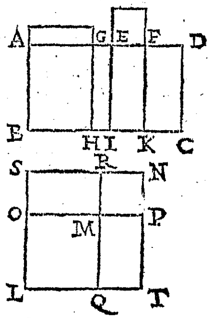
THEOR. 38. PROPOS. 56.

55.
49.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR ſpatiũ A C, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit.n. ipſius A D, maius nomẽ AE.

Erunt igitur ex defin. AE,ED,Rationales potentia tantum commenſurabiles ; & AE , plus poterit quam E D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commẽſurabilis; Et denique ED,Rationali expoſitę AB,longitudine cõmenſurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua conſtruantur, vt in antecedenti propoſitione. Quo facto, demonſtrabimus ſimiliter, vt ibi,rectam OP,poſſe ſpatium AC, contentum ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico iam OP, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima vocatur.



QVONIAM enim AE, longitudine incõmenſurabilis eſt ipſi E D;& E D, minus nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commenſurabilis eſt Rationali AB;[a] erunt AE, AB, longitudine incommenſurabiles. Et quia A G, GE, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſitione longitudine cõmenſurabiles;[b] erit quoque tota AE, vtrique ipſarum cõmenſurabilis: Quare cum AE, maius nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea ſit Rationalis;erunt & AG, GE, Rationales : quod cum utraque AG, GE,ipſi AE, ſit longitudine commenſurabilis ; at uero AE, Rationali AB,longitudine incommenſurabilis; [c] erit utraque AG, GE,eidem AB,incommenſurabilis longitudine. Ac proinde tam AB,AG,quam AB, GE,Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles.[d] Igitur rectangula AH, GI,Media ſunt,proptereaque & quadrata LM, MN,ipſis æqualia , Media ſunt . Ergo & rectæ O M, M P, ſunt Mediæ.

QVIA uero AG,GE,longitudine ſunt commenſurabiles;[e] erunt & AH, GI, eandem cum illis proportioné habentia, commenſurabilia , atque idcirco & quadrata LM,MN,ipſis æqualia, commenſurabilia ſunt. Igitur & rectæ OM,MP,commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommenſurabiles

[a] 13. deci.

[b] 16. deci.

[c] 14. deci.

[d] 22. deci.

[e] 10. deci.

ſunt;Ipſi vero AE,oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis AG;& ipſi ED,longitudine cõmenſurabilis eſt EF, eius dimidia ; erunt per ſcholium propoſ.14. huius lib. AG, EF, longitudine incommenſurabiles ; Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cum ipſis, [a] incommenſurabilia ſunt . Igitur & L M, M T , ipſis A H,& EK, æqualia, incommenſurabilia ſunt . [b] Ideoq; & rectæ O M, M P, longitudine ſunt incommenſurabiles . [c] cum eandem habeant proportionem , quã LM, MT. Cum ergo oſtenſum ſit O M , M P, Medias eſſe, & commenſurabiles,erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ , linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AB, hoc eſt, ipſi EI: Eſt autem E F, ipſi ED,quoque longitudine commenſurabilis; [d] erunt etiam EI,EF, longitudine commenſurabiles ; Ac propterea cum EI, Rationalis ſit , erit & EF, Rationalis.[e] Quare EK,rectangulum, Rationale eſt: Eſt autem MT, ſub OM, M P, contentum ipſi EK, æquale. Igitur & MT,Rationale eſt. Quapropter OM, MP, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles , Rationaleque continentes; [f] atque adeo O P, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur . Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali,& ex binis nominibus ſecunda , &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 39. PROPOS. 57.

56.
50.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia ; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam,

[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

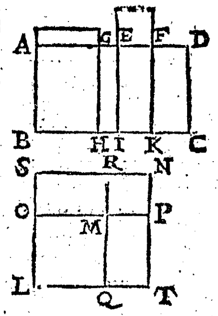
[c] 1. ſexti.

[d] 12. deci.

[e] 20. deci.

[f] 38. deci.

quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit.n. ipſius AD, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique neutra ipſarum AE, E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam O P, poſſe ſpatium A C: Et vt in antecedenti propoſ. 56. rectas O M, M P, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles; propterea quod A E, Rationali AB, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum & ibi eadem AE, ipſi AB, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam vero ED, EF, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque E D, ipſi A B, Rationali, hoc
[a] 14. deci. eſt, ipſi EI, longitudine incommenſurabilis; [a] erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem EF, E I, Rationales, quod E F, dimidia ſit ipſius E D, Rationalis; & E I, expoſitæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales ſunt potentia tan-
[b] 22. deci. tum commenſurabiles; [b] Ac propterea E K, Medium eſt; ideoque & M T, æquale ipſi E K, Medium eſt, quod ſub Mediis O M, M P, continetur. Itaque cum OM, MP, Mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles,
[c] 22. deci. contineantque ſpatium *Medium*; [c] erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.



57.
51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potẽs Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalẽ, quæ Maior vocatur. Sit.n. AE, ipſius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potententia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique A *E*, ipſi A B, commenſurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. [a] Erunt ergo [a] 19. deci.
A G, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, O P, poſſe ſpatium A C. Dico O P, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam.n. A G, G E, longitudine incommenſurabiles ſunt; [b] erunt & rectangula A H, G I, [b] 10. deci.
eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atque adeo & quadrata L *M*, *M*N, ipſis AH, G I, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ O *M*, *M* P, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; [c] 20. deci.
[c] & rectangulum A I, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem A I, æquale compoſito ex quadratis L *M*, *M* N: Compoſitum ergo ex quadratis L *M*, *M* N, Rationale eſt.

ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartę, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali A B, erit & E F, ipſius dimidia eidẽ A B, longitudine incõmenſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cũ ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales ſunt potentia ſolũ cõmenſurabiles. [d] Quare [d] 22. deci.

EK,

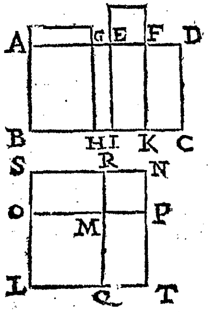
EK, Medium eſt, ſub ipſis contentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; ſub OM, MP, Medium eſt. Quocirca cum OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis MT, Medium; [a] Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendum.

a 40. deci.

58.
52.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Mediũ. Sit.n. ipſius AD, maius nomẽ AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quam ED, quadrato rectæ lõgitudine ſibi incõmenſurabilis; & deniq; ED, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariã, fiant reliqua eadẽ, quæ in propoſ. 55. [b] Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommẽſurabiles. Simili autem modo, vt in ppoſ. 55. cõſtabit rectã OP, poſſe ſpatiũ A C. Dico OP, Irrationalẽ eſſe, quæ potens Rationale & Mediũ appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis

b 19. deci.

& longitudine incõmenſurabilis Rationali AB; erũt AE, AB, Rationales potẽtia tantũ cõmenſurabiles. [a] Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, ęquale compoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali AB, cum ſit minus nomẽ ipſius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipſius dimidia, eidem AB, commenſurabilis lõgitudine, & Rationalis. [b] Quare EK, ſub Rationalibus EI, EF, lõgitudine commenſurabilibus, Rationale eſt; atque idcirco & MT, ſub OM, MP, contentũ Rationale erit, cum ipſi EK, ſit ęquale. Quamobrẽ cũ rectæ OM, MP, potentia incõmenſurabiles ſint, faciantque cõpoſitum quidẽ ex ipſarũ quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, ſub ipſis contentum, Rationale; [c] Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demoſtrandum.

a 22. deci.

b 20. deci.

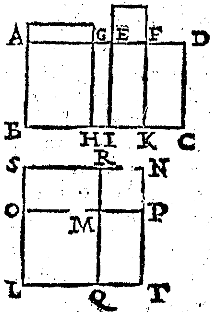
c 41. deci.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

59.
53.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatiũ potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quę ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit.n. ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commenſuraſurabiles;& AE,plus poterit,quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis;& denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB, Fiant omnia,quæ in ſuperioribus;[a]eruntque AG,GE, longitudine incommenſurabiles.Iã vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ.58.rectas O M, MP,potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium.Vt autẽ in propoſ.58.erit quoque MT,ſub OM, MP,comprehenſum, Mediũ. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incõmẽſurabilis eſt longitudine ipſi ED; hæc vero eidem cõmẽſurabilis;[b] erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. [c] Igitur & AI,EK,incommenſurabilia ſunt. [d] cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis LM,MN, quod ipſi A I, æquale, eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK,eſt æquale, incommenſurabilia ſunt.Quapropter cum rectæ OM,MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarũ quadratis L M, MN, Medium, & MT,ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis;[e] erit tota OP, Irrationalis, quę bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali,& ex binis nominibus ſexta,&c. Quod oſtendendum erat. 60.



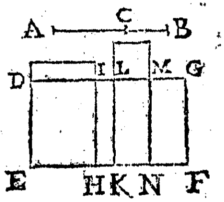
a 19. deci.
b 13. deci.
c 10. deci.
d 1. ſexti.
c 42. deci.

54. THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT

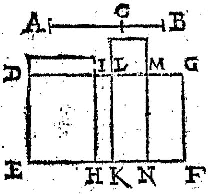
Sit ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; [a] & ad Rationalem expoſitam DE, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex AB; latitudinem faciens DG. Dico D G, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC;& ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis ſub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC,CB,vna cum rectangulo bis ſub AC,CB,[b] æqualia ſint quadrato ex AB,quemadmodum & eidem quadrato ex AB,æquale eſt, per cõſtructionem rectangulũ DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipſis L K, G F, parallela agatur MN: eritque vtrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur. [c] Et quoniam A C, C B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quod tota AB, ſit ex binis nominibus; erũt quadrata ex AC,CB, Rationalia, & ob id commenſurabilia; [d] quorum vtrique cum etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectãgulum DK. Igitur & DK, Rationale erit; quod cum applicatum ſit ad Rationalem D E, [e] faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipſi DE, longitudine commenſurabilem.



RVRSVS quia AC,CB, Rationales ſunt ſolum potentia commenſurabiles,[f] erit rectangulum ſub ipſis, Medium, atq; adeo,& quod bis ſub ipſis, cum ſit ei commenſurabile, hoc eſt, ipſum LF, Medium erit, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad L K, Rationalem, [g] facit LG, latitudinem Rationalem, & ipſi L K, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Eſt autem DL, oſtenſa eidem DE, commenſurabilis longitudine. [h] Igitur DL, LG, longitudine incõmenſurabiles ſunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum commẽſurabiles; [i] Ac propterea DG, ex binis nominibus eſt. Dico & primam eſſe.

a 45. primi
b 4. ſecun.
c 37. deci.
d 16. deci.
e 21. deci.
f 22. deci.
g 23. deci.
h 13. deci.
i 37. deci.

QVO-



QVONIAM. n. ex lẽmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC,CB,medium proportionale eſt inter quadrata ex AC,CB,erit quoque LN,medium proportionale inter D H, IK,atque adeo [a] cum rectæ D I, L M, IL,eandem rationem habeãt, quam DH, LN, IK; erit quoque recta L M, media proportionalis inter DI,IL.[b]Quare rectangulum ſub DI,IL,æquale eſt quadrato ex L M . Et quia quadrata ex rectis A C, C B,cõmenſurabilia ſunt,quod AC,CB, ponuntur potentia cõmenſurabiles;erunt &DH,IK,ipſis æqualia,commenſurabilia, [c] Igitur & rectæDI,IL,eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt.Quoniam autẽ DK,maius eſt,quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint,per lemma propoſ.39.huius libri , quam rectangulum bis ſub AC,CB; erit & recta D L,maior quã LG,[d] cum DL,LG,eandem rationem habeant,quã DK, LF.Itaque quoniam DL,maior eſt, quam LG,& ad DL, applicatur rectangulum ſub D I, IL,deficiens figura quadrata,æquale quadrato ex LM,hoc eſt,quartæ parti quadrati ex minore LG,deſcripti;(oſtenſum enim eſt rectangulum ſub DI,IL,æquale quadrato ex LM.)diuiditurq; DL,ad I,in partes DI, IL, longitudine commenſurabiles,vt eſt demonſtratum;[e] poterit D L, maior plus quam LG,minor,quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.Quare cumDG,oſtenſa ſit ex binis nominibus,& DL,maius nomen plus poſſe , quam LG , minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,atque idem maius nomen DL, longitudine cõmenſurabile Rationali expoſitæ DE;erit ex defin.DG,ex binis nominibus prima.Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus,&c.Quod oſtendendum erat.

[a] 1. ſexti.
[b] 17. ſexti.
[c] 10. deci.
[d] 1. ſexti.
[e] 18. deci.

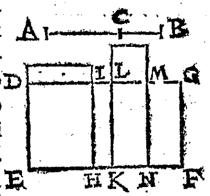
61. 55. THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius,quæ eſt ex

binis

binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum,latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC;[a] & adRationalem DE,applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB,latitudinem faciens DG. Dico DG,ex binis nominibus eſſe ſecundã.Cõſtituantur.n.eadem,quæ in propoſ.præcedenti,ita vt rurſus DH,IK, æqualia ſint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipſorum LN,MF,ei quod ſub AC,CB,continetur.Quoniam igitur AC,CB,ex binis Medijs primam AB, componentes [b] Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent; erũt quadrata ex AC,C B, atq; adeo rectangula ipſis æqualia DH, IK,commenſurabilia,atque Media.[c]Cum ergo propterea & totumDK,vtrique ipſorum DH, IK, ſit commenſurabile; erit quoque ex coroll. propoſ. 24.huius lib. DK, Medium ; quod cum applicatum ſit ad Rationalẽ DE;[d] erit eius latitudo DL,Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis . Rurſus quoniam rectangulum ſub AC, CB, Rationale eſt; erit & eius duplum , nempe LF,Rationale;quod cum applicatum ſit ad Rationalem LK;[e] erit eius latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE,longitudine commenſurabilis. Quare cum duarum rectarũ DL,LG,ipſa LG,ſit ipſi DE,cõmẽſurabilis lõgitudine,at DL, longitudine incõmenſurabilis, [f] erũt DL,LG, longitudine incõmenſurabiles. Quod cũ DL, LG,oſtenſæ ſint Rationales;erunt ipſæ Rationales potẽtia ſolum cõmẽſurabiles; [g] ac propterea tota DG, ex binis nominibus eſt.Iam vero vt in antecedenti propoſ.demonſtrabimus DL,maius nomen eſſe,& poſſe plus,quam minus L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.Quocirca cum ipſius DG,maius nomen DL,plus poſſit



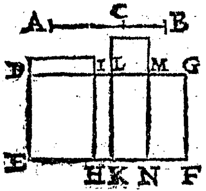
[a] 45. primi
[b] 38. deci.
[c] 16. deci.
[d] 23. deci.
[e] 21. deci.
[f] 13. deci.
[g] 37. deci.

poſsit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen LG, oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis Medijs prima, &c. Quod erat oſtendendum.

62.
56.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs ſecũda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.



SIT ex binis Medijs ſecunda AB, cuius maius nomen AC,[a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciẽs DG. Dico DG, eſſe ex binis nominibus tertiã. Cõſtructis. n. ijſdẽ, quæ in propoſ. 61. qm̃ AC, CB, ex binis Medijs ſecundã AB, componentes,[b] Medię ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent; Erũt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectãgula ipſis æqualia D H, IK, commenſurabilia, & Media.[c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipſorum D H, IK, ſit commẽſurabile; erit & ex coroll, propoſ. 24. huius libri D K, Medium; quod eum applicatum ſit ad Rationalem DE;[d] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi DE, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem LK;[e] erit latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, ipſi C B, longitudine eſt incommenſurabilis; eſtq; vt AC, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub AC, CB,[a] erit quoque quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile.[b] Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB, commenſurabilia ſint, quippe cum rectę ipſę potentia ponantur commenſurabiles; & rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub AC, CB. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc eſt, rectangulum DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt, rectangulo L F, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri conſcripſimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum D K, L F, habentes[c] longitudine ſunt incommenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles;[d] ac propterea tota D G, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in propoſ. 61. oſtendemus DL, eſſe maius nomen, poſſeq; plus, quam minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrem cum D L, maius nomen plus poſsit, quam LG, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum D L, LG, Rationali expoſitæ DE, ſit oſtenſa longitudine cõmenſurabilis; erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius, quę ex binis Medijs ſecũda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtrandum.

a 45. primi
b 39. deci.
c 16. deci.
d 23. deci.
e 23. deci.

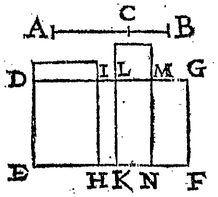
a 10. deci.
b 16. deci.
c 10. deci.
d 37. deci.

63.
57.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

SIT



SIT Maior AB, cuius maius nomen A C, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe quartam. Conſtruantur .n. eadẽ prorſus, quæ in propoſ. 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB, componentes, [b] potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero ſub ipſis, Medium; erit quoque DK, compoſito ex quadratis rectarũ AC, CB, æquale exiſtens, Rationale; At vero LF, duplũ eius, quod ſub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale DK, ad Rationalem DE, eſt applicatum; [c] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Item cum LF, Medium ſit applicatum ad Rationalem LK; erit LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, lõgitudine incommenſurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipſi DE, commenſurabilis ſit longitudine; hæc vero eidẽ DE, longitudine incommenſurabilis; [e] incommenſurabiles erunt longitudine D L, LG: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LG, Rationales potentia tantum cõmenſurabiles; [f] ideoque D G, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in propoſ. 61. demonſtrabimus rectangulum ſub D I, I L, æquale eſſe quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommenſurabilia ſunt, quod rectæ A C, CB, potentia incõmenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommenſurabilia; [g] atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam vero vt in propoſ. 61. oſtendimus, D L, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam D L, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles; [h] poterit D L, plus quã L G, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cum & ipſa DL, (maius nomen ipſius DG, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DE; erit ex defi. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

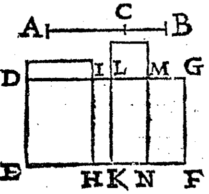
[a] 45. prim.
[b] 40. deci.
[c] 21. deci.
[d] 23. deci.
[e] 13. deci.
[f] 37. deci.
[g] 10. deci.
[h] 19. deci.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

64.
58.

QVADRATVM eius, quę Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen A C; [a] & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant. n. eadẽ omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium [b] potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectãgulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, ęquale compoſito ex quadratis rectarum A C, CB, Medium; & LN, æquale ei, quod ſub A C, CB, continetur, atque adeo ipſius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, [c] facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommenſurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [d] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, commenſurabilem. Quia igitur duarum rectarum D L, LG, hæc quidem longitudine commenſurabilis eſt Rationali D E, illa vero longitudine incommenſurabilis;



[a] 45. primi
[b] 41. deci.
[c] 23. deci.
[d] 21. deci.

a 13. deci.
b 37. deci.

[a] erunt DL,LG, lōgitudine incommenſurabiles. Quare DL,LG, Rationales ſunt potētia ſolū cōmenſurabiles; [b] Ac ppterea DG, eſt ex binis nominibus. Iā vero, vt in propoſ. 61. oſtendemus rectangulū ſub DI,IL, æquale eſſe quadrato ex LM; & vt in antecedente propoſ. DL, maius nomen eſſe, atque poſſe plus, quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quapropter cū & minus nomē LG, oſtēſum ſit expoſitæ Rationali DE, longitudine commenſurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

65.
59.

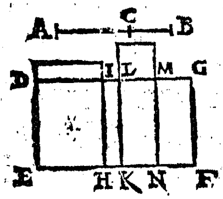
THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

c 45. primi

SIT bina Media potens recta A B, cuius maius nomen AC, [c] & ad Rationalē D E, applicetur rectāgulum DF, ęquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe ex binis nominibus ſextā. Constructis.n. iiſdem, quæ in propoſ 61. quoniā rectę AC,CB, componentes ipſam AB, potentē bina Media, [d] potentia incommēſurabiles ſunt, faciuntq; & cōpoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis cōtinetur, Medium, & incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum; erit tam DK, illi compoſito æquale, quam LF, rectangulo bis ſub AC, CB, æquale, Mediū. Et quia Media DK, LF, applicata ſunt ad Rationalem DE; [e] erūt eorum latitudines D L, L G, Rationales ipſi DE, longitudine in-

d 42. deci.
e 23. deci.



commen-

commenſurabiles. [a] Quoniam vero compoſitū ex quadratis rectarum AC,CB, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AC, CB; eidem vero rectangulo ſub AC,CB, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, CB, cum hoc illius ſit duplum; [b] Erit compoſitum ex dictis quadratis, hoc eſt, DK, incommenſurabile rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt, ipſi LF; Ac propterea rectæ DL,LG, eandem rationem habentes cum D K, L F, [c] longitudine incommenſurabiles ſunt. Rationales ergo ſunt DL, L G, potentia ſolum commenſurabiles; [d] Ac proinde DG, eſt ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus DL, eſſe maius nomen; poſſeq; plus quam L G, quadrato rectæ ſibi longitudine incommēſurabilis. Cū ergo oſtenſum ſit neutram ipſarum D L, L G, longitudine commenſurabilem eſſe expoſitæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media poteſt ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. Quod erat oſtendendum.

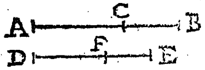
a 42. deci.
b 13. deci.
c 10. deci.
d 37. deci.

66.
60.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

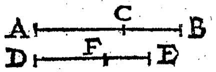
EI, quæ eſt ex binis nominibus, lōgitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunq; AB, diuiſa in ſua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, ſitque recta DE, ipſi AB, longitudine commenſurabilis. Dico DE, quoq; eſſe ex binis nominibus, & ordine eandē ipſi AB. [e] Fiat.n. vt tota AB, ad totā DE, ita ablata AC, ad ablatā DF. [f] Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam FE, vt tota A B, ad totam DE. Et quoniā ipſi AB, longitudine cōmenſurabilis ponitur DE; [g] erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB, lōgitudine com-



e 12. ſexti.
f 19. quin.
g 10. deci.

menſu-

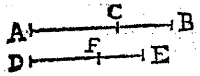


menſurabilis : [a] Sunt autem A C, CB, cum ſint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales ſunt. Rurſus quia eſt vt A C, ad DF, ita CB, ad FE; & permutando vt A C, ad C B, ita DF, ad FE: Sunt autem AC, CB, potentia ſolum commenſurabiles; [b] erunt & DF, FE, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur DF, FE, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; [c] Ac propterea DE, ex binis eſt nominibus. Dico & ipſi AB, ordine eandem eſſe. Aut enim AC, plus poteſt quam CB, quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commēſurabilis, aut incōmenſurabilis. Si quidē AC, plus poteſt quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine cōmenſurabilis; [d] poterit & DF, plus quā FE, quadrato rectæ ſibi longitudine cōmenſurabilis. Quod ſi AC, cōmenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ, ita vt AB, ſit ex binis nominibus prima; [e] erit & DF, eidē Rationali lōgitudine commenſurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, ſit commēſurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. eſt ex binis nominibus prima, hoc eſt, ordine eadem. Si vero C B, expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis, vt AB, ſit ex binis nominibus ſecunda; erit eodem modo & FE, Rationali expoſitę longitudine commenſurabilis. Quare & DE, ex defin. eſt ex binis nominibus ſecunda. Si denique neutra ipſarum A C, CB, longitudine ſit commenſurabilis expoſitæ Rationali, ita vt AB, ſit ex binis nominibus tertia; [f] erit & neutra ipſarum DF, FE, longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali. Quare & D E, ex defin. eſt ex binis nominibus tertia.

AT ſi AC, plus poſsit, quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; [g] poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſtendemus DE, ex binis nominibus quartam eſſe vel quintam, vel ſextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta. Ei igitur, quę ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 37. deci.
[b] 10. deci.
[c] 37. deci.
[d] 15. deci.
[e] 12. deci.
[f] 12. deci.
[g] 15. deci.

SCHOLIVM.



QVOD ſi recta DE, potentia tantum commenſurabilis ſit ipſi AB, qua eſt ex binis nominibus, oſtendemus quidem eodem modo, (ſi loco : Commenſurabilis longitudine : in demonſtratione reponamus vbique : commenſurabilis potentia tantum :) & DE, eſſe ex binis nominibus: At eam eſſe ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis eſt, nullo modo concludemus. Non enim ſequitur, ſi AC, maius nomen longitudine ſit commenſurabile expoſita Rationali; & DF, maius nomē eidem eſſe commenſurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expoſita Rationalis, & DF, eidem A C, longitudine cōmenſurabilis eſt, ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum, ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione poteſt, vt DE, illi potentia tantū cōmenſurabilis ſit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim AB, ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, diuiſa in ſua nomina ad C; ſitque ei cōmmenſurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonſtrabimus eſſe ex binis nominibus, diuiſamque eſſe in ſua nomina ad F; & partes AC, CB, partibus DF, FE proportionales eſſe, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri poſſe, vt D E, ex binis nominibus ſit eadem ordine ipſi AB. Nam ſi poteſt fieri, ſit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expoſita commenſurabilis longitudine. [a] Quare & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt. Et quoniam eſt vt A C, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt propterea & AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim DE, ipſi A B, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima eſt. Eodē modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; ſecūda vel quinta. Eſſet. n. vtrūq; nomen minus CB, FE, ex

[a] 12. deci.
[b] 10. deci.

defin. longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ, atque adeo & inter ſe. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commenſurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilem, eſſe quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo ſit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [a] poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſſit, quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; [b] poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum ſit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel ſexta, licet non eadem ordine ipſi AB.

a 15. deci.

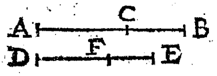
b 15. deci.

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.

67.
61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ eſt ex binis Mediis, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atque ordine eadem.



SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuiſa in ſua nomina, quorũ AC, maius, & CB, minus, ſitque ei recta DE, lõgitudine commẽſurabilis. Dico DE, quoq; ex binis Mediis eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. [c] Fiat.n.vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. [d] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, ponitur longitudine commenſurabilis DE; [a] erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. [b] Igitur & DE, FE, illis commenſurabiles, Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutãdo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: [c] Sunt autem AC, CB, potentia ſolum cõmenſurabiles; [d] erunt & DF, FE, ſolum commenſurabiles potentia. Cũ ergo & oſtenſæ ſint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipſi AB, eandẽ eſſe ordine. Quoniam.n. eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem vt AC, ad CB, ita quadratũ ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratũ ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. [f] Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, ſit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum ſub DF, FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; [g] atque adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, CB, fuerit Mediũ, ita vt AB, ſit ex binis Mediis ſecunda: erit & rectangulum ſub DF, FE, ei commenſurabile, Medium, ex corollario ꝓpoſ. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis ſecunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine cõmenſurabilis, &c. Quod demonſtrandũ erat.

c 12. ſexti.
d 19. quin.

a 10. deci.
b 24. deci.
c 38. deci.
d 10. deci.
e 38. vel 39. deci.
f 10. deci.
g 38. deci.
h 39. deci.

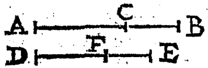
SCHOLIVM.

EODEM prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam DE, ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi AE, quæ eſt ex binis Mediis, ex binis Mediis eſſe, atque ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis *eſt; ſi modo loco: commenſurabilis longitudine: in demonſtratione dicamus vbique: commenſurabilis potentia tantũ, &c. vt manifeſtum eſt.*

68.
62.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.



SIT linea *M*aior AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis ſit DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, *M*aiorem eſſe. Fiant enim eadem, quæ ſuperius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, candem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ſunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a]erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo comméſurabiles. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [b]erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, F*E*, oſtéſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. [c]Igitur & compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, CB, cóméſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarum DF, FE, [d] *E*ſt autem compoſitum illud Rationale,

[a] 10. deci.
[b] 22. ſexti
[c] 10. deci.
[d] 40. deci.

cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. [a] Igitur & hoc Rationale eſt.

RVRSVS quia eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita eſt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE: Et permutãdo vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE. Eſt autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commenſurabile, quod rectæ AC, DF, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. [b] Igitur & rectangulũ ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. [c] Eſt autem rectangulum ſub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum ſub DF, FE, illi comméſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ 24. huius libri. Quoniam vero eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [d] ſuntque AC, CB, potentia incommenſurabiles, cum componãt Maioré AB; [e] Erũt quoque DF, FE, potentia incommenſurabiles Itaq; cum DF, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium, vt oſtenſum eſt; [f] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commenſurabilis, & ipſa Maior eſt; Quod demonſtrandum erat.

[a] 9. defin.
[b] 10. deci.
[c] 40. deci.
[d] 40. deci.
[e] 10. deci.
[f] 40. deci.

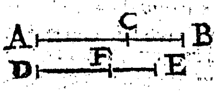
69.
63.

THEOR. 52. PROPOS. 70.

RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue lõgitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, eſſe potenté Rationale ac Medium. Cõſtructis n. iiſdem, quæ

quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, CB, commenſurabile a 41. deci. eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, FE. [a] Eſt autẽ illud compoſitum Medium, cum rectę AC, CB, componant ipſam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antece-



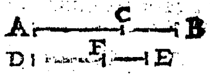
b 41. deci. denti, erit rectangulum ſub A C, C B, [b] quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ſub DF, FE; atque adeo & rectangulum ſub D F, F E, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt DF, FE, potentia incommenſurabiles. Quare cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ip- c 41. deci. ſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; [c] erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

70. 64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens A B, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe bina Media potentē. Constructis n. iiſdem, quę ſupra, oſtēdemus, vt in propos: 69. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, cōpoſito ex quadratis rectarū D F, FE, commenſurabile eſſe: Nec nō & rectangulum ſub AC, CB, eſſe commenſurabile rectan- d 42. deci. gulo ſub DF, FE. [d] Cum ergo tam compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum ſub A C, CB, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius libri, tam compoſitū ex quadratis rectarum DF, FE, quàm rectangulum ſub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommenſurabiles ſunt, vt prius. Poſtremo [a] quia a 42. deci. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum ſub AC, CB, incommenſurabilia ſunt, ex hypotheſi, propterea quod AB, bina Media poteſt: Eſt autem compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile oſtenſum compoſitū ex quadratis rectarū D F, FE; & rectāgulo ſub AC, CB, probauimus cōmenſurabile rectāgulum ſub DF, FE; Erunt quoq; ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitū ex quadratis rectarū DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incommenſurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; [b] erit DE, bina *M*edia po- b 42. deci. tens. Itaque bina *M*edia potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt. Quod erat oſtendendum.

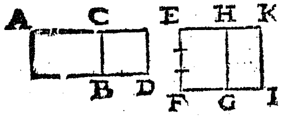


THEOR. 54. PROPOS. 72.

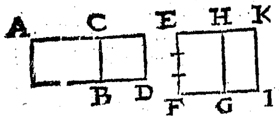
71. 65.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale ſpatium A B, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatium AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potētem. Erit enim A B, vel maius quam C D, vel minus: Aequale ſiquidem non erit; alias cum A B, ſit Rationale, eſſet & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo

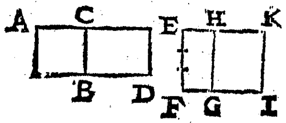


[a] 45.primi maius, & expoſita Rationali EF, [a] applicetur ad eam rectangulũ EG, æquale ipſi AB; & ad HG, aliud HI, æquale ipſi CD, vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Et quoniã AB, Rationale eſt, & CD, Medium; erit quoque EG, Rationale, & HI, Medium: quæ cum applicentur ad Rationalem EF; [b] erit EH, [b] 21.deci. Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis; [c] At [c] 23.deci. vero H K, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommẽſurabilis. Rurſus qa EG, HI, incommenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus; quod EG, Rationale ſit, at H I, Irrationale, nempe Medium; [d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes [d] 10.deci. rationem, incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac [e] 37.deci. propterea EK, ex binis nominibus eſt. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc eſt, E G, quam H I; erit quoq; EH, maior quã HK, [f] cum EH, HK, eandẽ ratio- [f] 1.ſexti. nem habeant, quã EG, HI. Iam vero maius nomen E H, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſsit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & ſpatium A D, compoſi- [g] 55.deci. tum ex Rationali A B, & Medio CD, [g] Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.



SI uero E H, plus poſsit quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit E A, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen oſtẽſum ſit longitudine cõmenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & ſpa- [c] 58.deci. tium AD, [h] Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

SIT deinde A B, minus quam C D; & eadem conſtruantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus, & EH, ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Et quia AB, minus eſt, quam CD, hoc eſt, E G, quã HI; erit quoq; recta E H, minor quam H K. Poterit igitur rurſus H K, maius nomen ipſius EK, quę eſt ex binis nominibus, plus quam E H, minus nomen, quadrato rectę longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſsit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit E K, ex binis nominibus ſecunda, cum EH, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus ſecunda E K, atque adeo & ſpatium A D, [a] 56.deci. ex Rationali AB, & Medio CD, compoſitum, [a] Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Medijs prima.



SI vero H K, plus poſsit quam E H, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta E K, atque adeo & ſpatium [b] 59.deci. A D, [b] Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

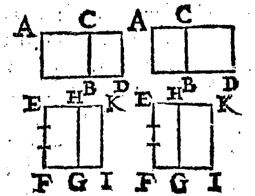
THEOR. 55. PROPOS. 73.

72.
66.

SI duo Media inter ſe incommenſurabilia cõponatur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommenſurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ poteſt totum ſpatium A D, eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media po-

potẽtem. Erit enim rurſus AB, vel maius, quam CD, vel
minus: Aequale ſiquidem non erit; alias eſſent AB, CD,
commenſurabilia . quod non ponitur. Sit primo maius,
& omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia
ſpatia AB, CD, ponuntur Media, & incommenſurabilia;
erunt & ſpatia EG, HI, Media & incommenſurabilia;
a 10. deci. cum illis ſint æqualia. [a] Igitur rectæ EH, HK, eandẽ
cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles
ſunt; & vtraque (cum EG, HI, Media ſint, applicenturq;
ad Rationalem EF,)
b 23. deci. [b] Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine
incommenſurabilis. Rationales
ergo ſunt E H, HK,
potentia ſolum commenſurabiles;
c 37. deci. [c] ac propterea EK, ex binis
nominibus eſt. Quoniam
vero A B, maius ponitur quam
CD; erit vt in antecedenti propoſ. EH, maius nomen ipſius
EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ ſibi
longitudine commenſurabilis , vel incommenſurabilis.
Si plus poſsit E H , quam H K, quadrato rectæ ſibi
commenſurabilis longitudine , cum vtrumque nomen
E H , H K , oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile
Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus
tertia . Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub
Rationali E F, & ex binis nominibus tertia E K, atque
d 57. deci. adeo & ſpatium AD, [d] Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs
ſecunda dicitur .



SI vero EH, plus poſsit quam H K, quadrato rectæ
longitudine ſibi incommenſurabilis, cum vtrumque nomen
EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali
EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex
defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpatium AD,
e 60. deci. [e] Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD; non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod oſtendendum erat .

COROL-

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neq; inter ſe eaſdẽ eſſe.

*NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam
applicatum, [a] latitudinem efficit Rationalem,* a 23. deci.
ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.

*AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad
Rationalem applicatum , [b] latitudinem efficit ex binis* b 61. deci.
nominibus primam .

*ET quadratum eius, quæ, eſt ex binis Medijs prima,
ad Rationalem applicatum , [c] latitudinem facit* c 62. deci.
ex binis nominibus ſecundam.

*QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis
Medijs ſecunda, ad Rationalem applicatum, [d] latitudinem* d 63. deci.
facit ex binis nominibus tertiam.

*AT vero quadratum Maioris ad Rationalem
applicatum , [e] latitudinem facit ex binis nominibus* e 64. deci.
quartam .

*QVADRATVM autem eius , quæ Rationale
ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum , [f] latitudinem* f 65. deci.
facit ex binis nominibus quintam .

*POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media
poteſt, ad Rationalem applicatum , [g] latitudinem* g 66. deci.
facit ex binis nominibus ſextam .

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe ; a latitudine quidẽ Mediæ , quod hæc Rationalis ſit , illæ vero Irrationales; Inter ſe autem , quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differẽtes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenarijs.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearũ Irrationalium ; nimirũ eius,

quæ

quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quę poteſt bina Media.

IN *ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe.*

IN *tertio deinde contēto propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.*

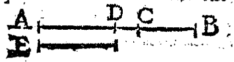
IN *quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.*

IN *quinto autem, quē reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.*

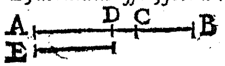
IN *ſexto vero, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.*

IN *ſeptimo denique contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.*

REPERITVR *autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadē illi, inter cuius nomina media exiſtit.*



SIT *enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomē AC; & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidiæ AD, vel DB, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundum Analogiam Arithmeticā, inter AC, CB: & E, eſſe quoq; ex binis nominibus. Quoniā .n. AC, ſuperat dimidiā AD, recta DC; & dimidia DB, ſuperat ipſam CB, eadem recta DC; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius AB, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.*



RVRSVS *quia E, cōmenſurabilis eſt longitudine toti AB, cum hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi AB, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.*

IDEM *oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere,*

SEQVVNTVR *iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadē Euclides demonſtrat de ſex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generātur, quæ in precedentibus ſeptem ſenarijs de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.*

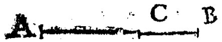
PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

73.
68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali AB, Rationalis AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB. Dico reliquā BC, Irrationalē eſſe. Quoniā .n. per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, AC: Et ſunt AB, AC, longitudine incommenſurabiles;[a] erunt



[a] 10. deci.

incommenſurabilia quadratum ex A B, & rectangulum ſub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commenſurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commenſurabilia. [a] Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex A B,) rectangulo vero ſub AB, AC, commenſurabile eſt rectangulum ſub AB, AC, bis. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum ſub AB, AC, bis contentum, incommenſurabilia ſunt, vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri demonſtrauimus. [b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarũ AB, A C, æquale rectangulo bis ſub AB, A C, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, ſit Rationale; (propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rationali ex AB, linea Rationali deſcripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Reſiduum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 16. deci.

[b] 7. ſecun.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propoſitionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

NAM cum A B, A C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles; [c] erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis

[c] 37. deci.

binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Aufertur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

74.
69.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR a Media AB, Media A C, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB. ſitque rectangulum ſub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam. n. AB, AC, potentia ſunt commenſurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commenſurabilia; [a] atque adeo & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex A C. Eſt autem quadratum ex A C, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum ſub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis ſub AB, AC, Rationale. Igitur incommenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis ſub AB, AC. [b] Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale ſit rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis ſub A B, AC, vna cum quadrato ex BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis ſub A B, A C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia ſunt. Exiſtente ergo rectangulo bis ſub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex B C, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur

[a] 16. deci.

[b] 7. ſecun.

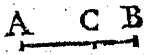
[c] 17. deci.

poſt detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, vt in ſcholio ſequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propoſitio proponi hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.



a 38. deci.

CVM enim AB, AC, ſint Mediæ *potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale; erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomẽ AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima.*

THEOR. 58. PROPOS. 76.

75.
70.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

DETRAHATVR a Media AB, Media AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB, ſitque rectangulum

lum ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalẽ. Quoniam. n. quadrata ex AB, AC, potentia cõmenſurabilibus commenſurabilia ſunt; [a] erit & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile: Eſt autem vtrũque ipſorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compoſitum ex ipſis, vtrique commenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia rectangulũ ſub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis ſub AB, AC, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Mediũ. [b] Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC, æquale ſit rectãgulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, quod etiam Medium eſt, quadrato ex BC. [c] Medium auté non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratũ ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & ipſa recta BC, Irrationalis. Vocetur auté Mediæ Apotome ſecũda, quoniã relinquitur poſt detractionem minoris nominis eius, quę ex binis Medij ſecunda, a maioris nomine, vt ex ſcholio ſequenti apparebit. Si igitur Media Media auferatur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 16. deci.

b 7. ſecun.

c 27. deci.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuiſſet proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

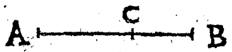
QVONIAM .n. AB, AC, Mediæ *ſunt potentia tantũ commenſurabiles, continentq;* Medium; [d] *erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis* Medijs *ſecunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC,* Media *Apotome ſecunda.*

d 39. deci.

76.
71.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidē ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.



DETRAHATVR a recta AB, recta AC, potētia ipſi AB, incommenſurabilis; Sit autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam B C, Irrationalem eſſe. Quoniam.n. compoſitū ex quadratis rectarū AB, AC, Rationale eſt; rectangulum vero ſub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & ei commēſurabile, hoc eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, Medium, hoc eſt, Irrationale; [a] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub A B, A C. [b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis ſub A B, A C, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17 huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile erit. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. [c] Igitur quadratum ex BC, illi incōmenſurabile, Irrationale eſt, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autē Minor, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineę Maioris, a maiori nominę, vt in ſcholio ſequēti dicemus. Si igitur a recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 10. defin.

[b] 7. ſecun.

[c] 10. defin.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium: [a] *erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ vocatur* Maior, *eiuſq; maius nomen AB, minus autem A C. Auferetur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur* Minor BC.

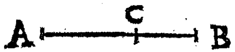
[a] 40. deci.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

77.
72.

SI a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autē ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam.n. compoſitū ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub AB, A C, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub



a 10.defin. AB,AC,Rationale; a erit compoſitum ex quadratis re-
ctarum AB, A C, incommenſurabile rectangulo bis ſub
b 7. ſecun. AB, A C, b Eſt autem compo
ſitum ex quadratis rectarum
AB, A C,æquale rectangulo bis ſub A B, A C, vna cum
quadrato ex BC.Igitur & rectangulũ bis ſub AB , AC,
vna cũ quadrato ex B C,incõmenſurabile eſt rectãgulo
c 17. deci. bis ſub AB,AC.c Sũt ergo & rectãgulũ bis ſub AB,AC,
& quadratũ ex BC,incõmenſurabilia.Cũ ergo rectangu
d 10.defin. lũ bis ſub AB,AC,Rationale ſit;d erit quadratũ ex BC,
Irrationale,& recta BC,Irrationalis. Vocetur autẽ cum
Rationali Medium totum efficiens : quia eius quadratũ
additum rectãgulo bis ſub AB,AC, quod Rationale eſt,
facit totum compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC,
quod Medium exiſtit. Si igitur a recta recta auferatur
potentia incommenſurabilis exiſtens toti,quæ cum tota
faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Me-
dium ; quod autem ſub ipſis continetur,Rationale:Re-
liqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM enim AB,AC,ſint potentia incommenſurabiles,
e 41. deci. *quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis,* Me-
dium; quod autem ſub ipſis continetur,Rationale; e *erit com-*
poſita ex ipſis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac
Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus autem
AC. Aufertur igitur minus nomen AC, a maiori AB, vt
BC, cum Rationali Medium *totum efficiens relinquatur.*

THEOR. 61. PROPOS. 79.

78.
73.

SI a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC,
potentia ipſi AB,incommenſurabilis; Sitque tam com-
poſitũ ex ipſarum quadratis, quam
rectangulum ſub ipſis Medium,
incommenſurabileque compoſito
ex ipſarum quadratis. Dico reli-
a 7. ſec. quam BC, eſſe Irrationalem. a Quoniam enim compoſi-
tum ex quadratis rectarum AB, AC,æquale eſt rectangu
lo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, ſuperabit
compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Me-
dium ponitur,rectangulum bis ſub AB, AC,quod ex co
roll.propoſ.24. huius lib. Medium etiam eſt, (cum Me-
dio,quod ſub AB, AC,continetur,ſit commenſurabile)
b 17. deci. quadrato ex BC. b Medium autem non ſuperat Medium
Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt.
Ergo Irrationale, & recta ipſa BC, Irrationalis. Voce-
tur autem cum Medio Medium totum efficiẽs,quia eius
quadratum cum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Me-
dium eſt, facit totum cõpoſitum ex quadratis rectarum
AB, AC,quod Medium etiam eſt. Si igitur a recta recta
auferatur,&c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuiſſet hoc theorema.

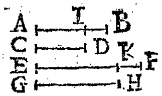
SI a maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Mediũ totum efficiens.

QVONIAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, *& rectangulum ſub ipſis* Medium, *incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum; [a] erit compoſita ex illis Irrationalis, quæ bina* Media *potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus A C. Aufertur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum* Medio *Medium totum efficiens.*

[a] 42. deci.

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & viciſsim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter ſecũdam magnitudinem & quartam.



SINT quatuor magnitudines A B, C D, EF, *GH, ſitq; I B, exceßus inter AB,* C D, *æqualis exceßui* KF, *inter* EF, *GH. Dico eundem eſſe exceſſum inter* A *B, EF, qui eſt inter* CD, *GH. Quoniã. n. IB, exceſſus eſt inter AB, & CD; erit* A *I, ipſi* C *D, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipſi GH. Idem igitur exceſſus erit inter* AI, *& EK, qui inter* CD, *& GH; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus, qui inter A I, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter AB, &* EF, *qui inter CD, & GH. quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

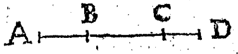
79.
74.

APOTOMAE vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam rationalẽ non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis Si enim fieri poteſt, cõgruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia B C, Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia cõmenſurabilis,

ſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt AC, BC, potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis ſub A C, BC, qui inter compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis ſub A D, BD; (ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum A C, BC, rectãgulum bis ſub AC, BC, quadrato ex AB;[a] quòd compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale ſit rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compoſitũ ex quadratis rectarũ A D, B D, ſuperat rectangulum bis ſub AD, BD, quadrato eodẽ ex AB;[b] cum & compoſitum ex quadratis rectarũ AD, BD, æquale ſit rectangulo bis ſub AD, BD, vna cum quadrato ex AB.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, DB. Eſt autem exceſſus inter illa cõpoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quod vtrũq; Rationale ſit. (Nam cum AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum cõmenſurabiles; erũt earum quadrata, Rationalia, & cõmenſurabilia.[c] Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; illorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtẽdemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ſpatium Rationale eſt.[d] Et quia rectangulum ſub A C, B C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis ſub AD, B D.[e] Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub AD, BD, Rationale ſpatium non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB,

alia



a 7. ſecun.

b 7. ſecun.

c 61. deci.

d 22. deci.

e 27. deci.

alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia tãtum commenſurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

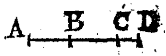
80.

75.

MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipſi congruat B C, Media toti A C, potentia ſolum commenſurabilis, & rectangulum ſub A C, B C, ſit Rationale. Dico ipſi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri poteſt, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media eſt potentia ſolum ipſi A C, commenſurabilis;[a] erit & A C, Media, cum illi ſit commenſurabilis. Mediæ ergo ſunt A C, B C, potentia tantum commenſurabiles. Quoniã vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, vt in propoſ. præcedenti oſtenſum eſt: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ex ſcholio propoſitionis 27. huius lib. ſpatium Rationale; quod vtrũq; ſit Rationale. (cum enim rectangulum ſub A C, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis ſub A C, BC, illi commenſurabile, Rationale. Atque eadẽ ratione Rationale erit rectangulum bis ſub AD, BD.) Igitur & exceſſus inter compoſitũ ex quadratis rectarum A C, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale eſt. Et quoniam rectæ A C, BC, Mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erunt & ipſarum

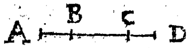
quadra-



a 24. deci.

a 16. deci. b 27. deci.

quadrata Media,& commenſurabilia. a Igitur & compoſitum ex ipſis utrique ipſorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Medium, ex coroll. propoſ. 24 huius lib. Non aliter quoque Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD. b Medium autem non ſuperat Mediũ Rationali. Igitur exceſſus inter cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale nõ eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti ſit potenria ſolum commenſurabilis, contineatq; cũ tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.



81.
76.

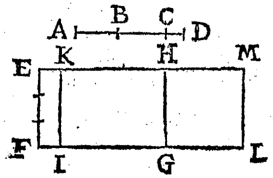
THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIAE Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

c 45. prim. d 7. ſecun.

SIT Mediæ Apotome ſecũda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commenſurabilis,& rectangulũ ſub A C, B C, ſit medium. Dico ipſi A B, aliam mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatque cumtota Mediũ. Si enim fieri poteſt; cõgruat ipſi alia BD, media toti AD, potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, c ad quam applicetur rectangulum E G, æquale compoſito ex quadratis rectarum A C, B C, & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. d Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum

cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur ſub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur ſub AD, BD. Et quoniam AC, B C, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; (cum enim B C, Media ponatur, a erit & A C, ipſi potẽntia cõmenſurabilis, Media) erunt & earũ quadrata Media, & cõmenſurabilia. b Ergo & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtriq; eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cum applicetur ad Rationalem EF, c erit EH, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem KI, d erit KH, Rationalis ipſi KI, hoc eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectãgulum ſub AC, BC, vt oſtendimus lemmate 3. ad propoſ. 19. huius lib. e erit quadratum ex AC, incõmenſurabile rectãgulo ſub AC, BC. Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata commenſurabilia f. Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique ipſorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile eſt eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipſi KG, incommenſurabile eſt, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus. g Rectæ igitur EH, KH, eãdem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommẽſurabiles ſunt: Sed & Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potẽtia tantum commenſurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commenſura-



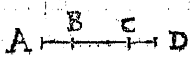
a 24. deci.
b 16. deci.
c 23. deci.
d 23. deci.
f 10. deci.
g 16. deci.
h 10. deci.

[a] 74. deci. ſurabilis ipſi EH, [a] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonſtrabimus EK, Apotomen eſſe, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potẽtia ſolum commenſurabilis exiſtens toti; quod eſt abſurdum. Vnam enim tantum congruere, [b] demonſtratum eſt. Igitur mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. [b] 80. deci.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

82. 77.

MINORI vna tantum congruit recta linea potẽtia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium.



SIT Minor A B, & illi congruens BC, toti AC, potẽtia incõmenſurabilis, faciẽsq; compoſitũ ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale, & rectangulum ſub A C, B C, Medium, Dico ipſi A B, aliam non cõgruere, quæ eadem præſtet. Sit enim, ſi fieri poteſt, alia congruens B D, toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulum ſub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propoſ. 80, demonſtratum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, B C, & cõpoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD; Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius libri; quod vtrũque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulũ bis ſub AD, BD, ſpatium

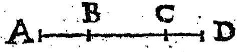
eſt Rationale. ſed & non Rationale eſt. Cũ enim rectangulum ſub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D. [a] Quare vnum non non ſuperabit alterum Rationali.) Quod eſt abſurdum. [a] 27. deci. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, facienſq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam non cõgruere, quę hæc eadem faciat.



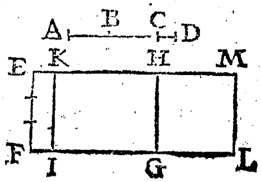
Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, facienſq; compoſitum quidem ex quadratis rectarũ AD, BD, Medium, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD,BD. Eſt autẽ exceſſus inter hæc rectangula,ſpatiũ Rationale,vt in propoſ. 81.demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa cõpoſita,ſpatiũ Rationale eſt: ſed & nõ Rationale eſt; cũ vtrumq; ſit Mediũ. [a] Medium,n. Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdũ. Non ergo ipſi AB,alia recta,quam BC,congruet potentia toti incommenſurabilis,&c. Quare ei,quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 27. deci.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

84.
79.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum cõgruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciẽs & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium,incommenſurabileq; cõpoſito ex ipſarum quadratis.



SIT recta AB,cum Medio Medium totum faciens, ipſi vero congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensq; & compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC,Medium, & rectangulum ſub AC,BC, Mediũ, incommenſurabileq;compoſito ex quadratis rectarum AC,BC. Dico ipſi AB, aliã non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si.n.fieri poteſt, cõgruat ipſi recta alia B D, toti AD,potẽtia incõmenſurabilis, ita vt & compoſitũ ex quadratis rectarũ AD, BD, Mediũ ſit,& rectãgulum ſub AD, BD, Medium quoque,ac incommenſurabile cõpoſito ex quadratis rectarum AD, BD. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ.82.quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium eſt; erit etiam

EG,illi æquale, Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis eſt, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt;erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH,Rationalis eſt,longitudine ipſi EF, incommenſurabilis. Et quoniã KG, commenſurabile eſt rectangulo ſub AC, BC, cum illud huius ſit duplum; at rectangulum ſub AC,BC,incommenſurabile ponitur compoſito ex quadratis rectarum A C, B C; [c] erit quoque K G, eidem compoſito, hoc eſt, ipſi EG,incommenſurabile; ac propterea rectæ E H, K H, eandem habentes cum E G, K G, rationem, [d] longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commenſurabilis ipſi E H; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens K H. Non aliter oſtendemus EK, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe K M. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit, &c. Quod eſt abſurdum. [f] Vnam enim tantum congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 23. deci.
[b] 23. deci.
[c] 14. deci.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 80. deci.

DEFINITIONES

TERTIAE.

EXPOSITA Rationali,& Apotoma;ſi tota plus poſsit,quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

I I.

Si vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

I I I.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſsit, quam cõgruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

I I I I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

V I.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

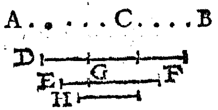
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarũ, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86. 85.

INVENIRE primam Apotomen. 80.

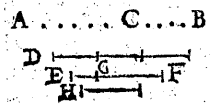
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri docuimus, quorũ exceſſus AC, non ſit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratũ, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF. Eritque EF, cũ cõmenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, eſſe primam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, cõmenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neq; quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine re-



[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

ctæ EF, GF. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia tantum commenſurabiles;[a] atque idcirco reliqua EG, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſsit enim recta EF, plus quã recta GF, quadrato H. Et quia eſt, vt numerus AB, ad numerũ AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF; erit per conuerſionẽ rõnis, vt AB, ad CB, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex H. Habent autẽ AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [b] Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur tota EF, plus poteſt, quam cõgruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commẽſurabilis; eſtque tota eadem EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

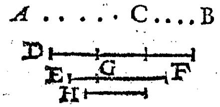


86. 81.

PROBL. 20. PRPOS. 87.

INVENIRE ſecundã Apotomẽ.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. præcedenti; expoſitaq; Rationali D, ſumatur ei longitudine commenſurabilis GF; eritque GF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius libri. Dico EG, eſſe ſecundam Apotomen. [c] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ GF, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo GF, ſit oſtenſa Rationalis; erit quoq; EF, Rationalis. Quia vero numeri BC, AB, atq; adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati;[a] erunt GF, EF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt GF, EF, potentia ſolum commenſurabiles; [b] Ideoque EG, reliqua, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſsit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Qm̃ ergo eſt vt AC, ad AB, ita quadratũ ex GF, ad quadratũ ex EF; & conuertẽdo, vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF: Oſtendemus iam, vt in antecedenti propoſ. rectam H, ipſi EF, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus poſsit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, ſitque congruens GF, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis; erit EG, ex defin. ſecunda Apotome. Inuenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum.



[a] 9. deci.

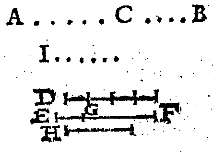
[b] 74 deci.

87. 82.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

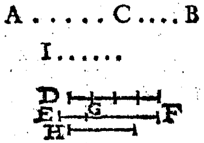
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. 86. ſumatur alius numerus I, vt in propoſ. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratũ ex D, ad quadratũ ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius libri. [c] Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionẽ habentia, quam numeri I, & AB, commenſurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [d] erunt rectæ D, & EF, longitudine incommenſurabiles. Rurſus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario propoſ.



[c] 6. deci.

[d] 9. deci.

propoſ.6. huius lib. Dico EG, eſſe tertiam Apotomen. a 6. deci. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & G F, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB, AC, atq; adeo & quadrata ex EF, GF, b 9. deci. proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incommenſurabiles.. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi ſolum commenſurabilis; c 74. deci. [c] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniã.n. eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quã numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, d 9. deci. proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [d] Sunt ergo rectæ D, & G F, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H; Oſtendemuſque, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi E F, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota E F, plus poſsit quam congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.



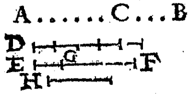
PROBL.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

88.
83.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commẽſurabilis ſit EF; eritq; propterea & E F, Rationalis. Quod ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, vt ibi, EG, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſsit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia eſt vt A B, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. a 9. deci. Quoniã igitur tota EF, plus poteſt, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, eſtque eadem tota EF, commenſurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

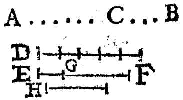


THEOR. 23. PROPOS. 90.

89.
84.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propoſ. præcedenti, fiat conſtructio, vt in propoſ. 87. hoc eſt, ſumatur GF, longitudine commenſurabilis Rationali D, &c. Oſtendemus ergo vt in propoſ. 87. EG, eſſe Apotomen. Dico & ſecundam



dam eſſe. Poſsit enim E F, plus quam GF, quadratõ rectæ H. Et quia ſimiliter, vt in propoſ. 86. oſtendemus, per conuerſionem rationis, eſſe vt AB, ad CB, ita quadratũ EF, ad quadratum ex H; erunt rurſus, vt in propoſ. antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabilis; eſtque congruens G F, Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

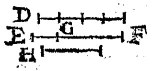
90. 85. PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE ſextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, vt in propoſ. 54. ita vt A B, ad neutrum ipſorum A C, C B; & I, ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiãt, vt in propoſ. 88. Oſtendemus ergo ſimiliter, vt ibi, D, & EF, longitudine incommenſurabiles eſſe; & E G, Apotomen eſſe. Dico & ſextam eſſe. Nam vt in propoſ. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommenſurabiles; Atque adeo neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H, quam oſtendemus, vt in propoſ. 89. longitudine incommenſurabilem eſſe ipſi E F. Igitur cum tota E F, plus poſsit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutra ipſarum E F, G F, longitudine ſit commenſurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, ſexta Apotome. Inuenimus ergo ſextam Apotomen. Quod erat faciendum.

A.......C.....B

I.........

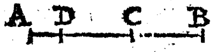


SCHO

SCHOLIVM.

SED & expeditius ſex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.[a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abſciſſa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis ſit ipſi CB: Dico AD, eſſe primam Apotomen. Quoniã.n. AC, CB, Rationales ſunt potentia tantũ cõmẽſurabiles; erunt etiã AC, DC, Rationales potentia tantum commenſurabiles.*[b] *Eſt ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus poteſt, quam CB, hoc eſt, quam DC, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis: & eſt AC, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadẽ ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicũtur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex ſecunda ſecundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex ſexta ſextã, ſi minora nomina ex maioribus auferamus.*



[a] 49. deci.

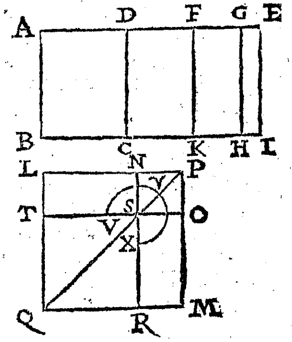
[b] 74. deci.

THEOR. 68. PROPOS. 92. 91. 86.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali AB, & Apotoma prima A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Apotomen eſſe. Sit ipſi A D, congruens DE. Erunt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia ſolum commẽſurabiles; & tota AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit,

quam



quam congruẽs DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis Secetur D E, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulũ æquale ſub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. Et quia AE, plus poteſt, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; [a] erunt rectæ AG, G E, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine cõmẽſurabilis erit: Eſt autem AE, Rationali *A*B, longitudine cõmenſurabilis. [c] Igitur & vtraq; AG, GE, ipſi AB, longitudine eſt cõmenſurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi A B, parallelis, quæ ipſi BC, productæ occurant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum ſub duabus rationalibus longitudine cõmenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraq; D F, FE, longitudine cõmenſurabilis eſt ipſi DE; & DE, longitudine incõmenſurabilis eſt Rationali AB; (Nã ſi cõmenſurabilis eſſet lõgitudine, cũ & AE, ſit eidem AB, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent AE, DE, longitudine quoque commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolum potentia commẽſurabiles:) [f] erit etiam vtraque ipſarum DF, FE, ipſi AB, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraq; DF, FE, Rationali DE, commenſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, F I, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium.

IAM vero ipſi A H, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipſi GI, æquale fiat quadratum N O, communem ha-

bens

[a] 18. deci.
[b] 16. deci.
[c] 12. deci.
[d] 20. deci.
[e] 12. deci.
[f] 14. deci.
[g] 22. deci.
[h] 14. ſecun.

---

bens cum L *M*, angulum L P M. [a] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex FE; [b] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [c] Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant rationem; erit FI, mediũ proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autem inter eadem LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: [d] Sed ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totum DI, toti gnomini VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum AI, per conſtructionem, æquale quadratis LM, NO, Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac propterea recta T S, poteſt ſpatium A C. Dico TS, Apotomen eſſe.

QVONIAM enim ſpatia A H, G I, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeo & rectæ T O, S O, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & L O, illi æquale, Medium. Incommenſurabilia ergo ſunt L O, & N O, cum vnum ſit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ T O, SO, [e] eandem rationem habentes cum LO, NO [f] longitudine incommenſurabiles ſunt; [g] Atque idcirco reliqua T S, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 26. ſexti
[b] 17. ſexti
[c] 1. ſexti
[d] 36. primi
[e] 1. ſexti
[f] 10. deci.
[g] 74. deci.

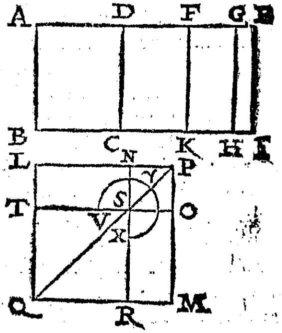
THEOR. 69. PROPOS. 93.

92.
87.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

CON-

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariã in F, & reliqua omnia conſtruãtur, vt in propoſitione præcedenti. [a]Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b]Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cum DE, eidem AB ponatur longitudine commenſurabilis; [c]eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) [d]Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidẽ AB. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commẽſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia ſolum commeſiſurabiles; [e]Atque idcirco rectangulum vtrumq; AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis; erit quoque, vt in ſcholio propoſitionis 12. huius lib. oſtendimus, eidem AB, Rationali longitudine commẽſurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. [f]Vtrumque ergo rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus longitudine



[a] 18. deci.
[b] 16. deci.
[c] 12. deci.
[d] 14 deci.
[e] 22. deci.
[f] 20. deci.

gitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen eſſe primã.

QVONIAM enim AG, GE, longitudine ſunt cõmenſurabiles, [a]erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atque adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, ſaltem potentia erunt commenſurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (oſtenſa. n. ſunt AH, GI, Media eſſe.) Media ſint. Et quoniam FI, atque adeo ſibi æquale LO, Rationale eſt, proptereaque Medio NO, incommenſurabile; [b]erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incõmenſurabiles. Cum ergo & Mediæ ſint oſtenſæ, & commenſurabiles; erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commenſurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale eſt oſtenſum; [c]erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 10. deci.
[b] 10. deci.
[c] 75. deci.

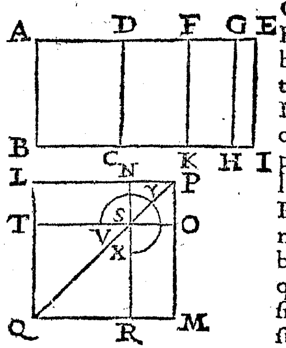
THEOR. 70. PROPOS. 94.

93.
88.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe Medię Apotomen ſecundam. Sit. n. ipſi AD, congruẽs DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.

ſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propoſ. 92. eruntque rurſus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter ſe commenſurabiles;[a] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis erit. Eſt autem A E, poſita incommenſurabilis longitudine Rationali AB. [b] Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommenſurabilis. Cũ ergo vtraque AG, GE, Rationali AE, commenſurabilis, Rationalis ſit; erunt tam AB, AG, quã AB, GE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles;[c] Ac propterea vtrumque rectangulum AH, GI, Medium erit. Rurſus quia DE, longitudine ponitur incommenſurabilis Rationali A B; erit quoque vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis exiſtens, [d] eidem AB, longitudine incommẽſurabilis. Cum ergo vtraque DF, FE, Rationali DE, cõmenſurabilis, ſit Rationalis; erunt tam A B, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [e] atque propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam T S, poſſe ſpatium A C. Dico T S, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam.



[a] 16. deci.

[b] 14. deci.

[c] 22. deci.

[d] 14. deci.

[e] 22. deci.

QVONIAM enim AH, GI, Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata L *M*, N O, illis æqualia, Media; *A*c propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia *A*H, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas oſtendimus commenſurabiles eſſe, [f] commenſurabilia ſunt; Erunt & quadrata LM, NO, commenſurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commenſurabiles, ſaltem potentia. *A*t vero quia *A*E, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles, eſtque ipſi *A*E, longitudine oſtenſa commenſurabilis GE, ipſi vero DE, commenſurabilis eſt longitudine FE; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incommenſurabiles; [a] ac propterea G I, F I, eandem rationem habentia, quam GE, FE, hoc eſt, illis æqualia NO, LO, incommenſurabilia. Quare *T*O, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commenſurabiles. Mediæ ergo ſunt TO, SO, potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale ſit ipſi FI, vt cõſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe oſtẽdimus; erit & LO, Medium.)[b] erit TS, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

[f] 10. deci.

[a] 10. deci.

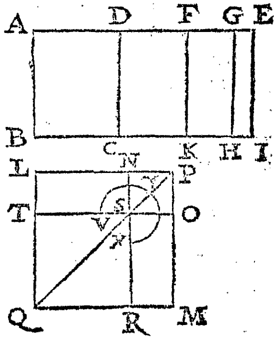
[b] 76. deci.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

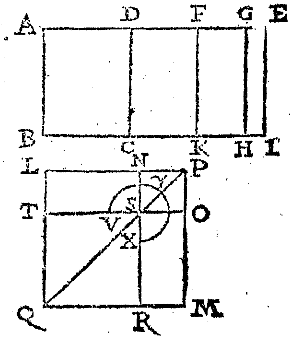
94.
89.

SI ſpatium continetur ſub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpatium AC, Minorem eſſe. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, DE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB, & eadem A*E*, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur D*E*, bifariam in F, & reliqua oĩa fiant, vt prius.



[a] Erunt ergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus poteſt, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulũ ſub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficienſque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis;[b] erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis;[c] erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles;[d] incommenſurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Minorem.



[a] 19. deci.

[b] 20. deci.

[c] 22. deci.

[d] 10. deci.

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO: Eſt autem illud oſtẽſum Rationale; erit & cõpoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Itẽ quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, cõtentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq; adeo rectæ TO, SO, potentia incommenſurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium;[e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

[e] 77. deci.

95. THEOR. 72. PROPOS. 96. 90.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quę cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propoſitionis) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB, vt in propoſ. 93. diximus;[a] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis;[b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rurſus erũt, vt in præcedenti propoſ. AH, GI, incommenſurabilia; poteritq;, vt oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS, ſpatiũ AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

[a] 22. deci.

[b] 20. deci.

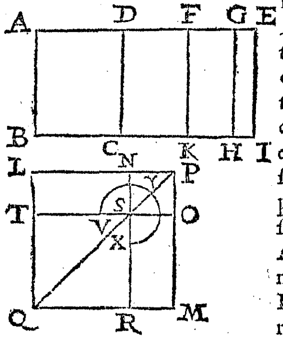
QVONIAM enim oſtenſum eſt AI, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demõſtrauimus FI, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulũ ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autẽ & TO, SO, potentia incommenſurabiles, vt in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis, Rationale;[c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

[c] 78. deci.

96.
91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali A B, & Apotoma ſexta AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totũ efficit. Sit.n. ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarũ AE, DE, Rationali AB, cõmenſurabilis longitudine; Et denique A E, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis eſt, [a] 22. deci. & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [a] erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; [b] 10. deci. [b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum [c] 14. deci. DI, FI, commenſurabilia ſint, [c] erit F I, ipſi AI, incommenſurabile. Iam uero demõſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

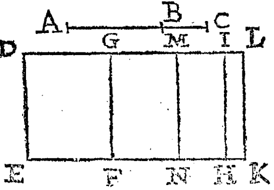
QVONIAM enim AI, Medium oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis L M, N O, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Itẽ quia FI, Mediũ oſtẽſum eſt; erit & LO, illi æquale, contentumque ſub TO, SO, Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile, vt oſtendimus; erit quoque LO, ſub TO, SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarũ TO, SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Deniq; TO, SO, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt demonſtratum. Quamobrem cum TO, SO, ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarum incommenſurabile; [a] erit reliqua TS, ea, quæ cum [a] 79. deci. Medio Medium totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum.

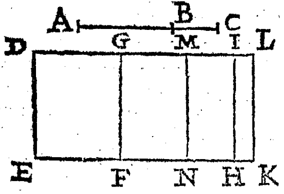
97.
92.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome A B, & ipſi congruens B C, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles: [b] 45. primi [b] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico D G, eſſe Apotomen primã. Ad eandem.n. DE, applicetur rectangulũ DH, æquale quadrato ex A C; & ad I H, aliud I K, æquale quadrato ex BC; ita vt totũ DK, æquale ſit compoſito ex quadratis rectarũ AC, BC.





a 7. ſecun. BC. a Et quoniam compoſitum ex quadratis rectarum
AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cũ
quadrato ex AB; ſi auferantur quadratũ ex AB,
& rectangulum DF; relinquetur GK, rectãgulo bis
ſub AC, BC, æquale; atque adeo diuiſa GL, biſariam in M, ductaq; MN,
ipſi DE, parallela, erit
MK, æquale rectangulo ſub AC, BC. Et quoniam AC,
BC, Rationales ſunt; erunt quoq; quadrata ex AC, BC,
b 16. deci. Rationalia; ideoque commenſurabilia. b Cum ergo &
compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipſorum
ſit commẽſurabile; erit & illud compoſitum, hoc
eſt, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad
c 21. deci. Rationalem DE, c erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine
commenſurabilis. Rurſus quia AC, BC, Rationales
ſunt potentia tantum commenſurabiles; erit rectangulũ
ſub ipſis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod
d 23. deci. cum applicetur ad Rationalem GF, d erit GL, Rationalis
ipſi GF, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilis.
Et quoniam DK, Rationale, & GK, Medium, hoc
e 10. deci. eſt, Irrationale, incommenſurabilia ſunt; e erunt rectæ
DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK,
GK, longitudine incommenſurabiles. Quare cum & Rationales
ſint demonſtratæ; erunt DL, GL, Rationales
f 74. deci. potentia tantum commenſurabiles; f Ac propterea reliqua
DG, Apotome erit. Dico & primam eſſe.

QVONIAM enim per lemma propoſ. 54. huius
lib. rectangulum ſub AC, BC, hoc eſt, MK, medium eſt
proportionale inter quadrata rectarũ AC, BC, hoc eſt,
inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia;
atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis
habentes proportionem, continue proportionales ſunt.
g 17. deci. g Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex
ML, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam
quadrata ex AC, BC, hoc eſt, illis æqualia DH, IK, commenſurabilia
h 10. deci. ſunt, h erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis
habentes proportionem, longitudine commenſurabiles.

Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales ſint, & ad
maiorem DL, applicatum rectãgulum ſub DI, IL, æquale
quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficienſq; figura
quadrata; atque ſit oſtenſa DI, ipſi IL, longitudine
a 18. deci. commenſurabilis; a poterit DL, plus quam GL, quadrato
rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quare cum
ſit oſtenſum DG, eſſe Apotomen, & totam DL, plus poſſe,
quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine
commenſurabilis, atque eandem totam commenſurabilem
eſſe longitudine Rationali DE; erit ex defin.
DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad
Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen
primam. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 75. PROPOS. 99. 98. 93.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatũ latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipſi congruens
BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commen-
b 45. primi ſurabiles, contineantque Rationale: b Et ad Rationalẽ
DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum
DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen ſecũdam
eſſe. Conſtruantur. n. eadẽ, quæ in antecedenti propoſ.
ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex
AC, BC; & GK, æquale ei, quod ſub AC, BC, bis continetur;
ac proinde MK, ei, quod ſub AC, BC, continetur
ſemel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ ſunt
potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata,
hoc eſt, illis æqualia, DH, IK, Media, & commenſurabilia;
c 16. deci. c ac proinde & totum DK, vtrique illorum commenſurabile
erit; Igitur & Medium, per coroll. propoſ.
24. huius lib. Cũ ergo DK, applicetur ad Rationalẽ DE,
d 23. deci. d erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incõmenſura

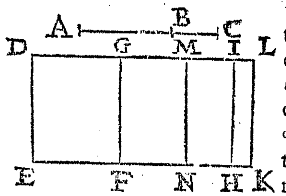
bilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE,[a] erit GL, Rationalis longitudine cōmenſurabilis ipſi DE. Quia vero DK, Medium, id eſt, Irrationale, & GK, Rationale, incommēſurabilia ſunt; [b] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [c] Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Nam ſimiliter, vt in pręcedenti propoſ. demonſtrabimus totam DL, plus poſſe, quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum cōgruens GL, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome ſecunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundā. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

99.
94.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatū, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome ſecūda AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia tantū commenſurabiles, contineantque Medium: [d] Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinē faciens DG. Dico DG, eſſe tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Oſtēdemus iā, vt in propoſ. præcedenti, DK, Medium eſſe, [e] atque adeo rectā DL, Rationalem ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Et quia



[a] *21. deci.*

[b] *10. deci.*

[c] *74. deci.*

[d] *45. primi*

[e] *23. deci.*

---

quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt, atque ob id, & eius duplum GK; [a] erit quoque GL, Rationalis ipſi DE, lōgitudine incommēſurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC; [b] erit quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. [c] Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, BC, hoc eſt, ipſi GK; [d] Atque adeo rectę DL, GL, eandem habētes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſę & Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac proinde reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ. 98. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe, quàm GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit cōmenſurabilis, vt demonſtratū eſt; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratū igitur Mediæ Apotomæ ſecundę ad Rationalem applicatū, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

100.
95.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT Minor AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint, facienteſq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale;

[a] *23. deci.*

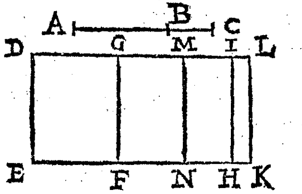
[b] *10. deci.*

[c] *16. deci.*

[d] *10. deci.*

[e] *74. deci.*

[a] 45. primi nale; rectangulum vero ſub AC,BC, *Medium*:[a] & ad Rationalem DE, applicetur ſpatium D*F*, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen eſſe quartam.



Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniã igitur compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale eſt;[b] erit DL, [b] 21. deci. Rationalis ipſi D *E*, longitudine commenſurabilis. Item quia rectangulum ſub AC,BC, atque adeo [c] 23. deci. & eius duplum GK, Medium eſt; [c] erit G L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Mediũ, [d] 10. deci. incommenſurabilia ſunt;[d] erunt DL, GL, eandem cum ipſis habentes rationem longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem Rationales. Rationales ergo [e] 74. deci. ſunt DL, GL, potentia tantum commenſurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & quartam eſſe. Quoniam enim AC,BC, potentia ſunt incommenſurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc eſt, ipſis æqualia, [f] 18. deci. DH,IK, incommenſurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo rectangulum ſub D I, I L, æquale ſit quadrato ex M L, id eſt, quartæ parti quadrati ex G L, vt in propoſ. 98. eſt de- [g] 19. deci. demonſtratum; [g] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quandoquidem ad D L, maiorem applicatum eſt rectangulum ſub *D*I,IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem D L, in partes DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum tota DL, plus poſsit, quam congruens GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitq; eadẽ tota *D*L, Rationali DE, longitudine oſtenſa commenſurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratũ igitur *Minoris* ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

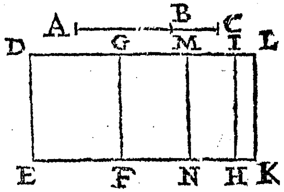
THEOR. 78. PROPOS. 102.

101.
96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum *R*ationali Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC,BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC,BC, Medium; rectangulum vero ſub iiſdem AC, BC, Rationale: [a] Et ad Rationalẽ [a] 45. primi DE, applicetur D*F*, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen quintam eſſe. Conſtruantur.n. eadẽ, quæ ſupra. Qm̃ igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, atqueadeo & illi ęquale DK, Medium eſt; [b] erit DL, *R*ationalis ipſi DE, longitudine in- [b] 23. deci. commenſurabilis. Item quia rectangulum ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum G K, Rationale eſt; [c] erit [c] 21. deci. GL, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Et quia DK, Medium ſeu Irrationale, & *G* K, Rationale, incommenſurabilia ſunt; [d] erunt DL, GL, can- [d] 10. deci. dem cum ipſis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sunt autem & Rationales oſtenſæ. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome eſt. Dico & [e] 74. deci. quintam eſſe. Eodem.n. modo, vt in antecedẽti propoſ. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe quam GL, congruentem, quadrato ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare cum congruens G L, demonſtrata ſit longitudine commenſurabilis *R*ationali D *E*; erit ex defin.

D G,

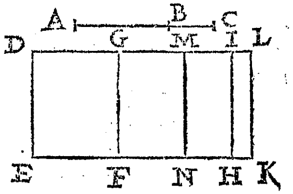


DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

102.
97.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.



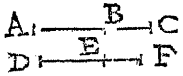
SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt A C, B C, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex quadratis rectarum A C, BC, Medium, & rectangulum ſub iiſdem AC, BC, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarũ:
[a] 45. primi [a] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, ſpatium æquale DF, latitudinem faciẽs DG. Dico D G, eſſe ſextam Apotomen. Ead.n. fiant, quæ ſupra. Quoniã igitur tã compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, quam rectangulũ ſub AC, BC,
[b] 23. deci. atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; [b] Erit tam DL, quam GK, Rationalis ipſis DE, longitudine incõmenſurabilis. Et quia rectangulum ſub AC, BC, incõmenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AC, B C; Et ſunt rectangulum ſub AC, BC, & eius duplum
[c] 14. deci. GK, commenſurabilia; [c] Erit & GK, eidem compoſito,
[d] 10. deci. hoc eſt, ipſi DK, incõmenſurabile; [d] proptereaq; rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; [a] Atq; idcirco reliqua DG, Apo- [a] 74. deci.
tome eſt. Dico eſſe & ſextam. Oſtendemus.n. ſimiliter, vt propoſ. 101. totam DL, plus poſſe, quam congruentem G L, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Cum igitur neutra ipſarum DL, GL, commẽſurabilis ſit lõgitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome ſexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

103.
98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis; & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT. Apotome AB, & ipſi congruẽs BC, ita vt AC, B C, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi A B, longitudine commenſurabilis D E. Dico & DE, Apotomen eſſe, atq; ordine eandẽ ipſi AB.



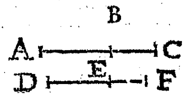
[b] 12. ſexti [b] Fiat enim vt AB, ad DE,
[c] 12. quin. ita BC, ad EF. [c] Erit ergo tota A C, ad totam D F, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad E F. Quoniam igitur AB, D E, longitudine ponuntur commenſurabiles;
[d] 10. deci. [d] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commenſurabiles longitudine. Et quia AC, BC, ſunt Rationales, erunt etiam illis commenſurabiles DF, EF, Rationales. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & ſunt AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles; erunt quoq; ex iis, quæ ad propoſ. 10. huius libri demonſtrauimus, DF, EF, potentia tantum commenſurabiles. Quare cum & Ratio-
[e] 74. deci. nales ſint oſtenſæ, [e] reliqua D E, Apotome eſt. Dico & ipſi A B, ordine eandem eſſe. Poſsit enim primum A C, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽ-
[f] 15. deci. ſurabilis: Quo poſito, [f] poterit & D F, plus quam E F,

qua

quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis. Si igitur AC, longitudine ſit commẽſurabilis Rationali expoſitæ, vt AB, ſit Apotome prima; [a] erit quoque DF, longitudine commenſurabilis Rationali expoſitę, cum tam Rationalis expoſita, quam DF, eidem AC, ſit longitudine commenſurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipſi AB. Si vero BC, ſit longitudine commẽſurabilis Rationali; erit eodem modo *EF*, Rationali longitudine commenſurabilis; *A*tque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome ſecunda. Si denique neutra ipſarum AC, BC, commenſurabilis ſit longitudine expoſitæ Rationali; [b] erit quoque neutra ipſarum *DF*, EF, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

[a] *12. deci.*

[b] *14. deci.*



POSSIT *iam* AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Quo poſito, [c] poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſtendemus DE, eſſe Apotomen quartam, quintam, vel ſextam, &c. *R*ecta ergo linea Apotomæ longitudine commenſurabilis, &c. Quod oſtendendum erat.

[c] *15. deci.*

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propoſ. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus ſcripſimus. Nimirum, ſi recta DE, commenſurabilis ſit ipſi AB, potentia tantum, eodem modo demonſtrari poſſe, (ſi loco vocis: longitudine commenſurabilis: vtamur voce: potentia tantum commenſurabilis:) & DE, Apotomen eſſe: At non poſſe inferri, illam eſſe ordine eãdem ipſi AB. Non enim ſequitur, ſi tota AC, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſita, & DF, eidem eſſe commenſurabilem lõgitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis expoſita, & DF; eidem AC, longitudine commenſurabilis eſt; ſed Rationalis quidem commenſu-

rabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt DE, illi potentia tãtum commenſurabilis, ſit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, ſecũda, quarta, vel quinta, eique conguens BC; & ſit DE, ipſi A B, *potentia tantum commenſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtendemus Apotomen eſſe, eique congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE,* A*potomen eſſe ordine eandem ipſi AB. Nam ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expoſitæ commenſurabilis longitudine;* [a] *atque adeo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt AC, &* DF. *Quare cum ſit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE;* [b] *erunt quoque AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque* AB, *DE, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda, vel quinta. Eſſet enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, atque adeo & ipſæ inter ſe. Quocirca & AB, DE, inter ſe longitudine forent commenſurabiles. quod non ponitur.*

[a] *12. deci.*

[b] *10. deci.*

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectã DE, quæ ipſi AB, *potentia ſolũ eſt cõmenſurabilis, eſſe quoq; vnã ex illis tribus, licet ordine non eadẽ ſit. Nã hoc poſito, poterit AC, plus q̃ BC, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commẽſurabilis. Cũ ergo ſit vt* AC, *ad BC, ita DF, ad EF;* [c] *poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ lõgitudine ſibi cõmenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecũda, vel tertia. Eodẽ modo ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt* AC, *plus poſſit, q̃ BC, quadrato rectæ ſibi lõgitudine incõmenſurabilis; erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quãuis ordine nõ eadẽ ipſi AB: quia rurſus, cũ ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF,* [d] *poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB,* A*potome quarta, vel quinta, vel ſexta.*

[c] *15. deci.*

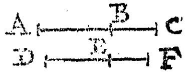
[d] *15 deci.*

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.

104.
99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine erit.



SIT *Mediæ* Apotome quæcunque A B, eique congruens B C, ita vt A C, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue lõgitudine & potẽtia, ſiue potẽtia tm̃. Dico & DE, Mediæ Apotomẽ eſſe, & ipſi A B, ordine eandem. [a] *Fiat.n.* vt A B, ad D E, ita BC, ad *EF*. [b] Erit ergo tota A C, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [c] erunt quoque BC, EF, & AC, D*F*, codẽ modo commenſurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ ſunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis commenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt AC, ad D*F*, ita BC, ad E*F*; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autẽ AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. DF, *EF*, ſolum potentia commenſurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ; [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. *Dico* & eandem eſſe ordine ipſi AB. Quoniã.n. eſt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita eſt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub D*F*, E*F*; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub AC, BC, ita quadratum ex D*F*, ad rectangulum ſub D*F*, E *F*; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex D*F*, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub D*F*, EF. Igitur cum quadratũ ex AC, commenſurabile ſit quadrato ex D F, quod rectæ AC, *D*F, oſtenſæ ſint cõmenſurabiles; [a] erit & rectangulum ſub A C, B C, rectangulo ſub D*F*, EF, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB, ſit Medię Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; [b] atque adeo & *D* E, Mediæ *A*potome prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoq; rectangulum ſub D*F*, E *F*, ei commenſurabile, *M*edium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. [c] *Ac* propterea & DE, Mediæ Apotome ſecũda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

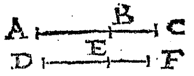
[a] 12. ſexti
[b] 12. quin.
[c] 10. deci.
[d] 24. deci.
[e] 75. vel 76. decimi.

[a] 10. deci.
[b] 75. deci.
[c] 76. deci.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

105. 116.
100.

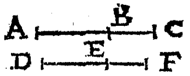
RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.



SIT Minor AB, ipſique congruens BC, *ita* vt AC, BC, potentia ſint incommẽſurabiles, facientesque compoſitum quidẽ ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulũ vero ſub iiſdẽ AC, BC, Medium. Sit autẽ DE, ipſi AB, cõmenſurabilis ſiue lõgitudine & potẽtia, ſiue potẽtia tantũ. Dico & DE, Minorẽ eſſe. *Fiant.n.* eadem, quæ ſupra, ita vt rurſus AB, BC, ad DE, EF, eandẽ habeãt rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. DF, EF, ipſis AC, BC, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potẽtia tantum. Et quoniã eſt, vt AC, ad *D*F, ita BC, ad EF; & permutando vt *A*C, ad B*C*, ita *D*F, ad EF; [d] erit vt quadratũ ex *A*C, ad quadratũ ex BC, ita quadratũ ex *D*F, ad quadratum ex EF; & cõponendo vt cõpoſitum ex quadratis rectarũ *A*C, BC, ad quadratũ ex BC, ita compoſitũ ex quadra-

[d] 22. ſexti

tis rectarum DF,EF, ad q uadratum ex EF; & permutando vt compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC,ad cō poſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC,ad quadratum ex EF. Eſt autem quadratū ex B C, commēſurabile quadrato ex EF;quod rectas BC, EF, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. [a] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, compoſito ex quadratis rectarum DF, EF, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, ex hypotheſi, Rationale. Igitur & cōpoſitum ex quadratis rectarum DF,EF,ex 9.defin.Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus rectangulum ſub AC,BC, rectāgulo ſub DF, EF, eſſe commenſurabile: ponitur autem rectangulum ſub AC,BC,Medium; Erit quoque rectāgulum ſub DF,EF,ex coroll.propoſ.24. huius lib.Medium. Et quia eſt vt AC,ad BC,ita DF,ad EF, ſuntq. AC,BC. potentia incommenſurabiles; [b] erunt etiam D F, E F, potentia incommenſurabiles. Quam ob rem cum DF,EF, potentia ſint incommenſurabiles,faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarū DF,EF,Rationale,rectangulum vero ſub ijſdem DF, EF, Medium; [c] erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commenſurabilis,&c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

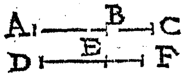
[c] 77. deci.

PROBL. 83. PROPOS. 107.

106.117.
101.

RECTA linea commēſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totū efficiens eſt.

SIT recta AB,cum Rationali Mediū totū efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles,facienteſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum ſub AC,BC, Rationale: Sit autē DE,ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus vt in antecedēti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ.24. huius lib.Medium. Rurſus vt in propoſ.105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC,BC,commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF,EF. Cum ergo illud Rationale ponatur,erit & hoc Rationale, ex defin.9. Sunt deniq; eodē modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ DF, EF, potētia incōmenſurabiles. Igitur cū DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; [a] erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



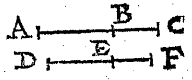
[a] 78. deci.

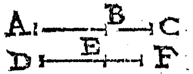
THEOR. 84. PROPOS. 108.

107.
102.

RECTA linea commēſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB,cum Medio Medium totū efficiens, & ipſi congruens BC,ita vt AC, BC, ſint potentia incōmenſurabiles,facienteſque compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectāgulum ſub ipſis Medium quoq;, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autē DE, ipſi AB, quomodolibet commenſurabilis. Dico & DE, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus





ſimiliter, vt in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Mediũ. Rurſus vt in propoſ. 105. oſtendemus, rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud ſit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propoſ. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommenſurabiles. Poſtremo quia compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum eſt; & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile rectangulũ ſub DF, EF: Sunt autem compoſitũ ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum ſub AC, BC, per hypotheſin, incommenſurabilia; erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, incommẽſurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia ſint incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis, Medium; incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis; [a] erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 79. deci.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

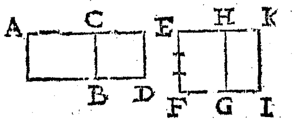
108.
103.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR a Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium reliquum AB, eſſe vel Apotomen, vel Minorẽ. Exponatur.n. Rationalis EF, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipſi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipſi CD, ita vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale eſt; [a] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia HI, Medio CD, æquale Medium eſt, [b] erit HK, Rationalis, ipſi EF, lõgitudine incõmenſurabilis. Itaque cum EK, quidem ſit longitudine cõmenſurabilis ipſi EF; at HK, eidem EF, longitudine incõmenſurabilis, [c] erunt EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles: [d] proptereaque reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus põt EK, quam HK quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc eſt, ſpatium AB, ſibi æquale, [e] Apotome eſt. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectę ſibi longitudine incommenſurabilis, cum tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potẽs ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [f] Minor eſt. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

[b] 45. primi.

[a] 21. deci.
[b] 23. deci.
[c] 13. deci.
[d] 74. deci.
[e] 92. deci.
[f] 95. quin.

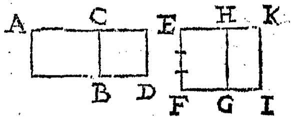


THEOR. 86. PROPOS. 110.

109.
104.

RATIONALI a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Rationale CD.
Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel
Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali
Medium totum efficit. Eadem.n.conſtruãtur, quæ ſupra.



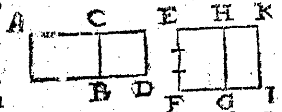
Et quia E I, Medio AD,
a 23. deci. æquale, Medium eſt; [a]erit
E K, Rationalis ipſi EF,
longitudine incommen-
ſurabilis. Item quia HI,
æquale Rationali CD,
b 21. deci. Rationale eſt; [b] erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudi-
ne commenſurabilis. Itaque cum H K, quidem ipſi E F,
ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidem EF, lon-
c 13. deci. gitudine incommenſurabilis; [c] erunt HK, EK, longitu-
dine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales
d 74. primi ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [d] Ac proin
de reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut
igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi lõ
gitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si
EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitu
dine commenſurabilis, cum congruens HK, oſtenſa ſit
longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex de-
fin. EH, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium
EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſecun-
e 93. deci. da EH, hoc eſt, ſpatiũ AB, illi æquale, [e] Mediæ eſt Apo
tome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadra
to rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum con-
gruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine
Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta
igitur potens ſpatium EG, contẽtum ſub Rationali EF,
& Apotoma quinta E H, hoc eſt ſpatiũ illi æquale AB,
[f] eſt ea, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Quam
ob rem Rationali a Medio detracto, &c. Quod oſtenden
dum erat.

110. THEOR. 87. PROPOS. 111.

105. MEDIO a Medio detracto, quod
incom-

ſit incommenſurabile toti; reliquæ duæ
Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome
ſecunda, vel cum Medio Medium totum
efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Medium CD,
quod incommenſurabile ſit toti AD. Dico rectam, quæ
reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomẽ
ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum ef-
ficit. Cõſtructis enim iiſdẽ,
quæ ſupra; quoniã EI, HI,
Mediis AD, CD, æqualia
Media ſunt; [a] erũt EK, HK, a 23. deci.
Rationales ipſi EF, longitu



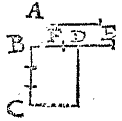
dine incommenſurabiles. Et quia AD, CD, hoc eſt, EI,
HI, ponuntur incommenſurabilia; [b] erunt EK, HK, ean b 10. deci.
dem cum illis habentes rationem, longitudine incom-
menſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt
potentia tantũ cõmenſurabiles; [c] Ac propterea reliqua c 74. deci.
FH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK,
plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine
commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt
EK, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽ
ſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF,
longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin.
EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatiũ EG,
contentũ ſub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc
eſt, ſpatium AB, illi æquale; [d] Mediæ Apotome eſt ſecun d 94. deci.
da. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſi-
bi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ipſarum
EK, HK, Rationali EF, ſit longitudine commenſurabi
lis, vt demonſtrauimus; erit ex defin. E H, Apotome ſe-
xta. Quam ob rem recta potens ſpatium EG, contentum
ſub Rationali EF, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpa-
tium AB, illi æquale, [e] eſt ea, quæ cum Medio Medium e 97. deci.
totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod
demonſtrandum erat.

111. 106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT *A*potome *A*, quæcunque. *D*ico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, A, aliqua ex binis nominibus. *E*xpoſita autē Rōnali BC, a 45. primi [a] applicetur ad BC, rectangulum C*D*, æquale quadrato b 98. deci. ex A. Quoniā igitur A, Apotome eſt; [b] erit latitudo BD, *A*potome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum cōmenſurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectę ſibi longitudine [c]ommenſurabilis, & ipſa BE, Rationali BC, commenſurabilis erit lōgitudine. Rurſus quia A, ponitur eſſe quo c 61. deci. que ex binis nominibus; [c] erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomē B F. Erunt igitur ex defin. eius, quę ex binis nominibus prima eſt, B*F*, FD, *R*ationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque BF, plus quam F D, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, & ipſa B F, *R*ationali BC, lōgitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine ſit commenſurabilis ei- d 13. deci. dem BC; [d] erunt quoque *BE*, BF, inter ſe commenſurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, ſit longitudine commēſurabilis parti B*F*, erit & eadem BE, reliquę parti *F*E, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, *R*ationalis ſit, & *F*E, *R*ationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, *F* E, longitudine commenſurabilium, ipſa B E, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi D E; (quod B E, *D* E, *R*ationales ſint potentia ſolum commenſu- e 14. deci. rabiles) [e] erit quoque altera *FE*, eidem *D*E, incommenſurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, *D* E, *R*ationalis eſt oſtenſa. Rationales ergo ſunt *F*E, *D*E, potentia ſolum commenſurabiles. Quare reliqua FD, [a] Apotome eſt; *A*tque adeo Irrationalis. a 74. deci. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo *A*, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod ddmonſtrandum erat.



COROLLARIVM.

EX demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eſſe easdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, [b] *latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.* b 23. deci.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, [c] *latitudinem efficit Apotomen primam.* c 98. deci.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, [d] *latitudinem efficit Apotomen ſecundam.* d 99. deci.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum. [e] *latitudinem efficit Apotomen tertiam.* e 100. deci.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, [f] *latitudinem efficit Apotomen quartam.* f 101. deci.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [g] *latitudinem efficit Apotomen quintam.* g 102. deci.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [h] *latitudinem efficit Apotomen ſextam.* h 103. deci.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; inter

inter ſe autem, quod ordine non ſint eadē Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & a Media, & inter ſe ſe differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtrauimus, Apotomen eandem non eſſe, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextam: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarū quinque Irrationaliū, quæ ipſam ſequūtur, ad Rationalē applicata, latitudines efficiūt ex binis nominibus primam, ſecundā, tertiam, quartam, quintā, ac ſextam; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam expoſita tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe ſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus; Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.

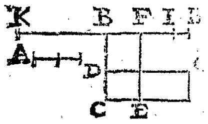
4. Ex binis Medijs ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113. 112. 9.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus,

& in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ ſit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.

SIT Rationalis *A*, & ex binis nominibus BC, cuius maius nomen B D;[a] & ad B C, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex *A*, latitudinem faciens BF. Dico BF, eſſe *A*potomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus BD, DC, ipſius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc *A*potomẽ BF, eſſe ordine eandem ipſi BC, ex binis nominibus.[b] *A*pplicetur enim rurſus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; ſitque ipſi DG, æqualis B H. Et quoniam æqualia ſunt BE, CG;[c] erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc eſt, ſibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Eſt autem BD, maior, quam DC. Igitur & HF, maior eſt, quam FB. Ponatur FI, ipſi FB, æqualis;[d] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc eſt, ad ſibi æqualẽ BF, ita FK, ad BK. Oſtenſum eſt autem eſſe vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles.[e] Igitur & FK, BK, potentia ſolum commenſurabiles ſunt.



RVRSVS quia eſt vt HF, ad BF, ita FK, ad BK,[f] erũt quoque HF, FK, antecedentes ſimul, nempe tota HK, ad BF, & BK, conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam FK, vt FK, ad BK. Ac propterea FK, media proportionalis eſt inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, ſecunda. Quia vero CG, cum Rationale ſit, (eſt enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum,[g] facit DG, latitudinem

[a] 45. primi

[b] 45. primi

[c] 14. vel 16 ſexti.

[d] 12. ſexti.

[e] 10. deci.

[f] 12. quinti

[g] 21. deci.

---

dinem Rationalem, ipſi DC, longitudine commenſurabilem; Erit quoque HB, ipſi DG, æqualis, Rationalis & longitudine cõmenſurabilis ipſi DC. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoque vt B D, ad DC, ita HK, ad FK.[a] Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex FK. At quadratum ex B D, commenſurabile eſt quadrato ex DC, (quod rectæ B D, D C, ſint Rationales potentia commenſurabiles, cum ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus.)[b] Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratũ ex FK, ita recta HK, ad BK.[c] Igitur longitudine commenſurabilis eſt HK, ipſi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & BK, ipſi HK, commenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cũ ergo oſtenſa ſit FK, ipſi BK, potentia ſolum commenſurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales ſint, & potentia tantum oſtenſæ commenſurabiles,[d] erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens BK. Quod eſt primum.

QVONIAM vero oſtenſum eſt eſſe rectam H K, totam parti BK, longitudine commenſurabilem,[e] erunt propterea & BK, BH, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cum ergo BH, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi DC; erit quoque BK, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum eſt eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad B K: Sunt autem modo DC, BK, oſtenſæ longitudine commenſurabiles;[f] Erunt quoque BD, FK, commenſurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipſi BD, & BK, ipſi DC, longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipſius B C, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.

[a] 22. ſexti

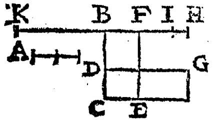
[b] 10. deci.

[c] 10. deci.

[d] 74. deci.

[e] 16. deci.

[f] 10. deci.



ITEM quia demonſtrauimus eſſe vt BD,ad DC,ita FK,ad BK; erũt idcirco Apotomę nomina FK, BK,in eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipſius B C, quæ eſt ex binis nominibus. Quod eſt tertium.

POSTREMO vel BD,plus poteſt,quam DC,quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incõmenſurabilis. Si plus poteſt BD, quã DC,quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis;cum ſit vt BD,ad DC,ita FK,ad BK;[a] poterit quoque FK,plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis:Et ſi BD, plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis;poterit & FK,plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Et ſi quidẽ BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commẽſurabilis; erit & FK,quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si vero DC, ſit Rationali commẽſurabilis lõgitudine;erit & eadem ratione BK,eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si denique neutra ipſarum BD, D C, ſit Rationali longitudine commenſurabilis;[b] erit quoque neutra ipſarum FK, BK, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF,ipſi BC,ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertijs. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 15. deci.

[b] 14. deci.

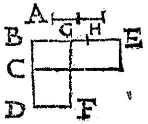
113.
o.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadẽ proportione;

& adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eũdem habet ordinẽ, quem ipſa Apotome.

SIT Rationalis *A*, & *A*potome B C, cui congruat C D,[a] & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex *A*, latitudinẽ faciens BE.



Dico BE, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipſam BE, ex binis nominibus, eſſe ipſi BC, Apotomæ ordine eandem. [b] *A*pplicetur enim rurſus ad BD,totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc eſt, ipſi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam B F, C E, æqualia ſunt;[c] erit vt BE,ad BG,ita BD,ad BC;& per conuerſionem rationis, vt BE,ad GE, ita B D,ad C D. Secetur quoque E G, ad H, ſecundum proportionem B E, ad G E, ex ijs, quæ in ſchol.propoſ. 10. lib. 6.conſcripſimus;vt ſit EH,ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur eſt vt BE, tota ad GE,totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam;erit quoque BH,reliqua ipſius BE; ad HE, reliquã ipſius GE, vt tota BE,ad totam GE: Erat autem vt BE, ad GE; ita EH, ad HG. Erit igitur quoque vt BH, ad HE, ita EH,ad GH; atque adeo HE, media proportionalis eſt inter BH, GH. Quare erit vt BH, prima ad GH,tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE,ſecunda,per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt BD, ad CD, ita BE,ad GE,hoc eſt, BH, ad HE:& ſunt BD, CD, cum ſint nomina *A*potomæ BC, Rationales potentia tantum commenſurabiles,[d] Erunt quoque BH,HE,potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex BH,HE,commenſurabilia. Igitur rectę BH,GH,eandem habentes rationem cum quadratis ex BH,HE, vt demonſtrauimus,[e] lõgitudine ſunt commenſurabiles; *A*c propterea tota BH, longitudine commenſurabilis exiſtens parti G H, commenſurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll.

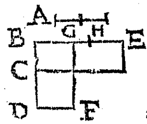
[a] 45. primi

[b] 45. primi

[c] 14. vel 16. ſexti.

[d] 10. deci.

[e] 10. deci.



propoſ. 16. huius lib. At vero cum B D, Rationalis ſit, nempe maius nomen Apotomæ BC;& rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; [a] erit latitudo BG, Rationalis commenſurabilis longitudine ipſi BD. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & B H, eidem BD, Rōnali commēſurabilis eſt longitudine, atque adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem BH, BG, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero BH, HE, oſtenſę ſunt commenſurabiles potentia tantū, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; [b] Ac propterea BE, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum.

QVONIAM vero oſtendimus eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD; atq; adeo permutādo BH, ad BD, vt HE, ad CD; Oſtenſa eſt autem BH, ipſi BD, longitudine commenſurabilis; [c] erit quoque HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertiū.

POSTREMO vel B D, plus poteſt quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, [d] poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis lōgitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam B H, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem B D, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero C D, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ; [a] erit quoq; neutra ipſarū BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis, atque tertijs definitionibus, ipſa BE, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ BC. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

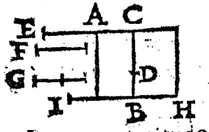
[a] 21. deci.
[b] 37. deci.
[c] 10. deci.
[d] 15. deci.

[a] 14. deci.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

114. o.

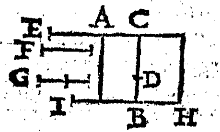
SI ſpatiū cōtineatur ſub Apotoma, & ea, quę ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.



CONTINEATVR ſpatiū A B, ſub Apotoma AC, & ſub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, cōmenſurabilia ſint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Poſsit autem recta F, ſpatiū AB. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rōnali G, [b] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [c] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commenſurabilia ſunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeo vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. [d] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam A C, vt tota HI, ad totam CE: [e] Commenſurabilis autem eſt longitudine HI, ipſi C E, quod vtraque

[b] 45. primi
[c] 113. decimi.
[d] 19. quin.
[e] 12. deci.

HI, CE, commenſurabilis fuerit longitudine ipſi CD. [a] Igitur & BH, ipſi AC, longitudine eſt commenſurabilis; [b] Atque idcirco & HC, ipſi B A, commenſurabile erit, [c] cum ſit vt HB, ad AC, ita H C, ad B A: Sed H C, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale eſt. Igitur & BA, illi cõmenſurabile, Rationale erit, proptereaq; & recta F, ipſum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis. Quod erat demõſtrandum.



[a] 10. deci.
[b] 10. deci.
[c] 1. ſexti.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, fieri poſſe, vt ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus. Nam ſpatium AB, contentum ſub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales ſunt, oſtenſum eſt Rationale eſſe.

SCHOLIVM.

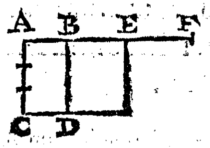
IN proximis autem tribus propoſitionibus intelligenda ſunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commenſurabilia eſſe longitudine. In prioribus enim duabus, lõgitudine oſtenſa ſunt eſſe cõmenſurabilia; In poſteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, ſi nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commenſurabilia ponantur. Id quod facile ex demonſtrationibus harum trium propoſitionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116.

115.
107.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, et nulla alicui antecedentium eſt eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem ſit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propoſ. 112. huius lib, Expoſita enim Rationali AC, cõtineatur ſub AB, Media, & Rationali AC, ſpatium AD. Eſt ergo AD, ſpatium ſub Rationali AC, & Irrationali AB, contentũ, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſsit ipſum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non eſſe eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propoſ. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, [a] latitudinem faciat Rationalem ipſi AC, longitudine incommenſurabilem: Et quadrata reliquarũ duodecim Irrationaliũ, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt conſtat ex propoſ. 61.62.63.64.65.66.98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad eandẽ Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem faciat differentem a latitudinibus, quas quadrata illarũ tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



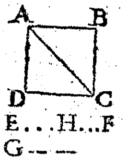
[a] 23. deci.

QVOD ſi cõpleatur rectãgulum DE; erit & hoc cõtentũ ſub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lẽmate propoſ. 38. Poſſit ergo ipſum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus EF, nõ eſſe eandem

eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi BE. Hoc autem manifeſtum eſt, cum quadratum ipſius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius BE, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes a BE, vt demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

118. THEOR. 93. PROPOS. 117.

7. PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.



SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri AB. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; ſintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, ([b] Cum enim quadrata habeant ſuorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum ſint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum eſt quadrati ex AB, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariã poſſit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe EF, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſe ipſum multiplicans producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; [a] eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod eſt abſurdum. oſtenſus eſt enim par.) Quia vero EF, & G, in ſua proportione minimi, [b] inter ſe primi ſunt; & EF, oſtenſus eſt par, erit G, impar. (Si enim par etiam eſſet, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igtur numerus EF, duplus eſt numeri EH; [c] & quadrati habẽt proportionẽ laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partiũ 4. eſt quadratus ex EF, taliũ 2. erit quadratus ex G; & taliũ 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſupra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus. quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter AC, lateri AB. Igitur incommenſurabilis longitudine.

ALITER. Sit ſi poteſt fieri, diameter AC, commenſurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum ſit quadrati ex AB; ſit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam eſt demonſtratum, quadratus ex EF, duplus eſt quadrati ex G,

[a] 5. deci.

[b] 20. ſexti, & 11. octaui.

[a] 29. noni

[b] 24. ſepti.

[c] 11. octaui

ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; [a] ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cũ ergo & G, ſe ipſum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Qnod eſt abſurdum. Non ergo commenſurabilis eſt diameter AC, longitudine lateri AB. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommẽſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1 demonſtrata à nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia ſumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. [b] ſolum tertius ab vnitate quadratus eſt, & cæteri omnes vnum intermittentes; quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non ſit; erunt ſolum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; ([c] alias & 2. quadratus eſſet.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [d] Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

HOC etiam theorema aliter demonſtrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex ſequentibus Stereometriæ libris pendet, vt merito omitti poſſet. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſuralitatem omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinent; viſum eſt, eam paucis explicare, aſſignando more noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.

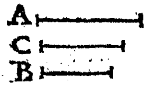
[a] 14. octaui

[b] 10. noni

[c] 24. octaui

[d] 9. deci.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter quas media proportionalis ſit C. Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita eſt figura rectilinea quæuis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem, ſimiliterque poſitam ſuper C; & ſunt A, & B, longitudine incommenſurabiles; [a] erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper A, & C, incommenſurabiles.



RVRSVS [b] quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, deſcripta: Quadrata autem hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque poſitæ, proportionem habent, quam rectæ A, & B, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. [c] Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam rectæ A, B: Sed rectæ A, B, incommenſurabiles ſunt longitudine. [d] Igitur & circuli diametrorum A, C, incommenſurabiles ſunt.

IAM vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata eiuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ ſuper A, C, [c] habebunt pyramides, atque priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc eſt, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommenſurabiles ſint, vt modo eſt demonſtratum; [f] incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, & priſmata.

QVOD ſi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, C, [g] habebunt huiuſmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles, [h] Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri. Inuentæ ſunt igitur non ſolum lineæ, & ſuperficies incommenſurabiles, verum etiam & corpora, ſiue ſolida incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum.

[a] 10. deci.

[b] 2. duodecimi

[c] 11. quinti

[d] 10. deci.

[c] 5. 6. vel 7. duodecimi.

[f] 10. deci.

[g] 11. duodecimi.

[h] 10. deci.

EADEM autem ratione, ſi rectæ A, & B, longitudine commenſurabiles ſint, [a] oſtendemus earum figuras rectilineas ſimiles, ſimiliterque deſcriptas, necnon & ipſarum circulos, commenſurabiles eſſe, [b] atque adeo & earundem pyramides, & priſmata; ac denique conos, & cylindros; ſi modo eandem habeant altitudinem, vt perſpicuum eſt.

[a] *10. deci.*

[b] *5.6.7. & 11. duodecimi.*

FINIS ELEMENTI DECIMI.

*

*

EVCLIDIS

ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus ſex libris abunde de ea Geometriæ parte diſſeruit, quæ circa plana verſatur, ſibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vſurpauit; In ſubſequentibus vero tribus diligenter ea de paſsionibus numerorum docuit, quæ neceſſaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearũ commenſurabilium, atq; incommenſurabilium, quas idcirco luculentiſsime in libro decimo deinde expoſuit, vt conſtructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in poſtremis tribus libris, nimirum in 13. 14 & 15. ſubtiliſsime diſſeritur, perfectius poſſet cognoſci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſiue ſolida conſiderat, proprioque vocabulo Stereometria eſt appellata.

EXPLICAT autem prius, more ſuo, voces ad eam rem pernceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, ſiue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita vt tres dimenſiones poſſideat, vnam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſsitudinem, altitudinemve, appellari ſolidum, ſiue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantū habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adiicit, ſuperficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hoc enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis ſit magnitudinis expers; vt autem percipiamus ſuperficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri; hæc enim deſcribet veſtigiū longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in tranſuerſum eſt factus; carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditum, conſulunt, vt concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter eleuari, ſiue in tranſuerſum moueri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum vero ſeu craſſum, propter eleuationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum ſiue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta diſtincta a linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantum dimenſio poſſit aſsignari, vt perſpicue in commentariis, quos in ſphæram Ioannis de Sacro Boſco conſcripſimus, a nobis fuit demonſtratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.

SOLI-

II.

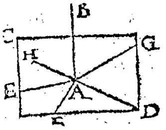
SOLIDI autem extremum, eſt ſuperficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, ſuperficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremū eſſe ſuperficiem. Cum enim ſolidum, ſiue corpus efficiatur ex illo motu imaginario ſuperficiei; perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.

III.

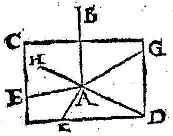
LINEA recta eſt ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta AB, plano CD, inſiſtens, ita vt B, punctum ſit in ſublimi extra planum CD, at punctum A, in ipſo plano, tum demum dicetur recta ſeu perpēdicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter inſiſtat plano CD, & nō magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eadēq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, educta

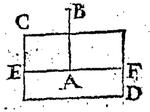


non

non efficeret angulum rectum, etiamſi cum aliis omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planũ recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodẽ plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et e contrario, vt recte cõcludatur, lineam quampiam eſſe ad planum datum rectam, demonſtrãdum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos angulos conficere.



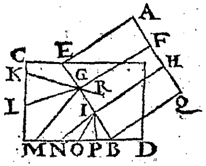
VT autem recta quæpiam plano cuicunque inſiſtens rectos conſtituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipſamque tangentibus, ſatis eſt, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, ſed ſe mutuo ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eã cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perſpicuum fiet ex propoſ. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia ſi duæ lineæ componant vnam rectam lineam, non neceſſario efficitur, lineam, quæ cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim AB, inſiſtat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineã componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos conſtituere; atq; idcirco non eſſe rectã ad planũ CD. Hoc autem perſpicuum eſt, cum AB, circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo ſit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipſa cum EF, ſemper eoſdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod ſi eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales ſunt AG, AD, in priori figura, rectos conſtituat angulos, tum demum cũ omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus: Id quod dilucide demonſtrabitur propoſ. 4. huius lib.



PLA-

IIII.

PLANVM ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorũ ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducũtur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

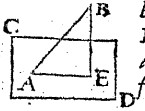


INSISTAT planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planũ ſubiectum CD, at EB, in ipſo eodẽ plano: Sit autẽ horum planorum communis ſectio EB, quæ, vt demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem ſumptis quotcunque punctis G, I; ex ipſis in plano AB, ducãtur GF, IH, perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, a pũctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram; ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique a lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe cõceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.

RE-

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planũ deducta fuerit perpendicularis, atque a pũcto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodẽ eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adiuncta compreprehenſus.



INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ A B, intelligatur ad idem planum deducta perpẽdicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque neceſſario angulus BAE, acutus, a cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.

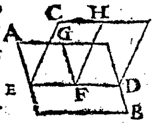
a 17. primi

VI.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus,

quæ in vtroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

PLANO nãq; AB, inſiſtat planũ CD, ita vt pars ad C, ſit in ſublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipſo plano AB, ſitq; CD, inclinatum ad AB; & communis eorum ſectio ſit DE. Si igitur ad D E, communem ſectionem ex eius pũcto F, duæ perpendiculares ducãtur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometræ angulum G F H, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, ſiue is acutus ſit, ſiue rectus, obtuſusve: quamquam proprie ſolum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum oſtendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani ſupra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtuſus vero receſſum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonſtrat ſitum, ſeu eleuationem vnius plani ſupra alterum, generaliter dici conſueuit a pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum ſectionis ducuntur perpendiculares, cuiuſmodi eſt angulus GFH, ſiue is rectus ſit, ſiue acutus, ſiue obtuſus.

VII.

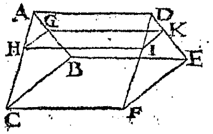
PLANVM ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

NON obſcura eſt hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis receſſerit.

VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur; hoc eſt, ſiue ad dexteram, ſiue ad ſiniſtrã, & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dexteram, nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad ſiniſtram. Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcirco non dicentur parallela.



SIT enim tectum quodpiam ABCDEF, *contentum duobus planis* ABED, ACFD, *cuius baſis* BCFE; *auferaturque faſtigium* AGHDKI. *Quo facto, perſpicuum eſt, reliqua plana* GBEK, HCFI, *non conuenire inter ſe, ſi ad partes* GB, HC, *vel ad partes* KE, IF, *producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cũ producta ad partes* GH, KI, *conueniant in faſtigio* AD. *Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autem lineæ in eodem plano exiſtẽtes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atque deorſum. Itaque duo plana quæcunque, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel ſunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandẽ nec ſunt parallelæ, neq; vnquam conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſitæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.*

IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, vt breuitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim cõſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit; cum illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

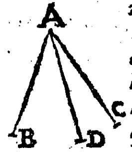
X.

AEQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolum ſimiles, *verum etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuo huiuſmodi ſolida, neutrum alterũ excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuo congruent; ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.*

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.



DVAE lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planũ, vt lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus BAC, cõtentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædã linea AD, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ AB, AC, AD, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compoſitus. Quod ſi AD, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC; immo circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, ſolidum

conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

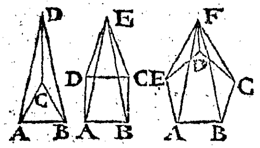
HÆC definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. Cum enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano eſt, in quo rectæ AB, AD; & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB; atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perſpicuũ cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitu-

dine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſe ſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis ſolum rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica ſuperficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus ſuperficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis eſt, qui fit, ſi conus per verticem ſecetur.

XII.

PYRAMIS eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnũ punctum conſtituta.

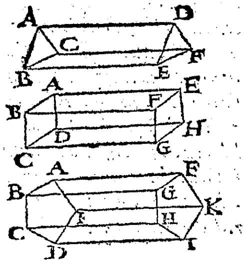


VIDELICET figuræ ſolidæ a planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, conſtitutæ appellantur pyramides. Perſpicuum autẽ eſt, omnia plana, quibus pyramis continetur eſſe triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitũ. Hoc enim pôteſt eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationem ſumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrãgula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Vt pyramidis triangularis, præter baſin, triangula ſunt ABD, ACD, BCD: Quadrangulæ vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagonæ denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

PRI-

XIII.

PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, et parallela, alia vero parallelogramma.



FIGVRÆ ſcilicet ſolidæ, quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia, et parallela ſunt triãgula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogrãma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur priſmata. Itaque priſma nil aliud erit, quã columna quædam laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, & parallelæ, ſiue hæ ſint triangula, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrãma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli, in vno quoq; oppoſitorũ planorũ reperiuntur, vt figuræ indicãt.

EX his manifeſtum eſt, quantum hallucinẽtur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figuram ſolidam duntaxat, cuius duo plana aduerſa parallela, æqualia, ſimiliaquè, triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hæc figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, definitio autem tradita infinita alia genera priſmatis amplectatur, vt cõſtat; præſertim quod plurimæ demonſtrationes in hoc lib & 12. ſequenti, ex æquo omnibus priſmatibus conueniunt; perſpicuum eſt eos hallucinari, qui vnum tantum priſmatis genus ex hac defin. colligunt. Sumi-

pſerunt

pſerũt autem fortaſſe hi auctores occaſionē errādi, quod Euclides & in propoſ. ultima huius lib. et in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib. 12. illis aduerſari, in qua Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, ut ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide, fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Immo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon, Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eādem cum illa baſin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecũdum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidē, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiã, quod a Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA eſt, quando, ſemicirculi, manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum; ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum videlicet illud quieſcens, a quo omnes lineæ rectæ in peripheriã cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtant illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circumducti, a quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinē definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiã modo.

SPHAERA eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

CICERO in libro de vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſsit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδὴς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radiis attingitur.

XV.

AXIS autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

DIAMETER autem ſphæræ, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque a ſphæræ ſuperficie terminata.

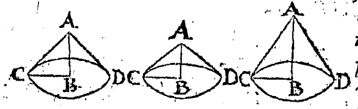
HÆ tres definitiones non egent expoſitione; dummodo hoc ſolum notetur, omnẽ diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra reuoluatur. Vnde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrum ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS eſt, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumaſſumpta figura.

ATQVE ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum cõuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT ſi triangulum rectangulum ABC, *circa latus quieſcens AB, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ continetur duabus ſuperficiebus, circulari vna, ac plana, quam* B C, *latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit; & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.*



QVOD ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus eſt. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli B *A* C, B C *A, æquales; qui cum æquiualeant vni recto, eo quod A* B C, *rectus eſt; erit angulus* B*A*C, *ſemirectus. Eodemque modo angulus* B *A* D, *ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus* C *A* D, *rectus erit. Si vero quieſcens latus AB, minus fuerit circumducto* BC, *vt in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim* BC, *latus latere AB, ſit maius; [b] erit angulus* B*A*C, *maior angulo* BC*A. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus A*BC, *ponitur rectus, erit* B*A*C, *ſemirecto maior. Similiter* B*A*D, *maior erit ſemirecto; atq; adeo totus* C*A*D, *recto maior erit. Si denique quieſcẽs latus AB, maius fuerit circũducto* BC, *vt in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus* O*xygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cum. n. latus A*B, *maius ſit latere* BC, *[c] erit & angulus* BC*A, angulo* B*A*C, *maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant, quod angulus A*BC, *rectus ponatur, erit* BC*A, ſemirecto maior, ideoque reliquus* B*A*C, *ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus* B *A* D, *minor eſſe ſemirecto. Igitur totus* C *A* D, *recto erit minor.*

[a] *5. primi*

[b] *18. primi*

[c] *18. primi*

XIX.

AXIS autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quieſcens AB.

XX.

BASIS vero coni eſt circulus, qui a circumducta linea recta deſcribitur.

NIMIRVM circulus, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt B C, in ſuperioribus conis. Itaque huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides ſolum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin; Non autem inclinatum, cuius axis ab baſim rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionẽ, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, vt ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea deſcriptam, conſtantemque ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſe ſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

VERTICEM ipſius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentã circulo,

circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

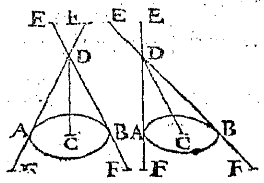
AXEM, rectam lineam, quæ a vertice ad circuli centrum producitur.

BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.



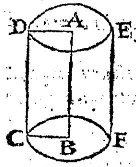
SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaque D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur vſque in circuli AB, circumferentia, quouſq; punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, a quo cæpit moueri: deſcribet ſuperficiem quãdam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctum ſe ſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea ſuperficie, quam D B, ſola deſcribit. Coni verticem, punctum D. Axem DC. Baſim AB, circulum. Quod ſi D C, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

CYLIN-

XXI.

CYLINDRVS eſt, quando rectãguli parallelogrãmi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogramum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumaſſumpta figura.

VELVTI ſi rectangulum parallelogrammũ ABCD, circa latus quieſcens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri ſunt circuli a duobus aduerſis lateribus, quę circumaguntur, deſcripti.

QVA-

QVALES ſunt circuli a lateribus AD, BC, oppoſitis deſcripti.

EVCLIDES porrò ſolum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus eſt ad vtramque baſim; atque de hoc ſolum in lib. 12. eſt diſputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris ſimus propoſituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonſtrauit, viſum eſt prius ex Sereno Antinſenſi definire cylindrum vniuerſe, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur ſcribit Serenus ad initium primi libri de ſectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſeſe æquidiſtantes & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & ſimul circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.

CYLINDRVS eſt figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

CYLINDRI baſes ſunt circuli ipſi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

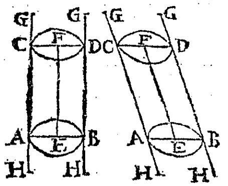
LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes vtraſque contingit; quam & circumlatam, cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur,

cantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidiſtantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitũ ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa cẽtra E, F, in planis circulorũ ſemper æquidiſtãtes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum reſtituantur, vnde moueri cæperunt; deſcribetur a linea AC, ſuperficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quam videlicet ſola AC, deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos AB, CD. Axem, rectã EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod ſi axis EF, perpendicularis fuerit ad baſes, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.



XXIIII.

SIMILES coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

RECTE Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorũ ab eorum axibus, & baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundũ duas

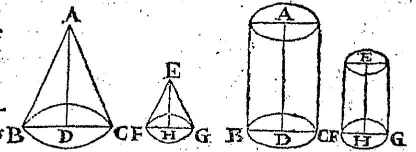
dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinẽ: Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinẽ ſimiles eſſe demonſtrãt. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis aũt axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, necnon rectangula AB, EF, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit vt AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem vt BC, ad FG, [a] ita dimidia BD, ad dimidiã FH; erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circũ æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectãgula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, [c] ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula vero, [d] eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.

[a] 15. quinti

[b] 6. ſexti

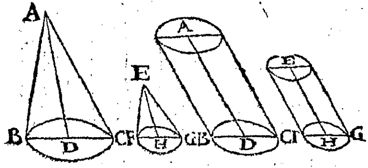
[c] 5. ſexti.

[d] 34. primi



QVOD ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, & diametri baſium erunt proportionales, anguliquę inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri

cylindri ABC, EFG: In conis autem axes ſint AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintq; anguli inclinationũ ADB, EHF, tã in conis, quam in cylindris, ęquales inter ſe, dicētur & coni inter ſe, & cylindri quoque inter ſe ſe ſimiles; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſupra diximus, & rurſus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindriſque demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur ęquales, licet non ſint recti.



XXV.

CVBVS eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, et æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HÆC ſunt quinque corpora, quę regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, ęqualia ſint, ęquilatera, & ęquiangula, vt ex eorum definitionibus conſtat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymęo quinque mundi corpora, quę ſimplicia a philoſophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hiſce corporibus aſſimilat, vt in ſphæra Ioãnis a ſacro boſco latius explicauimus. Horum omniũ conſtructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propoſ. 15. Tetraedri vero propoſ. 13. Octaedri deinde propoſ. 14. Dodecaedri autẽ propoſ. 17; Icoſaedri denique propoſ. 16. Vbi planius perfectiuſq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum eſt, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formã quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodũ faciles, quibus ea quilibet ſecundũ eorũ ſoliditatẽ poſſit conficere. Neque vero aliud corpus regulare prater quinq; illa dari poteſt, vt demõſtrabimus ad finẽ lib. 13.

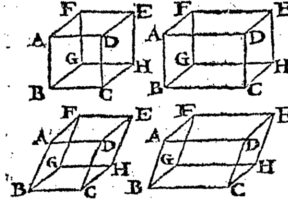
QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inſcriptione, circumſcriptioneque corporum regularium; neceſſarium eſſe duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam ſit Parallepipedum,

lepipedum, quidque ſit figuram ſolidam in figura ſolida inſcribi, vel circa eandem deſcribi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerſo, parallelę ſunt, contenta.

VELVTI ſolida figura comprehenſa ſex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppoſita AC, FH; Itẽ EDF, CG; Item AG, DH, ſunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehẽſa. quæ quidem plana parallela oppoſita, ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallelogramma, vt demonſtrabitur propoſ. 24. huius lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, reſpondebitque quadrato in planis figuris: Si autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte lõgiora, quãuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem; ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique ſex parallelogramma neque rectãgula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerſo, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

SOLI-

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidę figurę viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptę tangunt omnes angulos figurę, circum quam deſcribitur.

NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdũ pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, uel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur uel ab angulis, uel a lateribus, uel denique a planis figuræ exterioris.

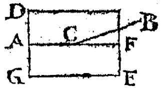
VERVM duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibusque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

RECTAE lineæ pars quædã non eſt

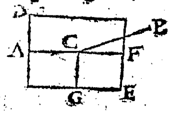
in ſuin ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidẽ AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur inplano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam uero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nẽpe vt oſtendatur, rectæ AC, eſſe aliquam rectam inplano DE, in directũ, & continuum poſitam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, eſſe inplano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quãdoquidem rectam CB, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Veruntamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi AC, in plano DE, producatur vſque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in cõtinuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet DE, ipſi AC, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa unam rectam lineam cõſtituat, quamuis quis dicat, AB, eſſe quoque rectam, eiuſque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam. [a] Ducatur enim in plano DE, ipſi AC, perpẽdicularis CG; & in eodẽ plano ipſi CG, perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuũ & rectũ. Cũ enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione; [b] erunt AC, & FC, in directum & continuum poſitæ. Quamobrem etiamſi quis contendat, AB, eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam conſtituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, ſegmentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.



[a] 11. primi

[b] 14. primi

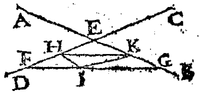
HINC fit omnes partes cuiuſuis rectæ lineæ, hoc eſt, totam rectam lineam, in vno exiſtere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duæ rectę lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano.

RECTAE lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirũ EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra. quod fieri nõ poſſe, iam ſupra [c] demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe, pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem FHKG, in vno conceda-



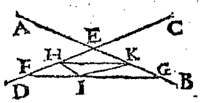
[c] 1. vndec.

tur eſſe plano, pars vero EHK, in ſublimi, vel contra; erunt quoq; rectarum FE, GE, partes quidẽ FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in ſublimi, vel cõtra. Quæ omnia abſurda ſunt,[a] vt eſt demonſtratum. Quare triangulum EFG, in vno plano exiſtit; eademque eſt ratio in omni alio triangulo.

[a] 1. undec.

QVIA vero, in quo plano eſt triangulum EFG, in eodem exiſtunt eius latera EF, EG: In quo autem ſunt rectæ EF, EG.[b] in eodem ſunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædã in plano, partes vero aliæ in ſublimi dicantur eſſe; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulũ EFG, conſiſtere demõſtrauimus. Quocirca ſi duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano. Quod erat demonſtrandum.

[b] 1. undec.

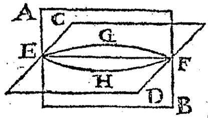


3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta.

SECENT ſe mutuo plana AB, CD, ſitq; communis eorum ſectio EF. Dico EF, eſſe lineam rectã. Si enim non credatur eſſe recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eoſdem habeant terminos E, & F, ſuperficiem includent. Quod fieri non poteſt, vt in 14. pronunciato 1. lib. oſtendimus. Communis ergo ſectio EF, recta erit linea; Ac proinde ſi duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. Quod erat oſtendendum.



ALITER. Secent ſe rurſus plana AB, CD, ſintq; termini ſectionis communis E, & F, puncta, quæ connectãtur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano exiſtit, cõſtat propoſitum: Ipſa enim erit communis ſectio.

Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur eſſe, tunc ſi in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rurſus duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem, cũ eoſdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantũ plano eſſe credatur, tunc ſi in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum ſectio eſt.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

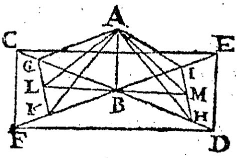
SI recta linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecãtibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiã per ipſas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, inſiſtat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum ſectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos eſſe plano, quod per ipſas ducitur, ſeu in quo exiſtunt. Cũ enim ſe mutuo ſecent in B;[a] erunt ipſæ in vno plano, quod ſit CEDF. Sumãtur inter ſe æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, ſecãs rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in ſublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, triãguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex conſtructione ſunt æqualia;[b] & anguli quoque ipſis contenti GBK, HBI, cum ſint ad verticem B, oppoſiti, æquales:[c] Erunt baſes GK, HI, inter ſe, & anguli BKG, BIH, inter ſe quoque æquales.

[a] 2. undec.

[b] 15. primi

[c] 4. primi.

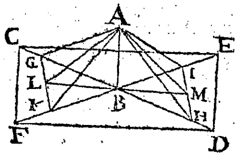


RVRSVS[d] cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppoſiti ſint æquales; erũt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent,

[d] 15. primi

[a] 26. primi

æqualia, ex conſtructione. [a] Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.



[b] 4. primi.

PRAETEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex cõſtructione; & anguli ipſis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti ex hypotheſi; [b] erunt & baſes AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

[c] 8. primi.

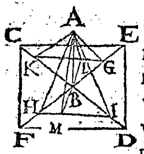
AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli, AKG, æqualia ſunt; & baſis AH, baſi AG, ex hactenus demonſtratis; [c] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehẽſi, æquales.

[d] 4. primi.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia ſint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipſis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonſtrauimus; [d] erunt quoque baſes AL, AM, æquales.

[e] 8. primi.

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia ſunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & baſis AL, baſi AM, ex demonſtratis; [e] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehenſi, æquales; qui cum ſint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano ſubiecto ipſam tangit in B: Eademq; ratione oſtendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipſam tangent in B, angulos rectos conſtituere, etiamſi inter pũcta G, I, & K, H, ductæ ſint, dummodo rectæ GI, KH, iungantur: vel certe literę diſponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem ſunt literæ, & tamen LM, non ducitur à ſiniſtra in dextrã, vt in priori figura, ſed à ſuperiori parte verſus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, &c. Quod demonſtrandum erat.



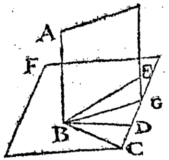
THEO-

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, ſe tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum ſectione, ſeu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano eſſe. [a] Cũ enim quælibet duæ in vno ſint plano, propterea quod productæ ad partes B, ſe mutuo ſecent in B; ſint BC, BD, in plano FC; Et ſi fieri poteſt, recta BE, non ponatur in eodem plano, ſed in ſublimi. [b] Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno ſunt plano, cum ſe mutuo ſecent in B; ſint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, ſibi mutuo occurrunt in B; neceſſario producta ſe mutuo ſecabunt. [c] Sit ergo eorum communis ſectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, p ipſas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsã in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, exiſtentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter ſe erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdũ. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, exiſtentibus, nõ erit BE, in ſublimi, ſed in eodem cum ipſis plano. Quocirca ſi recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 2. undec.

[b] 2. undec.

[c] 3. undec.

[d] 4. undec.

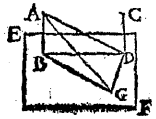
THEOR.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & *D*. Dico illas eſſe parallelas. *D*ucta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, C*D*B, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpẽdicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectãtur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli B*A*D, æqualia ſunt lateribus G D, D B, trianguli G D B, ex conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti AB*D*, GDB, æquales, nempe recti; [a] erunt baſes æquales *A*D, GB. Rurſus quia latera AB, BG, trianguli *A*BG, æqualia ſunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Eſt autem & baſis communis AG; [b] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Eſt autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus eſt; erit recta GD, tribus rectis DB, *D* A, D C, ad angulos rectos. [c] Quare rectæ D B, D A, DC, in vno erunt plano: [d] Eſt autem A B, in in eodem plano, in quo D B, D A. Recta igitur *C* D, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, ſint recti, [e] erũt rectæ AB, CD, parallelę. Si duæ itaque rectæ lineę eidem plano ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.



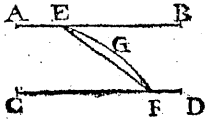
[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 5. undec.
[d] 2. undec.
[e] 28 primi

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineę, in quarum vtraque ſumpta ſint quęlibet puncta: Illa linea, quæ ad hęc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

IN parallelis *A*B, CD, ſumantur vtcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parallelæ *A*B, CD. Si enim recta EF, non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra: ſecet iam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E, & F, ſitque communis ſectio horum planorum EGF, [a] quę recta linea erit. Duæ igitur rectæ *EF*, EGF, cum habeant eoſdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum.



[a] 3. undec.

SCHOLIVM.

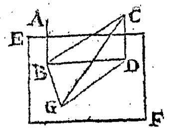
HÆC eadem propoſitio vera eſt, etiãſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD; ſitque CD, plano
EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, eſſe
ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF; erit
[a] *29. primi* per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: [a] Sunt autem
duo CDB, ABD, duobus rectis æquales: Igitur &
ABD, rectus erit: Iam in plano EF,
ducatur BG, perpēdicularis ad BD;
ponanturque æquales BG, CD. Coniungantur
deinde rectæ D G, G C,
CB. Quoniã igitur latera CD, DB,
trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus
GB, BD, trianguli G B D, ex
conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti, C D B,
[b] *4. primi.* GBD, æquales, nimirum recti; [b] Erunt baſes CB, GD, æquales.
Rurſus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia
ſunt lateribus GB, B C, trianguli GBC; & baſis
[c] *8. primi.* eſt communis CG; [c] Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus
comprehenſi æquales. Eſt autem C D G, rectus
ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare
recta GB, duabus rectis BD, BC, ſe mutuo ſecantibus in
B, (Si namque producerētur DB, CB, ſecarent ſeſe in B,
[d] *4. undec.* ob angulum CBD.) ad rectos angulos exiſtit; [d] ac proinde
ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Eſt
[e] *7. undec.* autem in hoc eodem plano recta AB; [e] propterea quod
rectæ BD, BC, in eodē ſunt plano, in quo parallelæ AB,
CD; cum puncta B, C, D, exiſtant in parallelis AB, CD,
Igitur & GB, recta rectæ B A, ad rectos erit angulos ex
defin. 3. huius lib. Quare cũ AB, recta ſit ad rectas BG,
[f] *4. undec.* BD; [f] erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum,
hoc eſt, ad planum EF. Si duæ igitur ſint parallelæ
rectę lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit
angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.
Quod erat oſtendendum.

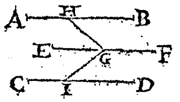


9.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVAE eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarũ AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur E G, recta eſt ad duas
rectas GH, GI, ſe tangētes mutuo in G; [a] erit recta quoque [a] *4. vndec.*
ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem
cum ſint parallelæ AB, EF; & EF, ſit recta ad planũ per
GH, GI, ductum; [b] erit quoque AB, ad idem planum recta. [b] *8. vndec.*
Similiter cum ſint parallelæ CD, EF; ſit autem EF,
recta ad planum per GH, HI, ductum; [c] erit etiam CD, [c] *8. vndec.*
recta ad idem planum; [d] Atque proinde ræctæ AB, CD, [d] *6. undec.*
cum rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ, Quod erat demonſtrandum.

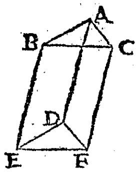


SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non eſſe in eodem plano cum recta EF, cui ſunt parallelæ. Nã ſi forent in eodem plano cum ipſa EF; eſſent AB, CD, inter ſe parallelæ, ex 30. propoſ. 1. lib. Superuacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI duæ rectę lineę ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelę, non autẽ in eodem plano: Illę angulos æquales comprehendent.



SINT rectæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, ſe tangentibus in D; non ſint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponãtur enim AB, DE, inter ſe æquales, & AC, DF, inter ſe; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ ſunt & æquales; [a] erũt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erũt & ęquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales ſint eidem AD; [b] erunt etiam BE, CF, inter ſe parallelæ, & æquales: [c] Ac propterea parallelæ & æquales erũt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex conſtructione; & baſis BC, baſi EF, æqualis, vt modo demonſtrauimus; [d] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehẽſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 33. primi
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 8. primi.

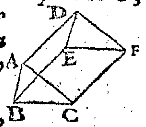
SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam eſt, quãdo priores duæ lineæ in eodẽ ſunt plano cũ duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodẽ plano, ſitq; AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, eſſe æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF; ducanturq; rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniã igitur parallelæ ſunt AB, DE; [e] æquales erũt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erũt anguli ACB, DFE; Sũt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, æquales ſunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. [a] Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

[e] 29. primi

[a] 32. primi

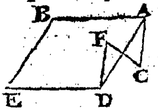
NON ſint iam BC, EF, in vna recta lineæ conſtitutæ. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, ſint parallelæ & æquales; [b] erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidẽ AD, parallelæ exiſtẽtes & æquales, [c] inter ſe parallelæ erũt & æquales: [d] Ac proinde parallelæ & æquales quoq; erũt BC, EF. Itaq; cũ duo latera AB, AC, triãguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, triãguli DEF; & baſis BC, baſi EF, [e] erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.



[b] 33. primi
[c] 30. primi
[d] 33. primi
[e] 8. primi.

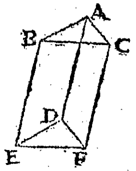
CAETERVM vt concluſio huius theorematis recte ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodẽ plano, ſiue non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla rõne ſe mutuo ſecent; vt ex prima et vltima figura apparet. Nã alias cõcluſio vera nõ erit.

SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehẽdunt, non ſunt æquales, cum ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, ſe mutuo ſecant. Vnde quamuis AC, DF, ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non coniungũt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.



PORRO conuerſum quoque huius propoſ. nimirum: Si in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera lineæ alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti: demonſtrabimus hoc modo. In planis parallelis ſint anguli æquales BAC, EDF, ſitque AB, ipſi DE, parallela, & AC, DF, ſint ad eaſdem

dem partes plani AE, per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque eſſe, hoc eſt, planum per AC, AD, ductum trãſire etiam per rectam DF. Si enim non ſint parallelæ; [a] ſi ducatur in plano CD, per AC, AD, ducto recta alia per D, ipſi AC, parallela, [b] continebit hæc cum DE, angulum angulo BAC, æqualẽ, ac propterea & angulo EDF: atque ita pars & totũ erunt æqualia. quod eſt abſurdũ. Recta ergo DF, ipſi AC, parallela eſt: atq; adeo planũ per AC, AD, ductũ trãſibit per rectã DF. quod eſt propoſitũ.



[a] 31. primi

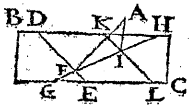
[b] 10. vnde.

11.

PROBL. 1. PRPOS. 11.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planũ BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunq; DE; [c] ad quam ex A, deducatur [d] perpendicularis AF: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH; [e] ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum BC. [f] Ducta enim in plano BC, per I, ipſi DE, parallela KL; cum DF, ad rectos angulos ſit duabus FA, FH, ex conſtructione, [g] ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum; [h] erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. [i] Quoniam vero AI, in eodem eſt cum rectis FA, FH, plano, tangitq; rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. [k] Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo pũcto in ſublimi, ad ſubiectũ planũ perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendũ erat.



[c] 12. primi

[d] 11. primi

[e] 12. primi

[f] 31. primi.

[g] 4. vnde.

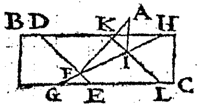
[h] 8. vndec.

[i] 2. vndec.

[k] 4. vndec.

SCHOLIVM.

QVOD ſi quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis; [a] erit ipſa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis ad ſubiectum planum BC, perpẽdicularis, cum perpendicularis ſit ad vtramque DE, GH.



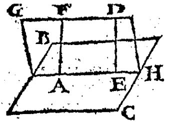
[a] 4. vnde.

12.

PROBL. 2. RRPOS. 12.

DATO plano a puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. [b] Ex quouis puncto D, in ſublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extenſa recta per E, & A, [c] ducatur per A, ipſi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam eſſe ad planum datũ BC. Cum enim DE, AF, parallelæ ſint; & DE, recta ad planũ BC, ex conſtructione; [d] erit quoq; AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciendum erat.



[b] 11. vnde.

[c] 31. primi

[d] 8. vndec.

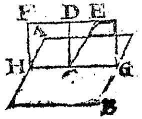
13.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

a 2.vndec.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim, ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, [a] quæ in vno, eodemque plano ſunt, ducatur planum FG, ſecãs planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ ſint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde ęquales; pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabũtur, ad eaſdẽ partes. Quod erat demonſtrandum.



b 6.vndec.

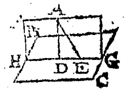
ALITER. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum AB, duæ perpẽdiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ ſint ad idem planum AB; [b] erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.

SCHOLIVM.

c 2.vndec.

d 17.primi

EODEM modo a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in ſublimi ad ſubiectum planum BC, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, [c] quæ in vno plano ſunt, planum FG, ſecans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ ſint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod eſt abſurdum; [d] cum ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis aſſumpti.



e 6.vndec.

ALITER. Si AD, AE, rectæ ſunt ad planum BC; [e] ipſæ erunt inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

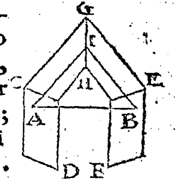
14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela.

a 3.vndec.

b 17.primi

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela eſſe plana CD, EF. Si enim non credantur eſſe parallela, producta inter ſe conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem ſectionem rectam lineã GH: In qua ſumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. [b] Sed & minores duobus rectis ſunt. Quod eſt abſurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter ſe conueniunt. Parellela ergo ſunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.



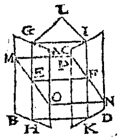
SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrari poterit conuerſum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta ſit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; eſſe ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatq; communes ſectiones cum dictis planis rectas GH, IK:

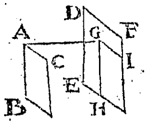
eruntque



eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus exiſtunt, ad eaſdem partes conuenient ad [a] 1.undec. *punctum L; [a] cum tota recta H G L, ſit in vno plano, nempe in AB, producto; Item tota recta KIL, in vno quoque plano, nimirum in CD, protracto. Quod eſt abſurdũ, cum ponantur parallela. Recti ergo ſunt anguli IFE, KFE) Eodẽ modo ſi aliud planum videlicet MN, eadem plana ſecet per EF, faciens alias rectas, communes cum ipſis ſectiones MO, PN; erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, ſit recta ad* [b] 4.undec. *duas rectas IK, PN, [b] recta quoque erit EF, ad planũ CD, per ipſas ductum. Quod eſt propoſitum.*

15. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano: Parallela ſunt, quę per illa ducuntur, plana.



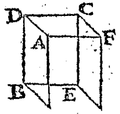
SINT duæ rectæ lineæ A B, A C, ſe tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, ſe tangentibus in D, exiſtentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipſas ducta, eſſe parallela. [c] 11.unde. Ex A, enim deducatur ad planum *EF*, perpẽdicularis AG, occurrẽs plano EF, in puncto G [d] 31.primi [d] Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipſis DE, D*F*, parallelæ. Quoniam igitur [e] 9. undec. rectæ AB, GH, parallelæ ſunt ipſi D E; [e] erunt & A B, GH, inter ſe parallelæ; [a] 29. primi [a] Ac proinde anguli B A G, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem A G H, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus B A G. Simili argumento concludes, angulum C A G, rectum eſſe. Itaque cum recta GA, ſit recta duabus AB, *A*C; [b] 4. undec. [b] recta quoque erit GA, ad planum B C, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. [c] 14.unde. [c] Igitur parallela ſunt plana BC, E *F*. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandũ.

SCHOLIVM.

QVOD ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non ſunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt ſi lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC, ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpẽdicularis, cadat in G; oſtendemus, vt prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductũ, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.



DATVM planum ſit AB, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunq; duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas D B, D C, ducto, [d] 31. primi [d] *agatur C E, ipſi D B, parallela; Et in plano A C, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum eſſe plano dato A B. Cum enim duæ rectæ D B, D A, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibusq; in alio cũ illis plano parallelæ ſint;* [e] 15. unde. [e] *parallela erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.*

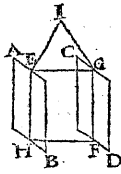
16.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur: communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GF, eſſe lineas parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, productæ inter ſe conuenient, cum ſint iu plano EF, ſecante. Conueniant igitur in puncto I. [a] Quia ergo tota recta HEI, in vno eſt plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vno quoque eſt plano, videlicet in CD, producto; conuenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod eſt abſurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare ſi duo plana parallela plano quopiam ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 1. undec.



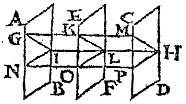
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione poteſt conuerti. Quamuis enim communes ſectiones planorum parallelorum factę ab alio plano ſecante ſint parallelę, vt hic demonſtratum eſt; Nō tamen omnia illa plana, quorum communes ſectiones factę ab alio plano ſecante ſunt parallelę, parallela ſunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantum ſunt parallela, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

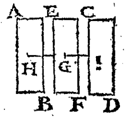
PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.

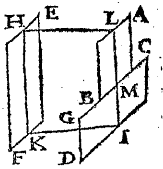
SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela eſſe. Secentur enim omnia tria plana plano GH, ſintque communes eorum ſectiones rectę GI, KL, MH. Secentur rurſus alio plano NH, ſintque communes eorum ſectiones rectę NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana ſecantia GH, NH, ſe quoque mutuo ſecent, quorum ſectio communis ſit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, ſecantur plano GH, [a] erunt communes ſectiones GI, KL, parallelę. Eodem modo parallelę erunt MH, KL; [b] atque adeo parallelę erunt inter ſe GI, MH. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe NI, PH. Itaque cum IG, IN, ſe mutuo tangentes in I, parallelę ſint rectis HM, HP, ſe tangentibus in H, exiſtentibusque in alio plano; [c] erunt plana AB, CD, per ipſas ducta, parallela. Quod eſt propoſitum.



ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, a quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta eſt ad planum EF, recta quoque erit ad planum AB, ſibi parallelum, per ea, quę in ſcholio propoſitionis 14. huius lib. demonſtrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, ſit recta ad plana AB, CD; [d] parallela inter ſe erunt plana AB, CD. Quod eſt propoſitum.



QVOD ſi duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamn inter ſe; ſed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duę rectę, quę alteri rectę ſunt parallelę, ſi conueniant, vnam rectam conſtituunt lineam, veluti ad propoſit. 30. lib. 1. demonſtrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantque producta ſecundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum conſtituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia

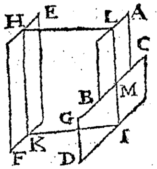


[a] 16. vnde.

[b] 9. vndec.

[c] 15. vnde.

[d] 14. vnde.



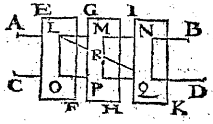
tria plana per lineas rectas H K,LM, MI. *Quoniam igitur* [a] 16. vnde. *parallela ſunt plana AB, EF;* [a] *erunt & communes ſectiones LM,HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cum rectæ LM, IM, parallelæ ſint ipſi HK, exiſtantque in eodem plano ſecante HI, & oonueniant in M; ipſæ erunt in rectum & continuum poſitæ, per ea, quæ ad 30. propoſ. lib. 1. oſtendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum* [b] 1. vndec. *planum efficient;* [b] *propterea quod recta LI, in vno iaceat plano. Quod eſt propoſitum.*

ITAQVE duo plana, quæ parallela ſint alteri plano, vel inter ſe parallela erunt, vel certe, ſi producta conueniant, vnum planum conficient.

17. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur.

RECTAE lineæ *A*B, CD, (ſiue eæ parallelæ ſint, vt in figura, ſiue nõ, exiſtẽtes tñ in eodẽ plano; ſiue in tráſuerſum poſitæ, in diuerſis exiſtentes planis) ſecentur planis parallelis E F, G H, I K, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas ſecari proportionaliter, hoc eſt, ſegmenta earũ inter dicta plana intercepta eſſe proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita eſſe OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, N Q, in planis E F, I K, & coniungatur recta L Q, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, [c] 2. vndec. [c] Eritque triangulum L N Q, in vno plano: ſimiliter triangulum L O Q, in vno plano. Quoniam vero plana

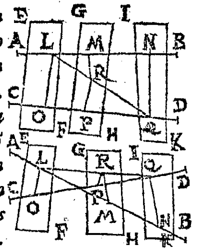


parallela GH, IK, ſecantur plano trianguli LNQ, [a] 16 vnde. [a] erunt communes ſectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt R P, L O. [b] 2. ſexti [b] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt L R, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi datæ duæ rectæ AB, CD, ſint in vno eodẽque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in ſuperiori figura apparet. Nam tunc planũ per rectas AB, CD, ductum ſecabit tria plana parallela in pũctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [c] 16. vnde. [c] *quæ inter ſe parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, exiſtet, cum ſit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano exiſtentia, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum ſectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, conſtituent, nimirum communem ſectionẽ planorum LOQN, GH.*

SI vero duæ rectæ AB, CD, non ſint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hiſce duabus figuris apparet: quia [d] 2. vndec. [d] *cum triangulum LOQ, ſit in uno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuerſum eſt, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano exiſterent, eſſent duæ rectę AB, CD, in eodẽ illo plano, quod ex ipſis conſtituitur, quod eſt cõtra hypotheſim.) erunt rectæ RM, RP, in diuerſis illis planis triangulorũ; ac proinde vnam rectam non conſtituent:* [c] *alias in vno eſſent plano. quod eſt abſurdum.*



EADEM hæc propoſitio locum habet, ſi duæ rectæ AB, CD, in eodem plano exiſtentes, nõ ſint parallelæ, vt in eiſdem hiſce duabus figuris apparet: ſed tunc MRP, ſemper erit vna linea recta, vt ad initium huius ſcholij demonſtratũ eſt, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonſtratio hic adhiberi poteſt.

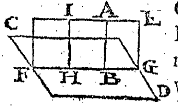
NON

NON ſecus, ſi plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, ſecent, erunt earum partes proportionales, & communes ſectiones mediorum planorum & triangulorũ LOQ, LNQ, rectas lineas conſtituent, ſi rectæ AB, CD, in vno ſint plano, non rectas autem, ſi non ſint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum eſt.

18.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiã ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, plana eidem plano ad rectos angulos erũt.



SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, eſſe recta ad idem planum CD. Ductum enim ſit per AB, planũ EF, ſecans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipſi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ ſunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelę, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiã ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

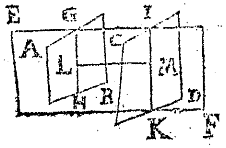
a 31. primi

b 18. vnd.

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnũ cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem rectum.



SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia ſectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela eſſe. In plano. n. EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: [a] eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta eſt, [b] ipſa parallela erunt.

a 29. primi

b 14. vnde.

SED iam parallela ſint plana AB, CD; ſitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum eſſe ad idem planum EF. Sint enim communes ſectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; [c] quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. [d] Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque viciſsim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod eſt propoſitum.

c 16. vnde.

d 18. primi

HINC etiam problema hoc abſoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectũ.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propoſ. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planũ CD, rectum ſit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, [e] erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planũ ducatur EF. [f] quod ad planum CD, rectum erit. Quod eſt propoſitum.

e 12. vnde.

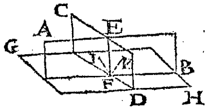
f 18. vnde.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

19.

SI duo plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, ſe mutuo ſecantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum ſectionem E F, rectam quoq; eſſe ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes ſectiones planorum AB, CD, cum plano G H, recta eſt, aut non. Si recta eſt EF, ad B F, D F, [a] recta quoque erit ad planum GH, quod per ipſas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alterã rectarum BF, DF, tantum; ſit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit E F, quæ in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defi. huius lib. Idem concludes, ſi EF, concedatur recta ad D F. Erit enim & tunc E F, ad planum G H, recta ex defin. 4. huius lib. cũ perpendicularis ponatur ad DF, communem ſectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, eſſe credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniã igitur planum AB, rectum ponitur ad planum G H, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, cõmunem eius ſectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadẽ ratione erit KF, ad idem planum G H, recta; Ac proinde a puncto F, ad



[a] 4. vndec.

[b] 11. primi

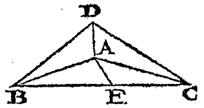
planum GH, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſupra [a] demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 13. vnde.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis cõtineatur: Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores.



CONTINEATVR angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoſlibet duos reliquo eſſe maiores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuũ eſt, quoſuis duos maiores eſſe reliquo: Si vero duo tantũ ſint æquales, & tertius vtrouis minor, conſtat quoque quoſlibet duos reliquo maiores eſſe. Quod ſi vnus, uidelicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſiue æquales, ſiue inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe maiorem. Dico iã hoc angulo maximo B A C, maiores quoque eſſe angulos duos B A D, D A C. In plano enim per AB, AC, ducto [b] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectę A D. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, ſecans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera A D, AB, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipſis contenti, per conſtructionem, æquales; [c] erunt baſes BD, BE, æquales. [d] Quia vero latera DB, DC, maiora ſunt latere BC; ſi demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta C D, maior quam C E. Cum igitur latera AD, AC, triãguli DAC, æqualia ſint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & baſis CD, maior baſe CE;

[b] 23. primi

[c] 4. primi.
[d] 20. primi

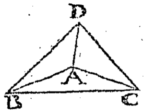
[a] 25.primi ſe CE; [a] erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc eſt, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca ſi ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat oſtendēdum.

21.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus ſolidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores eſſe quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt cōſtituti tres anguli ſolidi B, C, D, quorum quilibet ſub tribus angulis planis cōtinetur, nempe B, ſub CBA, ABD, DBC. At C, ſub BCA, ACD, DCB: D, [b] 20.vnde vero ſub CDA, ADB, BDC. [b] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores ſunt angulo CBD; ſimiliterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA ADB, maiores angulo CDB: erunt ſex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, [c] 32.primi ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [c] Hi autem tres æquales ſunt duobus rectis. Illi ergo ſex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur ſex illi, vna cum tribus ad A, æquales ſint ſex rectis propter triangula [d] 32.primi tria BAC, CAD, DAB, ([d] ſunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) ſi auferantur ſex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, ſolidum angulum conſtituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo ſolidus angulus, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHO-

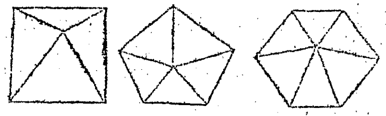
SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli cōſtituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos ſolidos extendemus hoc modo.

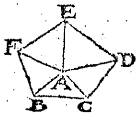
SIT angulus ſolidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoq; minores. Nam ſi omnibus angulis planis rectæ ſubtendantur ordine in eodē plano exiſtentes; cōſtituetur pyramis, cuius vertex datus angulus ſolidus, tot laterum, angulorumve, ſub quot angulis planis ſolidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorū, ([a] cum anguli cuiuslibet trianguli duobus ſint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis æquales ſunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propoſ. 1. lib. demonſtrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (propterea, quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorum quilibet tribus planis angulis cōtinetur, [b] & horū quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorūdem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.

[a] 32.primi

[b] 20.unde.

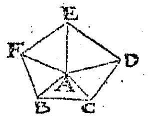


VERVM vt res melius percipiatur, ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus ſubtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB,



ita vt

ita vt conſtituatur pyramis pentagona, habens videlicet baſin pentagonum, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulũ ſolidum A. [a] Quia vero omnes anguli quinque triangulorum B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis BCDEF, æquales ſunt ſex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cum enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; [b] erunt duo CBA, ABF, qui ſunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui eſt in baſi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis.



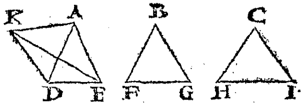
[a] *32. primi*

[b] *20. vndc.*

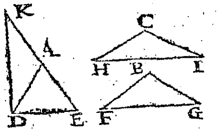
THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet aſſumpti reliquo ſint maiores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulum conſtituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A *D*, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis D E, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarũ D E, FG, HI, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, [a] ex ipſis triangulum facile conficietur. Quod.n. duę *D*E, F*G*, maiores ſint, quam HI, ita oſtendetur. [b] *F*iat angulus *D*A *K*, angulo B, æqualis, cadatque primũ AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EA *K*, ex duobus EAD, *D*AK, compoſitus; quod quidem continget, quãdo duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur *AK*, ipſi *A*D, æqualis, connectanturque rectæ *K*D, *K*E. Quoniam igitur latera A*K*, AD, trianguli A*K*D, æqualia ſunt lateribus B*F*, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti *D A K*, & B, æquales; [c] erunt & baſes KD, FG, æquales. Rurſus quia latera AK, AE, trianguli A*K*E, æqualia ſunt lateribus C H, C I; & angulus EA*K*, maior angulo C; propterea qđ duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & baſis EK, maior baſe HI: [e] Sunt autem rectæ ED, D*K*, maiores recta E *K*. Igitur multo maiores erunt E D, D *K*, quam HI. Cum ergo D*K*, oſtenſa ſit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.



CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli D*A*E, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque A *K*, ipſi *A*D, æqualis rurſum, & connectatur recta K D. [f] Erit igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. [g] Quoniam vero rectæ ED, *D K*, maiores ſunt recta KE; & *K*E, æqualis eſt rectis C H, CI, ex hypotheſi, & constructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, CI: [h] Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt E D, D*K*, quam HI. Cum ergo D*K*, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.



CADAT poſtremo A*K*, [g] ad partes AE, ita vt nec

[a] *22. primi*

[b] *23. primi*

[c] *4. primi.*

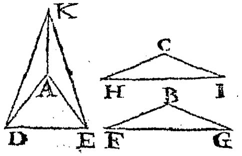
[d] *24. primi*

[e] *20. primi*

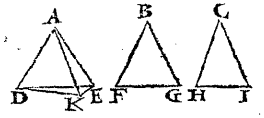
[f] *4. primi.*

[g] *20. primi*

[h] *20. primi*



angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturq; rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. [a] Erit igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. [b] Quoniam vero duæ DE, DK, maiores ſunt duabus AE, AK; & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypotheſi & cõſtructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: [c] Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI, quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores eſſe, quam FG, ſi angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, ſi angulo C, ad FG, conſtituatur angulus æqualis, &c. [d] Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonſtrandum.



ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; [e] erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius minor; [f] erunt quoque duæ illorũ baſes ęquales, [g] & baſis tertij vtraque minor: Quare rurſus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod ſi vnus eorum, nempe A, ſit maximus, ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales; [h] erit quoque baſis DE, omniũ maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quã FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores eſſe recta DE, [i] Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipſi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, tranſeat circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, deſcripta, ob æqualitem rectarum AD, AK, AE. Con-

nectantur

[a] 4. primi.
[b] 21. primi
[c] 20. primi
[d] 22. primi
[e] 4. primi.
[f] 4. primi.
[g] 24. primi
[h] 24. primi
[i] 23. primi

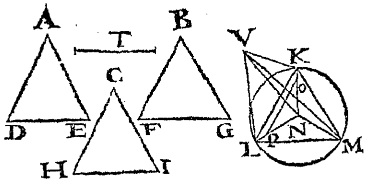
---

nectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis eſt angulo DAK, per conſtructionẽ; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales; [a] erit baſis DK, baſi FG, æqualis. Rurſus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia ſunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, oſtenſus maior angulo KAE; [b] erit & baſis HI, maior baſe KE. Quare cum DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: [c] Sed DK, KE maiores ſunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE, Quod eſt propoſitum.

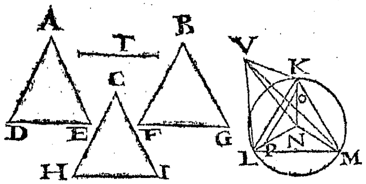
PROBL. 3. PROPOS. 23. 23.

EX tribus angulis planis, quorũ duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac cõditione, vt ꝗlibet duo ſint maiores reliquo. Oportet iã ex tribus angulis A, B, C, angulũ ſolidũ cõficere, qui nimirũ contineat tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis ſint ęquales. Ponãtur ſex lineę angulos dictos cõprehendẽtes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; ſubtendãturq; baſes DE, FG, HI. [d] Fieri ergo põt, vt ex DE, FG, HI, triangulũ cõſtituatur



[a] 4. primi.
[b] 24. primi
[c] 20. primi
[d] 22. vnde.



ſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triãgulum KLM, ſitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectę FG; & latus KM, rectæ HI, æquale . [a] Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrũ N, a quo ducantur rectæ N K, NL, NM. Eritq; quęlibet rectarũ angulos planos cõprehendẽtium, nẽpe A D, AE, &c. maior qualibet ductarũ ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrũ N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quãdo triangulũ eſt oxygonium, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. cõſtat. Si igitur A D, AE, maiores nõ credãtur, quã NK, NL, erũt vel ęquales, vel minores. Sint ergo æquales. Qm̃ igitur latera A D, AE, trianguli A DE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, triãguli NKL; & baſis DE, baſi KL, ęqualis: [b] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodẽ argumẽto erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cũ igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum, ponuntur.n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt A D, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neque minores. Si.n. minores ſint A D, AE, quã NK, NL, abſcindãtur NO, NP, ipſis A D, AE, æquales, ducaturq; recta O P. Quoniã igitur eſt vt NK, ad NO, [c] ita NL, ad NP, cũ & antecedẽtia inter ſe, & cõſequẽtia ſint inter ſe æqualia; erũt latera NK, NL, triãguli NKL, ſecta proportionaliter; [c] ac proinde OP, ipſi KL, parallela erit. [d] Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, ęquales erũt, & triangulũ NOP, triãgulo NKL, æquiangulũ. [e] Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Eſt aũt NK, maior quã NO. [f] Igitur & KL, hoc eſt, DE, quę ęqualis eſt ipſi KL, maior erit, quã OP. Quocirca cũ latera A D, AE, triãguli A DE, ſint ęqualia lateribus NO, NP, triãguli NOP, & baſis DE, maior baſe OP,

[a] 5. quarti.

[b] 8. primi.

[c] 2. ſexti.

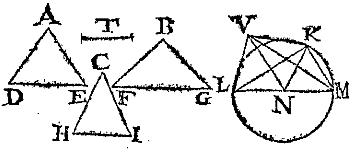
[d] 29. primi

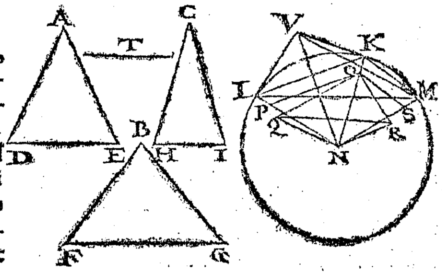
[e] 4. ſexti.

[f] 14. quinti

ſe OP; [a] erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadẽ ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior eſſe oſtẽdetur. Cũ igitur tres anguli ad N, quatuor ſint rectis ęquales, ex coroll. ꝓpoſ. 15. lib. 1. erũt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Qđ eſt abſurdũ. ponũtur.n. quatuor rectis minores. Nõ igit̃ minores sũt A D, AE, q̃ NK, NL; ſed neq; ęquales. Igit̃ maiores.

CADAT deinde centrũ N, in latus LM; quod tũ cõtinget, quãdo triangulũ KLM, angulũ LKM, habuerit rectũ, vt ex eodẽ coroll. propoſ. 5. lib. 4. manifeſtũ eſt. Si igitur A D, A E, dicãtur eſſe æquales ipſis NK, NL; erũt quoq; BF, BG, æquales eiſdẽ NK, NL. Cũ ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; ęquales erũt BF, BG, rectæ LM: Poſita autẽ fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque ſunt rectæ FG. [b] Sunt autẽ & maiores BF, BG, quã FG. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt A D, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi A D, A E, minores credãtur, quam NK, NL; erũt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cũ ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdũ, [c] cum ſint maiores. Non ergo minores ſunt A D, A E, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.





CADAT poſtremo centrũ N, extra triãgulũ KLM, infra latus LM, qđ demũ accidet, quãdo angulus LKM, fuerit

[a] 25. primi

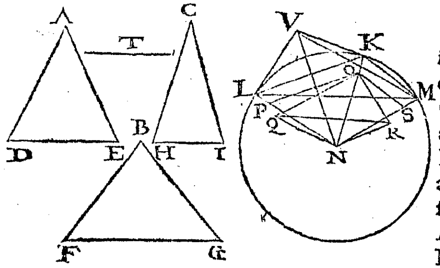
[b] 20. primi

[c] 20. primi

obtuſus, vt ex coroll. dicto propoſ. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicatur *AD*, A E, eſſe æquales ipſis NK, NL; cum & baſis D *E*, baſi *K*L, ponatur æqualis; [a] erit angulus A, angulo *K*NL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Qnare totus angulus LMN, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LN*M*, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera N L, N *M*, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, B G, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æqualis; [b] erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorẽ oſtẽdimus eſſe. Quod eſt abſurdũ. Nõ igitur æquales ſunt AD, A E, ipſis N*K*, NL.

[a] *8. primi.*

[b] *8. primi.*



Quod ſi AD, AE, credantur eſſe minores, quã NK, NL; ſi abſcindantur NO, NP, ipſis AD, *A*E, æquales, & ducatur recta OP; demonſtrabitur, vt in primo caſu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. [c] Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipſis AD, AE, & connectantur OQ, O*R*; cadetque O Q, infra O P, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſeat circumferentia circuli ex N, ad interuallum N O, deſcripta, cum æquales ſint rectæ N O, ,NP, NQ. [d] Quare cum angulus P O N, æqualis ſit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi K M. Cadet enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus L *K* M, toto angulo Q O R, maior erit. Quoniam vero latera N O, N Q, trianguli N O Q, æqualia ſunt lateribus A D, A E, trianguli A D *E*; Eſt

[c] *32. primi*

[d] *29. primi*

autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem; [a] erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi *K*L, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, ęqualis. Connexa iam recta Q R, cum latera *K*L, *K*M, trianguli L*K*M, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus: [b] erit baſis LM, hoc eſt, F*G*, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, B*G*, trianguli B*FG*, æqualia ſũt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & baſis F*G*, maior baſe QR; [c] erit angulus B, maior angulo Q N R. *R*urſus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ON*R*, angulo C, factus eſt ęqualis, erit angulus totus QNR, duobus *A*, & *C*, ęqualis: Sed *A*, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QN*R*, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdum, cum *B*, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſunt A*D*, AE, quam N*K*, NL; ſed neque ęquales: Igitur maiores.

[a] *4. primi.*

[b] *24. primi*

[c] *25. primi*

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis N*K*, *N*L, vbicunque centrum N, exiſtat; poſſit recta AD, plus quam recta N*K*, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ *A*D, æquale ſit quadratis rectarum N*K*, & *T*. [d] Ex centro N, excitetur ad planum circuli *K*LM, perpendicularis NV, rectę T, æqualis; connectanturq; rectę *K*V, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli *K*LM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas N*K*, NL, NM; [e] ac proinde quadratum rectę V*K*, quadratis rectarum *K*N, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectę A*D*, ęquale ſit ex conſtructione, eiſdem quadratis rectarum *K*N, NV; æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea ęquales erunt rectæ V*K*, AD. Rurſus quia latera VN, N*K*, triãguli VN*K*, ęqualia ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipſis contenti VN*K*, VNL, recti; [f] erit baſis V*K*, ęqualis baſi VL; Atque eadem ratione rectę VM. Quare tres rectę V*K*, VL, VM, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta V*K*, ęqualis rectę AD. Tres ergo rectę V*K*, VL, VM, æquales ſunt rectæ A*D*, & ob id, rectis AE, BF, B *G*, C *H*, CI. Quamob-

[d] *12. unde.*

[e] *47. primi*

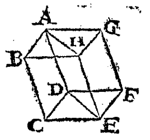
[f] *4. primi.*

rem, cum latera VK, VL, triãguli VKL, æqualia ſint la-
teribus BD, AE, trianguli ADE; & baſis KL, baſi DE;
a 8. primi. [a] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non ſecus demõ-
ſtrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulũ KVM, an-
gulo C, eſſe æqualem. Quare angulus ſolidus V, contine-
tur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales
ſunt dátis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq;
angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

24.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia, & æqualia.



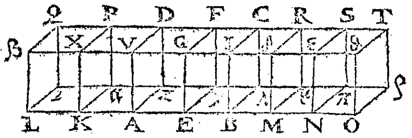
SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. ſex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramma, ſimilia, & æqua-
lia. Cũ enim parallela plana BG, CF,
b 16. vnde. ſecentur plano AC; [b] Erunt commu-
nes ſectiones AB, CD, parallelæ. Simi-
liter cum plana parallela AF, BE, ſe-
centur plano AC; erunt communes ſe-
ctiones AD, BC, parallelæ; Ac proin-
de parallelogrammum eſt figura qua-
drilatera ABCD. Non aliter oſtendemus, reliquas figu-
ras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppo-
ſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim
rectæ AB, BH, parallelæ ſint rectis DC, CE, & nõ in eo-
c 10. vnde. dem plano, ſed in oppoſitis; [c] erunt anguli ABH, DCE,
æquales; eodemque argumento reliqui anguli paralle-
logrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelo-
d 34. primi grammi CF. [d] Quoniam vero AB, ipſi ipſi DC, in paralle-
logrammo AC; & BH, ipſi CE, in parallelogramo BE,
æqualis eſt; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac pro-
pterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de cau-
ſa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa
angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelo-
gramma ipſa ſimilia. Ductis iam diametris AH, DE,
[a] cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia ſint late- a 34. primi
ribus DC, CE, trianguli DCE; [b] & angulus ABH, angu- b 10. vnde.
lo DCE, æqualis, vt oſtenſum eſt; [c] erunt triangula c 4. primi.
ABH, DCE, æqualia inter ſe. [d] Quare cum triangula d 34. primi
ABH, DCE, dimidia ſint parallelogrammorũ BG, CF;
erũt parallelogrãma BG, CF, inter ſe æqualia. Similiter
demonſtrabimus ſimilia & æqualia eſſe parallelogrãma
oppoſita AC, GE; & AF, BE. Si ſolidum ergo parallelis
planis contineatur, aduerſa illius plana, parallelogrãma
ſunt, ſimilia, & æqualia. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

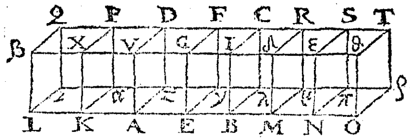
25.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppoſitis planis AD, BC. Dico vt eſt baſis AG, ad baſin BG, ita eſſe ſolidum AEFD, ad ſolidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productũ in vtramque partem quantumlibet, ſumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipſi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipſi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela



lela planis AD, EF, BC, per ſcholiũ ꝓpoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur ſolidum AEFD, cõtinetur planis parallelis ex hypotheſi; ipſum parallelepipedũ erit, ex definitione, [a] habebitq; plana oppoſita, parallelogrãma ſimilia, & ęqualia. Eodẽ mõ erũt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana oppoſita, parallelogrãma ſimilia, & æqualia. [b] Quoniam vero parallelogrãma AG, KV, LX, cũ ſint ſuper ęquales baſes AE, AK, KL, æqualia ſunt; & ſimilia quoq;, [c] cũ anguli vnius ſint ęquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius ęqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione ęqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma AY, KZ, Lα. Cũ igitur ęqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogrãma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, ęqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD; & tribus planis LX, Lα, LQ, ſolidi KLQP: [d] Sũt autẽ tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodẽ, nẽpe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EF. &c. Igitur per defin. 10. huius lib. ęqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento ęqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG, (multiplex baſis AG, primę magnitudinis,) ęqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) ęquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartę magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, ęqualibus exiſtẽtibus, ęqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogrãma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidũ quoq; ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacũq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidũ AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidũ BEFC, quartam magnitudinem. Eadẽ ratione demonſtrabitur eſſe ſolidũ ad ſolidũ, vt eſt baſis DY, ad baſin CY; & vt baſis AY, ad baſin BY; & vt baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidũ igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 24. vnde.

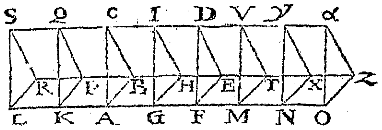
[b] 36. primi

[c] 29. primi

[d] 24. vnde.

SCHOLIVM.

HAEC propoſitio accommodari etiã poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF; ſeceturq; plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur .n. priſma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productũ, & ex AF, protracta vtrinque capiãtur quotcũque rectæ AK, KL, ipſi AG; & quotcũq; rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS; MTV, NXY, OZα, parallela planis ABC, GHI, FED, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI; [a] erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH; [b] erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammũ oſtẽdetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus

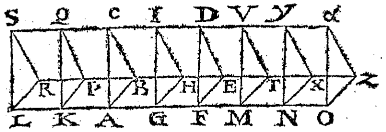


[a] 16. vnde.

[b] 16. vnde.

a 34. primi
b 10. vnde.
c 4. primi.
d 4. ſexti

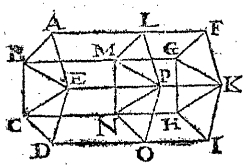
teribus GI, GH, trianguli GHI; [a] cum AC, ipſi GI, & AB, ipſi GH, ſit ęquale; [b] & anguli CAB, IGH, ſunt quoque ęquales, eo quod rectę CA, AB, parallelę ſũt rectis IG, GH, & non in eodẽ plano; [c] Erunt triãgula ABC, GHI, ęqualia inter ſe, & ęquiangula. [d] Quare latera circum ęquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum ABCIHG, contentum duobus planis oppoſitis ABC, GHI, ęqualibus & ſimilibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, priſma eſt. Eadẽ arte priſmata erunt ABCQPK, KPQSRL; FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniã vero parallelogramma AI, KC, LQ, ęqualia ſunt & ſimilia; necnon AH, KB, LP; & CH, QB, SP; erunt omnia plana priſmatis ABCIHG, ęqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defin. 10. huius lib. ęqualia erunt priſmata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione ęqualia erunt priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quam multiplex eſt baſis LI, baſis AI, tam multiplex erit priſma LRSIHG, priſmatis ABCIHG; & quam multiplex eſt baſis OI, baſis FI, tam multiplex erit priſma PZαIHG, priſmatis FEDIHG. Quia vero ſi baſis LI, (multiplex baſis AI, primę magitudinis) ęqualis eſt baſi OI, (multiplici baſis FI, ſecundę magnitudinis;) ęquale quoque eſt priſma LRSIHG, (multiplex priſmatis ABCIHG, tertię magnitudinis,) priſmati OZαIHG, (multiplici priſmatis FEDIHG, quartę magnitudinis;) propterea quod baſibus LI, OI, exiſtentibus ęqualibus, ęqualia quoque ſunt & ſimilia omnia plana priſmatis LRSIHG, omnibus planis priſmatis OZαIHG: Si autem baſis LI, maior eſt baſe OI, priſma quoque priſmate maius eſt; & ſi minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt baſis AI, prima magnitudo ad baſin FI, ſecundam magnitudinẽ, ita priſma ABCIHG, tertia magnitudo ad priſma FEDIHG, quar-



tam

tam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, vt eſt baſis AH, ad baſin FH: & vt baſis CH, ad baſin DH. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde priſma ABCDEFGHIK, cuius oppoſita plana ſint polygona, nempe pentagona, ſeceturque plano LMNOP. Dico rurſus vt eſt baſis CM, ad baſin NG, ita eſſe ſolidum ABCDELMNOP, ad ſolidum LMNOPFGHIK. Si enim plana oppoſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoq; priſma in totidem priſmata, quorum plana oppoſita ſunt triãgula, reſolutum. Quare erit vt baſis BP, ad baſin MK, ita priſma ABEPML, ad priſma LMPKGF, per ea, quę demonſtrata ſunt. Eodem modo erit vt baſis CP, ad baſin NK, ita priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH; & priſma CDEPNO, ad priſma NOPKHI. [a] Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita eſt recta EP, ad rectam PK, hoc eſt, vt CN, ad NH; & vt CN, ad NH, ita eſt CM, ad NG. Igitur priſmata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad priſmata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandẽ inter ſe. [b] Vt autem vnũ ad vnũ, ita ſe habent omnia ad omnia. Igitur erit vt priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, hoc eſt, vt baſis CM, ad baſin NG; ita priſma ABCDELMNQP, ex tribus compoſitum ad priſma LMNOPFGHIK, ex tribus conſtatum. Quod eſt propoſitum. Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunque alio priſmate.



a 1. ſexti.
b 12. quin.

POTEST tamen hoc idem in omni priſmate oſtẽdi demonſtratione, qua vſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita, triangula ſimilia. Si enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in vtramque partem, erunt omnia plana parallela ſecantia, inter ſe ęqualia, & ſimilia; [c] propterea quod latera eorum ſunt parallela, nempe communes ſectiones parallelorum planorũ; [d] ac proinde angulos ęquales cõprehendũt, &c. Vnde, vt prius, oſtendentur priſmata ex vna parte inter ſe ęqualia, necnon & priſmata ex altera parte, &c.

c 16. vnde.
d 10. vnde.

COROL-

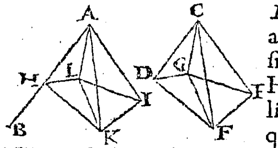
COROLLARIVM.

EX his infertur, ſi priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectionem eſſe figuram æqualem & ſimilem planis oppoſitis: Veluti demonſtratam eſt, in priori priſmate, triangulum GHI, æquale eſſe & ſimile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus eſt demonſtratio. Idem dices de parallelepipedo.

26.

PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiuſque punctum angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.



SIT ad punctum A, in data recta AB,conſtituendus
angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, contento tri-
bus angulis planis DCE,DCF, FCE, non in eodem pla
a 11. unde. no exiſtentibus. a Ducatur ex F, ad planũ per CD, CE,
ductum perpedicularis F G; connectanturq; rectæ DF,
DG,EF, EG, CG. Deinde
abſcindatur AH,ęqualis ip
b 23.primi ſi CD, b fiatque angulus
HAI, angulo DCE, æqua-
lis;& recta AI, rectæ CE,æ-
qualis. Rurſus in plano per
AH,AI,ductũ cõſtituatur angulus HAL, æqualis angu
lo DCG, qui in plano p̱ CD,CE, ducto exiſtit; & recta
c 12.unde. AL,rectæ CG,æqualis.c Ex L,vero ad planũ,in quo sũt
tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LA,quæ ip
ſi F G, æqualis ponatur,& coniungatur recta K A. Dico
angulũ ſolidũ A,contentum tribus planis angulisHAI,
HAK, KAI,æqualem eſſe dato angulo ſolido C.Conne
xis.n. rectis HK,HL,IK,IL;cũ latera AH,AL,triãguli
AHL,

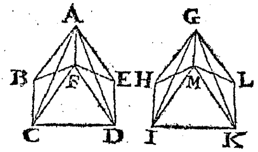
AHL,æqualia ſint lateribus CD,CG, triãguli CDG,&
anguli HAL,DCG,æquales,per conſtructionem;a Erũt a 4. primi.
baſes HL, DG, æquales. Rurſus quia ablatis angulis
æqualibus HAL,DCG,ab æqualibus HAI, DCE, reli-
qui æquales ſunt LAI,GCE: Cum igitur & latera AL,
AI, trianguli ALI,æqualia ſint lateribus CG,CE,trian b 4. primi.
guli CGE, per conſtructionem; b æquales quoque erunt
LI,GE. Quia igitur latera LH,LK, æqualia ſunt lateri
bus GD,GF;& anguli HLK'DGF,recti, ex defin.3.hu c 4. primi.
ius lib.c erũt & baſes HK,DF,æquales. Quare cũ & late
ra AH,AK, triãguli AHK, ſint æqualia lateribus CD,
CF,triãguli CDF,ex cõſtructione.(cũ.n.AL,LK, latera
lateribus CG,GF, æqualia ſint ex conſtructione, com-
prehendantque angulos æquales,nimirum rectos ex de-
fin.3.huius lib. d erunt baſes AK,CF,æquales.) e Erunt d 4. primi.
quoque anguli HAK,DCF, æquales. Denique quia la- e 8. primi.
tera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli
ILK,EGF,recti,ex defin.3.huius lib. f Erunt baſes IK, f 4. primi.
EF, æquales:Cũ igitur & latera AI, AK, triãguli AIK,
lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex con-
ſtructione; g Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. g 4. primi.
Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidũ
angulum A, componẽtes,æquales tribus angulis planis
DCE,DCF,FCE,angulum ſolidum C,componentibus;
Atq; proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C,æqua
lis. Ad datam itaque rectam lineam, eiuſque punctum,
angulum ſolidum conſtituimus ſolido angulo dato æ-
qualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramisq; quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot

triangula

triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur; quorum quilibet tribus angulis planis cõtinetur; conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.



VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendendæ ſunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pẽtagonum BCDEF, quod in tria triãgula reſoluatur BCF, FCD DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, cõtentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, cõtẽtus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.

27.

PROBL. 5. PROPOS. 27.

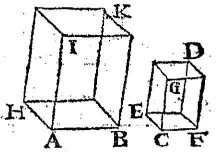
A DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

SIT a data recta A B, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterque poſitum parallelepipedo CD. [a] Fiat ad rectam AB, eiuſque punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, B A H, æquales ſint tribus angulis planis E C G,

[a] *26. vnde.*

GCF, FCE. Deinde vt eſt CF, ad CG, [a] ſic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH.

[a] *12. ſexti.*



Poſt hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrãmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cum enim anguli B A H, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia; nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione; erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [b] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita, ſolida AK, CD. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[b] *24. vnde.*

28.

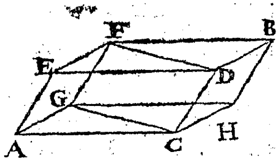
THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana oppoſita ſint AH, EB, quorum diagonij, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela eſt, [c] & æqualis ipſi AE, cum ſint parallelogramma

[c] *34. primi*

[a] 9. vndec. CE, GE; [a] erunt & inter ſe parallelæ, & æquales CD,
[b] 33. primi GF. [b] Ac proinde, quæ ipſas coniungunt CG, DF, paral-



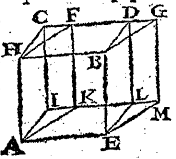
lelæ erũt, & æquales, ideo-
que in vno plano. Dico pla-
num, quod per CG, DF, du-
citur, ſecare bifariam pa-
[c] 24. vnde. rallelepipedum AB. [c] Cum
enim plana AH, EB, ſunt
parallelogramma æqualia,
& ſimilia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula
AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter ſe: Sunt autem
& latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED,
[d] 16. ſexti. DBF, proportionalia. [d] Igitur ſimilia quoque erunt di-
[e] 24. vnde. cta triangula. [e] Cum igitur & parallelogrammum AF
æquale ſit & ſimile parallelogrammo CB; & AD, ipſi
GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD,
& parallelogramma AF, AD, CF, priſmatis ACGFED,
æqualia & ſimilia duobus triangulis HCG, BDF, & pa-
rallelogrammis CB, BG, CF, priſmatis HGCDBF,
proptereaque priſmata ęqualia erunt, ex defin. 10. hu-
ius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, ſe-
ctum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque ſi ſo-
lidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat
demonſtrandum.

29. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt,
inter eadem plana parallela, ſint conſtituta duo paralle-
lepipeda ACDE, AFGE, quorum inſiſtentes lineæ ex
quatuor angulis baſis exeuntes in iiſdem collocentur li-
neis,

neis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; &
HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda
ACDE, AFGE, eſſe inter ſe ęqualia.



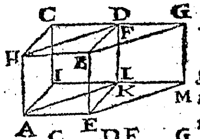
[a] 35. primi [a] Cum enim æqualia ſint parallelogrã-
ma AL, AM, ſuper eadem baſi AE, &
in eiſdem parallelis conſtituta; erunt,
ablato cõmuni trapezio AELK, ęqua-
[b] 34. primi lia quoq; triangula AIK, ELM. [b] Quo-
niam vero omnia latera triãguli AIK, æqualia ſunt om-
nibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK,
triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad
[c] 4. ſexti. 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus; [c] Ac propterea latera circa
æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque in-
ter ſe erunt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM,
[d] 24. vnde. triangulo BDG, æquale erit & ſimile. [d] Rurſus paralle-
logrammum AC, æquale eſt; & ſimile parallelogrammo
ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelo
[e] 36. primi grammo EG; [e] Sed & IF, ipſi LG, cum baſes IK, LM, ſint
ęquales. ([f] Nam cum rectæ IL, KM, æquales ſint ipſi AE,
erunt quoq; inter ſe æquales; quare cõmuni dempta KL,
ęquales erunt IK, LM.) Erũt ergo omnia plana priſma-
tis AIKFCH, ęqualia & ſimilia omnibus planis priſma-
tis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erũt
dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido
AHFKLDBE, ęqualia fient parallelepipeda ſuper ean-
dem baſin, &c, Quod erat demonſtrandum.

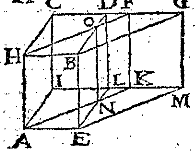
SCHOLIVM.

HAEC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere mediis, dummodo loco triangulornm aſſumantur priſmata, vt ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK,

ELM,

ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AI-*KFCH, ELMGDB*. Addito *ergo priſmate communi* AK-*EBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.*





IN tertio vero caſu, ſi ex parall grammis æqualibus A L, A M, *demtur triangulum commune* ANE, *eru reliqua trapezia AILN*, N K *ME, æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune* KLN, *tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius æqualia erunt priſmata A I* K *FCH ELMGDB; a quibus ſi auferatũ priſm commune* KLNO *DF; (Nam communis ſectio planorum AF, DE, eſt recta* NO.) *remanebit ſolidum cõprehenſum planis AILN, NOHA, AICH*, HCDO *CDLI, DLNO, æquale ſolido contento planis* E N *KM MKFG, GFOB*, F*KNO, BGME*, E*BON. Si igitur addatur vtrique priſma commune* AENOBH *; fient parallelepipeda ACDE*, A*FGE, inter ſe æqualia.*

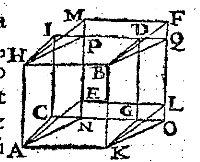
30\.

THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in ijſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

SVPER baſin A*B*, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes *A*C, AE, KG, KL; HI, *H*M, BD, BF, non ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neq; CI, GD, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, eſſe æqualia.

æqualia. Cum enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ C G, I D, quarum CG, ſecet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et *I*D, eaſdem in punctis P, Q; adiunganturq; rectæ AN, KO, *H*P, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponãtur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, *H*B, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammũ HI*D*B. [b] Igitur & HP, *B*Q, parallelæ ſunt & æquales, ideoque parallelogrammum eſt *H* PQB. Eadem ratione parallelogrãma erunt *H*PNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & pallelogrammum N O Q P. Igitur parallelepipedum eſt APQK. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale eſt parallelepipedo APQK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem C O, I Q. Eodem modo eidem parallelepipedo *A*PQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, A*M*FK, inter ſe ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 34.primi

b 33.primi

c 29.vnde.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propoſitio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſin, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine.

NAM ſi vnũ dicatur altius; ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abſciſſum,

[a] 29. vel 30. vndec.

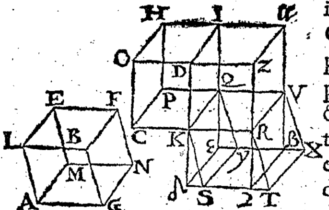
abſciſſum, & reliquum.[a] *Cum igitur & totũ huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abſciſſum toti. quod eſt abſurdum.*

31. 32.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SVPER æquales baſes AB, CD, in eadẽ altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hęc parallelepipeda eſſe ęqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictę perpendiculares inter ſe ęquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, ſitque KR, ęqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo ęqualis angulo BLA, ponaturq; KS, ęqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, ęqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, ęqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, ęqualia ſunt lateribus LE, LA; & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectę ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogrãma QS, EA, ęqualia & ſimilia. Eodem modo cũ latera KR, KQ, ęqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, ęqualia & ſimilia.[b] Quare cum tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, ęqualia ſint & ſimilia tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG; [a] tam autem illa, quam hæc ęqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter ſe ęqualia.



[b] 24. vnde.

[a] 24. vnde.

CONVENIANT rectę DK, TS, productę in δ; & IQ, XY, in ε, compleaturque parallelepipedum QδγV. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, QδγV, eandem habent baſin KV, ſuntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & inſiſtentes ipſorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ; QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eiſdem rectis δT, εX; [b] ipſa inter ſe ęqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum QδγV.

[b] 29. vnde.

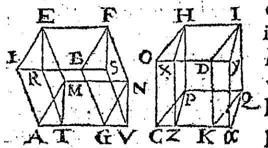
[c] QVONIAM vero parallelogrãma KT, Kγ, ęqualia ſunt inter ſe; & KT, ęquale eſt ipſi LG, erit & Kγ, ipſi LG, hoc eſt, ipſi CD, ęquale; cum baſes LG, CD, ponantur ęquales. [d] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: [e] Vt autem CD, baſis ad baſin DR, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KIαR; cũ parallelepipedũ CHαR, ſecetur plano IK, planis oppoſitis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita eſt ſolidũ QδγV, ad ſolidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, ſecetur plano KV, oppoſitis planis Dα, δβ, parallelo. [f] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, QδγV; cum eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKRα. Quare cum parallelepipedũ QδγV, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepida AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum.

[c] 35. primi
[d] 7. quin.
[e] 25. vnde.
[f] 9. quinti.

SINT iam neque inſiſtẽtes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; neque CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares: [g] Et a punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo baſis AB, perpendiculares; Item a punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpẽdiculares inter ſe æquales, cũ ſint altitudines dictorum parallelepipedorũ æquales. Ducantur re

[g] 11. vnde.

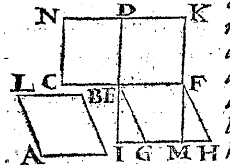
ctæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum ſint eiuſdem altitudinis, habeantque inſiſtentes lineas perpendiculares, erunt inter ſe æqualia, vt oſtenſum eſt. [a] Sed parallelepipedum ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat baſin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK, cum hoc eandem cum illo baſin HQ, eandemque altitudinem poſsideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque oſtendetur, ſi vnius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat.



[a] 29. vel 30 vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, duo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia; Nimirum *ex ſolis baſibus, ſine conſtructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ſit demonſtratio illius, quæ noſtra. Sint enim duæ baſes æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes AB, CD, ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes* E. *Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo* L; *& recta EF, rectæ LB; & recta EG, rectæ* L*A, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum* EH, *quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur ſuper baſes* EH, *IF,* EK, *conſtituta parallepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper AB, CD, conſtructis; ſintque inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper* EH, *æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem:* [a] *Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper* E*H, IF, cum habeant baſin eandem, cuius infimum latus* E*F, erectam ſuper planũ I*K; *Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima* GH, *IM, in eodem plano, cuius infimum latus I*H; *atque inſiſtentes lineas* EG, F*H,* EI, *FM, &c. in eiſdem rectis lineis I*H, *&c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper IF, parallelepipedo ſuper AB.* [b] *Quoniam vero parallelogramma* EH, *IF, æqualia ſunt; &* EH, *æquale eſt ipſi* CD: *æqualia erunt IF, CD.* [c] Erit *igitur, vt IF, ad* EK, *ita* CD, *ad* EK: [d] E*ſt autem vt IF, ad* EK, *ita ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper* EK, *quod ſolidum ſuper I*K, *ſecetur plano ſuper* EF, *erecto parallelo planis ſuper* DK, *IM, erectis.* Et *eadem ratione, vt* CD, *ad* EK, *ita ſolidum ſuper* CD, *ad ſolidum ſuper* EK, *cum ſolidum ſuper* CK, *ſecetur plano ſuper* DE, *erecto parallelo planis ſuper* CN, FK, *erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper* EK, *ita ſolidum ſuper CD, ad ſolidum ſuper* EK; [e] *Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper IF, & CD. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper IF, æquale parallelepipedo ſuper AB. Aequalia ergo erunt & parallelepipeda ſuper AB, CD. Quod eſt propoſitum.*



[a] 29. vnde.

[b] 35. primi

[c] 7. quinti.

[d] 25. vnde.

[e] 9. quinti.

CONVERTETVR quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda ęqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

SI enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, [a] *fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

a 31. unde.

QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo, partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

33. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes.

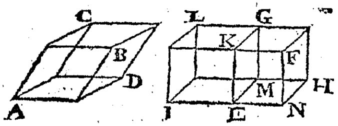
SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiuſdem altitudines ſuper baſes AB, EF. Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. [b] Super rectam enim EK, conſtruatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui ſit æqualis angulo ENF, Conſtituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propoſ. lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, pducantur ad partes EG, perficiaturq; totũ vnũ parallelepipedũ IFLH; [c] erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, ęqualia, cũ habeãt æquales baſes, per conſtructionẽ AB, IK; & eandẽ altitudinẽ, ex hypotheſi. [d] Quare erit vt ſolidum IKLM, ad ſolidũ EFGH, ita ſolidum ABCD, ad ſolidum EFGH: [e] Eſt autem ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, vt baſis IK, hoc eſt, illi ęqualis baſis AB, ad baſin EF. Igitur & ſolidũ ABCD, erit ad ſolidũ EFGH, vt baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

b 45. primi

c 31. unde.

d 7. quinti

e 25. vnde.



SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadẽ credatur altitudo; ex maiori abſcindatur minori æqualis, & ducatur planum baſi parallelum; [a] *eritq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abſciſſum: ſed ſic quoque erat ad totum.* [b] *Abſciſſum ergo æquale eſt toti. Quod eſt abſurdum.*

a 32. vnde.

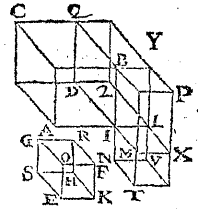
b 9 quin.

THEOR. 28. PROPOS. 33. 36.

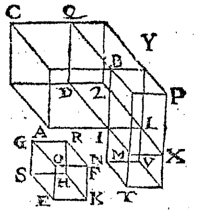
SIMILIA ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT ſimilia parallelepipeda ABCD, EFGH, ſuper baſes ſimiles AB, EF, in quibus latera homologa ſint AI, EK. Dico proportionẽ parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & ſit IL, æqualis ipſi EK, vel GR; Item DI, ad M, & ſit IM, æqualis ipſi HK, vel GO; Item BI, ad N, & ſit IN, æqualis ipſi KF, vel GS. Deinde cõpletis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia ſunt lateribus GR, GO; [c] & anguli cõtenti æquales, cũ angulus LIM, ſit æqualis angulo AID, qui ob ſimilitudinem parallelepipedorum æqualis

c 15. primi



æqualis eſt angulo EKH, ſeu RGO; erunt parallelogrã ma IX,GF, ſimilia & æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt, & æqualia LN,RS; item IT,GE. Quare tria plana IX,LN,IT, parallelepipedi TXIV, ſimilia ſunt & æqualia tribus planis GF,RS,GE, parallelepipedi EFGH : *a 24.vnde.* [a] Sunt autem tria cuiuſq; ſimilia & æqualia tribus reliquis oppoſitis. Igitur ęqualia ſunt & ſimilia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. huius lib. Rurſus completis parallelogrammis MB, BL,LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY,DL,IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem parallelepipedorũ ABCD, EFGH, eſt vt AI, ad EK, hoc eſt, ad IL, ita DI, ad HK, hoc eſt, ad IM; & BI, ad FK, hoc eſt, ad IN. *b 1. ſexti.* [b] Vt autem AI, ad IL, ita eſt parallelogrammum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad L M; & vt BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. *c 32. vnde.* [c] Sed vt AD, baſis ad DL, baſin, ita eſt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt baſis DL, ad baſin LM, ita pallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP; & vt baſis BL, ad baſin LN, ita parallelepipedũ LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Quare erit, vt parallelepipedũ ADCB, ad parallelepipedũ DLYQ, ita parallelepipedũ DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Ac ꝓinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; ꝓportio primæ ADCB, ad quartã LNTX, hoc eſt, ad EFGH, erit triplicata ꝓportionis primę ADCB, ad ſecundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. *d 32. vnde.* [d] Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita eſt baſis AD, ad baſin DL; *e 1. ſexti.* [e] Et vt AD, ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc eſt, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, eſt triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonſtrandum.



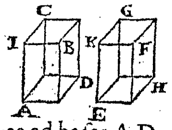
COROLLARIVM.

EX hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonſtratum eſt, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad ſecundam, nimirum laterũ homologorum.

THEOR. 29. PROPOS. 34. 34.35.

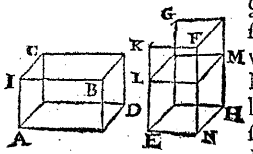
AEQVALIVM ſolidorum parallelepipedorũ baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD,EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primũ inſiſtentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æqua-



æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholiũ propoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadẽ ratione, baſis KN, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, cãdem habeant altitudinem, ſi nimirũ baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: [c] Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.



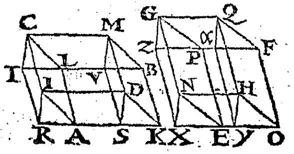
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelũ baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin

[a] 7. quinti.
[b] 32. vnde.
[c] 1. ſexti.
[d] 31. vnde.
[e] 32. vnde.

EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; [a] Et vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN; [b] Vt autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum DHGF, ad ſolidum EHML, cũ ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erũt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML; [c] ideoque æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum inſiſtẽtes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non ſint perpẽdiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autẽ a punctis I, D, M, C, ad planũ baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Itẽ a pũctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntq; perpẽdiculares RI, XN, parallelepipedorũ altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinẽ XN, ad altitudinẽ RI. [d] Cũ enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, [e] ſit autem ABCD, æquale ſolido RVCD, quod habeant eandem baſin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadẽ ratione, æquale ſolido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH; erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Constructa enim figura, vt prius; Cum ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; [e] Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin

[a] 1. ſexti.
[b] 32. vnde.
[c] 9. quinti.
[d] 29. vel 30. vndec.
[e] 24. vnde.

baſin GH, ſolidi X*a*GH, ita altitudo XN, ad altitudinẽ RI. Quare cum XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ, perpendiculares ad baſes C D, G H; erunt, vt iam oſtenſum eſt, *a 29, uel 30 vndec.* æqualia parallelepipeda RVCD, X*a*GH. [a] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualis. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH: Idemque oſtendetur ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædicta hypotheſes ſeruentur. Nam *ſi duobus priſmatis eiuſmodi eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis, apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exi-* *b 29, 30. uel 31. undec.* *ſteneia, [b] Quare æqualia erunt eiuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.*

RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & ſuper diuerſas baſes conſtitutis adiiciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo *c 32. vnde.* *parallelepipeda eiuſdem altitudinis. [c] Quare erit paral-* *d 15. quin.* *lepipedum ad parallelepipedum, vt baſis ad baſin; [d] Atque adeo priſma ad priſma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.*

PRAETEREA, ſi duobus priſmatis præfatis ſimilibus addãtur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, con- *e 33. vnde.* *ſtituentur duo parallelepipeda ſimilia, [e] quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.* *f 15. quin.* *[f] Igitur & priſmata, eorum nimirum dimidia, cum eandem*

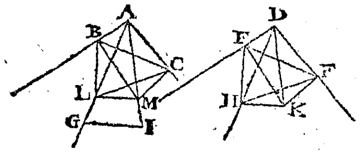
habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatã proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum.

DENIQVE ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adiungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum priſmatis. [a] Quare cum baſes, & altitudines parallele- *a 34. vnde.* *pipedorum ſint reciprocæ; & baſes priſmatum eædem ſint, vel certe triangula earum dimidia eandem habentia proportio-* *b 15. quin.* *nem; [b] Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ.*

THEOR. 30. PROPOS. 35. 37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In ſublimibus autẽ lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, ſit æqualis: a ſumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demit



tantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, exiſtunt
perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, &
adiungantur rectę IA, KD. Dico angulos GAI, HDK,
eſſe æquales inter
ſe. Nã ſi AG, DH,
ſunt inæquales, au
feratur a maiori
AG, ipſi DH, æ-
qualis linea AL;
& ex L, ad planum
anguli BAC, perpendicularis demittatur LM. Quoniã
[a] 6. vndec. igitur GI, LM, rectę ſunt ad planum anguli BAC; [a] ipſæ
erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in
plano trianguli AGI. Quare LM, cadet in rectam AI.
Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC,
DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF; & conne-
ctantur rectę BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, re-
cta eſt ad planum anguli BAC, ipſa rectum angulum ef-
ficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin.
[b] 47. primi 3. huius lib. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit
[c] 47. primi quadratis rectarum AM, ML: [c] Eſt autem quadratum re-
ctæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum &
angulus ACM, rectus ſit, ex conſtructione. Qua-
dratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum
[d] 47. primi AC, CM, ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æqua-
le eſt quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus
ſit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectę AL, æ-
[e] 48. primi quale eſt quadratis rectarum AC, CL; [e] Ac proinde an-
[f] 47. primi gulus ACL, rectus erit. [f] Rurſus quia quadratum rectæ
[g] 47. primi AL, æquale eſt quadratis rectarum AM, ML: [g] Eſt autem
quadratum rectę AM, æquale quadratis rectarum AB,
BM, cum angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus.
Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis recta-
[h] 47. primi rum AB, BM, ML: [h] At quadratis rectarum BM, ML, æ-
quale eſt quadratum rectæ BL, quod & angulus BML,
ſit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ
[i] 48. primi AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [i] propterea-
que angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur
recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL,
LAB,

LAB, triãguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, [a] 26. primi
trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; [a] Erũt
& reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æ-
qualia. Eodem argumento æquales erũt rectæ AC, CL,
rectis DF, FH. Quare cũ latera AB, AC, trianguli ABC,
æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & angu-
li contenti BAC, EDF, æquales, ex hypotheſi; [b] erunt [b] 4. primi.
& baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis
DEF, DFE æquales: Sunt autem & toti anguli ABM,
ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cum omnes
ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis
angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum
& latera BC, EF, ſint oſtenſa ęqualia; [c] erunt latera BM, [c] 26. primi
CM, lateribus EK, FK, ęqualia. Quia igitur latera AC,
CM, trianguli ACM, ęqualia ſunt oſtenſa lateribus
DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, ſunt
recti; [d] erunt & baſes AM, DK, inter ſe ęquales. Cum au [d] 4. primi.
tem ęquales ſint oſtenſæ rectę BL, EH, erunt etiam ea- [e] 47. primi
rum quadrata æqualia: [e] Quia vero quadratum rectę
BL, ęquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadra-
tum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod angu
li BML, EKH, recti ſint, ex defin. 3. huius lib. Erunt &
quadrata rectarum BM, ML, ęqualia quadratis rectarũ
EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quę
ęqualia ſunt, quod rectę BM, EK, oſtenſę ſint ęquales;
reliqua quadrata rectarum LM, HK, ęqualia erunt, ac
proinde rectę LM, HK, ęquales. Quam ob rem cum late
ra AL, AM, trianguli ALM, ęqualia ſint lateribus DH,
DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, ęqualis;
[f] erunt & anguli LAM, HDK, ęquales. Si igitur fuerint [f] 8. primi.
duo anguli plani ęquales, quorum verticibus ſublimes
rectæ lineę inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

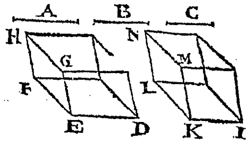
*ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æqua-
les, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales
inſiſtãt, quæ cũ lineis primo poſitis angulos contineãt
æquales, vtrũque vtrique. Erunt a punctis extremis*
linea-

linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

38. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A,B,C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A; & EF, ipſi B; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A,B,C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. [a] Deinde ad rectam IK, eiuſque punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG; ita vt rectę IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: [a] Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habēt circa æquales angulos reciproca. Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales, quorũ verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ ęquales angulos cõprehendũt cũ lineis primo poſitis, ex conſtructione, vtrũq;. vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. pręcedentis. [b] Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeāt baſes DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 26. vnde.

[a] 14. ſexti.

[b] 31. vnde.

SCHOLIVM.

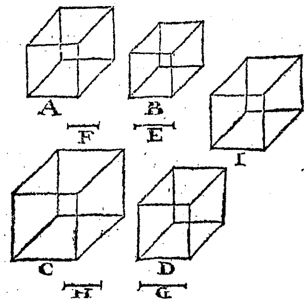
VICISSIM quoque, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo a media linea deſcripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum DH, deſcriptum ex rectis A,B,C, vt dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepipedo IN, deſcripto a media B. Dico tres A,B,C, eſſe continue proportionales. Nam veluti prius, oſtendentur eorum altitudines ex F,I, demiſſæ eſſe æquales. Quare cum & ipſa ponantur æqualia; erunt eorum baſes DH, IM, æquales per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. demonſtrauimus. Quæ baſes cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex cõſtructione; [c] habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc eſt, vt DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cũ DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

[c] 14. ſexti.

PROBL. 32 PROPOS. 37. 39.

SI quatuor rectę lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineę proportionales erunt.

SINT quatuor rectę proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; conſtituanturque ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta; item ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia, ſiue non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportonalia; Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duę continue proportionales E, F; Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineę A, B, E, F, & quatuor lineę alię C, D, G, H, quę binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex ęquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B; Et vt C, ad H, ita ſolidũ C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum D, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.



SINT iam econtrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoque proportionales. a Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, b ſuper quam deſcribatur parallelepipedũ ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur

a 12. ſexti.
b 27. vnde.

eſt, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam eſt oſtenſum, vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum I. Vt autem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ponitur quoque ſolidum C, ad ſolidum D: Igitur erit vt ſolidum C, ad ſolidum I, ita idem ſolidum C, ad ſolidum D. a Atque idcirco ęqualia erunt ſolida I, & D. Quę cum ſint ſimilia, ſimiliterque deſcripta, continebuntur planis ęqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana ęqualia, & ſimilia habent latera homologa æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales ſunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque ſi quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico eſſe quoque vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. b Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidum B, & ſolidi C, ad ſolidum D, ęquales; quandoquidem triplicatę ſunt proportionum ęqualium, nempe rectę A, ad rectam B, & rectę C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Dico eſſe quoque, vt recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. c Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, ęquales; quandoquidem earum proportiones triplicatę, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidum D, ęquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

b 33. vnde.
c 33. vnde

SCHOLIVM.

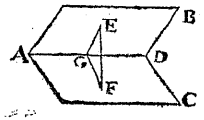
EODEM modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia ſimiliterque deſcripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiuſque ſolidum ſumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor ſolida proportionalia, vt demonſtratum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ lineæ; & linea ſecunda æqualis tertiæ lineæ; perſpicuum eſt, quod proponitur.

TOTA vero hæc propoſitio conuenit etiam priſmatis, quorum duo plana aduerſa æqualia, ſunt vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis priſmatis, quæ ſingula ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt. [a] *Cum igitur priſmata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipſis proportionem; perſpicuum eſt, quod proponitur.* [a] *15. quin.*

13.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM, n. AB, rectum ſit ad planum AC, ſitque eorum communis ſectio recta A D; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpēdicularis demittatur: quā dico cadere in communem ſectionē AD. Nam ſi fieri pōt, cadat extra ad punctum F, [b] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectā AD, perpēdicularis FG, connectaturq; recta EG, [b] *12. primi*

---

in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Eſt autem & EF, recta ad FG, per eandē 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti ſunt. quod eſt abſurdum; [a] cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex E, demiſſā ad planum AC, non extra communem ſectionem A D, cadet. ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] *17. primi*

SCHOLIVM.

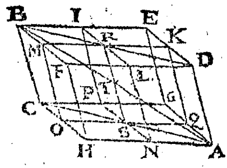
HÆC eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano A B, demiſſa perpendicularis ad planum A C, non cadit in communem ſectionem AD, ſed in punctum F, extra ſectionē; [b] *ducatur ex E, ad rectam A D, perpendicularis E G; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ ſunt ad ipſum planum A C, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.* [b] *12. primi*

THEOR. 34. PROPOS. 39.

40.

SI ſolidi parallelepipedi eorum, quę ex aduerſo, planorum latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariam ſe mutuo ſecabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana oppoſita AC, BD, quorum omnia latera bifariam ſecta ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quę extēſa ſint duo plana IN, KO, quorum



quorum ſectio communis ſit recta RS : Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrũ A B, ſe mutuo ſecare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; conſiderentur duo triangula AQS, COS. Quoniá igitur latera AQ, QS, trianguli AQS,
æqualia ſunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt
enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium A G, C H;
34.primi a & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum
b 29.primi ſint parallelogramma AS, HS.)[b] & angulus AQS, æqualis
c 4. primi alterno angulo COS:[c] Erunt & baſes AS, CS, æquales;
d 13.primi & anguli ASQ, CSO, æquales.[d] Atqui anguli ASQ,
ASO, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO,
e 14.primi duobus ſunt rectis æquales[e] Ac propterea AS, CS, vná
rectam lineam conſtituent. Eodem modo oſtendentur eſſe
æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam.
Rurſus quia vtraq; AD, BC, parallela eſt, & æqualis
f 9. vndec. rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC,[f] ipſæ quoq;
g 33. primi inter ſe parallelæ erunt, & æquales.[g] Quare & rectæ
AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ ſunt
& æquales; Ac proinde ipſarum dimidiæ AS, BR, æquales
h 7. vndec. ſunt. Quia vero AC, BD, parallelæ ſunt;[h] erunt rectæ
AB, RS, in eodem cum ipſis plano, ideoque ſe mutuo
i 29. & 15. primi. ſecabunt, in puncto uidelicet T.[i] Cum autem duo anguli
AST, ATS, trianguli AST, æquales ſint duobus angulis
BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR:
k 26. primi k Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB,
TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, ſe mutuo ſecant bifariam
in T. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum, quæ
ex aduerſo, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

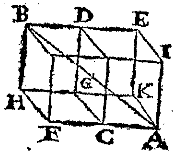
HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuo bifariam ſecare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonſtratum eſt, rectam RS.

HVIC

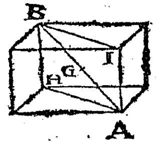
SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad propoſ. 34. primi lib. demonſtrauimus, videlicet.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

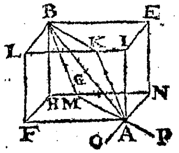


*SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc eſt, per pũctum medium diametri AB, quod ſit G.
Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sit enim primo planũ
CD, oppoſitis planis AE, BF, parallelum.[a] Et quia plana a 17. vnde.
parallela BF, DC, EA, ſecant rectas quaſcunque proportionaliter;
ſecatur autem BA, bifariam in G; ſecabuntur quoque latera aduerſorum
planorum AH, BI, atque adeo
& baſes AH, BI, bifariam.[b] Cum b 25. vnde.
igitur ſit vt baſis KC, ad baſim CH; ita ſolidum AD, ad ſolidum CB; erit parallelepipedũ AB, ſectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*



*TRANSEAT ſecundo planum ſecans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelipipedum per centrum G, im-
mo per totam diametrum AB;[c] cũ AB, c 7. vndec.
in plano ſit parallelarum AH, BI.[d] De- d 28. vnde.
monſtratum autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto bifariam.*

*TERTIO planum ſecans AKBM, neque ſit aduerſis planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI,
ſecantur plano AKBM;[e] erunt communes ſectiones AM, e 16. vnde.
BK,*



BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum AL, BN, factæ a plano AKBM. Quare parallelogrammum eſt AKBM;[a] ideoq; tam rectæ AK, BM, quã rectæ AM, BK, inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, triãguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, triãguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ; [b] ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK.[c] Cum igitur OAP, æqualis ſit angulo MAN; æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.)[d] Erunt baſes KL, MN, inter ſe, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales; & triangulum triangulo æquale. Quare & ſimilia erunt triangula BKL, AMN, [e] cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniã vero recta KL, rectæ MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, eſt æqualis, vt oſtendimus; erit & reliqua IK, reliquæ HM; & reliquus angulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, æqualis. (Eſt enim tota LI, toti NH, æqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis æquales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob ſimilitudinẽ parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, æqualia; & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterum, & æquiangulum eſt quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula ſingulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & ſimilia triangula BHM, AIK; & quadrilatera AKLF, BMNE; cum inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula. Quapropter ſolidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, æquale erit ſolido contento planis BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa ſint ſimilia & æqualia, vt demonſtratum eſt. Parallelepipedum ergo AB, ſectum eſt plano AKBM, per centrum G, bifariam.

[a] 34. primi

[b] 10. unde.

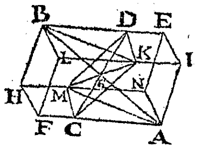
[c] 15. primi

[d] 4. primi

[e] 4. ſexti

PO-

POSTREMO planum ſecans CD, neque aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum oppoſitorum, neque per vllos angulos eorum ductum, ſed vtcunque ſecet plana oppoſitã AHBI. Oſtendemus autem, vt prius, planum ſecans CD, eſſe parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quã rectas CM, DK, eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; cõnectanturq; rectæ AM, BK,[a] quæ parallelæ erunt, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum AH, BI, factæ a plano per rectas AB, KM, ducto. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipſi LI, ob parallelogramma AL, LE,[b] inter ſe ſunt parallelæ; [c] Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea ſe mutuo ſecabunt in cẽtro G. In ſolo enim centro G, recta AB, per hypotheſim, ſecat planum CD, in quo exiſtit recta CD. Simili argumento, cũ AM, BK, ſint oſtenſæ parallelæ; erunt AB, MK, in eodem cum illis plano, ſeque mutuo ſecabunt in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, tranſibunt, ibique ſe mutuo ſecabunt; atque adeo bifariam, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 1. oſtẽdimus. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia ſunt lateribus AG, GC, trianguli AGC;[d] & angulus BGD, æqualis angulo AGC; [e] Erit & baſis BD, æqualis baſi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia ſint tribus lateribus AC, CM, MA, triãguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Eſt autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniã igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; [f] Erit & baſis KL, baſi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum eſt, & æquiangulum; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula conue-



[a] 16. vnde.

[b] 9. vndec.

[c] 7. vndec

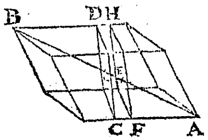
[d] 15. primi

[e] 4. primi

[f] 4. primi

conueniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota LI, toti NH, eſt æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterũ DEIK, æquilaterum eſt quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinem parallelogrammorum EI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale eſt ſolido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hiſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur AB, ſectum eſt per centrum G, plano CD, bifariam.

SED ſecatur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, ſecabitur parallelepipedum AB, bifariã plano FH, vt demonſtratum eſt. Ponitur autem & bifariam ſecari plano CD; Igitur ſolida CB, FB, cum ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdũ. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi.



Quod demonſtrandum erat.

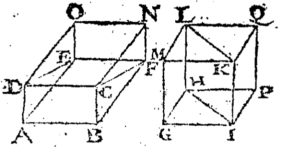
SI

THEOR. 35. PROPOS. 40.

41.

SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud vero, triãgulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipſa priſmata.

SINT duo priſmata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud baſim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; ſitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur enim parallepipeda AN. GQ; Quod quidem fiet, ſi plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, conſtituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis cum priſmatis. Nam plana horum ſolidorum oppoſita eſſe parallela, facile colligetur ex propoſ. 15. huius lib. [a] Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum eſt trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiuſdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. [b] Quare parallelepipida AN, GQ, eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes AC, GP, inter ſe ſunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum priſmata ABCDEF, GHIKLM, ([c] Nã parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduerſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] *34. primi*

[b] *31. vnde.*

[c] *32. vnde.*

PER-

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cum imperet parallelepipeda complere; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM DVODECIMVM.

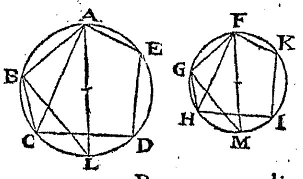
Et Solidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

QVAE in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorũ diametri AL, *F*M. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum F*G* HIK, vt quadratum diametri A*L*, ad quadratum diametri *F*M. Subtendantur enim angulis æqualibus *A*B*C*, FG*H*, rectæ AC, FH, & cõnectantur rectæ BL, G*M*. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, ęquiangula, cum circa angulos æquales *A*B C, F*G*H, habeant latera proportionalia: [b] Eſt autẽ angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, ęqualis.



[a] 6. ſexti

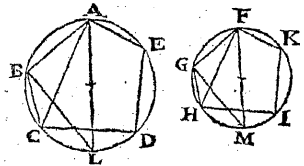
[b] 21. tertij.

[a] 31. tertij
[b] 32. primi
[c] 4. ſexti.
[d] 22. ſexti

lis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cũ ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, [a] nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; [b] erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. [c] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. [d] Igitur eſt vt quadratum ex A L, ad quadratum ex F M, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG, cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2

CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata.



SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe, vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulũ EFGH. Si enim res non ita ſe habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri E G, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim eſſet æqualis, [e] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea eſſet circulus A B C D, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine ſcilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis ſit magnitudinibus I, & K, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium eſt quadrati circa eundem circulum deſcripti, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus, maius erit, quam dimidium circuli E F G H. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, O H, O E. Ducatur per

[e] 7. quinti.

[a] 41. primi

L, recta T V, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi EF, vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratq; rectis HE, GF, productis in T, & V. [a] Quia ergo triangulum E L F, dimidium eſt parallelogrammi T E F V; maius erit triangulum E L F, quam dimidium ſegmenti circuli E L F. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia ſegmentorum, in quibus ſunt. Omnia igitur triangula ſimul maiora ſunt, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ E L, L F, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps. Quoniam vero, ſi a circulo E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum E F G H; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nempe triangula E L F, F M G, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [b] relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulum E F G H, & magnitudinem I. Sint iam circuli ſegmenta relicta E L, LF, FM, &c. ſimul ſumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus E F G H, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & K, ipſa magnitudo K, quæ maior eſt præfatis circuli ſegmentis; erit reliquum polygonum E L F M G N H O, maius reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo A B C D, polygonum A P B Q C R D S, ſimile polygono E L F M G N H O. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi ABC, ADC, bifariam ſecentur in B, & D; & rurſus circũferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariã in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diuiſa ſit circumferentia ABCD, in quot diſtributa eſt circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis A P, P B, B Q, &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ ELFMGNHO, vt patet. [c] Quoniam igitur eſt polygonum A PB QCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc eſt, per hypotheſim, vt circulus ABCD, ad I: Eſt autem polygonũ AP BQCRDS, minus circulo

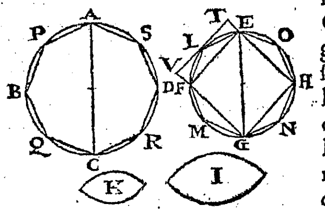
[b] 1. decimi

[c] 1. duodec.

[a] 14. quin.

ABCD. [a] Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Oſtenſum autem eſt & maius. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demõſtrabimus, minorem circulum EFGH, non poſſe ad magnitudinem, quæ minor ſit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionẽ, quã habet quadratum diametri minoris E G, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & uniuerſe demonſtratum ſit, nunquam quadratũ diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor.



SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cũ ergo ponatur circulus ABCD, ad I, eſſe vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri E G; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinẽ aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, [b] maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratũ diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo ABCD. Quod eſt abſurdũ. Oſtenſum enim eſt iam in priori parte generaliter, non poſſe eſſe vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor. Quamuis autẽ circulus ABCD, maior eſt, & EFGH, minor; eadem tamen ratione oſtendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratũ diametri circuli, ABCD, nõ poſſe

[b] 14. quinti

habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (ſi illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem. quod falſum eſſe iam in priori parte generaliter demonſtratum eſt: Ita vt generaliter & vniuerſe quoque demonſtratum ſit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo maiorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor. Non ergo maior eſt magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor eſt oſtenſa. æqualis igitur eſt. Quare cum ponatur, vt quadratũ diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; [a] ſit autẽ vt circulus ABCD, ad I, ita idẽ circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis eſt magnitudini I; Erit quoque vt quadratũ diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, ſiue circulus ABCD, circulo EFGH, maior ſit, ſiue minor. Circuli igitur inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat oſtendendum.

[a] 7. quinti

COROLLARIVM.

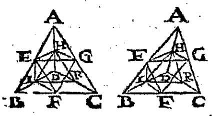
HINC ſit, ita eſſe circulum ad circulum, vt polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcriptũ. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum eſt, vt quadratum diametri ad quadratũ diametri, veluti demonſtratum eſt.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

OMNIS pyramis triangularem habens baſim, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius baſis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariã in E,F,G,H,I,K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum baſes triangula AEG, HIK, & vertices H,D; nec non in duo ſolida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammũ EBFG, & triangula oppoſita EHG, BIF; huius uero baſis eſt triangulum CFG, cui opponitur triangulum KIH, habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter; [a] erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. [b] Sunt autẽ & rectæ FG, HI, cum parallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH, FI, cũ ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogramma ſunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ; [c] erũt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadẽ rõne æquales erũt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. [d] Proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, ſimilia per coroll. propo. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH. pyramidi ABCD, ſimilis eſt, per defin. 9. huius lib.

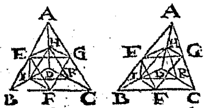


[a] 2. ſexti.
[b] 9. vnde.
[c] 10. vnde.
[d] 4. ſexti.

Rurſus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, ſunt parallelæ; [a] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadẽ ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triãguli ABC, circa æquales angulos ſunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, ſimile eſt: Sunt autem & triãgula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, ſimilia, per idem coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, ſimilis eſt quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. huius lib. Quoniam autẽ triangula AHE, HDI, ſimilia ſunt triangulo ADB, vt oſtenſum eſt ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] ipſa quoque inter ſe ſimilia erunt. Cum igitur ſint ſuper rectas æquales AH, HD, conſtituta; ipſa erunt ęqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & ſimilia triangula AHG, HDK, cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo ADC, & conſtituta ſuper æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & ſimilia erunt triangula AEG, HIK, cũ ſimilia ſint oſtenſa triangulo ABC, & ſuper rectas poſita AF, HI, [d] quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum AEIH. Non ſecus æqualia erunt & ſimilia triangula EHG, IDK, cum ſint oſtenſa ſimilia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, [e] quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales ſunt & ſimiles, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia ſunt & ſimilia omnibus triangulis alterius, vt demonſtratum eſt.

RVRSVS, [f] quia rectæ EH, HG, GE, æquales ſunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter ſe, & æqualia, per coroll. propoſit. 8. lib. 1. Ac propterea & ſimilia: [g] Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ ſint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur ſolidum BIFGHE, contentũ duobus triãgulis EHG, BIF, ex ad-

[a] 10. vnde.
[b] 4. ſexti.
[c] 21. ſexti.
[d] 34. primi.
[e] 34. primi
[f] 34. primi.
[g] 15. vnde.



ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, priſma eſt, ex definitione. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum a 34. primi CFGHIK. a Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales ſint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia; b 15. unde. b Sunt autem & parallela, quod rectę CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur ſolidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, priſma eſt. Quoniam vero priſmata EBFGHI, CFGHIK, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, baſis illius, duplum eſt trianguli c 40. vnde. CFG, baſis huius, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. c Ipſa inter ſe æqualia erunt.

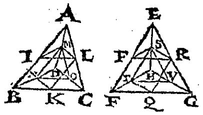
DENIQVE quia priſma EBFGHI, maius eſt pyramide EBFI, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqualis & ſimilis pyramidi AEGH, necnõ pyramidi HIKD, vt perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorum: Maiora erunt priſmata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero a dimidio eiuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales ſecatur, maior dimidium eius ſuperat, minor vero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

4.
THEOR. 4. PROPOS. 4.

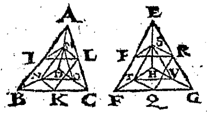
SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraq; diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa ſit vtraq; pyramidum, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idque ſemper fiat; erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita et omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

ti;&

SINT duæ pyramides ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirũ in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; G Q R S T V; vt vult propoſitio præcedens: eodemque modo intelligãtur eſſe diuiſæ pyramides factæ A I L M, MNOD; EPRS, STVH; & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit vt BG, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraq; linea diuiſa eſt bifariam; ſint autem triangula ABC, LKC; ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. a Erit quoque vt trian- a 22. ſexti. gulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulũ EFG, ad triangulum RQG. Et permutãdo, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, vt mox oſtendemus, atque adeo ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia: Et vt vnum priſma, videlicet



delicet IBKLMN, ad vnum priſma PFQRST. [a] ita ſunt duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV. Igitur erũt quoq;, vt baſis ABC, ad baſin EF G, ita duo priſmata in pyramide A B C D, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt ſunt baſes AIL, M N O, illarum pyramidum ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps eadem ſemper facta diuiſione. Sed vt illæ baſes ad has, ita eſt L K C, baſis quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQS, quæ his eſt æqualis, & ſimilis, vt in præcedẽti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis A B C, ad baſin EFG. Igitur erũt quoq;, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad priſmata cuiuslibet pyramidis factę in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis EPRS, quam priſmata pyramidis M N O D, ad priſmata pyramidis STVH; & ita deinceps, Quare cũ ſint, vt duo priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata pyramidis EFGH, [b] ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hæc illis multitudine ſint æqualia; Erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide E F G H. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 12. quin.

[b] 12. quin.

LEMMA.

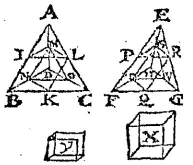
QVOD autem ſit LKC, ad RQG, ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtẽdemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines ęquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, [a] ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur a plano S T V. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quę ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus.

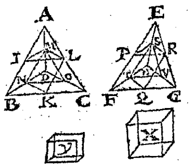
[a] 17. vnde.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Si enim nõ ita ſit, ponatur vt baſis A B C, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis E F GH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 3. huius lib. Rurſus eodẽ modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia,





æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV, a 3. duode. [a]quæ maiora ſunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps; b 1. deci. [b]relinquetur tãdem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. c 4. duode. [c]Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; d 14. quin. [d] erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quam ſolidũ X. Oſtenſa vero ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG; Erit conuertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, e 14. quin. maius ponĩt pyramide EFGH; [e] erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH; ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [a] Sit autẽ a 7. quinſi. pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt ad pyramidẽ EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoque vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abſciſsionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritq; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modo conſtitutam: Sed ſic quoque erat ad totam pyramidem. [b] Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum. b 9. quinti.

COROLLARIVM.

HINC ſit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandẽ proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM ſequitur, e conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

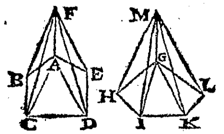
THE-

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarũ baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triãgulares diuiſa.[a] Quia vero eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF:[b] Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidẽ GHIKLM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cũ quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit vt baſis ad ABCDE, baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtẽtes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.



ABCDE	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL	GHIKLM

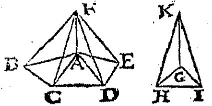
[a] 5. duode.

[b] 5. duode.

[c] 5. duode.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quorum baſes polygonæ latera habent multitudine æqualia; facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera, quam baſis alterius. Sint enim primũ duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa.[a] *Quoniam vero eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:*[b] *Erit vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo eſt oſtenſum:*[c] *& vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quãtitas ad pyramidem GHIK, quartam quãtitatẽ;*[d] *Erit etiã baſis ABCDE, primã quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quãtitas cum ſexta, ad pyramidẽ GHIK,*



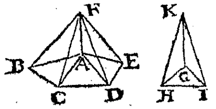
[a] 5. duode.

[b] 24. quin.

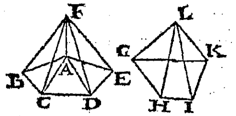
[c] 5. duode.

[d] 24. quin.

GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quã ob rem duæ pyramides quælibet, quarũ vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat a polygono, eiusque pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoque ſumere a triangulo, eiuſque pyramide, vt dictum eſt.



SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygona, ſintq; plura latera in vna baſe, quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia vero, vt iam eſt demonſtratũ, eſt vt baſis ABC, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem; ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; [a] Erit etiam vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque, vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante eſt oſtenſum; [a] Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE.



[a] 24. quin.

[a] 24. quin.

HANC autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinem.

QVOD non ſecus oſtendemus, ac ea, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandẽ cõſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandẽ habeant proportionem cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS cõtra fit, pyramides multangulas æquales, & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autem duo demonſtrabuntur, vt in coroll. propoſ. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

6.

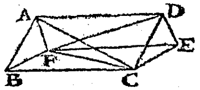
OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æquales

les inter ſe, triangulares baſes habentes.

SIT priſma ABCDEF, cuius duo trianguia oppoſita, æqualia, ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur.n.in tribus parallelogrammis tres diametri, nēpe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF.[a] Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia ſunt;[b] eſtq; vt baſis ABC, ad baſin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planū ABCD, demiſſam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erūt pyramides ADFC, EFDC, ſuper æquales baſes ADF, EFD, conſtitutę, & ſub eadem altitudine, nempe perpēdiculari a vertice C, ad planum ADEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi ADF, & triāgulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum priſma componētes, vt perſpicuum eſt) æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF; in tres pyramides æquales eſt diuiſum. Quocirca omne priſma triangularem habens baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 34. primi

[b] 5. duode.

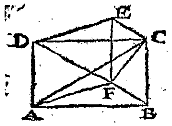


COROLLARIVM I.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſ tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Siue priſma quodlibe triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habe & baſin, & altitudinem.

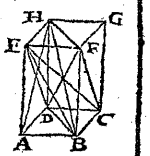
SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF: ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABF. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis. Nam ſi ducatur recta DF, erit priſma diuiſum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF;[a] vt demonſtratum eſt; Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hæc illi ſit æqualis, immo eadem, quod eiſdem planis cōprehēdatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eādem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem, & altitudinem; ac propterea priſma e contrario eſſe pyramidis triplum.

[a] 7. duode.

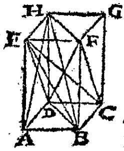


SIT deinde pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, vt demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD; Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB;[b] Ac propterea vt una pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſub ead altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll.

[b] 12. quin.



propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramid BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem A B C D E; erit & pyramis ABGCDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cucunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſim A B C D, conſtituta, per coroll. propoſ. 5. huius lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partẽ priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.



QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulare. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horũ priſmatum erun tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habẽti baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiuſmodi pyramis æqualis eſt pyramidi illi, quæ eãdem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Quam quidem iam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

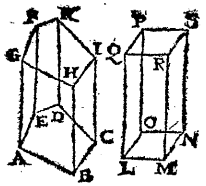
SCHOLIVM. I.

EX dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcumque habeant baſes; inter ſe ſunt vt baſes.

QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11.

priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula, licet eorũ baſes ſint parallelogrãma, vertices vero lineæ recta; necnon de parallelepipedis, quæ nomine priſmatum contineri diximus: Nunc tamen idipſum demonſtrabimus vniuerſe de omnibus priſmatis, quorum duo plana aduerſa, ſiue baſes, ſunt polygona, quamuis plura latera, ſeu anguli in vnius baſe reperiantur, quam in baſe alterius. Sint igitur duo priſmata eiuſdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum baſes ſint figuræ multilatera. Dico vt eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis vtriuſque baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes: Ac proinde per coroll. prædictum, quælibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis. [a] Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, vt baſis ad baſin, vt oſtenſum eſt propoſ. 6. eiuſque ſcholio. Igitur erit quoque vt baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum. [a] 15. quin.



CONVERSO modo, ſi priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, vt baſes, ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

COROLLARIVM. II.

VNDE priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine.

ne. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propos. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.

SCHOLIVM II.

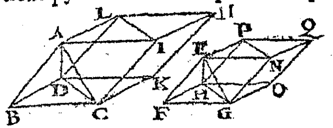
CAETERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa, quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelliguntur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia, & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo priſma dici ab Euclide, *vt in defin. priſmatis diximus.* Nam *ſi in huiuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis vnum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis eiuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia paris ipſus priſmatis, vt in corollario 1. demõſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, vt in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis cõcipiatur vnũ parallelogrãmorum, ita vt in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, ſed duæ tertię partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur aliud æquale & ſimile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialterã.* Ex *quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiã partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque ea, quæ oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorũ vertices vel lineæ rectæ ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemque altitudinis, duæ tertiæ partes priſmatum, vt modo demonſtrauimus. Quare eandem habebunt rationẽ, quam priſmata, &c.*

THEOR. 8. PROPOS. 8.

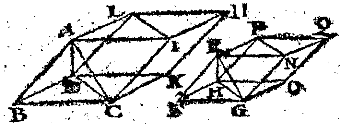
8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita vt baſes ABC, EFG, ſint ſimiles, & reliqua triangula vnius ſimilia reliquis triãgulis alterius. Dico ꝓportionẽ pyramidũ eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, *FG*. Extendantur enim plana triangulorum ABC, *C*BD, D*A*B, perficianturq; parallelogramma BI, BK, BL. *D*einde ducantur L*M*, IM, rectis AI, AL, parallelæ & æquales, cõuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur cõpletũ parallelepipedum B*M*, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cũ plana ſolidi *B*M, ſint parallela, vt facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodẽ modo perficiatur parallelepipedũ *F*Q. Quoniã igitur ob ſimilitudinẽ pyramidũ, anguli plani A*B*C, EFG, ſunt æquales, eſtq; vt AB, ad BC, ita EF, ad *F*G; erunt parallelogramma BI, FN, ſimlia, Eodẽ modo cũ anguli AB*D*, EFH, ſint æquales, ſitq; vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Itẽ anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erũt & parallelogramma BL, BK, parallelogrãmis FP, FO, ſimilia.[a] Sed tam tria BI, B*K*, BL, parallelepi-



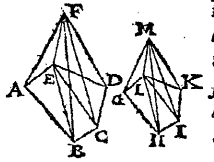
[a] *24. vnde.*



pedi BM, reliquis tribus oppoſitis DM, AM, CM; quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reli-
a 24. vnde. quis oppoſitis tribus HQ, EQ, GQ, a ſunt æqualia,
& ſimilia. Igitur ſex plana circumſcribentia ſolidum
BM, ſimilia ſunt ſex planis ſolidum FQ, ambientibus;
Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. ſimilia ſunt pallelepipe-
b 15. quinti da BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, b priſ-
mata DBCILA, HFGNPE, habẽt eandẽ proportionẽ,
quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyra-
mides ABCD, EFGH, eandem, quam priſmata dicta, ea-
c 11. quin. rum tripla; c habebunt quoque pyramides eandem pro-
d 33. unde. portionem, quam parallelepipeda. d Cum igitur propor-
tio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, ſit tri-
plicata proportionis homologorum laterum BC, FG;
erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyrami-
dem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Simi-
les itaque pyramides, quæ triangulares habent baſes,
&c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque eſt manifeſtum, ſimiles pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.



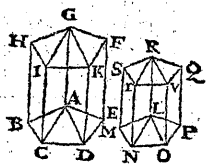
SINT pyramides ſimiles, quarum baſes rectilinea ſimi-
lia plurium laterum ABCDE, GH-
IKL. Dico proportionem pyramidum
eſſe triplicatam proportionis, quam ha-
bent latera homologa AB, GH. Nam
ſi ex angulis E, L, ducantur ad angu-
e 20. ſexti *los oppoſitos rectæ EB, EC; LH, LI; e di-*
uiſæ erunt baſes ſimiles in triangu-
la numero æqualia, & ſimilia; ni-
mirum triangula ABE, EBC, CDE, ſimilia erunt
trianguli GHL, LKI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum
ſimilitudinem, triangula AEF, GLM, ſimilia ſunt, & angu-
lus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML,
ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter ſimi-
litudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt
FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rurſus quia eſt vt EB, ad BA,
ita LH, ad HG, ob triãgula ſimilia ABE, GHL; Et vt BA,
ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum ſimilitudinem
ſimilia ſint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt
EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum ſit, vt FE, ad
EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit
a 5. ſexti *etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. a Quare æ-*
quiangula, atq; adeo & ſimilia ſunt triangula FEB, MLH.
Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, trianguliſ
MLG, MGH, GHL, ſimilia. Igitur pyramides ABEF, GH-
LM, ex defin. 9. lib. 11. ſimiles ſunt. Eadem ratione ſimiles
erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM.
b 8. duodec. *b Quapropter, vt demonſtratum eſt, pyramides ABEF, EB-*
CF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, ſingu-
la ad ſingulas, triplicatam proportionem habebunt laterum
homologorũ AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, ſingulorum ad ſin-
gula. Cũ igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeãt vnã
et eandem proportionem, ob ſimilitudinem baſium ABCDE,
GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CD-
EF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnã eandemq;
c 12. quinti *proportionem, triplicatam ſcilicet illius; c Atque idcirco erit,*
vt una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita
omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyra-
mides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem,
d 8. duodec. *d cũ pyramis ABEF, ad pyramidẽ GHLM, habeat triplica-*
tam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit
quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM,
triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum
AB, GH. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione priſmata ſimilia habebunt triplicatã proportionem homologorum laterum. Sint enim duo priſmata ſimilia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum propor-

a 20. ſexti

proportionem eſſe triplicatam proportionis homologorum laterum. Nã ſi ex angulis A, & L, ducãtur rectæ AC, AD; LN, LO, a erunt, vt de pyramidibus dictum eſt, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, ſimilia. Similiter, ſi ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, ſimilia, cum omnia plana priſmatum oppoſita ſimilia exiſtant, per definitionem priſmatis. Quoniam uero ob ſimilitudinem priſmatum, parallelogramma CH, NS, ſimilia ſunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque eſt NM, ad NL, ob ſimilitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rurſus quoniam angulus ſolidus N, æqualis eſt ſolido angulo C, ob ſimilitudinem priſmatum; ſi ille huic ſuperponatur, omnia inter ſe conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, ſint æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales ſunt; Ac propterea cum latera circa ipſos oſtenſa ſint eſſe proportionalia, erũt parallelogramma CG, NR, ſimilia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, ſimilia ſunt. Igitur priſmata ABCIGH, LMNTRS, ſimilia sũt, ex defin. ſolidorum ſimilium. Non aliter oſtendentur eſſe ſimilia priſmata CDAGIK, NOLRTV; nec non priſmata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter priſmata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad priſmata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem, ſingula ad ſingula, laterũ homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, ſingulorum ad ſingula. Ac propterea eodem modo demonſtrabimus, priſmata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vſi ſumus ad idem demonſtrandum in pyramidibus multangulis.



EX

EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas ſimiles diuidi in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifeſtum eſt ex demonſtratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, priſmata multangula ſimilia diuidi in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius ſcholij demonſtratione.

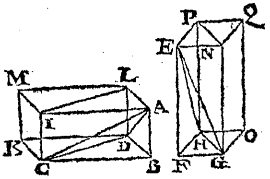
THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes & altitudines; illæ ſunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum baſes ABC, EFG, & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt ABC, ad EFG, ita altitudinē pyramidis EFGH, ad altitudinē pyramidis ABCD. Si.n. perficiantur, vt in præcedēti propoſ. dictũ eſt, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt priſmata DBCILA, HFGNPE, cum ſint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter ſe æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum ſint priſmatum dupla, æqualia quoque erunt. a Quare baſes eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc eſt, erit vt baſis BI, ad baſin FN, ita altitudo ſolidi FQ, ad altitudinē ſolidi BM: b Vt autē baſis BI, ad baſim FN, ita eſt triangulũ ABC, ad triãgulũ EFG. Igiẽ erit quoq; vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eędem

a 34. vnde.

b 15. quin.



dem ſint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

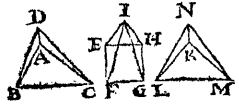
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius, erit ſit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eędem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum & altitudines eorundẽ reciprocæ; [b] Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallepipeda B M, F Q. Quare & priſmata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 15. quinti

[b] 34. unde.

SCHOLIVM.

EADEM ratione Aequalium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentiũ reciprocãtur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. Sint enim *primum duæ pyramides æquales, quarum quidem* ABCD, *baſin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem.*



Fiat baſi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propoſ. 45. *lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum ducetur, per ea, quæ demõſtrauimus ad propoſ. 42. lib. 1.* Deinde *ſuper KLM, fiat pyramis KLMN, eiuſdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent baſes, & eandem altitudinem; ipſæ erunt æquales, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. huius lib.* oſtendimus: *Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi* ABCD, æ*qualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides* ABCD, KLMN, *baſes triangulares;* [c] *erit vt baſis ABC, ad* baſim *KLM, hoc eſt, ad huic æqualem baſin EFGH, ita* altitudo

pyra-

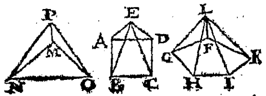
[c] 9. duodec.

pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo; cum baſis KLM, æqualis ſit baſi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI; ponatur autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt baſis ABC, ad baſim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. [a] *Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis* ABCD, *pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.*

[a] 9. duode.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multãgulæ. Fiat rurſus triangulũ MNO, *æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE:*



Eritque ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, *æqualis pyramidi* ABCDE: *Sed hæc æqualis ponitur pyramidi* FGHIKL. *Igitur & pyramis* MNOP, *æqualis eſt pyramidi* FGHIKL. *Quare, vt nũc demonſtrauimus, erit vt baſis* MNO, *hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim* FGHIK, *ita altitudo pyramidis* FGHIKL, *ad altitudinem pyramidis* MNOP, *hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocantur.*

SED reciprocentur iam baſes harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO; *æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad* FGHIK, *ita altitudo pyramidis* FGHIKL, *ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad* FGHIK, *ita altitudo pyramidis* FGHIKL, *ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante*

oſten

oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL. Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

OMNIA hæc facile quoque demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorum tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certe duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, vt in ſcholio eiuſdẽ propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atq; altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, vel certe ſeſquialtera, æqualia quoque ſunt. Quod eſt propoſitum.

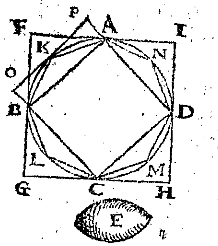
9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus baſin eandem circulum ABC*D*, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quã triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratũ ABC*D*, & circa eũdem, quadratum FGHI; intelliganturque ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda.

Quo-



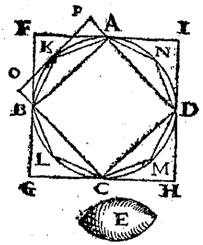
Quoniam igitur quadratum ABC*D*, dimidiũ eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; [a] eſtq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidiũ parallelepipedi baſis FGHI; Ac proinde parallelepipedum baſis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus ABC*D*. Secentur bifariam peripheriæ AB, B*C*, C*D*, DA, in punctis *K*, L, M, N, adiunganturque rectæ KA, *K*B, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in *K*, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis DA, *C*B, productis in P, & O; & ſuper *AK*B, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri.[b] Quia ergo triangulum A*K*B, dimidium eſt parallelogrammi *A*BOP; erit quoque priſma baſis A*K*B, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cum ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, quemadmodum ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis A*K*B, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura cõtenta linea recta AB, & periphera A*K*B. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula *B*LC, *C*M*D*, DN*A*, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ A*K*, K*B*, &c. ſecentur bifariã, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodẽ modo priſmata eiuſdẽ altitudinis cũ cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omniũ ſegmentorũ cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmẽta, & ſic deinceps. Quoniã uero ſi a cylindro, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis AB*C*D; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium A*K*B, BLC,

[a] *32. vnde.*

[b] *41. primi*

a 1. decim

BLC,&c.atq; in hunc modum ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni: Sint iam ſegmẽta cylindri relicta baſium AK,KB,BL, &c. (quę quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquum priſma baſis multanguli AKBLCMDN, eandem habẽs altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſniatis ſit tertia pars pyramis, cuius eadẽ cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt cylindrus triplo coni.



SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturq; ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ. 9. lib. 4. demonſtrauimus, [b] eſtque vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis; Erit quoque pyramis ſuper ABCD dimidium pyramidis ſuper baſin FGHI; ac proinde pyramis ſuper baſin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius baſis circulus ABCD. Secẽtur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela

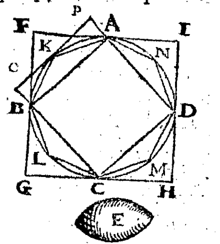
b 6. duodec.

erit ipſi AB, vt ad propoſ 27. lib. 3. demonſtrauimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligãtur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. [a] Quia ergo triangulũ AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis ſuper baſin AKB, dimidium pyramidis ſuper baſin ABOP, [b] cũ pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, maior erit dimidio ſegmenti coni, cuius baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul maiores ſunt, quã dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quã dimidia omniũ ſegmentorum coni ſimul, quorũ baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi a cono, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus ABCD; & a reliquis ſegmẽtis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [c] relinquitur tãdem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: Sint iam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahãtur ſegmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior

a 41. primi.

b 6. duode.

c 1. decimi



eſt, præfatis coni ſegmentis;erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cũ cono & cylindro, maior quã tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cũ priſma eandẽ habens baſim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cũ cono & cylindro, triplum ſit ipſius pyramidis, vt ſupra in corollario propoſitionis ſeptimæ huius libri a nobis eſt demonſtratum, erit huiuſcemodi priſma maius cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum, Non ergo cylindrus minor eſt triplo coni: Sed neque maior triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, proptereaq; conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos dũtaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis conuenit, vt perſpicuum eſt eius demonſtrationem diligenter intuentì. Itaque propoſitio vniuerſe ita proponi poterit.

OMNIS conus, ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuſlibet cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni & cylindri.

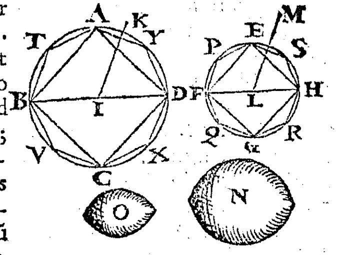
11.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt. vt baſes.

SINT ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ baſes circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad co-

num,& cyl'ndrum ad cylindrũ. Si enim hoc non credatur, ſit vt baſis ABCD, ad baſim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si n. eſſet æqualis,[a] haberet conus ABCDK, ad conum E F G H M, & ad N, proportionẽ eandẽ; ac propterea eſſet conus ad conum, vt baſis ad baſin: quod non cõceditur. Sit ergo primũ N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis ſit magnitudinibus N, & O, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur ſi ex cono EFGHM, detrahatur pyramis ſuper baſin EFGH, eiuſdem altitudinis, & a reliquis ſegmentis auferantur pyramides eiuſdem altitudinis baſium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio, ſemper plus dimidio ſubtrahitur, vt in poſteriore parte præcedẽtis propoſitionis oſtenſum eſt;[b] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, exceſſus coni EFGHM, ſuper N. Sint ergo iam ſegmenta coni relicta baſium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidẽ baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quam O. Cum igitur conus E F G HM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, ſimul; ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta, & ex N, & O, ipſa magnitudo O, quæ prædicti coni ſegmẽtis maior eſt, erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonũ EPFQGRHS, eiuſdẽ altitudinis cũ cono, maior quã N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonũ ATBVCXDY, ſimile polygono EPFQGRHS, vt in propoſ. 2, huius lib. docuimus, ducanturq; circulorũ diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. ꝓpoſ. 2. huius lib. eſt vt circulus ABCD, ad circulũ EFGH, ita polygonũ ATBVCXDY, ad poly

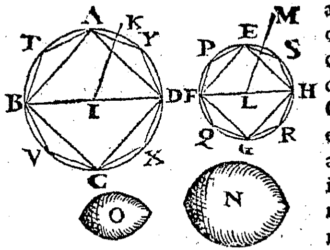


[a] 7. quinti.

[b] 1. decimi.

gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum
EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem
[a] 6. duodec. N, [a] & vt polygonum, ad polygonum, ita eſt pyramis
ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis; Erit
quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidẽ EPFQGRHSM,
vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis
ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto,
[b] 14. quinti [b] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quã N: Oſtẽſa
autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur
minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

SIT ſecundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur
ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus
ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus
EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK.
Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM,
ad magnitudinẽ O. Et
quia N, maior ponitur
[c] 14. quin. cono EFGHM; [c] maior
quoque erit conus ABCDK,
quam O. Quare
erit vt circulus EFGH
ad circulum ABCD,
ita conus EFGHM, ad
magnitudinem O, quæ
minor eſt cono ABCDK.
Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non
poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono,
vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior
eſt N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor
eſt oſtenſa; Aequalis igitur eſt. Quapropter cum ponatur,
vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK,
[d] 7. quinti ad N; [d] Sit autem, vt conus ABCDK, ad N, ita idẽ
conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque vt baſis
ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum
EFGHM.



[e] 15. quin. [e] QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum
EFGHM, ita eſt cylindrus ABCDK, (qui triplus eſt coni
ABCDK;) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt
coni EFGHM) Erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin
EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrũ EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo vſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vniuerſe proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTETVR hæc propoſitio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

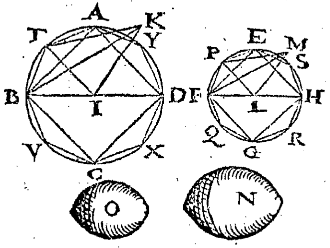
ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi nõ habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

SINT ſimiles coni, & cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, axes vero LK, LM, & diametri baſium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatã diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conũ EFGHM, & ad N, ꝓportionem eãdem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conũ EFGHM, eſſet quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor, quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadẽ prorſus conſtructio figuræ, quæ in præcedenti propoſitione, ita vt rurſus pyramis EPFQGRHSM, maior oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeãtur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, ſimiles ponuntur, erit, ex 24. defin. lib. 11. vt diameter BD, ad diametrum FH, [b] ac propterea vt ſemidiameter BI, ad ſemidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutãdo vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, proptereaque axes recti ad eorum baſes; [c] Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; [d] Ac propterea



[a] 7. quinti

[b] 15. quinti

[c] 6. ſexti

[d] 4. ſexti

rea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autẽ BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob ſimilitudinẽ triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus arcubus BT, FP, ſint æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtẽſum eſt; ſitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatẽ tam linearũ BI, IT, quam FL, LP; [a] erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rurſus q̃a latera KI, IB, triãguli KIB, æqualia sũt lateribus KI, IT, triãguli KIT, & anguli dictis lateribus cõprehẽſi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cũ axis IK, rectus ponatur ad circulũ ABCD, [b] erũt baſes KB, KT, æquales. Eodẽ modo æquales erũt rectæ MF, MP; Ac ꝓpterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cũ vtrobiq; ſit proportio æqualitatis. [c] Q̃m vero vt KB, ad BT, ita KT, ad eandẽ BT; Itẽ vt MF, ad FP, ita MP, ad eandẽ FP: Erat aũt vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoque vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et cõuertẽdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cũ ſit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP, Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti oſtenſum eſt; habebũt triãgula BKT, FMP, latera ꝓportionalia, [d] ideoq; æquiãgula erũt; Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendẽtur reliqua triangula ambictia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter ſe ſimilia eſſe: Quæ cũ ſint multitudine æqualia, erũt dictæ pyramides ſimiles, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Vt autẽ BT, ad FP, ita eſt BI, ad FL, ob ſimilitudinẽ triangulorum BIT, FLP; [e] Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidẽ habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYK; ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto; [f] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Oſtenſa autem eſt & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

[a] 6. ſexti.

[b] 4. primi

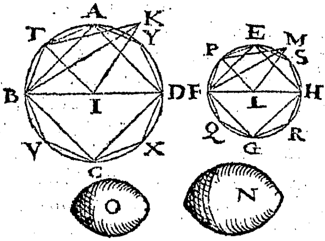
[c] 7. quinti

[d] 6. ſexti.

[e] 15. quinti

[f] 14. quinti

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autẽ & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime oſtendimus: Erit vt conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterū PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoq; N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatā diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinē O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM,[a] erit quoq; conus ABCDK, maior quā O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinē O, minorem cono ABCDK, proportionē habet triplicatam diametri FH, ad diametrū BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conū ad magnitudinē alio cono minorē, proportionē habere triplicatā eius, quā habent baſiū diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor eſt oſtenſa. Aequalis igitur eſt; [b] ac proinde conus ABCDK, eandē habet proportionē ad conū EFGHM, & ad N. Cū ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorū BD, & FH; erit quoq; conus ABCDK, ad conū EFGHM, in earundē diametrorū ꝓportione triplicata.



[c] QVONIAM vero, quam proportionem habent co

ni, ean-

[a] 14. quin

[b] 7. quinti.

[c] 15. quin.

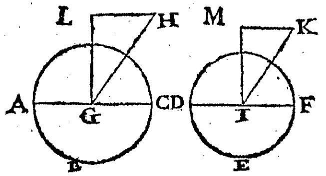
ni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylindrus ad cylindrum proportionē diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD ſi maior conus, & cylindrus cum minore confeſeratur, perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8, huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterū homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HÆC porro propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cum in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK, & diametri baſiū AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatā. Intelligantur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earundem cum ſcalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducāturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana ſecantia baſes lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti ſunt baſibus ABC, DEF; [a] erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad eaſdem recta. [b] Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadent in AC, DF, communes ſectiones; & proinde erunt

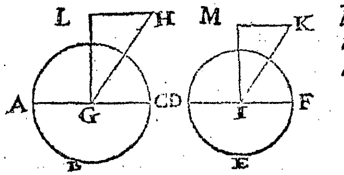
anguli



[a] 18. vnde.

[b] 38. vnde.

anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter ſe erunt, cū coni & cylindri ſcaleni ſimiles ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. [a] Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur eſſe eiuſdem altitudinis; erit recta HL, per axiū vertices ducta ipſi AC, parallela, [b] ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti ſint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum ſint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula ſunt; [c] atque idcirco erit vt GL, ad GK, ita IK, ad IM; & permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axē IK, ita eſt AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri ſcaleni ponātur ſimiles. Igitur & GL, axis ad IM, axē erit, vt diameter AC, ad DF, diametrū; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, ſimiles erūt, ex definitione. [d] Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant baſim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus CEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) eſt æqualis, vt conſtat ex coroll. propoſ. 11. huius lib. [e] Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum et cylindrū DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod eſt propoſitum.



[a] 32. primi

[b] 29. primi

[c] 4. ſexti.

[d] 12. duod.

[e] 7. quint.

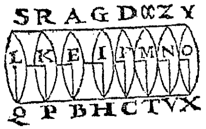
11.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SE.

SECETVR cylindrus ABCD, plano GH, parallelo aduerſis planis AB, CD, quod quidem ſecet axē EF, in I. Dico vt eſt cylindrus ABHG, ad cylindrū GHCD, ita eſſe axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunq; rectæ EK, KL, æquales ipſi EI; Itē quotcūque rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectę IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, deſcribent circulos GH, PR, QS, Tα, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erūt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componētes totum cylindrum SQXY. Quoniā vero tam cylindri SP, PA, AH, ſuper baſes æquales QS, PR, BA, & ſub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales ſūt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, ſuper æquales baſes XY, VZ, Tα, CD, & ſub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quā multiplex eſt axis IL, ipſius axis IE; Itē tā multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex eſt axis IO, ipſius axis IF. Quoniam autem ſi axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi IO, (multiplici axis IF, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunq; hoc contingat multiplicatione: Erit, per defi. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axē IF, ſecundā magnitudinē, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylin



drus

drus igitur plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ETSI hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demonſtrat; tamen eius demonſtrationem cylindro ſcaleno facile accommodabis, ſi modo adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quieſcens latus circumfertur, ſic quoque in conis ſcalenis circumferantur ſemidiametri LS, KR, EA, &c. ſemper æquidiſtãtes circa centra L, K, E, &c. vnã cũ recta SY, ſemidiametros coniungente. Hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, vt conſtat ex iis, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de ſectione cylindri.

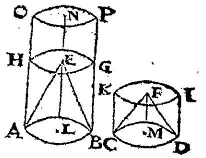
11.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.

SINT ſuper baſes æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) LE, MF. Dico eſſe conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt eſt altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abſcindaturq; axi

EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiuſdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.



[a] propterea que cylindrus AG, ad ipſos eandem habet proportionem. [b] Eſt autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, vt axis, ſeu altitudo LE, ad axem, ſeu altitudinem EN, hoc eſt, ad altitudinem MF, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.

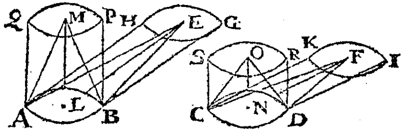
[a] 7. quinti.
[b] 13. duod.

[c] QVIA vero coni ABE, CDF, ſunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; [d] ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

[c] 10. duode.
[d] 15. quin.

SCHOLIVM.

HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales AB, CD, coni ABE; CDF, et cylindri ABGH, CDIK, ſcaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conũ ABE, ad conum CDF, et cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, eſſe, vt eſt altitudo LM, ad altitudinem NO. Super baſin enim AB, conſtruatur cylindrus rectus ABPQ, ſub altitudine LM; Item ſuper baſin CD, cylindrus CDRS, ſub altitudine NO. [e] *Quoniã igitur eſt cylindrus rectus ABPQ,*

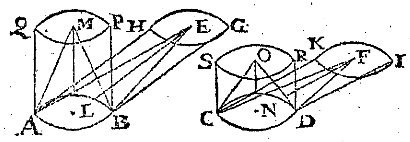


[e] 14. duode.

ad cylindrum rectũ CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO: Eſt aũt cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Itẽ cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

a 10. duod.
b 15. quin.

QVONIAM autem coni, [a] cum ſint tertiæ partes cylindrorum, [b] eandem habent proportionem, quam cylindri. Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodẽ argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundẽ altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

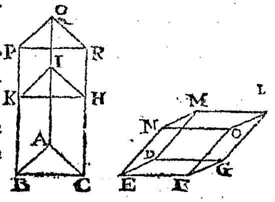


IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus ſcalenus ABGH, æqualis ſit cylindro recto ABPQ; ſit autẽ cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonſtrauit: Erit quoque cylindrus ſcalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

c 15. quin.
a 10. duod.

[c] QVONIAM vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, [d] cum illi horum ſint tertiæ partes; Erit etiam conus ſcalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus oſtendetur eadem ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt.

EADEM quoque hæc propoſitio conuenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC, DEFG, priſmata ABCHIK, DEFGKMNO, & pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, priſmatis ABCHIK, ad baſin ABC, perpendiculares, ita vt BK, ſit altitudo priſmatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, ſumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini priſmatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur priſma HIKPQR, eiuſdem altitudinis cum priſmate EL.



a 7. quinti.

Eruntq; priſmata HIKPQR, EL, cum habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propo. 7. huius lib. [a] Ac propterea priſma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia vero ex ſcholio propo. 25. lib. 11. priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, eſt vt planum BI, ad planum KQ; [b] Et vt planum BI, ad planum KQ, ita eſt recta BK, ad KP; erit priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, hoc eſt, ad priſma EL, vt BK, altitudo priſmatis ABCHIK, ad KP, altitudinem priſmatis HIKPQR, hoc eſt, priſmatis EL. Quod eſt propoſitum.

b 1. ſexti.

QVOD ſi inſiſtẽtes lineæ AI, CH, BK nõ ſint perpendiculares ad baſin ABC, cõſtituẽdũ erit ſup baſin ABC, aliud priſma, cuius inſiſtẽtes ſint perpẽdiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis ABCHIK. Nam cũ ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinẽ, et baſin, ſint æqualia, ſitq; priſma conſtitutũ ad priſma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinẽ; erit et priſma ABCHIK, ad priſma EL, vt altitudo illius, ad altitudinẽ huius

c 15. quin.
d 7. duode.

[c] QVONIAM vero pyramides eandẽ habent proportionem cum priſmatis, [d] quod illæ ſint horũ tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.

EADEM prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atque ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

HAEC omnia eodem fere modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

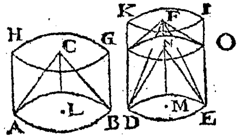
OMNIA quoq; hæc facile conuerti poſſunt hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

NAM alia pars æqualis foret toti, vt in conuerſo propoſ. 31. lib 11. oſtenſum eſt.

12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorũ reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.



SINT æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes, altitudineſve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum cylindri ponãtur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum,

vt

---

vt in ſcholio propoſ. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; [a] erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [b] Eſt autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: [c] Itẽ vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

[a] 7. quinti.

[b] 11. duod.

[c] 14. duod.

IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, [d] cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demõſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF conſtituãtur duo coni, vt in figura.

[d] 10. duod.

SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidẽ in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN; [e] Eſt autem vt baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: [f] Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrũ DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO;

[e] 11. duod.

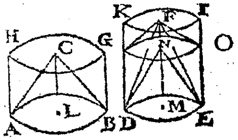
[f] 14. duod.

Ideoque

[a] 9. quinti.

[a] ideoq; cylindrus ABGH, cylindro DEIK, ęqualis erit.

AT vero in conis hæc erit demõſtratio. Si conorũ ABC, DEF, baſes & altitudines reciprocẽtur, reciprocabũtur quoq; baſes, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cũ eædem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Quam obrem, vt oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo conos eſſe æquales, quo oſtẽdimus cylindros æquales eſſe. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reiprocitur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandũ.



SCHOLIVM.

NON difficile erit idẽ oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoque recti eaſdem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eadem ſint baſes, & altitudines rectorum & ſcalenorum. Quare, vt demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. inter ſe quoque erunt æquales.

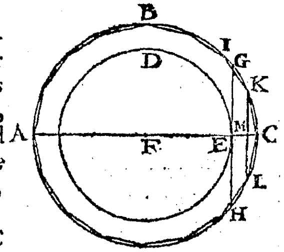
IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt perſpicuum eſt ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.

13.

PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idẽ centrũ F, oporteatq; in maiori ABC, inſcribere polygonũ æquilaterũ, cuius latera numero pari cõtinentur, nõ tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, ſecãs circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3.



Quoniã igitur arcus AGC maior eſt arcu GC, ſi ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidium IK, & ſic deinceps; [a] relinquetur tandem minor arcus quã CG. Sit igitur iã arcus CK, arcu CG, minor, & ſubtẽdatur recta CK. Dico rectã CK, eſſe vnum latus polygoni inſcribendi. Si .n. arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrãs AB, in totidẽ partes ęquales diuidatũ, in quot diuiſus ẽ quadrans BC; necnõ ſemicirculus AHC, in totidẽ partes, quot cõtinet ſemicirculus ABC; deinde oĩbus arcubus rectę lineę ſubtẽdãtur, [b] quę ęquales quidẽ erunt ipſi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales ſubtendant: Deſcriptũ erit polygonum in circulo ABC, & ęquilaterum, & parium laterum. Quod quidẽ non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, ſecans ipſam AC, in M. Qm̃ igitur anguli GEM, KME, recti ſũnt; [c] erũt rectę GH, KL parallelæ. Quare cũ recta GH, tãgat circulũ DE, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra dictũ circulũ, nec vnquam ipſum continget, quod nunquã cum recta GH, cõueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abeſt, quam KL, circulum DE, tanget. Ac

[a] 1. decimi

[b] 29. tertij.

[c] 28. primi

propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cũ æqualia ſint lateri CK; [a] ideoque æqualiter cum CK, a centro F, diſtent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtẽtibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum. [a] 14. tertij.

COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum DE.

14.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphęra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſpheræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inſcribere ſolidũ polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorẽ ſphæram EFGH. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo p centrum, ſintq; communes ſectiones factæ in ſphęris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntut, circumducti congruent ſectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectę cadentes ex I, ad peripherias ſectionũ ſunt æquales, cum ducãtur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducãtur in his circulis diametri AC, BD, ſe ſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, vt ſint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. [a] Deinde in maiori circulo ABCD, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidẽ vt facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vſq; circuli ABCD, quæ circulũ EFGH, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectę Gγ, [b] applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero ſi arcui Cγ, intelligatur ſubtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, [c] latus Cγ, oppoſitũ maiori angulo, nẽpe recto, maius eſt latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Abſcindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod ſi ex quadrante CD, dimidiũ auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidiũ LK, & ſic deinceps; [d] relinquetur tandẽ arcus minor arcu Cδ, ſeu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritq; recta CK, ſubtenſa minor quam recta Aε, hoc eſt, quam Gγ, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectã CK, eſſe vnum latus polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tãgat circulum EFGH, vt ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet, multo minus recta CK, ſubtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulũ tanget. Rurſus ducta diametro KN, [e] erigatur ex centro I, ad plana circulorũ ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens ſuperficiei ſphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, [f] quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientq; cõmunes ſectiones, circulos, vt iam dictũ ẽ, quorũ ſemicirculi ſint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. [g] quadrantes erunt OC, OK; atq; adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes CD,

[a] 16. duod.

[b] 1. quarti.

[c] 19. primi.

[d] 1. decimi

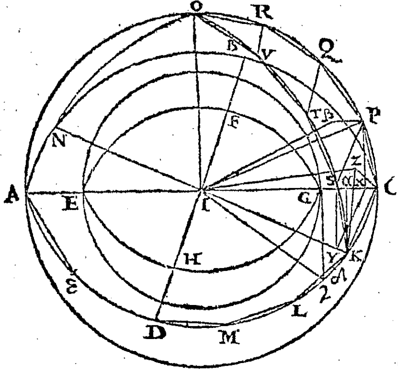
[e] 12. vnde.

[f] 18. vnde.

[g] ſchol. 22. tertij.

OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales diſtribuatur, in quot diuiſus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine ęquales arcubus quadrãtis CD; [a] Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus ſubtenſæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, [b] quæ in communes ſectiones AC, NK, cadent; [c] eruntque inter ſe parallelæ.

a 29. tertij.
b 38. vnde.
c 6. vndec.



QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. [d] & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales ſint peripheriæ AOP, NOS, quibus inſiſtunt; (Nam ſi ex ſemicirculis AOC, NOK, ęqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sũt autẽ & latera PC, SK, rectis angulis oppoſita, æqualia. [e] Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales ſint & parallelæ; ſi connectatur recta XY; [f] æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter ſeſe. [g] At quia & rectæ CK, XY, parallelæ ſunt, quod latera IC, IK, proportionaliter ſecta ſint. (Si enim ex ſemidiametris IC, IK, ęqualibus demãtur ęquales rectę CX, KY relinquẽtur & IX, IY, ęquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) [h] Erũt parallelę quoq; PS, CK, inter ſe, cum vtraq; parallela ſit ipſi XY; [a] ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipſis plano exiſtent. Totũ igitur quadrilaterũ CKSP, in vno erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpediculares, & cõnectantur rectæ QC, TK, oſtẽdemus ſimiliter CK, QT, eſſe parallelas; atq; adeo ipſas PS, QT, inter ſe parallelas eſſe, cũ eidẽ CK, ſint parallelę; totũq; quadrilaterũ PSTQ, in vno eſſe plano. Eadẽ ratione in vno erit plano qnadrilaterũ QTVR. [b] Eſt autẽ & triangulũ RVO, in vno plano. Si igitur eadẽ conſtructio exhibeatur ſuper reliqua latera KL, LM, MD, ductis ſcilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemiſphęrio, vt tota ſphęra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ ſimilia ſint prædictis inter quadrantes OC, OK, ſuper latus CK, cõſtructis; inſcriptũ erit in ſphęra maiori ſolidũ polyedrũ circunſcriptũ dictis quadrilateris, atq; triãgulis. Hoc ergo dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

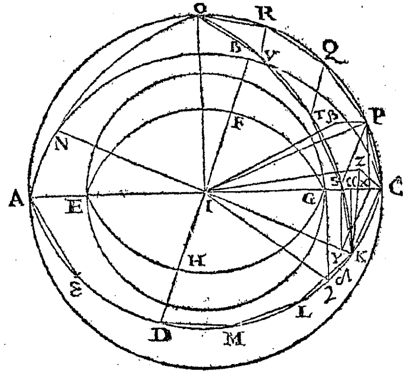
d 27. tertij.
e 26. primi
f 33. primi
g 2. ſexti.
h 9. vndec.

a 7. vndec.
b 2. vndec.

DVCATVR. n. ex I, ad planũ CKSP, perpẽdicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniã igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; [c] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratũ rectę IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint, erunt & quadrata rectarũ IZ, ZC, quadratis rectarũ IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipſę rectę ZC, ZK, æquales. Similiter oſtẽdemus rectas, q̃ ex Z, ad PS, ducẽtur, æquales eſſe & inter ſe, & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallũ ZC, deſcriptus p quatuor pũcta C, K, S, P, trãſibit. Eadẽq; rõne circa reliqua quadrilatera PSEQ, QTVR, & triangulũ RVO, circulos deſcribi poſſe, demõſtrabimus. Qm̃ vero, vt poſtea oſtẽdemus, angulus CZK, obtuſus eſt; [d] erit quadratum rectę CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia ſint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectę ZC.

c 47. primi.
d 12. ſecun.

DVCATVR ex K, ad rectã AC, perpendicularis Kα. Cum igitur AC, dupla ſit ipſius AI, & Aα, maior ſit,



quã AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quã ob rẽ cum ſit, [a] vt AC, ad Aα, ita rectangulũ ſub AC, αC, ad rectangulũ ſub Aα, αC, quod baſes horum rectangulorum ſint AC, Aα, & eadẽ altitudo αC; erit quoq; rectãgulum ſub AC, αC, minus duplo rectanguli ſub Aα, αC. [b] Eſt autem rectangulũ ſub AC, αC, ęquale quadrato rectę CK; & rectangulũ ſub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quod recta CK, inter AC, αC, ſit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratũ rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC, [c] Quoniã vero quadratũ rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarũ IZ, ZC; & quadratũ rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntque ęqualia quadrata rectarũ ęqualiũ IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, ęqualia quadratis rectarũ Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectę αK; & ex illis minus, videlicet rectę ZC, erit reliquum quadratũ rectę IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tãgat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta Kα, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cũ omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint a ſphæra EFGH,

[a] 1. ſexti.

[b] 17. ſexti.

[c] 47. primi

EFGH, quam punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Cγ: [a] Eſt autem CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox demonſtrabitur; Multo maior erit Gγ, quam ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [b] Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, ſit ſphæræ minoris EFGH, ſemidiameter; exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, vt demonſtratum eſt: Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus IβP, rectus ſit, ex 3. defin. lib. 11. [c] erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia uero & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Eſt aũt quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior ſit, quam linea βP, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoque & linea Iβ, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra ſphæram EFGH, exiſtet, quam punctum Z; proptereaque multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphæram

[a] 19. primi

[b] 47. primi

[c] 47. primi

ram minorem E F G H. Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſsint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

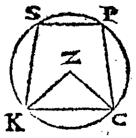
COROLLARIVM.

EX ijs, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium; Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. [a] Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiametrorum, atque adeo diametrorum ſphærarum, [a] cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

[a] 15. quinti

SCHOLIVM.

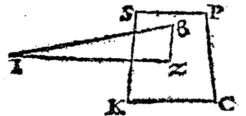
QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonſtranda.



PRIMVM itaque oſtendendum eſt, angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſint.) Eſt autem IK, maior quam IY; [b] erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis ſit oſtenſa ipſi SP, erit quoque KC, maior quam SP; Ac propterea arcus CK, maior erit arcu SP, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. [c] Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque adeo angulus CZK, obtuſus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3.

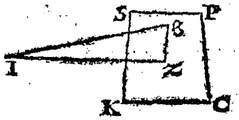
[b] 14 quin.

[c] 28. tertij



SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius a centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ.

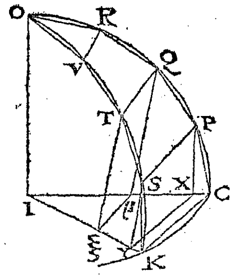
Quoniam



Quoniã ergo angulus IZθ, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. [a] Erit latus illi oppoſitum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo IθZ, nimirũ acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius a centro I, diſtat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.

a 19. primi

TERTIO, ac vltimo probandum eſt, rectam ZC, maiorem eſſe recta βP. Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam PS, maiorem eſſe recta QT. Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris IC, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo eſt triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, [b] quę in communes ſectiones IC, IK, cadent, [c] eruntque inter ſe ſe parallelę, vt de rectis PX, SY, dictum eſt. Quod ſi adiungatur recta μξ, erunt QT, μξ, parallelę & ęquales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe & ęquales PS, XY. [d] Quia vero μξ, ipſi CK, parallela eſt; quod latera IC, IK, proportionaliter ſint ſecta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY; [e] erunt quoque μξ, XY, parallelę. Quare erit, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ. Eſt autem IY, maior quam Iξ. Igitur & YX, maior erit quam ξμ; Ac proinde & PS, quę ęqualis eſt ipſi XY, maior erit quam QT, quę ęqualis eſt ipſi ξμ.

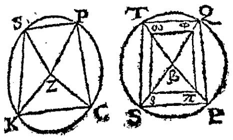


b 38. vnde.
c 6. vnde.
d 2. ſexti
e 30. primi

HOC ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egredianturque e centris rectę ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel ęqualis, vel minor. Sit primum ęqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, ęqualia ponuntur lateribus βS, βP, & baſis KC, maior eſt baſe PS; [a] erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam baſes KS, CP, baſibus ST, PQ, ſunt ęquales; [b] erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, ęquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & ęquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint ęquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur ęqualis eſt recta ZC, rectę βP.

a 25. primi
b 8. primi

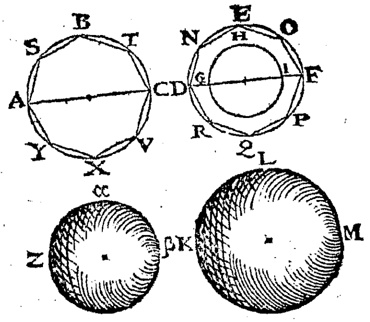
SIT deinde ZC, minor, quam βP. Et abſcindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipſis ZC, ZK, ZS, ZP, ęquales, connectanturque rectę πρ, ρω, ωφ, φπ, [c] quę parallelę erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectę ex centris ſectę ſũt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ, ad ξπ. Cum ergo βS, maior ſit quam βρ, [d] erit & SP, maior quam ρπ. Eademque ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, ωφ, φπ; Ac propterea cum PS, minor ſit, quam CK, & ST, PQ, ęquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectę πρ, ξω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectę βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, ſint ęquales; [e] erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & ęquales. quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis ęquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta ZC, quam βP: Sed neque ęqualis eſt oſtenſa; Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.



c 2. ſexti
d 14. quin.
e 25. primi

THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHAERAE inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.



SINT duæ ſphæræ A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. Dico ſphæram A B C, ad ſphæram D E F, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum D F. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphęra A B C, ad aliam ſphæram GHI, minorem, vel K L M, maiorem, quā DEF, triplicatam proportionem diametri A C, ad diametrum DF. Habeat primū ſphera ABC, ad ſphęram G H I, minorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; intelligaturque ſphæra G H I, concentrica ſphæræ D E F. [a] Inſcribatur in ſphæra maiori D E F, polyedrum D N E O F P Q R, non tangens minorem ſphæram G H I; Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra A B C. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ A B C, ad ſphæram G H I, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F: Eſt autem, per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram G H I, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R. Quare cum ſphæra A B C, maior ſit polyedro A S B T C V X Y, [b] erit & ſphæra G H I, maior polyedro D N E O F P Q R, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, minorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F.

[a] 17. duod.

[b] 14. quin.

HABEAT ſecundo ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, maiorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R: Et conuertendo, vt ſphęra KLM, ad ſphęram A B C, ita polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y, in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Igitur & ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, erit in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Ponatur vt ſphæra KLM, ad ſphæram A B C, ita ſphæra D E F, ad aliam ſphæram Z α β. Habebit igitur & ſphæra D E F, ad ſphæram Z α β, proportionem triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Et quia ſphæra K L M, maior ponitur, quam ſphæra D E F, erit quoque ſphæra A B C, maior, quam ſphæra Z α β. Quapropter ſphæra D E F, ad ſphæram Z α β, minorem ſphæra A B C, proportionem habet triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, maiorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F, Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum DF. Sphęræ itaq; inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.

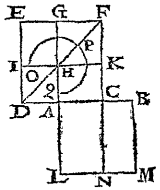
FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS
ELEMENTVM
TERTIVMDECIMVM.
Et Solidorum tertium.

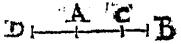
THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumẽs dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta *A* B, in *C*, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum A *C*. Producta autem B A, ad D, ſit A*D*, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ *C* D, quintuplum eſſe quadrati rectæ A *D*. Deſcribatur enim ſuper *C* D, quadratum CE, in quo ducta diametro D*F*, ducatur AG, ipſi *D*E, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur I*K*, parallela ipſi CD. Producta deinde G A, perficiatur quadratum A M, protrahaturque FC, ad N. eruntque ex coroll.propoſ.4.lib.2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulū CM, ſub AB, CB, æquale ipſi KG, quadrato rectæ A C. Deinde cum ponatur A B, dupla ipſius *A* D, ſitque A L, ipſi A B; & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: [c] Eſt autē vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius A*K*. [d] Quoniam autem *A*K, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus C M, *K* G; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum ſit quadrati AI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineę A *D*; erit & gnomon OPQ, eiuſdem quadrati A I, quadruplus; Ac propterea, ſi gnomoni OPQ, addatur ipſum quadratum A I, quintuplum efficietur quadratum C E, quadrati A I.



ALITER. Ex ſcholio propoſ.4.lib.2. quadratum rectæ *A*B, quadruplum eſt quadrati rectæ AD, quod linea *A* B, dupla lineæ A D, ponatur, [e] Eſt autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis ſub A B, A C, & ſub AB, BC, comprehenſis; Et rurſus, quod ſub AB, A C, æquale eſt ei, quod ſub AD, AC, bis; (ſicut enim AB, ipſius *A D*, eſt dupla, [f] ita quoque erit rectangulum ſub AB, AC, rectanguli ſub AD, AC, duplum, cum vtriuſq; rectanguli eadem ſit altitudo A C. Ac propterea rectangulum ſub *A*D, AC, bis ſumptum æquale erit rectangulo ſub AB, AC.) [g] Quod vero ſub A B, *B* C, æquale eſt quadrato rectæ AC, cum ſit vt A *B*, ad *A* C, ita *A* C, ad CB. Igitur quadratum rectæ A *C*, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ *A*D; Ac proinde quadrata rectarum A C, A D, vna cum rectangulo ſub *A*D, A C, bis, quintupla erunt quadrati eiuſdem rectæ A D. [h] Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale ſit quadratis rectarum A C, A *D*, vna cum rectangulo ſub A D, A C, bis; Erit & quadratum



[a] 3. defin. ſexti.

[b] 17. ſexti.

[c] 1. ſexti

[d] 43. primi

[e] 2. ſecundi

[f] 1. ſexti.

[g] 17. ſexti

[h] 4. ſecun.

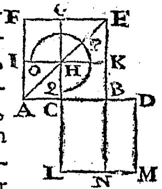
---

rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

S I recta linea ſuijpſius ſegmenti quintuplum poſſit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA ſit recta *A*B, in C, poſitque quintuplum ſegmenti AC; ſumatur autē ipſius AC, dupla CD, quę, vt poſt oſtēdemus, maior erit reliquo ſegmento BC. Dico ſi C D, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe C B, reliquá partem prioris lineę. Deſcribatur.n. ſuper A B, quadratum B *F*, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipſi AF, parallela C G, ſecans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipſi A B. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; *E* B, ad N. Eruntque ex coroll.propoſ.2.lib.F. CI, KG, quadrata rectarum AC, C*B*. Quia igitur quadratum B*F*, quintuplū ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratū *C* I, relinquetur gnomon OPQ, eiuſdē quadrati CI, quadruplus: Eſt autē & quadratum CM, quadruplum quadrati *C* I, ex ſcholio propoſ.4.lib.2. quod recta C D, dupla ſit rectæ A C. Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rurſus quoniam CD, ponitur ipſius AC, dupla; eſtque L C, ipſi CD; & CH, ipſi AC, æqualis; erit & L C, ipſius C H, dupla. [a] Cum igitur ſit vt L C, ad CH, ita rectāgulum L B, ad rectangulum C *K*; erit quoque illud huius duplum: [b] Eſt autem C*K*, ipſi HF, æquale. Aequale igitur eſt LB,



[a] 1. ſexti

[b] 43. primi

ipſis C K, H F; Ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B *M*. Quoniam ergo ſunt tres rectæ C D, C B, B D; eſtque rectangulum BM, ſub C *D*, BD, comprehenſum ęquale ipſi *K*G, quadrato rectæ C B; [a] Erit vt C D, ad CB, ita C B, ad B *D*. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum C B.

a 17. ſexti

ALITER. Quoniam quadratum rectę AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C; [b] eſtque quadratum rectæ A B, ęquale quadratis rectarum CB, AC, vna cum rectangulo ſub *A* C, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum *C* B, AC, una cum rectangulo ſub A C, C B, bis, quintuplum quadrati rectę AC. Dempto igitur quadrato rectę A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub *AC*, CB, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectę A *C*: Eſt autem & quadratum rectę CD, eiuſdem quadrati rectę AC, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum rectę C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum ſub A C, C B, bis, æquale ſit rectangulo ſub C D, C B; (ſicut enim recta C D, dupla eſt rectæ A C, [c] ita quoque duplum erit rectangulum ſub *C* D, *C* B, rectanguli ſub AC, CB; cum vtriuſque rectãguli eadem ſit altitudo C B; *A*c propterea rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, quadrato rectæ *C*D, æquale: [d] At quadratum rectæ CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD. Igitur quadratũ rectæ CB, & rectangulum ſub C *D*, C*B*, æquale erit rectangulis ſub *C*D, CB, & ſub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectãgulo ſub CD, BD; [e] ideoque erit vt C*D*, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque ſegmentum maius C*B*. Si igitur recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplũ poſsit, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 4. ſecundi

c 1. ſexti

d 2. ſecundi

e 17. ſexti

LEMMA.

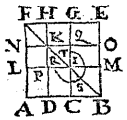
QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario, quam C B, *ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ* C D, *quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ A* C; *Addito quadrato rectæ A* C, *erunt duo quadrata rectarum C D, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ A* C. *Eſt autem quadratum rectæ A D, maius quadratis rectarum AC,* C *D,* [a] *cum æquale ſit quadratis rectarum AC,* C *D, vna cum rectangulo ſub A* C, C *D, bis. Igitur quadratum rectæ A D, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ A*C; *Ac propterea maius quadrato rectæ* A B, *quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ* A C. *Quare recta A D, maior erit, quam recta* A B; *ideoque dempta communi A C; maior erit reliqua* CD, *quam reliqua* CB. *Quod eſt propoſitum.*

a 4. ſecundi

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

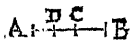
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.



SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum A C, bifariam diuidatur in D. Dico quadratũ rectę BD, quintuplũ eſſe quadrati rectæ C D. Deſcribatur. n. ſuper AB, quadratum A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducantur ipſis A F, B E, parallelæ CG, DH, ſecantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipſis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ ſecẽt rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta A C, dupla eſt rectæ C D, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum LG, quadruplum quadrati P Q. Eſt autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB,[a] erit rectangulum ſub A B, C B, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipſi LG.) Igitur & CE, quadruplũ erit quadrati PQ. Quia vero æqualia ſunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earũ latera H K, I Q, æqualia;[b] ac proinde rectæ EO, OM, ipſis oppoſitæ æquales erunt.[c] Quare rectangula IO, Q E, æqualia erunt:[d] Eſt autem I O, ipſi I D, æquale. Ergo & QE, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, oſtenſum ſit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon RST, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta BD, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

[a] 17. ſexti
[b] 34. primi
[c] 36. primi
[d] 43. primi

ALITER. Cum A C, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita CB;[e] erit rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato rectę CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectanguium ſub AB, BC, quadruplum eſt quadrati rectæ CD; (Nam cum ſit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB;[f] erit rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato rectę A C: quod cum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadruplũ ſit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum ſub AB, BC, quadruplum eiuſdem quadrati rectę C D.) Ac propterea rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato rectæ



6. ſecundi
[f] 17. ſexti.

CD, quintuplum quadrati rectę CD. Igitur & quadratũ rectę BD, quintuplum erit quadrati rectę C D. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmẽtum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſſit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB, diuiſa inæqualiter in C, cuius maius ſegmentum A C, biſariam ſectum ſit in D; ſitque quadratum rectæ B D, quintuplum quadrati rectæ C D. Dico rectam AB, diuiſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propoſ. erit quadratum L G, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt autem & gnomon R S T, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus. (cum enim quadratum D O, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati P Q, ex rectæ C D; dempto quadrato P Q, relinquetur gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ. quadruplus.) Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG: At gnomoni RST, æquale eſt rectangulum CE, vt ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idẽ rectangulum CE, ſub AB, BC, comprehenſum:[a] Ac proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.

[a] 17. ſexti

ALITER. Cum AC, diuiſa ſit biſariam in D, & ei a 6. ſecundi

addita CB; [a] erit rectangulum ſub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æqualæ quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, deſcriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, deſcripti; erit & rectãgulum ſub rectis lineis AB, BC, deſcriptum, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum ſub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Eſt autem eiuſdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale eſt rectangulũ ſub AB, BC. [b] Quamobrẽ erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde ſecta AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

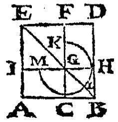
b 17. ſexti

5.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea ſecundnm extremam & mediam rationem ſecetur; Quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod a maiore ſegmento deſcribitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitq; ſegmentũ maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, ſimul tripla eſſe quadrati rectæ AC. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratũ AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipſi BD, parallela CF, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipſi AB. Eruntq; CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. Quoniam igitur eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [c] erit rectangulum ſub AB, BC, nempe AH, æquale ipſi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale ſit ipſi CD; erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectę BC, eiuſdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.



c 17. ſexti

ALITER. Quoniam eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] erit rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atq; adeo rectangulum ſub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. [b] Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, ſimul æqualia quadrato rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarũ AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC. Quocirca ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; Quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.

a 17. ſexti

b 7. ſecundi

SCHOLIVM.

CONVERSVM *etiam huius verum eſt, videlicet.*

SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti; Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur.

SECTA *ſit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris ſegmenti BC, vtraq; ſimul tripla ſint quadrati maioris ſegmenti AC. Dico rectã AB, ſectam eſſe extrema ac media ratione. Conſtructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla ſint quaadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus eiuſdem quadrati IF: Eſt autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla ſunt quadrati IF; Ac propterea cum æqualia ſint AH, & CD; erit AH, ipſi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, ſub AB, BC, æquale ſit quadrato IF, rectæ AC; [c] erit vt AB,*

c 17. ſexti

vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, *diuiſa erit in* C, *extrema & media ratione.*

ALITER. Cum quadrata rectarum AB, BC, *tripla ſint quadrati rectæ AC;* [a] *Sint vero quadrata rectarũ AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectãgulo ſub AB, BC, bis; erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AB, BC, bis, triplũ quadrati rectæ AC.* Dempto *ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectãgulum ſub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC;* Et *proinde rectangulum ſub AB, BC, ſemel, æquale quadrato rectæ AC.* [b] *Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in* C, *ſecta erit extrema ac media ratione.*

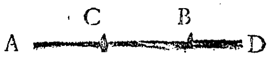
a 7. ſecun.

b 17. ſexti.

EX Franciſco Maurolyco *demonſtrabimus quoque theorema, quod ſequitur.*

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentum, quintuplum poteſt eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur quadrati. Et ſi recta linea inæqualiter ſecetur, totaque aſſumẽs minus ſegmentum poſſit quintuplũ eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt.

SIT primum recta A B, *ſecta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta B D, minori ſegmento* B C, *æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum eſſe quadrati ex AC, maiore ſegmento.* [c] *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC:* [d] *Rectangulum autem ſub AB, BC, æquale eſt quadrato ex AC; (quod A*B, *AC,* CB, *ſint continue proportionales.) erit rectangulum ſub AB,* BC, *quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum ſub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiuſdem quadrati ex AC, quintuplum erit. quod eſt propoſitum.*



c 8 ſecundi

d 17 ſexti.

*SIT deinde recta A*B, *ſecta inæqualiter in* C, *cui addatur recta* BD, *minori ſegmento* BC, *æqualis, ſitque quadratũ ex AD, quadrati ex AC, maiori ſegmento quintuplum. Dico AB, in* C, *ſectã eſſe extrema ac media ratione.* [a] *Quoniã.n. quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum ſub AC, BC, quater, vna cũ quadrato ex* A C, *quintuplũ quadrati ex AC; ac propterea rectangulum ſub AB,* BC, *quater, quadruplũ quadrati ex A C: hoc eſt, rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato ex AC.* [b] Igitur *erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in* C, *ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

a 8. ſecundi

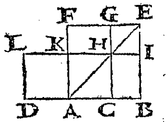
b 17 ſexti.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

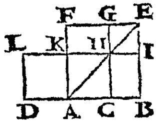
4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecũdum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ a principio recta linea.

SECETVR recta AB, in *C*, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum A*C*, & adiiciatur ei in rectum A D, æqualis maiori ſegmento A *C*. *D*ico rectam *B*D, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeque maius ſegmentum A B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex *C*, ipſi BE, parallela C G, ſecans diametrum



metrum in H, puncto, per quod agatur ipſi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipſi AF, parallela DL, occurrens ipſi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur eſt vt AB, ad A C, ita A C, ad C B; [a] Erit rectangulum IF, contentum ſub AB, BC, æquale quadrato C K, rectæ AC. [b] Eſt autem CK, ipſi A L, æquale. Igitur IF, æquale erit ipſi A L; additoque communi B K, erit rectangulum BL, contentum ſub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ A B; [c] Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AB.

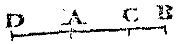


[a] 17. ſexti.

[b] 36. primi

[c] 17. ſexti

ALITER. Quoniam eſt vt A B, ad A C, hoc eſt, ad A D, ita A C, ad CB; Erit conuertendo vt D A, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo vt DB, ad AB, ita AB ad CA, hoc eſt, ad AD. Secta igitur eſt BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmētum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum AB, minus autem ſegmētum AD; & ex maiori ſegmēto AB, detrahatur recta AC, æqualis minori ſegmento AD. Dico maius ſegmentum AB, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, et maius ſegmētum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figuræ conſtructione, cū ſit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] erit rectangulum BL, contentum ſub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato cōmuni BK, erit AL, æquale ipſi IF; [b] Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt IF, contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC; [c] Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt AC, minus vero ſegmentum recta CB. Quod eſt propoſitum.

[a] 17. ſexti.

[b] 36. primi

[c] 17. ſexti.

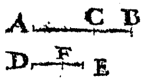
ALITER. Quoniam eſt vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB; [d] erit quoque ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc eſt, vt AB, ad AC; Ac propterea diuiſa erit AB, in C, extrema & media ratione.

[d] 19. quin.

RVRSVS & hoc demonſtrabimus, quod ſequitur.

SI linea ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti: Erit quoque dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, ſitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris ſegmenti AC. Dico DE, in F, ſecari extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentum eſſe DF. Cum enim ſit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique ſit proportio dupla; [e] erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam:



[e] 19. quin.

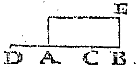
[a] 15. quin. *tam; Ac proinde & CB, dupla erit ipſius FE.* [a] *Quoniam ve-*
ro eſt, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimi-
diam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius,
ad FE, dimidiam huius; Eſt autem ex defin. lineę ſectę ex-
trema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit
quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem
defin. DE, ſecta erit in F, extrema ac media ratione. Quod
eſt propoſitum.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; Vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema &
media ratione. Dico vtrumque ſegmentum AC, CB, eſ-
ſe lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur
enim maiori ſegmento AC, recta AD, æqualis dimidię
[b] 1. tertij-dec. totius AB. [b] Quoniam igitur quadratum rectę CD, quin-
tuplum eſt quadrati rectę AD; habebit quadratum rectę



CD, ad quadratum rectę AD, propor-
[c] 6. deci. tionem, quam numerus ad numerum.
[c] Quare commẽſurabilia erunt quadra-
ta rectarum CD, AD; proptereaque
ipſę rectę CD, AD, commenſurabiles
quoque exiſtent, ſaltem potentia: Eſt autem AD, Ratio-
nalis, cum ſit dimidia lineę Rationalis AB. Igitur &
CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarũ CD,
AD, non habent proportionem, quam numerus quadra-
tus ad numerum quadratum, (vt conſtat ex coroll. pro-
poſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1.
[d] 9. decimi vel 25. ad 5.) [d] erunt rectę CD, AD, longitudine incom-
menſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum
commenſurabiles. Quare ſi ex CD, Rationali detraha-
tur

AD, Rationalis potentia tantum commenſurabilis;
erit reliqua AC, Irrationalis, quę appellatur Apo-
[a] 74. deci. me.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, con-
ento ſub AB, CB; cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB;
[b] 17. ſexti erit rectangulum AE, ęquale quadrato rectę AC. Quã
ob rem quadratum Apotomę AC, nimirum rectangulum
[c] 98. deci. AE, applicatum ſecundum lineam Rationalem AB, [c] fa-
cit alterum latus BE, hoc eſt, rectam CB, illi ęqualem,
Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extre
ma ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demon-
ſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuiſa in C,
ſitque maius ſegmentum AC, linea Rationalis. Dico minus
ſegmentum CB, eſſe Apotomen. Diuiſa enim AC, bifariam
in D; erit CD, dimidia ipſius Rationalis AC, Rationalis,
[d] 3. tertij-dec. *cum ſit ipſi AC, commenſurabilis.* [d] *Quoniam autem quadra-*
tum rectæ BD, quintuplum eſt quadrati rectæ CD; habe-
bunt quadrata rectarum BD, CD,
proportionem, quam numerus ad nu-
[e] 6. deci. *merum;* [e] *ac propterea commenſura-*

bilia exiſtent. Quare & ipſæ rectæ BD, CD, commenſurabi-
les erunt, ſaltem potentia. Cum igitur CD, ſit rationalis, erit
quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD,
CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad
numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8.
Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erũt
rectæ BD, CD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde
Ratio-

a 74. deci.

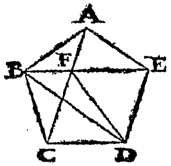
Rationali detrahatur CD, *Rationalis potentia tantum commenſurabilis;* [a] *erit reliqua* C *B, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui nõ deinceps ſint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT in pentagono ęquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps ſint, ęquales A,B,C. Dico ipſum pentagonum eſſe ęquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis ęqualibus rectę BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi ſe interſecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD.



Quoniam igitur latera A B, AE, trianguli *A*BE, ęqualia ſunt lateribus C*B*, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti ęquales, ex hypotheſi; [b] erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, ęquales; [c] Sunt autē & anguli *B*ED, B D E, ęquales, cum ęqualia ſint oſtenſa latera B*E*, BD; Toti igitur anguli AED, CDE, ęquales erunt. Rurſus quia latera AB, AE, trianguli ABE, ęqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli BA*C*; & anguli quoq; ipſis contenti ęquales, ex hypotheſi: [d] *E*rit & baſis BE, baſi AC, ęqualis, & anguli AB*E*, AEB, angulis B*A*C, B*C*A, ęquales. Cum ergo ęquales ſint anguli *A*BE, BA*C*, trianguli AB*F*; [e] erunt quoque latera BF, AF, ęqualia; Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis ęqualibus BE, AC, erunt reliquę lineę FE, FC, ęquales. Itaque cum latera FE, E*D*, trianguli FED, ęqualia ſint lateribus FC, C*D*, triãguli FCD; & baſis communis F*D*; [f] erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, F C D, ęquales: Sunt autem & anguli AEB, *B*CA, oſtenſi æquales. Aequales igitur ſunt toti anguli AED, *B*CD; Ac proinde cum angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli AB*C*, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

b *4. primi*
c *5. primi*
d *4. primi*
e *6. primi*
f *8. primi*

SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A,C,D. Quoniam igitur latera *A*B, AE, triãguli ABE, æqualia ſunt lateribus C B, C D, trianguli *C* B *D*; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi; [a] Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CD*B*, æquales; [b] Sunt autem & anguli B*E*D, B D E, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CD*E*, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, C*D*E; erunt tres anguli deinceps æquales *A*, E, D; *A*c proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli , &c. Quod erat demonſtrandum.

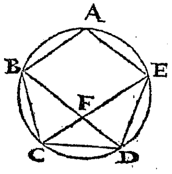
a *4. primi.*
b *5. primi.*

11.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

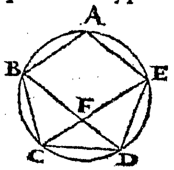
SI pentagoni æquilateri, & æquiãguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta ęqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABC*D*E, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ DB, C E, ſe mutuo ſecantes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maioraque earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pẽtagoni. [c] De-



c *14. quar.*

ſcripto enim circulo circa pentagonum; [a] erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; [b] Erunt & baſes DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, ſint æquales, [c] & ipſis æqualis ſit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: [d] Eſt autem & angulus BCE, eiuſdē anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, ſit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales ſunt; [e] Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. [f] Quoniã autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus inſiſtētes æquales ſunt; erunt duo an- DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD; [g] Ac proinde ęquiangula erunt triangula BCD, CFD. [h] Quare erit vt BD, ad DC, hoc eſt, ad BF, æqualem ipſi DC, ita CD, hoc eſt, ſibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, ſecta eſt in F, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt oſtenſum eſt. Simili ratione oſtendemus, rectam CE, ſecari in F, extrema ac media ratione, maiuſque illius ſegmentum EF, ęquale eſſe lateri pentagoni DE. Itaque ſi pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 28 tertij.
[b] 4. primi
[c] 32. primi
[d] 33. ſexti.
[e] 6. primi
[f] 27. tertij.
[g] 32. primi
[h] 4. ſexti.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ſubtendit, parallelã eſſe oppoſito lateri: hoc eſt, BD, parallelam eſſe lateri AE; et CE, lateri AE. Deſcripto enim circulo circa pentagonum, [i] Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales ſunt: Sunt autem A, & ABC, inter ſe æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus ſint rectis æquales; erunt etiã A, & AEC, duobus rectis æquales: [k] ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitũ.

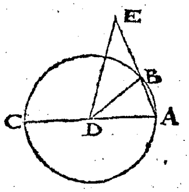
[i] 22. tertij.
[k] 28. primi

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, cõponantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.

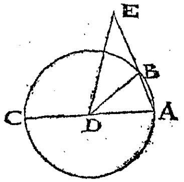
IN circulo ABC, ſit latus decagoni AB, cui in rectũ addatur BE, ęqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidē circulo inſcripti. Dico EA, rectã ſectam eſſe in B, extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentũ eſſe EB, latus hexagoni. Ducatur.n. ex A, per centrũ D, diameter AC, coniunganturq; rectę DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, eſt decima pars totius periphærię circuli; continebit arcus ſemicirculi arcum AB, quinquies; Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rurſus quia latera BD, BE, ſunt æqualia, nempe latera hexagoni; (eſt enim BE, latus hexagoni ſemidiametro BD, æquale, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4.) [b] erũt & anguli BDE, BED, ęquales: [c] quibus cum æqualis ſit externus ABD; erit angulus ABD, duplus anguli BED: [d] Eſt autem angulo ABD, ęqualis angulus BAD, ob ęqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, ſimul quadrupli erunt anguli BED. [e] Cum ergo angulis DAB, DBA, ęqualis ſit externus BDC; erit angulus BDC, quadruplus eiuſdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, oſtenſus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales ſunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, ęquales ſint



[a] 33. ſexti.
[b] 5. primi
[c] 32. primi
[d] 5. primi
[e] 32. primi

a 32.primi.
b 4.ſexti.

duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD; [a] erũt triangula ADE, ABD, æquiangula. [b] Igitur erit vt EA, ad AD, hoc eſt ad EB, ipſi AD, æqualem, ita AD, hoc eſt, EB, ſibi æqualis ad BA; Atq; idcirco recta EA, ſecta eſt in B, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum EB, latus hexagoni. Itaque ſi hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum,



SCHOLIVM.

QVIA vero demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum lineæ diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema et media ratione, eiuſque ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum; diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.

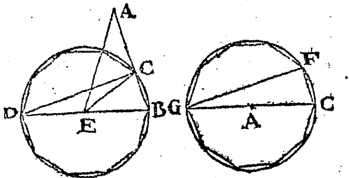
CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonſtrabimus, Videlicet.

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione

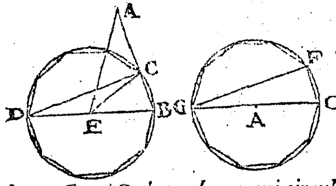
ſitque primũ AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentum CB, eſſe eiuſdẽ circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulũ cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, [a] ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cũ habeant latera circa communem angulum B, proportionalia; eritque angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni; [b] erunt anguli CAE, CEA, æquales; [c] quibus cum æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A: [d] Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdẽ anguli A. [e] Cum ergo angulis BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus. [f] Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.

a 6. ſexti.
b 5. primi.
c 32.primi.
d 5.primi.
e 32.primi.
f 33.ſexti.



SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD, ducaturque diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritq; ex coroll. propoſ. 14, lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniã igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterũ & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, *decagonum æquilaterum, & æquiangulum* BCD; *eruntque latera* BC, CF, *inter ſe æqualia. Quoniam vero, ſi connectantur rectæ* CD, FG, *anguli* CDB, FGC, *ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilibus* BC, CF, *nempe decimis partibus peripheriarum; ſunt quoque anguli* BCD, CFG, *in ſemicirculis æquales,* [a] *nimirum recti:* [b] *Erunt quoque latera* BD, CG, *inter ſe æqualia.* Quam ob rem *cũ diametri* BD, CG, *ſint æquales, æquales quoque erunt circuli* BCD, CFG. *Ac proinde, cũ recta* AC, *ſit latus hexagoni circuli* CFG, *erit quoq; eadem recta* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Quod eſt propoſitum.*

[a] 31. tertij.
[b] 26. primi.



10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

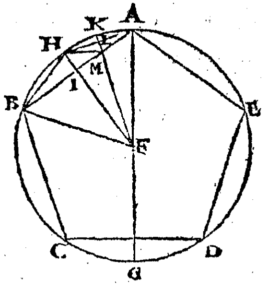
SI in circulo pentagonum æquilaterũ deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, deſcriptum ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vna cũ quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur.n.diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, ſecans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Qm̃ igitur arcus AH, BH, æquales ſunt; [c] erũt & anguli ipſis inſiſtentes AFH, BFH, æquales. Quare

[c] 27. tertij.

---

cum latera AF, FI, trianguli AFI, ęqualia ſint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipſis contenti ęquales quoque; [a] erunt & baſes AI, BI, ęquales, & anguli AIF, BIF, ideoque recti: Eademque ratione ęquales erunt rectę AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis ęqualibus ABCG, AEDG, demantur ęquales arcus ABC, AED; relinquentur arcus CG, DG, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus CG, dimidiũ arcus CD. Eſt aũt & arcus AH, dimidium dimidium arcus AB. Igitur cum arcus AB, CD, æquales ſint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG, AH, æquales; Ac proinde cum arcus AH, duplus ſit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiuſdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales ſunt, & eſt arcus AB, duplus arcus BH, erit etiã arcus BC, eiuſdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquemultiplices ſunt, nempe dupli, arcuum HK, BH; [b] Ac propterea totus arcus BG, duplus quoq; erit totius arcus BK; [c] & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: [d] Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus eſt quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, ęquales; [e] Ac propterea triangula ABF, FBM, cum habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. [f] Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF, ad BM; [g] ideoque rectangulum ſub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.



[a] 4. primi.
[b] 1. quin.
[c] 33. ſexti
[d] 20. tertij.
[e] 32. primi
[f] 4. ſexti
[g] 17. ſexti

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia ſunt lateribus HL, LM, triãguli HLM, & anguli quoq; ipſis contenti æquales, nẽpe recti: [h] erunt & baſes AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: [i] Eſt autẽ angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia ſint. Igitur & angulus LHM, eidem angu

[h] 4. primi.
[i] 5. primi.

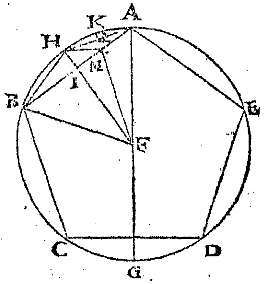
a 32. primi

b 4. ſexti.

c 17. ſexti.

d 2. ſecun.

lo HBA, æqualis erit; [a] Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erūt, [b] Quam ob rē erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; [c] ideoque rectāgulum ſub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Oſtēſum eſt autem & rectangulum ſub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, ſimul æqualia ſunt quadratis rectarū BF, AH: [d] At vero rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, æqualia ſunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



COROLLARIVM I.

HINC ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris eſt demonſtratio.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pētagoni ductam diuidere & arcū, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitum ſubtēdit, & latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos: Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterū deſcribitur, eiuſque demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc a nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuiſa ſemidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF, adiungaturque recta AF. Dico rectam AF, eſſe latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, ſecta ſit bifariam in E, eique addita DF; [a] erit rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoq; quadrato rectæ EA, quæ ipſi EF, eſt æqualis. [b] Eſt autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectāgulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc eſt, quadrato rectæ CD. [c] Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF; proptereaque recta CF, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius ſegmentum CD, ſit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum DF, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib. [d] Rurſus

a 6. ſecundi

b 47. primi

c 17. ſexti

d 10. tertijdecimi

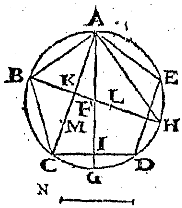
ſus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, *vna cum quadrato lateris decagoni* D F, *æquale eſt quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli;* [a] *Eſt autem eiſdem quadratis rectarum* AD, DF, *æquale quadratum rectæ* AF; *erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ* AF; *ac propterea recta* AF, *lateri pētagoni æqualis. Quod eſt propoſitum.*

[a] *47. primi*

12.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum ęquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.



IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem, deſcribatur pentagonum ęquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, eſſe lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, ſecetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, ſecet diametrum B H, in K. Abſcindatur quoque ex ſemidiametro F H, quarta eius pars FL; Item ex recta AC, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoq; FL, BF, illi commenſurabiles, cum ſint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, compoſita, [b] cum ſit commenſurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.

[b] *16. deci.*

RVRSVS quoniam recta F B, ex centro ducta ſecat AC, bifariam in B; ſecabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2 eiuſdem propoſ. Triangula ergo ACI, AFK, cū habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communē, [c] æquiángula inter ſe erunt. [a] Quam obrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA. [b] Vt autem CA, ad AF, ita eſt CM, quarta pars ipſius CA, ad F L, quartam partem ipſius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc eſt, vt CD, dupla ipſius CI, ad CK, duplam ipſius CM, ita FK, ad, FL; Atque componendo, vt CD, CK, ſimul ad CK, ita FK, FL, ſimul, nimirum recta KL, ad FL; [c] Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compoſitæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratū rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia vero ſi AC, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) [d] maius eius ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi CD; [e] Erit quadratum rectæ compoſitę ex CD, maiori ſegmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL; [f] ideoque quadratum rectæ KL, commenſurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autem FL, oſtenſa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

[c] *32. primi*

[a] *4. ſexti.*

[b] *15. quin.*

[c] *22. ſexti*

[d] *8. tertijdecimi.*

[e] *1. tertijdecimi*

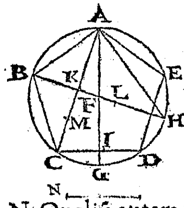
[f] *6. decimi*

DEINDE quia qualium partium 4. eſt BF, talium 1. eſt F L; ac propterea qualium 5. eſt B L, talium 1. eſt FL; ac propterea qualium 5. eſt BL, talium 1. eſt FL; erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratū rectæ F L, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. [g] habent enim quadrata proportionē laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. eſt quadratū rectæ FL, taliū 5. oſtenſum eſt quadratū rectæ KL. Qualiū igitur 25. eſt quadratū rectæ BL, talium 5. eſt quadratū rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ B L, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum B L, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [h] Erunt rectæ BL, KL, longitudine incōmenſurabiles; ideoq;, cū oſtenſæ ſint Rationales, erunt Rōnales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex Rōnali

B L,

[g] *20. ſexti*

[h] *9. deci.*



BL, dematur Rationalis KL, potentia tantum commenſurabilis; [a] erit reliqua B K, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congrués erit KL.

IAM vero recta BL, poſsit plus, quam recta K L, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum K L, & N; Qualiũ autem partiũ 5. fuit quadratũ rectæ BL, taliũ 1. fuit quadratũ rectæ KL; Erit reliquum quadratũ rectæ N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratũ rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportioné habebunt, quam numerus ad numerum. [b] Quare comméſurabilia erunt; proptereaque rectæ ipſæ BL, & N, commenſurabiles, ſaltem potentia: Eſt autem BL, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportioné non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. quod proportio eorum ſit, quę 5. ad 4.) [c] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis, longitudine ſit commẽſurabilis Rationali BH; (Qualium enim partium 8. eſt B H, talium 5. eſt BL,) poſsitque plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vt oſtenſum eſt; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

POSTREMO quia recta AB, eſt media proportionalis inter B H, B K, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6.) quod triangulum A B H, [d] habeat angulum B A H, rectum, a quo ducta eſt AK, ad baſin perpendicularis; [e] erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo ſub BH, B K. Quocirca cum ſuperficiem cõtentam ſub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, poſsit recta linea A B, [f] Erit A B, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c Quod erat demonſtrandum.

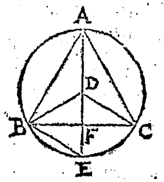
a 74. deci.
b 6. decimi
c 9. decimi
d 31. tertij.
e 17. ſexti
95. deci.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

8\.

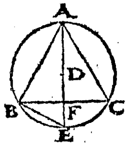
SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. Dico quadratum lateris AB, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet, ex coroll. 2. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariã quoque & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres ſextas partes totius circuli; arcus vero AB, cum ſit tertia pars totius circuli; duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus BE, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta BE, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro DE, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale eſt quadratis rectarum AB, BE, [b] quod angulus A BE, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ BE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla ſit lineæ BE; erunt quadrata rectarum AB, BE, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ AB, triplum eſt quadrati rectæ BE, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 47. primi
b 31. tertij.

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum ciculi potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cum latus A B, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri AD; poſito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadruplum eſt quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. vt eſt AE, ad AB, ita ſe habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli æquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad baſim demiſſæ potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.

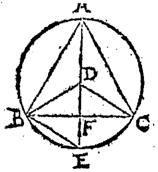
COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi poteſt, ſemidiametrum D E, bifariam ſecari in F, a latere trianguli B C. Cum enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B E; ſi ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. [a] Eſt autem quadratum rectæ B E, æquale [a] 47. primi quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ A B, quadruplum ſit quadrati rectæ BF, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt enim AB, dupla ipſius B F.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE, hoc eſt, quadratum rectæ DE, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Cum igitur, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ D E, quadruplum ſit quadrati dimidiæ lineæ ipſius D E; erit FE, dimidia ipſius DE. Quocirca DE, bifariam ſecatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſsim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito.



IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum BAC, & latus BC, necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque D E, ſecari a latere BC, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; cũ latera A B, AD, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli CAD; & baſes BD, CD, æquales quoq; : [a] Erunt anguli BAD, CAD, æquales. Quod eſt primum. [a] 8. primi

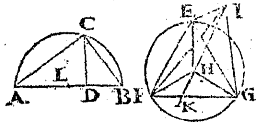
DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia ſint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli ipſis contenti æquales oſtenſi: [b] Erunt & baſes BF, CF, & anguli [b] 4. primi ad F, æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum.

POSTREMO, cum anguli B A E, C A E, demonſtrati ſint eſſe æquales; [c] erunt & arcus BE, C E, æquales. Quare [c] 2 . tertij cum BEC, arcus ſit tertia pars circumferentiæ, erit BE, ſexta pars

pars eiuſdem; Ac propterea recta B E, latus hexagoni, atque ſemidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. propoſ. 15. lib.
a 5. primi *4.ᵃ Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales ſunt angulis*
b 26. primi *BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; ᵇ Erunt & latera DF, EF, æqualia.*

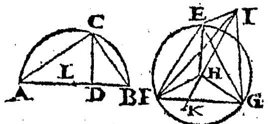
13. PROBL. I. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM conſtituere; & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.



SIT datę ſphæræ diameter *A*B, circa quā ſemicirculus deſcribatur ABC; & ex *A*B, auferatur tertia pars BD, vt ſit AD, ipſius D*B*, dupla; at vero A*B*, eiuſdem DB, tripla; & ipſius AD, ſeſquialtera. Deinde ducta *D*C, perpendiculari ad AB, cūnectantur rectę AC, BC. Ad interuallum rectæ H*E*, quæ æqualis ſit ipſi D*C*, deſcribatur circulus *EF*G, cuius centrū H, in quo triangulū æquilaterum inſcribatur EFG, adiūganturq; rectæ HF, HG, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi DC, cum æquales ſint ipſi HE, ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpēdicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex *I*, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis FEC, IEF, *IF*G, IEG, eſſe Pyramidē, ſiue Tetraedrum. Quoniam. n. latera *D*A, DC, trianguli A*D*C, æqualia ſunt lateribus HI, HE, trianguli IHE,
c 4. primi & anguli ipſis contenti, recti, ex hypotheſi, & 3. defin. lib. 11. ᶜ erit baſis *A*C, baſi IE, æqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam AC, æqualem eſſe rectis IF, IG. Rurſus quia tres *l*ineæ AD, DC, D*B*, proportionales ſunt

ſunt ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt AD, ad DB, ita quadratum rectæ *A*D, ad quadratum rectæ DC; & componendo, vt *A*B, ad *D*B, ita quadrata rectarum *A*D, DC, ſimul ad quadratum rectæ
a 47. primi DC:ᵃ Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectę AB. Igitur erit quoque vt AB. ad DB, ita quadratum rectæ AC, ad quadratū rectæ DC; Ac proinde cum AB, ſit ipſius DB., tripla, erit quoque quadratum rectæ AC, triplum quadra-
b 12. tertijdec. ti rectæ HE, cum HE, æqualis ſit ipſi DC:ᵇ Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ *EF*, æquale erit; & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum recta AC, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis IE, IF, IG; erunt quatuor triangula EFG, E*F*I, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter *A*B; & diametrum ſphæræ AB, potentia ſeſquialteram eſſe lateris E*F*, vel AC.



EXTENDATVR perpendicularis IH, vſque ad *K*, vt ſit H*K*, ipſi DB, & tota I*K*, toti *A*B, æqualis. Quia ergo tres rectæ *A*D, DC, *D*B, proportionales ſunt, quibus æquales exiſtunt tres IH, H*E*, HK; erunt quoque IH, *HE*, HK, proportionales. Quare cū HE, ſit ad I*K*, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK, ſemicirculus circa IK, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HE, tranſibit per E, vt mox oſtendetur; Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HF, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem I*K*, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HG, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cū per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphera deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter

meter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

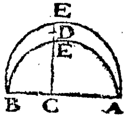
QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, taliū 2. ſit AD. Igitur & quadratū rectę AB, ſeſquialterum erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphęrę, & AC, recta lateri pyramidis EF, ęqualis; perſpicuū eſt, diametrū ſphęrę potētia ſeſquialterā eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo cōſtituimus, & data ſphęra cōplexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectā deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, [a] æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdū. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.

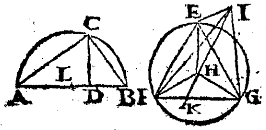


[a] 17. ſexti

HINC manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, tranſire per E, cum HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualiū 9. eſt quadratum rectæ AB: At qualium partiū 6. eſt quadratum rectæ EF, taliū partium 2. eſt quadratum rectæ HE, [a] quod quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cum proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2.



[a] 12. tertijdecimi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi ACB, eritque L, centrum quoq; ſphæræ. Dico rectā LD, (quæ nimirū ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideo punctum D, *idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diame ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiā partē ſemidiametri AL. Quoniā.n. AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.*

SIMILITER, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nā proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

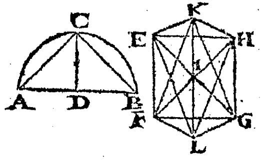
QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſe complicati componetur Tetraedrum, ſecundum totā ſoliditatem. Hanc vero praxim, & ſequẽtes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durero non ignobili ſcriptore.

15.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM couſtituere, & ſphęra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro *D*, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque rectæ AC, BC, [a] quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta E*F*, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratū *E*FGH, in quo ducantur diametri EG, *F*H, ſe mutuo ſecantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratū eſt. Deinde ex I, in vtramq; partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ *K*E, KF, *K*G, *K*H, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, K*F*G, *K*GH, *K*EH; *L*FE, LEH, LHG, LF*G*, eſſe octoaedrum, quod quęritur. Quoniā.n. latera E*I*, I*K*, trianguli E*IK*, æqualia ſunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti, recti; ipſe quidem EI*K*, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EH, GH.) [c] *E*rit & baſis *E*K, baſi EH, æqualis; Eodemq; modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit *K*EH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeo ęqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFG*H*, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphęra diametri AB, qua nimirum & pyramis cōſtructa comprehenditur; & diametrum ſphærę AB, potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.



[a] *4. primi*

[b] *8. primi*

[c] *4. primi*

QVONIAM.n.IE,perpẽdicularis eſt ad KL,ex 3. deſin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL;(quod tres rectę KI, IE, IL, ęquales ſint, ideoque eandem habeãt proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL,IE, deſcriptus tranſibit per punctum E,ex lemmate pręcedentis propoſ. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G,H.Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphęram,quę complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hęc ſphæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cuius diameter AB;(Nam cum rectæ AC, EF,æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC,duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF,quadrati rectę EI;Erunt & rectæ AD, EI, hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt;ac proinde ſphæræ ipſarum æquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphęra.

[a] 47. primi

QVIA vero quadratum rectæ AB,[a] æquale eſt quadratis rectarũ AC, BC,quæ æqualia ſunt; erit quadratũ rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cũ AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

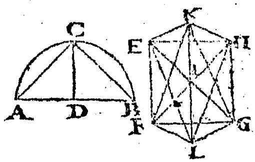
COROLLARIVM I.

[b] 4. vndec.

EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphæræ: quales ſunt KL, EG, FH, ſecãtes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HF;[b] recta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductũ;[a] Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt; Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus,) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterũ octaedri FK, KH.[b] Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cæteris angulis.

[a] 18. vnde.

[b] 48. primi



COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, ſemidiametri IK, IL: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertiũ a 13. tertijdecimi

b 14. tertijdecimi

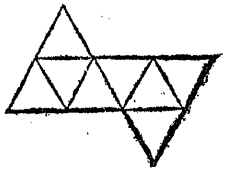
lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diamet ſphæræ diuiſum in ſex partes. [a] Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potētia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. [b] Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partiū 3. qualiū 6. eſt quadratū diametri ſphæræ. Igitur cum talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.

COROLLARIVM IIII.

c 15. vnde.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ F G; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: [c] Erit planum E H K, per EH, EK, ductum plano FGL, per F G, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.

SCHOLIVM.



QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hu figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſeſe complicatis componetur octaedrum ſecundum totam ſoliditatem, vt ait Albertus Durerus.

CVBVM

14.

PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM conſtituere; & ſphæra cōplecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

a 6. vnde.

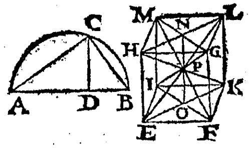
b 33. primi

c 34. primi

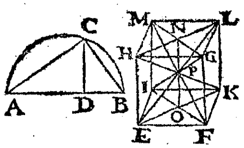
d 24. vnde.

e 15. vnde.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quā ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex A B, auferatur tertia pars B D, vt ſit A B, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cōnectantur rectæ AC, BC. Super rectā EF, quæ rectæ BC, ſit ęqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpendiculares E I, F K, GL, HM, æquales quoque ipſi B C, quarum extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planū EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ E I, F K, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. [b] Igitur & EF, IK, parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammū eſt EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: [c] Sūt autem & omnes quatuor anguli recti, cum E I K, FKI, æquales ſint oppoſitis rectis K F E, I E F. Igitur EFKI, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt F K LG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, [d] cū ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quod eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri A B. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML, diametri E K, F I, GM,



GM, H L, per quæ ducantur plana E K L H, F I MG. [a] 28. vnde. [a] Quia igitur tam planum EKLH, quam FIMG, cubi bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi trāſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdē propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EKLH, FIMG, rectāgula ſunt, (Cū.n. HE, perpēdicularis ſit duabus rectis [b] 4. vnde. EI, EF, ob quadrata EM, EK; [b] perpēdicularis quoq; erit ad planū EK, ideoq; & ad rectā EK, ex defi. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt H E K. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, necnon & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera vnius ęqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, ęquales, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 34. lib. 1. Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, ęquales erunt. Quare ſemicirculus circa E L, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, ſpherā deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem ęqualem eſſe ſphęrę diametri AB, ita demonſtrabitur.



[c] 47. primi CVM quadratū rectæ EK, [c] ęquale ſit quadratis æqualibus rectarū æqualiū EF, FK, ac proinde duplū quadrati rectę EF, hoc eſt, quadrati rectæ KL: Erūt quadrata recta- [d] 47. primi rum E K, K L, tripla quadrati rectæ K L: [d] Eſt autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, qđ angulus EKL, ſit rectus in rectangulo E KLH. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc eſt, quadrati rectæ BC: At vero eiuſdem quadrati rectæ B C, triplum eſt quadratum rectæ AB, (Nam tres rectæ AB, B C, BD, proportionales ſunt, ex coroll propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt eſt AB, ad B D, ita erit quadratū rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo A B, ipſius B D, ſit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia ſunt; ac propterea ipſæ rectæ EL, AB, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarū ſphæræ æquales exiſtunt.

QVIA vero oſtenſum eſt quadratum diametri EL, triplum eſſe quadrati lateris cubi KL; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeque mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales ſunt duobus angulis N M P, N P M, trianguli NMP: ([a] Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno [a] 29. primi *NMP, inter lineas FI, GM, [b] quæ parallelæ ſunt,* [b] 16. vnde. *cum ſint communes ſectiones planorū parallelorum EFKI, GHML; [c] & angulus O P F, æqualis eſt* [c] 15. primi *oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erūt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.*

CO-

COROLLARIVM II.

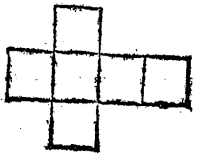
RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. [a] Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris tetraedri: [b] Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrũ ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC, cubi vero BC. [c] Perſpicuum autem eſt, diametrũ ſphæræ AB, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus.

[a] 13. tertij-dec.

[b] 15. tertij-dec.

[c] 47. primi

SCHOLIVM.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, vt conſtat.

16.

PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras: & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras cōprehēdit, diameter AB, circa quã ſemicirculus deſcribatur ACB: Et ex AB, abſcindatur quinta pars BD, vt AB, ipſius BD, ſit quintupla; & ipſius AD, ſeſquiquarta; At vero AD, ipſius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipſi BC, ſit æqualis, circulus deſcribatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIK. Poſt hæc diuiſis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, cōnectantur rectę FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex cētro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quę æquales ponantur ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. Eruntq; omnes inter ſe æquales; [b] ſed & parallelæ ſunt. Igitur rectæ, quæ illas cōiungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confuſionem, non duximus.) [c] binæ inter ſe æquales erunt: Ac proinde cum æquales ſint EL, EM, &c. ſemidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter ſe, & ſemidiametro EF, ſeu rectę BC. [d] Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum eſt plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademq; ratione planum p rectas QS, QT, ductum parallelum eſt plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quę ad propoſ. 16. lib. 11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planũ per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineę QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde ſi ex Q. ad interuallum QR, in eo plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, tranſibit, eritque ęqualis

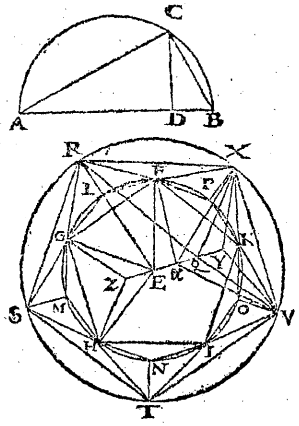
[a] 11. quar.

[b] 6. vndec.

[c] 33. primi.

[d] 15. vnde.

æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R,S,T, V,X, rectis RS,ST,TV,VX,XR.[a] Quia igitur LR, PX, æquales ſunt, & parallelæ; ſi concipiatur duci recta LP, [b] erunt quoque LP,RX, æquales & parallelæ; [c] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorſus argumento concludemus, reliquas rectas RS,ST,TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pẽtagonum æquilaterũ eſt RSTVX, omnia latera æqualia habẽs lateribus pẽtagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pẽtagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur ſemidiametro EF, hoc eſt, lateri hexagoni circuli FGHIK; & eſt LF, latus decagoni; [d] erit quadratum lateris pẽtagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [e] Eſt autem eiſdẽ quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pẽtagoni LP, ſeu FG, hoc eſt, ipſi RX, æqualis erit. Eademq; rõne erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriuſq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triãgula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia; cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri.

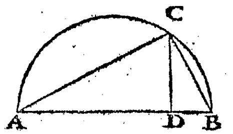


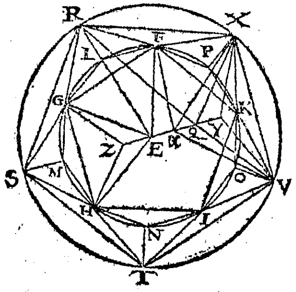
[a] 6. vndec.
[b] 33. primi
[c] 28. tertij.
[d] 10. tertij-dec.
[e] 47. primi

lateri. Poſt hæc, perpendicularis EQ, in vtramq; partẽ extendatur, ſintq; rectæ QY, EZ, æquales ſingulæ, lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Q̃m ergo QX, ſemidiameter eſt circuli RSTVX, hoc eſt latus hexagoni, & QY, latus eſt decagoni eiuſdem circuli; [a] erit quadratũ lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarũ QX, QY; [b] Eſt autẽ eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus ſit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela ſint oſtenſa, ſitque EQ, ad illius planum recta, ex conſtructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale eſt quadrato rectæ XV, proptereaque recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis oſtendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confuſionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo VYX, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiamer, & EZ, latus decagoni, anguluſque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus,) quę omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturque ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico comprehendi ſphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariã in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia ſunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, ſint ſemidiametri circuli RST, VX;

[a] 10 tertij-dec.
[b] 47. primi.





VX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, ęquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. [a] Erunt & baſes αV, αX, ęquales. Eademque ratione, ſi ducatur rectę ex α, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectę αR, αS, αT, ęquales & inter ſe, & ipſi αV, αX. Rurſus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, ęqualia ſunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QE, EF, ſint ſemidiametri circulorum ęqualium, & EQ, diuiſa ſit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, ęquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. [b] Erunt quoque baſes αX, αF, ęquales: eodemq; modo ſi ex α, E, ad G, H, I, K, rectę ducnatur, oſtendentur αG, αH, αI, αK, ęquales ipſi αX; Ac proinde decem lineę ductę ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, ęquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiuſdē circuli; [c] erit QZ, diuiſa in E, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens Eα, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta αZ, [d] quintuplum poteſt eius, quod ex Eα, deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta αF, quintuplum eiuſdem quadrati rectę Eα. (Nam cum quadratum rectę EF, quadruplum ſit quadrati rectę αE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius Eα; erunt quadrata rectarum EF, Eα, ſemel quintupla quadrati rectę E α. [e] Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, ęquale ſit quadratum rectæ AF; erit quoq; quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipſæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam ſecetur in α, (propterea quod ſi æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zo, Yα, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icoſaedri æquales. Quocirca ſphæra deſcripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſphęrę diametri *AB*.

[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 9. tertij-dec.

[d] 3. tertij-dec.

[e] 47. primi

[a] CVM. n. ſit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipſius α Z, ad QE, duplam ipſius αE; [b] Ac propterea vt quadratum rectę αZ, ad quadratum rectę αE, ita quadratū rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; ſit autem quadratū rectæ αZ, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ α *E*: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ Q*E*, hoc eſt, quadrati rectæ B C; quod recta QE, æqualis ſit poſita ſemidiametro EF, hoc eſt, rectę B*C*: Eſt autem & eiuſdem quadrati rectæ B*C*, quintuplum quadratum rectæ *A*B; (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. ſit vt AB, ad BC, ita BC, ad *B*D; erit vt *AB*, ad BD, ita quadratum rectæ A*B*, ad quadratum rectę BC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. *A*c proinde exiſtēte AB, quintupla ipſius B D, erit etiam quadratum rectæ *A*B, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia ſunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & ſphæræ circa ipſas, æquales erunt.

QVONIAM denique diameter ſphæræ *A*B, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendū eſt, latus *I*coſaedri eſſe lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur.) pōtq; quintuplū quadrati rectæ B*C*, hoc eſt, rectę illi æqualis EF; erit quoque ſemidiameter E F, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, *EF*, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. [c] erunt commenſurabilia; *A*c propterea & rectæ AB, EF, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo *A*B. ſit Rationalis, erit & E*F*, *R*ationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHI*K*, Rationalis erit; Ac propterea F G,

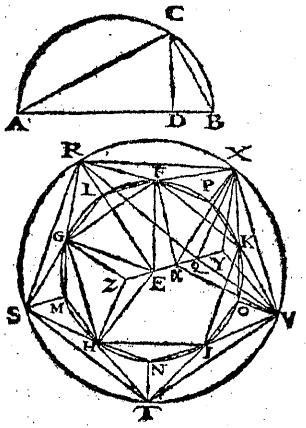
[a] 15. quin.

[b] 22. ſexti

[c] 6. deci.

latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur cõſtituimus, & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. quod erat facien.

COROLLARIVM I.



EX dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potẽtia quintuplam ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutũ eſt, & qui ꝑ quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum.n. eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati rectæ BC, hoc eſt, ſemidiametri EF.

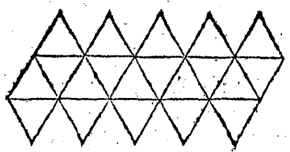
COROLLARIVM II.

ITEM manifeſtum eſt, ſphæræ diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli: Nam YZ, diameter ſphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icoſaedri oppoſita, qualia ſunt RX, HI, eſſe parallela. Nam recta RX, oſtenſa eſt parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidẽ rectæ LP, ſit quoq; parallela recta HI, vt in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus; (eo quod æquales ſunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perſpicuum eſt, rectas RX, HI, eſſe parallelas. Eademque eſt ratio de cæteris lateribus oppoſitis.

SCHOLIVM.



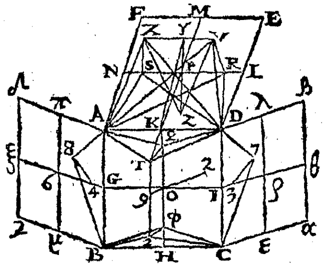
QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icoſaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſeſe aptentur.

PROBL. 5. PROPOS. 17.

17.

DODECAEDRVM conſtituere; & ſphæra cõplecti, qua & prędictas figuras; & demõſtrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna baſis cubi data ſphæra comprehenſi, quadratũ ABCD, cui inſiſtat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt ſit cõmunis horum ſectio recta AD, (Inſi



ſtunt enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos re-
ctos . Nam in pręcedentibus , vt cubus conſtitueretur,
erectæ ſunt ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI,
FK, GL, HM, ipſi baſi EFGH, perpendiculares. Id
quod facile apparere poteſt ex figura propoſitionis 15.
[a] 18. vnde. huius lib. [a] Quare & baſes cubi per ipſas ductę, rectæ e-
runt ad eandem baſin EFGH.) Diuiſis itaque cunctis la-
teribus bifariam in
punctis G,H,I,K,L,
M, N, quę rectis cõ-
nectantur ſecãtibus
ſeſe in O, P, centris
quadratorum, vt cõ-
ſtat ex demonſtra-
tione octaui proble-
matis lib. 4. Secen-
tur OK, PL, PN,
extrema ac media
ratione in pũctis Q,
R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra
cubum perpendiculares QT, RV, SX, ęquales ſegmẽtis
maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT,
AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, eſſe vnum ex duode-
cim pentagonis ęquilateris, & æquiangulis Dodecaedri
conſtituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, ſit in
vno plano, ita oſtendetur. Cum RV, SX, ſint ad quadra-
[b] 6. vndec. tum ADEF, rectę, [b] ipſę erunt parallelę; Ac proinde, cũ
ſint æquales, (quia ſegmenta maiora PR, PS, quibus æ-
quales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ ſectę PL,
[c] 33. primi PN, ęquales ſint.) [c] erunt quoque coniungentes rectę
[d] 33. primi RS, VX, ęquales & parallelę: [d] Eſt autem & AD, eidem
RS, ſiue LN, parallela, eo quod AN, DL; parallelę ſunt
[e] 9. vndec. & ęquales. [e] Igitur & AD, VX, parallelę ſunt; [f] Ac prop-
[f] 7. vndec. terea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipſis
erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in vno exiſtet
plano: Eſt autem & triangulum ATD, in vno plano. Di-
co quod & in eodẽ plano cum trapezio ADVX. Ex P. n.
[g] 8. undec. ducatur PY, parallela ipſi RV, [g] quæ erit recta ad quadra-
tum ADEF, quod ad idem recta ſit RV: Et conectantur

rectæ KT, KY. Qm̃ igitur eſt vt OK, ad OQ, ita OQ,
ad QK, ob ſectionem rectæ OK: Eſt autem KP, ipſi OK,
æqualis; (ſunt enim dimidia latera cubi;) & PY, ipſi
OQ, (cum æqualis ſit ipſi RV, quæ poſita fuit æqua-
lis ipſi OQ, maiori ſegmento;) Erit quoque vt KP, ad
PY, ita OQ, hoc eſt, QT, illi æqualis, ad QK. Quare
cum triangula PKY, QTK, duo latera habeant duobus
lateribus proportionalia, ſintque ad vnum angulum K,
compoſita, [a] ita vt homologa latera ſint parallela, nem- [a] 6. vndec.
pe PK, & QT, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit ad
quadratum ABCD; & PY, QK, inter ſe, quod vtrumque
rectum ſit ad quadratum ADEF: [b] Erunt reliqua latera [b] 32. ſexti
KY, KT, in rectam lineam collocata; [c] Ac propterea re- [c] 1. vndec.
cta TY, in vno erit plano, ideoque planum ATD, &
planum ADVX, vnum planum conſtituent, per rectas
TY, AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in
vno exiſtit plano.

QVOD vero ſit æquilaterum, ita docebitur. Cum
latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia ſint lateribus
AK, KQ, trianguli AKQ; (Sunt. n. AN, AK, dimidia
latera cubi, & NS, KQ, ſegmenta minora rectarum æ-
qualium ſectarũ.) & anguli ANS. AKQ, recti; ſi ducatur
recta AQ, [d] erunt baſes AS, AQ, æquales. Rurſus cum [d] 4. primi.
latera AS, SX, trianguli ASX, ſint æqualia lateribus
AQ, QT, trianguli AQT; (Nã rectæ AS, AQ, oſten-
ſæ ſunt æquales, & SX, QT, ſunt ſegmenta maiora recta-
rum æqualium ſectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex
defin. 3. lib. 11. [e] Erunt quoque baſes AX, AT, æquales. [e] 4. primi.
Quod ſi ducatur recta DQ, oſtendemus eodem argu-
mento, rectam DT, rectæ AT; ſi vero ducatur recta
DR, rectam DV, rectæ DT, eſſe æqualem. Sunt igitur
pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV; æqualia;
quibus etiam æquale oſtendemus reliquum VX, hac ra-
tione. [f] Quadrata rectarum PN, NS, ſimul tripla ſunt [f] 4. tertijde-
quadrati rectæ PS, hoc eſt, quadrati rectæ SX: Eſt autem cimi.
quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igi-
tur & quadrata rectarũ AN, NS, ſimul tripla ſunt qua-
drati rectæ SX. [g] Cum ergo quadratis rectarũ AN, NS, [g] 47. primi
æquale ſit quadratum rectæ AS; erit quoque quadratum

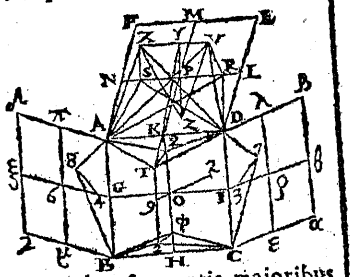
rectæ AS, triplum quadraxi rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarũ AS, SX, ſimul, quadrupla eiuſdẽ quadrati rectæ SX. [a] Eſt autem quadratis rectarum AS, SX, ęquale quadratum rectæ AX. Quadratũ ergo rectę AX, quadruplum quoque erit quadrati rectę SX, hoc eſt, quadrati rectæ PS, hoc eſt, quadrati rectę XY; [b] Sunt enim rectæ PS, XY, ęquales. Cum igitur & quadratum rectę VX, quadruplum ſit eiuſdem quadrati rectę XY, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod VX, dupla ſit ipſius XY; Erunt quadrata rectarũ AX, VX, ęqualia; Ac proinde rectæ ipſę ęquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, oſtenſæ ſint eſſe ęquales; ęquilaterum eſt pẽtagonum ATDVX.

QVOD autem & æquiangulum ſit, ita perſpicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, ſecta ſit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, ęqualis maiori ſegmento PS; [c] erit quoque NR, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit NP. [d] Quadrata igitur rectarum NR, RP, ſimul tripla ſunt quadrati rectę NP, hoc eſt, quadrati rectæ AN: Eſt autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla ſunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla ſunt eiuſdem quadrati rectæ AN. [e] Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarũ RV, AR, quadrupla ſunt quadrati rectæ AN. [f] Cum ergo quadratis rectarũ AR, RV, æquale ſit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiuſdem quadrati rectę AN, quadruplum. At vero eiuſdem quadrati rectæ AN, quadruplum eſt quadratum rectæ AD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod AD, dupla ſit ipſius AN. Aequalia igitur ſunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectę AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, oſtendemus DX, DA, æquales eſſe; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter ſe eſſe ęquales Quoniã igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia ſunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & baſes AD, DX, ęquales quoque: [g] Erunt & anguli ATD, DVX, ęquales. Non ſecus oſtendetur angulus DVX, ęqualis angulo AXV, Ac proinde,

[a] 47. primi.
[b] 34. primi
[c] 5. tertijde.
[d] 4. tertijd.
[e] 47. primi
[f] 47. primi
[g] 8. primi

---

cũ in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeãtur an
guli æquales ATD, DVX, AXV, [a] ipſum erit æqangulũ.
QVOD ſi ſumantur alia duo cubi quadrata CαβD,
BγδA, recta ad quadratum ABCD, in communibus ſe-
ctionibus CD, AB, quorum ſingula latera bifariam ſe-
centur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungan-
tur ſe mutuo ſecan-
tibus in quadratorũ
centris ρ, σ. Secẽtur
deinde OH, OK, ρI.
σG, extrema ac me-
dia ratione in: pun-
ctis φ, Q, 3, 4, ex
quibus ad plana qua
dratorum educãtur
ad partes cubi exte-
riores, perpendicula

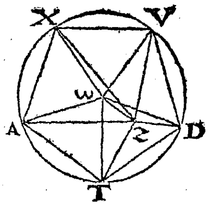


res φ2, QT, 37, 48, æquales ſegmentis maioribus
φO, QO, 3ρ, 46, coniunganturq; rectæ T2, 2C, C7, 7D,
DT, TA, A8, 8B, B2, demonſtrabimus eadem ratione,
pẽtagona T2C7D, T2B8A, ęquilatera eſſe & ęquian
gula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera
TD, TA. Conſtructa igitur iã ſunt tria pentagona tan-
gẽtia cubi tria latera AD, DC, AB, & ſibi mutuo cohęrẽ
tia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem me
thodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tãgen
tia reliqua nouem cubi latera; cõſtitutum erit Dodecae-
drum. Quod quidem ſphęra comprehendi, qua & cubus,
& præcedentes figuræ, hac arte demonſtrabimus.
INTELLIGANTVR plana cubi oppoſita ſe
cari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam ſe-
cantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppoſi-
tum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum
ABCD, & eius oppoſitum, planis per rectas GI, HK, du-
ctis, &c. Quoniã igitur plana ſecantia recta ſunt ad di-
cta plana cubi, qđ parallela ſint baſibus cubi, quæ rectæ
ſunt ad plana ADEF, ABCD. [b] Erũt & cõmunes eorũ ſe
ctiones ad eadẽ cubi plana rectæ. Quare cũ YP, recta ſit
ad planũ ADEF, ipſa producta verſus Z, erit cõis ſectio

[a] 7. tertij de.
[b] 19. unde.

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto
ſi ex O, ad planum A B C D, erigatur perpendicularis
9OZ; erit ipſa, communis ſectio planorũ, quę per rectas
[a] 39. vnde. GI, HK, ducuntur. a Quia vero dictæ communes ſectio-
nes & diametri cubi ſe mutuo bifariam ſecant; ſecent ſe
mutuo bifariam in Z: Secant autem ſeſe diametri cubi
bifariam in centro ſphęræ cubum complectentis, ex co
roll. 1. propoſ. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum
erit ſphæræ circa cubum deſcriptæ; Ac proinde omnes
rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter ſe æqua-
les erunt: Quibus omnibus æquales quoq; eſſe oẽs rectas
ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, ſic fiet per-
[b] 6. vnde. ſpicuũ, ducta recta ZX. b Quoniã parallelæ ſunt KP, OZ,
quod vtraq; recta ſit ad planũ ABCD; Itẽ parallelæ ſunt
OK, ZP, quod vtraq; recta ſit ad planũ ADEF; erit PK-
OZ, (debent. n. duo puncta Z, intelligi eſſe cõiuncta) pa
[c] 34. primi rallelogrãmum; c ac ppea PZ, æqualis erit ipſi KO, hoc
eſt, ipſi NP, dimidio lateri cubi: Eſt autẽ & PY, ipſi PR,
[d] 4. tertij-dec. æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. d Quare
cum quadrata rectarum NR, PR, ſimul tripla ſint qua-
drati rectæ NP, quod NR, in P, ſecta ſit extrema & me-
dia ratione; erũt quoq; quadrata rectarum ZY, PY, hoc
eſt, quadrata rectarum ZY, YX, ſimul tripla quadrati re-
[e] 47. primi ctæ PZ: (Eſt. n. YX, æqualis ipſi PS, hoc eſt, ipſi PY:) e Eſt
autẽ quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum re-
ctæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX, triplum erit qua-
drati rectæ ZP, hoc eſt, quadrati dimidij lateris cubi. At
quia eiuſdem quadrati dimidij lateris cubi triplum eſt
quoq; quadratũ ſemidiametri ſphæræ cubũ comprehen
[f] 15. primi dẽtis. (f Nã vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiame
[g] 22. ſexti. ter ad dimidiũ lateris; g Ac proinde vt quadratũ diame
tri ad quadratũ lateris, ita quadratum ſemidiametri ad
[h] 15. tertij-dec. quadratũ dimidij lateris. h Cũ ergo quadratũ diametri
triplũ ſit quadrati lateris, erit quoq; quadratũ ſemidia-
metri triplũ quadrati dimidij lateris.) Aequale igit eſt
quadratũ rectæ ZX, quadrato ſemidiametri ſphrę, ſeu
cubi; Ac ppea ZX, æqualis ſemidiametro. Eadẽ rõne erit
ducta recta ZV, ſemidiametro æqualis. Vel certe qa cũ
latera ZY, YX, triãguli ZYX, ęqualia ſint lateribus ZY,
YV,

YV, trianguli ZYV, & anguli cõtenti recti. (cũ enim PY,
ſit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad ſibi pa
rallelã VX, perpẽdicularis.) a Erunt baſes ZX, ZV, æqua [a] 4. primi.
les: Sunt aũt & ZA, ZD, ad angulos cubi, ſemidiametro
ſphæræ æquales, vt dictũ eſt. Sunt ergo iã quatuor rectæ
ductæ ex Z, centro ſphæræ ad quatuor angulos pentago
ni A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphæræ. Vt autem
oſtendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T,
ſemidiametro æqualis, deſcribatur circa pentagonum,
cum ſit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATD-
VX, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ perpendicu
laris demittatur Z ω, connectan-
turque rectæ ω A, ω T, ω D, ω V,
ωX. b Quoniam igitur quadratũ [b] 47. primi
rectę ZA, æquale eſt quadratis re
ctarum Zω, ωA; & quadratum re-
ctæ ZX, quadratis rectarum Zω,
ωX: Sunt autem quadrata recta-
rum ZA, ZX, æqualia, quod rectę
ZA, ZX, oſtenſæ ſint æquales; Igi
tur & quadrata rectarũ Z ω, ωA,



quadratis rectarũ Zω, ωX, æqualia; Ac proinde dempto
communi quadrato rectę Zω, æqualia relinquentur qua
drata rectarũ ωA, ωX, ideoq; rectę ipſę ωA, ωX, ęquales
erunt. Non aliter oſtendentur rectę ωV, ωD, & inter ſe,
& ipſis ωA, ωX, ęquales, quod & rectę ZV, ZD, ęquales
ſint oſtenſę rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in cir
cumferentiam plures rectę lineę ęquales, quam duę,
c punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reli- [c] 9. tertij.
quis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarũ
Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT. d Cũ [d] 47. primi
ergo illis duobus æquale ſit quadratum rectæ Z A; his
vero quadratũ rectæ ZT; Erũt æqualia quadrata rectarũ
ZA, ZT; ppeaq; & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare ſphæra
complectens cubum ex centro Z, deſcripta comprehen-
det pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo &
reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem
ſphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.

POSTREMO cum ſit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN:
erit

erit quoque vt NL, dupla ipſius NP, ad RS, duplam ipſius PS, ita RS, dupla ipſius PS, ad rectam compoſita ex SN, RL, nimirum ad duplam ipſius SN. Si igitur cu latus NL, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum erit SR: Sed NL, tota ita ſecta, Rationalis eſt (Nam eius quadratum commẽſurabile eſt quadrato diametri ſphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum ſit illud tertia pars huius.) [b] Igitur maius ſegmentum S R, hoc eſt, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo conſtituimus, & ſphera complexi ſumus, qua & prædictas figuras, & demonſtrauimus, quòd Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ uocatur *Apotome*. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

CVM ergo demonſtratum ſit; recta LN, extrema ac media ratione ſecta, maius ſegmentum eſſe rectam R S: Sit autem L N, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus Dodecaedri in eadẽ ſphæra deſcripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pẽtagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Nam AD, latus cubi ſubtendit angulum T, pentagoni, eſtque oſtenſum æquale rectis AV, DX, ſubtendentibus angulos X, & V, eiuſdem pentagoni.

QVONIAM vero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, [c] facit maius ſegmentum latus pentagoni; [d] ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex ma

[a] 15. quin.

[b] 6. tertijd.

[c] 8. tertij-decimi.

[d] 5. tertijde.

ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri, ſimiliter diuiditur, facitque minus ſegmentum latus Dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt V X, T 2, quæ videlicet parallela ſunt lateribus cubi E F, AB; aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cum parallela ſint cubi lateribus parallelis & oppoſitis, ſecanturque, ex demonſtratis, bifariã & ad rectos angulos, a lineis rectis, quæ centra baſiũ cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ vt demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum recta PZ, OZ, æquales ſint dimidio lateri cubi; et YP, 9O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS, OQ; Erũt totæ YZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales ſunt, ſeque bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo K O Z P, angulus O Z P, rectus eſt, cum opponatur recto OKP. Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ recta centra baſium coniungentes efficere angulos rectos.

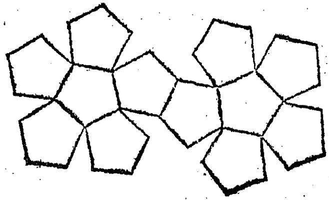
ctos. Omnes enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, vt perſpicuum eſt.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla oſtenſa ſint quadrati rectæ PZ; erit ZY, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmẽtum erit PZ, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; [a] *ideoque vt dupla ipſius ZY, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipſius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipſius ZP, ad duplam ipſius PY, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæra.*

[c] 15. quin.

SCHOLIVM.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur duodecim pẽtagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, diſponãturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrũ ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſe complicentur.

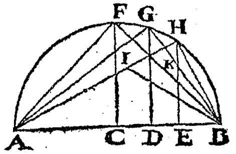
LATE-

PROBL. 6. PROPOS. 18.

18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

SIT ſphæræ diameter AB, quæ in C, ſecetur bifariam; In D, vero ita, vt BD, ſit ipſius pars tertia; In E, denique ita, vt BE ſit quinta pars eiuſdem. Deſcripto deinde circa AB, ſemicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipſi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Poſt hæc ex HA, abſcindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo deſcripti, cuius ſemidiameter, ſeu latus Hexagoni eſt BH: connectaturque recta BI. Poſtremo BG, ſecetur extrema ac media ratione in K, ſitque maius ſegmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expoſitionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, eſſe latus Pyramidis, ſeu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icoſaedri; BK, deniq; latus Dodecaedri. Quoniã.n. AG, media proportionalis eſt inter BA, AD, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propoſ. 20. eiuſdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Eſt autem BA, ipſius AD, ſeſquialtera; cum talium partium 2. ſit AD, qualium 3. eſt BA. Igitur & quadratum rectæ BA, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ AG; [a] Ac proinde cum diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri.

a 13. tertij-dec.

RVRSVS quoniam AF, eſt media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratũ rectæ AF, ex adducto coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem BA, ipſius AC, dupla: Erit quadratum rectæ BA, duplum quadrati rectæ AF. [b] Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

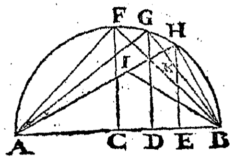
b 14. tertij-dec.

DEIN-

DEINDE cum BG, ſit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipſius BD, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [a] Quocirca cum ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

[a] 15. tertij-dec.

PRAETEREA quia, ex eiſdem corollariis, B H, eſt media proportionalis inter A B, B E, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Eſt autem, ex cõſtructione AB, ipſius BE, quintupla: Erit quadratum rectę A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter ſphæræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex coroll. 1. propoſ. 16. huius lib. Erit B H, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli: Eſt autem H I, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. [b] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, ſimul; Ac proinde [c] cum quadratum rectæ B I, æquale ſit quadratis rectarũ B H, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiuſdem. [d] Quam ob rem B I, latus eſt Icoſaedri.



[b] 10. tertij-dec.

[c] 47. primi

[d] 16. tertij-dec.

DENIQVE, cum BG, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius ſegmentum, latus Dedecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

QVOD uero ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cum demonſtratum ſit, diametrum ſphæræ eſſe potentia ſeſquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perſpicuum eſt, qualiũ partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4: eſſe quadratum lateris Tetraedri; talium uero 3. quadratũ lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertiũ lateris Octaedri, potẽtia uero duplũ lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterũ lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionẽ inter ſe habent, quam numerus ad numerum, [a] Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarum lineę ſunt commenſurabiles; atque adeo cum diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, eruntquoque prædicta latera Rationalia. Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib 8. [b] Erũt huiuſmodi lineæ, nimirũ diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, lõgitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles.

Diamet.	6.
T*etræed.*	4.
O*ctaed.*	3.
Cub.	2.

[a] 6. decimi

[b] 9. deci.

AT vero latera Icoſaedri, & Dodecaedri, quoniam ſunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc verò Apotome, vt demonſtratum eſt, nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum ſint diametro ſphæræ commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum, oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

SED neque inter ſe ullo pacto cõmmenſurabilia ſũt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si namque credãtur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cum latus Dodecaedri ſit Apotome, [c] erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cum latus Icoſaedri ſit linea Minor, [d] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantum, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo. [e] quod latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotome, & Minor

[c] 104. deci.

[d] 106. dec.

[e] 16. tertij-dec.

& Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphęræ, ideoque Rationalia exiſtant, duo vero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri; Hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras conſtruximus. Quæ forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim AG, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quã AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex ſcholio propoſ. 28, lib. 3.

EODEM modo oſtendemus latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam BG, cubi latus.

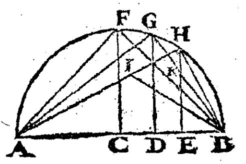
LATVS autem cubi BG, maius eſſe latere Icoſaedri BI, hac arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę AB, noncuplum quadrati rectę BD, cũ noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1, 3, 9, Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium 3. eſt quadratum rectæ BG; [b] quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD, Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. [c] Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [a] erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectę GD, maius eſt quadrato rectæ BH, ideoq; recta GP, maior quã recta BH. Rurſus quia diameter ſphęrę AB, cõponitur ex BH, ſemidiametro circuli, ex quo Icoſaedrũ cõſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI eiuſdẽ circuli, per coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. cõſtat latus decagoni HI, minus eſſe tertia parte rectæ AB, hoc eſt, minus recta BD. Nam ſi HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertijs partibus, nẽpe ipſi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi BD; Atque adeo, cum quadratum rectę AB, noncuplum ſit oſtenſum quadrati rectę BD, erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod eſt abſurdum. quintuplum enim eſt demõſtratum. Non ergo HI, tertia pars eſt ipſius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectę AB, & proinde dupla ipſius HI, maior quam duę tertiæ, hoc eſt, quam AD, erit BH, minor quã tertia pars BD. Quare quadratũ rectę AB, maius erit, quam nõcuplum quadrati rectæ BD. Quod magis eſt abſurdum. Non igitur maior eſt HI, tertia parte ipſius AB: Sed neque æqualis tertię parti, vt oſtendimus. Minor ergo eſt quã tertia pars, hoc eſt, quam BD. Itaque cum rectę GD, DB, maiores ſint rectis BH, HI, vt demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [b] Eſt autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectę BI, quadratis rectarũ BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus ſcilicet Icoſaedri.

[a] 20. ſexti.

[b] 15. tertijdecimi.

[a] 10. quin.

[b] 47. primi.



MAIVS denique eſſe latus Icoſaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patebit. Cum rectæ BG, diuiſæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BK, & minus GK; erit rectangulum ſub BG, BK, maius rectangulo ſub BG,GK; atque adeo rectangula ſub BG, BK, & ſub BG, GK, ſimul maiora duplo rectanguli ſub BG,GK:[a] Eſt autem rectangulis ſub BG,BK, & ſub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis ſub BG, GK, æqualia ſunt duo quadrata rectæ BK. (Nam cum ſit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK;[b] erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo ſub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis ſub BG, GK.) Maius igitur quoque eſt quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, ſex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ BH, (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum ſit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinq; quadrata rectæ BH, maiora erunt ſex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnũ quadratum rectæ BH, maius erit uno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale eſſet quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH, minora ſex quadratis rectæ BK. quod eſt abſurdum, cum illa quinque hiſce ſex maiora ſint demonſtrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quam recta BK; Ac propterea cum BI, maior ſit quam BH, multo maior erit BI, latus uidelicet Icoſaedri, quam BK; latus Dodecaedri. Latera igitur quinq; figurarũ expoſuimus, & inter ſe comparauimus. Quod erat faciendum.

a 2. ſecundi

b 17. ſexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonſtrant, præter dictas quinque figuras, non poſſe aliam conſtitui figuram ſolidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter ſe æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, ſolidus angulus conſtitui non poteſt, cum ſaltem tres anguli plani requirantur ad ſolidi anguli conſtitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, conſtat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX quinque, angulus Icoſaedri;

EX ſex autem huiuſmodi triangulis ad idem punctũ coeuntibus fieri non poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propoſ 32. lib. 1. Erunt eiuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc eſt, quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus conſtituetur.[a] Nam ſolidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex planis eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit.

a 20. unde.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus cõficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus enim recti quatuor erũt. Multo ergo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus cõſtabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodeacedri angulus componitur. Cũ enim quinque anguli pentagoni æquales ſint ſex rectis, vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnũ rectũ, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erũt quatuor rectis, ideoq; ex ipſis angulus ſolidus cõſtituetur. Sed ex quatuor huiuſmodi angulis, nullus ſolidus angulus cõfici poteſt. Cum enim vnus, vt dictum eſt, maior ſit recto, eo quod continet vnũ rectum, & inſuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus ſolidus ex ipſis conſtituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. Nec ſane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis cõſtitui poterit angulus ſolidus. Nam cũ ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, vt ad propoſ. 32. lib. 1. eſt demonſtratum; Ac proinde vnus angulus contineat unum rectũ, ac præterea duas partes ſextas vnius recti; continebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes recti, hoc eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo cõponetur angulus ſolidus; Atque idcirco multo minus ex pluri bus eiuſmodi angulis, quam tribus, angulus ſolidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpicuum eſt, præter dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramidis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triaangula ad efformandum angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrũ viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOG etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ ſunt omnes baſes in vnius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius triãguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidiũ eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium eſt rurſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiũt 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD ſi quis rurſus interrogauerit, quotnam angulos ſolidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ ſunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omnium baſium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in vnum conueniũt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, diuidendi ſunt omnes anguli in numerum angulorũ, qui ſimul coeunt ad angulũ ſolidum conſtituendũ, vt numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi diuidantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorũ vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidũ angulum Octaedri.) conficiũt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicẽtur in 3. numerũ angulorũ vnius trianguli, fiũt 60. anguli, qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituũt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si deniq; 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot. n. anguli conueniunt ad conſtituendum angulũ ſolidũ Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.

DENIQVE conſideratione etiam diguum eſt, cubum & octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet ſex baſes,

& octo angulos ſolidos, octaedrum vero octo continet baſes & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet uiginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solum Tetraedrum, (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur; niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes totidẽq; ſolidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLIDIS

ELEMENTVM

QVARTVMDECIMVM.

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI AD PROTARCHUM.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinę ſocietatem commendatus, longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque diſſererent aliquando de ſcripta ab Apollonio *comparatione* Dodecaedri *& Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorũ, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſse Apollonium; quæ a ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderũt. Ego autẽ poſtea incidi* *in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidē cœpi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis cōſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geometria verſatus, ſcite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ conſuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt prooemio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.*

TREDECIM libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi *aſcribuntur: Duo vero ſubſequentes a pleriſque* Hypſicli *Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui ſolent; in quorū quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrū, & Dodecaedrū, tam ſecundum ſuperficies, quam ſoliditates: In poſteriori vero exponuntur deſcriptiones aliquot figurarū regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum* Euclidis. *Verum quia plurima omittuntur ab* Hypſicle *ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inſcriptiones unius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in uniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atq; problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuo inſcribūtur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanū, & Franciſcum Fluſſatem* Candallam, *qui diligentem operā, &*

ſedulam

ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim nō ſolum inſequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; verumetiam integrum librū, qui ordine decimusſextus eſt, adiūxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & dodecaedri, facile intelligi poteſt ex eius procemio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.

QVONIAM vero in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quam in earundem ordine, & inter ſe, & a Franciſco Fluſſate, ideoque a nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, *inferior vero Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota* O, *intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemque in Campano intellige, ſi forte loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.*

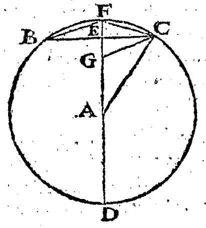
THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE, in

vtram-

vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur rectæ AC, CG, *a 3. tertij.* CF, BF. [a] Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & *b 4. primi.* anguli contenti ſint æquales, nempe recti; [b] erunt baſes *c 28. tertij.* CF, BF, æquales; [c] ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiuſdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, triãguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, ſuntque anguli *d 4. primi* contenti recti; [d] erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferẽtiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualiũ 4. eſt arcus DC, *e 33. ſexti* hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. [e] Quare *f 20. tertij* & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: [f] Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus *g 32. primi* CGF, duplus erit anguli CAF: [g] Atqui angulus CGF, externus, æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, vt oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium eiuſdem anguli CGF; ideoque æquales erunt anguli *h 6. primi.* GAC, GCA; [h] ac proinde & latera AG, CG, æqualia: Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FC, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atq; idcirco e contrario erit AE, ducta videlicet perpedicularis in pẽtagoni latus, dimidia duarũ ſimul AF, FC, nẽpe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.



COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductã ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hæc linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularẽ ex centro ad latus pẽtagoni ductã, æqualẽ eſſe utriq; lineæ ſimul, et ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam.n. vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul; Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propo. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

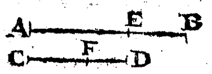
THEOR. 2. PROPOS. 2.

4.
2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECEN-

SECENTVR binæ rectæ AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim ſit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB; & vt CD, ad CF,
[a] 17. ſexti ita CF, ad FD; [a] erit rectangulũ ſub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum ſub CD, FD, æquale quadrato rectæ CF.



Quamobrem erit vt rectangulum ſub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita rectangulum ſub CD, FD, ad quadratum rectæ CF; (eſt enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quadruplum rectãguli ſub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadrumplum rectanguli ſub CD, FD, ad quadratum rectę CF: & componẽdo, vt quadruplũ rectanguli ſub AB, EB, & quadratum rectę AE, ad quadratum rectę AE, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, & quadratum rectę CF, ad quadratum rectę CF:
[b] 8. ſecundi [b] Sed quod quater continetur ſub AB, EB, vna cum quadrato rectę AE, ęquale eſt quadrato lineę compoſitę ex AB, EB; Et quod quater continetur ſub CD, FD, vna cum quadrato rectę CF, ęquale eſt quadrato lineę compoſitę ex CD, FD. Igitur erit quoque, vt quadratum lineæ compoſitæ ex AB, EB, ad quadratũ rectæ AE, ita quadratum lineæ compoſitæ ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF;
[c] 22. ſexti. [c] Ac proinde, vt recta compoſita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD, ad rectam CF: Et componendo vt compoſita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc eſt, dupla ipſius AB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD, & recta CF, id eſt, dupla ipſius CD, ad rectam CF; Et permutãdo, vt dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita AE, ad CF;
[d] 15. quin. [d] Vt autem dupla ipſius AB, ad duplã ipſius CD, ita eſt AB, ad CD. Erit ergo vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; Ac propterea, cum ſit vt tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam;
[e] 19 quin. [e] erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, vt tota ad totam. Quare vt AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum vtraq; proportio eadem ſit proportioni AB,

ad

---

ad CD: Et permutãdo, erit vt AE, ad EB, ſic CF, ad FD; & ſic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, oſtendemus & totas lineas, & earundem partes eſſe proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonſtrabimus hoc ſequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodẽ circulo deſcriptorum eãdem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.

QVONIAM. n. [a] *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione ſectam; & recta ſubtendens pentagoni angulum ſecta extrema ac media ratione facit maius ſegmentum, latus ipſum pentagoni:* [b] *ſit vt eadem ſit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris ſegmenti ad minus, quæ maioris ſegmenti rectæ angulum pentagoni ſubtendentis ad minus. Cum ergo ſit, vt maius ſegmẽtum ad minus, ita tota ad maius ſegmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta ſubtendens angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod eſt propoſitum.*

[a] 9. tertijdecimi.

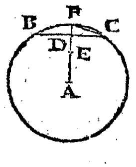
[b] 2. quartidecimi.

EX hac quoque propoſitione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpẽdiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus

nus vero ęquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum.

EX centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inſcripti, ſecetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius ſegmentum A E, eſſe æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ductæ; minus vero ſegmentum E D, equale eſſe dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli.



Extenſa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propoſ. 1. huius lib. arcus B C, nempe quinta pars totius circumferentiæ, biſariam ſecetur in F; [a] *Ac proinde recta compoſita ex A F, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, ſecta erit extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum A F, latus hexagoni, minus vero ſegmentum F C, latus decagoni. Quare vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit vt tota A D, diuiſa ſecundum extremam ac mediam rationem, ad totam compoſitam ex A F, F C, ſimiliter diuiſam, ita A E, maius ſegmentum ad A F, maius ſegmentum; & E D, minus ſegmentum ad F C, minus ſegmentum:* [b] *Eſt autem tota A D, dimidium totius compoſitæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipſius A F, ſemidiametri, & E D, ipſius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per corollarium propoſitionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis ſit dimidio ſemidiametri; perſpicuum eſt, maius ſegmentum A E, æquale eſſe dictæ perpendiculari, minus vero E D, dimidio lateris decagoni.*

[a] *9. tertijdecimi.*

[b] *1 quartidecimi.*

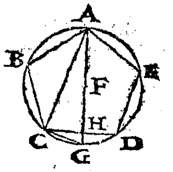
2.
4.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilaterum

rum

rum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.



DESCRIBATVR in circulo A B C D E, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarũ CD, AC, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H; erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ; ideoque recta ſubtenſa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta A G, dupla eſt rectæ FG; erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratũ rectę A G, quadruplum quadrati rectæ FG: [a] Sunt autem quadrato rectæ A G, æqualia quadrata rectarum A C, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atq; adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdẽ rectæ FG; [b] Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirũ ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.

[a] *47. primi*

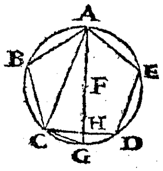
[b] *10. tertijdec.*

COROL-

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiuſmodi.

SI in ſphæra eadem cubus,& dodecaedrum inſcribantur;quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.



CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE,pentagonum vnum Dodecaedri in quapiã ſphera deſcripti; eritque ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadẽ ſphæra deſcripti. [a] Perſpicuum eſt autem, quadrata rectarum AC,CD, lateris ſcilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla eſſe quadrati ſemidiametri FG, &c.

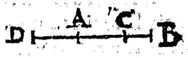
a 3. quartidecimi.

0.
3.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.

SECETVR.n. *AB*, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentũ AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdẽ circuli. Sit.n. *A*D, latus decagoni eiuſdem circuli, adiungaturque in rectum ipſi *A*B; [a] eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum B*A*: Ponitur autem & AB, ſecta in C, ſimiliter. [b] Igitur erit vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum A*B*, ita *A*B, tota ad maius ſui ſegmentum AC: Sed eſt quoque vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum *AB*, ita AB, maius ſegmentũ ad *AD*, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectę extrema ac media ratione. Igitur erit vt A*B*, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, ęquales erũt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt *A*B; erit & A*C*, eiuſdem circuli latus decagoni.



a 9. tertijdecimi.

b 2. quartidecimi.

ALITER. Adiungatur ipſi AB, in rectũ recta *AD*, æqualis maiori ſegmento A*C*; [c] eritque tota recta BD, diuiſa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, maius ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, per ea, quę demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib. 13. AD, minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipſi A D, latus erit decagoni in eodẽ circulo deſcripti, cuius *A*B, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

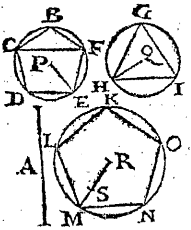
c 5. tertijde.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

2.
5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triãgulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptũ & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icoſaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundẽ circulũ circumſcribere & pentagonum *B*CDEF, & triãgulũ GHI, hoc eſt, circulos BCDEF, GHI, ipſa circumſcribenſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat.n. circulus KLMNO, pentagonum K L M N O, [a] ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoque quodlibet ipſorũ æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; [b] eritque maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtẽdat quoque recta CF, angulum B, pẽtagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll.2.propoſ.17. lib.13. latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll.1.eiuſdẽ propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi C F, ſecti extrema ac media ratione; [c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmentum ad RS, maius ſegmentum; [d] Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratum rectæ R S; Atque adeo, per ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio ꝑpoſ.22. lib.5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ R M, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ C F, æquale quintuplo quadrati rectę RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ.15.lib.13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll.1. propoſ.16. lib.13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [e] Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoq; quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cũ hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed qm̃, ([a] cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectę MN, ęqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cum MN, ęqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli ęquilateri; [b] ſit autem quadratum ipſius GH, ęquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectę MN, ęqualia quindecim quadratis rectę QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectę PE, ęqualia quindecim quadratis rectę QH; ac propterea vnum quadratum rectę PE, vni quadrato rectę QH, & idcirco ſemidiameter PE, ſemidiametro QH, ęqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, ęquales ſunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonſtrãdum.



[a] 16. tertij-dec.

[b] 4. quarti-dec.

[c] 1. quarti-dec.

[d] 22. ſexti.

[e] 10. tertij-dec.

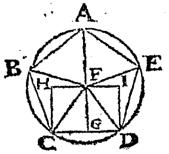
[a] 3. quarti-dec.

[b] 12. tertij-decimi.

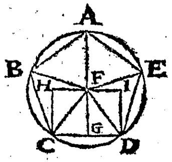
THEOR. 6. PROPOS. 6.

3.
6.

SI ex centro circuli pentagonũ Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.



EX centro F, circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulũ ſub FG, & CD, trigeſies ſumptum, eſſe ęquale toti ſuperficiei Dodecaedri. Ductis.n.rectis ex F, ad oẽs angulos pentagoni, reſoluetur pẽtagonũ in quinq; triãgula ęqualia, ex coroll. prop.8.lib.1. cũ bina latera vnius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *F*, recta HI, parallela ipſi CD, occurrẽs duabus perpendicularibus CH,DI, ductis ex *C*, *D*, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum *C* I, contentum ſub HC, hoc eſt, ſub F *G*, & C *D*.



[a] 41.primi.

[a] Quoniam vero rectangulum C I, duplum eſt trianguli F C D, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi *F*CD, æqualium; erit rectangulum *C* I, quinquies ſumptum, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pẽtagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia ſint vni pentagono; *A*tque adeo ſextuplum rectanguli *C* I, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum C I, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorũ pentagonorum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

[b] 41.primi

ALITER. Facta eadem figuræ conſtructione,[b] cũ rectangulum CI, duplum ſit trianguli *F* C D, hoc eſt, æquale triangulo FCD, bis ſumpto; Erit rectangulũ CI, trigeſies ſumptũ æquale triangulo FCD, bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei *D*odecaedri. Cum enim vnum pentagonum *D*odecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis, conſtabũt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triãgulis. Atq; idcirco triãgulum FCD, ſumptum ſexageſies æqualis erit ſuperficiei *D*odecaedri.

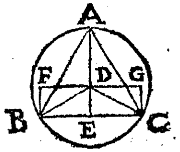
3.
7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circũſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod

quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.

EX centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri *A* B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum ſub D E, & B *C*, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis nãque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *D*, recta *F*G, parallela ipſi BC, occurrens in *F*, & G, duabus perpendicularibus *B*F, CG, ex B, C, ductis ad B C; eritque rectangulum B G, contentum ſub *F*B, hoc eſt, ſub *D*E, & BC.[a] Quoniã vero rectangulũ BG, duplum eſt trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, ęqualium: *E*rit rectangulũ BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triãgulo Icoſaedri; *A*tq; adeo idẽ rectangulum trigeſies ſumptũ, nẽpe decuplũ rectãguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triãgulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirũ decuplo duorũ triangulorũ Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triẽgulum *I*coſaedri, &c. Quod erat oſtendendũ.



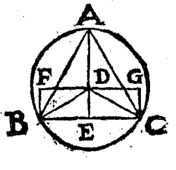
[a] 41.primi

[b] 41.primi

ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ,[b] cũ rectangulum *B*G, duplum ſit trianguli D B C, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectãgulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo D*B*C, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria cõficiunt vnũ.

Igitur rectangulum BG, trigeſies ſumptum ęquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

COROLLARIVM.



ITAQVE ſuperficies cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra; eſt ſicut rectangulum contẽtum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pẽtagoni Dodecaedri in latus dictũ, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus.

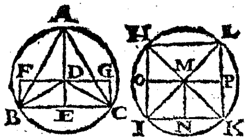
a 6.quartidec.
b 7.quartidec.
c 15.quinti

[a] Cum enim ſuperficies Dodecaedri æqualis ſit illi rectangulo trigeſies ſumpto; [b] Item ſuperficies Icoſaedri æqualis huic rectangulo trigeſies quoque ſumpto: Erit tam illud rectangulum trigeſima pars ſuperficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, ſuperficiei Icoſaedri. [c] Quare erit ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt rectangulum illud, trigeſima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigeſimam ſcilicet partem Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

NON diſſimili argumento indagabimus ſuperficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam ſi ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, ſiue quadratum cubi, circumſcribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei

Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies ſumptum, ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulũ Tetraedri ABC, circumſcriptũ a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icoſaedri dictum eſt. Dico rectangulum BG, ſexies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Tetraedri.



a 41. primi

[a] Quoniam enim rectangulum BG, duplum eſt trianguli DBC, hoc eſt æquale duobus eiuſmodi triangulis; erit ipſum ſexies ſumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula conſtituant totã ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipſi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis æquale.

b 41. primi

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Octaedri. [b] Cum enim rectangulũ BG, duplum ſit trianguli DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor huiuſmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperficiei Octaedri.

c 41. primi

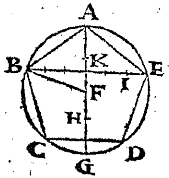
SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, deſcribatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipſi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum ſub OI, hoc eſt, ſub MN, & IK, ſumptum duodecies, æquale eſſe ſuperficiei cubi. [c] Quoniam enim rectangulũ IP, duplum eſt trianguli MIK, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor eiuſmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula conſtituant ſex *quadrata, id eſt, totam ſuperficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant;* Erit *rectangulum IP, duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi.* Quod *eſt propoſitum.*

ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (ſunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, *ſit dimidium lateris H I, nempe æqualis ipſi* M N *) conſtituent duodecim talia rectangula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiem cubi.*

4.
8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti; æquale eſt dicto pentagono.



IN circulo, cuius centrum F, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABC*D*E, & ducta diameter *A*G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres ſint AH: Angulum vero A, ſubtendens recta B E, ſecetur in ſex partes æquales, quarum quinque ſint BI, & vna IE, ita vt BI, ſit quintupla ipſius I *E*. Dico rectangulū cōprehenſum ſub AH, *BI*, æquale eſſe pentagono A B *C* D E. Ducta enim recta BF; quoniam AH, cōtinet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cum ſit ſemidiameter; erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia vero recta *F*A, diuidens arcum B*A*E, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. ꝓpoſ. 10. lib. 13. in puncto K; cōtinebit tā KB, q̈ *K*E, tres ſextas rectæ BE; atq; adeo cū B*I*, cōtineat quinq;, cōtinebit *KI*, duas; Ac proinde & KB, ipſius

*K*I, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit vt *A* H, ad AF, ita KB, ad *K* I; [a] atque idcirco rectangulum ſub extremis AH, *K*I, æquale erit rectangulo ſub medijs A *F*, *K*B. [b] Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli AB*F*, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eādem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub AH; *K*I, duplum erit eiuſdem trianguli *A* B F: [c] Eſt autem & rectangulum ſub A H, K *I*, duplum rectanguli ſub A*H*, IE; propterea quod & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim *K*I, duas ſextas partes ipſius B E, & IE, vnam.) eademque ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum A*B*F, & rectangulum ſub A H, I E; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum eſt triāguli *A*B *F*, quod pentagonum in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis e centro F, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum vero ſub *A*H, B*I*, quintuplum eſt rectanguli ſub *A*H, I*E*; quod & baſis *B*I, quintupla ſit baſis IE, eademque ſemper altitudo A *H*. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] *16. ſexti*

[b] *41. primi*

[c] *1. ſexti*

[d] *1. ſexti*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, ([e] *comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub A H, & ſub quinque ſextis partibus lateris*

[e] *5. quartideci.*

lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirum ſub BI, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

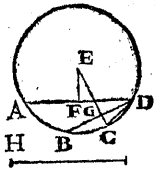
4.
8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

[a] 5. quartidecimi.

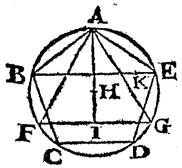
IN circulo ABCD, [a] circunſcribente & pentagonū Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni BD, & triāguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deniq; H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione maius ſegmentū eſt EF, ex coroll propoſ. 2. huius lib. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius ſui ſegmentum, ita EG, tota ad EF, maius ſui ſegmentum; [c] Ac proinde rectangulum ſub extremis H, EF, æquale erit rectangulo ſub medijs BD, EG. [d] Quia uero eſt, vt H, ad AD, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum ſub AD, EF, cum baſes ſint H, AD, altitudo vero ſemper eadem EF; Erit quoque vt H. ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quod eſt æquale rectāgulo ſub H, EF,) ad idem rectangulum ſub AD, EF. Quare cum, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, vt rectāgulum ſub BD, EG, ad rectangulum ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.



[b] 2. quartidecimi.
[c] 16. ſexti
[d] 1. ſexti

[a] 5 quartidecimi.

ALITER. [a] Circumſcribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quę per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quę latus erit cubi, ex corol. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextę partes ſint BK. Dico rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiē Icoſaedri. Quoniam. n. rectāgulum ſub AI, BK, ęquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub AI, IF, ęquale eſt triangulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum FG, baſis trianguli dupla ſit ipſius IF, baſis rectanguli: Erit vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulū ſub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: [b] Eſt autem vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita BK, ad IF, cum baſes ſint BK, IF, & altitudo eadem ſemper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, (ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, ęquemultiplicētur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum AFG; & recta IF, ęquemultiplicentur per numerum 20. [c] erit quoque vt pentagonum ABCDE, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigeſies ſumptū, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta BK, duodecies ſūpta ad rectā IF, vigeſies ſumptā: Atqui recta BK, duodecies ſumpta ęquiualet lateri cubi BE, decies ſumpto; (Nam cum BK, contineat quinq; ſextas partes ipſius BE; continebit eadē BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdē BE, quę efficiūt decē integras



[b] 1. ſexti
[c] ſchol. 22. quinti.

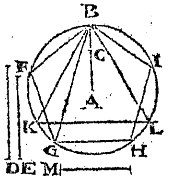
gras rectas BE.) Recta vero *IF*, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri *I*coſaedri FG, decies ſumpto; (eo quod *FG*, eſt ipſius I F, dupla.) Erit igitur ſuperficies *D*odecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi BE, decies ſumptum ad latus *I*coſaedri FG, decies ſumptum; Ac propterea, [a] cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem *D*odecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

[a] *15. quin.*

4.
9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori ſegmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.



SECETVR recta *AB*, in *C*, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum A*C*. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus *I*coſaedri in ſphæra eadem cum cubo deſcripti. Ex *A*, centro, ad interuallum *A*B, circulus deſcribatur, in quo cõſtituatur & pentagonum æquilaterũ BFGHI & triangulum æquilaterum B*K*L. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius ſphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Quoniam uero A*C*, maius ſegmentum ſemidiametri *A*B, ſectę extrema ac media rõne, [b] eſt latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum *A*B, latus eſt Hexagoni; [a] poterit *BF*, latus pentagoni & totã A*B*, latus videlicet hexagoni, & maius ſegmentum A C, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſsit iam & recta M, totam *A*B, & minus ſegmentum B*C*, per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D, latus propoſitum cubi ad E, latus propoſitum Icoſaedri, vt eſt B F, potens totam *A* B, & maius ſegmentum *A*C, ad M, potentem totam A *B*, & minus ſegmentum B *C* [b]. Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri B *K*, triplum eſt quadrati ſemidiametri *A*B: [c] Item quadrata rectarum A B, *B* C, tripla ſunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ B*K*, ad quadratum rectæ A B, ita quadrata rectarum A B, *B C*, hoc eſt, quadratum rectæ M, ipſis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratũ rectæ AC: Eſt autem vt quadratum rectæ *AB*, ad quadratum rectæ *A*C, ita quadratum rectæ *B G*, ad quadratum rectæ B F. (Nam cum rectæ B G, ſectæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BF, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. eo quod BG, eſt latus cubi, & BF, latus *D*odecaedri eiuſdem ſphærę; [d] Erit vt tota AB, ad maius ſegmẽtum AC, ita tota BG, ad maius ſegmentũ *BF*: [e] Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę AC, ita quadratũ rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ B F, ita quadratum rectæ B *K*, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B *K*, ita quadratum rectæ *B*F, ad quadratũ rectę M; [f] Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam B*K*, ita recta B*F*, potens totam *A*B, & maius ſegmentum A C; ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum B*C*. Cum igitur propoſita latera *D*, E, cubi, & Icoſaedri, eandem habeant proportionem, quam rectę BG, B *K*, vt mox oſtendemus; perſpicuum eſt, vt ſe habet recta BF, potens totã *AB*, & maius ſegmentum *A*C, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum B C, ita ſe habere propoſitum

[b] *4. quartideci.*

[a] *10. tertijdec.*

[b] *12. tertijdeci.*

[c] *4. tertijd.*

[d] *2. quartidecimi.*

[e] *22. ſexti*

[f] *22. ſexti*

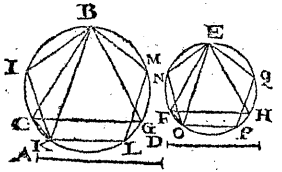
poſitum cubi latus D, ad Icoſaedri propoſitum latus E. Si recta itaque linea ſecetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVOD vero propoſita latera cubi & Icoſaedri D, & E, eiuſdem ſphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK; demonſtrabimus hoc propoſito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ: Item D, latus cubi, & EF, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icoſaedrorum BCG, EFH, et circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ, connectãturq; rectæ BK, CK; EO, FO. a Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonũ Dodecaedri in eadem cũ ipſis ſphæra deſcripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoq; ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rurſus quia arcus BIK, ENO, ſimiles ſunt; (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circunferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione ſegmẽtorum ſimilium, æquales inter ſe, quã anguli BKC, EOF; inter ſe, cum tam illi, quam hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulũ BCK, toti triangulo EFO, æquiangulũ. a Quare erit, vt BK, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icoſaedri, ita EO, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad EF, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.



a 5. quartidec.

a 4. ſexti.

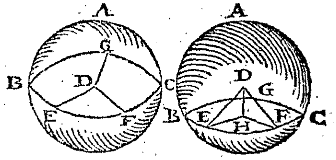
PERSPICVVM eſt igitur id, quod in demonſtratione aſſumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.

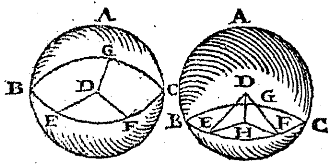
LEMMA I.

SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.

SECETVR ſphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem ſectionem planum BEFCG: Dico BEFCG, eſſe circulum. Tranſeat enim primo planum ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione BEFCG; ducanturque ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG.



DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cum ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, ciuſque centrum D, idem cum centro ſphæræ.



TRANSEAT ſecundo planum ſecans non per centrum ſphęræ: Ducatur autē ex D, centro ſphęræ ad planum ſecans perpendicularis DH; emittāturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vſque communis ſectionis; & connectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti ſunt;[a] *erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro ſphęræ ad eius ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea cōtenta, circulus erit; eiuſq; centrū, punctū H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod eſt propoſit.*

[a] *47. primi*

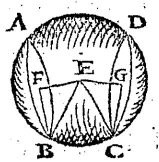
COROLLARIVM.

ITAQVE ſi planum ſecans tranſierit per centrum ſphæræ, efficietur circulus idem centrum habēs, quod ſphæra. Si vero planum ſecans per ſphæræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam ſphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum ſecans ducta. Nam ſemper demonſtrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli eſſe æquales, vt perſpicuum eſt.

LEMMA II.

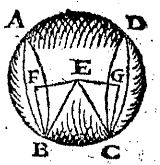
CIRCVLI in ſphæra æquales, æqualiter diſtant a centro ſphæræ: & circuli æqualiter diſtantes a centro ſphęræ, æquales ſunt.

IN ſphæra ABCD, cuius centrum E, ſint circuli æquales AB, DC. Dico ipſos ęqualiter a centro E, diſtare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. pręcedentis lemmatis in ipſorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectę EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11.[a] *Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectę EC, qua-*



[a] *47. primi.*

dratis rectarum E G, G C, *æquale : Sunt autem quadrata rectarum* EB,EC,*æqualium, cum cadant ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem,æqualia. Igitur & quadrata rectarum* EF, FB,*quadratis rectarum* EG, GC, *ęqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum ęqualium* FB,GC, *cum ſint ſemidiametri circulorum ęqualium, erit reliquum quadratum rectæ* EF,*reliquo quadrato rectæ* EG, *ęquale; Atque adeo æquales erunt rectę perpendiculares* E F, E G. *Quam ob rem circuli* A B, D C, *æqualiter diſtant a centro* E. a 47. primi



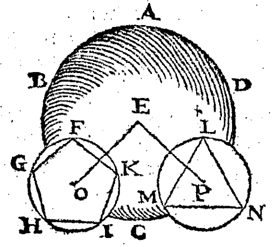
SED iam æqualiter diſtent circuli A B, D C, *a centro ſphęræ* E. Dico *ipſos eſſe ęquales. Conſtructa enim figura, vt prius, oſtẽdemus eodem modo, quadrata rectarum* EF,FB, *ęqualia eſſe quadratis rectarũ* EG, GC; *Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium* E F, EG, *cum circuli ęqualiter ponantur diſtare a centro, reliquum quadratum rectę* F B, *reliquo quadrato rectę* GC;*atque adeo æquales erunt rectę* F B, G C, *ſemidiametri ſcilicet circulorum* AB,DC. *Circuli igitur* A B, D C, *æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 11. PROPOS. 11.

4.
10.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra.

IN ſphæra ABCD, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum F G H I K: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum L M N. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in una eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra ABCD, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangunt; ſi per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in ſphæra F G H I K, L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN, Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro ſphærę diſtabũt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales ſunt E O, EP, æquales erunt. Non aliter oſtendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icoſaedri deductæ æquales. Quare ſi ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides ęqualium altitudinum; Ac proinde cum & baſes ipſarum ęquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, ęquales inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemque modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe ęquales, quarũ altitudines ęquales erunt altitudinibus pyramidũ Dodecaedri. [b] Quoniã aũt eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin



a 6. quartidec.

b 6. duodec.

LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriuſque eadem ſit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demõſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt, vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides *I*coſaedri, nempe ad totum ſolidum *I*coſaedri: [a] Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atq; adeo, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus *I*coſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] *9. quartidecimi.*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, [b] *ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra:* [c] *Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemq; ſphæræ, vt eſt linea potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum:* [d] *Item ita eſſe Dodecaedrũ ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.*

[b] *9. quartidecimi.*

[c] *10. quartidec.*

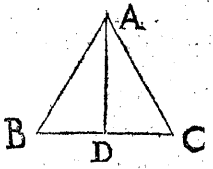
[d] *11. quartidec.*

THEOR. 12. PROPOS. 12.

o. 11.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineę perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero *A* B C ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitũ B C, perpendicularis *A* D. Dico quadratum lateris AB, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniã.n. ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erũt duo anguli B, & *D*, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, vel AB, *A*C, æqualia. [b] *I*gitur & reliqua latera B*D*, CD, æqualia ſunt; ac propterea latus B*C*, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris AB, quadruplum quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cũ igitur quadrato rectæ *A*B, æqualia ſint quadrata rectarum AD, B D; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ B*D*; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum A D, B D, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ *AD*. Quare quadratum rectæ *A*B, partiũ 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ *A*D, partium 3. *L*atus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] *5. primi.*

[b] *26. primi*

[c] *47. primi*

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt BD, & CD, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam a perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, triãguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & baſis BD, baſi CD, æqualis; [a] Erunt et anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD.

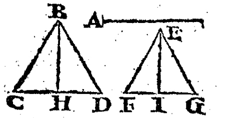
[a] *8. primi.*

O.
13.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphærę diameter Rationalis A. *Dico* tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphęra, eſſe Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphęrę, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera oppoſita CD, FG, perpendiculares BH, E*I*. [b] Quoniã igitur quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri BC, [c] & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. [d] ideoque commenſurabilia erunt. Quare lineę ipſæ A, BC, EF, commenſurabiles exiſtent, ſaltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales *B* C, *E*F, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, *F*I.



[b] *13. tertij decimi.*
[c] *14. tertij dec.*
[d] *6. decimi.*

RVRSVS, [a] quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectę BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, ſeſquitertium eſt; habebunt tã quadrata rectarum B C, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. [b] ideoque tam illa, quam hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ BC, BH, quam lineæ EF, E*I*, commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam *C*H, ipſi BC, quam FI, ipſi EF, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. [c] *I*gitur & tam BH, *C*H, quam EI, F*I*, commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoq; BH, E*I*, Rationales. [d] Quoniã vero tam CH, *B*H, quam FI, EI, longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. [e] cum oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tã CH, quam FI, qualium 3. eſt tam BH, quam EI,) Erunt tam CH, *B*H, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [f] Ac proinde tam rectangulum ſub C*H*, BH, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus cõtentum, Medium erit: Sunt autem triãgula BCD, EFG, ęqualia rectangulis ſub CH, BH, & ſub FI, EI, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum C D, F G, duplę ſint baſium rectangulorum CH, *F*I. Igitur & triangula *B*CD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri triangulo BCD, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum BCD, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo EFG, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum *E* F G, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphęrę diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quã Octaedri in ea ſphæra, Media.

Quod erat oſtend.

[a] *12. quarti decimi.*
[b] *6. decimi.*
[c] *12. dec.*
[d] *9. decimi.*
[e] *12. quarti decimi.*
[f] *22. deci.*

COROLLARIVM.

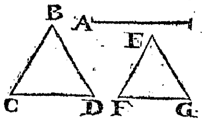
SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub CH, BH, & ſub FI, EI, hoc eſt, triangula BCD, EFG, ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

O. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribãtur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

SIT ſphæræ diameter A, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ BCD; Octaedri vero baſis triangulũ EFG. Dico triangulum BCD, ſeſquitertiũ eſſe trianguli EFG; At vero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialterã ſuperficiei Tetraedri. [a] Quoniã n. quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri CD; [b] duplũ vero quadrati lateris Octaedri FG; ſit, vt qualiũ partiũ 6. fuerit quadratũ diametri A, taliũ 4. ſit qua-



dratum

[a] 13. tertijdecimi.
[b] 14. tertijdec.

dratũ lateris CD, & taliũ 3. quadratũ lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triãgulum BCD, ad triangulum EFG. ([a] quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habent laterum CD, FG, duplicatam, cum ſint ſimilia.) Igitur & triangulũ BCD, ſeſquitertium eſt trianguli EFG.

[a] 20. et 19. ſexti.

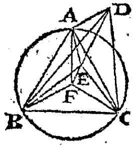
RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulum BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG; Ac propterea qualiũ partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. eſſe triangulum EFG; Efficitur, vt triangulum EFG, octies ſumptum, hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earũdem partium 24; At triangulum BCD, quater ſumptum, id eſt, tota ſuperficies Tetraedri, earũdem partium 16. Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

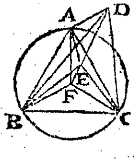
O. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad dictam baſim.

SIT Tetraedrum ABCD, cõtentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum ſphæræ rectã DEF, incidens in baſim ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC, & DF, perpendicularem



rem eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E,& F, ad angulos dictæ baſis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex cẽtro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & baſes AD, CD, æquales, cum ſint latera triangulorum æquilaterorum ęqualium.[a] Igitur anguli AED, CED, æquales erũt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt,[b] eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, ſi conſiderentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, triãguli EAF, æqualia ſunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipſis contenti, oſtenſi ęquales;[c] Erunt baſes FA, FC, æquales. Sic quoq; æquales erunt FB, FC, ſi conſiderentur triãgula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales;[d] erit F, centrũ baſis ABC, ſeu circuli eam circumſcribentis.



a 8. primi.
b 13. primi
c 4. primi.
d 9. tertij.

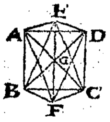
QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſpheræ ad planum circuli ABC, demiſſa in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis ſit ad planum circuli, ſeu baſis Tetraedri ABC. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque ſit demonſtratum centrum eiuſdẽ circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra, quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

o. 16.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis vero vtriuſque eſt quadratũ ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in ſphæra deſcriptum, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, q̃ æquales ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphęrę, ductæ videlicet e cẽtro ad ſuperficiẽ ſphęrę:[a] qm̃ quadratum diametri ſphęrę duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri, AG, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphęræ talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratũ rectę AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cũ ergo quadratum rectæ AG, æquale ſit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG;[b] Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGB, recti.[c] Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectũ erunt cõiunctæ;[d] atque adeo rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtẽt plano;[e] Ac ꝓpterea rectæ earũ extrema cõnectentes AB, BC, CD, DA, in eodẽ plano erunt cũ ipſis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrũ in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum baſis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides ęquales ſunt & ſimiles ex defin. 10. lib. 11. cũ quælibet conſtet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sũt & ſimilia, & baſi cõmuni ABCD. Dico iam earum altitudines eſſe ęquales, & baſin ABCD, eſſe quadratũ ſubduplum



a 14. tertij-dec.
b 48. primi
c 14. primi.
d 2. vndec.
e 7. vndec.

duplũ quadrati diametri ſphæræ. Quoniam.n. oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri AB, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; [a] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis AG, *D*G, ſe mutuo ſecantibus in G; ad rectos angulos inſiſtit, [b] ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, DG, ductum, nempe ad baſin pyramidum. Quare E G, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus FG, altitudinem eſſe pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. *R*urſus quia AC, eſt diameter ſphæræ; [c] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A *D*; Ac propterea ęquale duobus quadratis laterũ AD, DC. [d] Quare angulus *A*DC, rectus eſt: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABC*D*, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere octaedri AB; [e] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] *48. primi*

[b] *4. undec.*

[c] *14 tertijdec.*

[d] *48. primi*

[e] *12. tertijdec.*

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propoſitionẽ demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur a Campano, nõ habita ratione conſtructionis octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

o.
17.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphæræ impo-

ſitum ad Octaedrum in eadẽ ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphæræ.

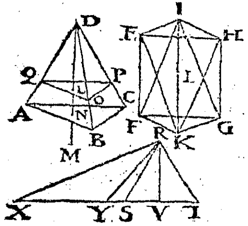
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadẽ ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quę potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earũdem triũ quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphærę.

SIT Tetraedrum ABCD, & octaedrum EFGHI*K*, in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo *D*, per centrum L, diameter ſpæræ D *M*, incidens in baſin A B C, ad punctum N. [a] Erit igitur N, centrum baſis *A*BC, & DN, perpendicularis ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit DL, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; *A*c propterea D N, talium 4. *D*ucatur deinde, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum

[a] *15. quartidecimi.*

lũ plano ABC;[a] Eruntq; rectæ QO,OP,PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac ꝓpea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, [b] cum anguli illius æquales ſint angulis huius, ſinguli ſingulis: At ABC, eſt æquiangulum ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulũ erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propoſ. 6. lib. 1. ideoque ſimile ipſi ABC: Sũt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris ſimilia, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, ſimiles ſunt ex defin. 9. lib. 11. [c] Rurſus quia plana parallela ABC, QOP, ſecant rectas DN, DC, ꝓportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum oſtenſum ſit DN, eſſe talium partium 4. qualium 3. eſt DL.) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, [d] cum pyramides ſimiles habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hęc enim proportio triplicata eſt proportionis 4. ad 3. vt cõſtat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri ſunt minimi in proportione 4, ad 3. vt conſtat ex ꝓpoſ. 2. lib. 8. Rurſus [e] quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iiſdem numeris conſtat.



SIT iam triangulum ęquilaterum RST, æquale triãgulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RV. [f] Eritque latus RT, hoc eſt, DP, illi æquale, potentia ſeſquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectę DP, taliũ 27. erit quadratum rectæ RV: Erat autem earũdem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, eſt potens vigintiſeptẽ ſexageſimaſquartas partes quadrati lateris tetraedri

RVRSVS extenſa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propoſ. 6. lib. 10 diuidaturq; TX, bifariam in Y, vt

a 16. vnde.

b 10. vnde.

c 17. vnde.

d 8. duode.

e 20. ſexti.

f 12. quarti dec.

Y, vt ſit TY, talium partium 32. qualium 27. eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe ſeſquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27. eſt ſeſquitertia.) Ac propterea qualium partium TY, eſt 32. Quare linea TY, cõtinet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK, vt rectãgulum cõtentum ſub recta RV, (q̃ põt vigintiſeptẽ ſexageſimaſquartas partes quadrati lateris DC) & ſub recta TY, (q̃ cõtinet octo nonas partes eiuſdẽ lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

CVM enim ductis rectis RX, RY, [a] triãgulum RTX, duplum ſit triãguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY: [b] Eſt autem & rectangulum ſub RV, TY, duplum eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo ſub RV, TY. [c] Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idẽ triangulum RST: [d] Eſt autẽ triangulum RTX, ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectãgulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD: At vero vt triangulũ QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nã cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planũ QOP, ex ſcholio prop. 14. lib. 11. ideoq; ſphæræ ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: [e] Octaedrum autẽ EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarũ baſis cõis quadratum EFGH, dimidiũ quadrati diametri ſphęrę; & altitudines ęquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, ęquales habent altitudines. Quare ex ſch. ꝓp. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidẽ EFGHI; Ac ꝓpterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratũ diametri

a 1. ſexti

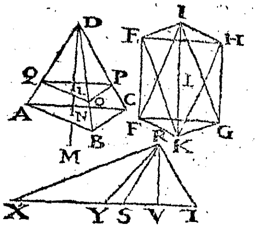
b 41. primi

c 7. quinti

d 1. ſexti

e 16. quarti decimi.

metri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrũ EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potente viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitũ ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

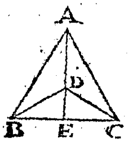
QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetrædri DC: ac proinde, [a] *cum recta RT, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV; erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32. qualium 27. ST, ſeu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri.) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare cõſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum ſub RV, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

[a] 12. quartidecimi

O.
17.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli ęquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ęx centro triãguli ad eandem baſin deducitur.



SIT triangulum æquilaterum *ABC*, cuius centrum *D*. Ducatur ex *A*, per D, recta *A*E, quæ perpendicularis erit ad *B*C, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico AE, triplam eſſe rectæ DE, quæ ſcilicet perpendicularis eſt e centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera *DA*, D*B*, trianguli ADB, æqualia ſint lateribus *D*B, DC, trianguli B*D*C; (e cẽtro enim ducuntur;) ſit autem & baſis *AB*, baſi BC, æqualis: Erunt triangula AB*D*, BDC, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum eſt trianguli B*DC*. Quoniam vero rectangulum ſub AE, EB, triangulo ABC; & rectangulum ſub DE, *E*B, triangulo B*D*C, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſis trianguli BC, dupla ſit baſis BE, vtriuſque rectanguli: Erit quoque rectangulum ſub AE, EB, triplum rectanguli ſub DE, EB: [a] Eſt autem vt rectangulum ſub AE, EB, ad rectangulum ſub DE, EB, eiuſdẽ altitudinis EB, ita baſis *A*E, ad baſin DE. Igitur & AE, tripla eſt ipſius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 1. ſexti

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE; qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundẽ partiũ 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

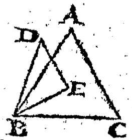
EX quibus rurſus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam eſſe.

o. 17.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum ſphæræ inſcribatur; erit ſemidiameter ſphęrę potentia tripla eius perpendicularis, quę ex centro ſphærę in baſin quamcunque octaedri ducitur.

S·IT baſis aliqua octaedri in ſphera, cuius centrum D, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro ſphęræ *D*, perpendicularis demittatur DE; ducaturque ſemidiameter ſphæræ D*B*. Dico ſemidiametrum DB, potentia triplam eſſe perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpēdicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum *ABC*, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; [a] quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphærę DB, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partiū 12. erit quadratum lateris *A*B, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ DB, 3. [b] Quia vero quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris A*B*. Quare [c] cum quadratū rectæ D*B*, æquale ſit quadratis rectarum BE, DE; ſit autem quadratum rectæ D*B*, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c.



[a] 14. tertij-dec.

[b] 12. tertij-dec.

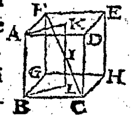
[c] 47. primi.

o. 18.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphęrę deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphęra collocati: Perpendicularis autem a centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, ęqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDE*F*GH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum I, ex quo *IK*, perpendicularis ducatur ad vnam baſin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularem *IK*, æqualem eſſe dimidio lateris cubi. Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi, id eſt, toti ſuperficiei cubi.



[a] 15. tertij-dec.

PRODVCTA autem *K*I, ad baſin oppoſitam *B*CHG, vſque in punctum *L*; cum *K*L, recta ſit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. Rurſus, [b] quia AB, KL, parallelæ ſunt, quod rectæ ſint ad planum AE; ducatur per ipſas planum faciens in planis oppoſitis parallelis AE, BH, communes ſectiones, lineas rectas *AK*, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter ſe; *A*c propterea parallelogrāmmum erit ABL*K*; atque adeo recta *K*L, æqualis lateri cubi AB. Quoniā vero perperpendicularis KL, e cētro ſphęræ *I*, cadit in baſes AE, BH, ad pūcta *K*, & L, erūt K, & L, cētra circulorū dictas baſes ambientiū in ſphæra, per coroll. lēmatis 1. prop. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariā ſecabitur a dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13, oſtendimus; Ac ꝓpterea

[b] 6. vndec.

[c] 16. vndec.

cum KL, oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, ſolidum, quod ſit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſſe cubo. [a] Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphæræ; [b] Perſpicuum autem eſt, ſolidum, quod ſit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe ſolido, quod ſit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiã partẽ quadrati diametri ſphæræ, eo quod dicta ſolida habeat et baſes, et altitudines æquales. Itaq; cũ dicta duo ſolida cõpleant totum cubum, manifeſtum eſt, id, quod ſit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum.

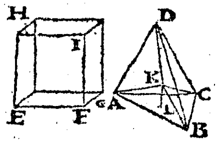
[a] 15. tertijdec.

[b] 31. vndec.

ALITER proponi poteſt hoc corollarium, vt dicamus, ſolidum, quod ſit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphæræ: Vt perſpicuum eſt.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem ſolidum, quod ſit ex perpendiculari e centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta in tertia partẽ ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit .n. corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, ſolidum autem EFGH, cõtentum ſub EI, tertia parte ſuperficiei corporis ABCD, & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad baſin ABC. Dico ſolidũ EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nã ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint; ipſi æqualiter a centro diſtabunt, per lemma 2. propoſ. 10. huius lib. Ac propterea perpẽdiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contẽtum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplũ eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.

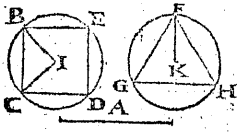


THEOR. 21. PROPOS. 21.

o.
11.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eũdem circulum circumſcribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc eſt, circulos BCDE, *FGH*, ipſa circumſcribentes, eſſe ęquales. Sint.n. rectæ e cētris IB, KF.[a] Quia igitur quadratum diametri A, triplũ eſt quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus *B*IC, rectus, cum ſubtendat quadrantem;[b] Ac proinde quadratum rectę BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectę BI.) qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri *A*, talium 2. erit quadratum lateris *BC*, & talium 1. quadratũ rectæ BI. *R*urſus[c] quia quadratum diametri *A*, duplũ eſt quadrati lateris octaedri FG;[d] & quadratum lateris *F*G, triplum quadrati rectę F*K*, ex cētro ductę; qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & taliũ 1. quadratum rectę F*K*. Cum igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectę BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; *A*c propterea & rectæ ipſę, & circuli ex ipſis deſcripti BCDE, *F*GH, æquales erunt. *I*dem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.



a 15. tertij-decimi.

b 47. primi.

c 14. tertij-dec.

d 12. tertij-dec.

COROLLARIVM.

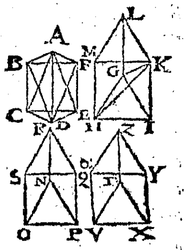
HINC fit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorũ, qui baſes oppoſitas tam cubi, quam octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex cẽtro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorũ ipſas circũſcribẽtiũ, ex coroll. lẽmatis 1. *prop.* 10. *huius lib.*[e] *qui cum ſint æquales oſtenſi, æquilater diſtabunt a centro ſphæræ, ex lemmate* 2. *eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt. (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ.* 14. *lib.* 11. *propterea quod parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in octaedro, ex coroll.* 4. *propoſ.* 14. *lib.* 13. *quemadmodũ & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod eſt propoſitum.*

e 21. quarti dec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit octaedrũ ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem ſphæra inſcriptum ſit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus B*F*, ad latus H*I*. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus cõmune eſt ipſa diameter AD, & vertex cõmunis A, nẽpe in BCDA, cuius baſis BCD; in BD*F*A, cuius baſis BDF; in C*D*EA, cuius baſis C*D*E; & in DEFA, cuius baſis *DEF*; quæ quidem omnes baſes infra quadratum BC*E*F, exiſtunt cõtinentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniã vero quælibet harum pyramidũ conſtat duobus triangulis ęquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorũ cõe eſt *A*D, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtũt,[a] inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum cõtineãtur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Cõſtituatur

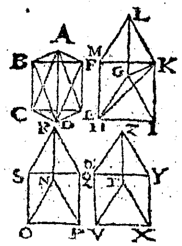


a 8. primi.

tur

tur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedi triplum eric, per coroll. 1 propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. [a] Qm̃ igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia

[a] 14. quartidecimi



eſt ipſius N O P, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex iis, quę ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. prop. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrũ.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia vero priſma TVXYZα, ad priſma G H I K L M, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadem quę octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrũ ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri G H I K, vt altitudo octaedri ad altitudinẽ tetraedri: Eſt autẽ altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarũ coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpẽdiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atq; vt latus cubi ad altitudinẽ tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nã tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quã quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito. n. quadrato diametri ſphærę 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex prop. 15. lib. 13. & quadratũ altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. pp. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratũ altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphærę 6. [b] erit quadratum lateris octaedri 3.

[b] 18. tertijdec.

& quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandũ erat.

COROLLARIVM.

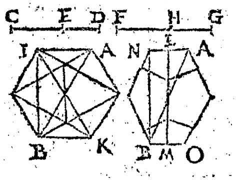
EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. [a] Nam & quadratum diametri ad quadratũ lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.

[a] 18. tertijdec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam F G, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptum Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita AI, B *K*, connectantur recta I B, quæ ſubtendet unum angulum pentagoni ex *I*coſaedri lateribus cōpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia vero AI, B*K*, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. [a] erunt anguli *A*I*B*, IB*K*, æquales duobus rectis; Ac proinde, cū ſint inter ſe æquales, (Ducta enim alia diametro I *K*; cum latera AI, IB, trianguli *A*IB, æqualia ſint lateribus *K* B, BI; & baſes quoque *A*B, I*K*, æquales; [b] Erunt anguli AIB, I B *K*, æquales) recti erunt; [c] ideoque quadratum rectæ propoſitæ A *B*, æquale erit quadratis rectarum A*I*, IB: Erat autem idem quadratum rectę AB, æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, ſit maius ſegmentum ipſius C D, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius IB, ſimiliter diuiſæ; (Nam IB, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt I*A*, latus Icoſadri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, [d] maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi *I* A, lateri Icoſaedri. [e] Cum enim ſit vt C D, ad *C* E, ita *I*B, ad IA; [f] erit quoque vt quadratum rectæ *C*D, ad quadratum rectę *C*E, ita quadratum rectæ *I*B, ad quadratum rectæ *I*A; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum I*B*, I*A*, ad quadratum rectæ I *A*: Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum *C D*, C*E*, æqualia quadrata rectarum *I* B, IA; [g] Igitur & quadrato rectæ *C*E, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, *IA*, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.



[a] 29. primi.
[b] 8. primi.
[c] 47. primi
[d] 8. tertijdec.
[e] 2. quartidec.
[f] 22. ſexti.
[g] 14. quinti

RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita AN, B O, ſecētur bifariā in *L*, & M, punctis, quæ recta *L*M, & ipſa latera recta N*B*, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales, parallelę ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. [a] erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Eſt autem recta *L*M, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, [b] Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ *A* B, æquale erit quadratis rectarum N B, N A. Quare cum idem quadratum rectæ A*B*, æquale ſit poſitum quadratis rectarum *F* G, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. *A*c propterea, cum HG, ſit minus ſegmentum ipſius *F*G, ſectæ extrema ac media ratione: Item N*A*, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt, ipſius L*M*, ſimiliter diuiſę, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. ęquale erit HG, minus ſegmentū ipſi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus CE, maius ſegmētum æquale eſſe ipſi IA, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris, &c. Quod erat oſtendendum.

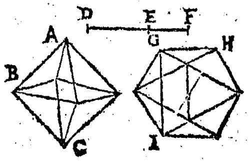
[a] 33. primi
[b] 47. primi

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphęra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

POSSIT latus *A*B, octaedri A*B*C, & maius ſegmentum DE, & minus EF, rectę *DF*, ſectę extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem ſphęrę inſcriptum *I*coſaedrum GHI, cuius latus GH, & ſubtendens angulū pētagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter HI. Dico quadra-

quadratum lateris G *H*, duplum eſſe quadrati minoris ſegmenti EF. Cum enim GH, ſit latus pentagoni, cuius vnum angulum ſubtendit recta GI; [a] erit GH, maius ſegmentum ipſius G I, diuiſæ extrema ac media ratione; [b] Ac proinde compoſita recta ex GI, GH, ſecabitur ſimiliter in G, puncto extrema ac media ratione, [c] Quia vero quadratū diametri HI, ęquale eſt quadratis rectarū GI, GH, quod angulus IGH rectus ſit, vt in pręcedenti propoſ. oſtenſum eſt; & quadratum lateris A *B*, ęquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris *A*B, ita quadrata rectarum GI, G*H*, ad quadrata rectarū DE, EF: [d] Eſt autem quadratum diametri H I, duplum quadrati lateris octaedri A B. Igitur & quadrata rectarum *G* I, *G* H, dupla ſunt quadratorum rectarū *D*E, EF. *A*tqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita eſt quadratū rectę GH, ad quadratum rectę EF. ([e] Nā cū ſit vt *G*I ad GH, ita DE, ad EF. [f] Erit quoq; vt quadratū rectæ GI, ad quadratum rectæ *G*H, ita quadratū rectæ DE, ad quadratū rectę EF; & cōponendo, vt quadrata rectarum GI, G*H* ad quadratū rectæ *G*H, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF. Et permutádo, vt quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum DE, E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ *E*F.) Quadratum igitur rectæ *G* H, duplum quoque eſt quadrati rectæ EF. Quare ſi latus Octaedri potuerit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod erat oſtendendum.



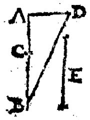
[a] 8. tertijde.
[b] 5. tertij-decimi.
[c] 47. primi
[d] 14. tertii-decimi.
[e] 2. quarti-decimi.
[f] 22 ſexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuiſa extrema ac media ratione cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur:

datur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

LINEA recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione conſtituat cum recta A D, quæ æqualis ſit minori ſegmento AC, angulum rectum A, cui recta ſubtendatur BD, ſitq; recta E, potentia ſubdupla ipſius B D. Dico E, latus eſſe octaedri illius ſphæræ, in qua A D, vel A C, latus eſt Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. maius ſegmentum BC, latus ſit cubi illius ſphæræ, cuius minus ſegmētum *A*C, vel A*D*, latus eſt Dodecaedri; erit diameter illius ſphęrę potentia tripla maioris ſegmenti B C, nempe lateris cubi: [a] Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris ſegmenti, tripla eiuſdem quadrati maioris ſegmenti BC. Quadratum igitur diametri ſphęrę, æquale erit quadratis rectarū AB, AD, hoc eſt, quadrato rectę BD; Ac proinde recta BD, diameter eſt ſphæræ. [b] Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; Poſsit autem recta B D, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia ſubdupla ipſius BD; Erit *E*, latus Octaedri eiuſdem ſphæræ, cuius *A*D. latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuiſa, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 4. tertiide.
[b] 14. tertij-dec.

COROLLARIVM.

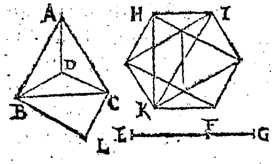
[c] *QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia ſeſquialterum eſt lateris cubi B C, cuius maius ſegmentum eſt AD, latus Dodecaedri, vt conſtat ex ijs, quæ oſtendimus ad propoſ. 4. lib. 13. cum B C, ſit ma-*

[c] 18. tertij-dec.

ius ſegmentum, & AD, minus rectæ A B, extrema ac media ratione diuiſæ: Perſpicuum eſt, ſi linea quæuis recta (nimirum B C,) ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum (nimirum A D,) eſſe latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineę rectæ extrema ac media ratione ſectę: latus Icoſaedri eidem ſphęræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.



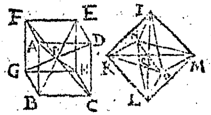
POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius ſegmentum EF, & minus FG, rectę E G, diuiſæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icoſaedri HIK, eiuſdem ſphęrę. Dico HI, rectã potẽtia eſſe ſeſquialteram minoris ſegmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, connectaturque recta IK, diameter. [a] Quia igitur HI, eſt maius ſegmentum rectæ HK, diuiſę extrema ac media ratione; [b] Erit quoque compoſita KHI, diuiſa eodem modo in *H*, maiuſque ſegmentum *HK*, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulũ BCL, ita vt BL, recta ipſi EF, & CL, ipſi FG, ſit æqualis, [d] Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt, rectas EF, FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus, vt propoſ. 23. huius lib. oſtendimus; Eſtque [a] vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [b] *Igitur* triangula BLC, KHI, æquiangula ſunt, [c] *Ac* propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CK: [d] *Atqui* IK diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & H I, latus Icoſaedri erit potentia ſeſquialterum ipſius CL, hoc eſt, minoris ſegmenti FG. Si latus itaque Tetraedri poſſit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] *8. tertijdec.*
[b] *5. tertijdec.*
[c] *22. primi*
[d] *48. primi*

[a] *2. quartidec.*
[b] *6 ſexti.*
[c] *4. ſexti.*
[d] *13. tertijdec.*

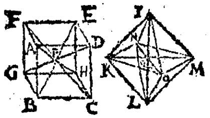
THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphęra deſcriptum, eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.



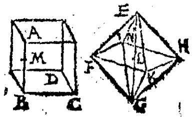
SINT in eadem ſphæræ cubus A B C D E F G H, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. *D*ico eã eſſe proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad ſuperficiem Octaedri; nec nõ, quam habet cubi latus ad ſemidiametrum ſphæræ. *D*uctis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, reſoluetur cubus in ſex pyramides ęquales, quod habeant & baſes æquales, & altitudines, (Cum enim circuli deſcripti circa pyramides, ſeu cubi baſes æquales, ſint æquales, ac propterea æqualiter a centro ſphæræ diſtent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob cauſam. [e] Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triãgulum; æqualiter diſtabũt baſes pyramidũ cubi, & Octae-

[e] *21. quartidecimi*



& Octaedri a centro ſphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. demonſtrauimus, vt ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoque rurſus, ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

SINT rurſus in eadẽ ſphæra cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex *AB*, latere cubi tertia pars A*M*; Item ex ſemidiametro E*L*, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, in quas Octaedrũ ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. [a] ſeſquialterum eſt quadrati BD, lateris cubi BC: Eſt autem & recta AB, rectæ BM, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur baſes IF*K*H, BD, & altitudines A*B*, BM: [b] Ac propterea parallelepipedum ſuper baſim IFK*H*, & ſub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo ſuper baſim *BD*, & ſub altitudine A*B*, nimirum cubo *A*BCD. Rurſus quia recta *E*L, rectæ EN, tripla eſt; erit & parallelepipedum ſuper baſim IF*KH*, & ſub altitudine E*L*, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine EN, vt in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim I*F* *K* H, & ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IF*K*HE, ex corollario 1. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis IF*K*H*E*, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſim IF*K*H, & ſub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis EN. [a] Item Octaedrum *E*FGHIK, duplũ eſt pyramidis IFKHE. Aequale igitur erit parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine LN, Octaedro EFGH*IK*. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim *I*F*K*H, & ſub altitudine *B*M, eſt ad parallelepipedũ ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt AM, ad MB, ita *E*N, ad N*L*: & componendo, vt *AB*, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad E*L*, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum ſuper baſim IF*K*H, & ſub altitudine BM, æquale eſt oſtenſum cubo A*B*CD; Et parallelepipedũ ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, æquale eſt Octaedro EFGHI*K*. Igitur erit quoque vt cubus *A*BCD, ad Octaedrum EFG*H*IK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandũ proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 18. tertijdecimi.

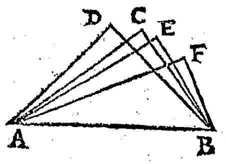
[b] 34. vnde.

[a] 16. quartidecimi

SCHOLIVM.

QVIA demonſtratum eſt [b], diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialterã potentia lateris Tetraedri, ita vt, ſi quadratũ diametri ponatur 3. partium, earũdem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuũ eſt, ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratũ duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtẽdimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodẽ ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratũ lateris Tetraedri.

[b] 13. tertijdec.



Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ B C; Erit recta AC, latus Tetraedri.

a 14. tertijdec.

RVRSVS [a] cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium ſit quadrati diametri AB; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis, ſecundum doctrinam ſcholij propoſ 33. lib. 6. rectam AD, latus eſſe Octaedri.

b 15. tertijdecimi.

DEINDE, [b] quoniam docuimus, diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars ſit quadrati diametri AB; Vel ſi quadrato diametri AB, cõſtruantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter AB, poſsit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC: Quemadmodum e contrario, ſi ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

c 23. quarti tidec.

PRAETEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum [c]; Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat, ſi quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmentum; Rectam minorem B E, eſſe Icoſaedri latus.

a 23. quartidec.

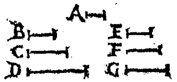
POSTREMO, quoniam ſi recta quæpiam potuerit totã aliquam rectam diuiſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum; [a] Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri eius ſphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri A B, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunq; recta linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum: Minorem lineam B F, latus eſſe Dodecaedri.

HACTENVS ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæræ impoſitorum ſcripſerunt: Sequentes autem quinque propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui ſequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adijciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in ſphæra deſcriptionem, eorundemque comparationem ſpectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineę rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt ſit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.

SINT quatuor rectę A, B, C, D, continue proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertię ad tertiam, eſſe duplicatam proportionis B, ad E, ſecūdę ad ſecundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartã, eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; a habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam *A*, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A: Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur eſt quadratum rectę B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam *A*; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta *A*, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E, vt recta C, ad rectam F: b Eſt autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt primum.



quadr. B.	*Recta C.*
quadr. A.	*Recta* A.
quadr. E.	*Recta F.*

a 20. ſexti.

b 20. ſexti

RVRSVS cum recta D, ad rectam *A*, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; c habeat autem & cubus rectæ *B*, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectã A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectã A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta *A*, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum *E*. Quia ergo eſt cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ *A*, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectę E, vt recta D, ad rectam G: d Eſt autem proportio

Cubus B.	*Recta D.*
Cubus A.	*Recta A.*
Cubus E.	*Recta G,*

c 33. vnde.

d 33. vnde.

---

cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata eſt proportionis rectę B, ad rectam E. Quod eſt ſecundum. Itaque ſi ſint quatuor lineę rectæ, &c. Quod demonſtrandum erat.

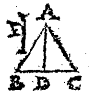
SCHOLIVM.

HOC idẽ demonſtrauimus ad propoſ. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitũ *B*C, recta perpendicularis AD, quæ bifariam ſecabit latus *B*C, vt in coroll. propoſ. 12. huius lib. demonſtratum eſt; *A*c propterea *B* D, dimidium eſt lateris *AB*. a Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter *A* D, & B D. Dico quadratum lateris AB, ad triãgulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris A*B*, ad rectam E. Cum enim rectangulo ſub AD, BD, æquale ſit triangulum *AB*C, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. b Sit autem eidem rectangulo ſub A D, B D, æquale quadratum rectæ *E*; *A*equalia erunt triangulum ABC, & quadratum rectæ E. c Quoniam uero quadratum lateris



a 13. ſexti

b 17. ſexti

c 20. ſexti

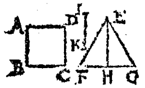
ris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E; Conſtat, quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter AD, DB, æquale eſſe triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpẽdicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.



SIT quadratum cubi cuiuſuis ABCD, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppoſitum FG, deducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem EH. Poſita enim inter EH, FH, media proportionali IK; [a] cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum ſit quadrati lateris cubi AB, [a] ſit autem & duplum rectanguli ſub latere EF, & dimidio eius FH, eo quod dictũ quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum ſub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; [b] Ac propterea AB, media proportionalis erit inter EF, FH, hoc eſt, tres rectæ FH, AB, EF, cõtinue erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales, ex conſtructione. Igitur cum omnium antecedens ſit FH, [c] erit proportio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiã, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cum & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectę IK, hoc eſt, ad triangulum EFG, (eſt enim ex coroll. propoſ. 29. huius lib. quadratum rectę IK, ęquale triangulo EFG,) [d] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulũ Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphęra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

FH.	
AB.	IK.
EF.	EH.

[a] 18. tertij dec.

[a] 1. ſexti.

[b] 17. ſexti.

[c] 28. quarti dec.

[d] 20. ſexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis vero, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulũ ABC, & altitudo, ſeu axis Tetraedri DE, latuſq; cubi eiuſdẽ ſphęrę F. Dico latus Tetraedri AB, eſſe potẽtia ſeſquialterũ axis DE: Axem vero DE, potentia ſeſquitertiũ lateris cubi F. Nã circa

triangulum [a] deſcripto circulo A B C; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis *D*E, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur A *D*, ſemidiameter, & *A*E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratũ lateris A E, hoc eſt, lateris A B, [b] æquale eſt quadratis rectarum A D, D E, [c] & triplum quadrati ſemidiametri A D; Fit, vt poſito quadrato lateris A B, ſeu A E, partium 6. quadratum rectę A D, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D *E*, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

QVONIAM vero latus Tetraedri A *B*, [d] potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris A B; Oſtenſum eſt autém earundem 4. eſſe quadratum axis DE. Igitur quadratum axis D E, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] *5. quarti.*

[b] *47. primi*

[c] *12. tertij-dec.*

[d] *13. tertii-decimi.*

COROLLARIVM I.

QVIA vero, poſito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri ſphæræ talium partium eſt 9. [e] *quod diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Earundem uero partium 4. oſtenſum eſt quadratum axis DE; perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde,* [f] *cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri. Seſquialteræ enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13.*

[e] *13. tertij-decimi.*

[f] *20. ſexti*

COROL-

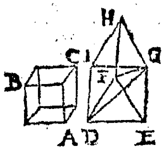
COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita eſſe axem, ſeu altitudinẽ Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. Quia videlicet [a] *tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad latus oppoſitum deductæ, quam ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi.*

[a] *12. quartidec.*

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidẽ ſphæræ inſcripti.



DESCRIBANTVR in eadem ſphæra cubus *A*BC, & Tetraedrum *D* E F G. Dico cubum Tetraedri eſſe triplum. Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [b] Quoniam igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis baſis *D*EF, ad latus oppoſitum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularẽ dictam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, ſeu priſmatis ABC; Erit baſis priſmatis ABC, ad baſim priſmatis DEFGH*I*, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 9. lib. 12. demonſtrauimus, æqualia erunt priſmata *A*B*C*, DEFGHI, cum ipſorum baſes & altitudines reciprocentur. Atqui priſma

[b] *30. quartidec.*

ma DEFGHI, triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiuſdem tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM

VNDE priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Oſtenſum enim eſt, cubum ABC, æqualem eſſe priſmati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

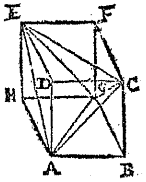
ET SOLIDORVM QVINTVM vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus

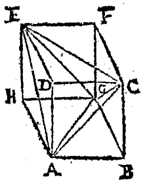
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat deſcribere pyramidē, ſeu tetraedrū. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarū extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus baſibus. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium ęquales ſunt, quod potētia duplæ ſint late-



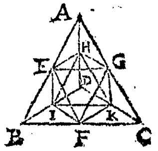


laterum æqualium quadratorum, vt in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; perſpicuum eſt, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pyramidem, ſeu tetraedrum conſtitui ex ipſis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur: manifeſtũ eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptũ, ex defin. 31. lib 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

2.

IN data pyramide octaedrum deſcribere.



SIT in pyramide, ſeu tetraedo ABCD, deſcribendum octaedrum. Diuiſis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, cõſtituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, ſupra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI; infra idem planum cõſiſtunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia ſunt lateribus AG, AH, triãguli AGH, quod ſint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod ſint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: [a] æquales erunt baſes EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11.

[a] 4. primi.

intra

intra tetraedrum deſcriptum eſt; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex conſtructione. In data igitur pyramide octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

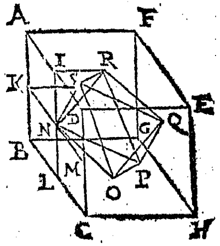
QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt æqualia, ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecãtia, vt in coroll. 1. prop. 14. lib. 13. demonſtrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, ſecat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipſam diuidit in pyramidem HIKD, & priſma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI, & priſma EFCGKI; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe æqualem, & priſma priſmati: [a] Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifeſtum eſt, ſi in tetraedro octaedrum inſcribatur, tetraedrum bifariam ſecari, tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant.

[a] 3. duode.

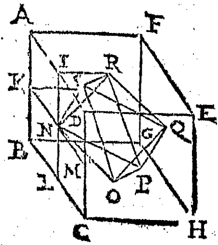
PROBL. 3. PROPOS. 3.

3.

IN dato cubo octaedrum deſcribere.



DESCRIBENDVM ſit octaedrum in cubo dato AH. Diuidãtur latera baſis ABCD, bifariã in punctis I, K, L, M, quę connectantur rectis IL, KM, ſecantibus ſeſe in N, pũcto, quod quidem centrum eſt quadrati ABCD, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum baſium centra O, P, Q, P,Q,R,S. Erunt igitur omnes rectæ, ex dictis centris ductæ ad media puncta baſiũ, cuiuſmodi ſunt NI, RI, NK, S*K*, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, ſeu quadratorum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremo ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, P*R*, RN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triãgula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planũ NOQR; quatuor autẽ OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum conſiſtunt.



Quoniam vero latera IN, IR, trianguli IN*R*, æqualia ſunt lateribus KN, *K*S, trianguli K N S, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; *I*tem & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR, parallelæ ſint rectis B*A*, A*F*; [a] angulus NI*R*, æqualis ſit recto angulo *K*AF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidiũ lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & ęquilatera ſunt, & ęqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] *10. vnd.*

[b] *4. primi.*

ALITER. [a] In cubo dato inſcribatur pyramis; [b] In hac deinde pyramide Octaedrũ figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

[a] *1. quintidecimi.*

[b] *2. quintidecimi*

COROLLARIVM.

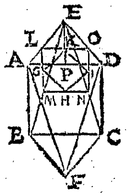
QVIA vero diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO, ſi ducerentur, ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra baſium cubi oppoſitarũ: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſium cubi oppoſitarum connectentes non ſolum ſeſe mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. ſed etiam ad angulos rectos, vt hic oſtendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

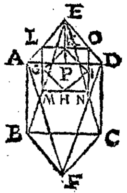
4.

IN dato octaedro cubum inſcribere.

DATVM octaedrum ſit *A*BCDEF, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in octaedro ſex pyramides quadrangulę continentur, quarum videlicet vertices ſunt ſex anguli octaedri, & quęlibet duę octaedrum conſtituunt; ſit vna earum pyramis ABCDE, cuius baſis *A*BC*D*, quadratum, triãgula vero ęquilatera ABE, EBC, C*E*D, DEA, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, *K*, per quę ducantur



rectę



rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum ſimilia ſint triangulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod latera habeant communia. Eſt enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, cõmune triangulis EMN, NEO; & denique EO, cõmune triãgulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triãgulũ LME, triãgulo EMN; hoc vero ipſi NEO; & hoc ipſi OEL, æquale eſſe. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox oſtẽdemus. Quocirca & quatuor rectę LM, MN, NO, OL; inter ſe æquales ſũt.
[a] 18. quartidec. [a] Quia vero ducta recta EKP, tripla eſt rectæ KP; [b] Eſt autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA,
[b] 2. ſexti. tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione ſecantur, quadrilaterumque conſtituent LMNO. Rurſus quia LO, LM, parallelæ ſunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipſis exiſtentibus
[c] 10. vnde. plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus eſt, cum ABCD, quadratum ſit, vt oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. & in propoſ. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non ſecus demonſtrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos eſſe. Quoniam vero tam planum per LO,
[d] 15. vnde. LM, quam per NM, NO, ductum, [d] parallelum eſt plano ABCD; ipſa quoque inter ſe parallela erunt, atq; adeo, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera ęqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia ſint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipſis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam ſecet angulum AED, per coroll. propoſ.

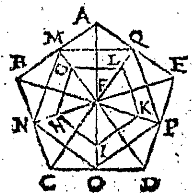
12, lib. 13. [a] Erunt & baſes KL, KO, æquales, hoc eſt, recta LO, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione LM, [a] 4. primi
MN, NO, bifariam ſecabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum ſint laterũ quadrati LN, dimidia, æquales inter ſe erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [b] æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra [b] 4. primi
G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; ([c] cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus ſint [c] 13. primi.
rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propoſ. 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus GKI; Eademq; ratione recti erũt anguli KGH, GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in rellquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

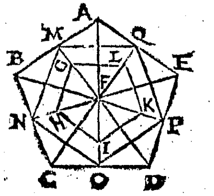
PROBL. 5. PROPOS. 5.

5.
6.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pẽtagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices vero, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius baſis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF,





CDF, DEF, EAF, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. biſariã ſecabũt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales ſint, quę cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni,[a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M. N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. Cum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia ſint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt baſes FM, FN, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam vero & rectę FG, FH, FI, FK, FL, nimirum ſemidiametri circulorum ęqualium triangula æquilatera æqualia circũſcribentiũ, ęquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; [d] Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. [e] Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quã anguli BNM, MNO, ONC, æquales ſunt duobus rectis. [f] Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplę ſunt ipſarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. [g] parallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ, QM; [a] Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt. [b] Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntque in recta HI; ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum eſt æquilaterum & ęquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

Page 834 margin:
[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 13. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. ſexti.

Page 835 margin:
[a] 10. vnde.
[b] 15. vnde.

COROLLARIVM.

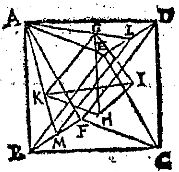
ITAQVE cum omes rectæ e centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atque adeo eorundem diſtantiæ exiſtant a centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemm. 2. eiuſdem propoſ. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

0.
5.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in octaedro ABCDEF. In pyramide octaedri ſuperiori ABCDE, ſumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerſo ſibi reſpondentium AED, BEC; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerſo quoque ſibi correſpondentium CFD, AFB: quæ quidem centra coniũgantur ſex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, vt fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, ſecantes latera oppoſita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, [a] quæ ipſi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales ſint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ DE, BF, oppoſitorũ in quadrato EF. Quoniam vero rectæ AL, AM, ſectæ ſunt proportionaliter in G, & K, pũctis, quod AG, AK, dupla ſint ipſarum GL, KM, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. [b] Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triãgula ALM, AGK, ſimilia. [c] Quare erit vt AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, vt AL, ad AG, ita LM, ad GK: [d] Eſt autẽ AL, ipſius AG, ſeſquialtera; quod GL, ſit tertia pars ipſius AL, ideoque AG, eiuſdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc eſt, ipſi æqualis DF, ſeſquialtera erit ipſius GK. Hac eadem arte oſtẽdemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentiũ ſeſquialtera eſſe latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes inter ſe eſſe æquales, hoc eſt, triangula æquilatera æqualia ex ipſis confici, ideoque Tetraedrum cõſtitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor baſium octaedri, deſcriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.



[a] 33. primi

[b] 2. ſexti.

[c] 4. ſexti.

[d] 18. quartidecimi.

ALITER. [a] In octaedro dato inſcribatur cubus, [b] & in cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli conſiſtant in centris baſium octaedri; & in angulis cubi collocẽtur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

[a] 4. quintidecimi.

[b] 1. quintidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero oſtenſum eſt, vtramque GK, DF, parallelam eſſe ipſi LM; [c] ac propterea & GK, ipſi DF, atque adeo ipſi BE, parallelam eſſe; Atque eadem ratione KH, ipſis FC, EA, parallelam eſſe; [d] Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum eſſe plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula; Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingula videlicet binis oppoſitis.

[c] 9. vndec.

[d] 15. vnde.

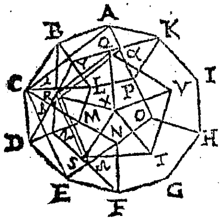
COROLLARIVM II.

PRAETEREA, cum octaedrum circumſcribat & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptũ, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur; Atque adeo recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt *conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.*

o. 7.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ AP, CM, per cẽtra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum BL, & ad angulos rectos, ideoq; in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdem propoſitionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant, ([a]conſtat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus ſubtendere æquales.)[b] Igitur Aα, Cβ, parallelæ ſunt rectæ BY;[c] atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt autem & ęquales, nempe dimidia rectarum AP, CM; [d] quę ęquales ſunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia ſint, angulosque contineant æquales.[a] Rectæ ergo ipſas connectentes AC, $\alpha\beta$, ęquales erunt, & parallelę. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectę CL, EN, per centra R, S, rectę ducãtur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, ęquales eſſe ipſas CE, $\gamma\delta$: [b] Sunt autem AC, CE, inter ſe ęquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni ęquianguli continent, vt conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem autem anguli non vergunt verſus X, vt figura monſtrare videtur, ſed extrorſum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter cum & rectę Xα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales ſint, (Nã YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualiũ, qui nimirum pentagona æqualia circumſcribunt, [c] atque adeo æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, diſtantię ſunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulorum æqualium, [d] ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, ęquales erunt,)[e] Erunt quoque anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales ſint; [f] æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorũ copulantes. Quare triãgula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri LMNOP, conſtituta, æquilatera erũt, & æqualia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtruantur: (Habet enim dodecaedrũ viginti angulos ſolidos.) quæ quidem latera habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 28. tertij.
[b] 28. primi
[c] 9. vndec.
[d] 4. primi.

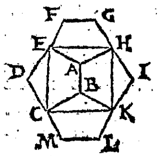
[a] 33. primi.
[b] 4. primi
[c] 14. tertij.
[d] 14. tertij.
[e] 8. primi.
[f] 4. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

o.
8.

IN dato Dodecaedro cubum deſcribere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inſcribendus ſit cubus, ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABKIH, ſecundum latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. In his vero pentagonis ſubtendantur angulis A, B, D, I, rectę EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC. [a] Quoniam igitur rectæ A E, BC, ęquales, auferũt ex circulo pentagonum ABCDE, circumſcribente arcus æquales; Erunt ex ſcholio prop. 27. lib. 3. rectę AB, CE, parallelæ. Eademque ratione parallelę erunt AB, HK. [b] Quare & EC, HK, inter ſe parallelæ erunt; [c] Ac propterea rectæ EH, GK, quæ ipſas connectunt, parallelæ erunt, [d] in eodemque cum ipſis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC; quod dico eſſe æquilaterum. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia ſint, anguloſque contineãt æquales, ex hypotheſi; [e] æquales erũt baſes EH, HK, KC, CE. Quia vero planũ ECKH, productum communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. propoſ. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, deſcriptum; [f] Erunt tam anguli oppoſiti E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; [g] Ac propterea cum oppoſiti E, & K, ſint æquales, necnon & oppoſiti C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans ſuos angulos in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pẽtagonis ſimiliter octo angulis octo alię rectæ ſubtendantur eodem ordine; cõſtitutum erit ſolidum ſex quadratis contentum; quæ cum ſint æqualia, [a] eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehenſos ſubtendentia æqualia ſunt; cubum conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiuſque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



[a] 28. tertij.
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 7. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 22. tertij.
[g] 34 primi.

[a] 4. primi.

COROLLARIVM.

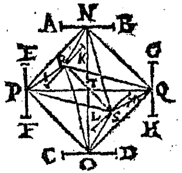
HINC fit, rectam, quæ ſubtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, CE, ipſi AB, eſſe parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

o.
9.

IN dato Dodecaedro octaedrum deſcribere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 3. propoſ. 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes æquales erunt, ſeque mutuo in T, centro ſphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. [b] Quo circa duodecim rectæ ſubtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales ſunt NP, PO, OQ, QN.



[b] 4. primi.

[a] 4. primi

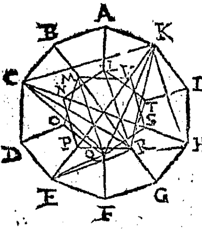
QN,NR,RP,PS,SQ,QR;RO,OS,SN, [a] æquales erũt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineãtur; Ac proinde octo triãgula NRP,PRO,ORQ, QRN,OSP,PSN, NSQ,QSO, æquilatera, & æqualia erunt, conſtituentq; octaedrum intra Dodecaedrum deſceiptum, cum ſex anguli octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrũ deſcripſimus. Quod faciendum erat.

O.
10.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem deſcribere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo deſcribenda ſit pyramis, ſiue tetraedrum. Sumantur tria pẽtagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum ſolidum L, componentia, in quibus tres anguli C,R,K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, cõmuni pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri L N, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex pũctis C, K, R, ad angulum Q, ipſi L, oppoſitum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt ſit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, ſeu ſphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; [b] quoniam Dodecaedrũ in ſphera deſcribitur; ſi planũ trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius ſectio cum ſphæra circulus per lemma 1. propoſ. 10. lib. 14. [c] Ac propterea angulus CAH, in ſemicirculo exiſtens, rectus erit. Non ſecus oſtendemus rectos eſſe angulos C R H, K R E, K Q E, RQM, CQH. [a] Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti ęquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autẽ quadrata diametrorum æqualium C H, K E, R M, æqualia: Aequalia erunt quadrata rectarũ CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, R H, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cum ſubtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehenſos, [b] æquales ſunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrum.



b 17. tertij-decimi

c 31. tertij

a 47. primi

b 4. primi

ALITER. [c] In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur; [d] & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideant; perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

c 8. quintidec.

d 1. quintidecimi

O.
11.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

[e] DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrũ; [f] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cũ. n. anguli cubi reſideãt in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in cẽtris baſiũ Icoſaedri collocẽtur; tangẽt anguli cubi eadẽ cẽtra baſiũ Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quam ob rẽ in dato Icoſaedro cubũ deſcripſimus. Qđ faciẽd. erat.

e 5. quintidec.

f 8. quintidecimi

PROBL.

O.
12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

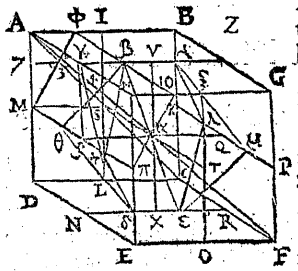
IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

IN dato Icoſaedro [a] cubus deſcribatur,[b] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [c] Cum enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; [d] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri; Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

a 11. quintidecimi
b 1. quintidec.
c 11. quintidec.
d 1. quintidec.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.



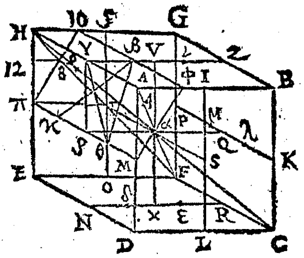
SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrum. Secentur ſingula latera biſariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ; ξO, Mπ, KP, NR, nuſquã inter ſe coeũtibus, ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, ſed vna duntaxat, quæ rurſus biſariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ ſe mutuo in centro α, biſariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius lib. docuimus, ſuntq; lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum Y Z, $M\pi$, ſecentur extrema ac media ratione in $\beta, \gamma, \theta, \kappa$, vt ſint maiora ſegmenta, $Y\beta$, $Z\gamma$, $M\theta$, $\pi\kappa$, ductis rectis $Y\rho$, $Y\kappa$, $\beta\theta$, $\beta\kappa$. Quoniam ergo $Y\rho$, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & $\rho\kappa$, βV, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, $\rho\pi$, æqualia quoque: [a] Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ $Y\beta$; Erunt & quadrata rectarum $Y\rho$, $\rho\kappa$, tripla eiuſdem quadrati rectæ $Y\beta$. Quare, [b] cum quadratis rectarum $Y\rho$, $\rho\kappa$, æquale ſit quadratũ rectæ $Y\kappa$, [c] quod angulus $Y\rho\kappa$, rectus ſit; Erit & quadratum rectæ $Y\kappa$, triplum quadrati rectæ $Y\beta$. Rurſus, quia VY, perpendicularis ad AY, $Y\rho$, [d] recta eſt ad planum AE, per rectas AY, $Y\rho$, ductum, rectus erit angulus $\beta Y\kappa$, ex defin. 3. lib. 11. [e] Ac propterea quadratũ rectæ $\beta\kappa$, æquale quadratis rectarum $Y\kappa$, $Y\beta$, exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ $Y\beta$. (quia nimirum quadrata rectarum $Y\kappa$, $Y\beta$, quadrupla etiam ſunt quadrati rectæ $Y\beta$, cum quadratum rectæ $Y\kappa$, triplum ſit oſtẽſum quadrati rectæ $Y\beta$.) Ideoque [f] cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit reca $\beta\kappa$, rectę $Y\beta$. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplę proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Eſt autem & $\theta\kappa$, dupla ipſius $\rho\kappa$, quod minora ſegmenta $\theta\rho$, $\kappa\rho$, rectarum æqualium $M\rho$, $\pi\rho$, æqualia ſint. [g] Erit igitur vt $Y\beta$, ad $\rho\kappa$, ita $\beta\kappa$, dupla ipſius $Y\beta$, ad $\theta\kappa$, duplam ipſius $\rho\kappa$: Eſt autem $Y\beta$, maius ſegmentum ad $\rho\kappa$, rectam minori ſegmento βV, æqualem, vt tota ad maius ſegmentum. Ergo & $\beta\kappa$, ad $\theta\kappa$, erit vt tota ad maius ſegmentum; Ac proinde $\theta\kappa$, erit maius ſegmentum rectę $\beta\kappa$, ſectę extrema ac media ratione. Eadem ratione oſtendemus $\theta\kappa$, maius eſſe ſegmentum rectę $\beta\theta$, extrema ac media ratione ſectę, ſi nimirum ducatur recta $Y\theta$. Quare ęquales erũt $\beta\theta$, $\beta\kappa$, conſtituentes triangulum Iſoſceles $\beta\theta\kappa$, ſimile illi, quod ab Euclide conſtructum eſt propoſ. 10. lib. 4. vt poſtea demonſtrabimus; Ac proinde $\theta\kappa$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\kappa$, circumſcribente deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 11. propoſ. lib. 4.

a 4. tertiidecimi.
b 47. primi
c 29. primi.
d 4. vndec.
e 47. primi
f 20. ſexti
g 15. quinti

INTELLIGATVR iam planum trianguli $\beta\theta\kappa$, extendi, (ducta per β, recta $\beta\phi$, ipſi $M\pi$, parallela;) per parallelas $M\pi$, ϕ10. vt ſit planum extenſum $\phi\pi$, occurrens

rens diametro AC, quadrati A B C D, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipſi Aφ, parallela, connectaturque MS, [a] quæ parallela eſt vtrique Aφ, 73. Quoniam igitur, per coroll. prop. 4. lib. 6. triangulum A 73. ſimile eſt triangulo AMS; [b] ac proinde vt A M, ad M S, ita eſt A 7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erũt quoque A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt M A, ad Aφ, ita M 7. ad 73. Eſt autem A φ, maius ſegmentum rectæ MA, diuiſæ extrema ac media ratione. ([c] quod æquales ſint Aφ, Yβ, necnõ & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc eſt, 7 A, maius ſegmentũ erit rectę M 7. extrema ac media ratione ſectæ; [d] Ac propterea tota M A, diuiſa erit extrema ac media ratione in 7. maiuſque ſegmentum erit M 7. [e] Atqui vt M 7. ad 7 A, ita eſt S 3. ad 3. A. Secta eſt ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiuſque ſegmentũ eſt S 3. [f] Quia vero SαT, parallela eſt ipſi Mϖ; quod & recta ducta ϖT, æqualis & parallela ſit ipſi MS; ſi per S α T, planũ ducatur parallelũ plano φϖ, ducto per M ϖ, [g] ſecabũtur rectæ AS, Aα, in eaſdẽ rõnes, in punctis 3. & 4. Atque idcirco, cũ AS, ſecta ſit in 3. extrema ac media ratione, ſecta erit eodem modo Aα, ſemidiameter cubi, in 4. maiuſq; ſegmẽtum erit α 4.

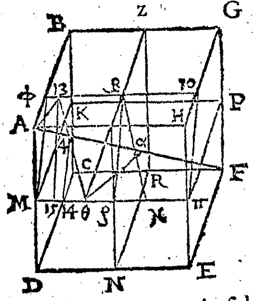
IISDEM argumentis oſtẽdemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, ſemidiametrum cubi ſecari in 9. pũcto extrema ac media rationea plano φϖ, vt perſpicuũ eſt, ſi cubus inuertatur, vt in hac figura ſecunda apparet. Sunt. n. lineamẽta omnino ſimilia lineamẽtis prioris figuræ, licet baſes cubi ſedes mutauerint, ita vt quadratũ AC, locũ quadrati HF; & quadratũ HF, locũ quadrati AC, obtineat in hac ſecũda figura. Qđ tñ in prima figura, ſine hac inuerſione probabitur ẽt hoc modo. Ducta diametro cubi H C, ĩ ea figura,



a 33. primi
b 4. ſexti
c 34. primi
d 5. tertijd.
e 2. ſexti
f 33. primi
g 17. vnde.

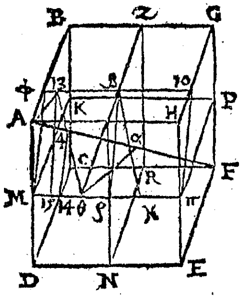
(Hęc deeſt in figura, quã tñ quilibet ducere poterit) quã planũ φπ, ſecet in 9. ꝓpe pũctũ A; intelligaturq; per rectam AH, planũ plano φϖ, parallelũ. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniũt, ſecanturq; planis parallelis in punctis A, H; & 4, 9; [a] erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo α A, ſecta ſit in 4, extrema & media ratione, erit quoque α H, ſimiliter ſecta. quæ quidem demõſtratio locum etiã habet in hac cubi inuerſione in ſecunda figura. Oſtendamus nunc, ſi rectæ iungantur θ 4. β 4, β 9. κ 9. rectilineum β 4 κ θ 9. in plano φπ, exiſtens, pentagonum eſſe æquilaterum, & æquiangulũ.

INVERTATVR rurſum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirũ continẽt triangulũ βθκ, ſiue planũ φϖ, hũc ſitũ habeãt, quẽ mõſtrat tertia hęc figura. Deinde in plano φπ, recta cõiuncta θ 4. extendat̃ vſque ad rectã φ 10. in punctum 13. Quoniã igitur ducta recta K P, & iũctis rectis M K, ϖ P, [b] planũ M P, parallelum eſt plano A G, (quod & rectæ PK, KM, parallelę ſint rectis GB, BA,) [c] ſecatq; cubũ bifariã; ideoq; per cẽtrũ α, trãſit, per ea, quæ in ſchol. prop. 39. lib. 11. oſtenſa ſunt; ſi per rectas α 4 A, ϑ 4. 13. planũ extẽdatur, [d] fient αθ, A 13. cões ſectiones planorũ MP, AG, parallelæ, Ac proinde triãgula αθ 4. α 13 4. æquiãgula erũt; [e] Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita θ 4. ad 4. 13. Quare cũ α A, in 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtẽdimus; eodẽ modo erit ſecta θ 13. in 4. Rurſus plano NZ, per centrũ α, tranſeũti, parallelũ ducatur planũ per punctũ 4. ex ſchol. propoſ. 15. lib. 11. ſecãs planũ φπ, recta 4. 14. [f] Eſt autẽ eidẽ plano NZ, parallelũ planũ DB. [g] Rectę igitur α A, ρ M, in eaſdẽ rõnes ſecabuntur in pũctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media rõne minuſq; erit ſegmentũ 14. M, ideoq; æquale minori ρ ϑ, ipſius Mρ. Quare cũ ex ρ 14. maiori ſegmento ipſius



a 17. vnde.
b 15. vnde.
c 32. vnde.
d 16. vnde.
e 4. ſexti
f 15. vnde.
g 17. vnde.

ſius ρM, auferatur ρϑ, minus ſegmentum; Erit, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. ρ 14. diuiſa in ϑ, extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentum erit ρϑ. Poſtremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, [a] ſecabũtur rectę ϑ13. ϑ15. proportionaliter; Ac proinde & ϑ15. ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit ϑ14. [b] Quapropter erit vt ρϑ, maius ſegmentũ ad ϑ14. minus, ita ϑ14. maius ad 14.15. minus: Vt autem ϑ14. ad 14.15. ita eſt tota ϑ15. ad ϑ14. maius ſegmentum. Igitur erit vt ρϑ, ad ϑ 14. ita ϑ15. ad eandem ϑ14 Ac propterea rectę ρϑ, vel ρκ, & ϑ15. ęquales erũt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelũ per 4.14. ductum, ſecantur plano φϖ, erunt communes ſectiones βρ, 4.14. parallelę, ideoque & 13 15. βρ, parallelę erunt, [d] anguluſque externus βρκ, interno 13.15 ϑ, æqualis. Cum igitur & latera βρ, ρκ, lateribus 13.15.15 ϑ, ſint ęqualia. [e] aequales erunt quoque rectę βκ, 13 ϑ; Ac proinde & earum ſegmenta maiora ϑκ, ϑ4 (Oſtenſum enim eſt ϑκ, eſſe maius ſegmentum ipſius βκ,) ęqualia erunt Eadem arte & β4. ipſi βγ, in prima figura oſtendetur ęqualis, ſi ſimili ſitu triangulum Iſoſceles formetur ſuper baſim βγ, cuius vertex conſiſtat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eiſdem ϑκ, βγ, ęquales erunt κ9. β9. Aequilaterum ergo eſt pentagonum β4θκ9; quandoquidem βγ, θκ, rectę ęquales ſunt, cum componantur ex minoribus ſegmentis linearum ęqualium extrema ac media ratione ſectarum, quales ſunt YV, ZV, πρ, Mρ. Sed & ęquiangulum, vt mox oſtendemus. Si igitur hac arte duodecim triãgula, nimirum ad ſingulas rectas Mϖ, YZ, NR, IL, ξO, KP; bina ipſi βϑκ, ſimilia, & ęqualia conſtruantur (Ita enim ad Mϖ, duo huiuſmodi triangula vides



[a] 2. ſexti

[b] 9. quartidec.

[c] 16. unde.

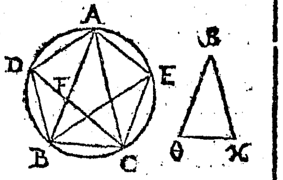
[d] 29. primi

[e] 4. primi.

βθκ, ϑθκ) & ipſorũ officio duodecim pentagona ipſi β4θκ9. ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis Mϖ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirũ in ſingulis, octo uero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quę ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris Aα, & Hα, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptũ eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrũ, quãuis nõ proprie, cũ non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi cõſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

LEMMA

QVOD autem triangulum βθκ cuius baſis θκ. maius ſegmentum exiſtit vtriuſque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diuiſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles ABC, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuiſiſque angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum ęquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propoſ. 11. lib. 4. tradimus, ſecentque ſe mutuo rectæ AB, CD, in F. [a] Quoniam ergo AB, in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiuſque eius ſegmentum eſt AF, æquale lateri BC: [b] Erit vt AB, tota ad maius ſuum ſegmentum

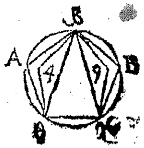


[a] 8. tertiidecimi.

[b] 2. quartidec.

tum BC, ita βϑ, tota ad maius ſuum ſegmentum ϑκ; Eodemque modo, vt tota A C, ad maius ſegmentum CB, ita βϑ, tota ad maius ſegmentum κθ: Eſt autem quoque vt A B, ad A C, ita β θ, ad β κ, vtrobique enim eſt proportio æqualitatis. [a] *Triangula igitur βϑκ, ABC, proportionalia habentia latera, ęquiangula ſunt, ęqualeſque erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; proptereaque vterque angulorum θ, κ, duplus erit anguli β; & triangula βθκ, ABC, ſimilia.*

PENTAGONVM vero β 4 ϑ κ 9, ęquilaterum, eſſe quoque ęquiangulum, hac ratione oſtendemus. Deſcribatur circa triangulum βϑκ, circulus β A ϑ κ B; qui ſi tranſeat per puncta 4, & 9, perſpicuum eſt ex ijs, quę ad propoſ. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum ęquiangulum eſſe. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Deſcribatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propoſ. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam rectę A ϑ, A β, quam rectę 4 ϑ, 4 β, æquales ſunt rectæ ϑκ, cum & β 4 ϑ κ 9, & β A ϑ κ B, pentagonum ſit æquilaterũ; Erunt tã duę rectæ ϑ A, ϑ 4, quam duę β A, β 4, ęquales. quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſ. 7. lib. 1. Tranſit ergo circulus triangulo β θ κ, circumſcriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 θ κ 9, ęquiangulum eſt.



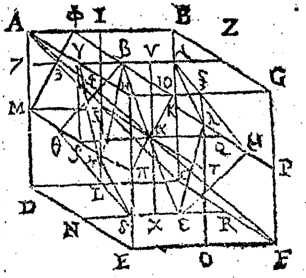
SCHOLIVM.

EX his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri βε, intelligaturq; coniuncta recta γε, [a] *æqualis exiſtens & parallela lateri cubi V X, quod & Vγ, Xε, æquales ſint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus eſt;* [b] *rectus quoque erit angulus βγε, ad γ, conſtitutus,* [c] *Ac proinde quadratum diametri βε, æquale erit quadratis laterum β γ, γε, nempe Dodecaedri, & cubi.*



[a] 33. primi

[b] 29. primi

[c] 47. primi

II.

SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt dodecaedri in cubo deſcripti: Maius vero ſegmentum latus cubi in hoc dodecaedro deſcripti.

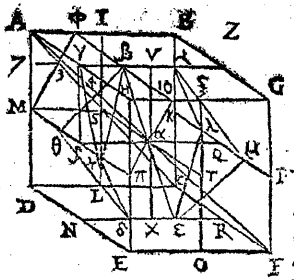
IN eadem enim prima figura, [d] *cum ſit vt ΥV, ad β V, ita Υ Z, dupla ipſius Υ V, ad βγ, duplam ipſius βV; Sit autem β V, minus ſegmentum ipſius Υ V, ſectæ extrema ac media ratione: Erit & βγ, minus ſegmentũ lateris cubi Υ Z, ſecti extrema ac media ratione; compoſita vero ex Υ β, γ Z, hoc eſt, recta β κ, (quæ dupla fuit oſtenſa ipſius Υ β, ideoque compoſitæ ex Υ β, γ Z, æqualis) maius ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione βγ, eſſe latus Dodecaedri,* [e] *& βκ, ſeu βϑ, eſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 ϑ.*

[d] 15. quinti

[e] 8. quintidec.

I I I.

LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti.



NAM in prima rurſus figura, latus cubi ΥZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Υ β, γ Z; quã conſtat eſſe latus Dodecaedri eiſdem cubo circumſcripti Cum enim Υ Z, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum [a] *deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 8. propoſ. huius lib., Sit autem latus illius pentagoni maius ſegmentum lateris Υ Z, ſecti extrema ac media ratione: Erit βθ, exiſtens quoque maius ſegmentum eiuſdem lateris Υ Z, vt iam demonſtrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris ΥZ, circumſcripti.*

a 8. tertij-dec.

I I I I.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

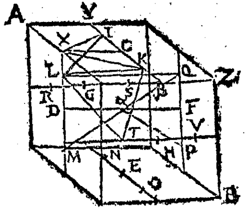
IN prima enim figura, recta connectens puncta β, δ, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppoſiti, [b] *æqualis eſt recta VX, (quod & βV, δX, æquales ſint, & parallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.*

b 33. primi

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icoſaedrũ deſcribere:

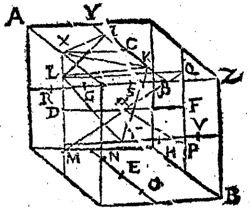
CVBVS datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrum, ſit AB, per cuius baſium cẽtra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nuſquã inter ſe conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione ſecentur, ita vt maiora ſegmenta prope centra ſint in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, *K*, T, & R: R, cum L, *M*, I, & N, &c. vt conſtituantur viginti triangula IKL, I*K*Q, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, *R*SI, *R*SN, TVK, TVO, ILR, ISQ, *K*TL, KQV, OPV, OTM, NSP, NM*R*; quorum priora duodecim ſubtenduntur duodecim cubi lateribus, poſteriora vero octo eiuſdem cubi octo angulis ſubſternuntur. Cõnectantur iam rectæ XC, XI, X*K*. Quoniam igitur latera X*C*, CI, trianguli XCI, æqualia ſunt lateribus XC, C*K*, trianguli XC*K*; [a] & anguli contenti, recti, quod XC, parallela ſit ipſi A Y; [b] Erunt & baſes XI, X*K*, æquales. Deinde quia linea LX, recta eſt ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK; Ac propterea cum latera LX, XI, trianguli L X I, æqualia ſint lateribus LX, X*K*, triãguli LX*K*, & anguli contenti, recti; [c] æquales erunt baſes L I, *L K*. *R*urſus [d] quoniam quadratũ rectæ L I, æquale eſt quadratis rectarum *L* X, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum uero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, eſt æquale: *A*equale erit quadratum rectæ *L*I, tribus quadratis rectarum X*C*, C*I*, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera ſint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale eſt tribus qua



a 29. primi.
b 4. primi
c 4. primi.
d 47. primi

dratis rectarum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla ſunt quadrati rectæ C I, ([a] *Cum enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris ſegmenti, tripla ſint quadrati rectæ CI, maioris ſegmenti; Addito* quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiuſdẽ quadrati rectę CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum eſt quoq; quadrati rectæ CI; *Ac* propterea, cũ eiuſdem quadrati rectæ C I, quadruplum ſit quadratum rectę K I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarũ LI, IK, ideoq; & rectæ ipſæ æquales. Aequilaterũ igitur eſt triangulũ IKL, lateri cubi, A G, ſubſtratũ.

[a] *4. tertij-decimi*



NON aliter oſtendemus, reliqua vndecim triãgula, vndecim reliquis lateribus cubi ſuppoſita, eſſe æquilatera; Atque adeo inter ſe æqualia, cum eorum latera I K, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia ſint. Quoniam uero latera reliquorum octo triãgulorum, octo angulis cubi ſuppoſitorum, communia ſunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune eſt triangulo IKL; & latus KT, triangulo TVK; & latus T L, triangulo LMT; perſpicuum eſt, ea quoque eſſe ęqualia & inter ſe, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiuſmodi triangula Icoſaedrum component cubo inſcriptum, cum eius anguli omnes duodecim in ſex cubi baſibus conſiſtant, bini nimirum in ſingulis. Itaque in dato cubo Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat facien.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propoſitiones ſequentes.

I.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cubi Icoſaedrum ambientis.

DVCTA enim recta LQ,[a] qua lateri cubi DF, parallela eſt, & æqualis, quod & DL, FQ, parallelæ ſint, & æquales; [b] manifeſtum eſt, quadratum diametri QM, æquale eſſe quadratis rectarum L M, lateris Icoſaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icoſaedrũ deſcriptum eſt, [c] cum angulus MLQ, ſit rectus, quod & L D F, rectus ſit.

[a] *33. primi*
[b] *47. primi*
[c] *29. primi.*

II.

BIFARIAE ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſe ſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus.

NAM huiuſmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cũ coniungant centra baſium cubi oppoſitarum, æquales ſunt lateribus cubi, ſeſeque per coroll. propoſ. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod ſit α, diuidunt. Quod quidem & centrum eſſe Icoſaedri, ita oſtendetur, ducta recta α P. Quoniam latera α F, FQ, triãguli α F Q, æqualia ſunt lateribus α F, FP, trianguli α F P, anguloſque comprehendunt rectos, [d] æquales erunt rectæ α Q, α P. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icoſaedri prodeuntes. Igitur α, centrum eſt Icoſaedri.

[d] *4. primi*

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

CVM enim CI, ſit maius ſegmẽtum rectæ CY; [e] ſitque vt CI, ad CY, ita K I, dupla ipſius CI, ad βY, duplam ipſius CY; [f] erit quoque KI, latus Icoſaedri, ſegmentum maius lateris cubi βY.

[e] *15. quinti*
[f] *2. quartidec.*

IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

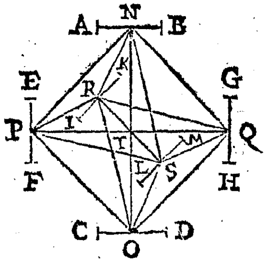
SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triãgula inter ſe æqualia, anguloſque alternos habentia æquales, ex 4. propoſ. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare quælibet latera oppoſita parallela erunt; [a] Atque idcirco, *& triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela.*

[a] 25. vnde.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

EXPONANTVR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita, *A*B, C*D*, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iũgant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſe ſe in centro T, bifariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ. pręcedentis oſtenſa ſunt; ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, O*R*, OS, OQ; P*R*, PS; Q*R*, QS, conſtituẽtes octo triãgula SNP, SPO, SOQ, SQN; *R*NP, RPO, *R*OQ, *R*QN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli T N P, (cum ſint rectarum æqualiũ dimidia) anguloſque continent rectos, vt dictum eſt; [b] Aequales erunt baſes NS, NP: Eodemq; modo reliquę omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt, & inter ſe ęqualia; *I*deoq; Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum eius anguli reſideant in bifariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaq; Icoſaedro Octaedrũ deſcripſimus. Quod faciẽdum erat.



[b] 4. primi

CO-

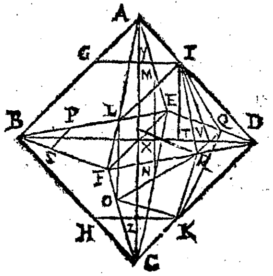
COROLLARIVM

SEQVITVR hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri NPOQRS, ſibi inſcripti. Quare T, centrum Icoſaedri, vbi ſe interſecant, centrum quoque eſt Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.

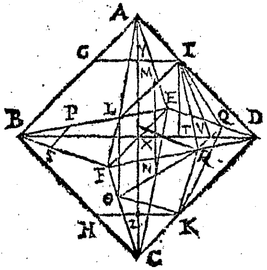
DATVM Octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, ſit ABC*DEF*. Cũ a quolibet angulo quatuor latera exęant, ſumantur a ſingulis bina non proxima, ſed ſibi e regione reſpondentia, hoc eſt, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina iuxta angulos oppoſitos eiuſdem quadrati, qualia ſunt B*A*, BC; DA, DC, iuxta angulos oppoſitos B, D, quadrati ABCD; AF, *A*E; CE, CF, iuxta angulos oppoſitos A, C, quadrati AECF: (Nã a quolibet angulo ſuméda ſunt tm̃ duo latera; at vero latera AB, AD; *C*B, *C*D, quadrati ABCD, iuxta eoſdẽ angulos A, C, iã ſumpta fuere,) *E*B, ED; FD, FB, iuxta angulos oppoſitos E, F, quadrati *EBFD*; (Nã latera E*A*, EC; FC, FA, quadrati *A*ECF, iuxta eoſdẽ angulos, E; F, iam accepta ſunt,) q̃ omnia ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora ſegmenta ſint prope angulos, a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, *K*, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a ſingulis ad quinque proximas ſectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, R*L*, RO, RK. *E*t ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, I*G*, & ſic de cæteris, quamuis non omnes ductæ ſint in figura, ad euitandam linea-



linearum confuſionē. Quæ autem ſint hæc quinque puncta proxima,pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt.n. tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum eſt, pyramidē conſtituunt; alia aūt duo ſunt in duobus lateribus duorū triangulorum octaedri, quæ habent cōe illud latus,in quo punctū acceptū eſt.Vt q̃ punctū acceptū eſt R, in latere DF,qđ cū tribus DE,DA, DC,pyramidē cōſtituit in vertice D, & eſt cōe triāgulis octaedri DFA,DFC;ꝑpea ex R, ad quinque pūcta horū quinque laterum ductæ ſunt lineę rectę, & ſic de cæteris. Poſt hęc,ductis tribus octaedri diametris AC,BD,EF,ſeſe in cētro X,ſecantibus bifariā,& ad angulos rectos,ex coroll.1.prop.14.lib.13.quarū AC,BD,ſecāt rectas GI, RQ,in Y,& V;connectaturq; recta IV,agaturq; IT,parallela ipſi YX. Qm̃ ergo latera DQ,DI,triāguli DQI, æqualia ſunt lateribus DR,DI;(Sunt.n.DQ,DR,minora ſegmenta rectarum æqualium DE,DF,)& angulos cōprehendunt æquales, nēpe triangulorū Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt baſes IQ,IR,æquales.Deinde cū ſit, [b] vt BG,ad GA,ita DI,ad IA;[c] erit GI,rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR,ipſi EF,parallela;[d] Ac proinde vt DI,ad IA,ita XY,ad YA. Recta igitur XA, ſecta erit in Y,extrema ac media ratione. Rurſus quia eſt vt AX,ad XD, ita AY, ad YI, (quod triangulum AYI, ſimile ſit triangulo AXD,per coroll.propoſ.4.lib.6.) Eſt autem AX,ipſi XD,æqualis;Erit & AY,ipſi YI,ęqualis. Quare YI,minus ſegmentum eſt rectæ XA.Non aliter oſtendemus AY,ipſi YG,eſſe æqualē;ideoq; GI,rectam,bifariā in Y;ſimiliterq; QR,in V,ſecari. Cum vero latera AG, AI,trianguli AGI,æqualia ſint lateribus DQ,DR,triāguli DQR, (nimirum minora ſegmenta minoribus ſegmentis æqualium rectarum)angulosq; cōprehendant rectos,nēpe quadratorum ABCD,DEBF.[a] Aequales erūt baſes GI,QR. Eadem ratione his æquales oſtendētur rectæ HK,PS,MN,LO,quæ nimirum ſubtēdunt reliquos quadratorum ABCD,DEBF,AECF,angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos , cōplectunturq; duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA,oſtenſum,maius eſt ſegmētum maioris ſegmenti XY,diuiſi extrema ac media ratione , vt demōſtrauimus ad prop.5.lib.13.Eſt autē XY,rectę XV, æqualis.(cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA,XD,)[b] & YI,rectæ XT;erit XT,maius ſegmētum ipſius XV,& idcirco TV, ſegmētum minus eiuſdem XV. Quare quadrata rectarum XV,totius, hoc eſt, ipſius IT,([c] cum & recta IT,æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmēti,[d] tripla ſunt quadrati rectę XT,maioris ſegmenti; Atq; adeo quadratum rectæ IV , [e] æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, triplum eſt eiuſdē quadrati rectæ XT,hoc eſt, rectæ RV,quæ ęqualis eſt ipſi XT,ſeu ipſi YI,ex demonſtratis,cum RV,YI, dimidia ſint ęqualium rectarum RQ,GI. Addito igitur quadrato rectæ RV,ipſi quadrato rectæ IV;erunt quadrata rectarū IV,VR,quadrupla quadrati rectæ RV:[f] At quadratis rectarū IV,VR,æquale eſt quadratum rectæ IR,[g] qđ anguli IVR,IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR;IV,VQ,& ſubtēſi baſibus æqualibus IR,IQ,æquales ſint,ideoq; recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR;Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectę VR,quadruplum quoq; ſit per ſcholium prop.4.lib.2.quadratum rectę QR;Aequalia erunt quadrata rectarum IR,QR,ideoque & rectæ ipſæ æquales:Erat autem IQ, ipſi IR,æqualis.Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triāgula ſimilem ſitum cum IQR, habentia,nempe KQR;GIL,GIM;GPS,HPS;NHK,OHK; RLO,SLO;PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe.quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis

[a] 4. primi.
[d] 2. quartidec.
[c] 2. ſexti
[d] 4. ſexti

[a] 4.primi.
[b] 34.primi
[c] 34.primi
[d] 4.tertijde.
[e] 47.primi.
[f] 47.primi.
[g] 8.primi.



mentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua ſubtendāt duos ęquales angulos triangulorum ęquilaterorum cōtentos ſingulos duobus ſegmentis laterū Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius triāguli lateribus aliorum ęqualia; ac propterea & ipſa triangula ęqualia, per corollarium propoſitionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera *RQ*, *GI*, ſubtendentia angulos rectos QDR, GA*I*, quadratorum DEB*F*, ABC*D*, comprehenſos minoribus ſegmentis *DQ*, DR; *A*G, AI, ęqualia ſunt. Eodem modo latera IQ, IL, ęqualia erunt, cum ſubtendant angulos ęquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, *ADF*, quorū ille continetur ſegmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic vero ſegmentis AL, *A*I, maiore & minore quoque. Non ſecus latera IR, GL, ęqualia erūt. Aequalia igitur ſunt triangula IQR, GIL, per corollarium propoſ. 8. lib. 1. Atqui IQR, oſtenſum eſt eſſe ęquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum eſt. Eademque eſt ratio dę cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet ſingulis. Ex his conſequitur reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, videlicet GMP, in A*E*B; *H*NP, in BEC; *K*NQ, in CED; IMQ in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CF*D*; ILR, in A*F*D, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqualia, cum horū latera cum illorum lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triāgula, quorum quina in ſingulis ſectionibus laterū octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi, (vt vides in quinque RQI, RI*L*, RLO, ROK, RKQ, ſolidum angulum R, componentibus.) Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum, cum Icoſaedri duodecim anguli, duodecim ſectiones laterum Octaedri poſsideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

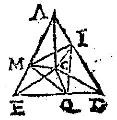
COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſse minoris ſegmēti. Cum.n. in triāgulo æquilatero ADE, maius ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, oſtenſa æqualis rectæ GI, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AI, a cum quadratum rectæ GI, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perſpicuum eſt, & rectam IQ, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris AI.

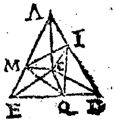
a 47. primi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS ſit, cum octo Icoſaedri *baſes collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. Suſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulum AED, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri IMQ, ſitq; C, centrum trianguli AED, ex quo recta educātur CA, CE, CD; CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) anguloſque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtēdimus; Erūt baſes CM, CQ, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ, Quare C, centrum erit trianguli IMQ.*



COROLLARIVM III.



NON difficile eſt denique ex dictis colligere, idē centrum eſſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, cētro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunque duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cum latera XA, AG, trianguli X A G, æqualia ſint lateribus YF, FO, trianguli XFO, (Nā XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & A G, F O, ſegmenta minora laterū æqualium Octaedri ſectorū extrema ac media ratione) angulosque complectantur æquales, ſemirectos videlicet; (cū AC, EF, diametri ſint quadratorū ABCD, EAFC; ac proinde, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam ſecent.) [a] Aequales erunt & baſes XG, XO. Eodemque argumēto oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri.

[a] *4. primi.*

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

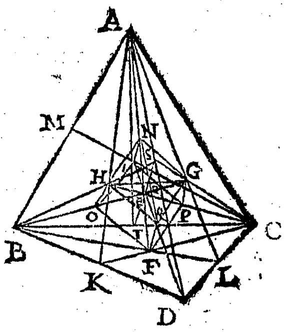
[b] INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrū; [c] & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarum octo concētricæ ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem cētris octo baſium Octaedri, reliquos autē duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binæ ſingulis ſex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere poteſt. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[b] *16. quintidecimi.*
[c] *5. quintidec.*

PROBL. 18. PROPOS. 18.

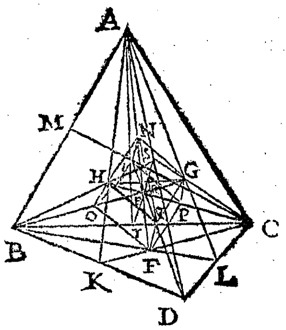
IN data Pyramide cubū deſcribere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur deſcribi, ſitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur AEF, BEG, CEH, DEI, [a] quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad eaſdē baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur A H K, A G L, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas B D, C D, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex ſolidis angulis p centrum E, demiſſę AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis cōiungātur, vt N, cū G, H, I; O, cū F, H, I; P, cū F, G, I; & Q, cū F, G, H. Dico ſolidū NF, contētum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubū eſſe. Cū n. latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia ſint lateribus AF, FL, triāguli AFL, (qđ FK, FL, cū ppendiculares ſint ad BD, CD, ex cētro F, ductæ oſtēdāt æquales diſtātias rectarū æqualium



[a] *15. quarti dec.*

æqualium BD, CD, a centro F,) anguloſque contineant rectos, ex 3.defin.lib.11. [a] Aequales erunt & baſes AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rurſus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia ſunt lateribus AN, AG, triáguli ANG, (ſunt enim AH, AG, ſemidiametri triangulorum ęquilaterorum æqualiũ ABD, ACD,) angulos item comprehédunt æquales, vt demonſtrauimus; [b] Aequales erunt baſes NH, NG. Haud ſecus oſtendentur æquales rectæ QG, QH, ſi rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes ſubtendant ęquales angulos æqualibus lateribus comprehéſos; vt perſpicuum eſt. Si.n. recta ducatur FT, cũ latera AF, FT, ęqualia ſint lateribus AF, FK. (Sunt namque FT, FK, diſtantiæ rectarum ęqualium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia ſint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABC, ABD;) anguloſque contineant æquales: [c] Aequales erunt baſes NI, NH. &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe, atque rectangula, vt tandem quadrata eſſe concludamus, atque adeo componere cubum NF.



ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter octaedri in pyramide deſcripti, vt conſtat ex figura propoſ.2.huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto

F; cum

[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 4 primi.

F, cum & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit ST, per E, centrum pyramidis, æqualeſque erunt ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12.lib.13. [a] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, triáguli BSC, proportionaliter ſecantur, [b] atque idcirco HG, parallela eſt lateri BC, ſecatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars eſt trianguli BSC,) proportionaliter; ideoque & SR, tertia pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rurſus [c] quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll.2.propoſ.13.lib. 13.hoc eſt, qualium partium 3.ponetur DE, talium 1.erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundẽ partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1.atque idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadẽ ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter ſecentur, [d] recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidém pars eſt triáguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac proinde SR, duæ tertię partes eiuſdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R; ſecabitur SE, a rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipſæ HG, NQ, in eodem ſe ſe puncto interſecabunt. [e] Quare in eodem ſunt plano, propterea que & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum NQ. Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

CVM oſtenſa ſit HG, ipſi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, ſimile triangulo SBC, ex coroll.propoſ.4.lib.6. [f] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC; Eſt autem SH, tertia pars ipſius SB: Igitur & HG, tertia pars erit late-

[a] 18. quarti decimi.

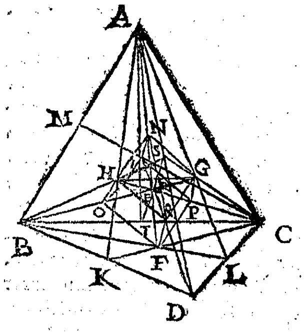
[b] 2. ſexti.

[c] 15. quarti decimi.

[d] 2. ſexti

[e] 2. vndec.

[f] 2. ſexti



ris BC. Haud ſecus oſtendemus NQ, tertiam eſſe partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, ſint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum ſubtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; [a] Aequales erũt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cũ ipſi ſint quatuor rectis æquales, vt oſtendimus ad ꝓpoſ. 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent: qui ideo pyramidi dicetur inſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, vt conſtat.

a 8. primi.

ALITER. In data pyramide deſcribatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi ſtatuuntur in cẽtris octo baſium octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis, vt conſtat ex prop. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipſis, vt mox oſtendemus; fit, vt quatuor anguli cubi reſideant in centris quatuor baſium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demõſtratione dictum eſt. Rurſus quia reliquæ quatuor baſes octaedri parallelæ ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. ([b] cum enim rectæ EG, EH, parallelæ ſint rectis BC, BD; [c] erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter ſe parallela, & ſic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoque ad illas quatuor reliquas baſes octaedri perpẽdiculares, ex ſcholio prop. 14. lib. 11. Quare cũ prædictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. [a] Et quia dictæ quatuor baſes octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariã; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

b 2. ſexti.
c 15. vnde.

a 17. vnde.

COROLLARIVM I.

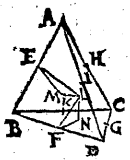
CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorũ laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis GNHQ, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat; Recta RS, dupla ipſius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, oſtenſa ſit tertia pars ipſius ST; perſpicuum eſt, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis AD, BC, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi RS.

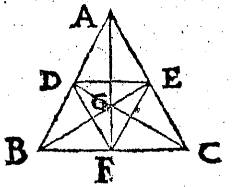
LEMMA.

IDEM autem eſſe centrum Pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti, idemque centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti, ita demonſtrabimus. Sit primum pyramis ABCD, cuius omnia ſex latera bifariã ſecētur in E, F, G, H, I, K; & ex L, cētro Pyramidis in baſes ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas baſes circumſcribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniã latera LM, ME, triãguli LME, æqualia ſunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli baſes ABD, BCD, circumſcribentes ſint æquales, ęqualiter diſtabunt ipſi a centro L, per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14; Ac propterea eorum diſtantię LM, LN, ęquales erunt. Sic quoque ęquales erunt ME, NF, diſtantiæ rectarum ęqualium AB, BD, a centris M, & N, circulorum ęqualium) anguloſque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11. [a] Aequales erunt rectę LE, LF. Eademque ratione hi-



[a] 4. primi. ce ęquales erunt, & inter ſe rectę LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide deſcripti conſtituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propoſ. huius lib. conſtat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos ſint ęquales. Cũ igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea deſcripti.

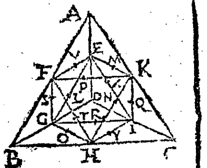
SIT deinde in baſe pyramidis ABC, baſis octaedri D E F, quæ ſecabit illius latera bifariam, vt patet ex propoſ. 2. huius lib. ſit autem G, centrum trianguli A B C, a quo ad angulos vtriuſque baſis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, ęqualia ſunt, anguloſq; continēt ęquales, nimirū ſemiſſes angulorum ęqualium trianguli ęquilateri [a] erunt & baſes G D, G F, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, ęqualis. Igitur G, centrum eſt trianguli D E F. quod eſt propoſitum. [a] 4. primi



PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATAE Pyramidi ABCD, [b] inſcribatur octaedrū EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumãtur ex ſingulis angulis ſibi reſpōdentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum octaedri cadentia, vt in propoſ. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum pūctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrū in dicto octaedro, vt cōſtat ex prop. 16. huius lib. habēs oēs duodecim angulos in duodecim p̃fatis ſectionibus duodecim laterū octaedri. Cū ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſiū Pyramidis ſint ducta; manifeſtū [b] 2. quintidec.



eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſiũ pyramidis cõſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nã in baſi *A*BC, exiſtunt latera *F*H, H*K*, K*F*; In ABD, latera EF, *F*G, G*E*; *I*n BDC, latera G*H*, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor baſes MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt cõſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrũ deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum deſcribere.

PYRAMIDI datæ[a] inſcribatur Icoſaedrum, [b]& in hoc Dodecaedrũ habens viginti ſuos angulos in centris viginti baſium Icoſaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cùm enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus; cõſiſtẽt quatuor anguli Dodecaedri dicto icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt. n. dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll. propoſ. 16. huius lib. Deinde[c] quia cubus Dodecaedro inſcriptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inſcriptus, [d] quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictũ eſt, quatuor autem reliquos in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem bifariis ſectionibus perpendicularium dictarum : ſuperſunt autem duodecim anguli *D*odecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; *A*tque adeo dictũ Dodecaedrũ deſcriptũ eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiam ſi non proprie. Quam ob rẽ in data Pyramide

a *19. quintidec.*
b *5. quintidec.*
c *8. quintidec.*
d *18. quintidecimi.*

de

de Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

13.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphæræ datum ſolidum cõplectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex corol. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter a centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares ęquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque ſolidorum regulariũ in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 18. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti cõſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: qua quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta. [a]In octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim pũctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione ſecãtur. Deinde [b] Icoſaedro imponitur Dodecaedrũ, *ꝙ eidẽ octaedro in-*

a *16. quintidecimi*
b *5. quintidecimi*

ſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ. 17. huius lib. Poſt hæc in Dodecaedro [a] deſcribitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra baſium octaedri poſſident; ac propterea & cubus ipſe in octaedro deſcriptus eſt. [b] Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur eſſe deſcripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.

[a] 8. quintidecimi
[b] 1. quintidecimi

NEQVE vero prætereundum eſt, Dodecaedrum, ſibique inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. [c] Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſſideant, [d] conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido conſtat, ſphæram Dodecaedro circumſcriptam complecti quoq; cubum atque pyramidem, cum ſphæræ illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.

[c] 1. quintidecimi.
[d] 8. quintidec.

PARI ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, vt demonſtratum eſt: In centris quidem, baſium Icoſaedri, propoſ. 5. 11. & 12. In centris vero baſium octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium pyramidis propoſ. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptioneſve quinque ſolidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrum, propoſ. 2. 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ. 1. 3. 14. 13. In Icoſaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum propoſ. 10. 9. 8. 7. deſcripſimus. At vero poſteriori vnica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMEN-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM,

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes
explicantur, a Franciſco Fluſſate Can-
dalla adiectum, & de quinque
corporibus

LIBER TERTIVS.

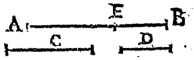
QVEMADMODVM libro 14. traditæ ſunt comparationes quamplurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur,

tur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectę lineę diuiſę extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quā habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus. Cū enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubuſq; in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadē ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadē ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demōſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit EB, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circūſcripti ad D, latus Dodecaedri eidē cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmentū ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatā lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demōſtrandū.

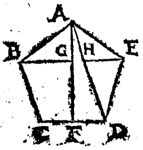


THE-

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono ęquilatero, & ęquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, a recta BE, ſubtēdente angulum A; ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, que ſecet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, ex ſcholio propoſ. 8. lib: 13. eſt parallela, [a] ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: [b] Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentū DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 2. ſexti

[b] 18. tertijdecimi.

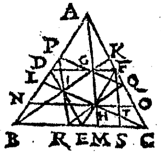
THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectę oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt ꝓpe quēuis angulū ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam

quidem

quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis ſit ABC, cuius latera ſecentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, cóſtituentes GHI, triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triãgulũ Icoſaedri GHI, hoc eſt, rectam BK, tranſire per puncta G, I; & rectam CL, per pũcta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipſi BC, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis eſt rectę FH, maiori ſegmento rectæ FE, ſeu DF, ipſi æqualis: (Eſt enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis ſcilicet æqualiũ laterum eiuſdem trianguli comprehenſos; [a] ideoque æqualia ſint.) [b] Eſt autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, [c] propterea quod FH, DF, parallelæ ſunt rectis AB, BC, ſeu NO. Igitur recta NO, compoſita ex NH, tota, & HO, maiori ſegmento, [d] ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ BC, NO, DF, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam AM, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus BK, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB; Atque idcirco rectæ BK, CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI.



[a] 4. primi.
[b] 34. primi.
[c] 2. ſexti.
[d] 5. tertijdec.

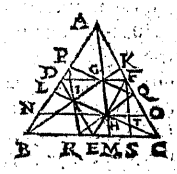
AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FE, cuius maius ſegmentum fuit FH, hoc eſt, FO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius ſegmentum rectæ AF; [a] ac proinde tota AO, ſecta in F, extrema ac media ratione: [b] Eſt autẽ vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, ſegmẽta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia uero eſt [c] vt AQ, maius ſegmẽtum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius ſegmentum; Et eſt AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum erit lateris AB, maiusq; reliqua BP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet, Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, ſecabit extrema ac media ratione, atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri ęqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, [d] ęqualia inter ſe ſunt; erit triãgulum PQR, ex ipſis compoſitum, ęquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL; ſecabuntur PQ, LC, in eaſdem rationes, ex ijs, quę ad propoſ. 4. lib 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulũ ACL, in quo FH, parallela eſt lateri AL, [e] ſecans proportio-

5. tertijdecimi.
[b] 2. ſexti.
[c] 2. quartidec.
[d] 4. primi
[e] 2. ſexti.

portionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ bifariam ſecatur in G. Eademque eſt ratio de reliquis QR, RP.) Ac propterea triangulum Icoſaedri GHI, inſcriptum eſt triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, *H*, I, ab angulis baſis Icoſaedri GHI. Quapropter, ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi poteſt, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media rõne, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. GHI, triangulum ſit Icoſaedri in octaedro, cuius baſis DEF, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, eſt æquale, recta FS, parallela rectæ AM, ſecans MC, HO, in S, & T. [a] Cum igitur MC, bifariam ſecetur in S, ob triangulum AMC; [b] ſitque MS, ipſi GF, æqualis, ob parallelogrãmum GS; Erit & SC, æqualis eidem GF, minori ſegmento rectæ DF; Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales ſint; erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori ſegmento æqualis: Ideoque EC, in S, ſecta erit extrema ac media ratione. Deinde [c] quia FE, FS, ſimiliter ſecantur; ſecatur autem FE, extrema ac media ratione; ſecabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit FT, recta [d] æqualis exiſtens lateri Icoſaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.



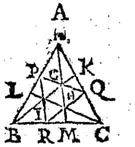
[a] *2. ſexti.*
[b] *34. primi*
[c] *2. ſexti.*
[d] *34. primi.*

THE-

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti.

BASIS Pyramidis ſit ABC, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in *K*, L, *M*, & ductis rectis B*K*, CL, *A*M, producentibus GHI, baſim Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli A*B*C, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, *R*, & ipſa latera PQ, QR, *R*P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in prop. præcedenti demonſtratum eſt. Dico AP, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri HI. Cum enim PQ, dupla ſit potentia minoris ſegmenti AP, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla ſit rectæ PG, hoc eſt, ſibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2 & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectę HI. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.



COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. [a] Cum enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis; ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, [b] cũ diametro potentia ſit cõmenſurabile. [c] Quare minus ſegmentũ lateris Pyramidis extrema ac media rõne ſecti Apotome erit; Atq; adeo [d] cũ minori

[a] *13. tertij-dec.*
[b] *6. dec.*
[c] *6. tertii-decimi.*
[d] *6. decimi.*

minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile; (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus vero Pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo deſcriptę diameter ſit baſis cubi, vt conſtat ex propoſ. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum baſis cubi, hoc eſt, quadrati lateris cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Manifeſtum eſt, latus cubi dimidium eſſe potentia lateris Pyramidis in cubo illo deſcriptę.

RVRSVS, quia rectę coniungentes bifarias ſectiones laterum Pyramidis conſtituunt octaedrum in pyramide deſcriptum, vt liquet ex propoſ. 2. lib. 15. Eſt autẽ latus trianguli ęquilateri duplum rectę coniungentis bifarias eius ſectiones, cum ea recta ęqualis ſit dimidio lateris trianguli, vt conſtat ex coroll. propoſ. 4. lib. 6.[a] Nā cum ſit parallela tertio lateri, auferet triangulum ęquilaterum, &c. Perſpicuum eſt latus pyramidis duplum eſſe longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti.

[a] 2. ſexti

DENIQVE [b] quia diameter ſphęræ, ſeu octaedri potentia eſt dupla lateris octaedri; Eſt autem latus cubi æquale diametro Octaedri ſibi inſcripti, cum diameter octaedri coniungat centra baſium cubi oppoſitarum, vt in coroll. propoſ. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia eſſe duplum lateris octaedri in eo deſcripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 14. tertij-dec.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

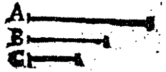
LATVS Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia eſt dimidia lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ.

CVM enim Pyramis inſcripta cubo, deſcripta ſit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inſcribitur, vt docuimus propoſ. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius ſegmentum, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo deſcribitur; [a] exiſtat denique latus cubi dimidium potẽtia lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius eſſe ſegmentum rectæ, quæ potentia dimidia eſt lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.

[a] 5. ſexti-dec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo deſcribatur & Icoſaedrū, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.



SIT latus cubi A, & latus Icoſaedri in eo deſcripti B, latus deniq; Dodecaedri in eodem cubo deſcripti C. Dico B, latus Icoſaedri medio loco eſſe proportionale inter *A*, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum.n. ex ijs, quę in ſcholio propoſ. 14. lib. 15. demonſtrata ſunt, B, latus *I*coſaedri maius ſegmentum ſit lateris cubi *A*; & C, latus *D*odecaedri, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. eiuſdem lib. oſtendimus, minus

nus ſegmentum ſit eiuſdem lateris cubi: Planum ſit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmẽtum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplū eſt lateris cubi in ea deſcripti.

CVM enim per ea, quæ propoſ. 18. lib. 15. ſunt demõſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti; (oſtenſum. n. eſt ibi, GH, diametrum baſis cubi inſcripti, tertiā eſſe partem lateris Pyramidis BC,)[a] Et quadrata proportionem habeāt laterum duplicatam: Erit quadratū lateris Pyramidis nõcuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cū noncupla proportio ſit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cū quadratū diametri baſis cubi duplū ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. fit, vt ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratū lateris cubi 1. quadratū eiuſdē baſis diametri ſit 2. & quadratū lateris pyramidis 18. Quamobrē latus Pyramidis potētia octodecuplū eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.

[a] 30. ſexti

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentū latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus quoque ſit Pyramidi, cui illud dodecaedrū inſcribitur, vt docuimus in ſcholio prop. vlt. lib. 15.[b] Erit latus Pyramidis potētia octodecuplū lateris cubi ſibi, & Dodecaedro inſcripti: Huius autē lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. ꝓpoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectę extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

[b] 8. ſextide.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplū minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentiū prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta GI, ſubtēdens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehenſum;) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare,[a] cūm hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

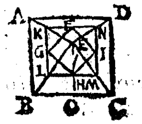
[a] 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT vna ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis quadratū ABCD, triangula vero ad E, verticē, ABE, EBC, CED, DEA, ſintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelę. Quod ſi coniungantur rectę

FG, GH, HI, *IF*; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro deſcripti, vt demonſtrauimus propoſ. 4. lib. 15. Qm̃ autem ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ EH, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit *EH*:[a] *A*tqui vt EO, ad EH, ita eſt EB, ad EL. Igitur qualium partiũ 3. continet EB, talium 2. erit E*L*, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit *9*. & quadratum rectæ L M, nimirum KLMN, partium *4*. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FG*HI*, talium partium 2. cum quadratum *LN*, duplum ſit quadrati G*I*, ſibi inſcripti, per ea, quę in ſcholio propoſ. *47*. lib. 1. demonſtrauimus. Eſt enim LN, quadratum ex diametro quadrati *GI*, deſcriptum;[b] cum G*I*, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri L M. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi G *H*, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam *9*. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in eo deſcripti. Quod erat demonſtrandum.



[a] 2. ſexti.

[b] 33. primi

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuiſum efficit maius ſegmentũ latus Dodecaedri, cui inſcribitur, per corol. 2. prop. 13. lib. 15. Inſcribũturque Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidẽ octaedro, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltima lib. 15. Perſpicuum fit, octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum eius recta extrema ac media ratione diuiſa, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. Eſt enim eiuſmodi recta latus cubi eidem octaedro inſcripti, cuius quadruplũ ſeſquialterum potentia eſſe oſtẽdimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM *I*coſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ. 14. lib. 15. eiuſque ſcholio. Et in bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum *I*coſaedri reſident ſex anguli octaedri in *I*coſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. eiuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto *I*coſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo *I*coſaedrum deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ. 14. lib. 15. oſtendimus, latus *I*coſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus *I*coſaedri maius ſegmentum diametri octaedri in illo *I*coſaedro deſcripti.[a] Atqui diameter ſphæræ, ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. *I*gitur latus *I*coſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in *I*coſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.

[a] 14. tertijdec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionẽ habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmẽtum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.

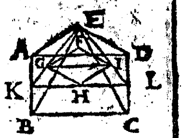
OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ.13.lib.15. Minus ſegmẽtũ lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum proportionẽ habeat duplicatã proportionis totius lineę ad maius ſegmentũ, vel maioris ſegmẽti ad minus, (quod tota linea, maius ſegmentũ, atque minus, ſint tres rectæ continue proportionales:) liquido conſtat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis maioris ſegmenti ad minus duplicatam.

PRAETEREA, cum cõſtet ex coroll.1.prop.17. lib.13. maius ſegmentũ lateris cubi extrema ac media ratione diuiſi latus eſſe Dodecaedri, cui cubus inſcribitur; manifeſtũ eſt eſſe vt latus Dodecaedri, hoc eſt, maius ſegmẽtum, ad latus cubi in ipſo deſcripti, hoc eſt, ad totam lineam extrema ac media ratione ſectam, ita minus ſegmentum ad maius. Cum enim ſit, vt tota linea ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus; Erit quoq; conuertendo, vt maius ſegmentum ad totam lineam, ita ſegmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.

SIT vna ſex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius baſis quadratũ ABCD, triangula autẽ ad verticẽ E, ſint ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorũ cẽtra F, G, H, I, quæ rectis iungãtur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro deſcripti conſtituentibus, vt docuimus in propoſ.4. lib.15. Quoniã vero Pyramis in cubo deſcripta, deſcribitur quoq; in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in ſcholio propoſ. vltimæ lib.15. expoſuimus; Eſtque latus pyramidis in cubo deſcriptæ diameter baſis cubi, vt cõſtat ex ꝓpoſ.1.lib.15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto deſcriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, ſeſquialterũ eſſe lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex ſcholio propoſ.12. lib.13. ipſæque EK, EL, ſeſquialterę erunt rectarum EG, EI, per coroll.prop.18.lib.14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll.propoſ.4.lib.6. triangulũ EGI, ſimile triangulo EKL. Quare erit, vt EK, ad KL, ita EG, ad GI; & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI; ideoque cũ EK, ſeſquialtera ſit ipſius EG, erit & KL, ſeſquialtera ipſius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis ſit ipſi KL, quod & BK, CL, æquales ſint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri ſeſquialterum lateris Pyramidis GI, ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.



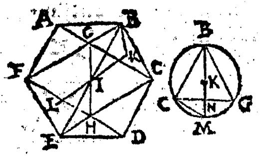
[a] 2. ſexti.

[b] 33. primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplũ quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertium quadrati lateris Icoſaedri.

SIT Icoſaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrũ I; triangula vero oppoſita & parallela, per coroll.4.propoſ.14.lib.13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex cẽtro I, ad planũ BCG, perpẽdicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propoſ.10. lib.14. in



centrum *K*. Producta igitur *KI*, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in *I*coſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium *I*coſaedri, vt côſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit *K*L, diameter cubi in *I*coſaedro deſcripti, tranſiens per *I*, centrum *I*coſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum *I*, tranſeant, erit *I*, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque *IK*, *I*L, ſemidiametri æquales: Coniūcta autem *K* B, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis, erit angulus B *K I*, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [a] Ac proinde quadratum rectæ B*I*, æquale quadratis rectarum B *K*, *KI*. *I*gitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri *B I*, vt in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum *B*C*G*, circumſcribentis, & *K*L. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris *B*K, *KI*, deſcriptorum. *A*blato ergo quadrato diametri cubi KL, ([b] quod triplum eſt quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri *I*coſaedri *B*E; remanet quadratū diametri circuli triangulū B*CG*, circūſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris *I*coſaedri BC. Deſcribatur enim ex centro *K*, circa triangulū æquilaterū BC*G*, circulus, extenſaq; B*K*, vſque ad M, quæ ſecet C G, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur *B*N, per centrū *K*, ducta perpendicularis eſt ad *C*G, per ea, quæ oſtēdimus in ſchol. propoſ. 12. lib. 13. [c] erit recta BC, potētia ſeſquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita eſt *B* M, ad BC, quod *B*C, ſit media proportionalis inter B*M*, & BN, ex corol. propoſ. 8. lib. *6*. [d] cū angulus BCM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtēs. Recta igitur BM, potentia quoq; ſeſquitertia eſt

rectæ

[a] 47. primi

[b] 15. tertijdec.

[c] 12. quartidec.

[d] 31. tertij.

---

rectæ BC; *A*c propterea quadratū diametri B*M*, ſeſquitertiū eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HINC ſit, diametrū Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri B E, æquale eſſe quadratis diametri cubi K L, & diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmētum eſt rectę lineę extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in *D*odecaedro deſcripti [a] duplum potens lateris octaedri, coniungit biſarias ſectiones laterum oppoſitorum *D*odecaedri, vt manifeſtum eſt ex prop. 9. lib. 15. *E*ſt autem rectæ dictas ſectiones cōiungentis diuiſę extrema ac media ratione minus ſegmentū latus Dodecaedri, ex coroll. 4. prop. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quę duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi recta coniūgat biſarias ſectiones laterum *D*odecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. *I*taque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

[a] 14. tertijdecimi

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

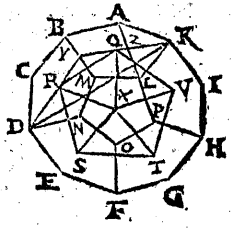
CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodē Icoſaedro deſcribātur, vt docuimus in ſcholio prop. vltimę lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidē circundantis: [a] poteſt autem diameter ſphæræ ſeſquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſim Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris Icoſaedri, vt in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circūdantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

[a] 13. tertijdecimi

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentū lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitū ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pētagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in cōmunem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY,



quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. conuenient in pūcto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita eſſe latus Dodecaedri IM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodē ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q; (ſunt enim RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipſi DK; Ideoque triangulū YRQ, triangulo YDK, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. [d] Vt autem

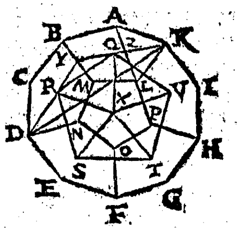
[a] 2. ſextidec.

[b] 2. ſexti

[c] 4. ſexti.

[d] 2. quartidec.

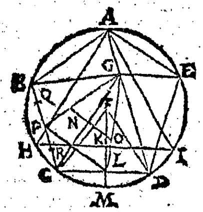
autem DK, tota ad totam KY, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minusq; eius ſegmentum a toto latere Icoſaedri ſublatum; a reliqua quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrũ F; & ſuper quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex iis, quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demonſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterũ inſcribatur AHI. Quoniã igitur arcus ABC, AED, ęquales ſunt, cũ quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ cõtineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cũ ſint tertiæ partes eiuſdẽ circũferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; ppeaque rectæ HI, CD, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib. 3. Ad quas ex cẽtro F, perpendicularis deducatur FKL,[a] ſecans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; coniunganturque rectæ FC, FD. Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. latera oppoſita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaq; recta GO, in punctum L, in quo diuiſa eſt CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt conſtat ex demouſtratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Denique BP, dimidium lateris Icoſaedri ſecetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori ſegmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquã QR, æqualẽ eſſe lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI, ſecetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione ſecta faciat maius ſegmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propoſitionis 2. lib. 14.) ſit autem maiori ſegmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demõſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. maius ſegmentum KM, ſectum quoque in L, a minori ſegmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ ſuiipſius ſegmento LM. Quoniam vero iuncta PL, eſt latus pentagoni æquilateri, & ęquianguli in pentagono ABCDE, deſcripti, idemque centrum F, habentis, ex ſcholio vltimo lib. 4. ideoque ſimilis illi; erunt triãgula FCD, FPL, (ſi recta duceretur FP,) ſimilia, per ſcholiũ propoſ. 20. lib. 6.[b] Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc eſt, ſibi æqualis FM, excedit rectã FL, minore ſegmento dimidij ipſius FM, nempe minore ſegmẽto rectæ KM, vt oſtendimus. Recta igitur CD, vel ſibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore ſegmento dimidij ipſius BC, nimirum minore ſegmento rectæ BP.

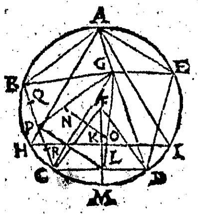


[a] 3. tertij.

[b] 4. ſexti

BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rurſus quia G P, G L, proportionaliter ſecantur in centris N,O; (quod GN,GO, duplæ ſint ipſarum NP,O L, per coroll.propoſ. 18.lib.14.) [a] parallelę erunt PL,NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo G P L, ſimile, ex coroll.propoſ. 4.lib.6. Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; &permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO. Eſt autem GP, ipſius GN, ſeſquialtera, per coroll.propoſ.18.lib. 14. Quare & p L, hoc eſt, ſibi æqualis C Q, ſeſquialtera erit ipſius NO; Ac proinde, cum CQ, ſeſquialtera quoq; ſit rectæ QR. (Nam qualium partiũ 3. eſt CQ, talium 1. eſt CR, per conctructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR, ipſi NO, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Si dimidium itaque lalateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit,&c. Quod erat demonſtrandum.

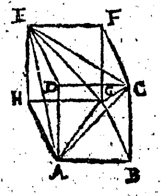
[a] 2. ſexti.



THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt.

IN cubo AF, deſcripta ſit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum eſſe. Cum enim inſcriptam pyramidem æquilaterã circumſtent quatuor pyramides fundatæ ſuper quatuor baſes ipſius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus nõ reſident quatuor anguli pyramidis æquilaterę inſcriptę; (Nã ſuper baſin ACE, fundatur pyramis ACED; ſuper baſin AEG, pyramis AEGH; ſuper baſin CEG, pyramis CEGF; & ſuper baſin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales ſunt, ex 10.defin.lib. 11: cum contineantur planis ſimilibus æqualibusq; & multitudine & magnitudine. Quælibet.n. cõſtat tribus æqualibus & ſimilibus triangulis, dimidiis ſcilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inſcriptę.) Sit autẽ cubus cuiuslibet harum pyramidum ſextuplus; (Nã exempli cauſa, pyramis ABCG, baſim habens ABC, dimidium baſis cubi BD, altitudinẽ vero eandem, quã cubus, rectã videlicet BG, tertia pars eſt, per coroll. 1.propoſ.7.lib.12. priſmatis eandem baſin, & altitudinẽ habentis. [a] Cum igitur cubus duplus ſit eiuſmodi priſmatis, quod & baſis cubi dupla ſit baſis priſmatis; manifeſtũ eſt pyramidem ABCG, ſextã partem eſſe cubi, proptereaq; cubum pyramidis illius eſſe ſextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumſtantes, quatuor eſſe ſextas partes, id eſt, duas tertias partes cubi.; Ac proindẽ reliquã pyramidẽ æquilaterã ACEG, cubo inſcriptã eiuſdem cubi tertiam eſſe partẽ. Cubus igitur ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. Quod erat demonſtrandum.



[a] 32. vnde.

ALITER. Cum cubus, & in eo deſcripta pyramis eadem ſphæra comprehendantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. [b] Cubus vero triplus ſit pyramidis in eadem ſphæra deſcriptæ, vt demonſtratum eſt; perſpicue colligitur, cubũ triplũ eſſe ſibi inſcriptæ pyramidis, qñquidem hæc in eadẽ ſphęra, in qua cubus, continetur.

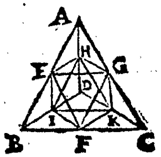
[b] 32. quartidec.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptũ ſit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidẽ octaedri eſſe duplam. Cum enim octaedrũ circumſtent quatuor pyramides pyramidi ABCD, ſimiles, vt prop.3.lib.12. demonſtratum eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales ſunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ

(quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſq; numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilaterę ABCD, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.)[a] Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cum octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidũ, triplicata, vt in his numeris 1.2.4.8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.



[a] 8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ. 3. lib. 15.[b] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus,[c] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

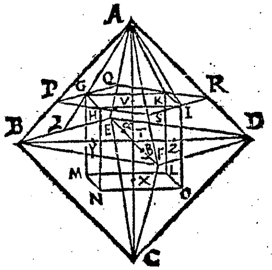
[b] 20. ſextidec.

[c] 21. ſextidec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.

IN octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit GHIKLMNO, angulos ſuos ſtatuens in centris baſiũ octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterũ. Aſſumpta n. pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor baſium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum conſtituẽtes PQRS, vt in ꝓpoſ. 4. lib. 15. eſt demonſtratum;[a] quod quidẽ parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis exiſtens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi GI, MO, in punctis V, X, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. Eſt autem V, centrum quadrati PQRS; ([b]cum. n. plana BEDF, PQRS, parallela ſecẽt rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS.[c] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP,

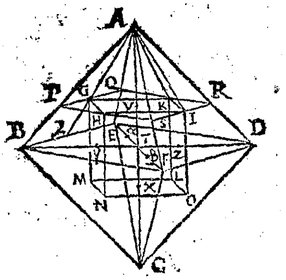


[a] 15. vnde.

[b] 17. vnde.

[c] 47. primi

VQ, propterea; & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur.n. latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demõſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento cõcludemus X, centrũ eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire.



Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14.[a] Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX; nec non VT, XT. Recta igitur VX, cõiungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum cõnectentes ſe ſe bifariã ſecẽt in cẽtro. Iã vero, qm̃ VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla aũt fuit & AV, eiuſdẽ VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nẽpe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cum vtriuſq; eadẽ ſit baſis GI, & altitudines ęquales AV, VX: [b] Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula

[a] 17. vnde.

[b] 6. duode.

huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam;[a] Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterũ, quod & recta Aγ,[b] proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidẽ PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27 conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionẽ habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, taliũ 12. eſſe cubum GO, iam demonſtratum eſt. (Nam nume 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2 quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. Quod erat oſtendendum.

[a] 8. duodec.

[b] 2. ſexti

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum eſt octaedri, atq; cubi ſibi inſcripti. oſtendimus enim T, vtriuſque eſſe centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. [c] Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram, qualem videlicet demonſtrauimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum.

[c] 11. ſextidec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

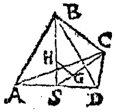
[a] 23. ſextidec.
[b] 20. ſextidec.

QVONIAM vt oſtendimus ad finẽ lib. 15. cubus, ſibique inſcripta pyramis in eodem octaedro deſcribuntur; [a] Eſt autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſquialterum; & cubus ſibi, ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplã ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quã 27. ad 2. hoc eſt. tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi nõcupla eſt.

IN pyramide ABDC, cubus intelligatur deſcriptus. Dico pyramidem cubi eſſe nõcuplam. Aſſumantur enim G, H, cẽtra duarum baſium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Cõnexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ ſint rectarum HS, GS, ex coroll. propoſ.



[a] 2. ſexti
[b] 4. ſexti.
[c] 18. quartidec.

18. lib. 14. ac proinde proportionaliter ſecentur BS, CS, [a] parallelæ erunt BC, HG, & per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo BCS, ſimile. [b] Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutãdo, vt BC, ad HG, ita CS, ad GS: [c] Eſt autem CS, ipſius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipſius HG. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi, vt in propoſ. 1. lib. 15. demonſtratum eſt; Recta vero connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentiũ diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, baſium ACD, ABD, cõmune latus AD, habẽtium diameter fuit baſis GNHQ, cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter baſis cubi pyramidem ABDC, circumſcribentis; GH, vero diameter baſis cubi in eadẽ pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Eſt enim vt diameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quod proportio vtraque ſit potentia dupla: Permutãdo ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter baſis cubi circumſcripti ad GH, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At vero cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi ABDC, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [e] cum cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

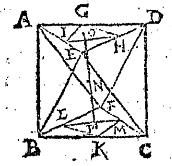
[d] 33. unde.
[e] 20. ſextidec.

COROLLARIVM.

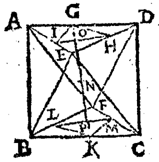
IGITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionē habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ. 33. lib. 11. in demonſtratione huius propoſitionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptũ Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.



IN octaedro ABCD*EF*, concipiatur deſcriptũ Icoſaedrum. *D*ico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes *I*coſaedri. Cũ enim vt ex demonſtra*tis in* propoſ. *16*. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur; ſint duæ baſes *I*coſaedri GH*I*, *K*LM, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A*D*E, BCF; atque ex N, cētro octaedri, nec non & Icoſaedri (idem enim vtriuſque eſt centrum. per coroll. 3. propoſ. *16*. lib. 15.) ad baſim A*D*E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, triãguli A*D*E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1 prop. 10. lib. 1*4*. quod quidē O, centrum quoque eſt trianguli *G*HI, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cum ergo plana oppoſita A D E, BCF, parallela ſint, ex corollario *4*. propoſitionis *14*. lib. *1*3. Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſitionis *1*4. lib. 11. ad planum BCF, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. *Q*uare OP, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. *Q*uia vero octaedrum in octo pyramides, duc*tis* rec*tis* ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; *I*coſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis *N* O; *E*ſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A*DE*, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero priſma, cuius eadem baſis ADE, altitudo autem O P, dupla altitudinis ON, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem ADE, altitudo vero ON, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. *1*2. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis ADE, & altitudo OP, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim ADE, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli ADE, altitudo vero eadem O P. *H*oc enim priſma tertia pars eſt priſmat*is* ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P; cū per ea, quæ docuimus ad prop. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis ADE, & altitudo OP, alterius autem baſis tertia pars baſis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia ſunt octaedro A B C *D* E F. *N*on ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis G H *I*, altitudo vero OP, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: proptereaque triplum huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis G H *I*, altitudo autem eadem OP, æquales eſſe *1*8. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiā partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem G H I, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma ſcilicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI, altitudo vero eadem OP; Atq; idcirco duo priſmata, quorum vnius baſis tripla ſit trianguli GHI; altitudo autem O P, alterius vero baſis tertia pars baſis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icoſaedro in dicto octaedro deſcripto. Iam vero, cum duo illa priſmata, octaedro æqualia, ad duo hæc priſmata, Icoſaedro æqualia, ſint, per ea, quæ oſtẽdimus ad propoſ. 7. lib. 12. vt baſes priſmatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes, (cum vnius baſis ſit A D E, nempe tres tertiæ partes ipſius A D E, complectens, alterius vero baſis tertia pars ipſius ADE,) ad baſes priſmatum Icoſaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum vnius baſis tripla ſit triãguli GHI, nimirum nouẽ tertias partes ipſius GHI, cõtinens, alterius vero baſis tertia pars ipſius GHI,) Sint aũt, vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decẽ partes tertias trianguli G H I; [a] ita duæ tertiæ partes ipſius ADE, nẽpe dimidium quatuor tertiarũ, ad quinq; tertias partes ipſius GHI, hoc eſt, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipſius ADE, ad quinque tertias partes ipſius G H I, ita quoque ſint, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. ſex tertiæ partes ipſius ADE, (hoc eſt, duæ baſes octaedri triplum duarum tertiarum vnius baſis conſtituentes, cum ſex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipſius G H I; (id eſt, ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum vnius baſis complectentes, cum quindecim tertias complectantur,) Erunt quoque duo illa priſmata, octaedro æqualia, hoc eſt, ipſummet octaedrũ, ad duo hæc priſmata Icoſaedro æqualia, nempe ad ipſummet Icoſaedrum, vt duę baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quocirca octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum, proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.



[a] 15. quinti

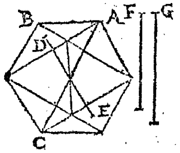
Quod erat demonſtrandum.

THE-

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphęra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat cẽtra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectã DE. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrũ in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſiũ oppoſitarum; Erit DE, diameter dodecaedri in Icoſaedro ABC, deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidẽtes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri AC, hoc eſt, in eadẽ ſphæra, in qua Icoſaedrum ABC, deſcripto, cum vtriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra Icoſaedrum videlicet, ABC, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icoſaedri ABC, ad tertiã, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, ſibi inſcriptũ,



compo-

componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadẽ ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icoſaedro ABC, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem ſphæra comprehẽſum, ſit vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi: ([a] Nã Dodecaedrum diametri AC, ad Icoſaedrũ ABC, eiuſdẽ diametri eſt, vt G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum A B C, ad Dodecaedrũ diametri AC, vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiuſdẽ diametri AC, ad Dodecaedrũ diametri DE, in Icoſaedro videlicet ABC, deſcriptũ, proportionẽ habeat triplicatã diametri AC, ad diametrũ DE, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarũ cõiungentem, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionẽ Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptũ Dodecaedrũ diametri DE, cõponi quoq; ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectã DE. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionẽ habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

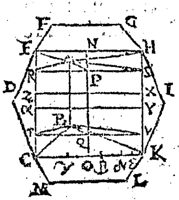
[a] 11. quarti dec.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis a quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

QVO-

QVONIAM ex demonſtratis prop. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtẽdũt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientiũ; ſint huiuſmodi pẽtagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, A H I K B, ſecundum latus idem commune A B, alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E C K H, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribẽtis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, [a] triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, anguloſque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pẽtagona ABCDE, ABKIH, per hypoteſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, [b] ęqualia exiſtant; ęqualia erunt & reliqua trapezia A B C E, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, p 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Sectis n. lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quã cadunt perpendiculares AP, BQ, demiſſæ in planum EK, vt conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN,

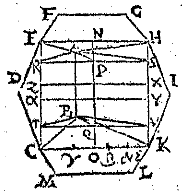


[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

VX,

VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius ſegmentũ lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadẽ propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT, SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atque adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cũ & earũ baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, ęquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR. [a] Quoniam autẽ AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cum cõiungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [b] parallela erunt plana triangulorũ ARS, BTV, atquę adeo inter ſe æqualia, ex coroll. prop. 8. lib. 1. cum latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrãmis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione,



[a] 33. primi

[b] 15. vnde.

IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes cõtineat VY, tertia vero pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; [c] vtriuſque vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta; [d] quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadẽ QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, vt demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item eiuſdem priſmatis, cuius baſis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VX, duas tertias partes cõtinet priſma, cuius baſis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, ex ſcholio propoſ. 25. lib. 11. [a] quod & baſis TY, duas partes tertias cõplectatur baſis TX. Igitur & priſma, cuius baſis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, ęquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc priſma appoſitum priſmati ABTVSR, efficiet priſma æquale ſolido CBKHAE, habens baſin rectangulum cõtentum ſub latere cubi TV, & ſub recta compoſita ex VY, duas tertias partes minoris ſegmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore ſegmento, ideoq; a baſe cubi deficientem rectangulo αX, contento ſub latere cubi αY, & ſub XY, tertia parte minoris ſegmenti VX. Non diſsimili ratione inueſtigabimus alia ſimilia quinque priſmata æqualia & proxime dicto priſmati, & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtitutis. Sex igitur huiuſmodi priſmata ęqualia erunt ſex illis ſolidis, exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quælibet priſmata illiuſmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadẽ altitudine QB, quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, & ſuper baſes a baſe cubi deficientes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis a baſe cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo vero æqualis eſt tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc eſt, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris ſegmẽti lateris cubi, ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Diuidatur

[c] 6. duode.

[d] 1. ſexti.

[a] 1. ſexti.

uidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque Cβ, maius ſegmentum, & βK, minus biſariã in γ, δ; atque ex βK, abſcindatur βε, æqualis ipſi βγ, ſeu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars maioris ſegmenti Cβ, æqualis ſit ipſi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Poteſt autem ex minori ſegmento βK, abſcindi recta æqualis ipſi Cγ, dimidio maioris ſegmenti; quia βK, maior eſt, quam dimidium maioris ſegmenti Cβ. Cũ enim ſit, vt CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; ſit autẽ CK, minor, quam dupla ipſius Cβ, quod Cβ, ſit ipſius maius ſegmẽtum; erit quoque Cβ, minor, quã dupla ipſius βK, hoc eſt, erit βK, maior, quam dimidium ipſius Cβ. Quoniã igitur eſt, vt tota CK, ad maius ſegmentũ Cβ, ita maius ſegmentum Cβ, ad minus βK;[a] erit quoq; vt CO, dimidia ipſius CK, ad Cγ, vel βε, dimidiã ipſius Cβ, ita Cγ, vel βε, ad βδ, dimidiã ipſius βK; Ac proinde ſi CO, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum Cγ, vel βε, & minus βδ. Quare & βδ, minus ſegmentum ſecabit βε, maius ſegmẽtum extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad prop. 5. lib. 13. eritq; maius ſegmentum βδ, minus autẽ δε; Ac propterea rurſus δε, minus ſegmẽtum ſecabit rectã δK, maiori ſegmẽto βδ, æqualẽ, extrema ac media ratione, minuſq; ſegmẽtum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi CK, minore ſegmẽto εK, rectæ δK, vel ſibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmẽtũ minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo dodecaedrũ excedit ſibi inſcriptum cubum a baſe cubi deficere rectãgulo cõtento ſub latere cubi, tertiaq; parte minoris ſegmẽti eiuſdẽ lateris cubi; altitudinẽ vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrũ excedit cubum ſibi inſcriptũ parallelepipedo, &c. Quod erat demõſtrãdum.

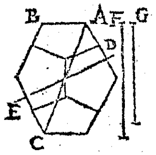
[a] 15. quinti

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentũ exiſtit; Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubũ a Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt; baſin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius paralellepipedum, compoſitum erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonſtratnm eſt.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaędri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaëdri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.



IN Dodecaedro ABC, diameter ſit AC, & recta coniungens centra baſium oppoſitarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icoſaedri in eadẽ ſphæra cum cubo deſcripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaëdri. Cum enim anguli Icoſaëdri in Dodecaedro deſcripti reponantur in centris baſium Dodecaedri, atque adeo anguli oppoſiti in cẽtris baſium oppoſitarum; erit recta DE, centra baſium Dodecaedri oppoſitarum connectens, diameter Icoſaedri inſcripti; Ac propterea Dodecaëdrum, cuius diameter DE, in eadem ſphæra cũ Icoſaedro intra Dodecaedrũ ABC, collocato deſcribetur, cum eandem habeāt diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icoſaedro eiuſdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, deſcripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demõſtrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, ſecundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, deſcripti ſecundę magnitudinis ad Icoſaedrum in Dodecaedro ABC, deſcriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll propoſ. 17. lib. 12.[a] Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icoſaedrum eiuſdẽ diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icoſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cuius ſcilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE. rectam videlicet centra oppoſitarum Dedecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi, ad G, latus Icoſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaque ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 15. quarti decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes cõtinet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti ęqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmẽti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

QVONIAM ſi in Dodecaedro intra Pyramidem deſcripto cubus deſcribatur, hic idem cubus in eadē pyramide eſt deſcriptus, vt ad finē lib. 15. tradidimus; Cubus autē pyramidis, in qua deſcribitur, nona pars eſt, [a] cū pyramis cubi ſibi inſcripti ſit noncupla. Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, ſeu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi ſibi inſcripti duplum ſit, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta eſt in verbis propoſitionis huius; non obſcure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inſcriptum duas nonas partes continere ipſius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

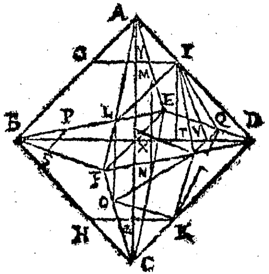
[a] 25. ſextidec.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri extrema ac media ratione ſectæ.

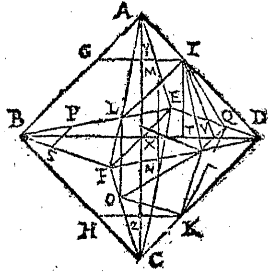
OCTAEDRVM, cui inſcriptum eſt Icoſaedrū, ſit ABCDEF, repetita figura prop. 16. lib. 15. vbi demonſtratum eſt, viginti triangula Icoſaedrū inſcriptū cōponentia eſſe IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo poſtrema octo baſibus octaedri ſunt impoſita, ſecantia videlicet

omnia eius latera extrema ac media ratione; Itē rectam IT, perpendicularē ad BD, æqualē eſſe maiori ſegmēto XY, ſemidiametri AX. Dico octaedrū ABCDEF, ſuperare Icoſaedrū ſibi inſcriptū parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratū lateris Icoſaedri QR, altitudo vero IT, maius ſegmentū ſemidiametri AX. Cū n. in quatuor baſib⁹ octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulū ſolidū octaedri D, conſtituētibus poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebūt iuxta angulū ſolidū D, in eiſdē quatuor baſibus octaedri quatuor triāgula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus ſi accedant duo triāgula Icoſaedri, QIR, KQR, & cōe triangulū DQR, conſtituentur duæ pyramides ſuper cōem baſem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter ſe æquales, per coroll. prop. 5. lib. 12. cum earū altitudo ſit recta eadē IT, maius videlicet ſegmētū ſemidiametri octaedri. (Nā quemadmodum AX, ſecta eſt a recta GI, in Y, extrema ac media rōne, ita quoq; ſecta eſt CX, a recta HK, in Z. Quare ſi ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR; [a] erit ea ęqualis rectę ZX, maiori ſegmēto ſemidiametri CX hoc eſt, ipſi IT.) Quæ quidē pyramides extra Icoſaedrum in octaedro deſcriptū cōſiſtūt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinq; angulos octaedri conſtituentur binæ pyramides & inter ſe & dictis duabus æquales, extra Icoſaedrum prædictum: Ita vt octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus ęqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidiū eſt quadrati lateris DQ; (Cum DQ, DR, rectæ æquales ſint, minora ſcilicet ſegmenta laterum octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Priſma igitur, ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadra-



[a] 34. primi

tum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit priſmatis, cuius baſis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 7. lib. 12. Priſma autem, cuius baſis DQR, & altitudo IT, triplum exiſtens, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale eſt tribus pyramidibus earũ duodecim, quas circa Icoſaedrum conſiſtere diximus. Priſma ergo, vel parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque eſt trium illarũ pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidũ quadruplæ ſint omnes duodecim pyramides ſimul Icoſaedrum ambientes; Aequale quoq; erit priſma, ſeu parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icoſaedri, & altitudo IT, maius ſegmentum ſemidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc eſt, exceſſui octaedri ſupra Icoſaedrum ſibi inſcriptũ; Ac proinde octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.



COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplũ Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratũ lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens. Cum enim ex demõſtratis propoſ. 19. lib. 15. conſtet, ſi Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icoſaedrum imponatur, Icoſaedrum eidẽ Pyramidi eſſe inſcriptum; a octaedrum autem ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, nempe recta QR, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri, recta videlicet IT, ſeu YX: Fit, vt octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur, (a quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti octaedri) ſuperet idem Icoſaedrũ in octaedro, ideoque & in Pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata a nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

a 31. ſextidec.

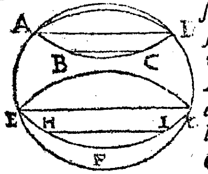
a 21. ſextidec.

DE QVINQVE CORPORVM *Regularium deſcriptione in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino.*

QVONIAM Euclides libro 13. quinq; corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde vero eadem a ſphæra comprehendi, noua demonſtratione confirmauit; nõ erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cũ eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam cõſtructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda ſunt, quorum aliqua etſi per elementa ſphærica Theodoſij demonſtrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere cenſeri poſſumus; quippe cum propoſitiones ſphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poſſint. In citandis autem Theodoſii propoſitionibus ſequemur ordinem noſtrorum commentariorum, quos in eadem elementa conſcripſimus. Hinc ergo initium ſumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, dataq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.



IN ſphæra ſint duo circuli paralleli ABCD, EFG; ſitq; primũ in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda ſit diameter parallela. Ducatur, vt in ſcholio prop. 18. lib. 11. docuimus, ꝑ diametrũ AD, planũ rectũ ad circulum ABCD, [a] faciens in ſphæræ ſuperficie circulũ AEGD. Quoniã igitur circulus AEGD, circulũ ABCD, bifariã, & ad angulos rectos ſecat, erit circulus AEGD, maximus, trãſibitq; per polos circuli ABCD, ex ſchol. ꝓpoſ. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG, [b] cum paralleli eoſdem polos habeant: [c] ideoq; eũ bifariã ſecabit. Cõmunis ergo ſectio EG, eius diameter erit: [d] quæ cum ſit ipſi AD, parallela, patet propoſitũ.

[a] 1.1. Theodoſii.
[b] 1.2. Theodoſii.
[c] 15.1. Theodoſii.
[d] 16. vnde.

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, nõ ſit eius diameter, cui ducẽda ſit diameter parallela in circulo EFG. [e] Ducatur ipſi BC, ꝑ centrũ circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime oſtendimus. Quoniam igitur vtraq; BC, EG, eidem AD, parallela eſt, ex conſtructione, [f] ipſæ quoq; BC, EG, inter ſe parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.

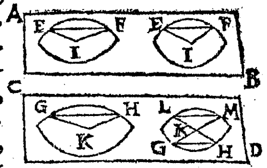
[e] 31. primi
[f] 9. vndec.

EADEM ratione rectæ BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, a diametro EG, diuerſa, quæ ipſi BC, æqualis ſit, ſi modo BC, maior non ſit diametro EF. Nam ſi in circulo EFG, ducatur ipſi BC, parallela HI, & æqualis, vt ad propoſ. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

LEMMA II.

SI in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ abſcindãt arcus ſimiles; erunt duæ rectæ coniungentes extrema

vnius rectæ cum cẽtro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectę cũ cẽtro cõiungunt.



IN planis parallelis AB, CD, deſcripti ſint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, primum parallelæ ſint, ad eaſdẽ partes centrorum I, K; auferantq; arcus ſimiles EF, GH, ac tandẽ iungãtur ad cẽtra rectæ EI, FI, GK, HK. Dico tã EI, GK, quam FI, HK, parallelas eſſe. Quoniam .n. arcus EF, GH, ſimiles ſunt, erunt anguli I, K, æquales, ex ſcholio prop. 22. lib. 3. [a] Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt. [b] Cum ergo tã illi, quã hi, ſint inter ſe æquales; erit tam angulus E, angulo G, quã angulus F, angulo H, æqualis. Quoniã igitur in planis parallelis rectæ EF, GH, parallelæ ſunt, & rectæ EI, GK, ad eaſdẽ partes plani per EF, GH, ducti efficiunt cũ ipſis æquales angulos E, G: erunt ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 11. demonſtrauimus, EI, GK, parallelæ: Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.

[a] 32. primi
[b] 5. primi.

DEINDE ſint EF, GH, parallelæ, non ad eaſdẽ partes cẽtrorũ I, K. Dico tam EI, HK, quam FI, GK, eſſe parallelas. Productis enim GK, HK, iũgatur recta LM. Et quia latera GK, HK, lateribus LK, MK, ſunt æqualia, [c] anguloſque ad verticẽ K, æquales cõtinent; [d] erũt & baſes GH, LM, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M. [e] Igitur arcus GH, LM, æquales ſunt, [f] & rectæ GH, LM, inter ſe parallelæ: Ac ꝓinde cũ vtraq; EF, LM, ipſi GH, ſit parallela, [g] erunt & EF, LM, parallelæ inter ſe. Quia igitur EF, LM, parallelæ ſunt abſcindentes ad eaſdem partes centrorum arcus ſimiles EF, LM; (Nam cum arcus GH, ſit arcui EF, ſimilis, erit quoque arcus LM, qui arcui GH, æqualis eſt, eidem arcui EF, ſimilis.) erunt tam EI, LK, hoc eſt, EI, HK, quam FI, MK, hoc eſt, FI, GK, parallelæ Quod eſt propoſitum.

[c] 15. primi.
[d] 4. primi.
[e] 28. tertij.
[f] 27. primi.
[g] 9. vndec.

LEMMA III.

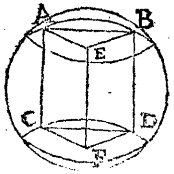
SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ &

æquales,ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelę ſunt,& ad plana circulorũ perpendiculares.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *in quibus ſint duæ rectæ æquales & parallelæ* AB,CD, *ad eaſdem partes centrorũ, quarum extrema iungantur ad eaſdem partes rectis* AC,BD. *Dico rectas* AC, BD, *æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ ſunt;* [a] *erunt* AC, BD. *in eodem cum ipſis plano. Quare cũ* AB, CD, *ſint etiã æquales;* [b] *æquales quoque erunt ac parallelæ* AC, BD, *quod eſt primum.*

[a] 7.vndec.

[b] 33.primi



EX cẽtris deinde E,F, *ductis rectis* EA,EB;FC,FD, *iunctaque recta* EF; *erunt tam* AE,CF, *quam* BE, DF, *parallelæ, ex 2.lemmate: Sunt autẽ & æquales ob circulorum æqualitatẽ.* [c] *Igitur &* AC,EF, *&* BD,EF, *parallelæ erunt, & æquales.* [d] *Quoniam vero circuli* AB, CD, *paralleli circa eoſdẽ polos ſunt,* [e] *recta per eorũ polos ducta tranſibit per eorundẽ centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorũdem recta erit. Quocirca recta* EF, *eorum cẽtra coniungens, per eorũ polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta* EF, *& recta per eorum polos extẽſa. quod eſt abſurdũ. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum cõmune* EF. [f] *Igitur* EF, *ad plana circulorum* AB, CD, *recta eſt:* [g] *Ac propterea & vtraque* AC, BD, *ipſi* EF, *parallela, ad eadem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.*

[c] 33.primi.
[d] 1.2.Theo.
[e] 10.1.Theodoſii.
[f] 10.1.Theodoſii.
8. vndec.

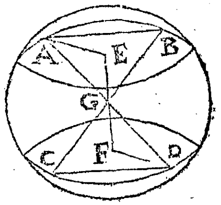
HÆC demonſtratio locũ etiam habet, quando parallelæ AB,CD, *ſunt circulorum diametri, ſed tunc* EA, EB,FC, FD, *erunt partes diametrorum, vt patet.*

LEMMA IIII.

SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & ęquales,in quibus ductę ſint duę rectę parallelę

& æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema pũcta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: Rectæ vero earundẽ parallelarum extrema pũcta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

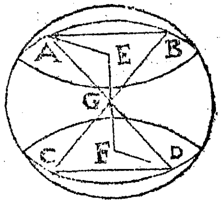
IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB,CD, *non ad & in iis duæ rectæ parallelæ & æquales* AB, CD, *quarum puncta extrema primum eaſdem partes centrorum, non ad eaſdem partes iungantur rectis* AD, BC. *Dico ctas* AD; BC, *in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæræ inter ſæ æquales. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ ſunt;* [a] *Erunt* AD,BC, *in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuo interſecabunt, vt in puncto* G: *quod dico eſſe cẽtrum ſphæræ. Connectantur.n. circulorum centra* E, F, *rectis* EA,EG;FD,FG.[b] *Et quia anguli* AGB, CGD, *ad verticem æquales ſunt:* [c] *Itẽ tam alterni anguli* BAD, CDA, *quã alterni* ABC,DCB; *æquiangula erũt triangula* ABG, CDG. [d] *Igitur erit vt* AB, *ad* BG, *ita* DC, *ad* CG: *Item vt* AB, *ad* AG, *ita* DC, *ad* DG. *Cum ergo* AB, CD, *ponantur æquales,* [e] *erunt quoque tam* BG, CG, *quam* AG, DG, *inter ſe æquales. Rurſus quia* AE, DF, *ſemidiametri circulorum æqualium æquales ſunt; ſunt autem ex 2.lemmate & parallelæ,* [f] *ideoque anguli alterni* EAD, FDA, *æquales; erunt duo latera* EA, AG, *duobus lateribus* FD,DG, *æqualia, angulosque comprehendent æquales.* [g] *Igitur & baſes* EG,FG, *& anguli* AGE, DGF, *æquales ſunt.*



[a] 7.vndec.
[b] 15.primi.
[c] 29.primi.
[d] 4.ſexti.
[e] 14.quinti.
[f] 29.primi.
4.primi.

a 7. undec.
b 2. undec.

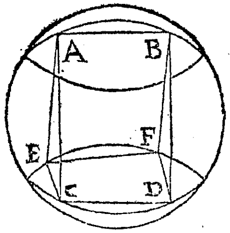
[a] *Et quia AD, in eodem plano eſt, in quo parallelæ AE, DF,* [b] *& EG, FG, in eodẽ plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum conſtitutæ, propter æquales angulos AGE, DGF, ut ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum ſphæræ trãſibit, ut in præcedenti lemmate demonſtrauimus,* [c] *perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales ſint oſtenſæ, erit G, centrũ ſphæræ,* [d] *propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter a centro ſphæræ abſunt; inæqualiter vero abeſſent, ſi centrum ſphæræ in recta EF, diceretur aliud punctũ quam G. Quocirca AD, BC, diametri ſphæræ ſunt, & inter ſe propterea æquales quod eſt primum.*



c 10.1. Theodoſii.
d 6.1. Theodoſii.

SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad eaſdem partes iungãtur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter ſe eſſe, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, eſſe rectos. Quod enim ſint parallelæ & æquales, [e] *manifeſtum eſt, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, ſint perpendiculares, ita oſtendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpẽdiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti ſunt, erunt ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, ſemicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, ſemicirculi erunt,* [f] *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales ſunt,* [g] *ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11.*

e 33. primi.



f 31. tertij.
g 9. undec.

---

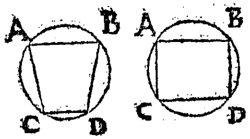
lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Rectæ igitur EF, perpendicularis ad utramq; EC, EA, & ad utramq; FD, FB, ut oſtendimus, [a] *perpẽdicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti:* [b] *ac propterea & CD, AB, ipſi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod eſt ſecundum.*

a 4. undec.
b 8. undec.

LEMMA V.

SI in ſphæra ſint duæ rectæ parallelę, rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt.: Et ſi parallelæ fuerint æquales ; coniungentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erunt, rectosque cum ipſis angulos conficient.

SINT in ſphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis AC, BD, Dico AC, BD, æquales eſſe. Quia enim parallelæ ſunt AB, CD; [c] *erũt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano,* [d] *fiat in ſphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ ſint AB, CD; erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales:* [e] *ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod ſi parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita ut quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo oppoſita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod eſt propoſitum.*



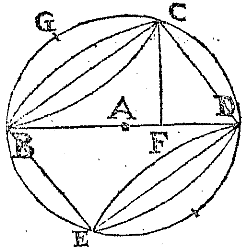
c 7. undec.
d 1.1. Theodoſii.
e 29. tertij.

LEMMA

LEMMA VI.

IN data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter ſphærę ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera.

SIT ſphæræ centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximũ BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta aũt BD, in F, vt BF, ipſis FD, dupla ſit; erit BD, taliũ partium 3, qualium 2. eſt BF; ac proinde BD, ipſius BF, ſeſquialtera eſt. Ducta quoq; FC, ad BD, perpẽdiculari, iungãtur rectæ BC, DC, ductaq; DE, ipſi BC, parallela, connectatur recta BE. [a] Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quam duo BED, CBE, duobus rectis æquales ſunt. [b] eſtq; tam BCD, quam BED, rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex ſcholio prop. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum eſt; [c] ideoque rectæ BC, DE, æquales ſunt. Diuiſo iam arcu BC, biſariam in G, erit quoque arcus EGD, diuiſus bifariã in G, quod ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales ſint. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circuli in ſuperficie ſphæræ deſcribantur tranſeuntes per C, D, ob æqualitatẽ tam arcuum GB, GC, quam GE, GD; [d] qui paralleli erunt, cum eoſdem habeant polos. [e] Et quia circulus maximus BCDE, per polos ſecat circulos BC, ED, biſariam; erũt BC, ED, diametri ipſorum, quæ cum æquales ſint oſtenſæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum ſphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, praportionẽ habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim ex coroll. propoſ. 8. lib 6. tres rectæ DB, BC, BF, continue proportionales ſunt; erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum



29. primi

[b] 31. tertij.

[c] 34 primi.

[d] 2. 2. Theodoſii.

[e] 15. 1. Theodoſii.

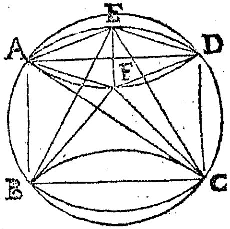
dratum ex BD, ad quadratum ex BC: Eſt autẽ BD, ipſius BF, ſeſquialtera, vt oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeo & quadrati ex DE, ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter ſphæræ BD, vtriuſque diametri BC, DE, potentia ſeſquialtera eſt. quod eſt propoſitum.

HIS demonſtratis, hoc modo in ſphæra data deſcribemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data ſphæra Pyramidem deſcribere.

DESCRIBANTVR in data ſphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorũ potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, [a] qui eos ad angulos rectos, ac biſariam ſecabit, ac proinde cum eis cõmunes ſectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, ſecans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, eſſe pyramidẽ, hoc eſt, quatuor triãgula EBC, BCF, CFE, EFB, eſſe æquilatera & æqualia. Iũctis .n. rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter ſphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ez 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, deſcriptum, vt conſtat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ AC, ſeſquialterum eſt quadrati ex AD, diametro circuli; ſi ponatur quadratũ ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, [b] æquale ſit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde



[a] 15. 1. Theodoſii.

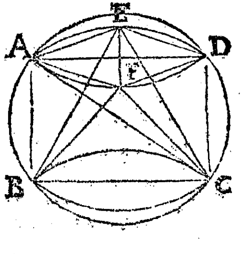
[b] 47. primi.

de quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit; Eſt autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex ſcholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex DC, DF: a quibus cum æquale ſit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; erit quadratũ ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, proptereaq; quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc eſt, ipſi BC, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoque BCF, triangulum eſt æquilaterum.

a 47. primi.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum eſt oſtenſum; eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: b quibus cum æquale ſit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo ſunt quadrata ex CE, AD, proptereaque recta CE, rectę AD, hoc eſt, rectis BC, EF, æqualis eſt, atq; adeo & recta CF, quę ipſi BC, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam eſt, & ipſi BCF, æquale, ob laterum æqualitatẽ. Non aliter demonſtrabimus, triangulum BEF, eſſe æquilaterum, & ipſis BCF, FCE, æquale. Ex quo ſequitur & BCE, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipſi BC, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cum eius anguli ſolidi E, B, C, F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant. quod eſt propoſitum.

b 47. primi



COROLLARIVM.

HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Nam latus pyramidis eſt æquale diametro AD, vt oſtendimus, & ex conſtructione diameter ſphæræ potentia eſt ſeſquialtera diametri AD.

PROBL.

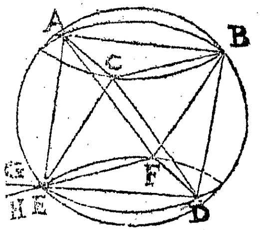
PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, ita vt ſphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera. a Deſcripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur per primum lemma, recta AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diuerſas partes centrorum: quæ latus etiam erit triãguli ęquilateri in circulo DEF, deſcripti, ob circulorum ęqualitatem. Completo ergo triangulo ęquilatero DEF, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus triãguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex ſchol. propoſ. 10. lib. 11. Cum enim parallelę ſint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelę ſint AB, GE, & BC, EH, ad eaſdẽ partes plani per AB, GE, ducti; erunt quoque BC, HE, hoc eſt, BC, EF, parallelæ ex illo ſcholio propoſ. 10. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipſi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ AB, DE, ęquales ſunt & parallelę ad diuerſas partes centrorũ, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, BE, (quas tamẽ confuſionis vitãdę gratia nõ duximus) diametri ſphęræ, & rectæ AE, BD, æquales etiã erũt, ac perpendiculares ad ipſas AB, DE. b Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, ęquale erit: Poſito autem

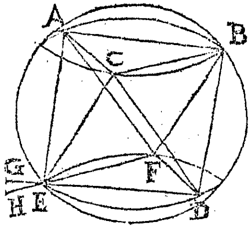
a 2. quarti.

b 47. primi



quadrato

quadrato ex diametro ſphæræ BE, 6. *quadratum ex* DE, *eſt* 3. (*Nam cum per conſtructionem diameter ſphæræ potentia ſit ſeſquialtera diametri circuli* DEF: *poſito quadrato ex* BE, 6. *erit quadratum diametri circuli* DEF, 4. *At poſito quadrato diametri circuli* DEF, 4. *quadratum lateris trianguli æquilateri* DE, *eſt* 3. *quod ex coroll.* 1. *prop.* 12. *lib.* 13. *diameter circuli potentia ſit ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri.*) *Igitur & quadratum ex* BD, *eſt* 3. *ac proinde quadrata ex* DE, BD, *æqualia ſunt, & rectæ ipſæ* DE, BD, *æquales. Eſt autem* DE, *ipſi* AB, *per conſtructionem, &* BD, *ipſi* AE, *per* 4. *lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ* AB, BD, DE, EA, *æquales erunt, conſtituentq; quadratum* ABDE, *cum anguli ad* A, B, D, E, *recti ſint ex eodem* 4. *lemmate.*



RVRSVS quia BC, EF, *parallelæ ſunt & æquales ad diuerſas partes centrorum; erũt quoque iunctæ rectæ* BE, CF, *non ad eaſdem partes, diametri ſphæræ, ex* 4. *lemmate, & rectæ* BF, CE, *æquales inter ſe, atque ad* BC, EF, *perpendiculares, eritque rurſus, vt prius, quadratum* BCEF. *Non aliter oſtendemus,* ACDF, *quadratum eſſe; cum iunctæ rectæ* AD, CF, *ſint quoque ſphæræ diametri ex* 4. *lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata* AD, BE, CF, *conſtructa ſint ſuper latera æqualia* AB, BC, CA, *nimirum ſuper latera trianguli æquilateri, cũ* AB, *latus ſit quadrati* AD; *&* BC, *quadrati* BE; *&* CA, *quadrati* CF; *erũt omnia triãgula octo* ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera, & inter ſe æqualia. Octaedrum ergo eſt* AD, *ex defin.* 27. *lib.* 11. *& in data ſphæra deſcriptum, cum eius anguli ſolidi,* A, B, D, E, C, F, *ſphæræ ſuperficiem attingant. quod eſt propoſitum.*

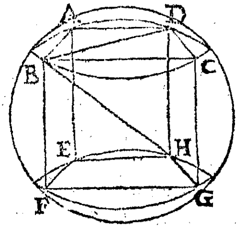
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris octaedri in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratũ ex BE, *diametro ſphæræ duplum eſſe quadrati ex* DE, *latere octaedri.*

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data ſphæra cubum deſcribere.

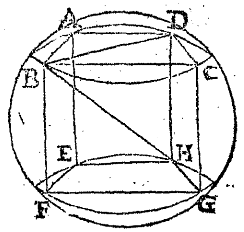
DESCRIBANTVR ex lemmate 6. *in data ſphæra duo circuli æquales ac paralleli* ABCD, EFGH, *quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ.* [a] *Deſcripto autem quadrato* ABCD, *in circulo* ABCD, *ducatur per* 1. *lẽma recta* AD, *in circulo* EFGH, *parallela* EH, *& æqualis ex eadẽ parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo* EFGH, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato* EFGH, *erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus quadrati* ABCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterũ* AD, EH, *æqualitatem; parallela vero ex ſcholio propoſ.* 10. *lib.* 11. *Nã quia parallelæ ſunt* AD, EH, *ſuntq; anguli æquales* ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* DC, HG, *parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per* AD, EH, *ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ* AE, BF, CG, DH, *quæ per lemma* 3. *ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico* AG, *eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera* ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, *eſſe quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis* BH, BD, *erit ex lemmate* 4. BH, *diameter ſphæræ; at* BD, *diameter circuli* ABCD, *quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur per conſtructionem, quadratum ex* BH, *ſeſquialterum eſt quadrati ex* BD; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC, *duplum, ex ſcholio propoſ.* 47. *lib.* 1. *ſi ſtatuatur quadratum ex* BH, 3. *erit qua-*



[a] 6. quarti.

dratum ex B D, 2. & quadratum ex DC, 1. atq; adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplum erit. Rurſus quia quadratum ex B H, eſt 3. & quadratum ex B D, 2. [a] eſtque quadratum ex BH, æquale quadratis ex B D, DH, quod angulus B D H, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplũ eſt quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratũ ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo ſunt quadrata ex D C, D H, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. [b] Cum ergo oppoſitis lateribus GH, CG, æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata oſtendentur: Sed & AC, EG, quadrata ſunt ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data ſphæra deſcriptus, cum eius anguli ſolidi A, B, C, D, E, F, G, H, ſuperficiem ſphæræ contingant. quod eſt propoſitum.

[a] 47. primi.



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ B H, triplum eſſe quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundẽ circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphęra deſcriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ ęqualis eſt circulo ABC, figurę antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſitio. 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.

REPERIATVR [a] recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cũ pẽtagono deſcripti: Fiatq; ex coroll. prop. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdã lineæ, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrum, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data, [b] accommodetur in eo recta, quæ inuentæ ſemidiametri ſit dupla, cum hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam ſi per eam rectã planum ducatur rectũ ad circulum illũ maximum, [c] faciet id circulũ ABC, in ſphæra, cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde [d] inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat datæ ſphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiatq; vt 3. ad 1. ita per coroll. prop. 6. lib. 10. quadratũ rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo ABC, parallelus: quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentę, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quę ad prop. 1. lib. 4. demõſtrauimus, & per eam rectã planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectũ, ex ſcholio propoſ. 18. lib. 11. Nam per idem ſcholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelũ, [e] facietq; in ſphęra circulũ, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ ęqualis eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphęræ alij duo æquales ac paralleli deſcribantur GHI, KLM: quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectę, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. [f] Deſcripto autem in circulo D E F, triangulo æquilatero D E F, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, quę æqualis ſit vni lateri trianguli æquilateri in

[a] 12. ſexti

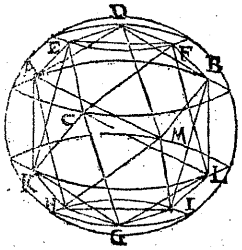
[b] 1. quarti.

[c] 1. 1. Theodoſii.

[d] 12. ſexti

[e] 1. 1. Theodoſii.

[f] 2. quarti.



circulo ABC, deſcripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipſi EF, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, deſcripti. Completis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipſi DF; at BC, MK, GI, ipſi DE: quod probabitur ex ſcholio propoſ. 10. lib. 11. vt in problemate ſecundo oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confuſionem pareret, ſed tantum laterum extrema puncta notauimus. Poſtremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF: ex C, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim pũcto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico DG, eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triãgula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur, oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16. lib. 13.) ſuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulos in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur in ſphæra deſcriptũ Icoſaedrũ DG, duodecim angulos ſtatuẽs in pũctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinq; rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales ſunt, cũ ſint latera triangulorũ æquilaterorũ æqualiũ; ſi ex polo D, per E, in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in

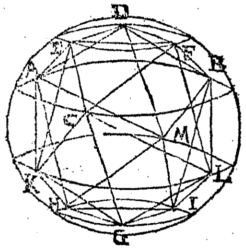
vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera ſint æqualia, vtpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt a nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinq; latera Icoſaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinq; Icoſaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinq; latera Icoſaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icoſaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta AB, ipſi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipſi DF, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipſi DE, in pẽtagono DECLB.[a] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela ſunt, [b] faciuntque circulos parallelos in ſphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipſi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipſi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipſi GH, in pentagono LBMHG: Ac proptera circuli in ſphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipſi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipſi EF, in pentagono GLFEK, [c] Igitur EF, HI, cum ſint eidem iunctæ AB, vel KL, parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt. Eademque ratione DE, GI, cum ſint eidem iunctæ BC, vel KM, parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; proptereaque plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter ſe

[a] 15. vnde.

[b] 1.1. Theodoſii.

[c] 8. duodec.

ſunt; & tam circuli DEF, GHI, inter ſe ęquales, ob triangula æquilatera in illis deſcripta æqualia, q̃ circuli ABC, KLM, inter ſe etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipſis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, conſtituuntur: quippe cum latera hæc ſint rectæ ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.



QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad eaſdem partes extrema K, B parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphęræ diameter eſt, & angulus BAK, rectus, ex 4. lemmate, quod KA, connectat ad eaſdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; [a] erit quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rurſus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, ſubtendit: Vt autem recta angulum pentagoni ſubtendens ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad EF, vel AK, ipſi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco [b] cum latus pentagoni poſſit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum; erit diameter ſphærę KB, (quæ ambas AB, AK, poteſt, vt oſtendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus eſt hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare ſphæræ diameter KB, ad iunctã AB, proportionẽ habet, quã pẽtagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eã, quã latus pẽtagoni habet ad latus decagoni: [c] Ac proinde cũ tã AB, latus triãguli ęquilateri in circulo ABC, quã EF, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum ſit ſemidiametri ſui circuli; erũt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales ſunt, illi, quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri initio inuentæ, minorem eſſe diametro ſphæræ, vt ſupra diximus.

[a] 47. primi.

[b] 10. tertijdec.

[c] 12. tertijdec.

HIS demonſtratis, facili negotio concludemus, ſolidam figuram a nobis deſcriptam DG, eſſe Icoſaedrum, cum Icoſaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis triangulum DEF, omnes eius anguli ſolidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus ilillius Icoſaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, ſphæræ diametrum ad latus Icoſaedri in ea deſcripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum: adeo vt ſi diameter ſphęrę fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icoſaedri ſit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam deſcripto Icoſaedro DG, in ſphæra, oſtenſum eſt eſſe diametrum ſphęrę KB, ad EF, latus Icoſaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icoſaedri maius eſſe ſemidiametro ſphęræ: quemadmodum & latus decagoni maius eſt ſemiſſe lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Iſoſceles conſtituant: [a] ac propterea duo latera decagoni maiora ſint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

[a] 20. primi.

COROLLARIVM II.

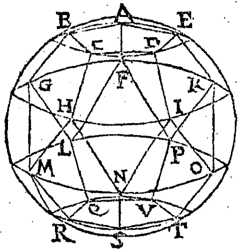
COLLIGITVR etiam ex demonſtratis, diametrum ſphærę eſſe potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, deſcripti. Quoniam enim eſt, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, deſcriptorum, ita diameter ſphęrę KB, ad iunctam AB, ex conſtructione; erit permutando, vt latus pẽtagoni ad diametrum ſphęrę, ita latus hexagoni ad iunctam AB: [b] Eſt autem latus hexagoni in circulo ABC, hoc eſt, ſemidiameter potentia ſubtriplum rectę iunctæ AB.

[b] 12. tertijdec.

AB, quod AB, ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo ABC, deſcripti.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.



DESCRIBANTVR in data ſphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propoſ. ABCDE, FG-FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita vt ſemidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, ſint potentia ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; ſemidiametri vero circulorum FGHIK, LMNOP, potentia ſint ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri CD, ad eaſdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis lateri pentagoni eiuſdem circuli, ex 1. lemmate: Rectę autem HI, ad diuerſas partes centrorum agatur eodem modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad eaſdem centrorum partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autem pentagonis in hiſce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confuſionem vitaremus, non duximus, ſed eorum tantum extrema puncta notauimus.) erunt ſingula latera eorum ſingulis lateribus pentagoni ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallela ductę ſunt: quod demonſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erūt ipſi BC, &c. Poſtremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico AS, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera eſſe, æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrādum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſuos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.

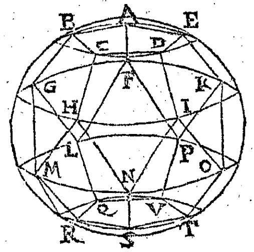
SIT ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos ſtatuēs in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtēdens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipſi AE, in pentagono AEKPF, & FG, ipſi AB, in pentagono ABGLF; & ſic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FG, parallelæ ſunt;[a] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelū erit planum per FG, GH, ductum; quod hæ rectæ rectis AB, BC, ſint parallelæ. Igitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter ſe parallela ſunt, cum eidē plano pentagoni ABCDE, ſint parallela; atque adeo, ex eodem ſcholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter oſtendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in ſphæra[b] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos

parallelos

[a] 15. vnde.

[b] 1. 1. Theodoſii.

Parallelos efficient QRSTV, LMNOP. Eruntq; tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter ſe æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL, [a] quæ omnes æquales ſunt, cum ſubtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.



DEINDE quia ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ ſunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [b] erunt quoque ipſæ iunctæ ND, MB. parallelæ: Sūt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus ſubtendant. [c] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quod vtraq; lateri DI, ſit parallela. [d] Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus eſt, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ ſunt oſtenſæ. Non ſecus oſtendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli ſunt.

RVRSVS quoniam iunctæ rectæ EF, OV, cum ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æquidiſtent, [e] parallelæ ſunt; nec non & inter ſe æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus ſubtendant, [f] erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano eſt, [g] cum EF, OV, in eodem ſint plano cum parallelis EO, FV. Eſt autem & in circulo, [h] propterea quod planum, in quo exiſtit, in ſphæra circulum efficit. Igitur ex ijs, quæ ad propoſ. 31. lib. 3. demonſtrauimus, cum in eo quadrilatero oppoſita latera æqualia ſint, quadrilaterum rectangulum eſt EFVO; ac proinde cum omnia latera æqualia ſint, ſubtendētia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum poteſt lateris FE, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. hoc eſt, rectæ iunctæ FG, quod æquales ſint FG, FE, ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoque qualium partium 1. ſtatuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata ſimul earundem partium 3. Quibus [a] cum æquale ſit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter ſphæræ eſt; (Nam cū æquales ſint iunctæ FG, ON, ſubtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ ſint, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter ſphæræ.) erit quoque quadratum diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt quadratum rectæ FG, hoc eſt, quadratum diametri ſphærę quadrati rectæ FG, triplum erit. [b] Eſt autem & quadratum trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris triãguli ad quadratum lateris hexagoni; [c] atque adeo vt diameter ſphæræ ad rectã FG, ita latus triãguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni eiuſdem circuli ad latus trianguli, quod FG, ſit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque vt diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

a 4. primi.
b 9. vndec.
c 33. primi
d 15. vndec.
e 9. vndec.
f 33. primi
g 7. vndec.
h 1. 1. Theodoſii.

Diam. ſphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, vt iuncta recta FG, ſubtendens angulum pētagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pētagoni in circulo ABCDE, ita latus triãguli in circulo FGHIK, ad latus triãguli in circulo ABCDE; erit quoq; vt latus triãguli in circulo FGHIK, ad latus triãguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni ĩ eodẽ circulo

cum

a 47. primi
b 12. tertiidec.
c 22. ſexti

cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, *ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodẽ circulo cũ pẽtagono deſcripti, vt primè demõſtratũ eſt. Igitur ex æquo erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo* ABCDE, *ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodẽ circulo cũ pentagono deſcripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque, vt diameter ſphæræ ad* EF, *latus trianguli in circulo* DEF, *ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterq; circulus* DEF, GHI, *figuræ antecedentis propoſ. vtrique circulo* ABCDE, QRSTV, *huius figuræ æqualis. Quare circuli* ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, *ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.*

Diam. ſphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

QVIBVS *demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram* AS, *a nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum* ABCDE, *omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.*

COROLLARIVM.

PERSPICVE *colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus* DEF, *figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo* ABCDE, *figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 5.*

MANIFESTVM *quoque eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.*

SCHO-

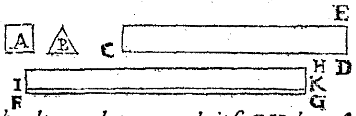
SCHOLIVM.

EX *his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facile etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademque ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cũ poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper a minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.*

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul.

HABEANT *quadratum* A, *& triangulum æquilaterum* B, *latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum* CE, *cuius vnum latus* CD, *octuplum ſit lateris quadrati* A, *& latus* DE, *lateri eiuſdem quadrati æquale: Eritque rectangulũ* CE, *octuplum quadrati* A, [a] *cum ſit, vt* CD, *ad latus quadrati* A, *ita rectãgulum* CE, *ad quadratum* A, *ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum* FH, *cuius vnum latus* FG, *decuplum ſit lateris trianguli* B, *& latus* GH, *æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſæ, hoc eſt, altitudini trianguli* B. *Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplũ lateris trianguli* B, *& alterum latus æquale ipſi* GH, *hoc eſt, altitudini trianguli* B, [b] *vigecuplum eſt trianguli* B; *Ei autẽ triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum*

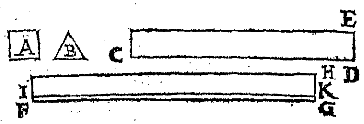


a 1. ſexti

b 1. ſexti

ctangulum FH, *quippe cum baſis* FG, *dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum* FH, *vigecuplũ trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum* FH, *maius eſſe rectangulo* C E. [a] *Quoniam latus trianguli* B, *hoc eſt, latus*

[a] 12. quartidec.



DE, *potentia ſeſquitertiũ eſt eius perpẽdicularis, hoc eſt, lateris* GH: *Latus autem* FG, *ad latus* CD, *potẽtia proportionẽ habet, quam 25. ad 16. quod* FG, *ſit 10. &* CD, *8. hoc eſt,* FG, *5. & CD, 4. Erit maior proportio* FG, *ad* CD, *quam* DE, *ad* GH. *Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſupernõcupartiens ſextaſdecimas, quam 4. ad 3. ſeſquitertia, quod maior ſit fractio* $\frac{9}{16}$. *quam* $\frac{1}{3}$. [b] Fiat *vt* F G, *ad* CD, *ita* D E, *ad* H K; *eritque maior quoque proportio* DE, *ad* HK, *quam ad* GH; [c] *ac proinde maior erit GH, quam* HK. *Ducta ergo* KI, *ipſi* FG, *parallela, erit vt* IK, *ipſi* FG, *æqualis ad* C D, *ita* DE, *ad HK.* [d] *Igitur erit IH, rectangulũ rectangulo* CE, *æquale: ideoq; FH, maius, quam* CE. *Quod eſt propoſitum.*

[b] 12. ſexti

[c] 10. quin.

[d] 14. vel 16. ſexti.

I I.

OCTO quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

[e] *QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæræ deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo vero eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcriptis, quod quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæræ æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ. Quod eſt propoſitum.*

[e] 20. quartidec.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit perpendicularis e centro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri, & cubi ducta.

NAM [a] *quia latus octaedri maius eſt latere Icoſaedri in eadem ſphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icoſaedri. Quare ſi vtrumq; ſolidum ita intra ſphæram conſtituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius ſit parallelum, longius a centro aberit Icoſaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis e centro ſphæræ ad baſim* Icoſaedri *deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad baſim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi;* [b] *quod baſis cubi, & baſis octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideoque æqualiter a centro diſtent; erit quoq; perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi maior. Quod eſt propoſitum.*

[a] 18. tertiidec.

[b] 21. quartidec.

IIII.

SI Cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt.

QVONIAM viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ maiora ſunt octo quadratis ex eadẽ ſphæra ſemidiametro deſcriptis, vt theoremate 1. demõſtrauimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri maiora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæræ constructis, quod latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæræ maius ſit, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & viginti triangula Icoſaedri *multo maiora ſunt octo quadratis ex ſphæra ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem* Icoſaedri *conficiant, at octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2. paulo ante demonſtrato; erit quoque* Icoſaedri *ſuperficies maior ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.*

DE COMPARATIONE
Soliditatum quinque corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demonſtremus iam, Dodecaedrum maius eſſe Icoſaedro : *Icoſaedrum maius cubo : Cubum maiorem Octaedro : Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.*

I.

DODECAEDRVM Icoſaedro maius eſt.

QVONIAM eſt,[a] *vt cubi latus ad latus Icoſaedri, ita* Dodecaedrum *ad Icoſaedrum:*[b] *eſt autem latus cubi latere* Icoſaedri *maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.*

[a] *11. quartidec.*
[b] *18. tertijdecimi*

II.

ICOSAEDRVM cubo maius eſt.

QVONIAM perpẽdicularis ex centro ſphæræ in vnã baſim Icoſaedri *cadens, maior eſt perpendiculari ex eodem centro in vnam baſim cubi demiſſa, vt in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt : Item ex 4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior quoque eſt; Erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei* Icoſaedri *contentum, maius ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi continetur.* Cum *ergo, vt in ſcholio propoſ. 20. lib. 14. demonſtrauimus, illud ſolidum* Icoſaedro *ſit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icoſaedrum, quam cubus,* Quod *eſt propoſitum.*

III.

CVBVS Octaedro maior eſt.

QVONIAM eſt,[a] *vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius. (Nam*[b] *cum latus cubi maius ſit latere Icoſaedri; & latus Icoſaedri, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris, maius ſemidiametro ſphæræ; erit latus cubi multo maius ſemidiametro ſphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.*

[a] *27. quartidec.*
[b] *18. tertijdec.*

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius eſt.

QVONIAM baſis octaedri minor eſt baſe Tetraedri,[c] *quod baſis Tetraedri ad baſem octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri demiſſa; maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad vnam baſim Tetraedri cadente : quod probabitur non aliter, quam ſupra theoremate 3. oſtendimus, perpendicularem in Icoſaedro maiorem eſſe perpendiculari in octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficies octaedri ſuperficie Tetraedri maior,*[d] *cum illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Octaedri cadẽte, & tertia parte ſuperficiei octaedri, maius eſt ſolido contento ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim Tetraedri deducta, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 14. illud ſolidum octaedro ſit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.*

[c] *14. quartidec.*
[d] *14. quartidec.*

ALITER. *Quoniam eſt,*[e] *vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri : Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita eſt triplum Te-*

[e] *22. quartidec.*

traedri ad tertiam eius partem, id eſt, ad ipſum Tetraedrũ. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius ſit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam [a] quia quadratum lateris Tetraedri ſeſquitertium eſt quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem ſeſquitertia, ideoque multo minorem tripla; [b] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.

[a] 18. tertijdec.
[b] 10. quin.

ALITER. [c] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum ſe habet, vt rectãgulum ſub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri ſphæræ; Eſt autem rectangulum illud minus quadrato diametri ſphæræ, quod eius latera minora ſint ſphæræ diametro; quippe quæ ſingula minora ſint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc eſt, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod eſt propoſitum.

[c] 17. quartidec.

ALITER. [d] Quoniam cubus triplus eſt Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri: (Nam [e] cubus ad octaedrum eſt, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ; & latus cubi minus eſt, quam triplum ſemidiametri ſphæræ, quod & tota diameter, quæ cubi latere maior eſt, minorem proportionem habeat ad ſemidiametrum, quam triplam.) [e] Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod eſt propoſitum.

[d] 32. quartidec.
[e] 27. quartidec.

EODEM prorſus ordine ſe mutuo ſuperant conuexæ ſuperficies eorundem corporum Regularium: hoc eſt, ſuperficies conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri: Superficies conuexa Icoſaedri maior ſuperficie conuexa cubi: Conuexa ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior: Octaedri denique ſuperficies conuexa maior eſt conuexa ſuperficie Tetraedri.

QVONIAM enim [f] eſt ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri: Eſt autem cubi latus latere Icoſaedri maius, [g] vt ſupra demonſtratum eſt: Erit & ſuperficies Dodecaedri ſuperficie Icoſaedri maior.

[f] 9. quartidec.
[g] 18. tertijdec.

SVPERFICIEM vero Icoſaedri maiorem eſſe ſuperficie

Cubi, demonſtratum eſt paulo ante theoremate quarto ante comparationem ſoliditatum quinque corporum Regularium.

DEINDE [a] quoniam eſt ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo oſtendimus, cubum Octaedro maiorem eſſe, demonſtratum eſt; Erit quoq; ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior.

[a] 27. quartidec.

DENIQVE [b] quia ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri; perſpicuum eſt, Octaedri ſuperficiem maiorem eſſe Tetraedri ſuperficie.

[b] 14. quartidec.

VIDES igitur ſuperficies & ſoliditates corporum Regularium contrario ordine reſpondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam ſuperficiem, at eo minus latus. Nam [c] vt ſupra demonſtratum eſt, Tetraedri latus eſt omnium maximum, eius vero ſuperficies atque ſoliditas, vt hic demonſtrauimus, omnium minima eſt: Item Dodecaedri latus omnium eſt minimum, eius vero conuexa ſuperficies & ſoliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, ſi Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icoſaedrum, & Dodecaedrum in eadẽ ſphæra deſcripta ſint, latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atque ab Euclide deſcripta, ſe mutuo ſuperant, [d] vt ſupra oſtenſum eſt; ita contrario ordine eorundem ſuperficies conuexæ, atque ſoliditates ſe mutuo ſuperant, vt hoc loco demonſtrauimus.

[c] 18. tertijdec.
[d] 18. tertijdec.

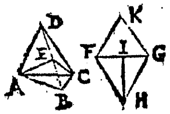
CÆTERVM prætereundum non eſt hoc loco id, quod a Pappo demonſtratum eſt lib. 5. Mathematicarum collectionum; ſoliditates videlicet quinque corporum Regularium, ſi Iſoperimetra ſint, atque idcirco, non in eadem ſphæra conſtructa, longe aliter ſe habere, quam a nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Ita vt Icoſaedrum ſuperet Dodecaedrum, Dodecaedrũ maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius ſit.

INVENTIO ANGVLI *inclinationis duarum baſium cuiuſcunque ſolidi regularis, vnius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.*

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis A B C D, cuius latere BD, bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppoſitis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares ſint ad B D, communem ſectionem planorum ABD, CBD, in quibus exiſtunt, ([a]Sunt.n.in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulũ inclinationis AEC, baſiũ ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur FGH, triangulum æquilaterum ſuper rectam FG, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad F G, conſtituatur ſuper FG, triangulum FGK, habens vtrumque latus F K, GK, æquale perpendiculari HI, hoc eſt, vtrique perpendiculari A E, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem eſſe angulo inclinationis AEC, baſium ABD, CBD. Cum enim latera KF, KG, æqualia ſint lateribus EA, EC; & baſis FG, baſi AC: [a]Aequales erunt anguli FKG, AEC. Dico inſuper angulum inclinationis AEC, acutum eſſe. [b] Cum enim latus AD, vel illi æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ A C, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE; ideoque earundem partiũ 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cũ in triangulo ABC, quadratum lateris A C, minus ſit quadratis ſimul laterum A E, C E, acutus erit angulus A E C, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.



[a] 8. primi.

[a] 8. primi.

[b] 12. quartidec.

COROLLARIVM.

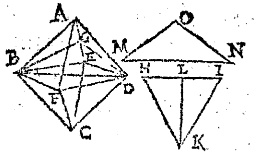
FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit AC; [c] *omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æqua-*

[c] 8. primi.

les ſint, nec non & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.



EXHIBEATVR Octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis A B E, A D E, commune, bifariamq; ſectum in G, rectæ ducãtur BG, DG; quę cũ perpẽdiculares ſint ad AE, communẽ ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtũt, ([a] quod in triãgulis BGA, B G E, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium A B E, A D E, per deſin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur H I K, triangulum æquilaterum ſuper rectam H I, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta K L, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri B D, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex A B, latere octaedri deſcripti, triangulum OMN, habens vtrũque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc eſt, vtrique perdendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis B G D, baſium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus G B, G D; & baſis M N, baſi BD;[a] Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum. [b] Cũ enim diameter octaedri BD, dupla ſit potentia lateris AB;[c] latus vero A B, potentia ſeſquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4. erit quadratum lateris A B, earundemque 3. quadratum rectæ B G; ideoque ambo ſimul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris B D, in triangulo G B D, maius eſt quadratis ſimul laterum G B, GD; Ac propterea angulus BGD, obtuſus erit, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 2. oſtendimus.

[a] 8. primi.

[a] 8. primi.

[b] 14. tertijdecimi

[c] 12. quartidec.

COROLLARIVM.

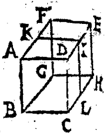
HINC fit, omnes inclinationes baſium octaedri æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt

ſunt BG,DG,ſubtendanturque ab octaedri diametris, cuiuſmodi eſt BD; [a] *omnes inter ſe æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & diametri octaedri eoſdem ſubtendentes.*

[a] 8.primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, vnius ad alteram, inuenire.



SIT cubus ABCDEFGH, in quo ſecetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi oppoſita in quadratis AE, *E*C, commune latus illud D*E*, habentibus, in punctis *K*, L. Deinde rectæ ducantur *IK*,*I*L; [b] quę cum æquales, ac parallelæ ſint lateribus EF, EH, (quod & *K*F, I*E*, inter ſe, nec non & *IE*, LH, inter ſe æquales exiſtant, & parallelæ) ideoque angulos rectos ad latus DE, efficiant, cõtinebunt *KIL*, angulum inclinationis baſium A*E*, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ IK, *I*L, parallelæ exiſtentes rectis *E*F, *E*H, & non in eodem cum illis plano, [c] angulum *KI*L, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis baſium cubi. Quare vt angulo inclinationis baſium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõſtituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonſtrauimus, æqualis erit angulo inclinationis baſium cubi.

[b] 33. primi

[c] 10. vnde.

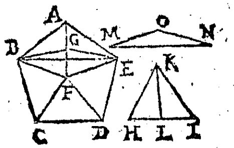
CO-

COROLLARIVM I.

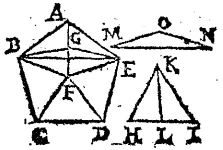
QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum; perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram, inuenire.



ESTO pyramis A B C D *E* F, una ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cuius baſis pentagonum *AB*CC*E*, ex quinque Icoſaedri lateribus compoſitum, vertex autem F. Diuiſo itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus *A* F, commune habentium, angulis *B*, & *E*, lateri *A* F, oppoſitis rectæ *B*G, *E* G, quæ cum ex demonſtratis in problemate 2. huius ſcholij, perpendiculares ſint ad *A*F, communem ſectionem planorum A*B*F, *A E* F, in quibus ducuntur, comprehendent *B*GE, BGE, angulum inclinationis baſium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triãgulum ęquilaterum HIK, ſuper rectam HI, lateri Icoſaedri æqualem fabricatũ, hoc eſt, cuiuis triangulo Icoſaedri, ipſi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, conſtruatur ſuper recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, ſubtendenti ſit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc eſt, vtrique perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus ſint ęquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis baſium ABF, AEF, æqualem eſſe. Cum enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus GB, GE, & baſis MN, baſi BE; [a] Aequales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, eſſe obtuſum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB; [b] erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, poſitæ ſint æquales. Si itaque recta BE, ſuper rectam ſibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita vt rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorſus includant. [a] Angulus ergo O, maior erit angulo BAE: At hic obtuſus eſt. (cum enim quinque anguli pentagoni ſex rectis ſint æquales, per ea, quæ a nobis ſunt demonſtrata in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac inſuper vnius recti partem quintam. obtuſus ergo erit, cum recto ſit maior). Multo igitur magis obtuſus erit angulus MON, hoc eſt, ſibi ęqualis BGE.



[a] 8. primi.

[b] 19. primi.

[a] 21. primi

COROLLARIVM.

NON obſcure quoque ex his conſequitur, omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe ęquales eſſe. Nam cum ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, EG, ſubtendanturque a rectis angulos pentagonorum ſubtendentibus, cuiuſmodi eſt BE:[b] *omnes inter ſe erunt æquales, quod & illę omnes perpendiculares, quę ipſos continent, ęquales ſint, nec non & rectę illę omnes, quę pentagonorum angulos ſubtendunt ęquales ęqualibus rectis comprehenſos,*[c] *ęquales erunt.*

[b] 8. primi.

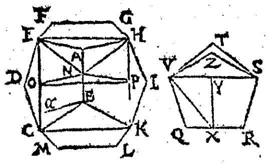
[c] 4. primi.

V.

ANGVLVM inclinationis duarũ baſium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM

CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus cõmune AB; alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK.



His porro pẽtagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta

recta ſubtendatur VS, [a] æqualis exiſtens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia ſint, anguloſque contineant æquales. Diuiſa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur a puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea que perpendicularis ad VS, cum VS, ſit parallela ipſi QR, ex ſcholio propoſit. 8. libri 13. Ac poſtremo ſuper recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens vtrumque latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cum latera EA, AN, æqualia ſint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, anguloſque comprehendant æquales; [b] Aequales erunt & baſes NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideoque & reſidui ex rectis, anguli videlicrt ENO, HNP, VXY, æquales erũt. Quoniã igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP; nec nõ & angulis VXY, VYX, triãguli VXY; (ſunt. n. EON, HPN, VYX oſtenſi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonſtratum; [c] Aequalia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis lateribus NP, PH; Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales exiſtentes ipſi XY, rectis NO, NP, æquales erunt. Iam vero, quia OE, PH, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoque recta coniuncta OP, æqualis & parallela ipſi EH, ideoque æqualis ipſi EC, hoc eſt, rectæ VS,

[a] 4. primi.

[b] 4. primi

[c] 26. primi.

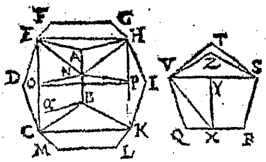
[d] 33. primi

V S. Quam ob rem, cum latera Z V, Z S, lateribus NO, NP, æqualia ſint; baſis item VS, baſi OP;[a] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc O N P, inclinationis, eſſe obtuſum. Nã ducta recta Bα, ipſi NO, parallela; cũ ſit quoq; NB, ipſi Oα, parallela, ex ſcholio prop. 8. lib. 13. Parallelogrãmum erit NOαB, ideoq; recta Bα, ipſi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppoſitum angulo CαB, qui rectus eſt, ([c] æqualis nimirum interno C O N,) maius eſt latere Bα, hoc eſt, recta NO, vel vtraque ZV, ZS, quæ ipſi N O, oſtenſæ ſunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, rectas ZV, ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior eſt angulo pentagoni T: Hic vero, cum ſit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis O N P, ideoque obtuſus.

[a] 8. primi.

[b] 34. primi.

[c] 29. primi.



COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri *ęquales eſſe inter ſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris* Dodecaedri *ad duo latera cubi in* Dodecaedro *deſcripti ductis; quales ſunt* NO, NP, *ſubtendanturque a rectis, quę cubi inſcripti lateribus ſunt ęquales, vel certe, quę rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum ęquales ſunt, cuiuſmodi eſt recta OP, lateri cubi inſcripti* EH, *quod angulum pentagoni* EAH, *ſubtendit, ęqualis;*[a] *Erunt omnes inter ſe ęquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quę ipſos continent, ęquales ſint, nec non & rectę illæ omnes, quę eoſdem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales.*

[a] 8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX

PROBLEMATVM,

QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR.

QVORVM EA, QVAE EVCLIDIS ſunt, eodem charactere ſunt expreſſa, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ vero adiecta a nobis, charactere, quo ſcholia notauimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem facilius quiſque inueniat problemata, quæ cupit, digeſſimus ea ſecundum materias, de quibus proponuntur.

FIGVRAE, anguli, & lineæ propororˆtionales.

FINIS.

INDEX THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR:

QVORVM EA, QVAE AB EVCLIDE demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ vero a nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem facilius quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſsimus ea ſecundum materias, de quibus demonſtrantur.

Poten-

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

latera trianguli rectanguli ſint continue proportionalia; perpendicularis ad baſim ex angulo recto demiſſa, ſecat baſim extrema ac media ratione. 878.A

Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis ducantur rectæ vſque ad peripheriam quadrantis ex eodem centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem baſi parallelæ: Erunt arcus quadrantis inter ſemidiametros interiecti, perpendicularibus, vel ſegmẽtis ſemidiametri intra parallelas poſitis, proportionales. 898.A

Si quadrãtis & Quadratricis idẽ centrum ſit; erunt arcus quadrantis, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continue proportionales. 904.A

Circumferentiæ circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, quæ ſit. 907.A

Si ſint duæ rectæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum primæ ad rectangulum ſub illis duabus contentum. Et vt ſecunda ad primam, ita rectãgulum ſub ipſis ad quadratum primæ. 344.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad ſecundam, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratum ſecundæ. 375.B

Si ſint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur. 377.B

Si recta linea ſecetur in partes duas inæquales; erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectã gulum ſub tota & priore parte aſſumpta, ad rectangulum ſub tota, & altera parte contentum. 380.B

Si recta ſit ſecta vtcunque; erit rectangulum ſub partibus cõtentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum ſub tota, & vna parte contẽtum, mediũ proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis. 416.B

Si duæ rectæ parallelis planis ſecentur; In eaſdẽ rationes ſecabuntur. 568.B

Si ſolidum parallelepipedũ plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. 585.B

Idem conuenit in omne priſma. pag. 587.B

Si priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectio eſt figura æqualis, & ſimilis planis oppoſitis. 590.B

Solida parallelepipeda ſub eadẽ altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes. 602.B

Si parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. 603.B

Similia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterũ. pag. 603.B

Si ſint quatuor rectæ continue proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſt parallelepipedum ſuper primã deſcriptum, ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. 605.B

Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocãtur. Et quorum ſolidorum parallelepipedorũ baſes & altitudines reciprocantur; illa ſunt æqualia. pag. 605.B

Hæc quinque, quæ proxime de parallelepipedis dicta ſunt, conueniunt etiam priſmatis, in quibus duo plana oppoſita ſunt triãgula. 608.B

Si tres rectæ ſint proportionales; quod ex illis fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, qđ æquilaterum quidem ſit, ęquiangulum vero prædicto. 612.B

Si parallelepipedum ex tribus rectis deſcriptum, æquale ſit parallelepipedo ſibi æquiangulo a media recta deſcripto; erunt tres rectæ continue proportionales. pag. 613.B

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & ſolida parallelepipeda, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quę & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia; & ipſæ rectæ lineę proportionales erunt. 614.B

Eodem modo ſi fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia, ſimiliterque deſcripta ex eis, proportionalia, etc. pag. 616.B

Idem quoque quadrat in priſmata triangularium planorum oppoſitorum ex quatuor rectis, vel tribus, continue proportionalibus deſcripta, ſi ſimilia, ſimiliterque poſita ſint. 616.B

Circuli inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata. 626.B

Circulus ad circulum eſt, vt polygonum in illo deſcriptũ ad polygonum ſimile in hoc deſcriptum. 629.B

Sub eadem altitudine exiſtẽtes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes. 635.B

Si pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. 637.B

Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes. 638.B

Idem verum eſt de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vna baſim habet plurium angulorum, quam altera. 639.B

Pyra-

multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 46.B

Idem verum eſt de numeris fractis pag. 46.B

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. pag. 47.B

Idem in fractis numeris verum eſt. 48.B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſsim quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti. 49. B

In fractis numeris idem cōcludes. pag. 50.B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſsim quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars. 50.B

Numeris fractis hoc idem conuenit. 51.B

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 51.B

Idem in fractis numeris verum eſt. 52.B

Si primus ſecundū, & tertius quartum, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem, aut partes; erit ſecundus primi, & quartus tertij eadem partes. Et ſi ſecundus primi, & quartus tertij eadem partes ſit; continebit primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter, eandemque inſuper partē, aut partes. 53.B

Idē verum eſt in numeris fractis. pag. 63.B

Si ſint quotcunque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedētes ad omnes cōſequentes. 56. B

Verum quoque hoc eſt in numeris fractis. 58. B

Si quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſsim proportionales erunt. 58.B

In fractis idem cernitur. 60.B

Si ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumātur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erūt. pag. 61.B

Idem in numeris fractis verum eſt. 62.B

Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem ſunt; inter ſe quoque ſunt eadem. pag. 62.B

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum. 63.B

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: geniti ex ipſis eādem rationem habebunt, quam multiplicati. 66. B

In fractis numeris idem verum eſt. 67.B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis eandem rationē habebunt, quam multiplicantes. 67.B

In fractis idem habet locū. 67.B

Si *numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicantes.* 68.B

Si quatuor numeri ſint proportionales; qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis eſt ei, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis ſit ei, qui ex ſcdo & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri ꝓportionales erūt. 68.B

Verum eſt idem in numeris fractis pag. 69.B

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis æquales erunt. 69.B

Idē cōuenit numeris fractis. 69.B

Si maior ſit proportio primi ad ſecundū quam tertij ad quartū; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior eſt eo, qui ex ſecūdo & tertio fit, numero: Et contra; tā in fractis numeris, quā integris. 70.B

Si tres numeti ſint proportionales; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, q̃ a medio efficitur: Et ſi qui ſub extremis cōtinetur, æqualis ſit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt. 71.B

In fractis idem verum eſt. 72.B

Si maior ſit proportio primi ad ſecūdū, quā ſecūdi ad tertiū; maior fiet numerus ex primo in tertiū, q̃ ex ſcdo in ſe: Et contra, tā in numeris fractis q̃ integris. 72.B

Minimi numeri omniū eandem cū eis rationē habentiū, metiuntur æque numeros eandē cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem. 73.B

Si tres numeri ſint continue proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi; metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium. 74. B

Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarū proportionū, ſiue eadē ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidē alios numeros, q̃ eaſdē cū eis ꝓportiones hēnt, primus primū, ſecūdus ſcdm, et tertius tertiū. etc. 74.B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani; ac ſolidi numeri.

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Qua-

RECTA LINEA.

F I N I S.

ERRATORVM POSTERIORVM DECEM Lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata.	Correctiones.
50	4	D, $\frac{7}{22}$.	D, $\frac{14}{22}$.
64	19	a 15.defin.	a 13.ſeptimi.
68	penult.	C, tertium.	in C, tertium.
80	7. a fine	ad F H,	ad E H.
145	12. a fine	D, F, I, M,	C, F, I, M,
147	3. a fine	G, ad D.	C, ad D.
163	11. a fine	I, & C	L, & C,
183	11. a fine	propoſ. 10. lib. A,	propoſ. 10. lib. 8. A,
208	7	medios B, G;	medios B, C;
212	10. a fine	64 per 1.	64. per 3.
219	3	A C, ad D E, ita C B,	A C, ad C B, ita D E,
219	4. a fine	C a B;	C B;
327	20	deleatur vox (aliter)	
768	9. a fine	PROBL. 4.	THEOR. 4.
806	5. a fine	æquilater	æqualiter

Emendentur quoque numeri paginarum in folijs I. X. Vu. Iii.

Præterea pro figura paginæ 626. deſcribatur figura paginæ 628.

REGESTVM.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii KK Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii KKK Lll Mmm Nnn Ooo.

a b c d e f.

Omnia ſunt integra folia.

ROMAE,
Apud Sanctium, & Soc.
M. D. LXXXIX.