D. FRANCISCI

MAVROLYCI,

ABBATIS MESSANENSIS,

Mathematici celeberrimi,

ARITHMETICORVM LIBRI DVO,

NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.

Cum rerum omnium notabilium.

INDICE COPIOSISSIMO.

PER ME QVI SI RIPOSA, E'N CIEL SI GODE.

CVM PRIVILEGIO.

Venetijs, Apud Franciscum Franciscium Senensem.

M D LX X V.

4

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DE GRANADA

D. FRANCISCI

MAVROLYCI,

ABBATIS MESSANENSIS,

Mathematici celeberrimi,

ARITHMETICORVM LIBRI DVO,

NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.

Cum rerum omnium notabilium.

INDICE COPIOSISSIMO.

PER ME QVI SI RIPOSA,

E'N CIEL SI GODE.

CVM PRIVILEGIO.

Venetijs, Apud Franciscum Franciscium Senensem.

M D LX X V.

4

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DE GRANADA

Numeri lineares.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares	
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	Pares	496. Et deinceps.
1		6				28				Perfecti	

Superficiales primi.

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi.
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	parte altera longiores.
1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	Pentagoni primi.
1	6	15	28	45	66	91	120	15	190	Hexagoni primi.

Pyramides Primæ.

1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	Pyramides triangulæ primæ.
1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	Pyramides quadratæ primæ
1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	Pyramides pentagonæ primæ.
1	7	22	50	95	161	252	372	525	715	Pyramides hexagonæ primæ.

Columnæ primæ.

1	6	18	40	75	126	195	288	405	550	Columnæ triangulæ primæ	
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	Columnæ quadratæ primæ.	Vel Cubi.
1	10	36	88	175	306	490	736	1053	1450	Columnæ pentagonæ primæ	
1	12	45	112	225	396	637	960	1377	1900	Columnæ hexagonæ primæ.	

Superficiales Secundi centrales.

1	4	10	31	19	46	64	85	109	136	Trianguli secundi.	
1	5	13	41	25	61	85	113	145	181	Quadrati secundi.	
1	6	16	51	31	76	106	141	181	226	Pentagoni secundi.	
1	7	19	61	37	91	127	169	217	271	hexagoni secundi.	æquianguli.
1	8	22	71	43	106	148	197	253	316	heptagoni secundi.	
1	9	25	81	49	121	169	225	289	361	Octogoni secundi.	

Pyramides secundæ centr.

1	5	15	34	65	111	175	260	369	505	pyramides triangulæ secundæ
1	6	19	44	85	145	231	344	489	670	pyramides quadratæ secundæ
1	7	23	54	105	181	287	428	609	835	pyramides pentagonæ secundæ
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	pyramides hexagonæ secundæ
1	9	31	74	145	251	399	596	849	1165	pyramides heptagonæ secundæ
1	10	35	84	165	286	455	680	959	1330	pyramides octogonæ secundæ

Columnæ secundæ centr.

1	8	30	76	155	276	448	680	981	1360	Columnæ triangulæ secundæ
1	10	39	100	205	366	595	904	1305	1810	Columnæ quadratæ secundæ
1	12	48	124	255	456	742	1128	1629	2260	Columnæ pentagonæ secundæ
1	14	57	148	305	546	889	1352	1953	2710	Columnæ hexagonæ secundæ
1	16	66	172	355	636	1036	1576	2277	3160	Columnæ heptagonæ secundæ
1	18	75	396	405	726	1183	1800	2601	3610	Columnæ octogonæ secundæ

Solida Regularia in numeris.

1	9	35	91	189	341	559	855	1241	1729	Tetrahedra.	Vel pyramides
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Octahedri.	Et iidem Cubi.
1	33	155	427	909	1661	2743	4215	6137	8569	Icosahedri.	Et iidem Dodecahedri.

Quadrati Quadratorum.

1	16	81	256	625	1296	2481	4096	6561	10000	Biquadrati.

FORMATIO NVMERORVM.

Præcedentis Tabellę.

RADICES formantur ab unitate,& per unitatis con tinuam additionem.

Impares ab unitate, per binarij continuam additio- nem. Vel ex duabus radicibus.

Pares a binario, & per binarij ſemper additionem, uel duplicando radices.

Primi. Trianguli primi, per continuatam radicum accumu- lationem. Siue multiplicando aggregatum collateralis radicis & unitatis in dimidium multitudinis radicum.

Quadrati primi ex ductu radicum in ſe, uel ex aggregatione ſucceſ- ſiua imparium ab unitate. Vel ex coniunctione trianguli collatera lis cũ præcedenti, uel multiplicando aggregatũ collateralis imparis & unitatis in dimidium radicis.

Parte altera longiores ex ductu collateralis radicis in radicem imme- diatè præcedentem: ſiue ex aggregatione continuata parium: ſiue ex duplato triangulo pręcedenti: ſiue ex præcedenti quadrato cum ſua radice.

Pentagoni primi ex coniunctione collateralis quadrati cum triangu- lo præcedenti.

Hexagoni primi ex quadrato collaterali, duploq; præcedẽtis trianguli: Vel ex pentagono coll. dictoq; triangulo: Vel ex ductu radicum in impares: Vel ex quadrato cum parte altera lungiori.

Pyramides triangulę primę ex ſucceſſiua triangulorum aggregatione.

Similiter pyramides quadratę ex quadratorum. Pyramides pentago- næ ex pentagonorum; pyramides hexagonę ex hexagonorum aceruo conſtruuntur.

Item pyramides quadratæ primæ fiunt ex coniunctione collateralis py ramidis triangulæ cum præcedenti.

Pyramides pentagonæ primæ ex collaterali quadrata pyramide cum præcedenti triangula pyramide.

Pyramides hexagonæ primæ ex quadrata pyramide collaterali cum du plo præcedentis triangulæ pyramidis. Vel ex pentagona pyramide collaterali,& triangula pyramide præcedenti.

Columæ nprimæ fiunt ex ductu ſuarum ſuperficierum in radices: ut puta triangulæ ex radice in triangulos:& ſic de cæteris.

Item columnæ triangulæ primæ ſunt æquales pyramidibus pentago- nis

nis primis, ſingulæ ſingulis. Quod notatu dignum eſt:

Columnæ quadratæ primæ, ſiue cubi, fiunt ex ductu radicum in ſuos quadratos.

Siue ex columna triangula collaterali & præcedenti cũ ſuo triangulo.

Vel ex pyramide hexagona prima cum pyramide quadrata præcedẽti.

Vel ex aggregatione unius, deinde binorum, deinde trium, deinde qdatuor, & ſic deinceps imparium.

Item columnæ pentagonæ primæ fient ex cubo collaterali cum colum- na triangula & triangulo præcedentibus.

Columnæ hexagonæ primæ item ex columna pentagona collaterali cũ pręcedenti triangula columna & ſuo triangulo.

¶ Trianguli ſecundi fiunt ex triangulo primo præcedenti triplicato cum unitate. *Secundi.*

Pro quadratis autem ſecundis, quadruplicetur dictus triangulus.

Pro pentagonis quintuplicetur. & ſic deinceps pro ſequentibus for- mis, adiecta unitate.

Item trianguli ſecundi fient ex triangulo primo collaterali & quadra- to præcedenti.

Quadrati ſecundi ex quadrato collaterali & pręcedenti primis.

Pentagoni ſecundi ex pentagono collaterali & quadrato præcedenti primis.

Hexagoni ſecundi æquianguli ex collaterali hexagono primo cum quadrato pręcedenti. Vel ex quadrato collaterali & præcedenti & parte altera longiore collaterali. Vel ex parte altera longiore tripli cato cum unitate.

Heptagoni ex hexagono ſecundo collaterali cum triangulo primo præ cedenti.

Octogoni ex heptagono dicto collaterali cum triangulo præcedenti primi ord. Siue (quod notatu dignum eſt) ex collaterali impari in ſe multiplicato.

Pyramides ſecundę fiunt ex accumulatione continuata ſuarum ſuper- ficierum, ſcilicet triangulæ triangulorum, quadratę quadratorum ſecundi ordini & ſic deinceps.

Item pyramides ſecundæ triangulę fient ex pyramide triangula prima, & præcedenti pyramide quadrata.

Pyramides autem quadratæ ſecundę ex pyramide quadrata collaterali cum præcedenti primi ordinis.

Pyramides pentagonæ ſecundæ, ex pyramidæ pentagona prima,& pyra mide quadrata pręcedenti prima.

Pyramides hexagonæ ſecundę ex pyramide hexagona prima & pyra- mide

mide quadrata pręcedenti prima. Et sunt æquales cubis collateralibus, singulę singulis. quod mirum est.

Pyramides heptagonæ secundę, ex hexagona pyramide secunda collaterali cum pręcedenti triangula pyramide prima.

Pyramides octogonę secundę ex heptagona pyramide collaterali cum pręcedenti pyramide triangula prima.

Item unaqueq; dictarum pyramidum fit ex pyramide triangula primi ordinis multiplicata in numerum laterum, unà cum radice collaterali.

Columnę secundę fient ex multiplicatione suarum superficierum in radices collaterales, triangulæ scilicet triangulorum, quadratæ quadratorum. Et deinceps similiter.

Item omnis columna secundi ordinis, fiet ex columna eiusdem nominis in primo ordine cum pręcedenti cubo & quadrato coniuncta.

OMNIS COLVMNA TRIANGVLA Prima cum duplo sui trianguli, facit triplum suę pyramidis.

Omnis cubus cum suo quadrato & triangulo, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna pentagona prima cum duplo quadrati collateralis, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna hexagona prima cum suo hexagono coll.&triangulo, facit triplum suæ pyramidis.

Omnis columna triangula secunda cum coll.quadrato & triangulo primis, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna quadrata secunda cum duplo coll. quadrati primi, facit triplum suæ pyramidis.

Omnis columna quadrata secunda cum duplo coll.quadrati primi, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna pentagona secunda cum duplo quadrati coll. primi, & cum triangulo præcedente primo, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna hexagona secunda cum hexagono secundo & impari collaterali, facit triplum suæ pyramidis.

Item eadem columna cum quadrato & hexagono primis facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna septangula cum hexagono secundo & impari collateralibus, & cum triangulo primo pręcedenti facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna octangula cum hexagono secundo & impari collateralibus, duploque trianguli pręcedentis primi, facit triplum suę pyramidis.

DE

DE SOLIDIS REGVLARIBVS.

TETRAHEDRVM seu Pyramis construitur ex unitate, cum quatuor radicibus præcedentibus, cum sexcuplo trianguli primi, uno retrorsum intermisso, accepti: & cum quadruplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis.

Cubus, construitur ex unitate cum octo radicibus præcedentibus, cũ duodecuplo trianguli primi, uno retrorsum intermisso, sumpti: cumq; sexcuplo pyramidis quadratæ secundæ præcedentis.

Octahedrum construitur ex unitate, secuplo radicis præcedentis, ex duodecuplo trianguli primi, uno intermisso, recepti, & ex octuplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis. Quod semper exit æquale cubo prædicto.

Icosahedrum construitur ex unitate, ex duodecuplo radicis præcedentis, ex uigecuplo trianguli primi, uno retrorsum omisso, accepti: & ex uigecuplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis.

Dodecahedrum construitur ex unitate, ex uigecuplo radicis præcedentis, ex trigecuplo trianguli primi, uno retrorsum intercidente, occurrentis: & ex duodecuplo pyramidis pentagonæ secundæ præcedentis. Quod semper inuenitur æquale Icosahedro dudum memorato.

Item cubus, aut octahedrum prædictum (sunt enim æquales) potest aliter construi. Nam dispositus imparibus ab unitate per ordinem, unitas faciet primum cubum prædictum? tres sequentes impares secundum; quinque sequentes impares tertium; deindee septem succedentes quartum; nouem quintum. Et sic deinceps in infinitum: impares sub multitudine impari successiue coaceruando.

Adhuc idem cubus, seu octahedrum producetur ex ductu imparis collateralis in quadratum secundi generis collateralem.

Et notandum quòd talis cubus siue octahedrus semper est pyramis triangula secundi generis in locis imparibus accepta.

Præterea non omittendum est, quòd ex successiua coaceruatione taliũ cuborum siue octahedrorum ab unitate per ordinem, constituuntur Quadrati quadratorum ab unitate seriatim receptorum. Qui quidem quadrati quadratorum, seu bisquadrati producuntur ex quadratis primis in se ductis. Quod sicut hactenus ignoratum, ita posthac iucundum scitu fiet speculatiuis ingenijs.

Deniq; cum his, neq; illud subticebo, quòd Tetrahedrum superius memoratum, est & cubus mixtus quidam tertij generis, qui conflatur ex binis semper proximis cubis primi ordinis, scilicet collaterali &

c

li & precedenti. Quemadmodum quadrati secundi ex duobus quadratis primis, collaterali & precedente coalescunt. Quod non minus erat admirandum.

Hęc omnia in tabella pręmissa per exempla singula notescunt, & in primo horum Arithmeticorum libello demonstrantur.

DE NVMERO PERFECTO.

PERFECTVS Numerus producitur ex multiplicatione ultimi in serie pariter parium ab unitate dispositorum, in totum aggregatum ipsorum, dum tamen tale aggregatum sit numerus primus, hoc est a nullo, pręterquàm unitate numeratus. Tales numeri semper inueniuntur in ordine trianguli & hexagonorũ primorum. In hoc numero perfecto partes integrant totum, ut ostendit Euclides in ultima Noni. Secunda conditio faciens numerum perfectum est imparitas. unde impar numerus perfectior, quam par: quoniam affinitatẽ habet cum Monade genitrice numerorum, quę reprę sentat Deum, Mundum, Naturam, Solem, & quidquid unicum est. Tertia Conditio, est potestas. Vnde impares numeri, quorum potestas & officium est formare numeros quadratos, perfectiores sunt paribus, qui formant parte altera longiores. Rursum hexagoni ęquianguli sunt perfectiores, quàm impares communes: quoniam formant cubos. Quarta conditio, est forma. Vnde numeri ęquilateri perfectiores, quàm non ęquilateri. Sic quadratus perfectior, quàm altera parte longior. Et cubus perfectior, quàm solidus non ęquilaterus. Item Hexagonus ęquiangulus perfectior quàm hexagonus primus. Vnde prima conditio friuola est: quoniam nuda & expers est cęterarum fructuosiorum qualitatum. Verum hęc discussio posita est in postremo problematum Mechanicorum.

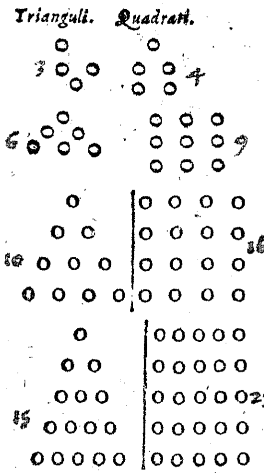
MAVROLYCI ABBATIS MESSANENSIS MATHEMATICI,

Arithmeticorum Liber Primus.

PROLOGOMENA.

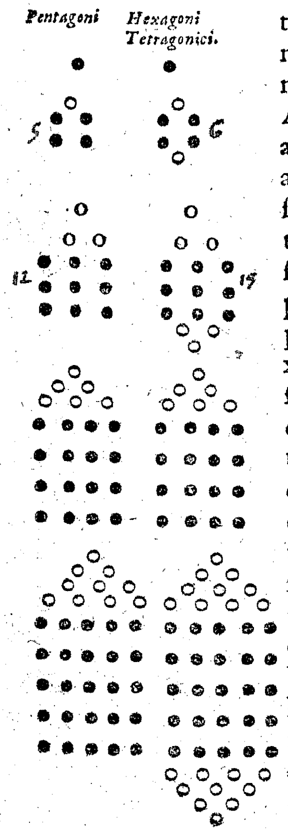
CVM Euclides agat de planis, solidis, quadratis, cubisq; numeris: De cæteris alteriusmodi formis, ut triangulis, pentagonis, hexagonis & sequentibus tam superficialibus, quàm solidis; neque apud nostros, neq; apud Grecos (quem sciam) satis scripsit quispiam: nec ipse Pythagoras, siue Iamblicus, aut Nicomachus, à quibus Boëtius noster, quicquid de Arithmeticis tradidit, mutuatus est: Iordanus autem, meo quidem iudicio, melius utique egisset, si ab alijs omissa plenius tractasset, potiusquàm in repetendis ijs, quæ ab Euclide satis fuerant demonstrata, frustra insudasset: Nos igitur conabimur ea, quæ super hisce numerarijs formis, nobis occurrunt, exponere: multa interim faciliori via demonstrantes, & ab alijs authoribus aut neglecta, aut non animaduersa supplentes. Sed iam à diffinitionibus inchoantes, reliqua commodius exequemur.

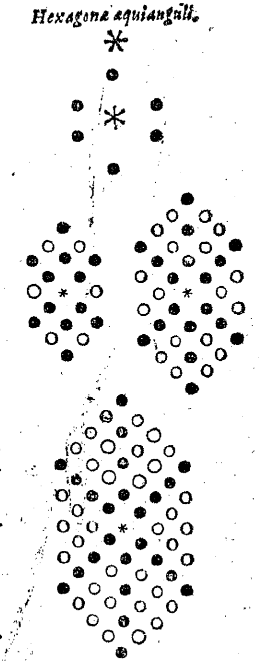
DIFFINITIONES.



Vnitas est principium & constitutrix omnium numerorum, constituens autem imprimis seipsam. Omnis igitur numerus aut est vnitas, quæ respondet puncto: quamq̃ punctum non habet partem in continuis, sicut vnitas in discretis. Aut est linearis, qui respondet lineæ. Aut superficialis, qui respondet superficiei. Aut solidus qui solidum in geometricis imitatur Post vnitatem itaque primus linearium numerorum est Binarius: sicut linea finita duo extrema sortitur. Primus superficialium ternarius: sicut Triangulum figurarum geomeotricarum prima est. Primus solidorum quaternarius: quoniam pyramis triangula in numeris, sicut eadem in cōtinuis solidis prima est. Sicut igitur monas pūcto: ita dias lineæ: Trias superficiei, ac tetras solido assimilatur. Linearium numerorum, Par est quē Binarius metitur. Impar vero, qui pari vnitatem addit, vel minuit. Superficialium autem primi generis numerorum, alij trianguli sunt; Alij quadrati, Alij pentagoni, Alij Hexagoni, & Hexagonorum, alij Tetragonici. alij Aequianguli, à forma scilicet, in qua disponuntur, numeroq; angulorum aut laterum vocati. Radices numerorum sunt q̃ ab vnitate, & secundum vnitatis cremētum successiue accrescunt. Triangulus numerus est, in primo genere, q ex aggregatione radicum ab vnitate acceptarum constitutus triangulā formam acquirit. Quadratus autem, qui ex radice in se ducta procreatur. Pentagonus verò, qui ex quadrato, & triangulo præcedenti coniunctis quinque lateram acquirit figuram. Hexagonus tandem, qui pentagono adhuc triangulū adiungens, sextum lucrifacit latus Hæ itaque figuræ ex triangulis, & quadratis compaginantur. Nam Hexagonus æquiangulus ex vnitate & sex multiplicato triangulo construitur. Ex his superficialibus formis totidem Pyramides, totidemque colūnę conficiuntur, qui solidi numeri merito vocantur. Nam Pyramis triãgula ex aggregatione triangulorum ab vnitate per ordinē sumptorum fabricatur. Similiter & Pyramis quadrata, ex cumulo quadratorum: Pentagona, Pentagonorum: & Exagona, exagonorum ab vnitate continuatim sumptorum erigetur. Vnde, & duplex erit hexagona Pyramis, scilicet à suis singulæ hexagonis constructæ. Columna verò triangula ex ductu radicis in suum triangulum. Quadrata quę cubus vocatur, ex ductu radicis in suum quadratum. Pentagona, ex ductu radicis in Pentagonum. Et hexagona vtriusque speciei ex radice

Radices.	Pares.	Impares.
1.	0.	1.
2.	2.	3.
3.	4.	5.
4.	6.	7.
5.	8.	9.
6.	10.	11.
7.	12.	13.
8.	14.	15.
9.	16.	17.
10.	18.	19.





in hexagonum multiplicata procreabitur. Sunt & numeri parte altera longiores, quorum quilibet fit ex ductu collateralis radicis in præcedentem. His ita se habētibus, dicendum est de eorum proprietatibus & colligantijs.

SCHOLIVM.

Ab his propagantur quincuplices Pyramides, & totuplices columnæ, in quibus omnibus positio vnitatum, aut triangularem, aut tetragonam seruat formam. Sed hexagonus æquilaterus hìc reponi dignus est visus, propter colligantiam, quam cum primo hoc genere formarum seruat: Reponetur & in secundo, mox genere, quandoquidem construitur ex centrali vnitate, & ex triangulo in laterum numerum ducto, hoc est sexcup'icato: & ipsius tam pyramis, quàm columna semper habet pro axe linearem numerum, siue radicem collateralem ex centralibus scilicet vnitatibus superficierum compositam. Quæ omnia hìc in tabella per numerarios characteres, tam ad diffinitionum, quàm ad demonstrandorum exempla exarabimus, ab vnitate vsque ad denarium procedere contenti.

FORMÆ NVMERARIÆ PRIMI GENERIS.

Radices.	Pares.	Impares.	Trianguli.	Quadrati.	Parte altera lõgiores	Pentagoni.	Hexagoni pi.	Pyrdes △la.	Pyrdes quadratę	Pyramides pētag. colūne △la	Pyramides hexag. primę.	Cubi colum. quadrata pyramides hexag. equiangula.	Columnę pentagonę.	Columnę hexagonę primę.	Hexa. eqāguli.	Colūnę hexagonę equiāgulę.
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	4	2	5	6	4	5	6	7	8	10	12	7	14
3	4	5	6	9	6	12	15	10	14	18	22	27	36	45	19	57
4	6	7	10	16	12	22	28	20	30	40	50	64	88	112	37	148
5	8	9	15	25	20	35	45	35	55	75	95	125	175	225	61	305
6	10	11	21	36	30	51	66	56	91	126	161	216	306	396	91	546
7	12	13	28	49	42	70	91	84	140	196	252	343	490	637	127	889
8	14	15	36	64	56	92	120	120	204	28[illegible]	372	512	736	960	169	1352
9	16	17	45	81	72	117	153	165	285	405	525	729	1053	1377	217	1953
10	18	19	55	100	90	145	190	220	385	550	715	1000	1450	1900	271	2710

PROPOSITIO PRIMA.

QVOT *vnitates habet numerus quilibet, totum in ordine radicum locum sortitur. Et è contrario, quotum in radicibus locum obtinet quiuis numerus, tot quoque complectitur vnitates.* Nam radices ab vnitate exordium capientes per singulos locos singulas acquirunt vnitates. Quapropter millenarius numerus, quoniam ex mille constat vnitatibus, millesimus est in ordine radicum: Et vicissim numerus, qui millesimum in radicibus locum sortitur, mille comprehendet vnitates, hoc est millenarius ipse numerus erit. Et hoc
2ª est quod proponitur demonstrandum.

Omnis datus numerus inuenitur in ordine radicum. Esto datus numerus a. quicunque sit, aio quòd a. numerus inuenitur in ordine radicum omnino. Habeat enim a. quotuis vnitates, vtputa mille. iam enim per præcedentem a. numerus millesimum obtinebit in radicibus locum. Quod est propositum.

3ª *Radices singulæ duplicatæ constituunt pares singulos per ordinem.* Nam talia dupla mensurantur à binario: quandoquidem per binarium multiplicantur: & ideo per diffinitionem sunt ipsi pares numeri; quorum primus semel, secundus bis, tertius ter; & sic deinceps à binario mensu-
4ª rantur.

Impares ab vnitate per binarij appositionem successiue fiunt. Nam vnitas binario apposita, per differen. facit imparem, scilicet ternarium: Sed per præmissam pares numeri propagantur à binario per binarij crementum: & per differen. impares addunt paribus singuli singulis vnitatem: Igitur impares propagabuntur à ternario per idem binarij crementum (vt singuli singulos impares
5ª vnitate semper excedant.) Quod est propositum.

In ordine radicum impares & pares alternatim & inuicem succedunt. Nam, per præmissam, impares ab vnitate per binarium crescunt; quo fit vt in radicibus, vnitas, & vno semper intermisso numero, sequētes sint impares: per antepmissam verò, pares à binario per binarium crescunt; quare in radicibus binarius, & vno semper intermisso, sequentes sunt pares. Sic ergo fit, vt impares, in imparibus, pares semper in

locis

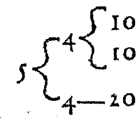
locis, paribus radicum inueniantur alternatim, sicut proponitur.

Omnis radix cum radice præcedenti, facit sibi collateralem 6
imparem: cum sequenti verò sequentem. Nam binarius cum vnitate facit ternarium: cum ternario autem iunctus, facit binario maiorem: & ideo imparem sequentem scilicet 5. per quartam præmissam. Rursus, cùm ternarius coniunctus cum binario, faciat quinarium, imparem sibi collateralem: Iam idem cum quaternario radice sequenti faciet binario maiorem, hoc est, imparem sequentem, per quartam præcedētem, qui septenarius est. Eodemque modo in infinitum, sicut propositio concludit.

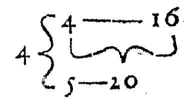
Omnis radix multiplicata in radicem sequentem, producit du- 7
plum trianguli sibi collateralis. Exempli gratia, ducatur quaternarius in sequentem radicem, scilicet quinarium: & producuntur 20. Aio, quòd 20. duplus est ad triangulum ipsi quaternario collateralem. Sumantur enim ab vnitate ad quaternarium radices: quibus applicentur totidem & ordine præpostero ab vnitate radices, singulæ singulis: sic enim fiet vt crescentes cum decrescentibus singuli singulis coniuncti numeri faciant quatuor summas æquales: hoc est quatuor quinarios. quare earum aggregatum erit planus numerus, qui fit ex ductu quaternarij in quinarium: & idcirco 20. erit talis planus. Duplus autem est planus ipse ad triangulum quaternarij: quandoquidem, per diff. talis triangulus est aggregatum vnius dictorum ordinum: quod est dimidium plani: Igitur 20. duplus erit ad triangulum quaternarij. Et similiter in omni casu id quod proponitur demonstrabimus.

1 —— 4
2 —— 3
3 —— 2
4 —— 1

Omnis triangulus duplicatus, efficit numerum parte altera 8
longiorem sequentem. Exempli gratia, triangulus quarti loci, est denarius. Aio, quòd 10. duplicatus efficit parte altera longiorem quinti loci. Nam per diff. talis parte altera longior producitur ex radice collaterali in præcedentem: scilicet ex 5. in 4. Sed per præmissam ex ductu 4. in 5. fit duplum trianguli quarti: Ergo tale duplum æquale est, parte altera longiori quinti loci. quod est propositum.

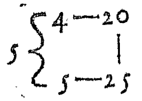


Omnis quadratus cum radice sua coniunctus, conficit sequen- 9
tem parte altera longiorem. Exempli gratia, quadratus quarti loci est 16. eiusque radix 4. Aio, quòd sexdecim cum quatuor conficit parte altera longiorem quinti loci.

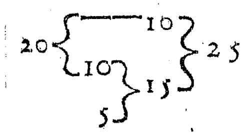


 Nam

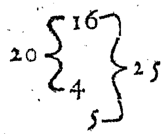
Nam per diffinitionem 4. multiplicatus in 4. producit quadratum ſuum ſcilicet 16. Et idem 4. ductus in 5. ſequentem radicē, producit parte altera lōgiorem quintum, ſcilicet 20. Sed talia duo producta differunt quaternario: quoniam multiplicantes differunt vnitate. Igitur 16. cum 4. efficit 20. hoc eſt, quadratus cum radice parte altera longiorem quintum. quod fuit demonſtrandum.



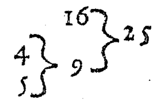
10ª *Omnis parte altera longior cum radice collaterali coniunctus, conflat collateralem quadratum.* Exempli gratia: Parte altera longior quinti loci eſt 20. Aio, quòd 20. cum 5. facit quadratum quintum. Nam, per diffi. talis parte altera longior fit ex 4. in 5. dictus verò quadratus fit ex 5. in ſe. Sed talia producta differunt quinario multiplicante: quoniam multiplicati differunt vnitate. Igitur 20. cum quinario conficit reliquum productum, ſcilicet quadratum quinarij: quod fuit demonſtrandum.



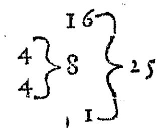
11ª *Omnis triangulus cum præcedenti triangulo coniunctus perficit quadratum ſibi collateralem.* Exempli gratia: Triangulus quintus ſcilicet 15. cum triangulo præcedenti ſcilicet 10. perficit quadratum quintum. Nam, 15. per diff. trianguli conſtat ex præcedenti $\triangle^{lo}$ & radice 5. Igitur aggregatum taliū duorum triangulorum cōſtat ex tali radice, & duplo $\triangle^{li}$ præcedentis, hoc eſt, ex 5. & duplo ipſius 10. Sed duplum ipſius trianguli 10. per antepræmiſſam eſt parte altera lōgior quintus: Ergo dictum triangulorum aggregatum, æquale erit aggregato ex parte altera longiore quinto, & ex radice quinta. Per præcedentem autem, parte altera longior quintus cum radice 5ª conflat quintum quadratum: Igitur dictum triangulorum 15. & 10. aggregatum, perficit Quadratum quintum: quod eſt propoſitum.



12ª *Omnis quadratus cum radice ſua, & cum radice ſequenti coniunctus, conſummat quadratum ſequentem.* Exempli gratia: Quadratus quarti loci ſcilicet 16. cum radice ſua ſcilicet 4. & cum radice ſequenti 5. compoſitus, conſummat quadratū ſequentis loci ſcilicet 25. Nam per nonam præcedentem, quadratus quartus cum radice ſua coniunctus, efficit quintum parte altera longiorem: per decimam verò præmiſſam, quintus parte altera longior conflet iunctus cum quinta radice, quintum quadratum. Igitur quartus quadratus cum 4ª & 5ª radicibus acceptus conficit $\square^{tu}$. quintum: ſicut proponitur.

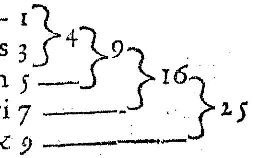


13ª *Omnis quadratus cum impari ſequente coniunctus, conſtituit quadratum ſequentem.* Exempli gratia: Quartus quadratus ſcilicet 16. cum impare quinti loci, ſcilicet cum 9. coniunctus, efficiet quintum quadratum. Nam per ſextam præmiſſarum, radix quarta cum quinta componunt imparem quintum: cumque per præcedentem, quadratus quartus, cum quarta & quinta radicibus, pariter ſumptus, efficiat quadratum quintum, ſequitur; vt idem quadratus quartus cum impare quinto, hoc eſt 16. cum 9. conſtituat quadratum quintum ſcilicet 25. ſicut concludit propoſitio.

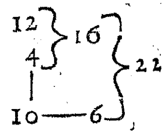


14ª *Omnis quadratus cum duplo ſuæ radicis & vnitate coniunctus conſtruit quadratum ſequentem.* Exempli gratia: Quartus quadratus ſcilicet 16. cum duplo ſuæ radicis, hoc eſt, cum 8. & vnitate coniunctus efficit quadratum ſequentem.

Nam per 3ª huius, duplus radicis quartæ, eſt par quinti loci: cui ſi addatur vnitas, fit per diff. impar quintus. Igitur talis duplus cum vnitate, eſt impar quintus. Verùm, per præcedentem, quartus quadratus cum quinto impare conſtituit $\square^{tu}$ ſequentem. Igitur & quartus quadratus cum dicto duplo & vnitate coniunctus: hoc eſt, 16. cum 8. & 1. conſtruit quadratum quintum ſcilicet 25. quod eſt propoſitum.



15ª *Ex aggregatione imparium numerorum ab vnitate per ordinem ſucceſſiuè ſumptorum, conſtruuntur quadrati numeri continuati ab vnitate, ipſiſq́ imparibus collaterales.* Nam per antepræmiſſam, vnitas imprimis cum impari ſequente facit quadratum ſequentem ſcilicet, 4. Et ipſe 4. quadratus ſecundus, cum impari tertio ſcilicet 5. facit quadratum tertium, ſcilicet 9. Itemque 9. quadratus tertius cum impari quarto ſcilicet 7. facit quadratum quartum, ſcilicet 16. & ſic deinceps in infinitum, ſemper 13ª repetita propoſitum demonſtratur.



16ª *Omnis Pentagonus conſtituitur ex triangulo & parte altera longiore collateralibus coniunctis.* Nam per diffinitionem ipſe, exempli gratia, pentagonus quartus, 22. fit ex $\square^{to}$ 4° & $\triangle^{lo}$ tertio coniunctis, hoc eſt ex 16. & 6. Sed per 10ª huius, parte altera longior quartus, ſcilicet 12. cum radice quarta, ſcilicet 4. conficit $\square^{tu}$ quartum. Et per diff. trianguli, triangulus quartus conſtat ex $\triangle^{lo}$ 3° & ex radice quarta. Igitur & Pentagonus quartus conſtituetur ex parte altera longiore quarto, ſcilicet 12. & ex $\triangle^{lo}$ quarto ſcilicet 10. ſicut proponitur demonſtrandum.

17 *Omnis item pentagonus constr uitur ex triplo præcedentis trianguli, & ex collaterali radice, coniunctis.* Exempli gratia: pentagonus quartus. scilicet 22. fit ex triplo tertij $\triangle^{li}$, scilicet ex 18. & ex radice 4^a .s.4. Nam per diffinitionem, pentagonus quartus scilicet 22. fit ex $\triangle^{lo}$ præcedenti tertio & ex quadrato quarto. Quadratus autem quartus scilicet 16. per 11^a huius, constat ex $\triangle^{lo}$ tertio 6. & ex $\triangle^{lo}$ quarto 10. coniunctis: & $\triangle^{lo}$ quartus ex diff. $\triangle^{li}$, constat ex $\triangle^{lo}$ tertio, & ex radice 4^a coniunctis. Igitur & Pentagonus 4^o constabit ex tribus triangulis tertijs, & ex radice quarta: quod est propositum. Vel sic: qm̃ per præcedentem, Pentagonus 4^o constabat ex parte altera longiore quarti loci, & ex $\triangle^{lo}$ quarto: & per 8^a huius, parte altera longior 4^o æquiualet duobus triangulis tertijs: & $\triangle^{lo}$ quartus æquiualet $\triangle^{lo}$ 3^o & radici quartæ: iam & pentagonus 4^o æquiualebit tribus $\triangle^{lis}$ tertijs & radici $4^æ$ quod est propositum.

22 { 16 { 6, 6, 4 } 10 ; 6 }

22 { 12 { 6, 6 } ; 10 { 6, 4 } }

18 *Omnis hexagonus primus constat ex præcedenti triangulo, & insuper ex ijs omnibus, ex quibus collateralis pentagonus constare ostensus est.* Nam, cùm per diffinitionem pentagonus, vnà cum præcedenti triangulo constituat collateralem hexagonum, sequitur vt hexagonus ipse constet ex dicto iam triangulo, & ex iis simul, ex quibus per duas præcedentes, constare ostensus est Pentagonus. Sicut proportio præsens concludit.

19 *Omnis hexagonus fit ex quadrato collaterali, duploq; præcedentis trianguli.* Exẽpli gratia, hexagonus primus quarti loci scilicet 28. fit ex quadrato quarto, scilicet 16. & duplo præcedentis trianguli, scilicet 6. Nam per diffini. hexagonus constat ex pentagono collaterali, & ex præcedenti $\triangle^{lo}$. Pentagonus autem ex quadrato, & ex præcedenti triangulo. Igitur hexagonus constabit ex quadrato, & ex duobus præcedentib. triangulis: quod est propositum.

16, 6 } 22 ; 6 } 28

20 *Omnis radix ducta in imparem collateralem producit hexagonum primum collateralem.* Exempli gratia: radix quarta scilicet 4. multiplicans quartum imparem, scilicet 7. facit collateralem hexagonum primum, scilicet 28. Nam radix 4. in se ducta, facit quadratum $4^ũ$ scilicet 16. Et eadem radix 4. in præcedentem radicem scilicet 3. ducta facit per 7^a huius, duplum trianguli tertij, scilicet 6. Sed per præcedentem, tale $□^{tũ}$ cum duplo talis trianguli perficiunt simul hexagonum primum 4^i loci. Ergo radix 4. ducta in se, & ducta in 3. hoc est

4 { 4—16 ; 3 { 6, 6 } }

ducta

ducta in 7. $4^ũ$ imparem, per 6^a huius, procreabit hexagonum primum 4^i loci; quod est propositum.

21 *Si ex radicibus ab vnitate dispositis sumantur tres, vel quinq; vel septem, vel sub quauis impari multitudine ab vnitate continuati numeri: tunc illorum aggregatum æquale erit ei, qui fit ex ductu medij in postremum.* Exempli gratia: capiantur septem radices sic 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. quorum medius est 4^o scilicet 4. Aio igitur, q; horum 7. numerorum aggregatum æquale erit ei quod fit ex multiplicatione medij scilicet 4. in postremum scilicet 7. q; sic ostenditur. Associentur propositis radicibus totidem singuli singulis æquales, sed ordine præpostero, applicati numeri: sic fiet, vt crementa decremẽtis compensata faciant combinationes singulas æquales: vtque bini medij ab extremis æquidistantes scilicet 4. & 4. sint inuicem æquales. Quare congeries totalis amborum ordinum erit planus numerus, qui fit ex ductu octonarij in septenarium: quæ sunt latera plani. Igitur & summa vnius ordinis, quæ dimidiũ est totalis cumuli producetur ex 4. in 7. hoc est ex medio numerorum in postremum. Quod fuit demonstrandum.

1.7
2.6
3.5
4.4—7—28.
5.3
6.2
7.1

22 *Omnis radix media inter vnitatem & imparem in ordine radicum, multiplicata in talem imparem, producit triangulum imparis eiusdem collateralem.* Exempli gratia, capiantur, sicut in præcedenti, quotuis imparis $mult^{nis}$ radices ab vnitate cõtinuate 1.2.3.4.5.6.7. septem scilicet. Aio, quòd in his radix æqualiter remota ab vnitate & impari: vt 2. qui æquidistat ab vno, & a 3. multiplicata in 3. producit collateralem ipsius 3. triangulum. Nam, per præcedentem, 2. qui medius est ipsorum 1.2.3. trium scilicet ab vnitate radicum, ductus in postremum, scilicet 3. producit aggregatum ipsorum 1. 2. 3. Sed tale aggregatum, per diffinitionem, est triangulus collateralis postremæ radicis 3. Igitur 2. ductus in 3. producit $\triangle^{lũ}$ collateralem ipsius imparis scilicet 6. quod est propositum. Item 3. radix æquè remota ab vnitate, & à quinario ducta ĩ quinq;, producit 15. triangulum. s. collateralem quinarij: quia. s. per præcedentem procreat aggregatum ex ipsis 1. 2. 3. 4. 5. quod est ipse triangulus, sicut proponitur. Adhuc 4. radix æquè distans ab vnitate & à 7. in 7. ipsum multiplicata generat 28. $\triangle^{lũ}$ .s. collateralẽ ipsius septenarij: quandoquidem per præcedentem, producit aggrauatum ex ipsis 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ipsum videlicet triangulum. Et sic deinceps, arguendo per præcedentem, & per diff. trianguli confirmatur propositum.

1
2—3—6.
3

1
2
3—5—15
4
5

1
2
3
4—7—28.
5
6
7

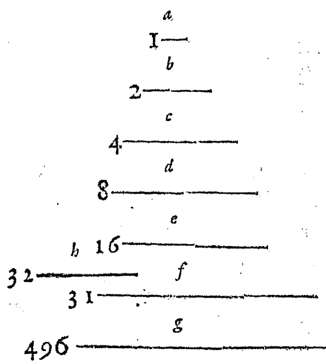
Hexa-

23ª *Hexagoni primi ab vnitate continuati per ordinem, ſunt & trianguli numeri locorum imparium.* Nam per 20ª huius, radices ſingulæ in ſingulos impares multiplicatæ, producunt per ordinem hexagonos ipſos. At per præcedentem, radices ſingulæ in ſingulos item impares ductę, procreant triangulos imparium collaterales per ordinem. Igitur & trianguli imparium locorum ſunt & hexagoni per ordinem continuati: ſicut demonſtrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Vnde manifeſtum eſt, quòd omnis hexagonus tetragonicus eſt & triangulus numerus.

24ª *Omnis numerus perfectus eſt hexagonus tetragonicus ſiue primus.* Hoc nos ſic demonſtrabimus. Exponantur ab vnitate continuati numeri pariter pares, hoc eſt, in proportione continua dupla a. b. c. d. e. quorum aggregatum ſit numerus primus, qui ſit f. & ex e. poſtremo in f. producatur g. qui per vltimam noni elementorum Euclidis, erit numerus perfectus. Oſtendendum igitur eſt, quòd g. hexagonus eſt, non æquiangulus, hoc pacto. Sit ipſius e. duplus ipſe h. Et tunc ſi ab ipſo b. ſecundo, & ab ipſo h. dematur primus, ſcilicet vnitas, erit per penultimam noni prædicti, ſicut reſiduum ipſius b. ad vnitatem, ſic reſiduum ipſius h. ad aggregatum ipſorum a b c d e. Sed reſiduum ipſius b. eſt vnitas, & perinde æqualis vnitati: Igitur & reſiduum ipſius h. æquale erit aggregato ipſorum a b c d e. hoc eſt, ipſi f. Verùm ſi ab ipſo h. duplo ipſius e. & perinde numero pari ſubtrahatur vnitas, iam supereſt numerus impar collateralis ipſius e. in radicibus: Ergo talis impar eſt ipſe f. Quare per 20ª huius, e. radix multiplicans ipſum f. collateralem imparem, generat hexagonum ſibi collateralem. Fuit autem tale productum ipſe numerus g. omnino igitur & g. numerus hexagonus eſt. quod demonſtrandum fuit.



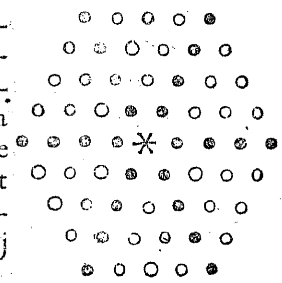
25 *Omnis numerus perfectus eſt triangulus.* Nam per præcedentem, omnis numerus perfectus eſt hexagonus primus. Per corollarium autem antepræmiſſæ, omnis hexagonus talis eſt, & triangulus: Igitur & omnis numerus perfectus eſt triangulus, ſicut propoſitio concludit.

26 *Omnis radix ſexcuplicata & cum vnitate, cumq; ſexcuplo præcedentis trianguli coniuncta, conſummat hexagonum æquiangulum ſequentem.* Exempli gratia: Sumatur 4. qui quarta

radix

radix eſt; & tertius triangulus, ſcilicet b. Aio, quòd 4. ſexcuplicatus ſcilicet 24. cum vnitate, & cum ſexcuplo ipſius 6. ſcilicet 36. coniunctus, conficit hexagonum æquiangulum ſequentem, ſcilicet 61. Nam radix quarta cum tertio triangulo, per dif. Δ^li, conficit quartum triangulum. Igitur ſexcuplum quartæ radicis cum ſexcuplo tertij Δ^li. ſimul efficiunt ſexcuplum quarti trianguli. Quare vnitas cum ſexcuplo 4æ radicis, & ſexcuplo tertij trianguli ſimul, ſunt æqualia aggregato ex vnitate & ſexcuplo quarti trianguli. verùm tale aggrauatum, per diffinitionem ipſius hexagoni, conſtituit ipſum hexagonum quintum. Ergo hexagonus quintus conſtruitur ex vnitate, ſexcuplo radicis quartę, & ſexcuplo tertij Δ^li. quod eſt propoſitum.

$$\begin{array}{l} \quad 1 \\ 6\left\{\begin{array}{l}4-24\\6-36\end{array}\right\}60 \end{array}\Bigg\}61$$



27 *Omnis parte altera longior triplicatus & cum vnitate coniunctus, conficit hexagonum æquiangulum collateralem.* Exempli gratia: Quintus parte altera longior eſt 20. huius triplum ſcilicet 60. cum vnitate efficit quintum, de quo loquimur, hexagonum ſcilicet 61. Nam per diffi. Hexagonus quintus conſtat ex vnitate & ſexcuplo 4ⁱ trianguli, ſcilicet 10. Quintus autem parte altera longior, per 8ª huius, conſtat ex duobus quartis triangulis. Sequitur ergo, vt ſex quarti trianguli æqualeant tribus parte altera longioribus quinti loci: vtq; hexagonus quintus conflctur ex tribus parte altera longioribus & ex vnitate: ſicut proponitur.

$$\left.\begin{array}{r}1\\3-20-60\end{array}\right\}61 \qquad \left.\begin{array}{r}6-10-60\\1\end{array}\right\}61$$

COROLLARIVM.

Vnde manifeſtum eſt, quòd omnis quadratus cum radice ſua coniunctus & inde triplicatus, ac mox cum vnitate poſitus, conficit hexagonum æquilaterum ſequentem. Nam per nonam huius, quadratus cum radice ſua æqualet parte altera longiori ſequenti. vnde corollarium conſtat ex præmiſſa.

28 *In tribus numeris æquali exceſſu creſcentibus, congeries extremorum æqualis eſt duplo medij.* Exempli gratia, tres numeri 3. 5. 7. binario creſcentes ſint. Aio quòd extremi ſcilicet 3. cum 7. faciunt duplum ipſius 5. Nam, quanto 3. minor eſt quàm 5. tanto 7. maior, quæ 5. per hypotheſim. Exceſſus itaque binarij reſarcit eiuſdem defectum; & perinde excedens cum deficiente, hoc eſt tertius cum primo faciunt duplum medij: quòd eſt propoſitum.

$$10-2-\left.\begin{array}{l}3\\5\\7\end{array}\right\}10$$

In tribus

29 *In tribus triangulis continuatis in ordine triangulorum, congeries extremorum vnitate excedit duplum medij.* Exempli gratia, tres capiantur continui trianguli, vtpute tertius, quartus, & quintus scilicet 6.10.15. Aio, quòd extremorum 6.& 15. vnitate superat duplum medij scilicet ipsius 10. Nam in his quartus Δ^{lus} sua radice excedit tertium, hoc est, quaternario: Quintus autem quartum quinario, sicut ratio diffinitionis postulat. Minuatur vnitas de quinto: & superest 14. fietque vt 6.10.14. æquali cremento procedant: scilicet quaternario crescentes. Quare, per præmissam 6. cum 14. duplum faciũt ipsius 10. Igitur 6. cum 15. vnitate duplum prædictum excedẽt. & similiter hoc ipsum in omnibus tribus continuatis Δ^{lis} ostendam: sicut demonstrandum proponitur.

21
6
10
15. 14.

PROPOSITIO 30^a.

Omnis triangulus quadruplicatus & cum vnitate coniunctus, efficit aggregatum collateralis & sequentis quadratorum. Exempli gratia: triangulus 4^us, scilicet 10. quadruplicatus cum vnitate facit 41. aggregatum scilicet quadratorum quarti & quinti. Applico enim Δ^{lo} proposito præcedentem Δ^{lum} & sequentem, scilicet tertium & quintum sic 6.10.15. atque ita per 11^a propositionem huius, constabit, quòd quartus quadratus fiet ex congerie ipsorum 10.& 6. quarti & tertij triangulorum: Et similiter, quòd quintus quadratus fiet ex cumulo ipsorum 15.& 10. quinti & quarti Δ^{lorum}. Quo fit, vt aggregatum talium quarti & quinti quadratorum, quod est 41. constet ex congerie Δ^{lorum} extremorum. & ex duplo medij: Sed per præcedentem, congeries extremorum æquiualet duplum medij & vnitatẽ. Igitur aggregatum ex quarto & quinto quadratis constabit ex quadruplo Δ^{li} medij & ex vnitate. Hoc est, ipse Δ^{lus} medius, quartus in hoc casu, scilicet 10. quadrupliciter cum vnitate conficiet aggregatum ex quarto, & quinto quadratis 25. scilicet & 16. sicut demonstrandum proponitur.

6 16
10 41
15 25

PROPOSITIO 31^a.

Omnis quadratus cum præcedenti quadrato, & cum sibi collaterali parte altera longiori coniunctus, consummat hexagonũ æquiangulum sibi collateralem. Exempli gratia: Quadratus quintus est 25. quartus præcedens 16. parte altera longior quintus 20. Aio, quòd horum aggregatum consummat hexagonum æquiangulum quintum. Nam, per præmissam, aggregatum ex quinto & quarto quadratis, æquiualet quadruplo trianguli quarti cum vnitate iuncto. Per octa-

16
25 41
20—20 61

uam

tiam autem huius, parte altera longior quintus æquiualet duplo trianguli quarti. Ergo aggregatum ex quinto & quarto quadratis, & ex parte altera longiori quinto, æquiualet sexcuplum trianguli quarti & vnitatem. verùm tale sexcuplum cum vnitate cõstituit hexagonum æquiangulum quintum, sicut eius diffinitio supponit: Igitur hexagonus æquilaterus quintus consummabitur ex aggregato quinti & quarti quadratorum, & quinti parte altera longioris: quod fuit ostendendum. Similiter in omni casu procedam propositum demonstrans.

PROPOSITIO 32^a.

Omnis hexagonus tetragonicus cum præcedenti quadrato coniunctus complet hexagonum æquiangulum sibi collateralem. Nam, nisi diffinitiones oblitus es, Hexagonus tetragonicus siue primi generis vocetur, constituitur ex quadrato collaterali, & ex duplo Δ^{li} præcedentis: Exempli gratia hexagonus talis quinti loci, scilicet 45. fit ex quinto quadrato 25. & ex duplo trianguli quarti 10. Sed tale duplum, per octauã huius, est parte altera longior quintus scilicet 20. ergo hexagonus tetragonicus quintus æquiualet aggregatũ ex quinto quadrato, & quinto parte altera longiore. verùm per præmissam quintus quadratus, cum quarto quadrato & cum quinto parte altera longiore consummat hexagonum æquilaterum quintum. Igitur hexagonus tetragonicus quintus cum quadrato quarto conflabit hexagonum æquiangulum quintum: quod fuit demonstrandum. Et similiter in omni casu demonstrabo propositum.

45
10 20
10 61
25—
16—

PROPOSITIO 33^a.

Sunt plerique numeri quadrati, qui coniuncti quadratum numerum faciunt. Sumatur enim quilibet in ordine imparium quadratus: namque his cum præcedenti quadrato in ordine quadratorum sumpto cõiunctus, per 13^a huius, quadratum conficit. Exempli gratia. 9. quadratus, quintus in ordine imparium, cum quadrato quarto 16. conficit 25. quadratum quintum. Item 25. quadratus, tredecimus impar cum duodecimo quadrato scilicet 144. coniunctus, conficit 169. quadratum videlicet tredecimum. Idemque semper fit in oĩ quadrato impari. Constat ergo per 13^a veritas propositi. Et aliter sic: sumantur duo inæquales quadrati numeri, aut ambo pares, aut ambo impares, siue duo plani similes a b. & b c. qui cũ parem numerum faciant, iam totius a c. dimidius

9 25
16

25 169
144

par erit.

a b d c
9 5 17
e
225
f
64
g
289

par erit. Esto igitur ipse dimidius a d. qui iam excedit ipsum a b. numerum ipso b d. ducatur numerus a b. in ipsum b c. & fiat e. igitur quadratus numerus erit e. per primam noni elemẽtorum. Quandoquidem ex ductu quadratorum seu similium planorum fit. Sit deinde □tus ipsius b d. ipse f. numerus. Ac deniqne ipsius a d. vel d c. quadratus ipse g. numerus. Sic enim, per quintam secundi elementorum ad numeros redactam, constabit quòd ipsorum, e f. quadratorum aggregatum est æquale ipsi g. quadrato. Cõstat ergo rursus propositũ.

PROPOSITIO 34ª.

Omnis pyramis triangula cum præcedenti pyramide triangula coniuncta, construit pyramidem quadratam sibi collateralem. Nam facilitatis gratia, capiatur pyramis quinta constans per diff. ex quinque triangulis. 1.3.6.10.15. & pyramis quarta cõstans ex 4or triangulis. 1.3.6.10. Aio, quòd horũ aggregatum facit pyramidem □ta quinta. Nam per 11ª huius, secundus triangulus ab vnitate scilicet 3. cum vnitate facit 2ũ quadratum scilicet 4. Item 2⁹ & 3⁹ trianguli, scilicet 3. & 6. faciunt 3ũ □tũ scilicet 9. Item 3⁹ & 4⁹ Δli scilicet 6. & 10. faciunt 4ũ □tũ scilicet 16. Adhuc 4⁹ & 5⁹ triãguli 10. scilicet & 15. faciũt quintum quadratum 25. igitur vnitas, & aggregata talium quadratorum consumant quinque per ordinem ab vnitate quadratos: & ideo, per diffin. construunt ipsam □ti quintam pyramidem: idemque similiter, in omni exemplo, cuiuslibet pyramidis Δli & præcedenti demonstrabo, per 11ª huius arguendo toties, quoties combinãtur Δli. Quare pyramis quinta Δla scilicet 35. cum præcedenti pyramide Δla scilicet 20. construũt 55. pyramidem □ti quintã. Quod est propositum.

1 .. 1
1— 3 .. 4
3— 6 .. 9
10—15 .. 16
10—15 .. 25
20. 35. 55

PROPOSITIO 35ª.

Omnis pyramis pentagona constituitur ex pyramide triangula collaterali, & ex duplo præcedentis. Cum per diff. Pentagona pyramis construatur ex pentagonis ab vnitate per ordinẽ aggregatis: iã, exẽpli grã, quinta pyramis pentagona constabit ex vnitate, & quatuor sequentibus pentagonis superficialibus. Quatuor aũt tales pentagoni, per diffin. fiũt ex coniunctione quatuor collateralium quadratorum, & quatuor præcedentium Δlorũ singuli singulorum. Quadrati quoque tales 4or per 11ª huius cõstãt ex coniunctione quatuor collateralium Δlorũ & totidem præcedentium Δlorũ. igitur quinta pyramis pentagona constabit ex aggregatione vnitatis quatuor sequentium triangulorum, duplici totidem præcedentiũ triangulorum.

1— 1
1. 1. 3— 5
3. 3. 6—12
6. 6. 10—22
10. 10. 15—35
20. 20. 35—75

gulorum. Sed per diffi. vnitas, & quatuor sequentes Δli faciũt pyramidem Δli quintam: & quatuor præcedentes Δli faciunt Δli pyramidem quartam. Ergo quinta pyramis pentagona construetur ex aggregatione pyramidis Δlæ quintæ, duploque 4æ. Quod est propositum. Similis est cæterorum locorum demonstratio.

PROPOSITIO 36ª.

Omnis pyramis pentagona conflatur ex pyramide quadrata collaterali, & ex pyramide Δla præcedenti. Nam, cum exempli gratia, pyramis pentagona 5ª per præcedentem, æquiualet aggregato ex quinta Δla pyramide, & ex duplo pyramidis Δlæ quartæ: & per ante præmissam, pyramidis Δlæ quintæ, & pyramidis triangulæ quartæ cumulus construat pyramidem quadratam 5ª, sequitur vt cõgeries pyramidis quadratę, quintę cum pyramide triangula quarta conficiat pyramidem pentagonam 5ª. & simili argumento omnis pyramis pentagona fiet ex pyramide □ta collaterali, & ex pyramide quadrangula præcedentis, sicut proponitur.

$75 \left\{ \begin{array}{l} 20 \\ 20 \\ 35 \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} 20 \\ 20 \end{array} \right\} 55$

pyr. pẽtag. 5. $\left\{ \begin{array}{l} \text{4. pyr. Δli} \\ \text{4. pyr. Δla} \\ \text{5. pyra. triang.} \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} \text{4. pyr. Δla} \\ \text{5. pyra. triang.} \end{array} \right\}$ 5. pyram. triãg.

PROPOSITIO 37ª.

Omnis pyramis hexagona tetragonica constituitur ex pyramide pentagona collaterali, & ex pyramide triangula præcedenti. Exempli gratia, ostendam ꝙ pyramidis hexagona quinta æqualet aggregato duarum pyramidum, scilicet pentagonæ collateralis, & triangulæ quartæ: sic per diffin. pyramidis hexagona quinta coalescit ex vnitate & ex quatuor hexagonis superficialibus sequentibus: tales autem hexagoni, per diff. singuli ex quatuor pentagonis collateralibus, & ex totidem præcedentibus triangulis. Cumque vnitas & quatuor pentagoni sequentes, per differen. faciant quintam pyramidem pentagonam: quatuorque trianguli præcedentes conficiant quartam pyramidem triangulum: Iam, pyramis hexagona quinta, scilicet 95. conflabitur ex Pyramide pentagona quinta scilicet 75. & ex pyramide triangula quarta, scilicet 20. & similiter per aliis locis accommodabitur demonstratio propositi.

1—— 1
1. 5—— 6
3. 12——15
6. 22——28
10. 35——45
20. 75. 95.

PROPOSITIO 38ª.

Omnis pyramis hexagona tetragonica constat ex pyramide triangula præcedenti, & insuper ex ijs, ex quibus pentagona pyramis collateralis cõstare ostensa est. Cũ enim, per præcedẽtem, pyramidis hexagona, exempli gratia, quinti loci cõstet ex Δla pyramide 4ª & ex pyramide pentagona qnta, & pẽtagona

pyramides

35
20
20
20
95

pyramidis quinta, per 35^a constet ex pyramide triangula quinta,& ex duplo pyramidis triãgulæ quartæ. Iam sequitur vt pyramidis hexagona quinta constet ex pyramide triangula quinta,& ex triplo pyramidis triangulę $4^{æ}$. Et similiter,cum per ante præmissam pyramis pentagona 5^a confletur ex pyramide □^{ta} quinta, & ex pyramide triangula quarta: & per præmissam pyramis hexagona 5^a superaddat pyramidi pentagonæ $5^{æ}$ pyramidem triangulam quartam: non minus sequitur vt pyr^{is} hexagona quinta æquiualeat aggregatum ex pyr^{de} quadrata quinta, duploq; triãgulæ pyramidis quartæ: sicut præsens propositio concludit.

55
20
20
95

PROPOSITIO. 39^a.

Omnis pyramis hexagona æquiangula constat ex radice collaterali,tanquàm axe, & ex pyramidis triangulæ præcedentis sexcuplo. Hæc propositio facillime demonstratur ea ipsius pyramidis hexagonæ,& hexagoni sui diffinitionibus. Exēpli gratia, pyr^{is} hexagona æquiangula 5^i loci, scilicet 125. per diff. constat ex vnitate & ex quatuor sequentibus hexagonis æquiangulis. tales autem hexagoni per diff. singuli constant ex singulis vnitatibus & ex præcedentibus Δ^{lis} singulis sexcuplicatis. Verùm singuli tales Δ^{li} (qui sunt quatuor ab vnitate,construunt, per diff.pyramidem triangulam $4^{\hat a}$. & perinde sexcuplicati construunt sexcuplum pyramidis triangulæ quartæ. Igitur dicta pyramis hexagona 5^a constabit ex quinque vnitatibus, 5^a scilicet radice, & ex pyramidis triangulæ quartæ sexcuplo: estque talis radix quasi axis ipsius pyramidis constans ex vnitate verticali, ac quatuor vnitatibus centralibus hexagonorum pyramidem ipsam integrantium. Et similiter per quotcunque pyramide, sicut pro 5^a factum est, ratiocinari possumus ad demonstrationem propositi.

1.
6 { 1. 6. 1.7.
3. 18.1.19.
6. 36.1.37.
10.60.1.61.
125.

PROPOSITIO. 40^a.

Omnis pyramis hexagona æquiangula construitur ex aggregato pyramidis hexagonæ tetragonicæ collateralis & præcedentis pyramidis quadratæ. Exempli gratia: pyramis hexagona æquiangula 5^i loci fiet ex congerie pyramidis hexagone tetragonicæ $5^{æ}$, & pyramidis □^{tæ} quartæ.Nā per diffi.pyramis hexagona æquiangula 5^a constat ex vnitate & ex 4^{or} sequentibus hexagonis æquiangulis. Tales autem 4^{or} hexagoni singuli,per $32^{\hat a}$ huius propositionem, constat ex singuls hexagonis tetragonicis collateralibus, & ex singulis quatuor præcedentibus quadratis. Verùm vnitas cum quatuor dictis hexagonis

1—1
1. 6—7
4. 15—19
9. 28—37
16.45—61
30.95—125

hexagonis tetragonicis construunt,per diffi. pyramidem hexagonam tetragonicam quintam: & dicti quatuor quadrati ab vnitate,constituunt pyramidem quadratam quartam. Igitur pyramis hexagona æquiangula quinta cōflabitur ex pyramide hexagona tetragonica quinta, & ex pyramide quadrata quarta:quod erat demonstrandum. Similiter per $32^{\hat a}$ & diffinitiones in cæteris locis, verificatur propositum.

PROPOSITIO 41^a.

Omnis pyramis hexagona æquiangula æqualis est aggregato trium pyramidum,scilicet pentagonæ collateralis, ac triangulæ & quadratæ præcedentium. Exempli gratia,dico quòd pyramis hexagona æquiangula quinti loci.s.125.æquiualet tres pyramides.s.pentagonam quintam 75. vnà cum triangula quarta, scilicet 20.& quadrata quarta, scilicet 30. Nam per præcedentem,pyramis hexagona æquiangula quinta æquiualet duas pyramides,scilicet hexagonam tetragonicam collateralem 95. & quadratam quartam, scilicet 30. Per $37^{\hat a}$ autem propositionem huius, hexagona tetragonica quinta æquiualet duas, scilicet pentagonam quintam & triangulam quartam pyramides, scilicet 75.& 20. Igitur hexagona æquiangula quinta æquiualebit tres, scilicet pentagonam quintam, triangulam quartam,& quadratam quartam, sicut fuit demonstrandum: & eodem syllogismo in omni casu constabit semper propositum.

20 Δ
95
75
*125
30 □

PROPOSITIO 42^a.

Omnis columna quadrata, siue cubus, componitur ex duabus columnis triangulis, scilicet collaterali & præcedenti, & ex præcedenti triangulo. Exempli causa, dico, quòd cubus quintus scilicet 125. componitur ex duabus columnis triangulis, scilicet quinta 75.& quarta, scilicet 40. & ex triangulo quarto, scilicet 10. Nam,per diff. cubus talis conficitur ex quinque quadratis quintis: tales autem quadrati, per vndecimam huius, constant ex quinque triangulis quintis & ex totidem quartis. Verùm quinque trianguli quinti, per diff. faciunt columnam triangulam quintam: quinque autem trianguli quarti, faciunt columnam triangulam quartam & vnum triangulum quartum. Igitur cubus assumptus quinti loci æquiualebit aggregatum duarum pyramidum triangularum quintæ & quartę, & trianguli quarti: sicut demonstrandum fuit. Et simili argumento, quod pro quinto loco, pro quocunque alio procedam ad confirmandum propositum.

10—10.15—25
10.15—25
10.15—25
10.15—25
10.15—25
10. 40. 75—125

X PRO-

PROPOSITIO 43.

10——25—35
10.25—35
10.25—35
10.25—35
10.25—35
10.40 125—175

Omnis columna pentagona construitur ex duabus columnis, scilicet quadrata collaterali, triangula præcedenti, & ex triangulo præcedenti. Exempli gratia, columna pentagona quinta 175. aio, quòd conficitur ex duabus columnis, scilicet quadrata quinta 125. & triangula quarta, scilicet 40. & ex triangulo quarto, scilicet 10. Nam per diff. columna pentagona quinta coaceruatur ex quinque pentagonis quintis. Talesque pentagoni, per diffin. ex quinque quadratis quintis, totidemque triangulis quartis. Cumque quinque quadrati quinti conficiant, per diffin. columnam quadratam, siue cubum quintum: atque, cùm quinque trianguli quarti æquiualeant columnam triangulam quartam, & triangulum quartum; iam planè sequitur, vt columna pentagona quinta æquiualeat cubum quintum, columnam triangulam quartam, & triangulum quartum. Neque aliud fuit demonstrandum. Sed argumentatio pro quinto loco facta, similiter ad aliud quemuis accommodabitur, sicut propositio concludit. Potes autem hìc, pro cubo, substituere ea, quibus per præcedentem æquiualet cubus. Sic enim columna pentagona æquiualebit triangulam columnam collateralem, duplum columnæ triangulæ quartæ, duplumque trianguli quarti.

$$175\begin{cases}125\begin{cases}75\\40\\10\end{cases}\\40\\10\end{cases}$$

PROPOSITIO 44.

Omnis columna hexagona tetragonica constituitur ex collaterali columna pentagona, exque præcedenti columna triangula vnà cum præcedenti triangulo. Exempli gratia, columna hexagona tetragonica quinta, scilicet 225. conficitur ex quinta columna pentagona scilicet 175. & ex quarta columna triangula, scilicet 40. vnà cum quarto triangulo, scilicet 10. Nam, per diffin. columna hexagona tetragonica quinti loci, coalescit ex quinque hexagonis tetragonicis. Tales autem hexagoni constant per diffin. ex quinque pentagonis eiusdem loci, & ex totidem triangulis loci quarti. Porrò quinque pentagoni quinti conficiunt per diff. columnam pentagonam quintam. Et quinque trianguli quarti æquiualent columnæ triangulæ quartæ & triangulo. Igitur columna hexagona tetragonica quinta perficitur ex columna pentagona quinta, & ex columna triangula quarta. & ex triangulo quarto: quod erat ostendendum, vtque pro quinto factum sic pro cæteris locis prioribus, vel posterioribus argumentare, ad demonstrandum propositum. Et pro pentagona columna substituere potes ea, quæ

10——35—45
10.35—45
10.35—45
10.35—45
10.35—45
10. 40 175—225

quæ per præmissam pentagonæ æquiualent. Sic concludes, columnam hexagonam tetragonicam æquiualere aggregatum columnæ quadratæ collateralis, dupli columnæ triangulæ quartæ, duplique trianguli quarti.

$$225\begin{cases}17\begin{cases}125\\40\\10\end{cases}\\40\\10\end{cases}$$

PROPOSITIO 45.

Omnis columna hexagona æquiangula æquiualet aggregato ex columna hexagona tetragonica collaterali, & ex cubo, quadratoque præcedentibus. Exempli gratia, columna hexagona æquiangula quinti loci scilicet 305. æquiualet aggregato ex columna hexagona tetragonica quinta, scilicet 225. & ex cubo quarto, scilicet 64. quadratoque quarto, scilicet 16. Nam, per diffi. columna hexagona æquiangula quinta constat ex quinque hexagonis æquiangulis. Tales autem hexagoni componuntur, per 32ª. huius, singuli ex coniunctione singulorum hexagonorum tetragonicorum eiusdem quinti loci, & totidemque quadratorum quarti loci. Sed quinque quadrati in quarto loco valent cubum quartum, & quadratum eiusdem loci simul. Et quinque hexagoni tetragonici ex quinto loco faciunt, per diffin. columnam tetragonicam quintam. Igitur columna hexagona æquiangula quinta, valet aggregatum columnæ hexagonæ tetragonicæ quintæ, cubi quarti, & eiusdem quadrati: quod ostendendum fuit. Quæ demonstratio, sicut quinto loco, ita & alijs accommodatur, ad confirmandam propositi veritatem.

16——45—61
16.45—61
16.45—61
16.45—61
16.45—61
16. 64.225.305

COROLLARIVM.

Et pro columna hexagona tetragonica, substituere potes quicquid in præmissis, tali columnæ ostensum est æquiualere. Sic concludere possum, quòd columna hexagona æquiangula æquiualet columnam pentagonam collateralem, columnam triangulam cum suo triangulo, & cubum cum suo quadrato præcedentes. cæteras æquipollentias omitto, ne pluribus, quàm decet, negocium agam.

$$305\begin{cases}225\begin{cases}125\\40\\10\end{cases}\\64\\16\end{cases}$$

PROPOSITIO 46.

Omnis columna hexagona æquiangula coagmentatur ex radice collaterali tanquàm axe, & ex congerie præcedentis triangulæ columnæ, suique trianguli sexcuplicata. Nam, per diff. tali columna cõstruitur ex hexagonis æquiangulis; hexagoni autẽ ex cẽtralibus vnitatibus, & sexcuplo triãguli præcedẽtis. Exẽpli grã, colũna hexagona æquiãgula quĩta 305. p diff. cõstruitur ex quiq; hexagonis æquiãgulis, hoc ẽ, quĩcuplo ipsiꝰ 61. quĩti loci.

$$6\begin{cases}10.60.1-61\\10.60.1-61\\10.60.1-61\\10.60.1-61\\10.60.1-61\end{cases}$$
305.

Tales autem hexagoni quinque per diffi.coagmẽtãtur ex vnitatib. ſingulis.ſ. 5.qui eſt quinta radix:& ex triãguli quarti 10. ſexcuplo.ſinguli. Sed quinque talia ſexcupla triangulorum,faciunt, per diff. ſex columnas triangulas quartas, ſexque ſuos triangulos. Igitur columna hexagona æquiãgula quinta ſurgit ex coagmẽtatione 5^e radicis,tanq̃ axis: & ex columnis quarti loci,ſex,cum totidem earũ triãgulis,ſicut fuit demonſtrãdum. Et aſſumpti loci argumentum accommodabitur ad quemuis locum aſſignatum: ſicut concludit propoſitio.

PROPOSITIO 47^a.

Omnis columna triangula æqualis eſt aggregato duarum pyramidum, ſcilicet quadratæ collateralis, & triangulæ præcedentis. Exempli gratia,quinta colũna triangula ſcilicet 75.dico,quòd æquiualet aggregato pyramidis quadratę quintę,ſcilicet 55.& pyramidis triangulę $4^æ$.ſ.20. Intelligam enim quinque triangulos quinti loci, ſingulos ſic diſtinctos, vt formationis diffi. poſtulat.1.2.3.4.5.qui iam per diffi.conſtituũt 5^a columnam triangulam. ex horum ſecũdo excipio vnitatem:ex tertio 1.2. ex quarto 1.2.3.ex poſtremo 1.2.3.4. qui ſunt quatuor trianguli ab vnitate diſpoſiti, & per diffi. integrantes quartam pyramidem triangulam. ſic relinquitur vnitas, duo binarij,tres ternarij,quatuor quaternarij,& quinque quinarij,hoc eſt quicunque quadrati ſeriatim ab vnitate diſpoſiti, & per diffin. conſtruentes quintam pyramidem quadratam. Itaque totum aggregatum ex quinque totalibus triangulis, hoc ex 15. quinquies ſumpto, ipſa videlicet quinti loci triangula columna equiualet cumulo pyramidis quadratæ quintæ, ac pyramidis triangulæ quartæ: quod fuit oſtendendum.Similis eſt cuiuslibet alterius loci argumentatio ad veritatem propoſiti.

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

col.$\triangle^{la}$ 5^a 75 $\begin{cases} 55.\text{pyr.}\square^{ta}\ 5^a \\ 20.\text{pyr.}\triangle^{la}\ 4^a \end{cases}$

PROPOSITIO 48^a.

*Omnis columna triangula æqualis eſt aggregato trium pyramidum triangularum,ſcilicet vnius collateralis, & duarũ præcedentium.*Exempli gratia,dico,quòd columna triãgula quinta.ſ.75. æquiualet aggregato trium pyramidũ triangularum.ſ.quintæ, & duplo quartæ. Nam,per præcedentem,columna triangula quinta æquiualet pyramidem quadratã quintã & pyramidem triãgulam 4^a. Sed per 34^a huius,pyramidis quadrata 5^{a} æquiualet pyramidem triangulã quintã,& pyramidem triangulã 4. Igr̃ columna $\triangle^{la}$ 5^a valebit pyramidẽ triangulã quintã,& duas pyr^{des} $\triangle^{las}$ 4^{as}. quod fuit demõſtrãdũ.Qui ſyllogiſmus ſicut hic quinto loco, ita & vbiuis inſeruiet. ſicut propoſitio cõcludit.

col.$\triangle^{la}$ 5^a 75 $\begin{cases} 55 \begin{cases} 35\ \triangle^{la}\ 5 \\ 20\ \triangle^{la}\ 4 \end{cases} \\ 20\ \triangle^{la}\ 4^a \end{cases}$ $\square^{ta}.\ 5^a$

PRO-

PROPOSITIO 49^a.

Omnis columna triangula æqualis eſt pyramidi pentagoni collaterali Exempli gratia, columna triangula quinta eſt 75. quem numerum dico eſſe pyramidem pẽtagonam quintam. Nam per antepræmiſſam, columna triangula quinta valet pyramidem quadratam 5^a,& pyramidẽ $\triangle^{li}$ quartam. & per 36^a tales duę pyramides conficiunt pyramidem pentagonam 5^a.quamobrem pyramis pẽtagona quinta valebit columnam $\triangle^{la}$ 5^a. quod fuit demonſtrandum. Eodemq́ue argumento vtar pro alio quouis loco,ſicut propoſitio ſentit.

pyr.$\triangle^{la}$ 4^a.
col.$\triangle^{la}$ 5^a 75 $\begin{cases} 20 \\ 55 \end{cases}$ 75.pyr.⬠.5^a
pyr.$\square^{ta}$ 5^a

PROPOSITIO 50^a.

Omnis columna triangula, cum duplo ſui trianguli, æquiualet triplo pyramidis triãgulæ collateralis. Exẽpli gratia,columna $\triangle^{la}$ quinta 75. vnà cum duplo ſui trianguli.ſ.cum 30.dico ꝙ æquiualet triplum $\triangle^{læ}$ pyramidis quintæ.ſ.35.Nam,per ante præmiſſam, columna $\triangle^{la}$ quinta valet tres pyramides triangulas.ſ. 5^a .& duas quartas. Apponantur vtrobique duo trianguli quinti, & fient columna 5^a, cum duobus triangulis 5^{is} ſimul accepta æqualis tribus pyramidibus triangulis.ſ. $5^æ$,duabus quartis, vnà cum duobus triangulis quintis: ſed duæ pyramides $4^æ$ cum duobus $\triangle^{lis}$ quintis,faciunt per diff. duas pyramides 5^{as}. Igitur columna triangula 5^a cum duobus triangulis 5^{is} valebit tres pyramides triangulas quintas. quod fuit demonſtrandum. Quæ argumentatio ad omnem alium locum accõmodari poteſt,ſicut propoſitio concludit.

$\begin{cases} 75 \begin{cases} 35 \\ 20 \\ 20 \end{cases} \\ 15 \\ 15 \end{cases}$ $\begin{cases} 20 \\ 15 \end{cases}$ 35 $\begin{cases} 20 \\ 15 \end{cases}$ 35

cub^9 5^9 125 $\begin{cases} \text{col.triãgula } 5^a.75 \\ \text{col.triãgula } 4^a.40 \\ \text{triangulus } 4^9.10 \end{cases}$

PROPOSITIO 51^a.

Omnis cubus æqualis eſt pyramidi hexagonæ æquiangulæ collaterali. Exempli gratia, cubus quintus ſcilicet 125. qui & idem numerus eſt pyramis hexagona æquiangula quinta. Quod ſic oſtendam. Cubus 5^9,per 42^a æqualis eſt aggregato columnarum $\triangle^{larũ}$ quintæ & $4^æ$, necnon & trianguli quarti. At per 41^a pyramis hexagona æquiangula quinta æqualis eſt aggregato pyramidis pentagonæ quintæ: pyr^{dis} $\square^{tæ}$ quartæ, & pyramidis triangulæ $4^æ$ Demonſtrandum eſt igr̃ nobis, quòd hæc duo prædicta aggregata ſunt inter ſe æqualia: ſic enim per communem animi conceptum ſequetur,vt cubus & pyr^{is} hexagona æquiangula 5^i loci, ſint inuicem æquales. Auferatur ab illo quidem aggregato columna triangula 5^a: ab hoc vero aggregato pyr^{is} pentagona 5^a iampridẽ per ante præmiſſam æquales:Et demonſtrandũ erit,quòd duo reſidua inde.ſ. aggregatum columnæ triangulæ quartæ & $\triangle^{li}$ quarti;

Pyr.hexag.æqãgula ſ.125 $\begin{cases} \text{Pyr.⬠}^{na}.5^a.75 \\ \text{Pyr.}\square^{ta}\ 4^a.30 \\ \text{Pyr.}\triangle^{la}\ 4^a.20 \end{cases}$

Col triãg quarta. 40 — pyr.⬠^{na}.4^a 40 $\begin{cases} \text{pyr.}\square^{ta}\ 4^a\ 30 \\ \text{pyr.}\triangle^{la}\ 3^a\ 10 \end{cases}$

 hinc

Δ^{lo} 4^{o}
10 —— Δ^{lo} 4^{o} — 10.

hinc autem aggregatum pyramidis $\square^{te}$ 4^{ae}, & pyramidis triangulæ quartæ, sunt inuicem æqualia: quòd sic patet. Per antepræmissam rursus, columna triangula quarta, æqualis est pyramidi pentagonæ quartæ: pyramis autem pentagona quarta, per 36^{a}, æqualis est pyramidi quadratæ quartæ, & pyr^{di} triangulæ tertiæ. Quamobrem, columna triangula 4^{a}, vnà cum Δ^{lo} quarto, æqualis erit cumulo trium, scilicet pyramidis $\square^{te}$ quartæ, pyramidis triangulæ tertiæ & trianguli 4^{i}. Ostendendum est igitur, quòd dictus cumulus æqualis est aggregato pyramidis quadratæ 4^{ae} & pyramidis triangulæ 4^{ae}. Auferatur vtrinque, scilicet tam ab illo cumulo, quàm ab hoc aggregato pyramis quadrata 4^{a}. & demonstrandum supererit, quòd pyramis triangula tertia vnà cum Δ^{lo} quarto æqualis est pyramidi triangulæ 4^{ae}: quòd tandem constat per diffin. ipsius pyr^{dis} triangulæ: quippe quæ assumpto semper sequenti triangulo procreat sequentem pyramidem. Qua argumentatione, sicut in quinto, ita & in quolibet alio præcedenti vel sequenti loco, semper constabit propositum.

Pyr. $\square^{ta}$ 4. — pyr. $\square^{ta}$ 4.
3. 30.

Pyr. Δ^{la} 3^{a} 10
Δ^{lo} 4^{o} 10 } pyr. Δ^{la} 4^{a} 20.

COROLLARIVM.

QVONIAM igitur singuli cubi ab vnitate ordinati sunt singulis pyramidibus hexagonis æquilateris ab vnitate dispositis, collateralibus æquales; propterea manifestum est, quod cuborum differentiæ sunt pyramidum prædictarum differentijs singulæ singulis æquales, hoc est, ipsis hexagonis æquiangulis. Ac, sicut ex talium hexagonorum ad vnitatem successiua coaceruatione pyramides prædictæ per ordinem construuntur, ita & cubi procreantur. Suntque ipsi hexagoni cuborum gnomones ab vnitate continuati.

1 } 8
7 } 27
19 } 64
37 } 125
61

PROPOSITIO 52^{a}.

Omnis cubus cum sequenti hexagono æquiangulo coniunctus constituit cubum sequentem. Hæc propositio cōstat ex præcedenti corollario. Sed & aliter hîc ipsam demonstrabo. Disponantur numeri sic: vnitas 4. & 5. Item horum quadrati 16. & 25. & parte altera longior ex 4. in 5. factus scilicet 20. Item eorum cubi 64. & 125. deinde ex 4. in 20. fiat 80. & ex 5. in 20. fiat 100. Quibus dispositis cùm 64. sit cubus quaternarij, atq; 125. cubus quinarij, ostēdēdum est, ꝙ 64. 4^{us} cubus cum 5^{o} hexagono æquiangulo coniunctus conflat cubum 5^{um} 125. quòd sic patet: Qm̄, per 9^{a} huius 4. est differentia ipsorum 16. & 20. per 10^{a} huius 5. est differētia ipsorum 20. & 25. atq; ipse 4. multiplicans ipsos 16. & 20. facit ipsos 64. & 80. Itemq;

1
4 . 5
16 . 20 . 25
64 . 80 . 100 . 125

Itemque ipse 5. multiplicans ipsos 20. & 25. facit ipsos 100. & 125. propterea necesse est, vt differentia ipsorum 64. & 80. sit ipse 16. vtque differentia ipsorum 80. & 100. sit ipse 20. vtque differentia ipsorum 100. & 125. sit ipse 25. quoniam differentia productorum producitur ex multiplicāte in differentiam multiplicatorum. Igitur differentia ipsorum cuborum 64. & 125. constabit ex congerie trium numerorum 16. 20. & 25. qui quidem sunt in hoc exēplo, quadratus quintus, parte altera longior quintus & quadratus 4^{us}: qui cum, per 31^{a} huius, faciant simul acceptæ hexagonum æquiangulum quintum: sequitur, vt talis hexagonus sit differentia dictorum cuborum: hoc est, vt cubus quartus 64. cum dicto hexagono quinto scilicet 61. coniunctus constituat cubum quintum 125. quod demonstrandum in hoc exemplo assumpsimus: similiter in omni alio casu id idem demonstraturi: sicut proponitur.

COROLLARIVM.

HINC ergo rursus manifestum est, quòd sicut hexagoni æquilateri ab vnitate continuati, pyramides hexagonas æquiangulas, ita & cubos ordinatim coaceruant.

PROPOSITIO 53^{a}.

Omnis parte altera longior, quadruplicatus cum vnitate, conficit quadratum collateralis imparis. Nam parte altera longior, per nonam huius, cōstat ex præcedenti quadrato, suaq; radice. Igitur quadruplicatus facit quadruplū talis quadrati (quod quadruplum est numerus quadratus) & quadruplum prædictæ radicis, hoc est, duplum radicis huic quadrato debitę. Itaque parte altera longior quadruplicatus cum vnitate, efficit congeriem ex quadrato quodam, duploq; suæ radicis atque vnitate confectam. Sed, per 14^{a} huius, talis congeries est quadratus sequens: Igitur parte altera longior quadruplicatus cum vnitate facit quadratum: qui cùm impar sit, propter vnitatis additionem, erit omnino & radix eius impar. Qui scilicet constat ex præcedenti radice duplicata cum vnitate, & per inde est impar ipsius parte altera longioris collateralis. Exempli gratia: numerus 30. parte altera longior sexti loci quadruplicatus cum vnitate facit 121. quadratum vndenarij sexti imparis. Nam 30. per nonam constat ex præcedenti quadrato 25. scilicet quinto, & ex quinta radice 5. quadruplum autem ipsius 25. est 100. quadratus paris in sexto loco. Quadruplum verò, eius radicis scilicet 5. est duplum

4 { 5 —— 100
1
11 — 11 —— 121

plũ radicis ipsius 100. Igr̃ quadruplum totius 30. est aggregatum ipsius 100. duploq; suæ radicis: qđ cũ vnitate, facit per 14^a, □^{tũ} sequentẽ. s. 11. radicis, qui est impar sexti loci. Quod est demonstrãdum. Similiter, ꝙ pro sexto loco syllogizamus, vbi vis accommodabis. sicut proponitur. PROPOS. 54^a.

4—30—120
1
8—15—120
1
121

Omnis triangulus octuplicatus cum vnitate, conficit sequentis imparis quadratum. Exempli gratia, 15. 5^9 Δ^{l^9} octuplicatus facit 120. qui cum vnitate facit 121. □^{tũ} sexti imparis. s. 11. Nam per 8^a huius, 5^9 triangulus duplicatus facit 30. sextum parte altera longiorem. Sed, per præcedentem, 6^9 parte altera longior quadruplicatus cum vnitate, conficit □^{tũ} 6^i imparis 11. Igitur & triangulus 5^9 15. octuplicatus cum vnitate faciet eundem □^{tũ} sexti imparis 11. quod erat demonstrandum. Quæ demonstratio & alijs locis inseruiet. sicut proponitur.

PROPOSITIO 55^a.

Quod fit ex radice in parte altera long[illegible] collaterali cum quadrato collaterali coniunctum, [illegible] cubum collateralem. Exempli gr̃a: quinta rad[illegible] ducta in 5^a parte altera longiorem. s. 20. facit 10[illegible] autẽ iũctum cum quinto □^{to} 25. facit [illegible]ubum. Nam per diffin. 5. in se ductus, facit 125. quint[illegible]dratum 25. quinti loci: & idem 5. cũ quinto parte altera [l]ongiori 20. per decimam huius, facit 25. quadratum suum [illegible] Sed per primam secũdi Elementorꝝ ad nũos relatam, qđ fit ex 5. in se, qđq; ex quinq; in 20. est ęquale simul ei, quod fit ex 5. in aggregatum ex 5. & 20. qui quadratus est ipsius 5. Igitur □ ipsius quinq; cum producto ex 5. in 20. parte altera longiori quinto, simul sunt æqualia ei, quod fit ex 5. in suum □^{tũ} 25. hoc est cubo ipsius quinarij: qđ fuit demonstrandum. vtq; in loco quinto, similiter & alibi constabit propositum.

5 { 20——100 / 5——25
cubus quintus 125

PROPOSITIO 56^a.

Quod fit ex radice in triangulum præcedentem duplicatum, & cum quadrato radicis coniunctum, conflat cubum radicis. Exempli gratia, quod fit ex 5. radice quinta in 10. triangulũ $4^ũ$. s. 50. duplicatum est 100. hoc cum 25. quadrato radicis, conflat 125. cubum radicis. Nam, per 8^a huius 10. triangulus 4^9 duplicatus facit 20. parte altera lõgiorem $5^ũ$: quare productũ ex 5. in 10. s. 50. est dimidium producti ex 5. in 20. & ideo 50. duplicatum facit productum ex 5. in 20. Sed per præcedentem, productum ex 5. in 20. cum □^{to} ipsius 5. facit cubum ipsius 5. Igitur & 50. duplicatum, hoc est, 100. cum □^{to} ipsi^9 5. facit cubũ eũdẽ $5^æ$ radicis. s. 125. quod est ꝓpositũ.

5 { 10 { 50 / 50 ; 5 — 25
125

PRO-

PROPOSITIO 57^a.

Omnis cubus cum trianguli præcedentis quadrato cõiunctus, efficit quadratum trianguli collateralis. Exempli gratia, cubus quintus 125. cum quadrato trianguli quarti 10. hoc est cum 100. coniunctus, efficit 225. quadrati scilicet trianguli quinti 15. Quod sic ostenditur. Radix quinta 5. cũ triangulo quarto 10. per diffinitionem, conficit triangulum quintũ 15. quare, per quartam secundi Elementorum ad numeros redactam, duo quadrata scilicet dictæ radicis, & dicti triãguli quæ sunt 25. & 100. vnà cum duplo eius, quod ex radice fit in triangulum, hoc est duplo ipsius 50. conficiunt quadratum trianguli quinti, scilicet 225. Sed, per præcedentem, tale duplum vnà cum quadrato talis radicis, hoc est 100 cum 25. facit cubum ipsius radicis. Igitur cubus ipse quintus cũ quadrato trianguli quarti, hoc est 125. cum 100. simul efficient quadratum trianguli quinti, scilicet 225. Quod fuit ostendendũ. Quæ argumentatio à quinto ad alios locos transferetur, ad probandum propositum.

□ .Δ. quarti
100
radix. 5^a
5 } 15 Δ$^{l^9}$ 5^9 eius. □ est 225.
10 Δ^9 4^9
25 □. radicis
125 cub^9 5nc^9
50
50

PROPOSITIO 58^a.

Omnis trianguli quadratus, ęqualis est aggregato cuborum ab vnitate vsque ad cubum triangulo collateralem inclusiuè sumptorum. Sit, exempli gratia, triangulus numerus quintus, qui, per diffinitionem ex vnitate a. & sequentibus per ordinẽ radicibus b c d e. simul iũctis coaceruatur: cuius quadratus sit f. Aio, quòd f. æqualis est aggregato cuborum ab ipsis a b c d e. radicibus singulis factorum. Quod sic demõstratur. Sit g. cubus ipsius radicis e. sitque h. quadratus totius a b c d. hoc est trianguli quarti. Eritque, per præcedentem, ipse f. æqualis ipsis g h. simul sumptis. Rursum, sit k. cubus ipsius d. sitque l. quadratus totius a b c. hoc est triãguli tertij: eritq; per præmissam, h. æqualis ipsis k l. simul. Item, sit m. cubus ipsius b. sitq; n. quadratus totius a b. hoc est trianguli secũdi. eritque similiter l. ęqualis ipsis m n. pariter sumptis. Demum sit p. cubus ipsius b. sitque q. hoc est vnitas, quadratus ipsius a. vnitatis: eritque non secus n. æqualis ipsis p q. coniunctis. Quamobrem, ipse f. æqualis erit ipsis g k m p q. pariter acceptis: qui scilicet sunt ipsorum a bcd e. radicum singularum cubi. quod fuit demonstrandum. Idemque de quodlibet in infinitum cubis ostendetur. Quorum scilicet radices per ordinem ab vnitate coaceruant quemuis propositum triangulum, sicut propositio concludit.

a — 1
b —— 2
c ——— 3
d ———— 4
e ————— 5

f. 225
g. 125 h. 100
k. 64 l. 36
m. 27 n. 9
p. 8. q. 1.

125
64
27
8
1
225

PRO-

PROPOSITIO 59ª.

3 } 12
4 } 20 dĩa. 8
5

Omnis parte altera longior excedit præcedentem parte altera longiorem in duplo præcedentis radicis, & ideo in ipſo pari numero collaterali. Exempli gratia, quintus parte altera longior 20. excedit quartum parte altera longiorem ſcilicet 12. in duplo quartæ radicis, ſcilicet 8. Quod liquido conſtat. Nam 20. fit ex 4. in 5. at 12. ex 4. in 3. quæ producta differunt in duplo multiplicantis: quoniã multiplicati differunt binario. Et ideo 20. maior eſt, quàm 12. in ipſo pari numero quinto, ſcilicet 8. quippe qui per tertiam huius, eſt duplum prædictũ $4^{æ}$ radicis. Sic & pro alijs locis conſtat propoſitum.

8 *par.*

PROPOSITIO 60ª.

24. *differentia.*

Omnis quadratus imparis excedit præcedentis imparis quadratum in quadruplo collateralis paris. Exempli gratia: quadrati quarti imparis, ſ. 49. excedit quadratum tertij imparis, ſcilicet 25. in quadruplo quarti paris 6. hoc eſt in 24. Nam per 53^{a} præcedentem 49. conſtat ex parte altera longiori quarto quadruplicato, & vnitate. Et per eandem 25. conſtat ex parte altera longiori tertio quadruplicato & vnitate. Igitur 49. excedit ipſum 25. in quadruplo differentiæ, qua parte altera longior quartus excedit parte altera longiorem tertium: Sed per præmiſſam talis differentia eſt per numerus quartus, ſcilicet 6. ergo 49. excedit ipſum 25. in quadruplo quarti paris, 6. hoc eſt, in 24. Quod erat demonſtrandum. Quare ſicut pro quarto, ita pro alio quocunque loco propoſitum concludemus.

25 { 24, 1 } 49 { 48, 1 }

PROPOSITIO 61ª.

Quod fit ex qualibet radice in parte altera longiorem collateralem ſi coniungatur cum quadrato collaterali; conflabitur gnomo, qui coniunctus cum quadrato trianguli præcedentis, conficit quadratum trianguli collateralis. Exempli gratia: Ex radice 5. in quintum parte altera longiorem ſcilicet 20. fit 100. qui iunctus quadrato quinto ſcilicet 25. conflat 125. Aio, quòd 125. poſitus cũ $\square^{to}$ $\triangle^{li}$ 4^{i} 10. ſ. cum 100. cõficiet $\square^{tũ}$ $\triangle^{li}$ 5^{i} 15. ſ. 225. Nam, per 55^{a} præcedentem, quod fit ex radice 5^{a} in $5^{ũ}$ parte altera lõgiorem, ſi iũgatur cũ $\square^{to}$ 5^{o}, cõſtituit $5^{ũ}$ cubũ, Sed, p 55^{a} præcedẽtem, 5^{9} cubus cũ $\square^{to}$ $\triangle^{li}$ 4^{i} cõiunctus cõficit $\square^{tũ}$ $\triangle^{li}$ 5^{i}: Igr̃, qđ fit ex radice 5^{a} in $5^{ũ}$ parte altera lõgiorẽ, iũctum cum $\square^{to}$ 5^{o}: hoc eſt, ipſe nũus 125. ſi apponatur $\square^{to}$ $\triangle^{li}$ 4^{i}. ſ. 100. conficiet $\square^{tũ}$ $\triangle^{li}$ 5^{i}. ſ. 225. quod fuit oſtendẽdum, in 5^{o} loco & ſimiliter in alijs locis conſtabit propoſitum.

5 —— 20 —— 100
25
———
125

10 ———— 100
125
———
15 ———— 225

PRO-

PROPOSITIO 62ª.

Vnitas primum cubum: duo ſequentes impares iuncti ſequentem cubum: tres ſequentes tertium cubum. Quatuor ſuccedentes quartum. Quinque poſt eos quintum. Sex ſextum. Septem ſeptimum. Semperq; vno plures ſequentem deinceps in infinitum cubum aggregati conflabunt. Diſponantur ab vnitate a. per ordinem impares in indefinitum b c d e f g h k l m n o p q.

Aio, quòd b c. ſimul ſecundum ab vnitate, cubum faciunt. quodq́ue d e f. ſimul tertium cubum: quodq́ue g h k l. ſimul ſumpti quartum cubum: quodq́; ipſi m n o p q. ſimul quintum cubum iuncti conficiunt: Itaque deinceps. Sit enim ipſorum b c. aggregatum r. & ipſorum d e f. cumulus ſ. & ipſorum g h k l. congeries t. & ipſorum m n o p q. aceruus u. eritq́ue demonſtrandum, quòd a. erit primus cubus, ſcilicet vnitas. & r. ſecundus cubus. & s. tertius. & t. quartus. & v. quintus. hoc modo. Quoniã ipſi a b c d e f g h k l m n o p q. ſunt impares numeri ab vnitate per ordinem diſpoſiti: propterea, per 15^{a} huius, ipſorum a r s t v. aggregatum erit quadratus ab vnitate in ordine quindecimus: quoniam poſtremus impar, ſcilicet q. quindecimus eſt in ordine impariũ ab vnitate. Itaque tale aggregatum erit quadratus, qui fit à quinto triangulo, hoc eſt à numero quindenario. Talis ergo quadratus, ex præmiſſa 58. erit æqualis quinque cuborum ab vnitate diſpoſitorum cumulo. Et ideo totus a r s t u numerus erit quinque talium cuborum congeries. Et per eadem ac ſimiliter oſtendemus, quòd ipſorum a r s t. aggregatum erit quadratus ab vnitate decimus: (quandoquidem l. decimus eſt impar:) hoc eſt quadratus quarti trianguli: qui eſt numerus denarius: qui quadratus per 58^{a} præcedentem erit congeries quatuor cuborum ab vnitate ordinatorum. Quamobrem, cum ipſorum a r s t v. cumulus ſit quinque cuborum ab vnitate continuatorum congeries: atque ipſorum a r s t. cumulus ſit quatuor ab vnitate cuborum aggregatio: neceſſe eſt vt v. ſit 5^{9} cubus ab vnitate. Et ſimiliter poſt quàm per eadem oſtenderimus, pa r s. ſit cumulus trium cuborum ab vnitate: relinquetur t. quartus ab vnitate cubus. Demum oſtenſo, quòd a r. ſit duorum cuborum cumulus, ſupererit eſſe tertius ab vnitate cubus. Cumq́; a. ſit vnitas; erit & r. alter ab vnitate cubus: quod erat demonſtrandum. Et ſimiliter deinceps, pro ſexto, ſeptimo, cæterisq́; in infinitum cubis procedi poteſt, ſicut propoſitio concluſit.

a —— 1
b —— 3 } r. 8
c —— 5
d —— 7
e —— 9 } ſ. 27
f —— 11
g —— 13
h —— 15 } t. 64
k —— 17
l —— 19
m —— 21
n —— 23
o —— 25 } v. 125
p —— 27
q —— 29

PROPO-

PROPOSITIO 63^a.

cub^9. 5^9 125: 75.col.Δ^{la} 5^a. + ; 40.col.Δ^{la} 4^a — ; 10. Δ. 4^9. —

□^{9}. 5^9 25: 10. Δ^9. 4^9 — ; 15. Δ^9. 5^9. +

Δ. 5^9 15 ——— Δ. 5^9. +

pyr.□. 5^a 55: 35.pyr.Δ^{la} 5^a .+ ; 20.pyr.Δ^{la} 4^a —

Omnis cubus cum quadrato & triangulo collateralibus coniunctus, triplum efficit suæ quadratæ pyramidis. Exempli gratia: quintus cubus est 125. quintus quadratus 25. quintus triangulus 15. Aio, quòd horum aggregatum triplum est ad pyramidem quadratam quintam, scilicet 55. quòd sic patet. Cubus quintus per 42^a huius, æquiualet columnas duas triangulas. s. quintam, & quartam & triangulum quartum. Item per vndecimam huius, quadratus quintus æquiualet duos triangulos, scilicet quintum & quartum. Quamobrem aggregatum prædictum æquiualebit duas columnas triangulas, scilicet quintam & quartam, & quatuor simul triangulos scilicet duos quintos & duos quartos. Igitur demonstrandum erit, quòd congeries talium duarum columnarum & talium quatuor triangulorum, est tripla ad pyramidem quadratam quintam. Sed cum per 34^a huius, pyramis quadrata quinta constet ex combinatione duarum pyramidum triangularum quintæ & quartæ: iam ostendēdum erit, quòd congeries prædicta duarum columnarum & quatuor triangulorum, est tripla ad combinationem dictam duarum pyramidum. Et constat sic. Quod per 50^a huius columna triangula quinta cum duobus triangulis quintis simul conficiunt triplum pyramidis triangulæ quintæ: & per eandem 50^a columna triangula quarta cum duobus triangulis quartis simul accepta, triplum facit pyramidis triangulæ quartæ. Ergo, per primam quinti Elementorum Euclidis, tota congeries duarum columnarum & quatuor triangulorum, tripla erit ad totam combinationem duarum pyramidum: quandoquidem partes singulæ partibus singulis triplæ sunt. & hoc erat demonstrandum. Et similiter pro cubis cæterorum locorum constabit propositum.

PROPOSITIO 64^a.

per 43^a

col. ⬠ . 5^a 175: 125.cub^9. 5^9.+ ; 40.co.Δ^{la} 4^a * ; 10.Δ^{l9}.4^9— *

per 11^a

□. 5^9. 25: 15. Δ^9. 5^9. + ; 10. Δ. 4^9. *

Omnis columna pentagona cum duplo quadrati collateralis simul sumpta, triplum valet suæ pyramidis pentagonæ. Exempli gratia, columna pentagona quinta 175 cum duplo quadrati quinti 25. hoc est cum 50. fecit 225. quod triplum est ipsius pyramidis pentagonæ quintę 75. quod ostenditur sic. Colūna pentagoña quinta æqualis est cubo quinto per 43^a columnę triangulæ quartæ & triangulo quarto simul acceptis: quibus appono vnum quadratum quintum: & pro altera quadrato quinto, appono duos triangulos quintum & quartum, qui per

□. 5^9 25 ——— 4

*

Hìc pauca desunt.

Pyr.□. 5 55 — + ; Pyr. ⬠ . 5^a ; Pyr.Δ^{la}. 4 20 — *

11. simul s emonstrandum erit quod na triangula quarta, triangulo quinto, duobus triangulis quartis, simul triplum est pyramidis pentagonæ quintæ. Sed pyramis pentagona quinta, per 36^a, constat ex combinatione duarum pyramidum, scilicet quadratæ quintę & triangulę quartę. Ergo est demonstrandum, quòd dictum aggregatum est triplum huic combinationi. quod sic patet, Vna pars illius aggregati, scilicet cubus quintus, cum quadrato quinto & triangulo quinto simul per pręcedentem, ęqualis est triplo quintę quadratę pyramidis,

*

Hìc multa desunt, quæ non sunt in exemplari manuscripto.

per 37^a Py. ⬠ . 5 ; 95. py.hex.5^a ; Pyr.Δ.4. (20. *

per 37. scilicet pentagonę quintę . Quare ostendendum est, quòd supra dictum aggregatum est triplum huius combinationis: quod constabit sic. Vna pars illius aggregati, scilicet

ſcilicet columna pentagona quinta cum duobus quadratis quintis, per præcedentem, æquiualet triplum pyramidis pentagonæ quintæ, quæ fuit vna pars combinationis: & ſimiliter reliqua pars aggregati, ſcilicet columna triangula quarta cum duobus triangulis quartis ſimul, per 50. huius, triplum valet pyramidis triangulæ quartæ, quod eſt reſiduum combinationis. Quamobrem, quoniam duæ partes aggregati, duabus partibus combinationis, ſingulæ ſingulis triplæ ſunt: propterea, per primam quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis triplum valebit: quod fuit demonſtrandum. & eodem ſyllogiſmo pro quouis alio aſſignato loco vtemur ad roborationem propoſiti.

COROLLARIVM.

25. quadratus quintus

25. □. 5. { 15. △. 5 / 10. △. 4 }

10. △. 4

Et pro duplo quadrati collateralis ac præcedenti triangulo, ſubſtituere potes hexagonum & triangulum collaterales: quoniam ſunt tantundem. Nam, per vndecimam huius, quadratus quintus valet duos triangulos, quintum & quartum. Quare duo quadrati quinti cum triangulo quarto, ſimul valent cumulum quadrati quinti, trianguli quinti, & duorum triangulorum quarti loci. Sed, per 19. quadratus quintus, & duo trianguli quarti conficiunt hexagonum quintum: ergo hexagonus quintus, cum triangulo quinto valebunt duos quadratos quintos, & triangulum quartum: & ideo pro illis ſubſtitui poſſunt in præmiſſa propoſitione.

hexag. 5. 45. { 25. □. 5. / 10. △. 4. / 10. △. 4. }

PROPOSITIO 66.

Omnis columna hexagona æquiangula cum hexagono tetragonico collaterali, cumq́ duobus triangulis, collaterali ſcilicet & præcedenti, pariter ſumpta, triplũ facit ſuæ pyramidis hexagonæ. Exempli gratia, dico, quòd columna hexagona æquiangula quinta, ſcilicet 305. vnà cum hexagono tetragonico quinto 45. cumque triangulo quinto 15. & triangulo quarto 10. coniuncta, facit triplum ſuæ pyramidis quintæ, ſcilicet 125. ad quod oſtendendum ſic procedo. Columna hexagona æquiangula quinta, per 45. huius libri, æqualis eſt columnæ tetragonicæ quintæ, cubo quarto, & quadrato quarto pariter acceptis. His ego appono hexagonum tetragonicum quintum, triangulum quintum, & triangulum quartum; atque ita demonſtrandum erit, quod totum huiuſmodi aggregatum ex columna hexagona tetragonica quinta, cubo quarto, quadrato quarto, hexagono quinto, triangulo quinto, & triangulo quarto ſimul, triplum eſt pyramidis hexagonæ æquiangulæ quintæ.

per 45.

Col. hex. æqui. 305 { col. hexag. tetr. 5. 225. / cub⁹ 4 64 * / □. 4. 16 * }

hexagonus 5. 45 +
triang. 5. 15. +
triang. 4. 10*

pyr. hexa tetr. 5. 95.

per 40ª.

pyr. hexa. æq. 5 125 { pyr. □. 4ª 30. * }

quintæ. Cumque talis pyramis conſtet, per 40. ex combinatione duarum pyramidum, ſcilicet hexagonæ tetragonicæ quintæ, & quadratæ quartæ; iam oſtendendum erit, quòd ſuperius dictum aggregatum, triplum eſt ipſius dictæ combinationis: quod haud obſcurè conſtat. Nam vna pars illius aggregati, ſcilicet columna hexagona tetragonica quinta, cum hexagono ſuo quinto, & triangulo quinto, per præcedentis corollarium, æquiualet triplũ pyramidis tetragonicæ quintę: quæ vna partium combinationis eſt. Nec ſecus, reliqua pars aggregati, ſcilicet cubus quartus cum quadrato quarto, & triangulo quarto, ſimul ſumptus, per 63. huius, valet ſimiliter triplum pyramidis quadratæ quartæ, quæ iam de combinatione reſidua pars eſt. Itaque quoniam duę partes aggregati duabus combinationis partibus ſingulę ſingulis ſunt triplę: iccirco, per primam quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis triplum erit: quod erat demonſtrandum. Et argumentatio à quinto loco ad alia quęuis loca transferetur ad concluſionem propoſiti.

COROLLARIVM.

Et pro duobus triangulis collaterali & pręcedenti, ſubſtituere potes quadratum collateralem. Nam, per vndecimam, quadratus ęqualis eſt duobus ſimul triangulis, collaterali, & pręcedenti.

COROLLARIVM.

Rurſum pro hexagono tetragonico, & quadrato collateralibus, ſubſtituere potes hexagonum æquiangulum & numerum imparem collaterales. Nam, per 32. exempli gratia, hexagonus æquiangulus quintus, valet hexagonum tetragonicum quintum cum quadrato quarto. Apponatur vtrobique numerus impar quintus, at tunc hexagonus æquiangulus quintus cum impari quinto valebit hexagonum tetragonicum quintum cum quadrato quarto & impari quinto. Sed, per 13. quadratus 4⁹ & impar quintus ſimul valent quadratum quintum. Igitur hexagonus æquiangulus quintus cum impari quinto valent hexagonum tetragonicum quintum & quadratum quintum ſimul ſumptos: & perinde iiſdem ſubrogari poſſunt.

per 32ª. hexag. tetr. 5⁹ 45

hexa. æq. 5. 61 { □. 4 16 } per 13. { □. 5⁹ 25. }

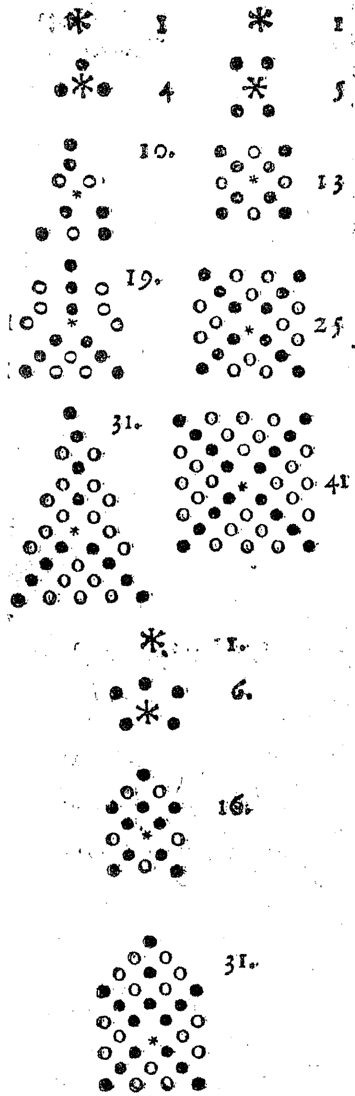
ipar 5. 9. impar 5. 9.

LIBRI

LIBRI PRIMI

Pars Secunda.

PROLEGOMENA.

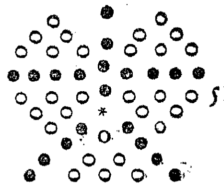


HActenus de numerarijs formis primi generis, nunc de centralibus agendum: de quarum numero est forma hexagona æquiangula tã superficialis, quàm solida, seu pyramis, seu columna: de qua tamen in primo genere disseruimus, propter talis formæ dignitatem, qua meretur vtrobique tractari. Itaq; quo ad hexagonam æquiangulam formam, hìc non repetemus ea, quæ in præmissis demonstrata sunt: sed præmissis diffinitionibus, cætera prosequemur.

DIFFINITIONES.

OMNIS forma numeraria cẽtralis plana superficialis cõstruitur ex centrali vnitate & ex tot triãgulis præcedẽtibus primi generis, quot sunt formæ ipsius anguli: vtpote triangulus centralis ex vnitate & tribus triangulis. Quadratus centralis ex vnitate & quatuor triangulis. Pentagonus centralis ex vnitate & quinque triãgulis. Hexagonus ex vnitate & sex vt antea diximus. Heptagonus ex vnitate & septẽ. Octogonus ex vnitate & octo triangulis primi generis, latera semper æqualia & angulos vniformes constituentibus compaginatur. Itaq;, si lubet, deinceps. Vnde omnis figura centralis superaddit præcedenti figuræ triãgulum. Verũ, sicut in Hexagono geometrico latera sunt semidiametris æqualia; ita hìc, in hexagono numerali vnitates angulares tantùm inter se distant, quantũ ipsæ ab vnitate centrali remouentur: & tres unitates proximę semper triãgulũ æquilaterũ faciunt: sicut in quadrato primo quatuor unitates quadratum conformant. In cæteris autem formis centralibus, hoc est in triangulo, quadrato & pentagono, unitates laterales magis distant, quàm diametrales: minus uerò in formis hexagonum sequentibus, ut in heptagono & octogono, ut postulat situs Geometricarum formarum, quas Arithmeticæ imitatur.

Omnis



Omnis porrò pyramis centralis fit ex aggregatione centralium formarum sui, nominis ab vnitate vsq; ad basim suam successiuè aggregatarum. Vtpote pyramis triangula, triangularum: quadrata, quadratarum, & deinceps. Omnis demum columna centralis procreabitur ex forma centrali collaterali (quæ sua basis est) toties 4. coaceruata, quota est in ordine, siue in radicem lateralem multiplicata. Harum proprietates & colligantias nunc explicabimus.

PROPOSITIO 67ª.

Omnis triangulus centralis constat ex collaterali triangulo & præcedenti quadrato primi generis. Exempli gratia: triangulus quintus centralis scilicet 31. constat ex triangulo collaterali primi generis, scilicet 15. & ex quadrato quarto, scilicet 16. Quod sic ostenditur. Tres trianguli primo ex ordine, tertius, quartus, quintus, scilicet, 6.10.& 15. simul coniuncti, conficiunt triplum medij, & vnitatem per 29ª huius. Sed per diffin. triplum medij, hoc est, quarti trianguli, cum vnitate, conficit quintum triangulũ centralem. Igitur quintus triangulus centralis constat ex aggregato trium dictorum triangulorum tertij, quarti, & quinti. Cumque per 11ª huius, tertius & quartus triangulus componãt quartum quadratum: sequitur, vt quartus quadratus cum quinto triangulo simul sumptus perficiat quintum triangulum centralem. Quod erat demonstrandum: & à quinto loco transfertur syllogismus ad quem vis alium: vt propositio conclusit.

6, 10 } 16 } 31
15

PROPOSITIO 68ª.

Omnis quadratus centralis conficitur ex duobus quadratis primi generis, scilicet collaterali & præcedenti. Exempli gratia. Quadratus qntꝰ cẽtralis 41. cõficit ex quinto & quarto quadratis primi generis. s. 25. & 16. Qđ sic patet. Per 11ª huius, quadratꝰ qntꝰ constat ex quarto & qnto triãgulis primi generis Et p præcedẽtẽ, triãgulus qntus cũ quadrato 4. primi generis, cõficiũt triãgulũ qntũ cẽtralẽ: Igitur quadratꝰ qntus cũ quadrato quarto simul æquiualẽt triãgulos duos. s. quartum primi generis, & qntũ cẽtralẽ. Sed triãgulus qntus centralis cum triangulo quarto primi generis, per diffin. procreat quadratum quintum centralem: ergo quadratus quintus centralis æquiualet duos quadratos primi generis, scilicet quintum & quartum: quod fuit demonstrandum. & argumentum à quinto ad quemuis propositum locum transfertur, vt conclusio proponit. Id idem demonstratur per 30ªm huius.

25 { 10, 15 } 31
41 { 25, 16
41 { 31, 10

PROPOSITIO 69^a.

Omnis pentagonus centralis construitur ex pentagono primi generis collaterali, & ex præcedenti quadrato. Exempli gratia, pentagonus quintus centralis 51. construitur ex duobus formis primi generis, scilicet pentagono quinto 35. & quadrato quarto 15. Quod sic constat. Per diffinition. pentagonus quintus primi generis construitur ex quadrato quinto & triangulo quarto. Et per præcedentem, quadratus quintus cum quadrato quarto faciunt quadratum centralẽ quintũ. Quare, pentagonus quintus cum quadrato 4^o primi generis valebũt quadratum $5^{ũ}$ centralem cũ triangulo quarto primi generis. Verùm per diffinitionem, $\square^{tus}$ quintus centralis cum triãgulo 4^o procreat pẽtagonum quintum centralem. Ergo pẽtagonus 5^{us} centralis æqualebit pẽtagonũ quintũ & $\square^{tũ}$ $4^{ũ}$ primi generis: qđ fuit demonstrãdũ. Quæ demõstratio, sicut 5^o ita cuilibet ꝓposito loco accõmodabitur ad cõfirmãdũ propositũ.

$$51\left\{\begin{array}{l}35\left\{\begin{array}{l}10\\25\end{array}\right.\\16\end{array}\right. \quad 25+16:\ 41 \qquad 51\left\{\begin{array}{l}41\\10\end{array}\right.$$

PROPOSITIO 70^a.

Omnis hexagonus cẽtralis conflatur ex formis primi generis, scilicet hexagono collaterali & quadrato præcedenti. Hæc propositio eadem est cum 32^a. Sed hic in ordine centraliũ aliter demonstrabitur. Dico igitur, ꝙ hexagonus centralis quintus scilicet 61. cõflatur ex quinto hexagono primi generis .s. 45. & $\square^{to}$ quarto 16. Quod quáuis in 32^a huius fuerit demonstrandum, tñ & hic aliter cõstabit sic. Per diffinitionem, hexagonus 5^{us} primi generis constat ex $\triangle^{lo}$ 4^o & pentagono quinto primi: & per præcedentem, pẽtagonus 5^{us} talis cum quadrato 4^o primi, componunt pentagonum centralem $5^{ũ}$. Quare, Hexagonus 5^{us} primi cum $\square^{to}$ 4^o æquiualebunt triangulum $4^{ũ}$ cum pentagono centrali quinto. Verùm, per diffin. pẽtagonus centralis 5^{us} cum $\triangle^{lo}$ 4^o constituit hexagonum centralem $5^{ũ}$. Ergo hexagonus centralis 5^{us} æquiualebit hexagonum $5^{ũ}$ cum $\square^{to}$ 4^o p^i generis: quod erat demonstrandum. Et similiter pro alijs locis argumẽtatio procedat ad ꝯcludẽdũ propositũ.

$$61\left\{\begin{array}{l}45\left\{\begin{array}{l}10\\35\end{array}\right.\\16\end{array}\right. \quad 35+16:\ 51 \qquad 61\left\{\begin{array}{l}51\\10\end{array}\right.$$

PROPOSITIO 71^a.

Omnis heptagonus conflatur ex tribus formis primi generis, scilicet hexagono, tetragonico collaterali, atque quadrato & triangulo, præcedentibus. Exempli gratia, heptagonus 5^{us} 71. conflatur ex primi generis hexagono quinto 45. quadrato quarto 16. & triangulo 4^o. 10. Nam, ex diffinitione, ipse 5^{us} heptagonus constat ex 5^o hexagono centrali & ex 4^o triangulo: Sed per præcedentem, ipse hexagonus æquiualet quintum hexagonum primi generis, & quadratum quartum. Igitur hexagonus quintus primi generis cum quadrato & triãgulo quartis simul conflabunt heptagonum quintum: quod est propositum. Similiter in alijs locis confirmatur propositum.

$$71\left\{\begin{array}{l}61\left\{\begin{array}{l}45\\16\end{array}\right.\\10\end{array}\right.$$

PROPOSITIO 72^a.

Omnis octogonus est ęqualis quadrato imparis numeri sibi collateralis. Exẽpli gratia, 5^{us} octogonus est 81. q. quidem $\square^{tus}$ est imparis 5^i, hoc est nouenarij. Nam, per diffinitionẽ, 5^{us} octogonus ꝯstruitur ex 4^o $\triangle^{lo}$ primi generis octuplicato, & ex vnitate. Sed, per 54^a huius, tale octuplũ cũ vnitate est quadratus imparis 5_i. Igitur talis $\square^{tus}$ est ipse octogonus 5^{us}. quod est propositum. Non aliter pro cæteris in infinitum locis constat propositum.

PROPOSITIO 73^a.

Omnis forma centralis plana constat ex vnitate & ex radice præcedenti in numerum laterum ducta, & ex $\triangle^{lo}$ radicem præcedente in eundem numerũ ducto. Exẽpli gr̃a, hexagonus cẽtralis 5^{us} 61. cõstat ex vnitate, ex sexcuplo radicis $4^æ$ .s. 4. ꝙ est 24. & ex sexcuplo $\triangle^{li}$ tertij 6. hoc est 36. ꝙ liquido cõstat per diffin. ipsius hexagoni: sicut in 26^a huius ostẽsum. Nam dicta duo sexcupla faciunt sex $\triangle^{los}$ 4^{os} qui cum vnitate compaginãt ipsum hexagonũ. Simil̃r in $\triangle^{lo}$ cẽtrali, ꝓ sexcuplis accipe tripla: in $\square^{to}$ cẽtrali, quadrupla; in pẽtagono, quincupla: in heptagono, septupla: in octogono octupla ipsarũ radicũ præcedẽtium & $\triangle^{lorũ}$ añ præcedẽtiũ: vt in oĩ proposito loco ꝯcludas ꝓpositũ. Vñ, ꝙ 26^a de hexagono, præsens de oĩ plano cẽtrali cõcludit.

$$61\left\{\begin{array}{l}1\\24\\36\end{array}\right. \quad 24+36:\ 60$$

PLANI PRIMI GENERIS. PLANI CENTRALES.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	4	5	6	7	8	9
3	6	9	12	15	10	13	16	19	22	25
4	10	16	22	28	19	25	31	37	43	49
5	15	25	35	45	31	41	51	61	71	81
6	21	36	51	66	46	61	76	91	106	121
7	28	49	70	91	64	85	106	127	148	169
8	36	64	92	120	85	113	141	169	197	225
9	45	81	117	153	109	145	181	217	253	289
10	55	100	145	190	136	181	226	271	316	361
radices	$\triangle^{li}$	$\square^{ti}$	⬠ni	✳ni	$\triangle^{li}$	$\square^{ti}$	⬡ni	✳ni	Hept.	Oct.

 PRO-

PROPOSITIO 74ª.

Omnis pyramis cētralis constat ex radice collaterali tanquam axe, & ex tot pyramidibus triangulis primi generis præcedentibus loci, quot sunt latera pyramidis centralis. Quod 39ª. huius de pyramide centrali hexagona demonstrauit: hæc præsens de omni pyramide centrali concludit. Et demonstratio vtrobique est eadem. Itaque in omni pyramide sumenda est radix collateralis: sed in pyramide $\triangle^{la}$ sumendum est triplum pyramidis triangulæ primi generis præcedentis: in quadrata quadruplum, in pentagona quincuplum, in hexagona sexcuplum, sicut in 39.ª factum est. In heptagona septuplum. In octagona octuplum. Atque ita ex diffin. constabit, sicut in 39.ª propositum. Exempli gratia, pyramis quadrata centralis quinti loci est 85. qui numerus constat ex radice quinta, scilicet 5. & ex quadruplo pyramidis $\triangle^{læ}$ primi generis, scilicet ex 80. & similiter in cæteris locis.

85 { 5, 80 }

COROLLARIVM.

Manifestum est igitur, quòd sicut pyramis centralis quadrata supra triangulum pyramidem collateralem: ita & pentagona supra quadratam: nec non hexagona supra pentagonam, & heptagona super hexagonam: & octogona super heptagonam semper addidit præcedentem pyramidem triangulam primi generis. Sicut videlicet basis centralis supra basim collateralem laterum vnitate pauciorum, addit præcedentem primi generis triāgulum.

PROPOSITIO 75ª.

Omnis item pyramis centralis constat ex tot pyramidibus primi generis; ex quot basibus primi generis eius; basis constare ostēsa est, & eiusdem nominis atque loci. Exempli gratia: pyramis hexagona centralis quinta, scilicet 125. constat ex quintā pyramidē hexagona primi generis, scilicet 95. & ex 4ª pyramide quadrata primi generis, scilicet 30. quoniam scilicet basis hexagona cētralis quinta, scilicet 61. constat ex hexagono quinto, scilicet 45. & ex quadrato quarto primi generis, scilicet 16. vt in 70ª. ostensum fuit: quod quidem demonstratum est in 40ª huius, quoad hexagonam pyramidem: & similiter hìc generaliter de omni centrali pyramide ostendetur.

125 { 95, 30 }

Sed in horum exemplum exponemus in tabella pyramides vtrasque; tam scilicet primi generis, quàm centralis, in quibus propositionum veritas apparet.

Pyramides

Pyramides pi Generis. *Pyramides Centrales.*

1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
2	4	5	6	7		5	6	7	8	9	10
3	10	14	18	22		15	19	23	27	31	35
4	20	30	40	50		34	44	54	64	74	84
5	35	55	75	95		65	85	105	125	145	165
6	56	91	126	161		111	146	181	216	251	286
7	84	140	196	252		175	231	287	343	399	455
8	120	204	288	372		260	344	428	512	596	680
9	165	285	405	525		369	489	609	729	849	969
10	220	385	550	715		505	670	835	1000	1165	1330
radices	$\triangle^{le}$	$\square^{te}$	⬠^{ne}	✳^{ne}		$\triangle^{le}$	$\square^{te}$	⬠^{ne}	✳^{ne}	Hept.	Oct.

PROPOSITIO 67ª.

Omnis columna centralis coagmentatur ex radice collaterali, tanquam axe, & ex congerie præcedentis triangulæ columnæ suiq; trianguli in primo genere in numerum lateri multiplicata.

Quod 46ª huius, ostendit de columna hexagona cētrali; hæc pn̄s de omni centrali columna proponit; & demonstratio hìc & ibi eadē est. Itaq; in omni columna sumēda est radix collateralis: sed in columna triangula, cōgeries præcedētis triāgulæ columnæ, suique $\triangle^{li}$ in primo genere, multiplicanda est in ternarium. In colūna quadrata in quaternarium: pro columna pētagona in quinarium, per hexagona in senarium, per heptagona in septenarium, per octogona in octonarium. Atque ita ex diffin. constabit, sicut in 46. propositum. Exempli gratia: columna centrali quadrata quinti loci, est 225. in conflatur ex radice quinta, scilicet 5 & ex congerie præcedentis triangulæ columnæ suique trianguli in primo genere, scilicet 50. quadruplicata, hoc est, ex 200. & similiter in cæteris locis, & in ceteris columnis.

205 { 5, 200 }

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd sicut columna centralis quadrata supra triangulam centralem columnam collateralē: ita & pentagona supra quadratam: Nec non & hexagona supra pentagonam, & heptagona supra hexagonam, & octogona super heptagonam semper addit præcedentem columnam triangulam cum suo triangulo primi generis. Hoc idem de pyramidibus ante præmissæ corrollarium inferebat.

PROPOSITIO 77ª.

305 { 225 —64 16

Omnis item columna centralis constat ex tot columnis primi generis, ex quot eiusdem generis basibus eius basis constare ostensa est, & eiusdem nominis acque loci. Columnis tamẽ præcedentis loci unà cũ basibus proprijs acceptis. Exempli gratia: columna centralis hexagona quinta, scilicet 305. conflatur ex columna hexagona primi generis quinta, scilicet 225. & ex cubo quarto 64. vnà cum suo quadrato 16. quoniam, scilicet basis hexagona centralis quinta, scilicet 61. constabat ex hexagono quinto scilicet 45. & ex quadrato quarto primi generis, scilicet 16. per 70ª præmissam. Quod quidem in 45ª huius ostensum est, quo ad columnam hexagonam: & demonstratio, simili processu, ad omnem centralem columnam extendi potest. Ad verificandum quod hic proponitur.

PROPOSITIO 78ª.

In omnibus tribus siue planis, siue pyramidibus, siue columnis centralibus, collateralibus, sub continuato laterum numero, susceptis, aggregatum extremorum est duplum ad medium. Exempli gratia, sumatur quintus triangulus 31. quintus quadratus 41. & quintus pentagonus 51. centrales. Aio quòd in his aggregatum extremorum, hoc est 31. & 51. est duplum ipsius 41. medij. Nam, vt constat ex diffin. talium formarum, differentia trianguli & quadrati est æqualis differentiæ quadrati & pentagoni: quandoquidem talis differentia est triangulus quartus primi generis. Quamobrem, per 28ª huius, congeries extremorum est duplũ medij, quod est demonstrandum. Similiter, si sumantur pyramis triangula quinta 65. pyramis quadrata quinta, scilicet 85. & pyramis pentagona quinta 105. quoniam eodem excessu continuatur per corollarium 74æ præmissæ, per dictam 28ª constabit propositum. Item in columnis tribus centralibus, scilicet triangula quinta 155. quadrata quinta 205. Pentagona quinta 255. quarum excessus idem est, per 76ᵉ præmissæ corollarium: nihilominus, per dictam 28ª verificatur conclusio. Nec secus si pro quinto, quotuscunque capiatur in ordine locus, per eadem precedet syllogismus ad approbandum propositum. In quorum exemplum, sicut dudum planos numeros & pyramides, ita nunc columnas tam primi generis, quàm centrales in indice sequenti exanabimus.

31 41 51 } 82

65 85 105 } 170

155 205 255 } 410

Columnæ pⁱ Generis. *Columnæ Centrales.*

1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
2	6	8	10	12		8	10	12	14	16	18
3	18	27	36	45		30	39	48	57	66	75
4	40	64	88	112		76	100	124	148	172	396
5	75	125	175	225		155	205	255	305	355	405
6	126	216	306	396		276	366	456	546	636	726
7	196	343	490	637		448	595	742	889	1036	1183
8	288	512	736	960		680	904	1128	1352	1576	1800
9	405	729	1053	1377		981	1305	1629	1953	2277	2601
10	550	1000	1450	1900		1360	1810	2260	2710	3160	3610
radices	△lę	□tę	⬠nę	✳nę		△lę	□tę	⬠nę	✳nę	*Hept.*	*Oct.*

His ad Lectoris meliorem intelligentiam ita descriptos, ad reliqua properabimus.

PROPOSITIO 79ª.

Omnis columna triangula centralis cum quadrato & triãgulo primi generis collateralibus coniunctа, triplũ facit suæ pyramidis. Exẽpli gratia, colũna triãgula centralis quinta. s. 155. cũ quadrato quinto 25. & triangulo quinto 15. primi generis coniũcta, facit 195. qđ triplũ est pyramidis centralis quintæ 65. Quod sic ostenditur. Columna triangula centralis quinta, per 77ª constat ex tribus primi generis formis, scilicet columna triangula quinta, cubo quarto, & quadrato quarto. His appono eiusdẽ generis quadratũ quintũ, qui per 11ª valet triãgulũ 5ᵘ & 4ᵘ: appono item triangulũ aliũ quintum. Atq; ita ostẽdendũ erit quod totum hmõi aggregatũ ex columna △la 5ª cubo 4º, quadrato quarto, duobus triangulis quintis & △lo 4º primi generis simul triplum est pyramidis △læ 5tę centralis. Sed cum pyramis △la 5ª cẽtralis, per 75ª huius, cõstruatur ex cõbinatione duarũ pyramidũ primi generis, scilicet △læ 5ę & quadratæ 4ę: Iã demõstrãdũ erit, ꝙ supradictũ aggregatũ triplũ est ꝑdictæ cõbinationis. Quod sic patet. Vna pars illius aggregati. s. colũna triãgula quinta, cũ duobus triangulis quintis, per 50ª huius, æqualis est triplo pyramidis triãgulę quintæ, quæ fuit vna pars cõbinationis.

per 77ª

Col. △læ 5ª 2ⁱ 155. { Col. △la 5ª pⁱ + 75; Cub. 4ⁱ x 64; □ⁱ 4ⁱ 16 x

per 11ª △lⁱ 5ⁱ pⁱ + 15

□ⁱ 5ⁱ 25 { △lⁱ 5ⁱ + 15; △lⁱ 4ⁱ x 10

Pyr. △la 5ª 2ⁱ 65 per 75ª { pyr. △la 5ª pⁱ 35 +; pyr. □ta 4ª pⁱ 30 x

Item que reliqua pars aggregata, scilicet cubus quartus, cum quadrato & △lo quartis, æqualis est, per 63ª huius, triplo pyramidis quadratæ quartæ, quæ fuit altera pars combinationis. Itaque, quoniam duæ partes aggregati duabus partibus combinationis, singulæ singulis triplæ sunt: Idcirco, per primã quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis, triplum erit, quòd fuit demonstrandum: & demõstratio à quinto ad quem vis alium locum transferetur ad confirmandum propositum.

PROPOSITIO 80ª.

per 77ª
Col. □ 5ª 2ⁱ
205.
Cub⁹ 5⁹ 125 +
Cub. 4⁹ 64 x
□⁹ 4⁹ 16 x
□. 5⁹ p⁹ 25. +
per 11ª △l⁹ 5⁹ pⁱ 15 +
□⁹ 5⁹ 25
△l⁹ 4⁹ p⁹ 10 x

Omnis columna quadrata centralis cum duplo quadrati collateralis primi generis coniuncta triplum facit suę pyramidis. Exẽpli gratia: columna quadrata centralis quinta. s. 205. cũ duplo quinti quadrati ex p° genere, hoc est, cum 50. facit 255. quod triplũ est suæ pyramidis, scilicet 85. qđ sic cõcluditur. Colũna quadrata centralis quinta, per 77ª, constat ex tribus primi generis formis, scilicet cubo 5°, cubo 4° (quæ sunt colũnæ quadratæ) & quadrato 4°. His applico quadratũ quintũ: & alterum quadratũ quintũ, qui, per 11ª æquiualet duos triangulos, quintum, & quartũ: atq; ita ostendendũ erit, qđ totũ tale, aggregatũ ex cubo quinto, cubo quarto, quadrato 4°, quadrato quinto, & triangulis 5° & 4° primi generis, similiter triplum est pyramidis quadratę centralis quintæ. Cunque pyramis talis, per 75ª huius, constat ex combinatione duarũ pyramidũ primi generis, scilicet quadratę quintæ, & quadratæ quartæ: Iã demonstrandũ erit, ꝙ supradictũ aggregatũ triplũ sit ad prædictam cõbinationẽ: ꝙ sic deducitur. Vna pars illius agregati. s. cubus, quadrat⁹, & triangulus quinti loci, per 63ª, simul faciunt triplũ pyramidis quadratæ quintę, quę fuit vna pars combinationis. Itemq; reliqua pars aggregati. s. cubus, quadratus, & triangulus quarti loci, per eandẽ 63ª, simul facit triplum pyramidis quadratę quartæ, quæ fuit reliqua pars combinationis: quamobrẽ duæ iam partes aggregati triplæ sunt ad duas partes cõbinationis, singulæ. s. ad singulos. Et ideò, per quinti Elementorum primã, totum aggregatum totius cõbinationis triplũ erit, qđ demonstrãdũ fuit. Et similiter à quinto ad quemuis locũ transferetur demonstratio propositi.

Pyr. □ 5ª 2ⁱ
85
per 75ª
pyr. □ 5ª pi 55 +
pyr. □ta 4ª pⁱ 30 x

PROPOSITIO 81ª.

Omnis columna pentagona centralis cum duplo quadrati collateralis, & cum triangulo præcedente primi generis, triplum facit suæ pyramidis. Exempli gratia: columna pentagona centralis quinta 255. cum duplo quadrati quinti. s. 50. & cũ

△lo

△lo quarto. s. 10. primi generis, cõficit 315. qđ triplũ est pyramidis pentagonæ centralis quintæ. s. 105. qđ sic demonstrat. Colũna pentagona centralis quinta per 77ª constat ex tribus primi generis formis: videlicet colũna pẽtagona 5ª, cubo 4°, & □to 4°. His adiungo duplũ □ti quinti, & triangulũ quartũ, atq; ita demõstrandũ erit, quòd totum id aggregatum ex columna pẽtagona 5ª, cubo 4°, quadrato 4°, duobus quadratis quintis, & △lo 4° simul triplũ sit pyramidis pẽtagonæ cẽtralis quintæ. Verùm pyramis hmõi per 75ª huius, cõstat ex cõbinatione duorum pyramidum primi generis. s. pentagonæ quintæ, & triangulæ 4tæ, & propterea demõstrandũ erit, quòd memoratum aggregatum pręfatæ cõbinationis triplũ est. Hoc pacto: vna pars illius aggregati. s. columna pẽtagona cum duplo quadrati ex 5° loco, per 64ª, simlr ęquat triplum pyramidis pẽtagonæ 5tæ, quæ. s. est vna pars combinationis. Itẽ residua pars aggregati. s. cubus, quadratus, & triangulus quarti loci, simul æquat, per 63ª, triplũ pyramidũ □tæ quartæ, quæ iã est residua pars combinationis. Sic, quoniam duę partes aggregati ad duas partes combinationis, singulæ ad singulas triplæ sunt: ideò per quinti elementorum primam, totum aggregatum totius cõbinationis triplum erit, & similiter in quocunque alio loco verificatur propositum.

per 77ª
Co. ⬠ 5ª 2ⁱ
405.
Col. ⬠ 5ª p⁹ 175. +
Cub⁹ 4⁹ 64. x
□t⁹ 4⁹ 16. x
□ 5⁹
□⁹ 5⁹ 50.
△ 4⁹ pⁱ 10. x

Pyr.
5ª 2ⁱ
105
per 75ª
Pyr. ⬠ 5ª p⁹ 75. +
Pyr. □ta 4ª p⁹ 30. x

SCHOLIVM.

Quo autem pacto columna hexagona centralis conficiat, sicut cæteræ columnę suarum singulæ pyramidum, triplum suæ pyramidis satis demonstratum est in sexagesima sexta.

PROPOSITIO 82ª.

Omnis columna heptagona cum hexagono primi generis & quadrato collateralibus atque triangulo præcedenti coniuncta, efficit triplum suæ pyramidis. Exempli gratia: columna heptagona quinta 355. cũ hexagono quinto, quadrato quinto, & triangulo 4° in p° genere: hoc est, cum 45. 25. 10. conficit 435. quod aio triplum esse pyramidi heptagonæ quintæ, scilicet 145. Quod sic demonstro. Columna heptagona quinta, per corollarium 76. huius, constat ex tribus formis, ex columna hexagona quinta centrali, & ex columna quarta primi generis, atque triangulo quarto. His adiungo hexagonum quintum primi generis, ac quadratum quintũ, & triãgulum quartum. Atq; ita demonstrãdum erit, ꝙ totum hocce aggregatum ex columna qnta centrali hexagona, columna triãgula quarta primi generis, triãgulo quarto, hexagono quinto,

per Coroll. 76ª
Col. hept. 5ª
355
Col. ✳ 5ª 2 305 +
Col. △la 4ª p 40 x
△⁹ 4⁹ p⁹ 10 x
✳ 5⁹ p⁹ 45. +
□ 5⁹ 25 +
△ 4⁹ 10

quadrato

quadrato quinto, & alio triangulo quarto, simul æquiualet triplo pyramidis heptagonæ quintæ. Cunq; per corollarium $74^{æ}$ huius talis, quinta pyramis constituatur ex combinatione duarum pyramidũ, scilicet ex hexagona centrali quinta, & triãgula quarta primi generis: Iã ostendendũ erit, quod dudum dictũ aggregatũ ad dictã mox combinationẽ triplũ erit, hoc scilicet pacto. Vna pars illius aggregati, scilicet colũna hexagona centralis quinta cum hexagono primi generis quinto, & quadrato quinto, simul per corollarium primum $66^{æ}$ triplum facit pyramidis hexagonę centralis quintę: quę pars est vna combinationis. Item columna triangula, cũ duobus triangulis quarti loci, per 50^{a} huius, triplum facit pyramidis triangulæ quartæ, quod residuum est combinationis. Quare cum duæ partes aggregati, duarum partium combinationis, singulæ singularum triplæ sint: Iã per primam quinti Euclidis: totumq; aggregatum totius combinationis triplũ erit. In hoc quinto loco: & similiter in omni alio, quod est propositum.

Pyr. hept. 5^{a} 145 { Pyr. ✱. 5^{a} 2 i 125. † / Pyr. $\triangle^{la}$ 4^{a} p^{9} 20. χ }

CORROLLARIVM.

Et pro hexagono primi generis & quadrato collaterallibus, substituere potes hexagonũ centralem & imparem collaterales. Nam, per corollarium $2^{ũ}$ $66^{æ}$, hexagonus centralis & impar simul sumptis, valent hexagonũ primi genexis & quadratũ collaterales, hoc est, in quinto loco, huius exempli.

PROPOSITIO 83^{a}.

Omnis columna octogona, cum hexagona primi generis, ac quadrato collateralibus, duploq; triãguli præcedentis coniuncta, facit triplum suæ pyramidis. Exempli gratia, columna octangula quinta 405. cum hexagono primi generis & cum quadrato quinto, hoc est, cũ 45. & cum 25. duploque trianguli quarti, scilicet cum 20. conficit 495. quod aio triplum esse pyramidis octangulæ quintæ, scilicet 165. Quod sic ostendo. Columna octangula quinta, per corollarium $76^{æ}$ constituitur ex duabus columnis, septangula quinta: triangula 4^{a} primi generis, & triangulo quarto. His ergo associo hexagonũ primi generis, & quadratum quintũ: nec non duos triangulos quartos. quo facto, demonstrandum erit, quòd totum istud aggregatum, scilicet ex columna septangula quinta, columna triangula quarta primi generis, triangulo quarto, hexagono quinto, quadrato quinto, duploque trianguli quarti, simul triplum consummabit pyramidis octangulæ quintæ.

Col. 8^{la} 5^{a} 405. { Col. 7^{la} 5^{a} 355. † / Col. $\triangle^{la}$ 4^{a} p^{i} 40. χ / $\triangle^{9}$ 4^{9} p^{9} 10. † / ✱^{9} 5^{9} p^{i} 45. † / □^{9} 5^{9} p^{i} 25. † / $\triangle$ 4^{9} p^{i} / $\triangle$ 4^{9} p^{i} 20. χ }

Cumq; per corollarium 74^{e} huius, talis pyramis quinta conficiatur ex pyramidis septangulæ quintæ, & pyramidis triangulæ quartæ combinatione: Iam ostendendũ erit, quòd dictũ aggregatũ dictæ cõmbinationis triplũ erit. hoc videlicet pacto. Vna pars illius aggregati, scilicet colũna septangula quinta cum hexagono primi generis quinto, quadrato quinto, & quadrato 4^{o} simul efficit, per præcedentẽ propositionẽ, triplũ pyramidis septangulæ quintæ, quæ pars est vna cõbinationis. Itẽ residuũ aggregati, scilicet columna triãgula 4^{a} primi generis, cũ duplo trianguli quarti per 50^{a} huius, triplũ facit pyramidis triangulæ quartæ: qui est residuũ cõbinationis. Itaque, cum duæ partes aggregati duarũ partum combinationis singulæ singularum triplæ sint, iã & per primã quinti Euclidis, totũ aggregatũ toti⁹ cõbinationis triplũ erit. In hoc quinto loco; & similiter alibi. Qd est propositũ.

Pyr. 8^{la} 5^{a} 165 { Pyr. $\triangle^{la}$ 5^{a} 145 + / Pyr. ∇^{la} 4^{a} p^{i} 20. χ }

Col. 8^{la} 5^{a} 405 { Col. 7^{la} 5^{a} 355. / Col. □. 4^{a} p^{9} 40. / $\triangle$. 4^{a} p^{9} 10. } ✱. 5^{9} p^{9} 45 / □. 5^{9} p^{9} 25. / $\triangle$ 4^{9} p^{9} / ∇ 4^{9} p^{9} 20

COROLLARIVM.

Et pro hexagono primi generis & quadrato collateralibus substituere potes hexagonum centralem & imparem collaterales. Nam, per corollarium $2^{ũ}$ 66^{e} hexagonus centralis & impar simul sumpti, valent hexagonum primi generis & quadratũ collaterales, hoc est, in quinto loco, per assumpto exemplo.

Pyr. 8^{la} 5^{a} 165 { Pyr. 8^{la} 5^{a} 145 / Pyr. $\triangle^{la}$ 4^{a} p^{i} 20. }

PROPOSITIO 84^{a}.

Sicut columna triangula centralis cum quadrati & trianguli collateraliũ primi generis aggregato coniuncta, triplum conficit suæ pyramidis. Ita etiam sequentium columnarũ centralium tã quadrata cũ dicto aggregato & vno triangulo præcedenti: q̃ pentagona cũ eodẽ aggregato & duplo triãguli precedẽtis: q̃ hexagona cum tali aggregato & triplo triãguli præcedẽtis, quàm septãgula cũ ipsomet aggregato & quadruplo triãguli præcedẽtis: quãque octangula cũ eo ipso aggegato & quincuplo triãguli præcedẽtis coiũcta, triplũ efficit suæ pyramidis. Sũto columnæ cẽtrales collaterales a. quidẽ triãgula, ipse b. quadrata, ipsa c. pentagona, ipsa d. hexagona, ipsa e. septangula, & ipsa f. octangula. Item g. quadratus & h. triangulus eiusdem loci, hoc est, collaterales ipsarum columnarũ & ex ipso genere. Itẽ per triãgulus eiusdẽ generis præcedẽtis loci: & ex alia parte sunto pyramides centrales columnis dictis collaterales: Ipsa quidem l. triangula, ipsa m. quadrata, ipsa n. pẽtagona, ipsa e. hexagona, ipsa p. septangula. ipsaque q. octangula: quibus dispositis, ostẽdẽdũ est, quòd sicut, per 79^{a} huius aggregatũ ex a g h. triplum est ipsius l. ita & aggregatũ ex

Col	□$\triangle$.	$\triangle$	pyr.
a.	g h		l
b.	g h K		m
c.	g h K K		n
d.	g h K K K		o
e.	g h K K K K		p
f.	g h K K K K K		q
	r. f.		

Exemplum pro loco 5^{o}

Col. 5.	□. 5.	$\triangle$. 5.	$\triangle$. 4.	pyr. 5
155.	25.	15.		65
205.	25.	15.	10	85
255.	25.	15.	20	105
305.	25.	15.	30	125
355.	25.	15.	40	145
405.	25.	15.	50	165
			40.	20

Col. $\triangle$. Pyr. $\triangle^{a}$

Col.	□△.	△	pyr.
a.	gh		l
b.	gh K		m
c.	gh KK		n
d.	gh KKK		o
e.	gh KKKK		p
f.	gh KKKKK		q
	r.	ſ.	

Exemplum pro 5° loco

155.	25.	15.	—	65
205.	25.	15.	10 —	85
255.	25.	15.	20 —	105
305.	25.	15.	30 —	125
355.	25.	15.	40 —	145
405.	25.	15.	50 —	165
Col. 5. □.	5. △.	5. △.	4. pyr.	5
	40.		20.	

ex b g h. & K. triplum erit ipſius m. nec non aggregatum ex c g h. duploque ipſius k triplum ipſius n. itemq; aggregatũ ex d g h. triploque ipſius k. triplum ipſius o. adhuc aggregatum ex e g h. & quadruplato k. triplum ad p. & tandem aggregatum ex f g h. & quincuplato k. triplũ ad ipſum q. hoc pacto. Sit colũna triangula primi generis præcedens, hoc eſt collateralis ipſi k. triangulo ſignata per r. pyramis autẽ centralis præcedens, hoc eſt, collateralis columnæ r. ac triangulo k. eſto notata per ſ. cumque aggregatum ex a g h. triplũ ſit ipſius l. per 79ᵃ præmiſſam, oſtendã quòd, aggregatũ ex b g h. & k. triplum eſt ipſius m. Nam per corollarium 76ᵉ huius, ipſa b. addit ſuper a. ipſã r. & ipſum k. Et ideò aggregatum b g h k. addit ſuper aggregatum a g h. ipſam r. & duplum ipſius k. Item ipſa m. ſuper l. per corollarium 74ᵉ addit ipſam ſ. Triplum eſt autem additamentum additamẽti, hoc eſt, ipſum r. cum duplo ipſius k. duplum eſt ipſius ſ. per 50ᵃ huius. Igitur per primam quinti Eucl. aggregatum ex b g h. & k. triplum erit ipſius m. quod fuit oſtẽdendum. Et quoniam c. addit ſuper b. ipſam r. & alium k. per corollarium 76ᵉ huius, & n. ſuper m. addit rurſus ipſam ſ. per corollarium 74ᵃ Similiter penitus & eodem proceſſu oſtendã, quòd aggregatum c g h. cum duplo ipſius k. triplum eſt ipſius n. Nec non, quòd aggregatum d g h. cum triplo ipſius k. triplum eſt ipſius o. Adhuc quod aggregatum e g h. cum quadruplo ipſius k. triplum eſt ipſius p. & demum, quòd aggregatum f g h. cum quincuplo ipſius k. triplum eſt ipſius q. ſicut demonſtrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Et eodem cremento procederemus, ſi vltra octangulam columnam ac pyramidem confingeremus formas ſequentes, ſcilicet enneagonam, & decagonam, & reliquas deinceps. Sed ne curioſitas modum excedat, ſatis ſit nobis hucuſque progreſſi; & protinus de regularibus ſolidis diſſerere incipiamus, ne quid in hac ſpeculatione intactum relinquatur.

PROPO-

PROPOSITIO 85ᵃ.

Omnis par cum paribus omnium præcedentium locorum coniunctus, conficit collateralem parte altera longiorem. Exempli gratia, par quinti loci, ſcilicet 8. coniunctus cum paribus præcedentibus 6. 4. 2. 0. conflat 20. parte altera longiorem quintum. Nam per 3ᵃ huius quatuor dictorum parium aggregatum duplum eſt ad aggregatum totidem radicum ab vnitate continuatarum, hoc eſt, ad triangulum primi generis quartum. Item ad eundem triangulum quartum duplus eſt parte altera longior quintus, ſcilicet 20. per octauam huius. Aequalis igitur eſt parte altera longior quintus dicto quatuor parium numero rum aggregato. Quod fuit demonſtrandum. Et demonſtratio ad alium quemuis locum transferetur vt conſtet propoſitum.

0.	0.	1°
2.	2.	2°
4.	6.	3°
6.	12.	4°
8.	20.	10.
20		

PROPOSITIO 86ᵃ.

Si numerorum imparium ab vnitate per ordinem continuatorum ſingulorum ſinguli quadrupli poſt Ziſram diſponantur, ex eorum ſucceſſiua aggregatione cõſtruetur quadrati numeri à paribus collateralibus in ſe multiplicatis producti. Exempli gratia, quotuis ab vnitate impares, vt puta quatuor 1. 3. 5. 7. ſinguli quadruplicentur, & poſt Ziſram diſponãtur ſic 0. 4. 12. 20. 28. aio, quòd horum quadruplorum omnium aggregatum eſt numerus quadratus, qui fit à numero pari quinti loci in ſe ducto, hoc eſt, ab octonario. Nam, per 15ᵃ huius ex aggregatione dictorum quatuor imparium fit quadratus quartę radicis. Quare quadrupli eorumdẽ imparium conficient quadruplum dicti quadrati, hoc eſt, quadratum, qui fit ex duplo dictæ radicis in ſe ducto, hoc eſt ex octonario in ſe multiplicato. Nam latera, quorum quadrata ſunt in quadrupla ratione, ſeruant ad inuicem rationem duplam. Similiter per locis alijs conſtat propoſitum.

1.	0.	0.	1.
3.	4.	2.	1.
5.	12.	4.	3.
7.	20.	6.	4.
16.	28.	8.	
	64.		

KOLOGO-

PROLOGOMENA.

HOC à principio decreuimus, ingeniose Lector, in hisce nostris numerarijs speculationibus, ut non solum obscurè ab alijs tradita facilius demonstraremus, sed etiam omissa suppleremus Ne quid igitur, quod ad formas numerorum, pertinet, desyderaretur, sicut pyramidibus & columnis numerarias figuras non unius generis, sicut & planis rectilineis, hactenus adsignauimus; ita & quinque illa geometrica solida, quæ vulgo regularia nuncupantur, adaptatis singula numeris imitabimur: structuram quidem primo definientes, & inde proprietatem singulorum, atque colligantias, per demonstrationes & exemplo exponentes. Sed, cum quinque sint apud egregios Geometras regularia illa, mirum in modum à Platone celebrata corpora, Pyramis uel Tetrahedrum, Octahedrum, Cubus, Icosahedrum, atque Dodecahedrum; è quibus sicut pyramidem tetrahedrum; ita & cubum hexahedrum quoq; à basium numero vocari nemo prohibet. Ex his duæ iam in numeris nostris tractata sunt formæ, pyramis scilicet in ordine primarũ pyramidum: & cubus inter eiusdem ordinis columnas. Sequitur nunc octahedrum, quod semper ex duabus proximis quadratis pyramidibus non aliter, quàm quadratis ex duobus proximis triangulis coalescit. Supersunt duo reliqua, quæ per numeros non nisi centralia intelligi & construi poterunt: quemadmodum in planis formæ secundi ordinis astruebantur. Et sicut in planis septanguli & octanguli numeri non, nisi per centrum & ambitum, conflari commodè possunt; ita fit in huiusmodi duobus postremis solidis. Item, sicut triangulos, quadratos, pentagonos, & hexagonos

xagonos non solùm primi generis, sed etiam cẽtraliter efformauimus ad implendum secundum formarum ordinem; ita & hìc licebit reliqua tria priora solida, pyramidem, octahedrum, & cubum centraliter, sicut postrema duo per numeros configurare. Cum itaq; tam pyramides triangulæ, quàm cubi primæ speciei satis iam superius constructi & expositi sint, & eorum proprietates declaratæ: nunc & octahedri numeri eiusdem speciei sic quidem faciliter construentur, si ab unitate exordium capientes, (ut diximus) duas quasq; proximas primi generis quadratas pyramides coniũgamus: sicuti fit in ipso continuo geomotricoq; octahedro solido. Cum itaque pyramides quadratæ primæ huiusmodi se in ordine habeant, ut superius describebãtur, iã & octahedri numeri primæ speciei singuli & collaterali & præcedenti pyramide cõiũctis haud difficilius sub ijsdem exarabũt. Hoc vz pacto.

1 . 5 . 14 . 30 . 55 . 91 . 140 . 204 . 285 . 385 .	Pyramides quadratæ primi generis.
1 . 6 . 19 . 44 . 85 . 146 . 231 . 344 . 489 . 670 .	Octahedri primi generis .

Et eadem aggregatione in infinitum fiet processus, & si non actu, potentia tamen, quæ nunquàm theorico intellectui negatur. Agendum nunc de solidis regularibus centralibus, in quibus semper unitas in centro ponitur sicut & in planis numeris centralibus. Sed operepretium est intelligere imprimis quo pacto disponendæ sint cæteræ unitates, & quibus in locis, ad efformanda, ut decet, talia solida numeralia. Nec dubium, quin in singulis, posita unitate cẽtri tam per singulos solidos angulos, quàm per singula basium centra singulæ sint unitates disponendæ. Itaque cum pyramis habeat quatuor angulos & totidem bases, habebit cum centrali unitate nouem unitates. Cum autem octahedrum habeat

beat sex angulos, & octo bases & centrum; habebit vnitates quindecim. & totidem vnitates cubus: quandoquidem habent angulos octo & bases nouem & centrum. Vnde sicut secundus ab vnitate octahedrus, secundo adequatur cubo; ita & tertius tertio: & quartus quarto: & sequentes sequentibus, singuli singulis in infinitum semper æquales existunt: vt postea demonstrabimus. Deinde cũ Icosahedrum habeat 12. angulos solidos, bases autem 20. & centrum; constituetur ex vnitatibus 33. & ex totidem vnitatibus dodecahedrus, vt pote qui habet angulos 20. bases 12. & centrum, hoc est secundus Icosahedrus secundo Dodecahedro æqualis est. Et similiter deinde tertius tertio: & quartus quarto: & sequentes sequentibus singuli singulis Icosahedri Dodecahedris in infinitum semper adæquabuntur propter eandem, quæ in Octahedro & cubo, reciprocam angulorum & basium numerorum æqualitatem: vt in suo loco in propositionibus ostendemus. Sed quo pacto sequentes solidi numeri, hoc est, sequentium locorum formentur, audi. Nec te, perspicacissime lector, tædeat ea perpẽdere, quæ ad huiusmodi numerarias formas, ab alijs omissa, & ad speculationis Arithmeticæ perfectionẽ maximè spectãt. Cognosces enim proprietates earum notatu dignissimas, nec nisi curiosis ingenijs patulas. Imaginor itaq; in hisce quinque singulis regularibus solidis, à centro ad angulos educi singulas semidiametros: quæ quidem in pyramide erunt quatuor in octahedro 6. in cubo 8. in Icosahedro 12. In dodecahedro 20. quot scilicet sunt solidi anguli, seu vertices solidorum. Deinde in ijsdem intelligo linearia latera quæ vertices ipsos coniungunt. in pyramide scilicet latera sex, In octa-

octahedro 12. In cubo totidem. In icosahedro 30. In dodecahedro totidem. Quæ quidem, cum semidiametris latera singula binis totidem triangulos continent quot sunt latera. His suppositis, iam nulli obscurum erit inter trina quidem quælibet huiusmodi triangula pyramides intercipi, quę tot sunt quot ipsius solidi bases, in tetrahedro s. pyramides quatuor triangulas, in octahedro octo triangulas; in icosahedro viginti similiter triangulas. At in cubo inter quaterna triangula, pyramides sex quadratas. In dodecahedro inter quina triangula, pyramides 12. pentagonas. Quibus consideratis, iam constabit, vnumquodque horum solidorum construi debere ex vnitate centrali, ex vnitatibus per semidiametros dispositis, ex numeris triangulis, exque numeris pyramidibus. Hoc modo. Pyramidem, siue tetrahedrum, ex centro, ex quatuor semidiametris, ex senis triangulis, & ex quatuor pyramidibus triangulis. Octahedrum ex centro, ex senis semidiametris, ex duodecim triangulis, & ex 8. pyramidibus triangulis: cubum ex centro, ex 8. semidiametris, ex 12. triangulis, & ex senis pyramidibus quadratis. Icosahedrum ex centro, ex duodecim semidiametris, ex triginta triangulis, & ex 20. pyramidibus triangulis. Dodecahedrum ex centro, ex 20. semidiametris, ex triginta triangulis, & ex 12. pyramidibus pentagonis. Postquam itaque vnitas præbet singulis solidis huiusmodi, nomen: quippe quæ nullam non numeri spetiem suscipit; iam in secundo loco (vt diximus) pyramis habebit 9. vnitates; Octahedrus 15. cubus totidem. Icosahedrus 33. Dodecahedrus totidem.

Nam cẽtrum cum angulis & basium centris tot vnitates suscipiunt. Quo quidem in loco semidiametri sunt ipsę angulorum vnitates : trianguli nulli : pyramides verò solæ vnitates, quæ sunt basium centra. Quare hic tam semidiametri, quàm pyramides exordium sumunt. Intellige autem semper Δ^{los} primæ speciei; pyramides verò secundæ : quoniam oportet eas esse centrales. In tertio mox loco crescunt singulæ semidiametri per vnitatem : trianguli autem exordium capiunt, suntque vnitates ; pyramides verò sunt quæ vnitatem sequuntur : triangulæ quina-

vnitate ex quatuor semidiametris, scilicet 12. ex sex triangulis, scilicet 18. ex quatuor pyramidibus, scilicet 60. habebit 91. Octahedrus autem ex vnitate sex semidiametris scilicet 18. ex 12. triangulis scilicet 36. & ex octo pyramidibus triãgulis s. 120. constans, habebit 175. & tantundẽ cubus: nã vnitas, octo semidiametri scilicet 24. duodecim trianguli scilicet 36. & sex pyramides, scilicet 114. eundem numerũ 175. conficiunt. Iem icosahedrus constans ex vnitate, ex 12. semidiametris, scilicet 36. ex 30. triangulis, scilicet 90. & ex 20. pyramidibus triangulis scilicet 200. compræ-

quadrata 231. pentagona 287. & factis, ſecundum regulam ſummis, pyramis erit 855. Octahedrus & cubus 1695. icoſahedrus, & dodecahedrus 4215. Pro nono loco, ſemidiameter ſortitur 8. triangulus 28. pyramis triangula 260. quadrata 344. pentagona 428. & peracta more conſueto congerie, peruenient pyramis 1241. Octahedrus & cubus 2465. Icoſahedrus & dodecahedrus 6137. Pro decimo demum loco, ſemidiameter habet 9. triangulus 36. pyramis triangula 369. quadrata 486. pentagona 609. ex quorum poſitione conflabũt ſummæ pyramidis quidẽ 1729. Octahedri & cubi 3439. Icoſahedri & dodecahedri 8569. & deinceps, ſeruato ſemper precepto, in infinitum inuenietur cubus octahedro, & dodecahedrus icoſahedro æquales. Quod ſic eſſe, demonſtratione poſtea roborabimus, præmiſſis neceſſarijs præambulis. Mox & alias quaſdam admiratu dignas proprietates executuri, ſicut profundas, ita maioribus noſtris nunquam hactenus animaduerſas, quæ quidem idcirco prælibata ſunt à nobis ingenioſe Lector, vt ea, quæ demonſtraturi ſumus, magis tibi peruia ſint, ſed & ſolida ipſa vſque ad decimum locum collecta hic breui tabella commonſtrabimus, vt dudum traditum ſtructuræ modum, expoſito exemplo prontius intelligas. Eccam tabellam.

1	9	35	91	189	341	559	855	1241	1729	Pyram. cubi mixti.
1	15	65	175	369	671	105	1695	2465	3439	Octahedri cubi.
1	33	155	427	909	1661	2743	4215	6137	8569	Icoſahedri dodecah.

Eſt etiam tertia cuborum ſpecies, quos mixtos appellare libuit: eo quod ſinguli fiant ex mixtione collateralis cubi primi generis & cubi præcedentis, non aliter, quàm quadrati

centrales

centrales ex mixtione quadrati collateralis & præcedentis primi generis. Sed magis admiraberis ingenioſe Lector, huiuſmodi cubos mixtos eſſe ſingulos æquales ſingulis collateralibus tetrahedris centralibus iamdudum expoſitis, ſicut in fine demonſtrabimus. His ergo præmiſſis, ad ipſorum ſolidorum diffinitiones veniamus.

DIFFINITIONES.

Pyramis triangula ſiue tetrahedrus primi generis, quæ figura, propter baſium conformitatem, inter numerarias regulares ſolidas reponi meretur, conſtitit in diffinitionibus primis. Octahedrus primi generis compaginatur ex duabus quadratis pyramidibus primi generis. ſ. collaterali, & præcedenti: queadmodum quadratus primus cõflabatur ex duobus primi generis triangulis, collaterali ſcilicet & præcedenti. Cubus mixtus componitur ex duobus cubis primi generis, ſcilicet collaterali & præcedenti, non aliter q̃ antea quadratus centralis conflabatur ex duobus primi generis quadratis. ſ. collaterali & præcedenti. Nunc autem diffiniendæ ſunt ſolidorum regularium centralium, ſiue ſecundi generis ſtructuræ ſic: Omnis radix propoſiti loci cum vnitate, triãgulo præcedente primi generis, pyramideque centrali collaterali, conſtituere poteſt numerum ſolidum, regularem ſequentis loci: ita ſcilicet vt radix in numerum ſolidorum angulorum multiplicetur: triangulus in numerum laterum linearum, Pyramis in numerum baſium, Tetrahedrum igitur, ſiue pyramidem conſtruet, vnitas centralis, radix quadruplicata, triangulus ſexcuplicatus, & pyramis triangula quadruplicata. Octahedrum autem conſtituet vnitas centralis, radicis ſecuplum, trianguli duodecuplum, & Pyramidis triangulæ octuplum. Heſahedrum ſiue cubum conficiet vnitas centralis, radicis octuplum, trianguli duodecuplum, & pyramidis quadratæ ſexcuplum. Icoſahedrum conflabit, vnitas centralis, radicis duodecuplum, trianguli trigecuplum, & pyramidis triangulæ vigecuplum. Dodecahedrum tandem conflabit, vnitas radicis vigecuplum, trianguli Trigecuplum, & pyramidis pentagonæ duodecuplum. Pyramides

 enim

enim pro cubo quadratæ: pro dodecahedro pentagonæ: pro cæteris triangulæ capiendæ sunt, quo scilicet sint corporis ipsius basibus conformes.

PROPOSITIO 87.

85 { 55
30

Omnis octahedrus primi generis æqualis est pyramidi quadratę centrali, sibiq; collaterali. Exempli gratia: octahedrus quintus, primi generis est. Aio, quod is idem numerus est, & pyramis quadrata centralis quinta. Nam per 75ª & 68ª huius, pyramis quadrata quinta conficitur ex duabus pyramidibus quadratis primi generis, scilicet quinta & quarta, & per diffinitionem ipsius, de quo loquimur, octahedri, talis octahedrus quintus componitur ex ijsdem dictis duabus quadratis pyramidibus. Igitur octahedrus quintus est pyramidi quadratę quintæ ęqualis: & similiter in quo vis alio loco verificatur propositum.

PROPOSITIO 88.

per 36ª
pyr.⬠ 5ª { pyr.□. 5ª 55. / pyr.△ˡᵃ 4ª 20.
75.
per 41ª
Pyr.*.5ª vel Cubᵘˢ 5 125 { pyr.□. 4ª 30.
per 51ª
pyr.△ˡᵃ 4 20.

per diffi. Octahed. 5ᵘˢ 85 { pyr.□ᵗᵃ 5ª 55 / pyr.□. 4ª 30

Omnis cubus primi generis æqualis est aggregato ex octahedro primi generis collaterali, duploq; triangulæ pyramidis præcedentis. Exempli gratia: cubus quintus, scilicet 125. æqualis est octahedro primi generis quinto. s. 85. vna cum duplo pyramidis quartæ primi generis, scilicet cum 40. Quod sic ostenditur, per 51ª huius, cubus quintus ęqualis est pyramidi hexagonæ æquiangulæ quintæ: per 41ª autē pyramis hexagona quinta ęquiangula valet aggregatum ex pyramide pentagona quinta, & ex duabus pyramidibus quarti loci. s. quadrata & triangula primi generis. Sed, per 36ª huius, pyramis pentagona 5ª æquiualet aggregato pyramidum quadratæ quintæ, & triangulæ quartę. Igitur pyramis hexagona qnta, siue cubus ipsi æqualis valebit aggregatum ex duabus pyramidibus quadratis quinta & quarta, & ex duplo pyramidis triangulæ quartæ. Cumq; per diffinitionem duæ prædictæ pyramides quadratæ cōficiant octahedrum primi generis quintū: iam & talis octahedrus quintus cum duplo pyramidis triangulæ quartæ sumptus, adæquabit cubum quintum: quòd erat demonstrandum. & perinde sicut in quinto, ita in quouis alio loco constabit propositum.

PROPOSITIO 89.

Omnis impar in quadratum secundæ speciei, hoc est, centralem, sibi collateralem multiplicatus, producit gnomonem collateralem ex ordine gnomonum ab vnitate cōtinuatorum, atq; quadratos ex quadratis primis in se ductis genitos per additionem successiuam

successiuam constituentium. Præmissa vnitate, quæ omnem numeri speciem repræsentat secundus impar est 3. secundus autem quadratus centralis est 5. ex horum ducto fit 15. gnomo secundus quippe qui cum vnitate facit 16. quadratū scilicet quaternarij. Quod sic ostendo: post vnitatem notabo primum duos in tres, in quatuor, in quinque numeros ab vnitate per duplam proportionem notatos. Hoc pacto duo primi numeri, scilicet 1. 2. per sextam huius simul conficiunt imparem secundi loci, scilicet 3. Extremi autem sequentis ordinis scilicet 1. 2. 4. sunt 1. & 4. proximi scilicet quadrati, quorum congeries, per 68ª huius, est quadratus centralis secundi loci, scilicet 5. Itaque demonstrandum est, quòd aggregatum ex vno, & 2. multiplicatum in congeriem ex 1. & 4. producit gnomonem secundi loci, hoc est differētiam ipsorum 1. & 16. qui sunt quadrati quadratorum, primus vnitatis, & alter quaternarij. Talis enim gnomo, scilicet 15. appositus vnitati, constituit 16. quadratum quadrati secundi: Nam in hisce quatuor numerorum ordinibus, duo primi, scilicet 1. 2. sunt differentiæ trium sequentiū, scilicet 1. 2. 4. & rursus hi tres sunt differentiæ quatuor sequentium, scilicet 1. 2. 4. & 8. & adhuc hi quatuor sunt differentiæ quinque postremorum, scilicet 1. 2. 4. 8. 16. quandoquidem in numeris continue proportionalibus differentiæ sunt continue proportionales, & primæ differentiæ sint iam vnitates, sicut primi ordinum singulorum numeri. Hic est autem processus demonstrationis: aggregatum ex vno & 2. primi ordinis ductum in vnitatem, facit cōgeriem 1. & 2. in tertio ordine. Item aggregatum ex 1. & 2. primi ordinis ductum in 4. producit 4. & 8. in tertio ordine, hoc est, 12. Igitur tale aggregatum ex 1. & 2. hoc est 3. ductum in congeriem ex 1. & 4. hoc est, in 5. producet cumulum quatuor numerorum, scilicet 1. 2. 4. 8. Verùm talis cumulus facit cumulum differentiarū quarti ordinis, scilicet ipsorū 1. 2. 4. 8. 16. & perinde facit differentiam extremorum, scilicet 1. & 16. hoc est, 15. gnomonem secundi loci prædictum. Quod fuit demonstrandum. Item dico quòd tertius impar, scilicet 5. ductus in tertium quadratum centralem. s. 13. producet tertiū gnomonem ex prædictis, scilicet 65. qui. s. cum 16. coniunctus facit quadratū nouenarij, qui tertius quadratus est, facit inquā 81. quadratum ex quadrato tertio in se dicto genitum. Quod haud obscure, nec difficilius ostendam Hoc processu.

Pro secundo loco.

1
1 . 2
1. 2. 4
1. 2. 4. 8
1. 2. 4. 8. 16

3 } 15
5

Pro tertio loco.

1
2 . 3
4. 6. 9
8. 12. 18. 27
16. 24. 36. 54. 81.

5 } 65.
13

 Post

Poſt vnitatem notabo radices proximas ſecundi & tertij loci, ſcilicet 2. & 3. qui, per ſextam huius, coniuncti faciunt tertium imparem: mox duco 2. in ſe, & in 3. nec non 3. in ſe, & fient 4. 6. 9. continue proportionales in ratione ipſorũ 2. & 3. & Rurſum, ex quatuor multiplicationibus, ſcilicet ex ductu 2. in 4. & in 6. & ex ductu 3. in 6. & in 9. fiant quatuor numeri ſimiliter proportionales 8. 12. 18. 27. Et adhuc ex quinque multiplicationibus, ſcilicet ex 2. in ſingulos dictos 4. 8. 12. 18. 27. & ex 3. in 27. fiant quinque numeri 16. 24. 36. 54. 81. in eadem ratione continua proportionales. Atque his conſtitutis, demonſtrandum erit quòd aggregatum ex 2. & 3. ſcilicet 5. tertius impar, multiplicatum in aggregatum ex 4. & 9. hoc eſt, in 13. quod, per 68[a], eſt tertius quadratus centralis, producit differentiam ipſorum 16. & 81. hoc eſt, gnomonem ex his, quales diximus tertium. Nam per 21[a] ſeptimi Elementorum Euclid. quoniam ex ductu ipſorum 2. 3. primi ordinis, naſcuntur numeri trium reliquorum ordinum, idcirco ſinguli ordines ſeruant continuam proportionem primi: & quoniam ex multiplicante indifferentiam multiplicatorum, producitur differentia productorum: idcirco, duo numeri primi ordinis, ſcilicet 2. & 3. ſunt differentię numerorum ſequentis ordinis, ſcilicet ipſorum 4. 6. & 9. & ſimiliter hi tres ſunt differentię numerorum quarti ordinis, qui ſequitur, ſcilicet ipſorum 8. 12. 18. 27. Nec ſecus hi quinque ſunt differentiæ quinque numerorum ſequentium, ſcilicet 16. 24. 36. 54. 81. quo fit, vt cumulus ipſorum 8. 12. 18. 27. ſit differentia ipſorum 16. 81. extremorum. Vnde demonſtrandum erit, quòd ex multiplicatione aggregati ipſorum 2. 3. in congeriem ipſorum 4. & 9. hoc eſt ex ductu 5. in 13. tertij, ſcilicet imparis in tertium quadratum centralem, producitur cumulus ipſorum 8. 12. 18. 27. hoc modo. Quoniam ex 2. in 4. fit 8. & ex 3. in 4. fit 12. per 23[a] ſeptimi Euclidis (quoniam 2. ad 3. ſicut 4. ad 16.) propterea ex 4. in aggregatum ipſorum 2. 3. fit aggregatum ipſorum 8. 12. per primam ſecundi Elementorum, & per eãdem rationem, quoniã ex 2. in 9. fit 18. & ex 3. in 9. fit 27. propterea ex 9. in aggregatum ipſorum 2. 3. fit aggregatum ipſorum 18. 27. Rurſum ergo ex prima ſecundi Euclidis ſequitur, vt ex aggregato ipſorum 2. 3. in aggregatum ipſorum 4. 9. fiat cumulus quatuor numerorum 8. 12. 18. 27. Quod fuit demonſtrandum.

Pro quarto loco.

1
3 . 4
9. 12. 16
27. 36. 48. 64
81. 108. 144. 192. 256

$\left.\begin{matrix}7\\25\end{matrix}\right\}175.$

Eodem

Eodem penitus proceſſu demonſtrabimus, ꝙ quartus impar. ſ. 7. ductus in quadratũ cẽtralem quartũ 25. efficit 175. gnomonẽ quartũ, qui cum quadrato nouenarij iunctus. ſ. cum 81. cõponit quadratũ ex 16. ſcilicet 256. Itẽ ſimiliter oſtendemus, ꝙ quintus impar. ſ. 9. ductus in quintũ quadratũ cẽtralẽ. ſ. 41. producit 369. gnomonẽ quintũ, q cũ 256. cõſtituit 625. q quadratus eſt 5[i] quadrati: & ſic in infinitũ.

Pro quinto loco.

1
4 . 5
16. 20. 25
64. 80. 100. 125
256. 320. 400. 500. 625.

$\left.\begin{matrix}9\\41\end{matrix}\right\}369.$

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
1	5	13	25	41	61	85	113	145	181	Quadrati centrales.
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones,

PROPOSITIO 90.

Vnuſquiſque dictorum gnomonum æqualis eſt aggregato triangulorum centralium ab vnitate per ordinem ſumptorum, & tot quot ſunt vnitates imparis collateralis. Exempli gratia. 15. gnomo poſt vnitatem æqualis eſt aggregato trium triangulorũ centralium. ſ. 1. 4. 10. quoniam ternarius eſt impar collateralis ipſius gnomonis ſecundi. At 65. gnomo ſequens æqualis eſt aggregato quinque triangulorum, ſcilicet 1. 4. 10. 16. 31. quoniam. ſ. 5. eſt impar collateralis dicto gnomoni. & ſic deinceps in infinitum. Et quoniam tria talia triangula, per diffinitionem componunt pyramidem triangulam centralẽ tertij loci, & quinque talia prædicta triangula conſtituunt pyramidem triangulam quinta loci, & ſic deinceps per impares locos in infinitũ: propterea propoſitio pñs hoc dicit.

COROLLARIVM.

Quòd tales gnomones ſunt pyramides triangulæ centrales per impares locos diſpoſitæ in infinitum. Cuius propoſitionis & corollarij demonſtratio hæc eſt. Aio, ꝙ 65. gnomo tertij loci, eſt pyramis triangula centralis quinta. Quod ſic patet. Ducatur 5. in 31. radix. ſ. quinta in triangulum 31. quintũ qui baſis eſt pyramidis ipſius quintæ, & producũtur 155. colũna. ſ. triãgula quinta huic addo quadratum quintũ primæ ſpeciei. ſ. 25. & triangulum quintũ. ſ. 15. & conflãtur 195. qđ, per 79[a] huius, triplũ eſt pyramidis ſuæ quintæ. productũ aũt ex 5. in 31. cum dictis quadrato & triãgulo, ſumptũ, eſt æquale producto ex 5. in 39. quoniam. ſ. 39. conſtat ex 31. 5. & 3. hoc eſt, triangulo quinto: impare tertio, & radice tertia: & ex tali radice in talem imparem, hoc

$5\left\{\begin{matrix}13 \text{ — } 65\\39 \text{ — } 195\end{matrix}\right.$

eſt,

eſt ex 3. in 5. fit dictus triangulus quintus 15. (vt ex regula progreſſionis facile conſtat) Quo fit, vt productũ ex 5. in 39. æquale ſit producto ex 5. in 31. in 5. & in 3. hoc eſt, producto ex 5. in 31. cum quadrato quinarij & triangulo quinto, hoc eſt, cum 25. & cum 15. Et, quoniam 31. triangulus, ſcilicet quintus centralis cum ipſo quinario & ternario, quoniam quinarius eſt tertius impar, conficiant ſemper triplum tertij quadrati centralium, qui nunc eſt 13. & gnomo 65. fit ex 5. in ipſum 13. per præmiſſam. Iam iccirco productum ipſum ex 5. in 39. ſcilicet 195. triplum erit gnomonis 65. fuit autem & triplum pyramidis triangulæ quintæ: Igitur gnomo tertius & pyramis centralis quinta ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum. Sed reſtat oſtendere, quòd triangulus imparis loci cum ipſo impare & cum radice collaterali ad imparem faciunt ſimul triplum quadrati centralis, qui collateralis eſt ipſi radici. Hoc eſt aſſumpto exemplo, quod 31. cum 5. & 3. faciunt triplum ipſius 13. quod ſic oſtendetur: Diſponantur quatuor ſeries numerorum, ſingulæ ab vnitate initium capientes: in quarum prima ſint trianguli centralis locorum imparium, ſcilicet 1. 10. 31. 64. & in ſecunda 1. 3. 5. 7. & cæteri impares per ordinem. In tertia radices naturalis progreſſus 1. 2. 3. 4. &c. In poſtrema 1. 5. 13. 25. & cæteri quadrati centralis. In quibus id quod volumus facile conſtabit.
Nam cùm in exordio tres vnitates ſint

1	10	31	64	109	166	235	316	409	514	Triãg. cẽtrales locorũ impariũ
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices.
1	5	13	25	41	61	85	113	145	181	Quadrati centrales.

triplum quartæ. et trium ſubſequẽtium tres ad primas vnitates augumenta ſuper ipſas vnitates faciant duodenarium, qui numerus triplus eſt ad augumentum, quo in quarta ſerie ſequens vnitatem excedit ipſam vnitatem; iam ideo neceſſe erit, vt aggregatum trium corollarium, ſcilicet 10. 3. 2. ſit triplum ad hũc ſequentem, ſcilicet 5. Item quoniam augumenta trium in tertio loco ſequentium ſupra tres præcedentes conſtant 24. Et augumentum reliqui in

quarta

quarta ſerie ſupra ſuum præcedentem eſt 8. Idcirco & aggregatum trium illorum, ſcilicet 31. 5. 3. erit & triplum dicti reliqui, ſcilicet 13. Et ſic deinceps in infinitum, propter augmenta illic per duodenarium, hic per quaternarium creſcentia ſemper demonſtrabimus. Quod demum in dictis quatuor ſeriebus numeri ſecundum talia procedant crementa, facillimum eſt oſtendere. In triangulis quidem ſi conſideretur continuatorum crementa, quæ creſcunt per ternarium, iam alternatorum crementa per duodenarium augebuntur. At in ſerie imparium quis neſcit crementũ fieri per binarium, & in ſerie radicum per vnitatem? deniq; in ſerie poſtrema quadratarum centralium, quoniam ſinguli conſtant ex binis proximis quadratis primæ ſpeciei, quorum differentiæ creſcunt per binarium, quia videlicet conflatur per additionem continuam imparium, ideo differentias ſortiuntur per quaternarium creſcentes. Sic nihil reſtat, quod ad demonſtandum propoſitum faciet.

† 1.			
4.	3		
† 10.	6	9	
19.	9		
† 31.	12	21	
46.	15		
† 64.	18	33	
85.	21		
† 109.	24	45	
136.	27		
† 166.	30	57	
loci impares Δ^{li} Centrales	Dĩæ $\Delta^{lorũ}$ continuatorũ.	Dĩæ $\Delta^{lorũ}$ in locis impar.	

PROPOSITIO 91.

Tres quadrati centrales cum quatuor vnitatibus ſumpti, ſunt æquales quatuor triangulis centralibus cum tribus vnitatibus ſimul acceptis in eodem loco. Nam triangulus centralis conſtat ex vnitate & tribus triangulis primę ſpeciei pręcedentis loci. Quadratus verò centralis conſtat ex quatuor triangulis primę ſpeciei præcedentis loci, & ex vnitate. Quam ob rem, quatuor trianguli centrales conſtabunt ex 12. triangulis primæ, & ex quatuor vnitatibus. Tres verò quadrati centralis conſtabunt ex 12. triangulis primæ, & ex tribus vnitatibus. Igitur, ſi apponantur hìc quatuor, illic tres vnitates, conſtabit veritas propoſiti.

PROPOSITIO 92.

Tres pyramides quadratæ centrales cum quatuor axibus ſumptæ, ſunt æquales quatuor pyramidibus triangulis centralibus cũ tribus axibus in eodem loco ſimul acceptis. Hæc conſtat ex præcedenti: quoniam pyramides conſtant ex baſibus, illæ quadratis, hæ triangulis, & axes conſtant ex totidem vnitatibus ſingulæ. Quare cùm ex aggregatione æqualium coacerventur æqualia, conſtat propoſitum.

Tres

PROPOSITIO 93.

Tres Pentagoni centrales cum quinque vnitatibus simul sumpti sunt æquales quinque triangulis centralibus cum tribus vnitatibus simul acceptis in eodem loco. Quoniã triãgulus centralis constat ex vnitate & ex tribus triangulis primis præcedentibus. Pentagonus autem centralis constat ex quinque triãgulis primis præcedentibus ex vnitate: quam ob rem quinque trianguli centrales constabunt ex 15. triangulis primis & ex 5. vnitatibus. Tres verò pentagoni constabunt etiam ex 15. triangulis primis, & ex tribus vnitatibus: Igitur si apponantur hic 5. illic tres vnitates, constat propositum.

PROPOSITIO 94

Tres pentagonæ pyramides centrales cum quinque axibus sunt æquales quinq; pyramidibus triangulis centralibus cum tribus axibus eiusdem loci pariter acceptis. Hæc sequitur ex præmissa: quoniã pyramides constant ex planis, illæ pẽtagonis, hæ triãgulis, & axes constant ex totidem vnitatibus singulæ. Igitur cũ ex aggregatione æqualium coacervẽtur ęqualia, verum est id, quod ostendendum proponitur.

PROPOSITIO 95.

Cubus { Vnitas; { 8. semid. χ; 12. △li + }; 6. pyr□tæ χ }

Octahedrus { Vnitas; { 6. semid. χ; 12. △li + }; 8. Pyr. △læ χ }

Omnis cubus centralis æqualis est octahedro centrali sibi collaterali. Nam talis cubus, per diffinitionem construitur ex vnitate, quòd est centrum: ex octo semidiametris, ex 12. triangulis primis: quoniam tot sunt latera linearia solidi: & ex sex pyramidibus quadratis centralibus quot, scilicet sunt bases solidi. Octahedrus autem conflatur ex vnitate centrali, ex senis semidiametris, ex 12. triangulis primis: quoniam tot sunt eius solidi latera, & ex octo pyramidibus triangulis centralibus, propter totidem bases. Sed cum per 92^{a} pmissam, tres pyramides quadratæ cum quatuor axibus, qui sunt æquales semidiametris singulæ singulis, sint æquales quatuor pyramidibus triangulis cum tribus axibus: Iam sex pyramides quadratæ cum octo semidiametris erunt æquales octo pyramidibus triangulis cum sex semidiametris. At vnitas & 12. trianguli eãdem vtrobique summã ingerunt. Ergo & totus solidus numerus toti solido numero, scilicet cubus Octahedro adæquabitur: quemadmodum proponitur.

PROPOSITIO 96.

Omnis Dodecahedrus numerus æqualis est Icosahedro numero sibi collaterali. Sicut præmissa, per nonagesimã secundam ita

Icosahedrus { Vnitas; { 12. semid. χ; 30. △li + }; 20. pyr. △læ χ }

Dodecahedrus. { Vnitas; { 20. semid. χ; 30. △li + }; 12. pyr. ⬠næ χ }

ita pñs propositio per 64^{a} demonstrabitur. Nãque, per suppositionem nostram, icosahedrus conficitur ex vnitate, quod est centrum: ex 12. semidiametris, ex 30. triangulis primis, secundum laterum numerum solidi: & ex 20. pyramidibus triangulis centralibus, iuxta numerum basium. Dodecahedrus autem numerus formabatur item ex vnitate centrali, ex viginti semidiametris, ex triginta triangulis primis, propter totidem latera, & ex 12. pyramidibus pentagonis centralibus, quot sunt solidi bases. Sed cum per 94^{a} præmissam, tres pentagonę pyramides cum quinque axibus; siue semidiametris sunt æquales quinq; pyramidibus triangulis cum tribus axibus, siue semidiametris: iam & 12. Pentagonæ Pyramides cum 20. semidiametris simul, æquales erunt 20. pyramidibus triangulis cum 12. semidiametris. Atque vnitas & triginta trianguli tantundem vtrobique accumulant. Igitur ex totus icosahedrus toti dodecahedro æqualis erit, sicut in propositione concluditur.

PROPOSITIO 97^{a}.

Vnitas, quatuor diametri, hoc est, par numerus, quẽ voco diametrum, quadruplicatus cum octuplo trianguli primi, vno retro intermisso accepti, componunt quadratum imparis collateralis. Disponantur quatuor numerorum series ab vnitate, scilicet trianguli primi, pares, impares & imparium quadrati per ordinem. Et in ordine parium capiatur quilibet par, vtputa 8. ex triangulis autem capiatur, vno intermisso præcedens, scilicet 6. octuplicatus, hoc est, 48. Aio igitur, quòd vnitas, quadruplum ipsius 8. scilicet 32. simul cum 48. conficiunt quadratũ collateralis imparis, scilicet 81. Nam per 54^{a} huius, vnitas cum 48. quod est octuplum trianguli 6. facit quadratum imparis sequentis, scilicet 49. qui quadratus est ipsius 7. per 60^{a} verò huius, ipse numerus par 8. quadruplicatus, scilicet 32. coniunctus cum quadrato imparis præcedentis, scilicet cum 49. efficit quadratum collateralis imparis, scilicet 81. Igitur vnitas cum 32. & 48. conflant quadratum collateralis imparis prædicti, similiter in cæteris horum quatuor ordinum numeris per eadem penitus argumentando procedens, sicut demonstrandum proponitur.

1, 48 } 49; 49, 32 } 81

1	3	6	10	15	21	2	36	45	55	Trianguli primi.
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	Pares
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	9	25	49	81	121	169	225	289	361	Quadrati impariũ.

PROPOSITIO 98ª.

Quadruplum dicti trianguli, vno intermiſſo præcedentis imparem, cum ſexcuplo pyramidis quadratæ centralis immediate dictum imparem præcedentis coniunctum, conficit duo ſupplementa, quæ ſingula fiunt ex ductu ipſius imparis in latus ſecundi quadrati præcedentis: & coniuncta cum quadrato ipſius imparis conſtituunt gnomonem: qui coniunctus cum ſecundo quadrato prædicto, conſtruit ſecundum quadratum ſequentem, hoc eſt, ipſius imparis collateralem. Intelligo ſecundos quadratos eos, qui ex primis in ſe ductis fiunt: vt 16. eſt ſecundus quadrat⁹ binarij 81. ſecũdus quadratus ternarij; & ſic deinceps. Itaque exponam primum, dein oſtendam propoſitionem. Exponatur ab vnitate ſex numerorũ ſeries, ſcilicet, radices, Impares Trianguli primi, Pyramides quadratæ cẽtrales, quadrati primi, & gnomones ſecundorum quadratorum, per ordinem continuati. Quibus exaratis, iam in ſecundo loco, impar eſt 3. hic autem quadruplum triãguli nullum eſt. Nam retro intermiſſa vnitate, nullus eſt triangulus. pyramis hunc locum pręcedẽs, eſt vnitas eius, ſexcupluseſt ſenarius: qui ſolus facit hic duo ſupplementa 3. & 3. quæſingula fiũt ex impare huius loci, ſcilicet ex 3. in latus ſecundi quadrati præcedentis, ſcilicet vnitatis, hoc eſt, in vnitatem. Et coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet cum nouem, conficiunt 15. gnomonem, ſcilicet eiuſdem loci: qui applicatus ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet vnitati, cõſtruit iam ſecundum quadratum ſequentem, ſcilicet 16. In tertio autem loco, impar eſt 5. quadruplum trianguli, vno retro intermiſſo, ſumpti, ſcilicet vnitatis, eſt quatuor. Pyramis præcedens eſt 6. cuius ſexcuplum 36. qđ cum 4. facit 40. quæ ſunt duo ſupplementa, ſcilicet 20. & 20. quæ ſingula fiunt ex impare dicto, ſcilicet 5. in 4. latus ſecundi quadrati præcedentis, qui eſt 16. & coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet cum 25. faciunt 65. gnomonem tertium: qui cõiunctus cũ ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet 16. conflat iam ſecũdum quadratum ſequẽtem, ſcilicet 81. In quarto deinde loco,

loco, impar eſt 7. quadruplum trianguli vno retro intermiſſo, ſumpti, ſcilicet ternarij, eſt 12. Pyramis præcedens eſt 19. cuius ſexcuplum 114. quod cum 12. facit 126. quæ ſunt duo ſupplemẽta, ſcilicet 63. & 63. quæ ſingula fiũt ex impare dicto 7. in 9. latus, ſcilicet ſecundi quadrati præcedentis, qui fuit 81. & coniuncti cum quadrato dictæ imparis, ſcilicet 49. faciunt 175. gnomonem quartum, qui coniunctus ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet 81. facit 256. ſecundum quadratum ſequentem. Adhuc in quinto loco, impar numerus eſt 9. quadruplum trianguli non immediate præcedentis, ſcilicet 6. eſt 24. pyramis præcedens 44. cuius ſexcuplum 264. quod cum 24. efficit 288. quæ ſunt duo ſupplementa, ſcilicet. 144. & 144. quæ ſingula fiunt ex Impare dicto, ſcilicet 9. in 16. latus ſcilicet, quadrati ſecundi præmiſſi, qui fuit 256. & coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet cum 81. faciunt 369. gnomonem iungendum ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet 265. Vt cõflet 625. quadratum ſecundum quinarij: qui ſequitur, poſitus in præſenti loco. Sic pro ſexto, ſeptimo, & ſequentibus locis in infinitum fit ſimiliter ſeriatim procreando, ſecundos radicum quadratos. Sed demonſtrandum, quo pacto in ſingulis locis quadruplum trianguli, ex tertio retrorſum loco ſumpti, cum ſexcuplo pyramidis quadratæ præcedentis coniunctum, facit dicta duo ſuplementa, ſiue (quod idem eſt) quod duplum talis trianguli cum triplo talis pyramidis coniunctum, facit vnum tale ſupplementum, quod (vt dictum eſt) fit ex impare ipſius loci in latus ſecundi quadrati præcedentis: & proinde duo talia ſupplementa coniuncta cum quadrato dicti imparis, componunt gnomonẽ, qui iunctus cũ ſecundo quadrato prædicto conficit 2ᵐ quadratum ſequentem, impariq; collateralẽ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices
1	3	5	7	9	11	13	15	17	17	Impares
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi
1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	Pyr. quadr. centrales
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones 2ⁱ

Verùm in primo post vnitatem loco, qui secundus appellatur, in quo (vt dixi) quadratum triangulæ nullum est, liquet quòd triplum pyramidis præcedentis, scilicet 3. facit tale supplementum, quod scilicet fit ex impare huius loci, qui ternarius est, in latus secundi quadrati præcedentis, scilicet in vnitatem: & idcirco per quartam secundi Euclidis, duo huiusmodi supplementa coniuncta cum quadrato dicti imparis, scilicet 9. conficiunt 15. gnomonem, scilicet eiusdem loci: qui appositus secundo quadrato prædicto, scilicet vnitati, construit secundum quadratum sequentem, scilicet 16. collateralem ipsius imparis: cuius quidem latus est quadratus ipse primus, scilicet 4. quoniam tale latus ex aggregatione constat vnitatis & sequentis imparis, per 15ª huius libri. In tertio loco id ipsum quoque ostendemus: in quo impar est 5. quadruplum trianguli 4. & pyramidis sexcuplum 36. & ideo trianguli duplum 2. pyramidis triplum 18. Quare hic ostendendum est, quòd 2. cum 18 faciunt 20 supplementum quod fit ex impare huius loci scilicet 5. in latus secundi quadrati præcedentis, hoc est, in 4. quod sic patet: Nam columna quadrata centralis præcedentis loci, scilicet 10. cum duplo quadrati primi eiusdem loci, scilicet cũ 8. per 80ª huius, efficit triplum pyramidis eiusdem loci, quę quæ fuit 6. hoc est 18. Cui numero addo 2. parte altera longiorem eiusdem loci, & fiunt 20. Cumque 10. columna dicta fiat ex radice eiusdem loci, scilicet 2. in quadratum centralem collateralem, scilicet in 5. atq; ipse 5. constet ex quadrato primo collaterali & præcedenti, hoc est, ex 4. & 1. iam ipse 10. fit ex 2. in 4. & ex 2. in 1. coniunctus cum 2. parte altera longiore, hoc est totus 4. fiet ex 2. in 2. quod est aggregatum ex 1. & 1. Sic habemus tria producta, scilicet 8. ex 2. in 4. quod fuit duplum quadrati cum columna coniunctum. Item 8. & ex 2. in 4. atque 4. ex 2. in 2. integrãtiam totum numerum 20. cumque ex toto numero 20. ipse octonarius contineat bis 4. & rursum 8. bis 4. demonstrandum est quod reliquum, scilicet 4. contineat semel ipsum 4. vt totus 20. contineat quinquies, scilicet secundum numerum imparem huius locum, ipsum quatuor. Quod iam ratione comprobatur: quoniam scilicet 4. fit ex radice secundi loci, hoc est, ex 2. in parte altera longiore eiusdem loci, scilicet in 2. Et perinde factus adequatur quadrato collaterali, scilicet 4. sicut & radix æqualis est ipsi parte altera longiori Producitur

2 — 5 — 10

2 { 4 — 8
  1 — 2
  1 — 2 }

2 — 4 — 8

citur itaque in hoc loco 20. supplementum ex 5. in 4. & perinde duo talia supplementa, scilicet 20. & 20. coniuncta cum 25. quod est quadratum ipsius 5. imparis, faciunt gnomonem 65. qui coniunctus cum quadrato ipsius 4. scilicet cum 16. quadrato secundo præcedentis loci, scilicet secundi, constituit sequentem quadratum secundum, collateralem, scilicet huic loco tertio, qui est 81. Nam per 4ª secundi Euclidis, supplementa duo ex lateribus quadratorum duorum producta, vnà cum ipsis quadratis componunt quadratum, cuius latus constat ex lateribus quadratorum componentium. Sed vnum laterum talium fuit quadratus numerus, scilicet 4. & alterũ fuit sequens impar, scilicet 5. Ergo & compositus ex illis, per 15ª huius libri, erit quadratus sequens, scilicet 9. latus scilicet totalis quadrati: & perinde totalis quadratus erit quadratus secundus ternarij, scilicet 81. qui ex 9. in se fit. In quarto etiam loco nunc demonstrationem repetemus: in quo impar est 7. quadruplũ trianguli est 12. sexcuplum pyramidis 114. & ideò trianguli 6. triplum pyramidis 57. Quare hic ostendendum est, quòd 6. cum 57. efficit 63. supplementum, quod fit ex impare huius loci, scilicet 7. in latus secundi quadrati præcedẽtis, hoc est in 9. quod sic patet. Nam columna quadrata centralis præcedẽtis loci, scilicet 39. cum duplo quadrati primi eiusdem loci, scilicet cum 18. efficit, per 80ª huius triplum pyramidis eiusdem loci, hoc est 57. Cui numero adijcio 6. parte altera longiorem eiusdem loci: & fiunt 63. Cumque 39. columna dicta fiet ex radice eiusdem loci, scilicet 3. in quadratum centralem collateralem, scilicet in 13. atque ipse 13. constet ex duobus quadratis primis, scilicet, collaterali, & præcedenti, hoc est, ex 9. & 4. iam ipse 39. fiet ex 3. in 4. & ex 3. in 9. At ipse 6. parte altera longior, fit ex 3. in 2. Ergo 12. qui fit ex 3. in 4. coniunctus cum 6. parte altera longiore, scilicet 18. fiet ex 3. in 6. quod est aggregatum ex 4. & 2. Sic habemus tria producta, scilicet 18. ex 2. in 9. quod fuit duplum quadrati cum columna coniunctum. Item 27. ex 3. in 9. Atque 18. ex 3. in 6. integrantia totum 63. Cumque ex toto numero 63. ipse 18. contineat bis 9. & ipse 27. contineat ter 9. demonstrandum est, quòd residuum scilicet 18. continet bis 9. vt videlicet totus 63. concludatur continere septies ipsum 9. secundũ imparem. s. huius loci, qui septenarius est. Quod & ratione confirmatur.

3 — 13 — 39

3 { 9 — 27
  4 — 12
  2 — 6 }

2 — 9 — 18

Quoniã 18. producitur ex radice tertij loci. s. 3. in 6. parte altera longiorẽ eiusdem loci: & perinde productus duplus est ad quadratũ eiusdem loci, scilicet ad 9. quotuplus est parte altera longior ipsius radicis. Producitur itaque in hoc loco supplementũ 63. ex 7. in 6. Et perinde duo talia supplemẽta 63. & 63. coniuncta cum 49. quadrato ipsius imparis, faciũt gnomonem 175. Qui coniunctus cum quadrato ipsius 9. s. cum 81. quadrato secundo pręcedẽtis loci. s. tertij, cõponũt quadratum secundum sequentem. s. 256. collateralem, hoc est, huius quarti loci. Nam, per 4^a secundi Euclid. duo quadrata & duo supplementa ex lateribus quadratorum producta pariter accepta, cõficiunt quadratum totalem: cuius latus est aggregatum ex lateribus quadratorum partialium. Cumque vnum horum laterum fuerit iam quadratus numerus, scilicet 9. & reliquum impar numerus sequens. s. 7. iam aggregatum ex ipsis, totalis scilicet quadrati latus erit, per 15^a huius, erit quadratus sequens, scilicet 16. latus, scilicet totalis quadrati. Vnde totalis quadratus erit quadratus secundus, scilicet 256. qui fit ex 16. in se. Lubet & in quinto loco demum propositum demonstrare. In quo quidem impar est 9. quadruplum trianguli sæpe dicti 24. sexcuplum pyramidis 264. & ideo duplum trianguli 12. triplum pyramidis 132. Quare hic ostendendum, quòd 12. cum 132. efficit 144. supplementum, quod fit ex impare huius loci, scilicet 9. in latus secundi quadrati præcedentis, scilicet in 16. Quod sic potest concludi: Nam per 80. huius columna quadrata centralis præcedentis loci, scilicet 100. cum duplo quadrati primi eiusdem loci, scilicet cum 32. efficit triplũ pyramidis suæ eiusdẽ loci, quæ fuit 44. hoc est 132. cui numero addo ipsum 12. parte altera longiorem, & conficio 144. cumque 100. columna prædicta fiat ex radice eiusdem loci, scilicet 4. in quadratum centralem collateralem, scilicet in 25. atq; ipse 25. constet ex duobus quadratis primis, scilicet collaterali & præcedenti, hoc est, ex 16. & 9. iam ipse 100. fiet ex 4. in 16. & ex 4. in 9. At ipse 12. parte altera longior fit ex 4. in 3. Ergo 36. qui fit ex 4. in 9. coniunctus cum 12. scilicet totus 48. fiet ex 4. in 2. quod est aggregatum ex 9. & 3. Sic habemus tria producta: scilicet 32. ex 2. in 16. quod fuit duplum quadrati cum columna coniunctum: 64. ex 4. in 16. atque 48. ex 4. in 12. integrantia totum 144. Cumque ex toto numero 144. ipse 32. cõtineat bis 16. & ipse 64. quater 16. de-

4 ——25——100.
4 { 16——54. / 9——36. / 3——12. }
2 ——16——32.

loc.° 2° 2—bis, 1—semel, 0—nihil } ter — 1.
—— 3.

3° 8—bis, 8—bis, 4—semel } qnqes—4
—— 20

4° 18—bis, 27—ter, 13—bis } septies-9
—— 63

16. demonstrandum restat, quòd residuum scilicet 48. contineat ter 16. vt scilicet totus 144. comprehẽdat nouies 16. iuxta imparem huius loci, scilicet 9. quod, sicut prius, facilè ostenditur. Quoniam 48. producitur ex radice quarti loci, scilicet 4. in 12. parte altera longiorem eiusdem loci. Et idcirco productus est triplus ad quadratum collateralem, scilicet ad 16. quotuplus est parte altera longior ipsius radicis. Producitur itaque in hoc loco supplementum 144. ex 9. in 16. & ideo duo talia supplementa, scilicet 144. & 144. coniuncta cum 81. quadrato ipsius imparis 9. faciunt gnomonem 369. qui coniunctus cum quadrato ipsius 16. scilicet cum 256. quadrato secundo præcedentis loci, scilicet quarti, componit sequentem quadratum secundum, scilicet 625. huius quinti loci. Nam per quartam secundi Euclidis, duo quadrata, & duo supplemẽta ex lateribus quadratorum producta pariter accepta, conficiunt quadratum totalem: cuius latus est aggregatum ex lateribus quadratorũ partialium. Cumque vnum horum laterum fuerit quadratus numerus, scilicet 16. & reliquum impar numerus sequens, scilicet 9. iam per 15^a huius aggregatus ea ipsis, totalis scilicet quadrati latus, erit numerus quadratus, scilicet 25. Vnde totale quadratum erit quadratus secundus, scilicet 625. qui fit ex 25. quadrato huius quinti loci in se multiplicato. Similiter in sexto, septimo, octauo, & cæteris deinceps locos in infinitum continuabitur hęc demonstratio. Namque in sexto loco argues tria producta integrantia supplementum, continere præcedentem quadratum vndecies. In septimo loco tredecies, in octauo quindecies, in nono septemdecies, in decimo vndeuigesies. & sic deinceps per impares sequentes: vt hic in margine notaui, quo constet propositum.

5° 32—bis, 64—qter, 48—ter } noui-es.—16
—— 144

6° 50--bis, 125--qnqes, 100--quater } vndecies.-25
—— 275

7° 72--bis, 216--sexies, 180--qnqies } tredecies-36
—— 468

8° 98--bis, 343--septies, 294--sexies } qndecies-46
—— 735

9° 128--bis, 512--octies, 448--septies } 17^{ties}-64
—— 1088

10° 162--bis, 729--nouies, 648--octies } 19^{ties}--81
—— 1539

11° 200--bis, 1000--decies, 900--nouies } 21^{ties}-100
—— 2100

Et sic deinceps in infinitum. Et productum medium semper est Cubus pręcedentis loci.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices.
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi
1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	Pyramides quadrati centrales
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones.

PROPOSITIO 99ª.

□.imp. { Vnitatem / 8.semid. / 8.△los
Gnomo 2⁹
duo suppl. { 4.△los / 6.pyr.□.
Cubus centra. { vnitatẽ. / 8.sem. / 12.△los / 6.pyr.□.

Gnomones prædicti, sicut dictum est inuenti, Cubi sunt & Octahedri centrales. Nam cum vnusquisq; talium gnomonũ constet ex duobus supplemẽtis & ex quadrato imparis, atq; per præmissam talia supplemẽta cõstent ex quadruplo tertij retrorsum sumpti trianguli primi, & ex sexcuplo pyramidis quadratæ centralis præcedẽtis: Itemque, cum, per ante præmissam, quadratus dicti imparis constet ex aggregatione vnitatis, quatuor diametrorum, siue octo semidiametrorum & ex octuplo dicti trianguli; idcirco sequitur, vt talis gnomo construatur ex aggregatione vnitatis, octo semidiametrorũ, duodecim taliũ triangulorũ, & sex pyramidũ dictarum. Verùm, per diffinitionẽ cubi centralis, ipse cubus ex taliũ quatuor numerorũ cumulo cõpaginatur, ex quib⁹ talis gnomo. Igitur gnomo existet cubo æqualis. Per 95ª verò præmissarum, cubus octahedro çqualis esse constitit: igitur & octahedrus gnomoni æqualis erit, sicut demonstrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Et quoniam per 90ᵉ corollarium ostẽsum fuit, quòd gnomones præfati sunt pyramides triangulæ centrales imparium locorum, idcirco sequitur; vt gnomones, cubi, octahedri cẽtrales, & pyramides triangulę centrales imparium locorum ordinatim collati, sint ijdem numeri.

PROLOGOMENA.

REstat adhuc nobis ostendendum, quòd sicut contingit cubos primi generis fieri ex congerie vnius, duorum, trium, & deinceps imparium per ordinem ab vnitate succedentium singulos ab vnitate continuatos in infinitum; ita & cubis centralibus similem dignitatem esse à natura tributam: vt scilicet ipsi cubi centrales ab vnitate seriatim dispositi singuli constituantur ex aggregato vnius, trium, quinque, septem, & deinceps imparium successiue sumptorum ab vnitate imparium numerorum, semperq; sub multitudine imparium per ordinem accepto. Demonstrabimus autem hoc, præmissis aliquot necessarijs præambulis.

PROPOSITIO 100ª.

Si fuerint tres, quinque, septem, vel sub alterius cuiuslibet imparis multitudine sumpti numeri æquali excessu & successiuè crescentes; eorum aggregatum æquum erit ei numero, qui ex ductu medij in multitudinem multiplicati procreabitur.

Exempli

Exempli gratia, sint tres numeri 3. 5. 7. Aio, quòd 5. qui est medius ductus in ternarium (quandoquidem tres sunt numeri) efficit aggregatum ipsorum 3. 5. 7. Ad socientur enim ipsis 3.5.7. per binarium crescentibus totidem 7.5.3. & ijdem, sed ordine præpostero, decrescentes: Sic fiet, vt decrementum vnius ordinis resarciatur pari cremento alteri⁹: & duo medij, scilicet 5. & 5. sint inuicem çquales; & simul iuncti sint çquales aggregato reliquarum combinationum Quo fit, vt congeries amborum ordinum sit planus numerus siue superficialis tetragonus, qui fit ex ductu ternarij in aggregatum ipsorum 5. & 5. seu quorumlibet binorum: Igitur & congeries vnius ordinis (quæ dimidia est totalis cumuli) fiet ex ductu quinarij in ternarium: sicut proponitur. Similiter, si summantur quinq; numeri: vtpote 9.11.13.15.17. eadem accessione crescentes. Aio similiter, quòd medius eorum, scilicet 13. in quinarium (quoniam quinque sunt numeri) multiplicatus producit talium quinque numerorum aggregatum. Nam si talibus numeris compares & sub ordine præpostero applicentur, similiter, & in quouis alio casu, constabit propositum.

3 — 7
5 — 5
7 — 3
3, 5 } 15

9 — 17
11 — 15
13 — 13
15 — 11
17 — 9
5, 13 } 65

PROPOSITIO 101ª.

Si ex radicibus ab vnitate, & secũdum vnitatis accessum crescentibus quotlibet segregentur vnitas & deinde ex sequentibus tres, Inde quinque, & deinceps per multitudinem imparium sequentium per ordinem; iam vnitas, tertius triũ, quintus sequẽtiũ quinque & deinceps postremus semper reliquarum multudinum quadratus numerus est. Quòd enim vnitas quadratus sit, patet. Quòd autem tertius sequentium sit quadratus, concluditur, quoniam addit tres vnitates, hoc est, sequentem imparem vnitati: & perinde, per 15ª huius, aggregatum, hoc est, ipse tertius dictus, est sequens ab vnitate quadratus. Item quinque sequentes per vnitatem singulæ crescentes faciunt, vt quintus eorum excedat supradictum tertium quinque vnitatibus, hoc est, ipso 5. impari tertio: vnde per 15. huius, aggregatum, hoc est, ipse quintus prædictus erit tertius quadratus. Adhuc septem succedentes numeri cum totidem vnitates, hoc est, 7. quartum imparem addant, iam similiter aggregatum, hoc est, septimus huius multitudinis, erit quadratus quartus per dictam 15ª & sic in infinitum, sicut demonstrandum proponitur.

1
2, 3, 4 } 3
5, 6, 7, 8, 9 } 5
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 } 7

$$1 \text{———} 1$$
$$\left.\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\} 16$$
$$\left.\begin{matrix}9\\11\\13\\15\\17\end{matrix}\right\} 81$$
$$\left.\begin{matrix}19\\21\\23\\25\\27\\29\\31\end{matrix}\right\} 256$$
$$\left.\begin{matrix}33\\35\\37\\39\\41\\43\\45\\47\\49\end{matrix}\right\} 625$$

$$1 \text{———} 1$$
$$+\left.\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\} 15$$
$$\left.\begin{matrix}9\\11\\13\\15\\17\end{matrix}\right\} 65$$
$$\left.\begin{matrix}19\\21\\23\\25\\27\\29\\31\end{matrix}\right\} 175$$
$$\left.\begin{matrix}33\\35\\37\\39\\41\\43\\45\\47\\49\end{matrix}\right\} 369$$

COROLLARIVM

Manifeſtum eſt ergo, quòd in eadem diſpoſitione numerorum, primus, quartus, nonus, ſedecimus, & cæteri ſegregatarum multitudinum ſecundum impares numeros, poſtremi ſunt ipſi radicũ ab vnitate ſumptarũ ꝑ ordinẽ quadrati.

PROPOSITIO 102ª.

Si ex numeris ab vnitate continuatim diſpoſitis imparibus in infinitum, ſegregetur vnitas, & ex ſequentibus tres, & inde quinque, & deinceps aliæ multitudines ſemper ſecundum impares ſucceſſiuè numeros: tunc ſi vnitas, & dictæ ſequẽtes multitudines ſingillatim coaceruentur: Vnitas & aggregata ipſa ſingula erunt quadrati quadratorum à radicibus per ordinem ab vnitate diſpoſitis in ſe multiplicetis factorum. Hos quadratos quadratorum nuper quadratos ſecundos appellauimus. Quod igitur vnitas primus imparium ſit quadratus quadrati vnitatis, conſtat per ſe: quandoquidem vnitas in ſe ducta ſemel atque iterum ſemper vnitatem producit. Quod autem tres ſequentes cum vnitate coniuncti conficiunt quadratum, conſtat per 15ª huius: & quoniam vnitas & tres ſequentes impares per quatuor aggregationes cõficiunt totidem quadratos: iam idcirco vltima eorum congeries erit quartus quadratus, hoc eſt, quadratus quartæ radicis. Sed per præcedentem, eiuſque corollarium, quarta radix numerus quadratus eſt: igitur talis congeries eſt quadratus quadrati quarti, hoc eſt, quadratus ſecundus binarij. Similiter oſtendemus, quòd quinque ſequẽtes impares ad talem quadratum ſecundum appoſiti, efficiẽt quadratum nonę radicis: ſed nona radix, per præmiſſam & ſuum corollarium, tertius quadratus erat: igitur talis cumulus erit quadratus ſecundus ſequens, hoc eſt, quadratus nouenarij, ſcilicet quadratus ſecundus ternarij. Non aliter, ſi tali quadrato ſecundo applicentur ſeptẽ impares ſequentes, conflabunt quadratum ſedecimæ radicis per 15ª. Cumq; radix ſedecima, per præmiſſam & ſuum corollarium, ſit quadratus quartus. Iam tale conflatum erit quadratus ſecundus ſequens, hoc eſt, quartæ radicis, ſiue quadratus quarti quadrati, hoc eſt, ſedenarij. Adhuc ſi huic quadrato ſecundo accumulentur nouem impares ſequentes, conſtituetur quadratus ſecundus ſequens, hoc eſt quintæ radicis, ſiue quadratus ex 25. in ſe multiplicato factus. & ſic in infinitum. Quod demonſtrandum proponitur.

PRO-

PROPOSITIO 103ª.

Iiſdem ſuppoſitis demonſtrandum eſt, quòd vnitas, aggregata trium ſequentium imparium, quinque ſequentium imparium: itemque ſeptem, nouem, & cæterarum ſub imparibus per ordinem ſequentium multitudinum, ſingula ſunt gnomones, ex quorum continua ad monadem adiectione conſtituuntur ſeriatim ipſi, de quibus loquimur, quadrati quadratorum. Nam, cum per præcedentem, huiuſmodi aggregata monadi ſucceſſiue adiecta conficiant per ordinem ipſos quadratos quadratorum: ſequitur, vt ipſa ſingula aggregata ſint gnomones, qui ad monadem continuatim adiecti conſtituunt tales quadratorum quadratos, ſicut propoſitio concludit.

PROPOSITIO 104ª.

Iiſdem adhuc ſuppoſitis demonſtrandum eſt, quòd in talibus aggregatis ſingulis, ipſius imparium multitudinis medij ſunt per ordinem ab vnitate ſumpti quadrati centrales. Nam tales medij poſt vnitatem impares ſunt 5.13.25.41.& cęteri. Dico igitur, ꝙ hi ſunt quadrati centrales. Nam per propoſitionem 100ª præmiſſam, ex ternario primę multitudinis in medium imparem, ſcilicet 5. fit aggregatum numerorum ipſius multitudinis. ſed per præcedentem, tale aggregatum eſt gnomon. Similiter in quinario ſecundæ multitudinis 5. in 13. facit aggregatum totius multitudinis, per 100ª & per præmiſſam, tale aggregatum eſt gnomon ſequens. Item in ſeptenario ſequentis multitudinis 7. in 25. medium producit aggregatum ipſiꝰ multitudinis per 100ª hoc eſt, gnomonem ſequentem per præmiſſam. Adhuc in nouenario ſequentis multitudinis 9. in 41. medium producit congeriem ipſius multitudinis per 100ª, hoc eſt, gnomonem qui ſequitur, per præmiſſam: & ſic deinceps in infinitum. Verùm, per 89ª huius, tales impares per ordinẽ multiplicati in quadratos centrales ſibi collaterales producunt gnomones eoſdem, qui ſcilicet quadratos quadratorum cõſtituunt. Neceſſe eſt ergo, vt tales medij multitudinum ſingularum impares ſint quadrati centrales: quemadmodum proponitur.

COROLLARIVM.

Qui quidem Gnomones ſunt cubi & octahedri centrales, & pyramides triangulæ centrales locorum imparium, vt in 99ª eiuſque Corollario fuit concluſum.

 PRO-

PROPOSITIO 105^{a}.

Omnis cubus, ſiue octahedrus centralis cum impari collaterali coniunctus, æquiualet duplo tetrahedri centralis. Cum enim numerus baſium octahedri ad numerum baſium tetrahedri ſit duplus: itemque numerus laterum illius ad numerum laterum huius duplus. iam impar appoſitus facit, vt vnitas centralis cum ſemidiametris octahedris ſint (additione facta) duplum vnitatis centralis & ſemidiametrorum tetrahedri. Sunt enim ſemidiametri octahedri ſex, & ſemidiametri tetrahedri quatuor Et idcirco oportet adijcere ad ſummam octahedri duas ſemidiametros, hoc eſt, parem collateralem, & vnitatem, ad duplicandam vnitatem centralem: quæ cum pari facit imparem collateralem. Conſtat igitur propoſitum.

PROPOSITIO 106^{a}.

Ex aggregato duarum proximarum radicum in aggregatum quadratorum ex eis multiplicato, producitur numerus qui cum ipſo radicum aggregato coniunctus facit duplum aggregati cuborum earundem. Exempli gratia 2. & 3. ſunt duæ proximæ radices, quarum congeries 5. quadrati autem 4. & 9. cubi vero 8. 27. quadratorum cumulus 13. cuborum verò 35. Dico igitur, quòd id, quod fit ex 5. in 13. ſcilicet 65. coniunctum cum 5. facit duplum ipſius 35. Exponatur vnitas cum radicibus 2. & 3. & quadrati 4. & 9. cum medio proportionali 6. Itemque cubi octo & 27. cum duobus medijs proportionalibus 12. & 18. in quibus propter proportionem numerorum, quoniam ex 2. in 4. fit 8. & ex 3. in 4. fit 12. idcirco ex aggregato 2. & 3. in 4. fit aggregatum ipſorum 8. ex 12. Non aliter oſtendam quòd ex dicto 2. & 3. aggregato in 9. fit ipſorum 18. & 27. aggregatum, ſicut in 89^{a} demonſtrauimus. Vnde ex aggregato ipſorum 2. & 3. in aggregato ipſorum 4. & 9. hoc eſt, ex 5. in 13. fiet aggregatum ipſorum quatuor numerorum 8. 12. 18. 27. Demonſtrandum eſt igitur, quòd aggregatum talium quatuor numerorum. cum aggregato radicum, ſcilicet cum 5. facit duplum aggregati ipſorum 8. & 27. hoc eſt, quod 65. cũ 5. eſt duplũ ipſius 35. ſiue qđ aggregatũ ipſorum 18. & 12. cũ 5. coniunctum, eſt ęquale aggregato ipſorum 8. & 27. Quod facile demõſtratur: Nã 12. ſuperat 8. in 4. At ipſe 18. ſuperatur à 27. in 9. Tanto igitur aggregatum ipſorum 18. & 12. ſuperatur ab aggregato ipſorum 8. & 27. quanto 9. maior eſt quàm 4. Sed 9.

maior

1
2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12. 18. 27

1
3 . 4
9 . 12 . 16
27 . 36 . 48. 64

1
4 . 5
16. 20. 25
64. 80. 100. 125

Et deinceps ſimiliter pro reliquis.

maior eſt quàm 4. in aggregato ipſorum 2. & 3. hoc eſt, in 5. ergo aggregatum 18. & 12. ſuperatur ab aggregato ipſorum 8. & 27. in 5. Quare aggregatum ipſorum 18. & 12. cum 5. coniunctum, fit æquale aggregato ipſorum 8. & 27. Quod fuit oſtendendum. Similiter pro duabus quibuslibet proximis radicibus argumentando procedam. Sicut proponitur.

PROPOSITIO 107^{a}.

Omnis cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, conficit duplum aggregati cuborum primi generis collateralis & præcedentis. Nam numerus, qui fit ex aggregato radicum duarum, ſcilicet propoſiti loci, & præcedentis, hoc eſt, ex impari collaterali in aggregatum quadratorum collateralis, & pręcedentis, hoc eſt, in quadratum centralem collateralem, eſt per 89^{a} huius, gnomon collateralis in quadratis quadratorum. Et per 99^{a} huius, talis gnomon eſt cubus centralis. Verùm talis numerus cum aggregato radicum collateralis & præcedentis, hoc eſt, cum impari collaterali coniunctus, efficit per præmiſſam, duplum aggregati cuborum collateralis & præcedentis, hoc eſt, cuborum ipſarum radicum. Igitur cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, facit ipſum tale cuborum duplum: quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO 108^{a}.

Omnis cubus primi generis, cum præcedenti cubo coniunctus, conficit collateralem tetrahedrum centralem. Nam, per 105^{a} præmiſſam, cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, conſtat duplum tetrahedri centralis. Et per præcedentem, idem cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, efficit duplum aggregatum cuborum collateralis & pręcedentis. Igitur tale cuborum duplum, ęquum eſt duplo tetrahedri. Et perinde cuborum aggregatum æquale erit ipſi tetrahedro centrali: quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO 109^{a}.

Omnis tetrahedrus centralis poteſt eſſe cubus centralis tertii generis, hoc eſt cubus mixtus, compoſitus ſcilicet ex cubis primi generis collaterali & præcedenti. Vocamus autem huiuſmodi cubum mixtum: quoniam ex mixtura duorum cuborum primi generis compaginatur: ſicut & quadratus centralis conficitur ex combinatione duorum primi generis quadratorum, ſcilicet collateralis & præcedentis. Cum igitur, per præmiſſam, tetrahedrus conſtet ex collaterali & præcedenti primi generis, cubis: & ex eiſdem cubis conſtet

cubus

cubus mixtus collateralis, per suam diffinitionem iam satis constat propositum.

Propositio 110ª.

Omnis icosahedrus cum quadruplo imparis collateralis coniunctus, conficit quincuplum collateralis pyramidis centralis. Et hoc quoniam numerus basium icosahedri ad numerum basium pyramidis centralis, scilicet 20. ad 4. quincuplus est. Item numerus laterum linearium illius ad numerum laterum linearium huius, scilicet 30. ad 6. quincuplus est, & ideo aggregatum pyramidum triangularium componentiũ icosahedrum ad aggregatum pyramidum triangularium cõponentium tetrahedrum centralem quincuplum est, quippe quæ sequuntur numerum basium. Et similiter aggregatum triangulorum ad aggregatum triangulorum quincuplum, vt qui sequuntur numerum laterum. Addatur igitur vnitati cẽtrali ipsius icosahedri quaternarius: & sic quinarius erit quincuplus ad vnitatem centralem pyramidis, seu tetrahedri centralis. Cumque semidiametri icosahedri sint 12. & semidiametri tetrahedri sint 4. iuxta numerum scilicet angulorum solidorum: atque semidiametri 12. sint totidem radices collaterales; oportebit 12. radicibus addere 8. radices collaterales, & perinde quadruplum paris numeri collateralis (quando scilicet, radix duplicata conficit parem) vt aggregatum semidiametrorum in icosahedro existat quincuplum aggregati semidiametrorum tetrahedri: Sed quadruplum paris numeri collateralis: quoniam scilicet par cum vnitate facit imparem collateralem. Igitur quadruplum imparis collateralis appositus icosahedro, facit omnia, quæ concurrunt ad structuram ipsius icosahedri quincupla eorum, quæ componunt tetrahedrum, singula singulorum, & perinde totum numerum totius quincuplum: quod est propositum.

REPASTINATIO QVORVNDAM LOCORVM.

Propositio 1ª.

QVOD fit ex quouis numero in quotlibet numeros, æquale est ei, quod fit ex illo in aggregatum ex his. Ostenditur in decima sexta, noni Elementorum, quo ad numeros: & in prima secundi quo ad lineas.

Propositio 2ª.

Si aliquis numerus duos singulos multiplicet: producta erunt multiplicatis proportionalia. Ostenditur in 18ª septimę quo ad numeros, & in pª sexti, quo ad lineas.

Propositio 3ª.

Si numeros duos vnitate distantes aliquis multiplicet: multiplicans erit differentia productorum. Vt si ipsos b c. quorum c. vnitate maior, multiplicet ipse d. numerus & faciat, ipsos g h. hoc est, d. multiplicans b. facit g. at d. multiplicans c. faciat h. tunc dico, quòd h. excedit ipsum g. in ipso d. Patet, quoniam ex diffe. multiplicationis g. continet ipsum d. totiens, quot vnitates sunt in b. atque h. ipsum d. toties, quot vnitates sunt in c. igitur h. continebit ipsum d. semel pluries, quàm g. continet eundem. hoc est, h. excedet ipsum g. in ipso d. Quod est propositum.

b		c
2	d	3
	4	
g		h
8		12

Propositio 4ª.

Existentibus quatuor numeris proportionalibus: quod fit ex primo in vltimum, æquale erit ei, quod fit ex reliquis. Ostenditur in 20ª septimi, quo ad numeros: & in 15ª sexti quo ad lineas.

Propositio 5ª.

His prælibatis, ponatur vnitas a. quilibet autem numerus b. ipse autem c. vnitate maior quàm b. Deinde b. in se faciat d. b. in c. faciat e. & c. in se faciat f. Post hæc b. in d. faciat g. Item b. in e. faciat h. Adhuc b. in f. faciat k. Demum c. in f. faciat l. tandem b. in g. faciat m. Item b. in h. faciat n. Necnon b. in k. faciat o. Sic b. in l. faciat p. Denique c. in l. faciat q. Quibus dispositis,

PROPO-

PROPOSITIO 6ª.

Ipse d. erit quadratus ipsius b. Et ipse f. quadratus ipsius c. Item e. parte altera longior, siue supplementum in quadrato ipsius b c. Adhuc ipse g. erit cubus ipsius b. ipse autem l. cubus ipsius c. Ipsi quoque h k. medij proportionales, supplementa in cubo ipsius b c. Denique ipse m. quadratus secundus ipsius b. hoc est quadratus ipsius d. Ipse autem q. quadratus secundus ipsius c. hoc est quadratus ipsius f. Ipsique n o p. medij proportionales ad integrandum, vt patebit, quadratum secundum ipsius b c. hoc est, quadratũ eius quadrati, quem constituunt quadrati d f. cum duplo ipsius e. Hæc omnia constant ex diffinitionibus ipsorum quadratorum, cuborum, & supplementorum, sed quadrata primum & secundum, & cubus ipsius b c. demonstrabuntur.

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h k l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81

PROPOSITIO 7ª.

Post vnitatem duo numeri b c. sunt termini proportionis superparticularis. Tamque tres numeri d e f. sequentis ordinis, quàm quatuor g h k l. penultimi: quamq; quinque m n o p q. postremi, sunt continue proportionales in dicta dudum proportione. Quoniam scilicet b. multiplicans singulos b c. facit singulos d e. Ideo per secundam præmissarũ, erit sicut b. ad c. sic d. ad e. Item quoniam c. multiplicans singulos b c. facit singulos e f. ideo p eâdẽ, sicut b. ad c. sic e. ad f. Quare d e f. sunt cõtinue proportionales in proportione ipsorum b c. Similiter & per eandem, ostendemus, quòd tam g h k l. quàm ipsi m n o p q. sunt in eadem proportione ipsorum b c. continue proportionales. Quod est propositum.

PROPOSITIO 8ª.

Item sicut ipsi a b d g m. sunt continuè proportionales: ita & ipsi c e h n. nec non ipsi f k o. Atque ipsi l p. sunt in eadem proportione continua proportionales. Adhuc, sicut ipsi a c f l q. sunt continuè proportionales; ita tam ipsi b e k p. quàm ipsi d h o. quamq; g n. sunt in eadem continua proportione proportionales. Hæc omnia patent per præcedentem, & per permutatam proportionalitatem.

PROPOSITIO 9ª.

Itẽ a e o. sunt in proportione continua sicut b h. & cæteri ad æquidistantiam descendentes. Similiter m h f. sunt in proportione continua, sic g e. & cæteri condescendentes. Demum ipsi q k d. sunt in proportione continua, in qua f b.

f b. cæterique correlatiui. Constat ex compositione æqualium proportionum, ex quibus patet conditio & proprietas huiusce descriptionis numerorũ, non tã ad necessitatẽ demõstrationum, q̃ ad pleniorem suppositionis intelligentiam.

PROPOSITIO 10ª.

Sicut vnitas est differentia duorum sequentium b c. numerorum; ita ipsi duo b c. sunt differentiæ trium sequentium d e f. Et hi tres differentiæ quatuor sequentium g h k l. Atque hi demum quatuor differentiæ quinque m n o p q. postremum per ordinem sumptæ. Patet hoc totum per tertiam præmissarum, quoties opus est, adductam.

PROPOSITIO 11ª.

Omnis impar præcedenti quadrato appositus, costituit sequentem quadratum. Patet: nã in proposita descriptione, ipsorũ b c. semper vnus est impar, & reliquus par sibi collateralis. Quare totus b c. impar erit. Sed per præcedentem, b c sunt differentiæ ipsorum d e f. igitur b c. impar adiectus ipsi d. quadrato, cõficit ipsum f. quadratũ sequentẽ: qđ est ꝓpositũ.

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h k l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81

PROPOSITIO 12ª.

Numeri quadrati d f. ex ipsis b c. siue vnitate, siue quocunq; numero differentibus, vnà cum duplo ipsius e. medij proportionalis, conflant quadratum ex toto b c. factũ. Hæc in 16ª. noni per numeros, & in 4ª secundi Elementorum per lineas demonstratur. Demonstrabitur & hìc hoc modo. Ipse b. in b c. singulos, per 5ª præmissarum, facit ipsos d e. singulos. Item ipse c. in b c. singulos facit ipsos e f. singulos: Igitur, per primam præmissarum, totus b c. in totum b c. faciet aggregatum ex d e e f. hoc est, quadratum, quod ex b c. æquabit congeriem ipsorũ d f. duplique ipsius e. Quod fuit demõstrãdũ.

b { b — d
  { c — e
c { b — e
  { c — f
Igitur
b c — b c { d
          { ee
          { ef

PROPOSITIO 13ª.

Duo quadrati proximi cum media parte altera lõgiore coniuncti, conficiunt numerum hexagonum æquiangulum. Hæc est 31ª primi horum Arithmeticorum.

COROLLARIVM.

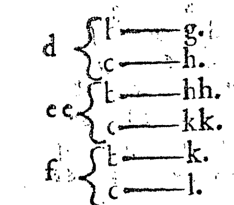
Hinc sequitur pulcherrimũ corollariũ, videlicet, Hexagonũ æquangulũ cũ parte altera longiore collaterali cõiunctũ, consumat quadratum imparis collateralis: Nã per antepræmissam, totũ d e f. (qđ per præmissam est hexagonũ æquiangulũ) cum ipso e. (qui est parte altera longior) conflat quadratum totius b c. imparis collateralis. Quod sequitur supponendo, ipsorum b c. differentiam esse vnitatem.

PROPO-

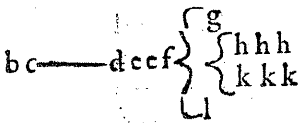
PROPOSITIO 14ª.

Hexagonus æquiangulus cum præcedenti cubo iunctus, conficit cubum sibi collateralem. Hoc est, aggregatum ex ipsis d e f. quod, per præcedentem, est hexagonus æquiangulus, coniunctus cũ g. Cubo cõflat ipsum l. cubũ: quod ostensum fuit in 52ª primi horum Arithmeticorum. Ostēdetur & hic, hoc modo. Per 10ª præcedentem, ipsi d e f. numeri sunt tres differentię ipsorũ g h k l. fit ergo, vt totum d e f. coniunctũ cũ ipso g. cubo conficiat ipsum l. cubũ: qđ fuit demonstrãdũ.

PROPOSITIO 15ª.

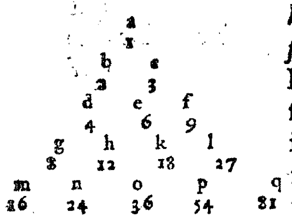


Igitur.



Duo cubi partium cum triplis mediorum proportionalium coniuncti conficiunt cubum totius. Hoc est, ipsorum b c. siue vnitate, siue quocunq; numero differentiũ cubi, qui sunt ipsi g l. cũ triplis ipsorũ g k. mediorũ proportionaliũ coniuncti, perficiũt cubũ totius b c. quod in 21ª secundi horũ arithmeticorũ fuit ostensum: hìc tñ facilius ostēdetur, sic: Per qntã præmissarũ, ipse d. in singulos b c. facit singulos g h. Item duplum ipsius e. in singulos b c. facit h h. atque k k. hoc est, duplum ipsorum h k. Adhuc f. in singulos b c. facit ipsos k l. singulos. Igitur, per primã præmissarum, ipse b c. ductus in aggegatũ ex d f. duploq; ipsius e. (qđ per 12ª præmissarũ, est quadratũ ipsius b c.) Hoc est b c. radix ducta in suũ quadratũ, producet aggregatũ ex ipsis g l. triploq; ipsius h. & triplo ipsius k. radix aũt in quadratum producit suum cubũ. Ergo tale aggregatum ex g l. triploque ipsorum h k. est cubus ipsius b c. numeri. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 16ª.

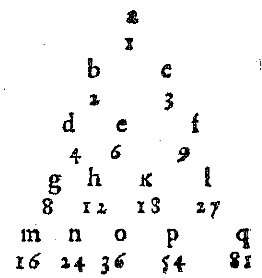


Duplum ipsius e. cum vnitate, cõficit aggregatũ ipsorum d f. hoc est, duplum numeri parte altera longioris, cum vnitate conflat aggregatum collateralis & precedentis quadratorum. Patet, quoniam si differentiæ ipsorum d e. & ipsorum e f. essent æquales, tunc duplus ipsius e. esset æqualis aggregato ipsorum d f. Sed cùm differentia ipsorum d f. sit vnitate maior, quàm differentia ipsorum d e. illa, scilicet c. & hæc b. per 3ª huius, idcirco fit vt aggregatum ipsorum d f. vnitate superet duplum ipsius e. sicut proponitur.

PROPOSITIO 17ª.

Aggregatum ipsorum b c. est excessus, quo aggregatum ipsorum g l. maius est aggregato ipsorum h k. Patet sic. Si differentia ipsorum g h. esset æqualis differentiæ ipsorum k l. Tunc aggregatum ipsorũ g l. esset æquale aggregato ipsorũ h k. Sed

quoniam



quoniam differentia ipsorum k l. hoc est f. superat differẽtiã ipsorũ g h. hoc est, ipsum d. in aggregato ipsorum b c. quod per 10ª præmissarum, est id, quo f. superat ipsum d: idcirco aggregatum ipsorum g l. maius est aggregato ipsorum h k. in aggregato ipsorum b c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 18ª.

Ex aggregato ipsorum b c. in ipsum e. producitur aggregatum ipsorũ h k. Patet: nam per 5ª pręmissarum, b. in e. facit h. Itẽque b. in f. facit k. Sed per 7ª sicut b. ad c. sic e. ad f. Igitur per 4ª ipse c. in e. faciet k. Quare per primam, totum b c. in e. facit totum h k. Quod est propositum.

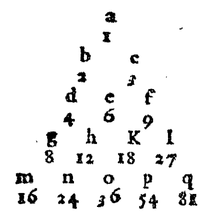
PROPOSITIO 19ª.

Ex aggregato ipsorum b c. in aggregatum ipsorum a e. producitur aggregatum ipsorum g l. Nam cùm, per præcedentem, ex aggregato ipsorum b c. in ipsum e. fiat aggregatum ipsorum h k. Iam ex b c. in a e. (qui ipsum e. vnitate excedit) producetur aggregatum ex h k. & b c. Sed tale aggregatum, per ante præmissam, est æquale aggregato ipsorum g l. Igitur & ex b c. in a e. producetur totum g l. Quod est propositum.

PROPOSITIO 20ª.

Ex aggregato ipsorum b c. in aggregatum ipsorũ, ipsorum d f. producitur aggregatum ipsorum g h k l. Nam cum per ante præmissam ex b c. in e. fiat h k. & per præcedentem, ex b c. in a e. fiat g l. iam, per primam præmissarum, ex b c. in aggregatum ex duplo ipsius e. & ex a. producetur totum g h k l. Sed per 16. duplum ipsius e. cum a. vnitate, conflat aggregatum ipsorum d f. igitur ex b c. in d f. producetur totum g h k l. Quod fuit ostendendum.

PROPOSITIO 21ª.



Ex aggregato radicum vnitate distantiũ, in aggregatum quadratorum ipsarum radicum, producitur differentia secundorum quadratorum. Hæc est, 89ª primi horum arithmeticorum: tamen hìc breuius demonstratur. Nam cùm b c. sint radices vnitate distantes, quæ semper faciunt imparẽ collateralem ipsius f. quadrati, quem proxime præcedit d. quadratus constat ꝙ hic id ipsum proponitur demonstrãdũ, ꝙ in dicta 89ª. Itaq; cũ per 10ª præmissarũ aggregatũ ipsorum g h k l. sit differentia ipsorum m q. qui sunt secundi quadrati dictarum radicum, hoc est, quadrati ipsorum d f. quadratorum: atque per præcedentem ex toto b c. in totum d f. pro-

ducatur

ducatur totum g h k l.

SCHOLIVM.

Talis autem secandorum Quadratorum differentia dicitur Gnomo secundorum quadratorum : & idem est Octahedrus centralis, Idem cubus centralis: Idē quoq; Pyramis triãgula centralis locorum impariũ, vt satis ostēsum est in primo horum arithmeticorũ.

PROPOSITIO 22ª.

Aggregatum ex m q. ex quadruplo ipsorum n p. & ex ipsius o. sexcuplo, est secundus quadratus totius b c. Hæc est conclusio dictarũ ꝓpositionũ, in qua possum⁹ nobis laudē totã vēdicare, ꝙ necubi hacten⁹ neq; apud Græcos, neq; apud Latinos sit demõstrata. Itaq; qđ de ipsius b c. quadrato fuit ostēsum in 12ª. de cubo aũt eiusdē in 15ª præmissarũ idipsum de secũdo eiusdē b c. quadrato demonstret hæc 22ª in qua toti⁹ huius repastinationis gloria consistit. Siue igitur ipsorũ b c dr̃a sit vnitas, siue alius quicunq; numerus, hæc demõstratio locũ habet. Itaq; adductis pª 4ª & 5ª. præmissarũ, liquet ꝙ ex b c. toto in ipsum g. fit totũ m n. Itē ꝙ ex b c. toto in h. fit totũ n o. Itē ex b c. toto in k. fit totũ o p. Itē ex b c. toto in l. fit totũ p q. Hinc sequitur, vt, ꝙ iã dictũ est, ex b c. toto in g. fiat m n. & ex b c. in triplũ ipsius h. fiat triplũ ipsoꝵ n o. & ex b c. in triplũ ipsius k. fiat triplũ ipsoꝵ o p. & ex b c. in l. fiat totũ p q. Igitur per pª præmissaꝵ ex ipso b c. in aggregatum ex g l. triploq; ipsoꝵ h k. quòd aggregatum per 15ª præmissaꝵ est cub⁹ ipsius b c. producet aggregatũ ex m q. quadruplo ipsorũ n p. atq; sexcuplo ipsius o. Sed ex b c. in suũ cubũ producit secund⁹ quadratus ipsius b c. Ergo talis 2⁹ quadratus ipsi⁹ b c. erit cõgeries ex m q. ex quadruplo ipsorũ n p. atq; sexcuplo ipsius o. sicut demonstrandum fuit.

b c { g —— mn; { hhh —— nnn.ooo.; kkk —— ooo.ppp. }; l. —— p q. }
Cubus —— □⁹ 2⁹.

5 { 8 —— 40; { 36 —— 180; 54 —— 270 }; 27 —— 135 }

1
1 . 2
1 . 2 . 4
1 . 2 . 4 . 8
1 . 4 . 8 . 16.

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h K l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81
r
216
f
1296

1
3 . 4
9. 12. 16
27 .36. 48. 64
81. 108. 144. 192. 256

1
4 . 5
16. 20. 25
64. 80. 100. 125
256. 320. 400. 500. 625

1
5 . 6
25 . 30. 36
125. 150. 180. 216
625. 750. 900. 1080. 1296.

Et sic deinceps in infinitũ.

PROPOSITIO 23ª.

Adhuc dico quòd o. est quadratum ipsius e. Patet : nam per nonam a e o. sunt continue proportionales. Cumque a. sit vnitas, erit per octauam noni Elementorum, o. quadratus & per diffin. eius radix e. quod est propositum. Vel sic: quoniam per septimam ipsi d e f. sunt continue proportionales : & per octauam, ipsi b e k. sunt continue proportionale. iam per vigesimam septimi b. in k. faciet quadratum ipsius e. sicut d. in f. Sed per quintam harum b. in k. facit o. igitur o. est quadratum ipsius e. Quod est propositum.

PROPOSITIO 24ª.

Item dico, quòd tam g. in l. quàm h. in k. producit cubum ipsius e. Patet sic: ex e. in o. fiat r. eritque r. cubus ipsius e. per diffin. Quoniam per præmissam o. est □. ipsius e. Sed, per octauam harum, sicut e. ad h. sic k. ad o. atque per 20ª septimi, quod fit ex e in o. idem ex h. in k. igitur ex h. in k. fiet r. Cumque per eandem, quod ex h. in k. idem fiat ex g. in l. quoniam scilicet per septimam harum g. ad h. sicut k. ad l. iam & ex g. in l. fiet idem r. cubus ipsius e. sicut proponitur demonstrandum.

PROPOSITIO 25ª.

Item dico, quòd ex secundo quadrato in secundum quadratum producitur, secundus. Per sextam præmissarum m q. sunt secundi quadrati ipsorum b c. Ostendendum est igitur, quod ex m. in q. producitur secundus quadratus, sic per septimam harum & æquam proportionalitatem, ipsi m o q. sunt continue proportionales: quare per 20ª septimi, quod fit ex m. in q. est id, quod fit ex o. in se. Sed, per antepræmissam, o. quadratus est : ergo quod fit ex o. in se, est secundus quadratus ; quare quadratus secundus est, qui fit ex m. in q. & hoc erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Manifestum est igitur, quòd sicut ex ductu ipsarum b c.

Bb radicum

R.	2	3	6	
□	4	9	36	
cub.	8	27	216	
2° □	16	81	1296	

radicum propositarum siue vnitate siue quo vis numero distantium producitur e. ita ex ductu ipsorum d f. quadratorum fit ipse o. quadratus ipsius e. atque ex ductu g l. cuborum, fit ipse r. cubus ipsius e. Et similiter ex ductu m q. duorum quadratorum, fit secundus quadratus ipsius e. qui videlicet fit ex o. in se, qui fit s. Quod etiam constitit per corollarium vndecimæ secundi horum Arithmeticorum. Cætera relinquimus curiosioribus.

LIBRI PRIMI ARITHMETICORVM MAVROLYCI FINIS.

Completus Messanæ in freto Siculo in ædibus ipsius Authoris iuxta Cænobium Carmelitanorum, ad horam noctis secundam diei Dominici, qui fuit Aprilis decimus octauus, & sanctissimum Paschæ festum.

Anno salutis.

M. D. LVII.

MAVROLICI ABBATIS MESSANENSIS MATHEMATICI

Arithmeticorum Liber Secundus.

PROLOGOMENA.

QVONIAM Arithmetica instrumentum est omnis supputationis, & numeri sunt termini, quibus quælibet magnitudo significatur; non dubium est, quin per numeros fieri possit omnis magnitudinis calculus. Cum verò Geometria comprehendat omnium quantitatum species, videlicet lineas, superficies, solida & cętera continua, quę ad hæc redigi possunt; vt tempora, & pondera; duplicem vtique praxim habebit; vnam, quæ fit lineando, alteram, quæ supputando: quarum hæc ab illa tanquam à fonte deriuatur: & illa theorię innititur. Sicut enim tam theoremata, quàm problemata per theoriã demonstrantur, & soluuntur; ita mox siue per lineationem siue per calculum ad praxim rediguntur. Nam intellectu præmeditata lineamus: & lineata calculamus. Et quamuis lineator descriptionem oculo repræsentet, & mentali speculatione punctum geometricum consequatur; tamen calculator numeris etiam idipsum consequitur, sed & paucis characteribus minutiores partes distinguit:

 quod

quod lineator non nisi in spacio immenso, vel magno instrumento (quod nulli facile est) præstare potest. Quæ distinctio quidem necessaria est, cùm per numeros, irrationalis, aut ignotæ magnitudinis terminum seu limitem magis ac magis propinquantes vestigamus. Sicuti cum, exempli gratia, proposita circuli diametro, latus trianguli æquilateri, aut quadrati in eo descripti, metiri per easdem partes in quibus diameter supponitur, aut cum planetæ cuiuspiam diurnum motum metiri iubemur. Itaque licèt de theoria numerorum & magnitudinum plerique graues Authores affatim scribant, & numerariam praxim quàm plurimi ludorum magistri passim doceant & literis mandent; nemo tamen hactenus regulas ipsas practicas elementorum, additionis, subtractionis, multiplicationis, diuisionis, radicum extractionis, progressionum, positionum & dimensionum satis demonstrauit. Haud enim cuiuis peruium est, ante oculos ponere quemadmodum praxis quælibet talis à theoria deducatur, & nonnulli idipsum ausi, rem obscuriorem fecere, sicut is, qui algorismum demonstratum edidit. Nos itaque, quatenus sese vires nostræ extendunt; aut quantum calamo dictabit ingenium, tentabimus aliquid super hoc negocio proferre, dum otium præstatur. Itaque, vt ratio poscit, diffinitionibus præmissis, rem aggrediemur, seriatim singula demonstrantes.

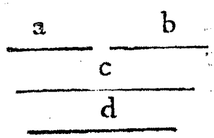
Diffinitiones

DIFFINITIONES.

Posita ergo quantitas est, quę ad libitum ponitur ad communem eiusdem generis quantitatum mensurã: & quæ ab vnitate denominatur. Sicut vnitas est communis numerorum dimensio. Quando igitur multiplex est ad positam, significabitur eo numero, secundùm quem ipsa multiplex est ipsius positæ. Quando verò quantitas cõtinet partem vel partes positæ, significabitur duobus numeris, scilicet denominatore & numeratore partis vel partium. Vnde quantitas significata ad positam habet eam rationem, quam numerus denominator, ad numeratorem. Quare, si tales numeri fuerunt æquales, quantitas significata erit tũc æqualis positæ: minor aũt, cùm maior fuerit denominator: maior verò, cùm minor. Erit vtique significata quantitas ad positam, aut æqualis, aut multiplex, aut superparticularis, aut superpartiens, aut multiplex super particularis, aut denique multiplex superpartiens, quando maior fuerit significata, quàm posita. Quòd si posita sit maior: tunc talis erit posita ad significatam. Duæ quoque quantitates, quarum denominatores eandem proportionem habebunt ad numeratores, erunt ad inuicem ęquales: quoniam scilicet eandem rationem habent ad positam. Cuius verò denominator maiorem rationem habebit ad numeratorem, maior erit. Quantitas cum quantitate coniungi dicitur, cùm sumitur earum aggregatum. Quantitas à quantitate subtrahi dicitur, cùm sumitur maioris super minorem excessus. Quantitas quantitatem multiplicare dicitur, cùm sumitur quantitas, quæ ad multiplicatam eam habet rationem, quam multiplicans ad positam: Et sumpta sic quantitas, productum vocatur. Vnde, quando multiplicans maior fuerit quàm posita, & productum maius erit multiplicante: & quando minor, minus: & quando æqualis, ęquale. Quantitas in quantitatem partiri dicitur, cum sumitur quantitas, ad quam diuisa eam habet rationem, quam diuidens ad positam. Et sumpta sic quantitas vocatur proueniens, siue quotiens. Vnde si diuidens maior fuerit, quàm posita, & diuisa maior erit quotiente: & si minor, minor; & si æqualis, æqualis. Quadratum alicuius quantitatis est productum eius in se ipsam multiplicatæ: & ipsa tunc radix vocatur. Cubus autem est is, qui fit ex multiplicatione radicis in quadratum. Et quadratus secundus, qui fit ex quadrato primo in se ipsum, siue ex radice in cubum. Quo fit, vt posita quantitas, radix, quadratum, cubus, & quadratum secundum, sint continue proportionalia: semperque crescentia, si radix sit maior, quàm posita. Decrescentia verò, si minor. Quantitas magnitudine rationalis est, quę positæ commensurabilis est. Quantitas potentia tantùm rationalis est, cuius quadratum duntaxat positæ commensurabile est. Quantitas cubo tantùm rationalis est, cuius cubus solùm positæ commensurabilis est. de qua nihil Euclides. Quantitas quadrato secundo tantùm rationalis est, cuius quadratum secundum duntaxat positæ commensurabile est: quæ medicalis quantitas vocatur. Binomium est bimembris quantitas ex duabus quantitatibus potentia tantùm inuicem commensurabilibus composita. Excessus autem maioris membri supra minus, Apotome, siue recisum, vel residuum vocabitur.

PROPOSITIO 1ª.

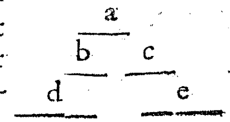
Quidquid de Numerorum, Linearum, et Solidorum ductu ratione, proportione & Symmetria, atque similitudine ratiocinamur, idem de quolibet quantitatis genere demonstrare atque concludere possumus. Hoc enim fiet assumptis ad demonstrandum diffinitionibus, ac suppositis nostris. Exempli gratia, si duorum numerorum vterque multiplicet reliquum, producti sunt æquales, quæ est 17ª septimi Elementorũ. Igitur etsi duarum quantitatum vtraque multiplicet alteram, producta erunt æqualia. Quod sic ostendam. Quãtitas a. multiplicans quantitatem b. producat quantitatem c. Item quantitas b. multiplicans quantitatem a. faciat quãtitatem d. Aio, quòd quantitates c d. sunt inuicem æquales. Cùm enim ex diffinitione multiplicationis c. producta ad b. multiplicatam sit sicut a. multiplicans ad positam, erit & permutatim c. ad a. sicut b. ad positam. Sed rursus ex diffinition. multiplicationis, sicut b. multiplicans ad positam, sic d. producta ad a. multiplicatam. Igitur sicut d. ad a. sic c. ad a. & perinde, per nonam quinti, c d. quãtitates sunt æquales: quod fuit demonstrandum.



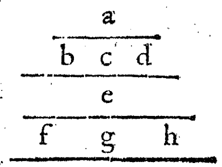
Exemplum aliud à sequenti propositione sumptum. Si numerus duos multiplicans duos produxerit, producti sunt multiplicatis proportionales. Igitur & si quantitas duas quantitates multiplicãs, duo ꝓducta fecerit, producta multiplicatis

erunt

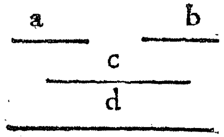
erunt proportionalia: quod sic ostendam. Quantitas a. multiplicans ipsam b. producat d. multiplicans autem c. faciat e. Aio, quòd sicut est b. ad c. sic est d. ad e. cùm enim per diffinitionem multiplicationis d. producta ad b. multiplicatam, sit sicut a. multiplicans ad positam, nec non e. producta ad c. multiplicatam, sit etiam sicut a. multiplicans ad positam; Iam erit sicut e. ad c. sic d. ad b. Ergo & permutatim erit sicut e. ad d. sic c. ad b. & conuersim sicut d. ad e. sic b. ad c. quod est propositum.



Similiter quicquid in septimo, octauo & nono de numeris ostendit Euclides, idem de quantitatibus in genere ostendere possumus. Alicubi tamen pro numeris quantitates rationales substituendo, assumptis diffinitionibus ac suppositis nostris. Quidquid etiam in secundo, sexto & vndecimo Elementorum de ductu & proportione linearum, arearum & solidorum traditur, potest ad quantitates in genere sumptas conuerti. Exempli gratia: prima secundi sic conuertetur: si fuerint duæ quantitates, quarum altera in quotlibet segmenta secetur; illud, quod ex ductu alterius in alteram fiet, æquum erit his, quæ ex ductu quantitatis indiuisæ in vnumquodq; segmentorum diuisæ pariter acceptis producentur. Quod sic ostendam: sint duæ quantitates a. indiuisa & b c d. secta in partes quotuis, vt puta tres b c d. & ex a. in totã b c d. proueniat e. nec non ex a. in singulas partes b c d. proueniant singulę f g h. quantitates. Dico tunc, quòd e. æqualis est ipsis f g h. simul sumptis. Nam ex diffin. multiplicationis erit e. ad b c d. sicut a. ad positam. Et similiter sicut a. ad positam, sic f. ad b. sic g. ad c. sic h. ad d. Igitur per vndecimam quinti, & coniunctam proportionem, totum f g h. ad totum b c d. sicut a. ad positam: fuit autem sicut a. ad positam, sic e. ad b c d. ergo sicut e. ad b c d. sic f g h. ad b c d. Quare per nonam quinti f g h. totum æquale est ipsi e. quod erat demonstrandum.



Ex qua demonstrabuntur reliquæ propositiones secundi successiue, de quantitatibus in genere, quemadmodum Campanus easdem de numeris demonstrauit in decima sexta noni. Quidquid denique decimus Elementorum de linearum & arearum symmetria & ductu aut proportione ratiocinatur, potest totũ ad quodlibet genus quantitatis conuerti. Exempli gratia, illa propositio, A rationalibus longitudine cõmensurabilibꝰ rectis lineis factũ rectangulum rationale est. ad quantitates in genere sic con-



uertetur quantitatum rationaliũ productũ rationale eſt. qđ ſic oſtenditur. Quantitas rationalis a. multiplicans quantitatẽ rationalem b. facit c. Dico tunc, quòd c. quantitas rationalis eſt. namq; ex a. in ſe fiat d. & tunc per primã ſecundi Elementorũ, ad quantitates redactã erit, ſicut a. ad b. ſic d. ad c. ſed a. ipſi b. commenſurabilis eſt per hypotheſim: ergo & d. ipſi c. commenſurabilis eſt; per 10ª decimi. Cumq; d. rationalis ſit (quia quadratum eſt ipſius a.) iam per diffin. & c. rationalis erit. Quod eſt propoſitũ. Similiter procedere poterimus, reliquas decimi Element. propoſitiones demonſtrando. Et quod nona eiuſdem libri de quadratis oſtendit, põt etiam ad cubos & ad ſecunda quadrata quantitatum referri. ſic; A commenſurabilibus inuicem quantitatibus producta quadrata, ſunt ad inuicem ſicut quadrati numeri: & producti cubi, ſicut cubi numeri: & producta ſecunda quadrata, ſicut ſecundi numeri quadrati. Contrà, & quantitates: tam, quarũ quadrata ſunt ad inuicem, ſicut numeri quadrati, quàm, quarum cubi ſunt ad inuicem, ſicut numeri Cubi: quàmq; quarum ſecunda quadrata ſunt ad inuicem, ſicut ſecundi quadrati; ſunt & adinuicem omnino commenſurabiles. Quod haud difficilius oſtenditur, quàm nona ipſa quoad quadrata. Hoc, ſcilicet ſuppoſito & antè demonſtrato, quòd ſicut inter duos quadratos numeros ſemper interiacet vnus numerus medius proportionalis: ita inter cubos interiacent duo medij proportionales: & inter ſecundos quadratos tres medij proportionales. Ab incommenſurabilibus verò inuicem quantitatibus facta quadrata non ſunt ad inuicem, ſicut quadrati numeri; neq; cubi, ſicut cubi numeri: nec ſecunda quadrata ſicut ſecundi quadrati numeri. Contrà, & quantitates; tam quarum quadrata non ſunt ad inuicem, ſicut quadrati numeri, quàm quarum cubi nõ ſunt inuicem, ſicut cubi numeri, quàmque quarum ſecunda quadrata non ſunt inuicem, ſicut ſecũdi quadrati numeri; ſunt intus ſe incõmenſurabiles. quæ duæ proportiones ſequuntur ex præmiſſis à deſtructione contrariorum. Quo fit, vt quot linearum irrationalium ſpecies tractantur in decimo Elementorũ, totidẽ eiuſdẽ nominis, & earundẽ proprietatũ ſpeciei inueniãtur inter quantitates in genere ſumptas. Ita, inquã, vt in omni quantitate vnius generis exiſtant oẽs tales rationalium ſpecies. Per hanc igitur propoſitionem omnis geometrica ſpeculatio redigitur ad numerariam praxim.

1
2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12 . 18 . 27
16 . 24 . 36 . 54 . 81

PROPO-

PROPOSITIO 2ª.

Omnis quantitatum additio, ſubtractio, multiplicatio, ſeu diuiſio, vel radicum extractio, fit per eos numeros, à quibus ipſe quantitates ſignificantur. Hoc eſt, numerorum, per quos duę vel quotlibet quantitates ſingulos ſingulæ ſignificantur, aggregatum eſt numerus ſignificans talium quantitatum aggregatum. Et numerorum, per quos duæ quantitates inæquales ſignificantur exceſſus, eſt numerus ſignificãs ipſarũ quantitatũ exceſſum. Item numerorum, per quos duę quantitates ſignificantur, productus, eſt numerus, ſignificans earũ quantitatũ productum. Adhuc diuiſo numero in numerũ, prouenit ſeu elicitur numerus ſignificans quantitatem prouenientem ex diuiſione quantitatis illius nũi in quantitatẽ huiꝰ. Demũ oĩs radix quadrati, vel cubi numeri eſt numerus ſignificans quantitatẽ, quæ radix eſt quantitatis quadratæ vel cubicæ per ipſum quadratũ vel cubũ ſignificatæ.

PROPOSITIO 3ª.

Quantitates, quarum denominatores ſunt æquales, ſunt adinuicem, ſicut numeratores. Sint duæ quantitates a b. c d. quarum denominatores b d. ponantur æquales: numeratores autem ſint a c. Aio, quòd quantitas a b. ad quantitatem c d. eſt, ſicut a. ad c. Nam ratio quantitatis a b. ad quantitatem c d. componitur ex ratione ipſius a b. ad poſitam, & ex ratione poſitæ ad ipſam c d. Numeri aũt a. ad numerũ c. ratio componitur ex ratione numeri a. ad numerum b. & ex ratione numeri b. vel d. (ſunt enim æquales per hyppoteſim) ad numerum c. Sed per diffi. terminorũ, quantitas a b. ad poſitam, eſt ſicut numerus a. ad numerũ b. quantitas aũt poſita ad quãtitatẽ c d. ſicut numerus d. ad numerũ c. Igitur per æquã proportionẽ erit quantitas a b. ad quantitatẽ c d. ſicut numerus a. ad numerũ c. Quod erat demonſtrandum.

1
$\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ $\frac{z}{f}$

PROPOSITIO 4ª.

Quantitates, quarum numeratores ſunt æquales, ſunt ad inuicem ſicut denominatores, ordine commutato. Sunto, ſicut in præmiſſa, quantitates a b. c d. in quibus ponantur æquales ipſi numeratores a c. Aio tunc, ꝙ quantitas a b. ad quãtitatẽ c d. eſt ſicut numerus d. ad numerũ b. Fiat enim ex a. in d. numerus e. & ex b. in c. fiat f. ex b. verò in d. proueniat g. eritque, per primã ſexti, ſicut a. ad b. ſic e. ad g. vt in prima propoſitione huiꝰ oſtẽdimꝰ: quare, ſicut in diffinitionibus patuit, quãtitas e g. ęqualis erit ipſi a b. Item erit ſimiliter,

$\frac{a}{b}$ $\frac{z}{f}$ $\frac{N}{7}$ $\frac{c}{d}$

denominator: qui quidem in quantitatibus ad positam multiplicibus semper est vnitas, integritatem positæ ac non diuisæ significãs. Item notandum tam in præsenti, quàm in precedenti propositione, quòd quantitates, quæ ad positam multiplices sunt, & insuper particulares, aut superficientes redigendæ sunt ad partes, ita vt singulæ binis significentur numeris, atque modus demonstrandi locum habeat.

COROLLARIVM.

Hinc constabit, propositis duabus quantitatibus, vtra sit maior.

PROPOSITIO 8ª.

Duabus quãtitatibus propositis, alterã in alterã multiplicare.

Si propositæ quantitates singulis signentur numeris: tunc numeri significantes ipsas quantitates multiplicentur alter in alterum: Nam productum, per secundam huius, erit numerus significans quantitatem ex propositarum quãtitatũ multiplicatione productam. Si aũt quãtitates, quæ multiplicandæ proponuntur, singulæ binis significentur numeris: tunc sint ipsæ a b. c d. quarũ quidẽ numeratores sint a c. denominatores verò b d. Et ducatur numerus a. in numerũ c. & proueniat e. Itẽ ducatur numerus b. in numerũ d. & proueniat f. Eritq; quantitas e f. cuius numerator e. denominator f. productum ex multiplicatione quantitatis a b. in quantitatẽ c d. Ná, per quintã huius libri, ratio quantitatis e f. ad quãtitatẽ c d. cõponitur ex rationib⁹ numeri e. ad numerũ c. & numeri d. ad numerũ f. Ratio aũt quãtitatis a b. ad positã cõponit᷑ ex ratione numeri a. ad vnitatẽ, & ex ratione vnitatis ad numerũ b. Sed p diffi. multiplicationis numerorũ, sicut a. numerus ad vnitatẽ, sic numerus e. ad numerum c. & sicut vnitas ad numerũ b. sic numerus d. ad numerũ f. Igitur, per æquã proportionẽ, quantitas e f. ad quantitatẽ c d. sicut quantitas a b. multiplicans ad positã. Quare, per diffi. multiplicationis, quantitas e f. est prædictum proueniens ex ductu quantitatis a b. multiplicãtis in quantitatẽ c d. multiplicatã. quod quærebatur. Quòd si altera propositarũ quantitatũ duobus signetur numeris, reliquã verò vno: tunc huic suppled⁹ est, vt in præmissis factũ est, numerator, hoc est, vnitas. Et si quantitatũ altera vel ambæ sint multiplices ad positam, & insuper superparticulares, vel superpartientes; tunc redigantur ad partes, ita vt singulæ binis connotatæ numeris, tã ad praxim, q̃ ad demonstrationẽ accõmodẽtur.

$\frac{a.}{b.}\ \frac{2}{3}$ —— $\frac{4}{5}\ \frac{c.}{d.}\ \frac{8}{15}\ \frac{e.}{f.}$

PROPO-

PROPOSITIO 9ª.

Duabus quantitatibus propositis, alteram in alteram partiri.

Si propositæ quantitates singulis significentur numeris, tũc ijdem numeri quãtitatẽ ex diuisione vnius in alteram, prouenientẽ exprimerent, ita quidem, vt numerus diuisus sit numerator & diuidẽs denominator. Nã sicut se habet diuidẽs quantitas ad diuisam, sic se habet posita ad quantitatem ex diuisione prouenientẽ. Vt si sit diuidenda quantitas a. diuidens vero b. iam dico tunc, quod quantitas a b. est quantitas, quę prouenit ex diuisione ipsius a. in ipsam b. Nam per 4ª huius, sicut est numerus b. ad vnitatem, sic est quantitas a. ad quantitatem a b. quandoquidem earum numeratores sint æquales, quia. s. vtrobique est numerus a. & denominator quantitatis a. sit vnitas: denominator vero quantitatis a b. sit ipse b. Ergo sicut quantitas b. scilicet diuidens ad positam (quæ per vnitatem significatur) sic quantitas a. scilicet diuisa ad quantitatem a b. prouenientẽ. Quamobrẽ, per diff. diuisionis; ex diuisione quantitatis a. in quantitatem b. prouenit quãtitas a b. quod fuit demonstrandum. Quòd si quãtitates, quarum altera in alteram diuidenda est, singulæ binis denotentur numeris: tunc ipsæ a b. c d. quarũ numeratores a c. denominatores b d. ita vt ipsa a b. sit diuidẽda in ipsam c d. Ducatur d. in a. & proueniat e. Item c. in b. & proueniat f. eritque quantitas e f. cuius numerator e. ac denominator f. ea, quæ prouenit ex diuisione ipsius a b. in ipsam c d. Quoniam, per quintam huius, quantitatis a b. ad quantitatem e f. ratio, componitur ex ratione numeri a. ad numerũ e. & ex ratione numeri f. ad numerum b. Ac per diffin. multiplicationis in septimo Elementorum, sicut a. numerus ad ipsum e. sic vnitas ad d. Ac sicut f. numerus ad ipsum b. sic c. ad vnitatẽ. Et ratio quãtitatis c d. ad positam 50. ponitur ex ratione numeri c. ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerũ d. Propterea, per æquã proportionẽ, ratio quãtitatis a b. diuisę, ad quantitatem e f. prouenientẽ, erit, sicut ratio c d. diuidentis ad positam. Ergo, per diffin. diuisionis, ex diuisione quantitatis a b. in quantitatem e d. prouenit quãtitas e f. quod est propositum. Quod si propositarum quantitatum altera vno tantùm significetur numero, tunc supplendus est ei denominator per vnitatem: vt in præmissis faciendum præcepimus. Etsi quantitatum altera vel vtraque sint multiplices ad positam, aut super particulares,

$\frac{a.}{b.}\ \frac{12}{3}\ \frac{12}{1}$ a.

$\frac{c.}{d.}\frac{2}{3} \times \frac{8}{15}\frac{a.}{b.}\ \frac{24}{30}\ \frac{e.}{f.}\frac{4}{5}$

seu

vel secundum quadratum tantùm cognitum offertur, tunc capiendum est similiter quadratum, vel cubus, vel secūdum quadratum quantitatis per se cognitæ, & deinde quadratum in quadratum, siue cubus, in cubum, siue secundum quadratum in secundum quadratū multiplicandum est. & sic deinceps pro tertijs, aut quotiescunq; quadratis. Sic & demōstratio dudū memorata procedet, & propositū absoluetur.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd ex ductu quadratorum, siue cuborum, siue secundorum quadratorum, aut sequentium, semper producitur quadratum, siue cubus, siue quadratus secundus producti ex multiplicatione radicum, quarum quadrata, seu cubi, seu secunda, vel sequentia quadrata. Quæ omnia, sicut iam demonstrata sunt, ita per Arithmeticam praxim, tam in quantitabus rationalibus, quàm potentia, siue cubo, tantùm rationalibus, siue medialibus, siue duorum pluriumve nominum, supputando comprobātur, quemadmodum in Arithmeticis quæstionibus per exempla tradidimus.

PROPOSITIO 12ª.

Duabus quantitatibus propositis, quarum quadrata tantùm vel cubi tantùm, vel secunda quadrata tantùm cognita supponuntur; alteram in alteram partiri. Quoniam, per diffinitionem, quando multiplicantur inuicem duæ quantitates, productum ad multiplicatam est, sicut multiplicans ad positam: Iam si multiplicans nunc sit diuidens, ac productum sit diuisum, erit multiplicata, quotiens. Quandoquidem, per diffin. diuisa quantitas ad quotientem est, sicut diuidens ad positum. Itaque diuiso producto in multiplicantem, semper ex diuisione prouenit multiplicans. Quod cum ita sit, absoluemus problema, per descriptionem penitus, ac suppositionem præcedentis propositionis. Sint igitur, sicut in præmissa, propositę quantitates a b. quarū quadrata c d. productum autem e. & ipsarum c d. productum f. Ostensum est ergo, quòd f. est quadratum ipsius e. quòd scilicet f. fit ex ductu c. in d. Igitur ex diuisione ipsius f. in ipsam c. prouenit ipsa d. quod est quadratum ipsius b. prouenientis ex diuisione ipsius e. in ipsam a. Sit igitur, exempli gratia, diuidenda quantitas e. diuidens autem a. & offerantur harum quadrata tantùm, scilicet f. quadratum diuidendæ e. atque c. quadratum diuidentis a. diuidam ipsam f. in ip-

sam c.

1
a b
2 3
c e d
4 6 9
g f h
16 36 81
k
1296

sam c. & prouenit b d. quadratum, scilicet ipsius b. quotientis: quoniam scilicet ex diuisione producti in multiplicantem, prouenit multiplicata. Item quoniam ex multiplicatione ipsarum g h. quæ sunt secunda quadrata ipsarum a b. producitur k. secundum quadratum ipsius e. producti ex ipsis a b. iam similiter si pro diuidenda quantitate e. offeratur secundum eius quadratum f. & pro diuidente a. proponatur secundum eius quadratum g. tunc diuidam ipsam k. in ipsam g. & prouenit h. secundum quadratum ipsius b. quotientis. Nam ex diuisione producti in multiplicantem, prosilit multiplicata. Demum, quoniam ex multiplicatione cuborum l m. qui scilicet sunt cubi ipsarum a b. producitur n. cubus ipsius e. producti primarij: non aliter, si pro quantitate e. partienda detur eius cubus n. & pro diuisione a. ponatur eius cubus l. tunc partiar cubum ipsum n. in ipsum l. & prouenit m. cubus ipsius b. quotientis. Namque productum in multiplicantem diuisum, exhibet multiplicatam. Nec secus faciendum pro tertijs, ac sequentibus quadratis, quousque processerit curiositas. Quod si diuisor, aut diuidendus numerus ita offerantur, vt alter per se notus sit, alterius verò tantum potentia vel cubus vel secundum quadratum cognitum proponatur: tunc par dignitas capienda est numeri per se cogniti, vt scilicet, vel quadratum in quadratum, vel cubum in cubum, vel secundum quadratum, in secundum quadratum, vel dignitatem quamuis in parem dignitatem partiaris: sicut in multiplicatione factum est. Sic enim & demonstratio dudum explicata locum habet, & quæstio finem.

a b
2 3
c e d
4 6 9
l f m
8 36 27
n
216

Exempla.

1—1—1 Vnitas
2—3—6 Rad.
4—9—36 □
8—27—216 ⊏
16—81—1296 □□

COROLLARIVM.

Ex quibus manifestum est, quòd ex diuisione quadrati, in quadratum, siue cubi in cubum, siue secundi quadrati in secundum quadratum, semper prouenit quadratus, seu cubus, seu secundus quadratus illius quotientis, quod ex diuisione radicis in radicem, quarum sunt quadrata, vel cubi, vel secunda quadrata, proueniebat. Quod corollarium sequitur similiter ex pręcedentis corollario, sicut propositio ex propositione nascebatur, per ipsas multiplicationis & diuisionis diffinitiones.

PROPOSITIO 13ª.

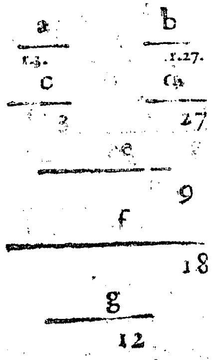
Propositarum duarum quantitatum per potentias cognitas, aut per cubos tantùm datos, congeriem, aut excessum vestigare. Sunto duæ quantitates a b. quarum quadrata c d. cognita sint. Volo earum congeriem pronunciare. Per vndecimam huius, multiplico a in b. per nota ipsarum quadrata c d. & proueniat e. Huius

r. 3. a b r. 12
c d
3 e 12
6
f
12

Cc duplum

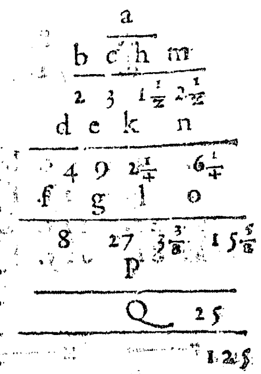
duplum ſit f. Sumo igitur aggregatum ipſarum c d f. dico enim quòd tale aggregatum eſt quadratum congeriei quæſitæ. Nam per 4 ſecundi Elementorum, aggregatum ex duobus quadratis, duploq; producti radicū, quarum ſunt quadrata, conficiunt quadratum congeriei radicum. Item ſunto duæ quantitates a b. quarum maior b. & earum quadrata ſint c d. Volo ſubtrahere ipſam a. ab ipſa b. Per 11ª huius, multiplico a. in b. per earū potentias c d. & proueniat e. Huius duplum ſit f. quod ſubtraho ad aggregato ipſarum c d. & reſiduum ſit g. Dico igitur, quòd g. eſt quadratum eius quantitatis, quæ relinquitur poſt ſubtractionem ipſius a. ab ipſa b. Nam per 7ª ſecundi Elementorum, quadratum quātitatis, à qua fit ſubtractio, vnà cum quadrato ſubtractæ, ſumptum æquale eſt quadrato reſidui vnà cum duplo eius, quod fit à tota in ſubtractam. Quam ob rem, ſi tale duplum ſubtrahatur ab aggregato quadratorum totius & ſubtractæ, ſupereſt quadratum reſidui. Vbi notandum eſt, quòd quando duæ quantitates propoſitæ ſunt inuicem commenſurabiles, tunc, quoniam ipſę ſunt eiuſdem ſpeciei: & earum tam congeries, quàm conceſſus eſt & eiuſdem ſpeciei quantitas. Exempli gratia: ſiue propoſitæ quantitates ſint potentia tantùm rationales inuicem commenſurabiles: tunc earum tam congeries, quàm differentia erit quantitas vnius nominis potentia tantùm rationalis. Si autem propoſitæ quantitates ſingulæ ſint vnius ſpeciei binomia: & perinde commenſurabiles: tunc earum tam congeries, quàm differentia erit eiuſdem ſpeciei binomium: Et ſimiliter de reliquis irrationalium ſpeciebus dicendum: Quæ omnia & in decimo Elementorum demonſtrantur, & calculo practico comprobantur. Sed regulę in hac propoſitione aſſignatæ quantitatibus potentia rationalibus tantùm vſu veniunt: non & ijs, quarum cubi tantùm, aut quarum ſecunda quadrata tantùm cognita offeruntur. Sed pro vniuerſis quantitatibus, tam potentia tantùm, quàm cubo tantùm, quamque ſecundo quadrato vel quotacunque potentia tantùm cognitis, dabimus hìc vnicam & auream regulam, quam hìc ſimul tradémus & demonſtrabimus. Sit a. magnitudo poſita, quæ denominatur ab vnitate. b c. duæ magnitudines datæ. Sit d. quadratum ipſius b. & e. quadratum ipſius c. Itē f. cubus ex b. & g. cubus ex c. Et tunc ſi ſecetur c in b. & proueniat h. Item e. in d. & proueniat k. Item g. in f. & proueniat l. erūt iam ſicut a b d. & ſicut ipſo a c e g. ita & ipſe a h k l. per diffinitionem quadratorum, & cuborum, & per diffinitionem diuiſionis continuè proportionales. Quare per diffinitionem h. radix k.

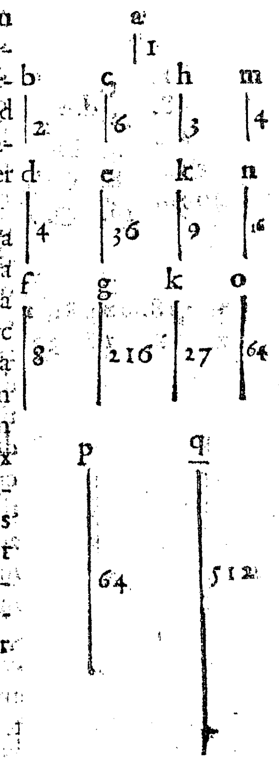
Aurea regula.



quadratum

quadratum & l. cubus talis radix erunt. Quibus cōſideratis, ſi velim aggregare quantitates b c. per earum quadrata d e. vel per earum cubos f g. ponam m. æqualem aggregatum ipſarum a h. & faciam n. quadratū ipſius m. & eiuſdem m. cubum o. Mox ducam d. in n. & proueniat p. Item ducā f. in o. & proueniat q. Aio tūc, quod p. erit quadratum totius b c. quodq; q. erit cubus eiuſdem b c. totius. Et ſic habeo tā per quadratos, q̄ per cubos aggregatū ipſarū b c. Hoc eſt, habeo tā quadratū, q̄ cubū talis aggregati, qđ aliter in notitiā non venit. Atq; ita deinceps fiet per ſecunda & quotacunq; quadrata: Quod ſic oſtēditur. Cū, per diffi. diuiſionis. ſit ſicut e. ad b. ſic h. ad a. erit coniunctum totum c b. ad ipſum b. ſicut totū h a. ad ipſum a. hoc eſt, c b. ad ipſum b. ſicut m. ad a. Quare per 15ª ſexti Euclid. qđ fit ex a. in b c. hoc eſt, ipſum aggregatū b c. æquale erit ei, quod fit ex b. in m. Itaq; cū ex b. in m. hoc eſt, ex radice in radicem producatur totū b c. iā, per corollariū vndecimæ huius, ex d. in n. hoc eſt, ex quadrato in quadratū producetur quadratū totius b c. qđ fuit p. & ex f. in o. hoc eſt, ex cubo in cubum, producetur cubus totius b c. qui fuit q. quod erat demonſtrandum. Et ſimiliter per eadē omnino, idipſum oſtēdetur de ſecundis quadratis, cæteriſq; dignitatibus magnitudinum. Quod ſi velim ſubtrahere quantitatem b. de tota b c. per quadrata earum d. & p. tunc diuidā quadratū ipſius b c. ſcilicet ipſam p. per quadratū ipſius b. ſcilicet per ipſam d. Et proueniet ex iā demonſtratis; ipſa n. cuius radix quadrata eſt m. A qua ſubtraho a. vnitatem: & ſupererit h. cuius quadratū, ſcilicet ipſam k. duco in d. quadratū, ſcilicet ipſius b. ſubtrahendæ: & proueniet e. quod ex quadratū ipſius c. quæ ſupereſt poſt ſubtractionē ipſius b. à tota b c. ſic per quadrata ſubtractæ & eius, à qua fit ſubtractio, habeo quadratum relictæ. Eadem quoq; ſubtractio fiet per cubos quantitatum ſcilicet per f. & q. ſic. Diuidā cubū ipſius b c. ſcilicet q. in cubum ipſius b. ſcilicet f. & proueniet ex demonſtratis ipſa o. cuius radix cubica eſt m. De qua minuo a. vnitatē, & relinquetur h. cuius cubum l. duco in f. cubū ipſius b. ſubtrahendæ: & proueniet g. cubus ipſius c. relictæ poſt dictam ac propoſitam ſubtractionem. Et per eandem idipſum in ſecundis quadratis cæteriſque deinceps eueniet. Quæ quidem regula, quoniam communis eſt vniuerſis in infinitum quantitatum dignitatibus, à nemine hactenus animaduerſa, & demonſtrata, merita aurea fuit appellanda.





PROPOSITIO 14ª.

c.	8.
d.	2.

a.	3.	5.	b
e.	9.	25.	f
g.	27.	125.	h
k.	81.	625.	l.
t——		x——	
m.	18	50.	n
p.	54	250.	q
r.	162	1250.	s

1.	1.	
8.	2.	d. R.
64.	4.	□.
512.	8.	Cub.
4096.	16.	$\square.\,2^{i}$

y.	128.	1024.	8192
z.	8.	16.	32

Duas propositas quantitates potentia tantùm, vel cubo tantùm, vel secundo quadrato tantùm rationales, inuicem commensurabiles inuicem coniungere: vel alteram ab altera subtrahere. Quoniam duæ quantitates commensurabiles inuicem supponuntur, erant sicut numerus ad numerum: sint ergo sicut numerus a. ad numerum b. quarum maior b. & horum numerorum aggregatum sit c. differentia verò d. Itẽ ipsorum a b. quadrati sint e f. cubi g h. quadrati secundi k l. Quantitates autem propositæ, si potentia tantũ sint rationales, sint earum potentiæ seu quadrata m n. Si autem cubo tantùm rationales, earum cubi sint p q. si tandem quadrato secundo rationales, earum quadrata secunda sint r s. Ipsæ autem quantitates sint t x. & quoniam t x. sunt ad inuicem sicut numeri a b. ad inuicem, necesse est, vt & m n. ipsis e f. & ipsi p q. ipsis g h. nec non ipsi r s. ipsis k l. sint proportionales. Quoniam, scilicet quantitatum proportionalium, tam quadrata ad inuicem, quàm cubi ad inuicem, & quàm secunda quadrata ad inuicem & deinde pares dignitates semper proportionales sunt; propterea videlicet, quòd quadrata duplicant, cubi triplicant, quadrata secunda quadruplicant, & sic deinceps proportionem radicum. Hinc sequitur, quoniam per coniunctam, & euersam proportionem, sicut est c. numerus ad d. numerum, aggregatum scilicet a b. ad eorum differentiam, sic est aggregatum quantitatum t x. ad earum differentiam: Idcirco & talium aggregatorum quadrata, talium differentium quadratis, & cubi cubis, & secũda quadrata secundis quadratis proportionalia erunt & deinceps sequentia. Vnde sicut est m. numerus ad e. numerum: siue sicut n. numerus ad f. numerum, hoc est, sicut quadrata singularum quantitatum t x. ad quadratos singulos numerorum a b. sic erit quadratum aggregati quãtitatum t x. ad quadratum ipsius c. nec non sic erit quadratum differentiæ quantitatum t x. ad quadratum ipsius d. idemque de cubis, & de secundis quadratis dicendũ. Quoniam igitur quantitates t x. notæ sunt per quadrata m n. tantum tunc sicut est m. ad e. sic sit y. numerus ad quadratum ipsius c. Item sic sit z. numerus ad quadratum ipsius d. Nam ex iam demonstratis y. numerus erit quadratum aggregati ipsarum t x. & z. numerus erit quadratum differentiæ ipsarum t x. Sic notescit per quadrata tam congeries, quàm excessus propositarum quantitatum. Quoniam autem quantitates t x. cubo tantum sunt rationales: tunc similiter quæretur earum tam congeries, quàm excessus per cubos; Si demum quadrato secundo tantùm rationales; tunc talis congeries & excessus per secunda quadrata notificabitur.

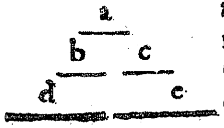
COROLLARIUM.

Ex quibus manifestum est, huiusmodi duarum quantitatum tam aggregatum, quàm differentia, semper est quantitas vnius nominis & vtrique ipsarum commensurabilis.

PROPOSITIO 15ª.

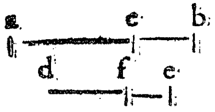
Duarum quantitatum plurium nominum, aggregatum, aut differentiam vestigare. Quando nomina quantitatum sunt ad inuicem incõmensurabilia: tunc congregatio haud aliter fieri potest, quàm aggregatis membris per aduerbium Plus: nec etiam dr̃a aliter proferri, quàm per aduerbiũ Minus: sicut ostendit Euclides in decimo, tam de binomijs, quàm de residuis. Vbi verò fuerint duo nomina inuicem cõmensurabilia: tunc ea, per præcedentem, coniuncta conflant vnam quantitatem, & ideo redigenda sunt ad vnũ nomen in additione. Quod si minor à maiori subtrahatur, superest quantitas vnius nominis, in subtractione. Semper igitur duo nomina, quæ in additione, vel subtractione ad vnum redigi possunt, redigenda sunt, vt quàm paucissimis nominibus siue aggregatum, siue differentiam proferamus. Et in additione hoc semper attẽdendũ, quòd nomina per Plus geminata, Plus conficiunt: Per Minus verò notata, Minus. tantum, inquam, Plus, seu tantum Minus, quantũ coniuncta conflant. Quòd si nominum alterũ per plus, alterũ per minꝰ notetur, tunc eorũ excessus adijciendus, aut subtrahendus erit summæ: adijciendus quidẽ, qñ nomen per plus notatũ, maius est; subtrahendus verò, cum maius est reliquum nomen. Vnde si nomina contrarijs titulis insignita, fuerint æqualia, tunc nihil conflant: nam quod inde adijcitur, hinc subtrahitur, & ita summa intacta permittetur. In subtractione verò, si nominum vtrunque per plus notetur, supererit differentia nominũ per plus qdẽ notanda, cum illud nomen à quo fit subtractio maiꝰ est: per Minus vero inscribenda, cum subtrahendũ nomen maius est. Quando aũt nomina æqualia, nil restat. Quòd si ambo nomina per minus notata sint, similiter supererit excessus nominum; verùm per Plus notandus, cum maius nominum erat subtrahendum: per minus autẽ inscribendus, quando reliquum nomen maius fuerit. Nam æqualitas eorum rursum nihil residuat. Demum, si nominum alterum per Plus, alterum per Minus inscribatur: tũc eorum aggregatum pro relicto subtractionis subscribendũ est cum aduerbio Plus, vel Minus, cum quo scilicet notabatur nomẽ, à quo fit subtractio. Quæ præcepta ita sunt in triuialibus scholis trita, & per conceptum animi cognita, vt demonstratione non egeant. Igitur ad reliqua transeundum.

PROPOSITIO 16ª.



Quantitatem vnius nominis in quantitatem duorum aut plurium nominum multiplicare. Quantitas vnius nominis sit a. binominis autem quantitas b c. sub duobus nominibus. b. & c. prolata. Oportet multiplicare a. in b c. Multiplico per vndecimam huius, quantitatem a. in nomen b. & fiat d. Item multiplico, per eandem, a. in nomen c. & fiat e. Dico igitur, quòd quantitas conflata ex nominibus d e. est productum quod fit ex multiplicatione ipsi a. in ipsam b c. Nam, per secundi Elementorum primam, quæ fiũt ex ductu vnius quantitatis in parte propositæ quantitatis pariter accepta conficiunt illud, quod fit ex dicta quantitate in totam propositam. Itaque d e. productum est ex multiplicatione ipsius a. in ipsam b c. factum: quod quærebatur.

PRÆAMBVLVM.



Verùm in multiplicationibus binomiorum ac residuorum, hoc est prænotandum, quòd si nomina multiplicanda inscribantur per Plus aut per Minus vtraque, tunc productum ex eorum multiplicatione factum inscribendum erit per plus: si vero alterum nominum per Plus, alterum per Minus notetur, productum per minus notandum erit. Quod ita esse, breui demonstratione arguemus. Sunto dua residua, vnum, a b. b c. Alterum d e. e f. cùm enim residua ipsa sint quantitates a c. d f. quę restant per abscisionem minorum nominum à maioribus, illud sic pronuntiatur a b. minus b c. hoc est, quod superest, subtracta quantitate b c. à quantitate a b. aliter enim exprimi non potest, cum sit quantitas irrationalis, per abscisionem quantitatis à quantitate sibi incommensurabili factam relicta: & similiter alterum sic profertur d e. minus d f. hoc est, quod relinquitur, dempta quantitate e f. à quantitate d e. illud inquam, residuum est quantitas a c. sicut dictum est, relicta. Hoc autem residuum quantitas d f. per similem abscisionem remanens. Quæ cum aliter, quàm per nominum, ex quorum abscisione generantur, hoc est, quorum excessus sunt, proferri nequeant: iam si alterum in alterum multiplicandum erit; talis multiplicatio non nisi per nominum multiplicationem fieri poterit. Si igitur residuum a b. b c. multiplicandum est in residuum d e. e f. non aliter multiplicatio fieri potest, quàm multiplicando hæc nomina singula in illa singula: vnde fiet quadruplex multiplicatio, prima scilicet a b. in d e. Se-

a b. d e. { a c. d f. + / a c. e f. plus + / b c. d f. plus + / b c. d f. plus —

a b. e f. { a c. e f. Minus + / b c. e f. Min.º —

d e. b c. { b c. d e. Min.º + / b c. e f. Min.º —

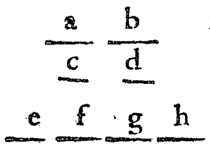
d e. Secunda a b. in e f. Tertia d e. in b c. Quarta b c. in e f. Harum prima, per primam secundi Elementorum Euclidis, continet quatuor multiplicationes se ipsam integrantes, scilicet a c. in d f. a c. in e f. b c. in d f. b c. in e f. Secunda continet duas multiplicationes se ipsam perficientes, scilicet a c. in e f. & b c. in e f. Tertia item duas, ex quibus componitur, scilicet b c. in d f. b c. in e f. Quoniam, scilicet producta partium integrant productum integrorum. Quarta verò vnica est, scilicet b c. in e f. quoniam fit ex nominibus indiuisis: & cum prædictis octo posita facit nouem multiplicationes. Productum autem quæsitum est, quod fit ex multiplicatione a c. in d f. Quod haberi non potest, nisi paractis dictis quatuor multiplicationibus, quæ continent nouem ductus. Ex quibus consuendum sit solum illud quod fit ex a c. in d f. necesse est cætera octo producta esse abijcienda: quod fieri non potest nisi dimidium eorum notetur per plus, ac reliquum dimidium per minus; atque ita alterum altero repensante, summa quęsita, quæ fit ex a c. in d f. seruentur intacta. Sed ex dictis cæteris octo productis, tria prima multiplicationis, scilicet quę fiunt ex a c. in e f. ex b c. in d f. & ex b c. in e f. inscribi debent per aduerbium Plus, quoniam sunt membra primæ multiplicationis, quæ fit ex nominibus a b. d e. per idem aduerbium notatis. Duo autem producta secũdæ multiplicationis, ex a c. in e f. & b c. in e f. notanda per aduerbium Minus: quoniam sunt membra secundæ multiplicationibus, quę fit ex nominibus a b. e f. quorum alterum per aduerbium Minus inscribitur. Duo quoque producta tertiæ multiplicationis, ex b c. in d f. & ex b c. in e f. similiter per aduerbium Minus notata intelliguntur, quoniam tertia multiplicatio quorum membra sunt constat ex nominibus, d e. b c. quorum alterum per minus notatur. Octauum igitur productum, quod fit ex b c. in e f. nominibus inscriptis per minus; necesse est, vt inscribatur per Plus: atque ita fiant quatuor producta inscripta per Plus, & totidem producta paria inscripta per Minus: & perinde tantum his minuentibus, quantum illa superaddunt, Summa quæsita, quæ fit ex a c. in d f. intacta permaneat. Constat igitur, quòd ex ductu nominum per aduerbium, Minus, notatorum producitur quantitas per aduerbium, plus, notanda. Sed illud exemplum satis esse debet, quòd plus in plus multiplicatum, siue minus in minus, omnino producit plus: quemadmodum affirmatio affirmationis affirmat, & negatio negationis affirmat similiter. Item sicut affirmatio negationis, siue negatio affirmationis negat: Ita

b c. e f. } b c. e f. Pl.º —

siue Plus in Minus, siue Minus in Plus multiplicatum producit Minus. Potes exemplificare regulam & comprobare demonstrationem per numeros rationales, vt sic singulæ nouem multiplicationes distinctæ appareant: & facilius omnia intelligantur.

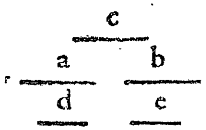
PROPOSITIO 17^{a}.

Duas propositas quantitates, singulas duorum, aut plurium nominum, inuicem multiplicare. Proponatur binomium a b. ex duobus nominibus a. & b. multiplicandum in binomium c d. ex duobus nominibus c. & d. compositum: siue illa sint residua singula binis nominibus expressa, siue alterum Binomium, & alterum residuum. Multiplicētur, per vndecimam, & per præcedentem, singula vnius quantitatis nomina in singula alterius nomina, hoc est, c. in a. & fiat e. Item c. in b. & fiat f. Item d. in a. & fiat g. Item d. in b. & fiat h. seruatis tamen regulis circa inscriptiones aduerbiorum, Plus, aut Minus, in præcedenti propositione traditis. Nam quantitas compacta ex quatuor nominibus e f g h. seruatis aduerbiorum terminis, erit, per primam secundi Elementorum, productum ex multiplicatione totius a b. in totam c d. quantitatem, proueniens. Illud quoque notando: si nomina huiusmodi possunt ad minorem multitudinem redigi, redigantur, per 14^{a} huius: quod fieri potest inter quælibet bina inuicem cōmensurabilia: Nam per corollarium dictę $14^{æ}$ talium binorum nominum tam aggregatum, quàm differentia facit quantitatem vnius nominis. Non aliter trinomia, aut quadrinomia multiplicabuntur, singula vnius quātitatis nomina in singula alterius, per vndecimam huius, multiplicando: & deinde bina quę ad vnum nomen redigi possunt, redigēdo. Quę omnia poteris practico exēplo experiri. Quod nos in quęstionib9 Arithmeticis abūdè fecim9.



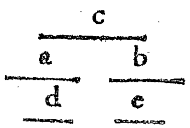
PROPOSITIO 18^{a}.

Propositam quantitatem duorum aut plurium nominum, in datam vnius nominis quantitatem partiri. Esto Binomium quoddam siue Residuum a b. ex nominibus duobus a. & b. confectum: quod diuidendum sit per quantitatem c. Diuidatur per duodecimā huius, nomen a. in quantitatem c. & proueniat d. Item diuidatur nomen b. in eadem c. & proueniat e. Iam ex multiplicatione ipsius c. in d. fiat a. & ex multiplicatione ipsius c. in e. consurget b. Nam diuisor in quotiētem multiplicatus producit diuisum. Igitur, per



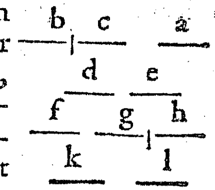
primam

primam secundi Elementorum, ex ductu c. in totam d e. fit tota a b. Et quoniam productum diuisum in multiplicantem, exibet multiplicatam: idcirco tota a b. quod est productum, diuisa in ipsam a. multiplicantem, exhibebit ipsam d e. multiplicatam. Itaque d e. est quantitas quotiens ex diuisione proposita proueniens. Similiter fatiendum est, si diuidenda quantitas sit trinomium, aut plurium nominum. Sed memento, sicut in antepræmissa per multiplicatione fecimus, ita & in diuisione animaduertere nominum inscriptiones: Nam nomen inscriptū per aduerbium Plus, si diuidatur per nomen similiter inscriptum: quotiens diuisionis similiter inscribetur. Si autem diuidatur per nomen aduerbio Minus inscriptum, quotiens diuisionis, per Minus inscribetur. Quoniam scilicet, tam Plus multiplicatum in Plus, quàm Minus multiplicatum in Minus, producit Plus, vt in ante præmissa ostendimus. Nomen autem inscriptum per aduerbium, Minus, si diuidatur per nomen similiter notatum, quotiens diuisionis per Plus inscribetur. (quod non vsu venit, quia diuisor vnius nominis semper per plus notatur.) Si autem diuidatur per nomen notatum per Plus, quotiens inscribetur per Minus. Quoniam scilicet in multiplicationibus tam Plus in minus, quàm Minus in Plus multiplicatum, producit Minus. Sicut enim diuisionis demonstratio fit per multiplicalionis demonstrationem: ita & diuisionis regulæ & cautiones ex præceptis multiplicationis deriuantur. Quæ sunt etiam triuialibus Magistris notissimæ, & in quęstionibus nostris Arithmeticis affatim per exempla traditæ.



PROPOSITIO 19^{a}

Propositam duorum aut plurium nominum quantitatem, in datam duorum nominum quantitatem diuidere. Esto quantitas a. duorum, aut plurium nominum: hanc partiri iubemur per binomium b c. cuius nomina sunt b c. Capiatur d e. Residuum eorundem nominum, ex quibus cōponitur b c, hoc est, vt d. nomen, ipsi b. nomini: & e. nomen ipsi c. nomini æquale sit. Si autem b c. diuisor fuerit Residuum duorum nominum: tunc capiatur d e. binomium corūdem nominum: Deinde, per 17^{a} præcedentē, multiplicetur quātitas b c. in quantitatem d e. & proueniat quātitas f. quæ erit quātitas vnius nominis, per 113^{a} vel per 117^{a} decimi Eucl. Nā binomium in suum residuū multiplicatū producit quātitatē rationalē. Itē per 17^{a} præmissam multiplicetur a. in d e. & proueniat g h. Eritq; per primā sexti Euclid. sicut b c. ad ipsam a. sic quantitas f. ad ipsam g h. Diuidatur itaque, per præcedentē, quantitas g h. in ipsam f. & proueniat k l. Dico itaque, quòd



k l. est

k l. est quantitas, quæ prouenit ex diuisione ipsius a. in ipsam b c. Nam cùm g h. diuidatur in f. & proueniat k l. iam, per diffin. diuisionis, erit, sicut g k. ad ipsam k l. diuisa scilicet ad quotientem, sic f. diuidens ad positam. Et permutatim sicut g h. ad ipsam f. sic & k l. ad positam. Verùm fuit g h. ad ipsam f. conuersim sicut a. ad ipsam b c. Ergo & a. ad ipsam b c. sicut k l. ad positam. Et permutatim a. diuisa ad ipsam k l. sicut b c. diuidens ad positam. Quare, per diffin. diuisionis, k l. quantitas est, quæ prouenit ex diuisione ipsius a. in ipsam b c. quæ vestiganda proponebatur. Quòd si diuisor esset trium nominum: oporteret geminari multiplicationem, vt productum tandem proueniat vnius nominis: & diuidendam per eundem multiplicatorem multiplicari: & deinde productum per productum diuidendum.

PROPOSITIO 20ª.

Si quantitas qualibet in duo segmenta diuidatur; id quod fit ex vtrolibet assumpto segmento in quadratum totius, æquum erit his duobus, scilicet, quæ fiunt ex vtraque sectionum in quadratum reliquæ, & ei quod fit ex quadrato assumpti segmenti in totam. Sit quantitas qualibet, vtcunque in duo diuisa, scilicet in a. & b. Dico, quòd id, quod fit ex a. in quadratum a b. æquum erit his, scilicet ei, quod fit ex a. in quadratum b. & ei, quod fit ex b. in quadratum a. eique, quod fit ex quadrato a. in totam a b. Quod sic ostendam. Per quartam secundi Euclidis, quadratum a b. est æquale his, scilicet quadrato b. & ei quod fit ex a. in b. eique quod fit ex a. in a b. Ergo propter æquam vtrobique multiplicationem, quod fit ex a. in quadratum a b. æquale erit his, scilicet ei, quod fit ex a. in quadratum b. cum eo, quod fit ex a. in productum ex a. in b. atque cum eo, quod fit ex a. in productum ex a. in totam a b. Sed id, quod fit ex a. in productum ex a. in b. æquum est ei, quod fit ex quadrato a. in b. Illud autem, quod fit ex a. in productum ex a. in totam a b. æquum est ei, quod fit ex quadrato a. in totam a b. Sunt enim eadem solida, quandoquidem sub tribus iisdem lateribus. Igitur & id, quòd fit ex a. in quadratum a b. æquum erit his, scilicet ei, quòd fit ex a. in quadratum b. & ei, quod fit ex quadrato a. in b. eique quod fit ex quadrato a. in totam a b. Quod fuit demonstrandum.

a b

per 4ª secundi.

□. ab { □. b. ; ▭. a. b ; ▭. a. a b }

Igitur mlcās singula p a

Solidum. a. a b. ab æquum est trib⁹ solidis sc3 { a.b.b ; a.a. b ; a.a.ab }

Quod est ppositū

PROPOSITIO 21ª.

Si quantitas qualibet in duo segmenta secetur: Cubus, qui ex tota; æquum erit his, scilicet duobus cubis sectionum, & triplo eius, quod fit

fit ex quadrato vtriusque in reliquam. Sit a b. quantitas, vtcunq; in duo diuisa, scilicet in a. & in b. Dico, quòd cubus totius a b. æqualis erit his, scilicet cubo ipsius a. & cubo ipsius b. & triplo eius, quod fit ex quadrato a. in b. necnon & triplo eius, quod fit ex quadrato b. in a. Quod sic ostendam. Per quartam secundi Elementorum, quadratus totius a b. est æquum his, scilicet quadrato ipsius a. quadrato ipsius b. & duplo eius, quod fit ex a. in b. Ergo, propter æquam vtrobique multiplicationem, cubus a b. æqualis erit his, scilicet ei, quod ex a b. in quadratum ipsius a. & ei quod ex a b. in quadratum ipsius b. & duplo eius, quod ex a b. in productum ex a. in b. Sed per primam secundi Elementorum, quod fit ex quadrato ipsius a. in a b. æquum est his, scilicet eis quod fit ex quadrato ipsius a. in a. scilicet cubo ipsius a. & ei quòd fit ex quadrato ipsius a. in b. Illud autem, quod fit ex quadrato ipsius b. in totam a b. æquum est his, scilicet ei, quod fit ex quadrato ipsius b. in b. scilicet cubo ipsius b. & ei, quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Item per primam secundi Elementorum, quod fit ex producto ipsarum a b. in totū a b. ęquū est his scilicet ei quod fit ex producto ipsar a b. in a. & ei, quod fit ex eodem producto in b. Sed quod fit ex producto ipsarum a b. in a. æquū est ei, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. Illud autem, quod fit ex producto ipsarum a b. in b. æquum est ei, quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Ergo quod fit ex producto ipsarum a b. in totā a b. æquum erit his, scilicet ei, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. & ei, quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Quare & duplum eius, quod fit ex produto ipsarum a b. in totam a b. æquum erit his, scilicet duplo eius, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. & duplo eius quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Ergo commutatis ęqualibus, cubus totius a b. ęqualis erit his, scilicet cubo ipsius a. cubo ipsius b. triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. & triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius b. in a. Quod fuit demonstrādū.

a b

per 4ª secundi

□.ab—□.a.□.b.▭a.b

Ergo

Cubus a b. æquus est trib⁹ solidis { a b. a a. ; { a b. b.b. ; duploq; } ; ipsi⁹ a b.a.b }

sed per pª 2ⁱ

Cub⁹ a. & solidū a. a. b æqlia sūt solido a.a.ab.

Item

Cub⁹ b. & solidū b. b. a æqlia sūt solido. b.b.a b.

Item

Solidū a.b.a b. æquū est solidis. a. a.b. atq; b.b.a

Et ideo

duplū illi⁹, ęquū duplo horū.

Igitur

Cub⁹ a b æquatur { Cubo a. ; { Cubo b. ; triplo solidi.a.a } ; Triplo soli... }

PROPOSITIO 22ª.

Si quantitas qualibet in duo segmenta dispescatur, cubus totius æqualis erit his, scilicet duobus cubis segmentorum, & triplo solidi, sub tota & singulis segmentis contenti. Esto, vt prius, quantitas a b. vtcunque secta in a. & b. segmenta: Dico, quòd cubus totius a b. ęqualis est his, scilicet cubo ipsius a. Cubo ipsius b. & triplo solidi, cuius latera sunt tota a b. a. & b. Quod sic ostendam. Per præcedentem, cubus totius a b. æqualis est his, scilicet cubo ipsius a. cubo ipsius b. & triplo eius, quod ex quadrato ipsi⁹ a. in

a b

per præmissam.

Cub⁹ a b. { Cubo. a. ; { Cubo. b ; triplo solidi. a. a b } ; triplo solidi. b. b. a. }

sed per p.[a] 21 □.a.cũ ▭. a b. ęqlia sunt simul sumpta ▭.a b.a

a.in b. ac triplo eius, quod ex quadrato ipsius b. in a. Sed per primam secũdi Euclidis, quadratum ipsius a. cum eo quod ex a. in b. simul ęqualia sunt ei quod ex a b. in a. Et per eandem, quod fit ex quadrato ipsius a. in b. vnà cum eo, quod fit ex a b. in b. æquale est ei, quod ex producto totius a b. & a. in b. hoc est, solido trium laterũ a b. a. b. Atque, quod ex producto totius a b. in b. æquale est ei, quod ex quadrato ipsius b. in a. hoc est, solido trium laterum a. b. b. Igitur, quod ex quadrato ipsius a. in b. vnà cum eo, quod ex quadrato ipsius b. in a. æqualia sunt ei, quod ex producto ipsius a b. & a. in b. hoc est solido trium laterum a b. a. & b. Quare & triplum illius, æquale triplo huius. Ergo cubus totius a b. æqualis erit his, scilicet cubo ipsius a. cubo ipsius b. & triplo solidi, cuius latera sunt a b. a. b. Quod erat demonstrandum.

Igitur

Solidũ a. a b. cũ solid. b. b. a. ęqualia sunt solido a b. a. b.

Quare & Tripla illorũ ęqlia triplo hui⁹.

Ergo. Cub⁹ a b. { Cubo. a. Cubo. b. triplo solidi. a b. a. b.

Quod est propositum.

PROPOSITIO 23[a].

Si fuerint duo numeri in proportione cuborum numerorum, qui fiet ex vno eorum in quadratũ reliqui, cubus erit. Sunto duo solidi numeri similes a d. tales enim vt in octauo Elementorum ostensum est, habent adinuicem rationem, quam cubus numerus ad cubum numerum. Sitque ipsius a. quadratus numerus e. & ex e. in d. fiat g. Aio, quòd g. cubus numerus est. Nam per decimam octauam octaui Elementorum, ipsis a d. intersunt duo numeri medij proportionales, qui sint b c. Sit itaque ipsius b. quadratus ipse f. & ex b. in f. fiat h. qui cubus erit ipsius b. Ostendam igitur, quòd g. æqualis est ipsi h. hoc modo. Ratio ipsius e. ad ipsum f. per vndecimam octaui, est sicut ratio ipsius a. ad ipsum b. duplicata: quoniam scilicet e f. sunt ipsorum a b. quadrati. Sed ratio b. ad d. est rationis a. ad b. duplicata. Igitur, sicut b. ad d. sic e. ad f. Quare, per vicesimam septimi, qui fit ex d. in e. hoc est, ipse g. æqualis est ei, qui fit ex b. in f. hoc est ipsi h. Cubus autem fuit h. ipsius b. ergo & g. cubus idem erit. Quod est propositum.

a	b	c	d
16	24	36	54

e	f
256	576

g: 13824

h: 13824

PROPOSITIO 24[a].

Propositis duabus quantitatibus cubo tantùm cognitis, eas coniungere: & minorem à maiori subtrahere. Sunto propositæ magnitudines a b. quarum quadrata a b. & quarum cubi e f. volo eas coniungere per cubos, hoc est, comperire cubum totius a b. tanquã vnius magnitudinis. Duco a. in d. & proueniat g. Cui⁹ triplum sit h. Item duco b. in c. & proueniat k. cuius triplum sit l. Mox aggregatum ipsorũ e f h l. sit m. Qui, per 21[a] præcedentem, erit cub⁹ totius a b. qui quærebatur. Vnde radix cubica ipsius m.

a	b
r.cu.3.	r.cu.24.
c	d
r.cu.9.	r.cu.576.
e	f
3	24
g	k
r.cu.1728. hoc e 12.	r.cu.216. h. 6.
h	l
36	18

m: 81.

erit

erit aggregatum propositarum magnitudinum a b. Et nota, quòd si cubi, qui cogniti supponuntur, scilicet e f. fuerint in proportione cuborum numerorum, tunc per corollarium 14[a] huius, ipsæ magnitudines a b. erunt ad inuicem commensurabiles. Vnde tunc tam g, quàm k. erunt rationales quantitates: quoniam eorum cubi sunt cubi numeri, per præcedentem: quandoquidem producũtur ex quadratis numerorum e f. in proportione cubica existentium, multiplicatis vicissim in ipsos numeros e f. Quamobrem cùm g k. tunc sint rationales, eorum tripli scilicet h l. rationales erunt: cumque e f. per hypothesim sint rationales, quia cubi cogniti, erit aggregatum ex e f h l. hoc est, ipse m. cubus totius a b. numerus rationalis: quare tota quantitas a b. erit cubo cognita, & vnius nominis, sicut corollarium 14[e] concludit. Contrà de tota magnitudine a b. cognita per cubum eius m. volo subtrahere magnitudinem a. cuius cubus e. idque per cubos, hoc est reperire cubum relictæ, qui est f. Sit itaque n. qui fit ex a b. tota in a. Quod autem fit ex n. in b. sit o. cuius triplum sit r. eritque per antepræmissam m. æqualis aggregato ipsorum e f. & r. Itaque ex n. in totam a b. fiat p. & ex m. in a fiat q. Vnde, per primam secundi Euclid. p. æqualis erit aggregato ipsarum o q. Aufero igitur ipsum q. ab ipso p. & supererit o. cuius triplum r. iungo cum e. & aggregatum minuo ab ipso m. & supererit f. cubus scilicet ipsius b. quæsitus, quæ post ipsius a. à tota a b. subtractionem relinquitur. Hic rursum nota, quòd si cubi, qui cogniti supponuntur, scilicet m. & e. fuerint ad inuicem sicut cubi numeri: tunc per corollarium quartædecimę huius, ipsę magnitudines a b. tota & a. erunt ad inuicem commensurabiles. Vnde tũc necesse est, cubos ipsarum p q. magnitudinum, esse cubos numeros, & perinde ipsas p q. esse rationales: vnde sequitur, vt earum differentia scilicet o. sit rationalis, eiusque cubus, numerus cubus. Quod sic ostendi potest. Cùm m. & e. sint ad inuicem, sicut cubi numeri: intererunt ipsis, per decimam octauam, octaui duo medij proportionales, qui sint r s. Sit autem ipsius m. quadratus t. & ipsius e. quadratus x. fiatque ex m. in e. numerus n. qui fuit cubus magnitudinis n. Et ex m. in n. numerum fiat numerus p. qui fuit cubus magnitudinis p. Itemq; ex n. in e. fiat numerus q. qui fuit cubus magnitudinis q. Dico igitur, quòd p. numerus est cubus ipsius r. Atque quòd q. numerus est cubus ipsius f. Nam, cùm m e. numeri sint ad inuicem, sicut cubi numeri, & eorum quadrati sint t. & x. Iam per præcedentem, tam numerus, qui ex e. in t. quàm numerus qui ex m. in x. producitur, Cubus

a	b
r.cu.3.	r.cu.24.
e	f
3	24

m: 81

n: r.cu.243

o: r.cu.5832. hoc est 18.

r: 54

p: r.cu.19683. hoc est 27.

q: r.cu.729. hoc est 9.

m. 81. { 3. e. 24. f. 54. r.

m	r	s	e
81	27	9	3
t		x	
6561		9	
p		q	
19683		729	

numerus

numerus erit: cùm autem m. multiplicãs se ipsum, faciat t. & multiplicans ipsum n. faciat e. erit, per primam sexti Elementorum, sicut m. ad e. sic t. ad n. Quare per vigesimam septimi, qui fit ex m. in n. scilicet ipse p. æqualis erit ei, qui ex e. in t. qui cubus fuit. Igitur p. cubus, cuius radix r. Similiter cum e. multiplicans se ipsum faciat x. & multiplicans ipsum m. faciat n. Erit sicut e. ad m. sic x. ad n. Quare, qui fit ex e. in n. scilicet ipse q. æqualis erit ei, qui ex m. in x. qui cubus fuit: Igitur q. cubus erit, cuius radix f. Tam igitur p. quàm q. cubus numerus est. Quod fuerat demonstrandum.

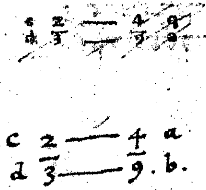
COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd si duo numeri seruantes rationem cuborum, singuli multiplicent suum productum, qui ex inde fient, cubi numeri erunt. Quod corollarium, cum præcedenti propositione quàm decentissime locari poterat in arithmeticis Elementis: vt sicut ibi ostensum est, ex ductu similium planorum generari quadratos, ita constet etiam, qua ratione, quoque ductu ex cubis numeris, cubi quoque numeri nascatur. Sed hæc ideo adducta sunt, vt regula additionis, & subtractionis radicum cubicarum peculiaris: & respondens regulæ in decimatertia huius de quadratis radicibus traditæ, melius notesceret. Quamquàm vlterius illa speculari, quæ ab Euclide neglecta sunt, nimis curiosum esset. Itaque ad reliqua transeamus.

PROPOSITIO 25ª.

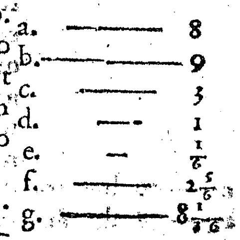
Propositæ cuiuspiam quantitatis radicem quadratam extrahere.

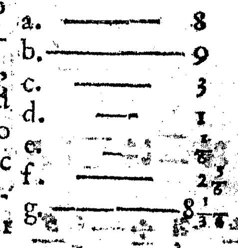
Si numerus repræsentans propositam quantitatem sit numerus quadratus, tunc radix eius numeri erit numerus repræsentans radicem quantitatis propositæ, per secundam huius libelli. Si autem proposita quantitas contineat partem, vel partes positæ quantitatis, tunc sit eius numerator a. & denominator b. qui supponantur vel quadrati, vel in ratione quadratorum numerorum: si quadrati, sic capiantur: si in ratione quadratorum numerorum, redigantur ad minimos eiusdem rationis per trigesimã nonam septimi: qui sint ipsi a b. eruntque per corollarium secundę octaui, a. b. numeri quadrati: Sit ergo ipsius a. radix ipse c. numerus, & ipsius b. radix ipse d. numerus. Aio igitur, quòd quantitas c. d. cui⁹ numerator est c. & denominator d. erit radix quadrata propositæ quantitatis a b. Quod sic constat.



Quoniam

Quoniam numerus c. est radix numeri a. & numerus d. radix numeri b. palam est, quòd numerus c. in se ductus producit numerum a. & numerus d. in se ductus producit numerum b. Quare per regulam multiplicationis in octaua huius traditam, ex quantitate c d. in se ipsam multiplicata producitur quantitas a b. & ideo per diffin. quantitas c d. radix quadrata est ipsius a b. propositæ quantitatis: quod erat demonstrandum. Quando autem numeri reputantes propositam quantitatem non fuerint quadrati numeri, tunc talis quantitati radix quadrata non potest numero notari: est enim solum potentia hoc est quadrato rationalis, & per numerum propositum, tanquàm quæsitæ radicis quadratum solummodo præfertur. Exempli gratia: Radix 3. vel Radix 5. Poterimus tamen numero magis ac magis vicino ipsam radicem non quadrati numeri significare. Exempli gratia: sit quantitas proposita ipso a. numero non quadrato significata: cuius volo radicem quadratum prope verum inuenire. Capio numerum quadratum b. proxime maiorem ipso a. numero cuius radix sit c. quæ iam erit prima radix propinqua quæsitę, sed, vt propinquiorē inueniã, subtrahã a. ab ipso b. & residuum sit d. quod partior per duplũ ipsius c. per nonã huius: & proueniat quãtitas e. quã subtraho ab ipsa c. & superfit f. quod multiplicatum in se facit g. Dico itaq; quòd fiet radix ipsius a. ppior, quàm c. & ipse g. quadratus vicinior ipsi a. quàm quadratus ipse b. Quod sic patet. Cum c. secetur in e. & f. erit, per quartam secundi elementorum, b. ipsius c. quadratus æqualis his, scilicet quadrato qui ex e. quadrato qui ex f. scilicet g. & duplo eius, quod fit ex e. in f. Et idem quoque b. est æquale ipsi a. vnà cum d. Sed d. est duplum eius, quod fit ex e. hoc est, ex toto e f. in e. igitur b. æqualis erit ipsi a. & duplo eius, quod fit ex e f. in e. Sed duplum eius, quod fit ex e f. in e. est æquale duobus quadratis ipsius e. & duplo eius, quod fit ex e. in f. per tertiam secundi Euclid. bis assumptam. Ergo b. æqualis erit ipsi a. & duobus quadratis ipsius e. & duplo eius, quod fit ex e. in f. fuerat autem & b. æqualis quadrato, quod ex e. & ipsi g. & duplo eius, quod ex e. in f. Igitur quadratum, quod ex e. & ipsum g. & duplum eius, quod ex e. in f. sunt æqualis his, scilicet ipsi a. & duobus quadratis ex e. & duplo eius, quod ex e. in f. Quare, demptis vtrinque quadrato e. & duplo eius, quod ex e. in f. relinquentur inde quidem ipsum g. hinc verò a. vnà cum quadrato ipsius e. inuicem æqualia. Itaque g. excedit ipsam a. in quadrato ipsius e. Et superatur





ab

ab ipſo b. quandoquidem f. ſuperatur a b. radix ſcilicet à radice. Atque ideo f. erit vicinior radici ipſius a. quàm fuerat c. adhuc tamen maior ea: quandoquidem g. maius ipſo a. quadratum quadrato. Similiter autem ſicut per ipſos b. & c. quadratum & radicem inuenimus f. radicem quæſitę viciniorem quàm fuerat c. Ita rurſum per g. & f. quadratum & radicem inueniemus radicem quæſitæ propinquiorem, quàm eſt f. Et ſimiliter, iterum atque iterum viciniorem, ſemper tamen aliquanto maiorem, donec exceſſus redigatur ad fractiunculam atomo ęqualem, ac quātouis minorem in infinitum, nunquàm tamen ipſi æqualem: quoniam quęſita irrationalis eſt, & in terminos numerarios non cadit. quæ omnia exercitio practici exempli calculando facile experieris. Poteris & alia via propinquare radici ignotæ ſic. ſit a. numerus non quadratus, cuius volo prope verum veſtigare radicem: aſſumo ingentem numerum quadratum, vt puta cētenariū, qui ſit b. cuius latus c. Multiplico a. in b. & produco d. Quo fit, vt ſi a. propoſitus ſit exempli gratia 8. ipſe d. proueniat 800. cuius radix quidem maior quàm 28. minor, quàm 29. quæ ſit e. Et quoniam quadrata ſunt in dupla ratione radicum, cum d. numerus ſit centuplus ad ipſum a. quadratum, ſcilicet ad quadratum: iam e. radix ipſius d. erit decupla ad radicem ipſius a. Hoc eſt, cum d. ad a. ſit ſicut b. centenarius ad vnitatem: erit e. ad f. ſicut b. ad c. vel ſicut c. ad vnitatem, hoc eſt, decuplus. Igitur f. erit decima pars ipſius e. hoc eſt, maius quàm $2\frac{8}{10}$ minus verò, quàm $2\frac{9}{10}$ & hæc eſt ipſius a. radix quæſita. Quòd ſi per centenario aſſumpſiſſē quadratum numerum maiorem, vt centies centum, per minutiores partes magis vero appropinquaſſem. magiſque ſi ad calculum millionem quadratum applicaſſem. Itaq; deinceps in infinitum, licèt verum numerario termino attingi nullatenus poſſit.

c — 10 b — 100
a — 8 d — 800
f — $2\frac{8}{10}\frac{9}{10}$ e — 28/29

Est ergo propinqua radix (minor tn̄) ipsius 8. $\frac{28}{10}$ hoc est viginti octo decimę vnius integri quae si reducantur ad integra diuisa s. per. 10. colliges radicē ipsius 8. esse integra 2. et vltra haec $\frac{8}{10}$.

PROPOSITIO 26ª.

Propoſitæ cuiuſpiam quantitatis radicem cubicam extrahere.

Si numerus repræſentans propoſitam quantitatem, ſit numerus cubus, tunc radix cubica eius numeri erit numerus repræſentās propoſitæ quantitatis radicem, per ſecūdam huius libelli. Si autem propoſita quantitas ſignetur per duos numeros: tunc ſit eius numerator e. & denominator f. qui ſupponātur vel cubi numeri vel in ratione cuborum numerorum. Si cubi, ſic capiantur: ſi autem in ratione cuborum, redigantur ad minimos eius rationis, per 39ª ſeptimi, qui ſint ipſi e f. eruntque per corollariū ſecundæ octaui

$\frac{c.2}{d.3}$ — $\frac{a.4}{b.9}$ — $\frac{e.\ 8}{f.\ 27}$

c $\frac{2}{3}$ — a $\frac{4}{9}$ — e $\frac{8}{27}$
d — b — f

octaui e f. numeri cubi: ſit ergo ipſius e. cubica radix c. numerus, & ipſius f. cubica radix ipſe d. numerus. Aio igitur, quòd quantitas c d. cuius numerator c. denominator aūt d. erit radix cubica propoſitæ quantitatis e f. Quod ſic conſtat. Ducatur c. in ſe, & fiat a. Item d. in ſe & fiat b. Eritque per diffin. quantitas a b. quadratum ipſius c d. Cumque ex radicis ductu in ſuum quadratum proueniat cubus ipſius radicis: iam ex ductu quantitatis c d. in quantitatem a b. proueniet cubus ipſius c d. Sed ex tali ductu quantitatum proueniet quantitas e f. per regulam multiplicationis in octaua huius traditam, quoniam ſcilicet ex ductu c a. numeratorum fit e. numerator, & ex ductu d b. denominatorū fit f. denominator: igitur e f. quātitas eſt cubus ipſius c d. quantitatis, & perinde c d. radix cubica ipſius e f. propoſitæ quantitatis quæſita. Quando autem numeri repræſentantes propoſitam quantitatem, non fuerint cubi numeri; tunc, ſicut in prima propoſitione dictum eſt, talis quantitatis cubica radix non erit rationalis, & in numerarios terminos non cadit, nec niſi per cubum profertur, ſit radix cubica 7. & R. cubica 9. poterimus tamen per numeros magis ac magis ipſi propinquare, ſicut in præcedenti pro radice quadrata veſtiganda fecimus. Sit enim, exempli gratia, a. quantitas propoſita non quidem cubo numero ſignificata, cuius cubicam radicem veſtigare iubear, quam non niſi prope, propiuſq; tentim accedendo, conijcere poſſum: ſicut in numero non quadrato de quadrata radice faciebam. Sit itaque ipſo numero a. proxime ſuperior b. cubus: cuius radix cubica ſit c. Deinde ſubtraho a. ab ipſo b. & reſiduum ſit d. Quod partior per triplum quadrati, quod ex c. & proueniat e. Hoc ſubtraho ab ipſo c. & reſiduum ſit f. cuius cubus eſto g. Dico itaque, quòd f. eſt propinquior radici cubæ ipſius a. quàm erat c. Atque quòd g. cubus eſt vicinior ipſi a. quàm erat b. Nam, per vigeſimam primam huius, cum c. quantitas ſecetur in ipſas e. & f. erit cubus ipſius c. ſcilicet ipſe b. æqualis his, ſcilicet cubo ipſius f. qui eſt g. & cubo ipſius e. & triplo eius quod ex quadrato ipſius e. in f. necnon triplo eius quod ex quadrato ipſius f. in e. Cumque idem b. ſit æqualis ipſis a d. ſimul, atq; d. ſit æqualis triplo eius, quod fit ex quadrato ipſius c. in e. & ideo triplo eius, quod fit ex quadrato ipſius e f. in e. propterea b. æqualis erit his, ſcilicet ipſi a. & triplo eius, quod fit ex quadrato ipſius e f. in e. Sed, per vigeſimam

1 $\frac{1}{3}$ — $\frac{4}{9}$ — $\frac{8}{27}$

a — 7
b — 8
c — 2
d — 1
e — $\frac{1}{12}$
f — $1\frac{1}{12}$
g — $7\frac{71}{1728}$

huius, quod fit ex quadrato ipsius e f. in e. æquale est his, scilicet ei, quod ex quadrato ipsius f. in e. & ei, quod ex quadrato ipsius e. in f. atq; ei, quòd ex quadrato ipsi⁹ e. in totam e f. Igitur triplum eius, quod ex quadrato ipsius e f. in e. æquale erit his, scilicet triplo eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. & triplo eius quod ex quadrato ipsius e. in f. atque triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. Quamobrem ipsa b. erit etiam æqualis his. s. ipsi a. & triplo eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. & triplo eius, quod ex ipsius e. quadrato in f. atq; triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. Verùm, per 21ᵃ huius, idem b. cubus æqualis est his, scilicet ipsi g. qui cubus est ipsius f. & cubo ipsius e. & triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius e. in f. triploque eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. Quoniam scilicet e. & f. constituunt ipsam c. radicem ipsius b. Ergo hęc, scilicet ipsa a. triplum eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. & triplum eius, quod ex quadrato ipsius e. in f. cũ triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. simul erunt æqualia his simul, scilicet ipsi g. cubo ipsi⁹ f. & cubo ipsius e. & triplo eius, quod ex quadrato e. in f. & triplo eius, quod ex quadrato ipsius f. in e. Demptis igitur vtrinque his, scilicet triplo eius, quod ex quadrato ipsi⁹ e. in f. & triplo eius quod fit ex quadrato ipsius f. in e. supererunt g. & cubus ipsius e. simul æqualia ipsi a. & triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. Itaque g. tanto maior est ipso a. quanto triplum eius quod ex quadrato ipsius e. in e f. siue in c. maius est cubo ipsius e. Maius est enim id, quod ex quadrato ipsius e. in e f. quàm cubus ipsi⁹ e. qui ex quadrato ipsius e. in ipsum e. producitur. Multo magis ergo & triplum eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. seu in c. maius erit cubo ipsius e. Cùm igitur g. sit maior ipso a. minor autem ipso b. quandoquidem f. minor fuit ipsa c. radix radice, erit f. propinquior cubicæ radici ipsius a. quàm fuerat c. Adhuc tamẽ f. maior est ipsa quæsita radice cubica ipsius a. quandoquidẽ g. cubus maior, q̃ a. Similiter autem, sicut per b. & c. inuenimus f. radicem viciniorem radici ipsius a. quàm fuerat c. ita rursus per g. & f. inueniemus radicem propiorem radici ipsius a. quàm fuit f. & similiter iterũ, atq; iterũ propinquiorẽ, nũquã tñ in infinitũ punctuale verũ, numerario termino attingẽtes. Quin etiã id ipsum, sicut in quadrata fecim⁹, aliter attẽtabimus sic: Sit a. numerus nõ cubus, cuius velim coniectare cubam radicem. Assumo cubum numerum magnũ, vtputa millenarium, qui

a	7
b	8
c	2
d	1
e	$\frac{1}{12}$
f	$1\frac{11}{12}$
g	$7\frac{71}{1728}$

c	10	b	1000
a	7	d	7000
f	$1\frac{9}{10}$	e	19

sit b. cuius radix cubica scilicet denarius sit c. Multiplico ipsum a. in b. & produco d. Quo fit, vt si a. propositus numerus sit 7. iam ipsum productũ d. sit 7000. Cuius radix cubica quidẽ paulò maior est, quàm 19. quæ sit e. & quoniam cubi sunt ad inuicẽ in tripla ratione radicum; propterea cũ d. numerus sit millecupl⁹ ad ipsum a. cub⁹ scilicet ad cubũ: iã e. radix ipsius d. decupla erit ad radicem ipsius a. igitur radix ipsius a. quæ sit f. erit pars decima ipsius e. hoc est, paulò maior, quàm $1\frac{9}{10}$. Quòd si pro millenario assumpsissem cubum maiorem, vtputa millionẽ, vicinior verò fuissem. Itaq; deinceps: nã maior numerus distinctius partes exprimit: quia numerosior: neq; aliter geometrico pũcto accedere licet propter incommensurabilitatem quęsitæ radicis, in nullum numerum cadentis. Hæc de radicum quadratarum, & cubicarũ extractione satis. Nunc ad progressiones veniamus. Nam quemadmodũ datæ quãtitatis quadrata vel cubica radix via giometrica extrahatur in libello Datorũ Theonis docuimus. Illius regulam Euclides in vltima secundi: Huius verò præceptum Philon Byzantius, Apollonius, Archytas, Pappus, Eratosthenes, Menæchmus & alij tradidere: vt Eutotius Ascalonita in commentarijs Archimedis scripsit.

c	10	b	1000
a	7	d	7000
f	$1\frac{9}{10}$	e	19

PROPOSITIO 27ᵃ.

Cùm fuerint quotcunque quantitates per idem crementum seriatim crescentes, ex dimidio numeri ipsarum in congeriem ex prima & vltima multiplicato producitur aggregatum ipsarum omnium. Exempli gratia, sint quinque magnitudines, a b c d e. seriatim & eodem accessu crescentes: sitq; a. minima e. verò maxima. Dico, quòd si dimidium quinarij ducatur in congeriem ipsarum a e producetur aggregatum ipsarum a b c d e. Ponatur enim totidem magnitudines, & singulæ singulis ipsis a b c d e. æquales f g h k l. sed ordine præpostero dispositæ: sic enim fiet, vt, cremento vnius ordinis decrementum alterius repensante, binarum quarumuis vna sit congeries: Vnde vtriusque ordinis aggregatum planus numerus erit sub duobus lateribus contentus: quorum vnũ erit numerus combinationum, scilicet quinarius, alter verò congeries ipsa binarum. Talis autem congeries constat ex minima & maxima. Igitur quinarius in talem congeriem ductus, producet aggregatum vtriusq; ordinis. Quare & dimidium quinarij in eandem congeriem multiplicatum producet aggregatum vnius ordinis. Quod fuit demonstrandũ.

3	a	l	11
5	b	k	9
7	c	h	7
9	d	g	5
11	e	f	3

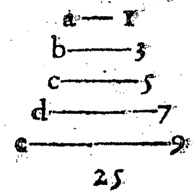
5 — 14 — 70

$2\frac{1}{2}$ — 14 — 35

PROPOSITIO 28ª.

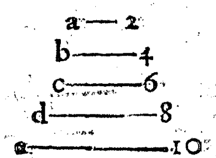
Radicum ab vnitate per ordinem dispositarum, vltima in succedentem multiplicata, producit numerum, cuius dimidium est aggregatum ipsarum radicum omnium. Nam per septimam præcedentis libri tale productum est duplum trianguli collateralis vltimę radicis: triangulus autem est, per diffin. aggregatum omnium radicum vsque ad vltimam inclusiue. Cum ergo dimidium talis producti sit ęquale triangulo, erit & æquale aggregato radicum: Quod est propositum.

PROPOSITIO 29ª.

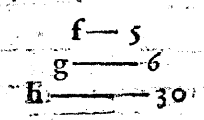


Numerus multitudinis imparium ab vnitate dispositorum in se ductus, producit aggregatum ipsorum imparium omnium. Exempli gratia, sint quinque impares a b c d e. ab vnitate dispositi: dico, quòd quoniam quinque sunt, quinarius in se ductus producit aggregatum ipsorum quinq; imparium. Nam, per quintamdecimam præcedentis libri, quinq; dicti impares aggregati conficiunt quintum numerum quadratum, qui ex quinario in se ducto producitur. Verum est ergo propositum in omni casu.

PROPOSITIO 30ª.

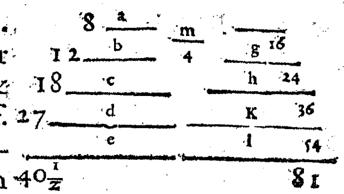


Numerus multitudinis parium à binario successiue dispositorum, multiplicatus in numerum vnitate maiorem, producit aggregatum ipsorum parium omnium. Exempli gratia, sunto quinq; pares a b c d e. à binario per ordinem dispositi. sit autem f. quinarius numerus ipsorum. g autem numerus vnitate maior, scilicet senarius, & ex f. in g. fiat h. Aio, quòd h. est aggregatum ipsorum a b c d e. parium. Quod sic patet. palam est, quòd in tali exemplo f. est quinta radix, & g. sexta radix: Igitur, per septimam præcedentis libri h. talium radicum productum est numerus parte altera longior sextus: qui per octogesimam quintam dicti libri, est aggregatum ipsius e. paris sexti loci, & omnium præcedentium: quod erat demonstrādum. Et similiter in oī casu constabit propositū.



PROPOSITIO 31ª.

Si in vno ordine fuerint quotlibet quantitates continue proportionales, & in secundo ordine quantitates vna plures in eadem ratione continue proportionales, ita vt earum differentiæ sint quantitatibus primi ordinis singulæ singulis æquales: tunc differentia primæ & postremæ secundi ordinis æqualis erit aggregato quantitatum primi ordinis. Ponantur in primo ordine quantitates continue proportionales quotuis, vtpũta quatuor a b c d. quib⁹ succedat in eadē ꝓportione ipsa e. qnta. Deinde in secūdo ordine vnà plures quātitates f. quinq; f g h k l. ita cōparatæ, vt drā ipsarū f g. sit æqualis ipsi a. Et differentia ipsarū g h. æqualis ipsi b. & drā ipsarū g k. æqualis ipsi c. & differentia ipsarum k l. æqualis ipsi d. Tunc aio, ꝙ differentia ipsarum f l. erit æqualis aggregato ipsarū a b c d. Patet propositū: qm̄ differentia ipsarū f l. extremarū conficitur ex differentijs quatuor medijs: quæ per hypotesim sunt æquales ipsis quatuor a b c d. quantitatibus. Sed suppositis magnitudinib⁹ primi ordinis: sic inueniētur magnitudines secundi ordinis. Sit ipsarū a b. differentia m. & sicut est m. ad ipsam a. sic sit a. ad f. & sicut est a. ad e. sic sit f. ad l. Vnde sicut ipsis a e. intersunt tres mediæ proportionales: ita & ipsis f l. totidem mediæ proportionales in eadem proportione intererunt. quæ sint g h k. Et, quoniam pp similem proportionem, sicut est a. ad f. sic est differentia ipsarum a b. scilicet m. ad differentiam ipsarū f g. fuitq; & m. ad a. sicut a. ad f. ideo m. eandem habebit rationem ad a. & ad differentiam ipsarum f g. æqualis ergo est a. differentiæ ipsarū f g. Sed cum differentiæ seruent continuatam magnitudinū proportionē, propterea tam b. drǣ ipsarū g h. q̃ c. differentiæ ipsarum h k. q̃ d. differentiæ ipsarū k l. ęqualis erit. Hinc oritur regula progressionis magnitudinū continue proportionalium. Nam ex m. & a. iam notis, notescit f. deinde ex a. e. & f. nota venit l. cuius & ipsius f. excessus est aggregatum ipsarum a b c d. sicut ostensum est.



PROPOSITIO 32ª.

Si secundū duos terminos summantur quotlibet quātitates cōtinue proportionales, quarū extrema multiplicēt ipsi termini: tūc productorū differentia diuisa inter minorū differētiā, exhibet aggregatū ipsarum quantitatum. Sunto duo termini, gratia exēpli, numeri 2. & 5. quorum quadrati 4. & 25. cubi autem 8. & 125. secundi quadrati 16. & 625. quadratis autem intersit medius proportionalis 10. cubis duo medij proportionales 20. & 50. secundis quadratis tres medij proportionales 40. 100. 250. qui singuli producuntur ex ductu termino rum in se, & ad inuicem, & inde in singulos secundi, & tertij ordinis numeros, vt assolet multiplicatorum. In horum tertio ordine sunt quatuor numeri, continue proportionales scilicet 8. 20. 50. 125. in quorum extremos 8. & 125. multiplicati termini 2. & 5. producunt 16. & 625.

1
2 . 5
4 . 10 . 25
8 . 20 . 50 . 125
16. 40. 100. 250. 625.

 quorum

1
2 . 5
4 . 10 . 25
8 . 20 . 50 . 125
16. 40. 100. 250. 625

Regula.
625
16
3 | 609 |
203

quorum differentia est 609. Aio, quòd huiusmodi differentia diuisa in differentiam ipsorum 2. & 5. hoc est, in 3. exhibet aggregatum dictorum quatuor numerorum continue proportionalium, scilicet 8. 20. 50. 125. quod sic ostenditur. Quoniam 2. ductus in se, facit 4. ductus in 5. facit 10. Iam idem 2 in 3. quę differentia est ipsorum 2. & 5. producet differentiam ipsorum 4. & 10. productorum: quoniam multiplicator ductus in differentiam multiplicatorum, producit differentiam productorum. Item quoniam 5. in 2. facit 10. & in se facit 25. iam & idem 5. in 3. faciet differentim ipsorum 10. & 25. Simili ratione, quoniam 2. in 4. facit 8. & 5. in 4. facit 20. (propter proportionalitatem numerorum) ideo 4. in differētiam dictam ipsorum 2. & 5. scilicet in 3. faciet differentiam ipsorum 8. & 20. Non aliter deinceps ostendam, ꝙ dicta terminorum 2. & 5. differentia multiplicata in 10. facit differētiam ipsorum 20. & 50. multiplicata quoq; in 25. facit differentiam ipsorum 50. & 125. Quamobrē eadē terminorum differentia multiplicata in aggregatū ipsorum 4. 10. 25. faciet aggregatum trium differentiarū dictarū, scilicet ipsorum 8. & 20. ipsorum 20. & 50. ipsorum 50. & 125. Sed tres tales differentiæ coniunctæ componunt extremorum 8. & 125. differentiam, igitur dicta terminorū differentia multiplicata in aggregatum ipsorum 4. 10. 25. producet differentiam ipsorum 8. & 125. extremorum. Quare & talis extremorum 8. & 125. (quæ sunt producta ex terminis in 4. & 25. multiplicatis) differentia diuisa in terminorum differentiam, exhibebit dictum ipsorum 4. 10. 25. continue proportionalium aggregatum: sicut propositio concludit. Adhuc per eadem omnino demonstrabimus, quòd ipsa terminorū differentia multiplicata in singulos 8. 20. 50. 125. tertij ordinis numeros, producet singulas quatuor sequentis ordinis numerorū differētias: & p inde eadē terminorū dfa mľcata in aggregatū ipsorum 8. 20. 50. 125. producet aggregatū dictarum quatuor differentiarū sequentis ordinis: & ideo producet dfam duorū extremorū 16. & 625. quæ sunt producta ex ductu terminorum 2. & 5. in ipsos 8. & 125. extremos quatuor continue proportionaliū. Vnde & taliū productorū differentia diuisa in differētiam terminorū, exhibebit aggregatū ipsorum 8. 20. 50. 125. quatuor continue proportionaliū numerorū: quod erat demonstrandū. Similiter pro cæteris terminis, aut proportionibus ostēdam qđ proponitur.

1
3 · 7
9. 21. 49
27. 63. 147. 343
81. 189. 341. 1209. 240

Regula
2401
81
4 | 2320
580

PROPOSITIO 33^{a}.

Sicut est quadratus ad duplum suæ radicis, sic est collateralis Triangulus numerus ad sequentem radicem. Exempli gratia, sit a. quinta radix b. autem quintus quadratus numerus: & ipsius a. duplus ipse c. Item d. sexta radix. cumque a. in se faciat ipsum b. Item a. in sequentem radicem d. faciet ipsum e. per diffin. parte altera longiorem sexti loci. Cuius dimidiꝰ sit f. qui per octauam præcedentis libri, erit triangulus quintus. Demonstrandum est ergo, quòd sicut est b. ad ipsum c. sic est f. ad ipsum d. Sic, quoniam a. multiplicans ipsos a d. producit ipsos b e. Iam ideo, per primam sexti Euclidis, erit sicut a. ad ipsum d. sic b. ad ipsum e. & permutatim sic b. ad a. sicut e. ad d. Cumq; a. sit dimidius ipsius c. atque e. dimidius ipsius f. iam, per 23^{a} quinti Elementorum, erit ex æquali, sicut b ad c. hoc est, quadratus quintus ad suam radicem, f. triangulus quintus, ad d. sextam radicem: quod fuit demonstrandum. & sicut pro quinto loco, ita pro quocunque constabit propositum.

c. 10. — a. 5. — b. 25
a. 5
d. 6 — e. 30. — f. 15

PROPOSITIO 34^{a}.

Omnis triãgulus multiplicatus in duplum collateralis radicis, producit aggregatum ex cubo & quadrato collateralibus. Repetita descriptione pręmissæ, ostendendum est, quòd f. triangulus quintus multiplicatus in c. duplum ipsius a. radicis quintæ, producit cubi & quadrati quintorum congeriem, hoc modo. Sicut est b. quadratus quintus ad c. duplum suæ radicis a. sic est f. triangulus quintus ad d. sequentem radicē, per præcedentem. Cùm verò a. in b. per diffin. faciat cubum quintum: Iam d. vnitate maior, quàm a. in b. faciet congeriem ex cubo tali suoque quadrato. Sed per 15^{a} sexti, quod fit ex d. in b. ęquum est ei, quod fit ex f. in c. siue per 23^{a} septimi. Igitur f. in c. faciet dictam cubi, quadratique congeriem, quod erat demonstrandum. Et sicut in quinto, ita in quouis locò constabit propositum.

PROPOSITIO 35^{a}.

Quod fit ex aggregato quotlibet radicum ab vnitate, ordinatarum multiplicato in duplum radicis vltimæ, si iungatur cum ipso radicum aggregato, cõstabit triplum aggregati omnium quadratorum ex dictis radicibus singulis factorum. Nam cum aggregatum, exempli gratia, quinque radicum ab vnitate ordinatarum sit per diffin. quintus triangulus: & aggregatum quinq; quadratorum talium radicū, sit quinta pyramis

1.	1.
2.	4.
3.	9.
4.	16.
5.	25.
15	55

$5 \atop 5$ } 10 } 150 — { 125, 25

quadrata per diffin. Iam demonſtrandum erit, quòd illud, quod fit ex quinto triangulo in duplum radicis quintę, ſi iungatur cum ipſo triangulo, conflabit triplum pyramidis quadratæ quintæ. Sed, per præcedentem, id, quod fit ex quinto triangulo, in duplum radicis quintæ, æquum eſt aggregato cubi & quadrati quintorum. igitur demonſtrandum erit, quòd congeries cubi quadrati & trianguli quintorum, æquiualet triplum pyramidis quadratæ quintæ. Quod cum iam oſtenſum ſit in 63ª præcedentis libri: iam conſtat propoſitum. ita non ſolum in quinto, ſed in quouis alio loco demonſtrabitur, quod demonſtrandum proponitur.

3 } 15. 165. 15. 195.
55

COROLLARIVM.

Hinc regula progreſſionis quadratorum ex radicibus ordinatis factorum conſtat. Quòd ſi numeri progreſſionis propoſitæ ſint ad radices ſingulis ſingulas dupli, tunc quadratorum quæſitorum ſumma, ad quadratorum radicum congeriem erit quadrupla; ſi tripli, nonupla; ſi quadrupli, ſedecupla; ſi quincupli vigecupla quincupla, & ita deinceps: nam quadratorum ratio duplex eſt ad laterum rationem.

PROPOSITIO 36ª.

Si fuerint quotlibet ab vnitate ordinatè radices: quod fit ex aggregato poſtremæ & ſequentis radicum in productum ex eiſdem, duplum ſemper eſt ad congeriem ex cubo quadrato, & triãgulo collateralibus poſtremæ: & perinde ſexcuplum pyramidis quadratæ collateralis; hoc eſt aggregati quadratorum ex radicibus ordinatis productorum. Sint, exempli gratia, quatuor ab vnitate radices, quarum vltª ſit a. eiº quadratus b. Dimidium multitudinis radicum ſit c. Radix ſequens, hoc eſt, quinta ſit d. fiatque ex b. in d. numerus e. & ex d. in c. numerus f. Palam eſt, quòd e. eſt aggregatum ex cubo ipſius a. & ex quadrato eius, hoc eſt, ex b. quandoquidem d. multiplicator eſt vnitate maior quàm a. quodq; per 28ª huius f. eſt triangulus quartus, aggregatumque quatuor radicum. Deinde g. ſit aggregatum ipſarum a. d. radicum: & h. ſit productum ex earundem a. d. multiplicatione, fiatque inde ex g. in h. numerus k. & ſic demonſtrandum erit, quòd numerus k. eſt duplum ad aggregatum ex e f. Quod ſic patet. Numerus g. conſtat ex a. & d. & ideo conſtat ex duplo ipſius a. & ex vnitate. & numerus h. conſtat ex a. & b. per nonam præcedentis libri: quoniam h. eſt parte altera longior quinti loci: Et b. eſt quartus quadratº cuius radix a. Igitur ex a. in a b. fiet e. & ex duplo ipſius a. in h.

c. 2. } f. 10.
d. 5. } e. 80.
a. 4 } b. 16.
a. 4

g. 9. } k. 180.
h. 20.

in h. fiet duplum ipſius e. Sed ex vnitate in h. fit duplum ipſius f. igitur ex aggregato dupli ipſius a. & vnitatis, hoc eſt ex g. in h. fiet duplũ totius e f. quod erat demonſtrandũ. Quòd enim productũ ex vnitate in h. hoc eſt ipſe h. ſit duplũ ipſius f. palã eſt: Nam f. fit ex c. in d. At ipſe h. fit ex a. in d. qui duplus eſt ipſius c. quoniam ſcilicet a. eſt multitudo radicum & c. dimidium talis multitudinis. Cõſtat ergo propoſitum. Sed e f. per pręmiſſam, eſt triplum aggregati quadratorum à quatuor radicibus propoſitis factorum: Ergo k. qui fit ex g. in h. ſexcuplus erit aggregati quadratorum, ſicut propoſitio concludit. Quod autem pro quatuor radicibus concluſum eſt, pro quotcunque propoſitis in infinitum demonſtrabitur.

COROLLARIVM.

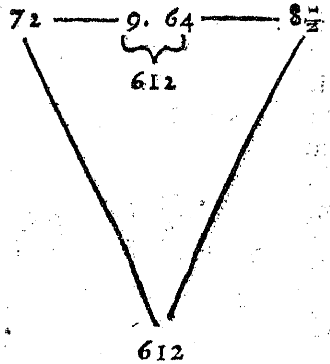
Hinc altera regula elicitur ad habendum cumulum quadratorum à quotcunque ab vnitate ordinatis radicibus factorum. Quod ſi pro radicibus proponãtur aliæ quantitates ſecundùm primæ crementum ordinatæ, tunc proportio earum ſingularum ad ſingulas radices duplicanda eſt. & ſecũdum talem proportionem adaugenda, vel diminuenda erit ſumma radicum, vt proueniat ſumma quadratorum propoſitarum quantitatum.

PROPOSITIO 37ª.

Propoſitis ab vnitate quotlibet radicibus, ſi radix proxime ſequens multiplicet aggregatum ex quadrato poſtremæ & ex dimidio ipſius poſtremæ; producetur triplum ſummæ quadratorum ipſarum radicum propoſitarum. Exempli gratia, ſunto radices octo diſpoſitæ ab vnitate ſingulę cum ſuis quadratis. Radix proxime ſequens erit 9. aggregatum ex quadraro poſtremæ, ſcilicet 64. & ex dimidio ipſius poſtremæ ſcilicet 4. erit 68. Aio igitur, quòd ſi 9. ducatur in 68. producetur triplum ſummę talium quadratorum omnium ſcilicet 612. Quod ſic patet. Per 36ª ſecundi horum arithmeticorum, ex aggregato ipſorum 8. & 9. hoc eſt poſtremæ propoſitarum, & ſequentis proxime radicis, hoc eſt ex 17. in productum earundem ſcilicet 72. fit ſexcuplum ſummæ dictorum quadratorum. Igitur ex $8\frac{1}{2}$ quod eſt dimidium dicti aggregati, in 72. fiet triplũ talis ſummæ. Sed ſicut 72. ad 9. ſic 68. ad $8\frac{1}{2}$ quare, per vigeſimam ſeptimi Elementorũ, quòd fit ex 72. in $8\frac{1}{2}$. æquale

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	$\frac{4}{68}$

612. triplum ad 204. quæ eſt ſumma quadratorum.



quod per 36ª secundi fuit triplum summæ quadratorum dictæ.

1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
15	225

$8\frac{1}{2}$ æquale erit ei, quod ex 9. in 68. Igitur ex 9. in 68. fiet triplum dictæ summæ quadratorum: quod erat demonstrandum. Quòd autem 72. ad 9. sit sicut 68. ad $8\frac{1}{2}$ patet. nam 72. ad 9. est octuplus ex diffin. multiplicationis, atque 68. ad $8\frac{1}{2}$ similiter octuplus: constat enim 68. ex duobus, scilicet 64. quadrato, & ex dimidio suæ radicis, scilicet 4. estq; 64. octuplus ad 8. suam radicem, & totuplus etiam quatuor dimidius eiusdem radicis ad $\frac{1}{2}$. Quare totum 68. ad totum $8\frac{1}{2}$ similiter octuplum. Constat ergo propositum. quod sicut de octo, ita de quotcunque propositis radicibus similiter ostendemus.

PROPOSITIO 38.

Quod fit ex aggregato quotlibet radicum ab vnitate ordinatarum in se ipsum multiplicato, æquale est aggregato omnium Cuborum à singulis radicibus factorum. Nam per diffin. aggregatum radicum ab vnitate ordinatarum, est triangulus numerus postremę radicum. Sed triangulus talis in se ductus, producit aggregatum cuborum omnium radicum vsque ad postremam inclusiue, per 58ª præcedentis libri. Igitur & aggregatum ipsum radicum in sese multiplicatum producit eorundem cuborum aggregatum. quod erat demonstrandũ.

COROLLARIVM.

Vnde manifesta fit regula progressionis cuborum. Et hìc, sicut in quadratis, notandum, quòd si pro radicibus proponantur aliæ quantitates secundum primę crementum in ordinem continuatæ: tunc proportio earum singularum, ad singulas radices triplicanda est: & secundùm talem proportionem adaugenda erit, vel minoranda summa cuborum à radicibus factorum, vt proueniat summa cuborum propositarum quantitatum.

COROLLARIVM.

Item huc spectat quidquid de pyramidibus in præcedenti libro conclusum est. Nam pyramis triangula est congeries triangulorum: quadrata, quadratorum: pentagona, pentagonorum; hexagona hexagonorum, & deinceps ab vnitate ordinatorum. Vnde totidẽ progressionũ regulæ propagãtur.

PROPO.

PROPOSITIO 39ª.

Duas propositas rationes coniungere. Sunto duę rationes, vna per duos numeros a b. & altera per duos numeros c d. significata, oportet eas coniungere: hoc est, rationem ex ipsis duabus composita inuenire. Hoc fiet per multiplicationem terminorum vnius in terminos alterius sic: Ducatur a. in c. & fiat e. Ducatur b. in d. fiat g. Dico igitur, quòd ratio e. ad g. est aggregatum rationum a. ad b. & c. ad d. hoc est, quòd ratio e. ad g. componitur ex rationem a. ad b. & ex ratione c. ad d. Quod sic ostenditur. Ex a. in d. fiat f. & tunc, quoniam a. multiplicans ipsas c d. facit ipsas e f. erit per primam sexti, sicut c. ad d. sic e. ad f. Item, quia d. multiplicans ipsas a b. producit ipsas f g. erit sicut a. ad b. sic f. ad g. Sed ratio e. ad g. componitur ex rationibus e. ad f. & ipsius f. ad g. igitur eadem ratio e. ad g. componetur ex nominibus æqualibus, scilicet a. ad b. & c. ad d. Quod erat demonstrandum.

a. 3 —— c. 5 —— e. 15
b. 2 —— d. 4 —— g. 8
f —— 12

e. c.
f. d. a
g. b

COROLLARIVM.

Non aliter tres, aut plures rationes in vnam colligentur.

PROPOSITIO 40ª.

Duarũ rationum propositarum alterã ab altera subtrahere. Sunto duæ rationes a. ad b. & c. ad d. oportet subtrahere hanc ab illa. Hoc fiet per multiplicationem terminorum ordine permutato, sic: Ducatur d. in a. & fiat e. Ducatur c. in b. & fiat f. Dico ergo, ratio e. ad f. est, quæ restat post subtractionem rationis c. ad d. à ratione ipsius a. ad b. Quod sic ostenditur. Ex c. in a. fiat g. & tunc, quia c. multiplicans ipsos a b. facit g f. erit, sicut a. ad b. sic g. ad f. & quoniam a. multiplicans ipsos c d. faciunt ipsos g e. erit sicut c. ad d. sic iam g. ad e. Sed ratio g. ad f. componitur ex ratione g. ad e. & ex ratione e. ad f. ergo ratio a. ad b. componitur ex iisdem: fuit autem sicut c. ad d. sic g. ad e. Igitur ratio a. ad b. componetur ex rationibus c. ad d. & e. ad f. Quare, ablata ratione c. ad d. à ratione a. ad b. supererit ratio e. ad f. quod erat demonstrandum.

g. 45
c 3 × a 15 — e 30
d 2 × b 8 — f 24

g. a. c
e. ... d
f. b.

PROPOSITIO 41ª.

Datam rationẽ toties, quoties quis proponat, multiplicare. Si data ratio duplicanda sit: per antepręmissam, fungatur bis

3 — 3 — 9 — 27 — 81
2 — 2 — 4 — 8 — 16

1
3 . 2
9 . 6 . 4
27 . 18 . 12 . 8
81 54 . 36 . 24 . 16.

bis ipſamet ſibi, ſi triplicāda, duplatæ iam iungatur iterum: ſi quadruplicanda, triplatę iungatur iterum : itaque deinceps. Ita enim intelligitur multiplicari ratio, vt bis, ter, quaterve continuetur in terminis. Vnde quadratorum ratio dupla : cuborum tripla ; ſecundorum quadratorum quadrupla ad laterum ſiue radicum rationem.

COROLLARIVM.

Igit' rationis duplatæ terminis vn⁹ intererit medi⁹ proportionalis: Triplatæ, duo ; Quadruplatæ, tres: itaque deinceps.

PROPOSITIO 42ª.

Datam rationem bifariā, ſiue trifariam, ſiue quadrifariā, ſiue plurifariam, vtcunque quiſpiam poſtulaverit, æqualiter partiri.

a — 1
b —— 2
c ——— 4
d ———— 8
e ————— 16

Sint datæ rationis termini a c. ſi oporteat rationem a. ad c. bifariam partiri, interponatur eis media proportionalis b. Si autem datæ rationis termini ſint a d. & oporteat ipſam trifariam diuidere; tūc interponātur eis duæ mediæ proportionales b c. Si verò datę rationis termini ſint a e. & oporteat ipſam quadrifariam partiri: tunc interponantur eis tres mediæ proportionales quantitates b c d. Cuius problematis practica executio, quamuis à nobis in Arithmeticis quæſtionibus ſit abunde tradita, hìc tamen ab exemplis non abſtinebimus. Et in primis notandum, quòd quando propoſitæ quantitates ſunt adinuicem ſicut quadrati numeri: tūc vna quantitas interiacet illis media proportionalis: quando autem, ſicut cubi numeri, tunc duæ mediæ. Quando verò ſicut quadrati quadratorum, tunc tres mediæ. Quando demum, ſicut quadrati cuborum, tūc quinque mediæ proportionales quantitates propoſitis interiacent : & in omni tali caſu tales quantitates continuè proportionales ſunt adinuicē cōmēſurabiles; quippe quæ inter ſe in ratione numerorū; vnde & rationes ipſæ tunc ſunt rationales, hoc eſt, per numeros expreſſæ, atq; ideò propoſita ratio tunc ſecatur in rationes cognitas per numeros. Si verò propoſitæ quantitates ſecus, quàm dictum eſt, ad inuicem ſe habeant : interpoſitæ proportionales mediæ rationales non erunt. Exempli gratia, proponantur mihi duo numeri 8. & 18. quibus iubeor medium proportionalem inuenire, quoniam tales numeri ſe habent adinuicem, ſicut 4. & 9. quadrati numeri, quibus interiacet medius proportionalis b. Ideo & propoſitis vnus ſimiliter medius intererit proportionalis 12. duplum ad illum medium, ſicut propoſiti ad quadratos dupli ſunt.

Exempla rationalium.

8.	4	16.	8
12.	6	24.	12
18.	9	36.	18
		54.	27
3.	1	3.	1
6.	2	6.	2
12.	4	12.	4
24.	8	24.	8
48.	16	48.	16
		96.	32
		192.	64

Item

Item ſi iubear ipſis 16. & 54. duos proportionales interponere: quoniam tales numeri ſunt ad inuicē, ſicut 8. & 27. cubi numeri, quibus interiacent duo medij proportionales; ſcilicet 12. & 18. iam ideo & propoſitis totidē medij proportionales interiacebūt ſcilicet 24. & 36. Item, ſi ipſis 3. & 48. tres medios proportionales accōmodare velim, nō minus licebit : cum ſint ſicut 1. & 16. quadrati ſecundi quibus tres 2.4.8. medij interſunt: erūtq; inter ꝓpoſitos medij 6.12.24. Adhuc, ſi his numeris 3. & 192. Iubet intercludere quinque medios proportionales poſſibile erit: quādoquidē tales ſunt in proportione ipſorum 1. & 64. qui ſunt quadrati cuborū, quibus nemo neſcit quinq; numeros intereſſe proportionales ſcilicet 2.4.8.16.32. Vnde & propoſitis intererunt totidē ſcilicet 6.12.24.48.96. Quod ſi propoſiti numeri aliter, q̄ dictū eſt, adinuicem ſe habeant, non intererunt ipſis, quos diximus, numeri proportionales: ſed quātitates irrationales. Exempli cauſa, proponantur duo numeri nullā dictarū proportionum ad inuicem ſeruantes, vtpote 2. & 3. Iā his nullatenus medij proportionales, quos diximus, intererunt; ſed quædā irrationales quantitates. Itaque ſi velim ipſis 2. & 3. mediā includere proportionalē, agā per eorū quadratos 4. & 9. quib⁹ intereſt 6. qui quadratus erit mediæ quæſitæ, quæ iam potentia tantū noteſcit. Nam ſicut tres quadrati 4.6.9. ſunt continuè proportionales, ita & eorum radices ſcilicet r.4. r.6. r.9. ſunt continuè proportionales. Si autem ijſdem numeris velim duas medias proportionales inſerere, aſſumam eorum cubos 8. & 27. quorum medij duo ſunt 12. & 18. qui cubi ſunt duarum quas quærimus mediarum: Nam radices cuborum proportionalium ſunt & proportionales. Si vero, ijſdem tres medias interponere iubear, exponam eorum ſecundos quadratos, ſcilicet 16. & 81. quorum tres numeri medij ſunt, ſcilicet 24. 36. 54. qui ſecundi quoque quadrati erunt quantitatum trium mediarum, quas quærimus : Et quoniam horum numerorum medius quadratus numerus eſt, iam media trium quantitatum non ſolum ſecundo quadrato ſed etiam primo noteſcit : eritque ipſa r. 6. Si demum, ipſis 2. & 3. quinq; medias proportionales procurem, eliciam ex ipſis quadratos cuborum, ſiue cubos quadratorū, qui ſunt 64. & 729. Quibus interponi pñt quinq; numeri ꝓportionaliter: ſ. 96. 144. 216. 324. 486. q̄ ſimiliter erūt quadrati cuborū quinq; mediarū,

Exempla Irrationalium.

r. 4.	2
r. 6.	r. 6
r. 9.	3
r. cu. 8	. . 2
r. cu. 12.	r. cu. 12
r. cu. 18	r. cu. 18
r. cu. 27	. . 3
r r. 16.	2
r r. 24.	r r. 24
r r. 36.	r. 6
r r. 54.	r r. 54
r r. 81.	. . 3
r.□.r.cu.64	 2
r.□ r.cu.96	r.□.r.cu.96
r.□.r.cu.144	r.cu.12.
r.□.r.cu.216	r.□.16.
r.□.r.cu.324	r.cu.18.
r.□.r.cu.486	r.□.r.cu.
r.□.r.cu.729	. . . 3 . .

quas

quas quærimus, quantitatum. Et quoniam horum medius habet cubam radicem, scilicet b. iam mediæ quantitas erit radix quadrata b. Item, quoniam huius medij collaterales sunt quadrati numeri, quorum radices quadratæ sunt 12.& 18. idcirco & mediæ quantitatis collaterales, erunt radices cubæ numerorum 12. & 18. Sed hæc omnia non solùm ex elementis Euclidis demõstrãtur, verumetiam in triuialibus ludis practico cuilibet sunt notissima. Quatenus tamen problematis qualitas & locus exigebat, hæc à nobis inducta sunt.

COROLLARIA.

Ex quibus quidem manifestum, quòd in quantitatibus continue proportionalibus, si prima & secunda fuerint rationales, tunc sequentes in eadem proportione continuatæ semper in infinitum rationales erunt. Si autem prima & tertia tantùm rationales fuerint tunc quinta, septima & singulis semper intermissis, sequentes rationales erunt: intermissæ verò omnes potentia tãtùm expressę. Si verò prima & quarta rationales duntaxat esse contigerit: tunc septima, et decima, et tredecima, et binis semper intermissis cæteræ sequentes rationales erunt, intermissæ autem cubo tantùm cognitæ. Adhuc, si prima et quinta solum rationales supponantur: tunc nona, tredecima, septemdecima, et ternis semper intermissis, singulæ rationales erunt. trium verò vbicunque intermissarum media quadrato tãtùm cognita, duæ cæterę mediales, hoc est, per secundum quadratum pronunciatæ. Denique si prima et septima tantùm supponantur rationales: tunc necesse erit tredecimam, vndeuicesimam, vigesimamquintam, et quinis semper intermissis singulas sequentes esse rationales. Quinque verò in quouis loco intermissarum mediam potentia tantùm esse rationalem: duas autem huic collaterales cubo tantùm pronunciabiles: duasque extremas rationalibus proximas quadrato cubi tantùm cognitas. Quæ corollaria ex ipsa proportione, ductuque quantitatum satis constat. Consyderata numerorum multitudine, quæ siue quadratis, siue cubis, siue secundis quadratis, siue quadratis cubicis proportionaliter intercidit, & ipsorum quadratorum, seu cuborum productis.

LIBRI SECVNDI PARS SECVNDA.

PROLOGOMENA.

CIRCA irrationalium quantitatum species succurrunt quædam speculationes tam ad magnitudinum Symmetriam, quàm ad praxis, & rationum pleniorẽ notitiam spectantes, olim à nobis explicatæ: quas, quoniam huic secundo libello congruæ videbantur, hìc subiunximus. Quare, vt apertius intelligatur, exordium capiemus à diffinitionibus ipsarum irrationalium magnitudinum. Deinde nõ per lineas, & areas, quemadmodum Euclides, sed sub terminis cõmensurabilium & incommensurabilium quantitatum, earum conditiones, proprietates & colligantias proponemus, ac per nostra supposita demonstrabimus. Nec facile quispiam fuisse putet, elementa huiusmodi à lineis & areis ad quantitatem in genere sumptam transferre, & numerariam simul praxim hinc deriuatam ostendere: quippe quæ sicut passim in triuialibus scholis trita, ita necubi satis fuerat demõstrata. Ordior itaque nouum demonstrandi genus, tantoq; in hac parte præstantius Euclideo, quanto generalis quantitas dignior ac purior & primaria mathematicæ, quàm linea specialis, est conuenientior. Simul per viam hanc, quam in demonstrando assumimus, multa notescent, quæ in decimo Elementorum desyderantur.

DIFFINITIONES.

Commensurabiles magnitudines dicuntur quas commu-nis mensura metitur.

Incommensurabiles verò, quarum impossibile est inueniri communem mensuram.

Commensurabiles potentia quantitates sunt, quarum potentiæ, hoc est quadrata, sunt commensurabilia.

Incommensurabiles vero potentia, quarum quadrata incommensurabilia.

Commensurabiles in secunda potentia quantitates sunt, quarum secunda quadrata sunt commensurabilia.

Incommensurabiles similiter, quarum incōmensurabilia.

Commensurabiles cubo quantitates sunt, quarum cubi commensurabiles.

Incommensurabiles verò cubo, quarum cubi incommensurabiles.

Quibus ita se habentibus, si proponatur quantitas quāpiam; erunt infinitæ quantitates illi commensurabiles, & quantitate, & potentia, & potentia secunda, & cubo.

Vocetur itaque proposita quantitas Rationalis, vnde & quadratum ipsius, & secundum quadratū, & cubus, & quæcūnque dignitates ab ea propagatę rationales erunt.

Et quantitas propositæ, siue magnitudine, siue potentia commensurabiles, rationalis vocetur.

Incommensurabilis verò, irrationalis.

Quibus ita diffinitis subiungemus singulas irrationalium diffinitiones: nam, cum

Quantitas rationalis sit, quę positę rationali commensurabilis est.

Rationalis potentia tantùm erit, cuius quadratum duntaxat rationale est. Similiter & rationalis cubo tantùm, cuius cubus tantùm rationalis est.

Medialis autem, cuius secundum quadratum duntaxat rationale est. Ex quibus diffinitionibus sequitur, vt quantitas rationalis sit etiam & potentia, & cubo, & potentia secunda rationalis: non autem è contrario. Item vt quantitas potentia rationalis sit etiam potentia secunda rationalis, non autem è contrario. Nunc diffiniemus quantitates irrationales bimembres.

Binomium constat ex duabus quantitatibus rationalibus ac potentia tantùm commensurabilibus. Quarum excessus

Apotome, vel Residum dicitur. Et necesse est, vt earum quadrata conficiant rationale: earum verò productum mediale.

Bimediale primum constat ex duabus quantitatibus medialibus potentia tantùm commensurabilibus, & rationale comprehendentibus: quarum quadrata conficiunt mediale. Harum excessus. Residuum mediale primum dicitur.

Bimediale secundum constat ex duabus quantitatibus medialibus potentia tantùm commensurabilibus & mediale comprehendentibus: quarum quadrata conficiunt mediale, quod est mediali prædicto incommensurabile. Harum excessus Residuum mediale secundum dicitur.

Maior constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus: quarum quadrata conflant rationale: & quod sub ipsis mediale. Harū verò excessus dicitur Minor.

Potens rationale ac mediale constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus, quarum quadrata cōflant mediale, & quod sub ipsis rationale. Harum excessus dicitur cum rationali mediale totum potens.

Potens duo medialia constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus, quarum quadrata conflant mediale, & quod sub ipsis mediale prædicto incommensurabile. Harum excessus dicitur cum mediali mediale totum potens. In quibus sex dffinitionibus mediale intelligitur quantitas potentia tantùm rationalis. Namque omnis area, siue omne productum potentia tantùm rationale, solet ab Euclide mediale vocari. Et linea potens talem aream, solet ab eodem linea medialis dici. Quod tamen non interturbabit propositum nostrum. Nos enim quantitatem in genere siue illa linea sit, siue area, potentia tantùm rationalem vocamus, cuius quadratum rationale. Medialem verò, cuius quadratum secundum tantùm rationale est. Sed in diffinitionibus dictarum sex irrationalium sequemur Euclidem.

Præterea tam binomium, quàm residuum habet sex species sic distinctas. Quando maior portio Binomij, seu residui, est potentior breuiore in quadrato quantitatis sibi commensurabilis: ipsum est primæ, secundæ, vel tertiæ speciei. Quando verò maior portio breuiorem potentialiter excedit in quadrato quantitatis sibi incommensurabilis, ipsum est quartæ, quintæ, vel sextæ speciei. Deinde si maior portionum fuerit rationalis quantitate binomium ſeu Reſiduum erit primæ, vel quartæ ſpeciei. Si minor portio fuerit rationalis: erit ſecundæ, vel quintæ. Si neutra portionum fuerit rationalis, erit tertiæ, vel ſextæ ſpeciei.

SCHOLIA QVÆDAM.

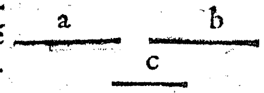
Notandum, quòd quantitatum alia eſt rationalis, Alia irrationalis. Et irrationalium, alia ſimplex, hoc eſt, unius nominis, alia bimembris. Rurſum, ſimplicium alia potentialiter tantùm rationalis: alia cubo tantùm, alia quadrato ſecundo tantum rationalis: quæ Medialis vocatur. Bimembrium autem duæ ſunt pręcipuæ ſpecies. Prima ſpecies, cuius membra ſunt potentialiter tantùm commenſurabilia. Secunda, cuius portiones ſunt etiam potentialiter incommenſurabiles. Prima ſpecies eſt triplex; & totuplex ſecunda. Illa enim continet Binomium per compoſitionem partium, & Reſiduum per exceſſum. Item Bimediale primum, cum ſuo reſiduo mediali primo. Item Bimediale ſecundum, cum ſuo reſiduo mediali ſecundo. Hæc verò ſpecies continet Maiorem, cum Minori, item Potentem rationale, & Mediale, ſuumque Reſiduum, ſcilicet cum rationali mediale potentem: Item Potentem duo medialia: ſuumque Reſiduum cum mediali mediale potentem. Præterea tam Binomium, quàm Reſiduum eſt ſex ſpecierum. Quæ ſingula iamdudum diffinita ſunt. Sed attendendum, quòd quantitas duorum nominum ſiue bimembris eſt, quæ conſtat ex duabus portionibus ita ad inuicem affectis, vt ad Vnum nomen redigi nequeant. Secus enim non erit Binominis quantitas. Vt autem portiones tales alicuius quantitatis bimembris ſint ita affectæ, vt ad vnum nomen redigi nequeant, opus erit duabus conditionibus, ſcilicet vt portiones ſint inuicem incommenſurabiles (nam portiones commenſurabiles coniunctæ conficiunt quantitatē vnius nominis & eius ſpeciei, cuius ſunt partes, vt oſtendemus) & inſuper vt congeries quadratorum ipſarum portionum ſit incommenſurabilis producto earundem: ſic enim fiet, vt talis congeries cum duplo talis producti (quod eſt quadratum propoſitæ bimembris per quartam ſecundi) minime faciat quantitatem unius nominis. Nam ſi dicta congeries dicto producto commenſurabilis eſſet; tunc congeries cum duplo dicto, hoc eſt, dictum quadratum, eſſet quantitas vnius nominis, & perinde quantitas ipſa eſſet vnius nominis: quia videlicet, radix vni nominis quadrati: quę conditiones exprimuntur in prędictis irrationalium diffinitionibus. Quoniam igitur neceſſe eſt, portiones, ex quibus bimembris quantitas, ſiue per compoſitionem, ſiue per abſciſſionem procedit, eſſe inuicem incommenſurabiles: & inſuper congeriem quadratorum earundem portionum eſſe incommenſurabilem producto ipſarum: idcirco ſex vtrinque irrationalium quantitatum ſpecies propagari oportet. Si enim portiones fuerint incommenſurabiles in magnitudine tantùm, hoc eſt, potentia ſolùm commenſurabiles, fient tres ſpecies irrationalium, ſcilicet prima, ſecunda, & tertia. Si autem portiones fuerint incommenſurabiles etiam potentialiter, fient tres reliquę ſpecies, ſcilicet quarta, quinta, & ſexta. Deinde, ſi congeries quadratorum ipſarum portionum fuerit rationalis, & productum earum mediale, fiet prima, vel quarta ſpecies. Si autem congeries medialis, & productum rationale, fiet ſecunda, vel quinta. Si verò tam congeries, quàm productum mediale, & alterutrum incommenſurabile; fiet tertia, vel ſexta ſpecies, tam ſcilicet per coniunctionem portionum, quàm per exceſſum maioris ſupra minorem.

SPECIES QVANTITATVM.

- Quantitas
  - Rationalis.
  - Irrationalis.
    - Simplex, ſcilicet rōnalis
      - Potentia tantum
      - Cubo tm̄
      - Quadrato 2. tm̄ ſcilicet medialis
    - Bimembris ex portionibus.
      - Potentia tantum cōmenſurabilibus
        - Binomium vel reſiduum, quando portionum quadratorum aggregatum rationale, productū mediale.
          - primum
          - 2um
          - 3um
          - 4um
          - 5um
          - 6um
        - Bimediale primum, vel Reſiduum mediale primum, quando portionum quadratorum aggregatum mediale productum rationale.
        - Bimediale ſecundum, vel Reſiduum mediale ſecundum, quando portionum quadratorum aggregatum mediale & productum mediale inuicem incommenſurabilia.
      - Potentialiter etiā incōmēſurabilib⁹
        - Maior, vel minor: quando partium quadratorum aggregatum rationale & productum mediale.
        - Potens rationale ac mediale, vel cum rationali mediale potens, quando partium quadratorum aggregatum mediale & productū ration ale.
        - Potens duo medialia, vel cum mediali mediale potens. qn̄ partium quadratorū aggregatū mediale, & productū mediale inuicem incommenſurabilia.

PROPOSITIO. 43ª.

Omnes duæ quantitates inuicem commenſurabiles, ſunt ſicut numerus ad numerum. Et duæ quantitates, quæ ſunt ſicut numerus ad numerum, ſunt inuicem commenſurabiles. Sunto a. & b. quātitates inuicē cōmenſurabiles: Aio, ꝙ ſunt ſicut numer⁹ ad numerū. Cū enim cōmenſurabiles ſint inuicē a b. erit p diffi. cōmenſurabiliū quātitatū, cōis earū. menſura, quæ ſit c. Itaq; a. diuidetur in aliquot partes ſingulas æquales ipſi c. Itemq́; b. diuidetur in aliquot partes ſingulas æquales ipſi c. Quare a. & b. erunt ad inuicē ſicut numeri partiū. Et hæc eſt prima pars propoſiti. Contrà, ſit a. quantitas ad b. quātitatē ſicut numerus ad numerū. aio, ꝙ a b. cōmenſurabiles inuicē ſunt. Secetur em̄ a b. ſingulæ in tot partes æquas, quot vnitates hn̄t ſinguli numeri. ſitq́; c. vna partiū quantitatis a. eritq; c. ad a. ſicut vnitas ad numerū partiū a. Sed per hypoteſim a. ad b. ſicut numer⁹ partiū a. ad numerū partiū b. Erit igitur ex æquali c. ad b. ſicut vnitas ad numerum partium b. Quare quoties vnitas menſurat numerum

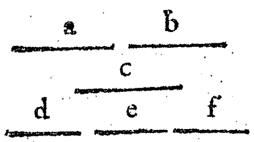


partium b.toties & c. quantitates mensurat ipsam b. Sed c. metitur ipsam a.igitur per diffin.commensurabilium quantitatum, ipsæ a b. quantitates inuicem commensurabiles. Quod fuit residuum propositi.

COROLLARIVM.

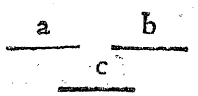
Vnde manifestum est, quòd duæ quantitates inuicem incommensurabiles non sunt adinuicem sicut numerus aliquis ad numerum aliquem. Itemque, quòd duæ magnitudines, quæ non sunt ad inuicem sicut numerus quispiam ad numerum quempiam, sunt inuicem incõmensurabiles. Sequuntur hæc ex præmissa a destructione contrariorum.

PROPOSITIO 44ª.



Omnes duæ magnitudines vni commensurabiles, sunt inuicem commensurabiles. Duæ quantitates sint a b. quæ singulæ sint ipsi c.commensurabiles. Aio, quòd & ipsę a b. sunt ad inuicem commensurabiles. Nam cum a c. sint commensurabiles erunt, per præcedentem, sicut numerus ad numerum: & similiter, quoniam c b. commensurabiles erunt, & sicut numerus ad numerum. Sumantur igitur per quartam octaui Eucl. tres numeri d e f. continuantes duas rationes scilicet, vt sicut est a. ad c. sic sit numerus d. ad numerum e. & sicut c. ad b. sic sit numerus e. ad numerum f. & tunc ex ęquali erit, sicut numerus d. ad numerum f. sic quantitas a. ad quantitatem b. Igitur per secundam partem præcedentis, quantitas a b. sunt ad inuicem commensurabiles. quod est propositum.

PROPOSITIO 45ª.



Omnes duæ quantitates, quarum vna commensurabilis est alicui tertiæ, reliqua verò eidem incommẽsurabilis, sunt adinuicem incommensurabiles. Exempli gratia, magnitudinum a b. vna scilicet a. sit commensurabilis ipsi c. reliqua verò b. incõmensurabilis eidem c. Aio tunc, quòd ipsæ a b. inuicem incommensurabiles sunt. Secus enim erunt a b. commensurabiles: sed ipsæ a c. per hyp. cõmensurabiles. igitur per pręmissam erunt b c. inuicem commensurabiles: quod est supposito contrarium. Nõ igitur sunt a b. inuicem commensurabiles. ergo incommensurabiles. quod est propositum.

PROPOSITIO 46ª.

Omnium duarum quantitatum inuicem incommensurabilium congeries & excessus sunt inter se & ipsis inuicem incommensurabiles. Et si congeries vni earum sit incommensurabilis, erit &

reliquæ

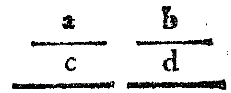
reliquæ commensurabilis. & ipsæ inter se commensurabiles. Hæ conclusiones facilè constant ex hac communi sententia: quoniam quantitas, quæ metitur partes, metitur & totũ. Et, quæ metitur totum & ablatum, metitur & relictũ.

PROPOSITIO 47ª.

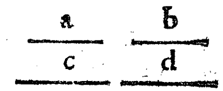
Omnium duarum quantitatum inuicem incommensurabilium congeries & excessus, sunt inter se & ipsis inuicem incommensurabiles. Et si congeries vni earum sit incommensurabilis, erit & reliquæ incommensurabilis. Et ipsæ inter se incommensurabiles. Nam si secus esset, tunc, per præcedentem, sequeretur contrariũ suppositi. Omnino igitur vera sunt quę proponuntur.

PROPOSITIO 48ª.

Omnes duæ quantitates proportionales duabus quantitatibus quoquo modo commensurabilibus, sunt eodem modo commensurabiles. Et proportionales duabus aliquo modo incommensurabilibus, sunt eodem modo incommensurabiles. Exempli gratia, sint quantitates a b. ipsis c d. quantitatibus inter se commensurabilibus proportionales: hoc est sit a. ad b. sicut c. ad d. Aio, quòd a b. erunt inuicem commensurabiles. Nam si c d. sunt commensurabiles, erunt per 43ª huius, sicut numerus ad numerum. Igitur erit a. ad b. sicut numerus ad numerum: quare per secundam partem dictæ 43ę a b. sunt inter se commensurabiles. Quòd si c d. sint commensurabiles, aio, quòd & a b. inter se incommensurabiles erunt. Nam tunc, per corollar. 43æ huius, c d. non erunt sicut numerus ad numerum, & ideo neque a. ad b. erit sicut numerus ad numerum: & perinde per secundam partem dicti corollarij a b. tunc incõmensurabiles inter se erunt sicut proponitur.



Item si c d. ponantur aut potentia tantùm, aut cubo tantũ, aut quadrato secundo tantùm commensurabiles: eodem penitus modo & ipsæ a b. commensurabiles erunt. Si autem c d. aliquo dictorum modorum ponantur incommensurabiles: eodem similiter modo & ipsę a b. incommensurabiles erunt: Quoniam scilicet quantitatum proportionalium proportionales sunt tã quadrata, quàm cubi, & quàm secunda quadrata. Et idcirco sequitur eorum commensurabilitas, vel incommensurabilitas: quippe quæ comitatur proportionem, adducta 41ª & eius corollario.



PROPOSITIO 49ª.

Omnis quantitas rationalis multiplicans aliquam quantitatem, producit quantitatem multiplicatæ cognominem & commensurabilem.

a b c
3 r.5. r.45
d e f
9 5 45

mensurabilem. Exempli gratia, rationalis quantitas a. multiplicet quantitatem b. potentia tantùm rationalem, & faciat c. Aio, quòd c. potentia tantùm rationalis est, & ipsi b. multiplicatæ commensurabilis. Sit enim ipsius a. quadratum d. & ipsius b. quadratum e. & ex d. in e. fiat f. Eritque per coroll. vndecimę huius, f. quadratum ipsius c. Cumque ex diffinitionibus, quantitatum a b. ipse d. sit numerus quadratus: ipse autem e. numerus non quadratus: iam eorum productum f. per coroll. secundæ noni Eucl. non erit numerus quadratus. Igitur c. quæ radix est ipsius f. per diffin. erit potentia tantùm rationalis. Cumque per diffin. multiplicationis, c. productū ad b. multiplicatam, sit sicut a. multiplicans ad positam: sitque a. positæ commensurabilis, quia rationalis: iam, per præcedentem, ipsa c. ipsi b. commensurabilis erit: sicut proponitur. Similiter autem, si b. cubo tantum rationalis supponatur, ostendetur & ipsa c. cubo tantum rationalis, & ipsi b. commensurabilis: & si b. quadrato secundo tantùm rationalis ponatur, & ipsa c. quadrato secundo tantum rationalis, & ipsi b. commensurabilis demonstrabitur. Sicut proponitur.

PROPOSITIO 50^{a}.

a b c

Si productum fuerit commensurabile multiplicatæ quantitati, tunc multiplicans est rationalis. Vt si a. multiplicans b. faciat c. ipsi b. commensurabilem: aio, quòd a. rationalis est: Nam per diffin. multiplicationis, erit, sicut c. ad b. sic a. ad positam. Cumque per hypo. c. sit commensurabilis ipsi b. erit per antepræmissam a. commensurabilis positæ, quare per diffin. a. rationalis: quod est propositum.

PROPOSITIO 51^{a}.

a b c

Omnis quantitas diuisa per quantitatem sibi commensurabilem, exhibet in quotiente quantitatem rationalem. Sint a b. quantitates commensurabiles inter se, & diuidatur b. per ipsam a. & proueniat c. Aio, quòd c. quantitas rationalis est. Nam, per diffin. diuisionis, erit, sicut a. diuidens ad positam, sic b. diuisa ad c. prouenientem. Et permutatim, sicut a. ad b. sic posita ad c. Sed a. per hypot. commensurabilis est ipsi b. ergo per 48^{a} præmissam, & posita commensurabilis ipsi c. Ergo c. rationalis: quod est propositum. Hoc idem ex præcedenti ostendi potest.

PRO-

PROPOSITIO 52^{a}.

a b
c d
e f
g h

Omnium duarum quantitatum inuicem commensurabilium quadrata sunt adinuicem sicut quadrati numeri: & cubi, adinuicem, sicut cubi numeri: & secunda quadrata, sicut bis quadrati numeri: Vt si sint a b. quantitates inuicem commensurabiles, quarū quadrata sint c d. cubi aūt e f. secunda autē quadrata g h. Aio, quòd c d. erunt sicut quadrati numeri adinuicem: & e f. sicut cubi numeri: & g h. sicut bis quadrati numeri. Nam, per 43^{a} huius, a b. quantitates erunt ad inuicem, sicut numerus ad numerum: sed tam in quātitatibus, quàm in numeris quadrata sunt in dupla: cubi in tripla: secunda quadrata in quadrupla ratione radicū. Igitur c d. sunt ꝑportionales quadratis talium numerorum. Et e f. proportionales cubis talium numerorum: & g h. proportionales bis quadratis talium numerorum. Et hoc est propositum.

PROPOSITIO 53^{a}.

Omnes duæ quantitates, quarum quadrata sunt adinuicem sicut quadrati numeri; vel quarum cubi sunt adinuicem sicut cubi numeri: vel quarum secunda quadrata sunt adinuicem sicut bis quadrati numeri, sunt inter se commensurabiles. Exempli gratia, sint duæ quantitates a b. quarum quadrata c d. & quarū cubi e f. & quarum secunda quadrata g h. Aio, quòd, si c d. fuerint adinuicem, sicut quadrati numeri: vel si e f. fuerint adinuicem, sicut cubi numeri; vel f. g h. fuerint adinuicem, sicut bis quadrati numeri: Tunc in omni tali casu, ipsæ a b. quantitates erunt adinuicem commensurabiles. Nam si c d. sint inter se, sicut quadrati numeri, cùm talibus numeris intersit vnus medius numerus proportionalis, intererit ipsis c d. vna media quantitas proportionalis, quæ sit k. eruntque c k d. quantitates talibus tribus numeris proportionales: cumque quadrata sint in dupla ratione radicum: erit sicut c. ad k. sicut a. ad b. Sed c. ad k. sicut numerus ad numerum: igitur a. ad b. sicut numerus ad numerum: quare per secundam partem 43^{a} huius, a b. inuicem commensurabiles: quod est propositum. Si autem e f. sint inter se sicut cubi numeri: tunc, quia talibus numeris intersunt duo numeri medij proportionales, intererunt ipsis e f. duæ mediæ quantitates proportionales, quæ sint

a . b
c. k. d
e. l. m. f
g. n. o. p. h

2 . 3
4. 6. 9
8. 12. 18. 27
16. 24. 36. 54. 81

l m. eruntque e l m f. quantitates talibus quatuor numeris proportionales. & quoniam cubi sunt in tripla proportione radicum: erit, sicut a. ad b. sic e. ad l: sed e. ad l. sicut numerus ad numerum: Igitur sicut numerus ad numerū, sic a. ad b. & ideo per secundā partem 43^{e} ab inuicem commensurabiles. Si demum g h. sint inter se, sicut bis quadrati numeri: tunc quoniam talibus numeris intererunt tres numeri medij proportionales, intererunt & ipsis g h. tres mediæ proportionales quantitates: quæ sint n o p: eruntque g n o p h. quantitates talibus quinque numeris proportionales: & quoniam secūda quadrata sunt in quadrupla ratione radicum: erit iam a. ad b. sicut g. ad n. Sed g. ad n. sicut numerus ad numerum: igitur sicut numerus ad numerum, sic a. ad b. quare per secundam partem 43^{ae} ab inuicem commensurabiles, sicut fuerat à principio demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifestū est, quòd omnium duarum quantitatum inuicem incommēsurabilium, neq; quadrata sunt adinuicē, sicut quadrati numeri: neque cubi, sicut cubi numeri, neque secunda quadrata, sicut bis quadrati numeri.

COROLLARIVM.

Contrà, & omnes duę quantitates, quarum quadrata non sunt ad inuicem, sicut quadrati numeri; vel quarum cubi non sunt ad inuicem, sicut cubi numeri: vel quarum secunda quadrata non sunt ad inuicem, sicut bis quadrati numeri; sunt inter se commensurabiles. Nam hæc duo corollaria constant ex duobus præcedentibus propositionibus, à distinctione contrariorum.

COROLLARIVM.

Præterea manifestum est, quòd quantitates inter se cōmensurabiles, sunt omnino, etiam tam quadrato, quàm cubo, quàmque secundo quadrato commensurabiles; non autem è conuerso. Nam quantitates, siue quadrato, siue cubo, siue secundo quadrato commensurabiles, non sunt omnino inter se commensurabiles.

COROLLARIVM.

Vnde sequitur, vt quantitas rationalis sit etiam potentia, & cubo, & quadrato secundo, & sic in infinitum rationalis: & non è conuerso. Nam quantitas siue potentia, siue cubo, siue quadrato secundo, rationalis non omnino est magnitudine rationalis.

COROL-

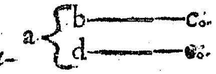
COROLLARIVM.

Contrà, quantitates inter se incommensurabiles non omnino sunt & potentia, aut cubo, aut quadrato secundo incommensurabiles. At quantitates potentia, vel cubo, vel quadrato secundo incommensurabiles omnino sunt & magnitudine inter se commensurabiles.

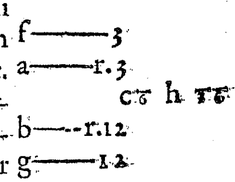
COROLLARIVM.

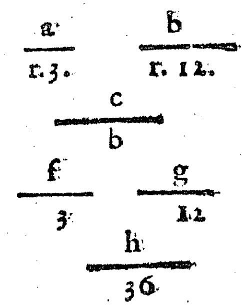
Vnde sequitur, vt quantitas irrationalis nō omnino sit & potentia, aut cubo, aut quadrato secundo irrationalis. Quantitas verò potentia, vel cubo, vel quadrato secundo irrationalis omnino sit, & magnitudine irrationalis. Quæ corollaria gradatim sequuntur alterum ex altero, vt etiam per exempla numeralium terminorum constat.

PROPOSITIO 54^{a}.

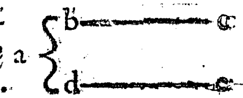


Omne productum duarum quantitatum potentia tantùm rationalium inuicem commensurabilium, est rationale. Exempli gratia, a b. quantitates potentia tantùm rationales inuicem commensurabiles multiplicatæ inuicem faciant ipsam c. Aio, quòd c. quantitas rationalis est. Sit enim ipsi a. æqualis d. & a. ducta in d. hoc est in se ipsam faciat e. quæ iam rationalis est, cum a. sit potentia rationalis per hyp. Sed per primam sexti, sicut d. ad b. sic e. ad c. commensurabilis est autem per hypo. ipsa d. ipsi b. ergo, per 48^{a} huius, ipsa e. commensurabilis erit ipsi c. Rationalis est autem e. rationalis ergo per diffin. & c. quod fuit demonstrandum. Aliter & pulchre sic. Sit ipsius a. quadratum ipsa f. & ipsius b. quadratum ipsa quantitas g. eritque per 52^{a} præcedentem f. ad g. sicut numerus quadrat⁹ ad numerum quadratum. Ducatur ergo f. in g. & proueniat h. eritque h. numerus quadratus: quandoquidem f g. per vigesimam octaui, sunt plani similes. Sed per corollariū vndecimæ huius h. est quadratum ipsius c. ergo c. rationalis, quandoquidem radix est ipsius h. quæ per numerum quadratum repræsentatur. Et radix quadrati numeri rationalis quantitas est, quia cognitus, & scitus numerus, sicut proponitur ostendendum.



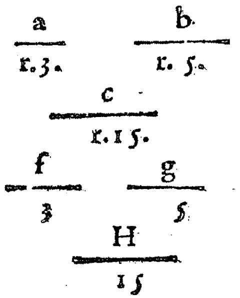


PROPOSITIO 55^{a}.



Omne productum duarum quantitatum rationalium & potētialiter tantùm inter se commensurabilium, est potentia tantùm rationale: quod tamen ab Euclide vocatur mediale. Sunto a b. quantitates rationales, hoc est ambæ potentia tantum rationales,

nales, vel vna rationalis in magnitudine, altera verò tantùm potentia, & inuicē potentialiter tm̄ cōmēsurabiles, quę inter se multiplicatæ faciant ipsam c. Aio, ꝙ c. est quãtitas potētia tm̄ rationalis. Fiant enim ea, quæ in præcedenti, eritque per eadem, sicut d. ad b. sic e. ad c. cumq; per hyp. ipsa d. ipsi b. sit potentialiter tantum cōmensurabilis: erit per 48ª huius, ipsa e. quę rationalis est, potētialiter tm̄ cōmēsurabilis ipsi c. Igitur per diffin. c. potentia tm̄ rationalis est, quod est propositum. In altera verò demonstratione, erit per coroll. 53ᵉ præcedentis, f. ad g. non sicut quadratus numerus ad quadratum numerum & : idcirco f g. per 20ª octaui non erunt adinuicem plani numeri similes. Quare, per primã noni, ipse h. ipsorum f g. productũ non erit quadratus numerus, & per inde c. ipsiꝰ h. radix potētia tm̄ rationalis est, sicut ꝓponitur.



SCHOLIVM.

Illud autem notandum, quòd præfatum productum quantitatum rationaliũ ab Euclide vocatur medialis quãtitas, siue Medialis area: quoniam gignitur ex ductu laterum, atq; ita intelligendæ sunt diffinitiones irrationalium magnitudinum, vbi de areis mentio fit. Lineam verò in talem aream potentem, hoc est, cuius quadratum est talis area, medialis dicitur.

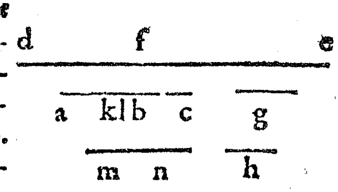
PROPOSITIO 56ª.

Membra binomij, siue residui, sunt radices duorum numerorũ, quorum maior ad excessum supra minorem se se habet sicut numerus quadratus ad numerum quadratum, fiunt tres primæ species. Si autem secus, fiunt tres reliquæ species Binomij, siue Residui. Item si maior ex numeris dictis sit quadratus, tunc fit prima vel quarta species. Si minor sit quadratus numerus, fiet secunda vel quinta: si neuter sit quadratus numerus, fiet tertia vel sexta species. Exempli gratia, 9. & 5. numeri sunt quadrati membrorum primi Binomij, siue Residui. Numeri 12. & 9. secundi. Numeri 8. & 6. tertij. Numeri 25. & 20. quarti. Numeri 14. & 9. quinti. Numeri 10. & 7. sexti. Vnde talium specierũ radices sic se habent: vt earũ diffinitiones exposcũt.

Binomium pᵘ	——— 3.	p̄ r. 5.	*Vnde per abscissionem*
Binomium 2ᵘ	——— r.12	p̄ 3.	*formantur totidem*
Binomium 3ᵘ	——— r 8	p̄ r.6.	*species residuorum.*
Binomium 4ᵘ	——— 5.	p̄ r.20	
Binomium 5ᵘ	——— r.14	p̄ 3.	
Binomium 6ᵘ	——— r.10	p̄ r.7.	

PRO-

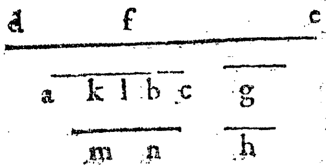
PROPOSITIO 57ª.



Singularum Binomij specierum radices, sunt speciæ singulæ irrationales quantitates per ordinem, scilicet Binomium, Bimediale primum, Bimediale secundum, Maior, Potens rationale ac mediale. & potens duo medialia. Paucis propositum demonstrabo. Esto Binomium, cuius membra a b. b c. Sit ipsius a b. quadratum d e. & ipsius b c. quadratum e f. quorum differentia f d. cuius differentiæ quarta pars sit g. & ipsius g. radix sit h. Mox secta per æqualia quantitate a b. apud k. punctum, ponatur ipsi h. æqualis k l. Post hæc, totius a k l. radix sit m. Relicti autem l b. radix sit n. Aio iam, quòd totum m n. radix est binomij a b c. Deinde ostendam, quòd si a b c. sit binomium primum, tunc m n. erit binomium. Si a b c. binomium secundum, tunc m n. erit Bimediale primum. Si a b c. binomium tertium, tunc m n. erit bimediale secundum. Si a b c. binomium quartum, tunc m n. erit maior. Si a b c. binomium quintum; tunc m n. Potens rationale ac mediale. Si demum a b c. binomium sextum, tunc m n. Potens duo medialia. Nam cùm a b. secetur æqualiter apud k. & inęqualiter apud l. iam per quintam secundi Elementorum Rectangulum a l. l b. cum quadrato k l. hoc est cum g. æqualia sunt quadrato a k. hoc est, quadranti ipsius d e. Sed quadratum ipsius k l. hoc est g. fuit quadrans ipsius d f. igitur reliquum quadrans reliqui, hoc est, rectangulum a l. l b. erit quadrans ipsius e f. Quare per coroll. vndecimæ huius, rectangulum m n. erit radix quartæ partis ipsius e f. hoc est dimidium ipsius b c. ergo duplum ipsius rectanguli m n. æquiualet totum b c. Cumque per hyp. a l. sit quadratum ipsius m. & l b. quadratum ipsius n. erunt quadratum m. quadratum n. cum duplo rectanguli m n. simul æqualia toti a c. Sed per quartam secundi; eadem simul componunt quadratum totius m n. Igitur totum m n. radix est totius a c quod erat primum ex demonstrandis. Reliquum patet ex conditionibus ipsarum specierum binomij: fit enim, vt exeunte a b c. binomio primo, tunc a l. l b. sint rationales. Exeunte autem a c. binomio secundo, vel tertio, fit, vt a l. l b. sint potentia tantùm rationales. Quare exeunte a c. binomio primo, erunt

m n.

m n. potentia rationales. Exeunte autem a c. binomio secundo, vel tertio, erunt m n. mediales: quandoquidem a l. l b. quadrata ipsarum m n. potentia tantùm rationalia. Et hoc, quoniam, per diffin. binomij primi, secundi, & tertij, radix ipsius d f. & ideo radix ipsius g. hoc est h. hoc est k l. commensurabilis est ipsi a b. & ideo ipsi a k. vel k b. ipsisque a l. l b. cumque, per primam sexti, m. ad n. sit sicut quadratum m. ad rectangulum m n. hoc est sicut a l. ad dimidium b c. Ideo tunc per quadragesimam octauam huius, constat ipsas m n. esse potentia tantùm commensurabiles. Existente autem a c. binomio quarto, quinto vel sexto, fit vt a l. l b. sint inuicem incommensurabiles: quoniam scilicet, per diffin. talium binomiorum, radix ipsius d f. & perinde radix ipsius g. hoc est ipsa h. & ipsa k l. incommensurabilis est ipsi a b. & idcirco ipsi a k. & ipsis a l. l b. quare, per quadragesimam septimam huius, ipsae a l. l b. inuicem incommensurabiles. Vnde constat ipsas m n. tunc esse potentia incommensurabiles. Item cum rectangulum m n. sit dimidium ipsius b c. atque exeunte a c. binomio primo, tertio, quarto, vel sexto ipsa b c. sit potentia tantū rationalis: ideo tunc rectangulum m n. erit mediale. Exeunte verò a c. binomio secundo, vel quinto b c. erit magnitudine rationalis: quare tunc rectangulum m n. erit rationale. Præterea cùm quadrata m n. conficiant totam a b. atque exeunte a c. binomio primo vel quarto a b. sit magnitudine rationalis: Exeunte verò a c. binomio secundo, tertio, quinto, vel sexto, a b. sit potentia tantùm rationalis. Idcirco exeunte a c. binomio primo vel quarto, quadrata m n. conficiunt rationale. Exeunte verò a c. binomio secundo, tertio, quinto, vel sexto, quadrata m n. conficiunt mediale. Ex quibus quidem, consyderatis irrationalium quantitatum diffinitionibus, cōstabit quòd exeunte a c.



Binomio	p°	m n. erit	binomium.
	2°		bimediale primum.
	3°		bimediale secundum.
	4°		Maior.
	5°		Potens rōale ac mediale.
	6°		Potens duo medialia.

Corol-

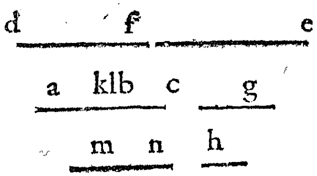
COROLLARIVM.

Hinc ergo comperiri poterunt singulæ quantitates irrationales: vt si velim, exempli gratia, comperire irrationalem quantitatem, quæ Maior vocatur, per præcedentem, inueniam quartum binomium: & per præsentem, ipsius binomij radicem, quæ, vt ostensum est, Maior erit. Et similiter per reliquas binomiorum species reliquas irrationales inueniemus.

PROPOSITIO 58a.

Sex irrationalium quantitatum, scilicet Binomij, Bimedialis primi, Bimedialis secundi, Maioris, Potentis rationale ac mediale, Potentisq; duo medialia, singularum per ordinem, singula quadrata sunt singulæ species Binomij. Hæc est conuersa præcedentis. Persistam tamen in eadem descriptione, ac suppositis. Ponaturque m n. binomium, vel aliqua ex irrationalibus prædictis. ita vt m n. sint membra ipsius irrationalis iuxta eius diffinitionem considerata: vt habeam ipsius m n. quadratum, ponam ipsius m. quadratum a l. & ipsius n. minoris membri quadratum l b. Item eius, quod fit ex m. in n. duplum ipsam b c. Eritque per quartam secundi Elementorum, tota a c. quadratum totius m n. Demonstrandum est igitur, quòd si ponatur m n. aliqua ex dictis sex quantitatibus irrationalibꝰ: erit & a c. aliqua ex speciebus binomij: & quota m n. in ordine sex irrationalium, tota & a c. in ordine specierum binomij. Namque ex conditionibus membrorum m n. componentium ipsam irrationalem, sequitur conditio membrorū a b. b c. constituentium speciem binomij. Sic existente m n. Binomiꝰ, vel Bimediali primo, vel Bimediali secundo, iam per diffin. a l. l b. quæ sunt ipsorum m n. quadrata, sunt inuicem cōmensurabiles. Vnde per 46a huius, sequitur vt k l. sit ipsis a l. l b. & toti a b. commensurabilis. Cumque h. sit radicis ipsius d f. dimidium, erit talis radix commensurabilis ipsi a b. Igitur a b. potentior quàm b c. in ipsa d f. quadrato scilicet radicis sibi commensurabilis. Existente autem m n. Maiori, Potenti rationale ac mediale, potentive duo medialia; tunc per earum diffin. a l. l b. sunt inuicem incommensurabiles: vnde per 47a huius sequitur, vt k l. sit ipsis a l. l b. & toti a b. incommensurabilis: vtque k l. hoc est h. ipsius radicis d f. dimidium, & perinde ipsa radix sit ipsi a b. incommensurabilis. Quo fit, vt a b. potentior sit, quàm b c. in ipsa d f. cuius radix est ipsi

a b.in-



ab. incōmensurabilis. Item, q͞ñ existente m n. binomio, vel Maiori, a b. est rationalis: b c. verò potentia tantùm est rationalis. Existente autem m n. Bimediali primo, vel potente rationale, & Mediale, a b. est potentia tantum rationalis, b c. verò rationalis. Existente tandem m n. Bimediali secundo, vel potente bina medialia, tam a b. quàm b c. est potētia tm̄ rationalis. Prȩterea, quoniam existēte m n. binomio, Bimediali primo, Maiori, vel potente rationale & mediale ipsarū a b. b c. altera est magnitudine, altera potentialiter tantùm rationalis. atque ideo a b. b c. sunt potentialiter tantùm cōmensurabiles. Existente autem m n. Bimediali 2° cum per primam sexti, m. ad n. sit sicut quadratū m. ad rectangulum m n. hoc est, sicut a l. ad dimidiū ipsius b c. atque m n. sint incommensurabiles. & ideo a l. & dimidium ipsius b c. sint incommensurabiles per 48ª huius: Cumq; (quoniam a l. l b. inter se commensurabiles, ideoq; tota a b. ipsi a l. commensurabilis est, iam tota a b. dimidio ipsius b c. Et ideo toti b c. per 45ª huius, sit incommensurabilis: sintq; a b. b c. potentialiter commensurabiles: q͞a potētia rationalis ex diffi. dicti Bimedialis secundi. Existente tandem m n. potente duo medialia, cum a b. b c. ex diffin. ipsius, sint incommensurabiles: ac potentialiter tantùm commensurabiles, quia scilicet, potia rationales, sicut omnia ex diffinitionibus ipsarum irrationalium constat. Propterea, consyderatis sex specierum binomij conditionibus, existente

M n	Binomio	a c erit	pū	Binomium
	Bimediali p°	a c erit	2ū	
	Bimediali 2°	a c erit	3ū	
	Maiori	a c erit	4ū	
	Potēte rationale, mediūq;	a c erit	5ū	
	Potente duo medialia	a c erit	6ū	

PROPOSITIO. 59ª.

Omne aggregatum quadratorum inæqualium excedit duplum producti radicum in quadrato differentiæ radicum. Secetur quantitas a b. per inæqualia apud c. & à maiori portione a c. abscindatur ipsi b c. æqualis c d. Atq; ita ostendendū est, quòd congeries quadratorum a c. c b. supererat duplum ipsius rectanguli a c. c b. in quadrato ipsius d a. quod à Campano in decimo Elementorum ostensum est. Per quartam secundi, quadratum a c. & quadratum c b. cum duplo rectanguli

rectanguli a c. c b. simul ęqualia sunt quadrato a b. Quod per octauam secundi, æquale, est quadrato d a. cum quadruplo rectanguli a c. c b. Auferatur vtrinque duplum rectanguli a c. c b. & supererunt quadratum a c. & quadratum c b. simul æqualia quadrato d a. & duplo rectanguli a c. c b.

Hæc autem est demonstratio.

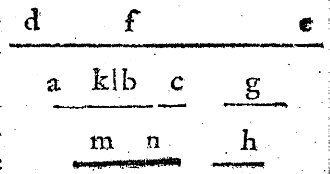
p 4ª secūdi { □. a c — □. c b — ▭ ▭ } a c. c b } simul æq̄lia sunt □to a b. Qđ p 8ª 2ⁱ æquale est { □. d a ▭ ▭ ▭ ▭ } a c. c b.

Auferatur vtrinque ▭ ▭ } a c. c b. & supererunt

□. a c, □. c b } simul æqualia — { □ d a, ▭ ▭ } a c. c b. Et hoc demōstrādū fuit

PROPOSITIO 60ª.

Singularum residui specierum radices, sunt ipsę singulæ irrationales residuales quantitates per ordinem: videlicet Residuum, Residuum mediale primum, Residuum mediale secundum, Minor, cum rationali mediale totum potens, & cum Mediali mediale totum potens. Repetam descriptionem, supposita & demonstrata 57ᵉ præcedentis. Hoc solùm mutato, vt pro aggregato membrorum a b. b c. sumatur eorundem differentia, qua valet maius membrum a b. excedit minus b c. Nam si aggregatum supponitur binomium: iam per diffin. differentia erit Residuum eiusdem speciei. Item pro aggregato portionum m n. (quod aggregatum erat radix ipsius a b c. binomij) sumatur differentia earundem m n. qua scilicet maior portio m. superat minorem n. Quæ differentia erit irrationalis quantitas residualis illius quantitatis, quam cōflabant portiones m n. per diffinitionem. Ostendam igitur, quòd sicut ipsius aggregati a b c. radix fuit ipsum aggregatum m n. ita differentiæ ipsarum a b. b c. radix erit differentia ipsarum m n. Sic, cum ipsius m. quadratum sit a l. atq; ipsius n. quadatum sit l b. iam a b. erit aggregatum duorum quadratorum inæqualium, quorum radices m n. Sed b c. fuit duplum producti talium radicum: igitur, per præcedentem, ipsa a b. excedit ipsam b c. in quadrato differentiæ earundem radicum, hoc est, differentia ipsarum a b. b c. est quadratū differentiæ ipsarum m n. Et perinde hæc differentia erit radix illius. Quamobrem per demonstrata in 57ª. præcedenti,



præcedentis, ſi illa diffetentia fuerit reſiduum primæ ſpeciei: hæc differentia erit reſiduum.

Si illa, Reſiduum 2ᵉ ſpeciei, hæc Reſiduũ mediale primũ.
Si illa, Reſiduũ 3ᵉ ſpeciei, hæc Reſiduũ mediale ſecũdũ.
Si illa, Reſiduum 4ᵉ ſpeciei: hæc irrationalis, quæ Minor.
Si illa, Reſiduum 5ᵘ, hæc cum rationali mediale potens.
Si illa, reſiduum 6ᵘ, hæc cum mediali mediale potens.
Et hoc eſt, quod demonſtrandum proponebatur.

COROLLARIVM.

Vnde manifeſtum eſt, quòd compertis per 57^a præcedentem, ſex irrationalibus quantitatibus prædictis, quę ſingulæ ex binis membris conſtant inæqualibus: Iam eorundem mẽbrorum differentiæ ſingulæ erunt Reſiduales quantitates prædictarum bimembrium. Item ſi bimẽbribus ſua ſingulis quadrata attribuantur (quæ binomia ſunt) talium binomiorum Reſidua erunt ſingula ſingularum dictarum Reſidualium quadrata.

PROPOSITIO 61^a.

Sex irrationalium quantitatum reſidualium, ſcilicet Reſidui, Reſidui medialis primi, Reſidui medialis ſecundi, Minoris, Cum rationali mediale potentis, Cum mediali mediale potentis, ſingularum per ordinem, ſingula quadrata ſunt ſingulæ ſex ſpecies Reſidui. Sicut præcedens ſequitur ex demõſtratis 59^e & 57^e Ita præſens propoſitio ſimiliter ex ijs, quę in 59^a & 58^a oſtenſa ſunt, conſtabit.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, quòd Binomij, & Reſidui habentium æqualia nomina, radices inter ſe habent etiam æqualia nomina: & è contrario, Binomium & Reſiduum, quorũ radices habent æqualia nomina, ſortiuntur etiam inter ſe nomina æqualia. Idemque de nominibus proportionalibus dicendum. Nam æqualitas nominum in quadratis, facit æqualitatem nominum in radicibus: & è contrario. Proportio verò proportionem, ſicut per proceſſum demonſtrationis $57^æ$ & 58^e conſtare poteſt. Nunc exponam hìc ſex ſpecies binomiorum, & totidem earum radices, quæ ſunt ſex irrationales quantitates.

Binomia

Binomia ſex   Quarũ radices ſunt totidẽ irrõales quantitates. ſ. bimẽbres.
Primum 7 p̃. r. 40...... Binomium r. 5. p̃. r. 2
Secundum r. 18. p̃. 4.... Bimediale primum. rr. 8. p̃. rr. 2.
Tertium r. 27. p̃. r. 24.. Bimediale ſecundum rr. 12. p̃. rr 3.
Quartum 6. p̃ r. 8...... Maior r. v. 3. p̃. r 7. p. r. v. 3. m. r 7.
Quintũ r. 32. p̃. 4...... Potens rationale & mediale r. v. r. 8. p̃ 2. p̃ r. v. r. 8. m̃. 2.
Sextum r. 24. p̃. r 8..... Potens duo medialia r. v. r 6 p̃. 2. p̃ r. v. r. 6. m̃. 2.

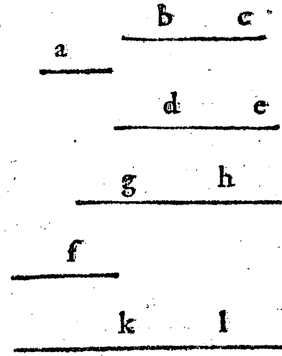
Ex quibus, per abſciſſionem minoris membri à maiore, fient tam in Binomijs, quàm in eorum radicibus, totidem Reſidua, hoc pacto.

Reſidua ſex ..... Quorum radices, totidem Reſiduales irrationales ſcilicet.
primum 7. m̃ r. 40.... Reſiduum r 5. m̃. r. 2.
Secundum r. 18 m̃. 4.. Res. mediale primum rr 8. m̃. rr. 2.
Tertium r. 27 m̃. r. 24. Reſi. mediale ſecundũ rr 12. m̃. rr 3.
Quartum 6. m̃. r 8 ... Minor r. 5. 3. p̃ r 7 m̃ r. v. 3. m̃ r 7.
Quintum r. 32. m̃. 4... Cum rationali mediale potens. r. v. r. 8. p̃ 2. m̃ r. v. r. 8. m̃. 2.
Sextum r. 24. m̃. r. 8... Cum mediali mediale potens. r. v. r. 6. p̃ 2. m̃. r. v. r. 6. m̃. 2.

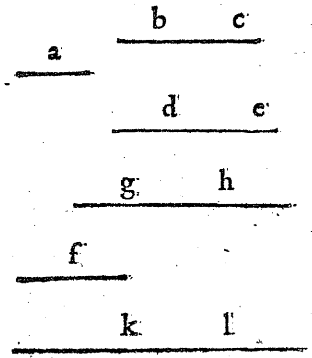
Sic habes exempla practica eorum, quæ demonſtrata ſunt.

PROPOSITIO 62^a.

Omnis quantitas rationalis multiplicans Binomium per Reſiduum, producit etiam Binomium vel Reſiduum eiuſdem ſpeciei, ac multiplicato commenſurabile. Rationalis quantitas a. multiplicet Binomiũ b c. & producat quãtitatem d e. aio, q. d. e. Binomiũ eſt ipſi b c. binomio cõmẽſurabile, & eiuſdẽ ſpeciei. Vt ſi, exẽpli gratia, b c. ſit binomiũ primũ: tũc d e. erit binomiũ pᵘ. Sint enim ipſius b c. binomij mẽbra b c. & ex a. in b. fiat d. ex a. in c. fiat e. Sic enim, per primam ſecũdi, erit d e. totũ, quod fit ex a in b c. Itaque cùm b c. ſit binomium primum, erit per diffin. b. maius membrum rationale atque c. reliquum potẽtialiter tantùm rationale: Cumq; a. rationalis in ſingulas b c. quantitates faciat ſingulas d e. iã per 49^a huius, ipſa d. erit rationalis, & ipſa e. potentia tantũm rationalis: & totum d e. toti b c. commenſurabile. Item ſit ipſius a. quadratum f. quod rationale erit: atque ipſarum b c. quadrata ſint g h. Mox f. multiplicans ipſas g h. producat ipſas k l. eruntq; per coroll. vndecimæ huius, k l. quadrata ipſarũ d e. Cumq; per primam ſexti, ſit ſicut g. ad h. ſic k. ad l. erit euerſim ſicut g. ad exceſſum, quo excedit ipſam h. ſic etiam k. ad exceſſum, quo excedit ipſam l. Verùm g. ad ſuum exceſſum eſt ſicut numerus quadratus ad numerum quadratũ, p 52^a huius: quoniã per diffinitionẽ primi binomij, b. portio excedit c. portionem potentialiter, exceſſu, cuius radix eſt commenſurabilis ipſi b. Qui exceſſus eſt differentia ipſarum g h. & perinde talis exceſſus ſe habet ad g. ſicut numerus quadratus ad numerum quadratum per 52^a. Igitur k. ad ſuũ exceſſũ ſe habebit ſicut nũs quadratus ad numerũ quadratũ.



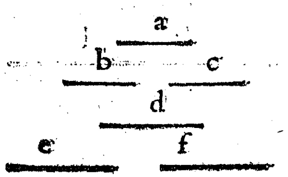
Quare



Quare per 53^a ipsa d. potentior erit quàm e. excessu, cui⁹ radix est commensurabilis ipsi d. Cũ ipsarũ d e. potentiæ sint k l. Itaque per diffinitionem totum d e. binomium primum est, ipsi iã b c. cõmensurabile, quod erat demonstrandũ. Similiter pro binomio secundo, & pro tertio procedemus. Et pro quarto & quinto & sexto ostendemus, quòd maior portio potentior est minori in quadrato radicis sibi incõmensurabilis: syllogizãtes per p^a sexti, & per portionẽ versam. Sed per 52^a & 53^a adducemus duo corollaria sequẽtia, quæ agũt de incõmensurabilibus: quandoquidẽ, in 4° & 5° & 6°, binomijs, maior portio potentior est minori in quadrato radicis sibi incõmensurabilis. Itẽ pro tertio & sexto binomijs, in quibus portiones sunt potentia tm̃ rationales, ad ostendendã portionũ ipsarum incõmensurabilitatem, citabimus 48^a huius. Similiter, si a. rationalis multiplicet Residuum, cuius membra sunt b c. ac producat d e. ostendemus ꝙ d e. est residuum ipsi b c. commensurabile, eiusdem speciei. Quod enim demonstratur de membris binomij, demonstratur de membris correllatiui residui: quandoquidem in diffinitionibus sortiunt easdem conditiones. Recte igitur idem de vtroque proponitur demonstrandum.

PROPOSITIO 63^a.

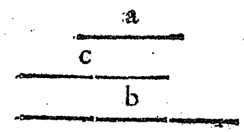
Omnis quantitas Rationalis multiplicans quamlibet irrationalium quantitatum, siue bimembrem, siue eius corellatiuã residualem, producit eiusdem generis irrationalem, ac multiplicatæ commensurabilem. Hæc est generalior præmissa: ibi enim de Binomio, ac residuo: hic vero de qualibet duodecim irrationalium agitur. Itaque sit exempli gratia, rationalis a. quæ multiplicet b. bimediale secundum, & producat c. Aio, ꝙ c. est Bimediale secundum & ipsi b. commensurabile. Sit enim ipsius a. quadrato d. quod rationale erit, atque ipsius b. quadratum sit e. quod, per quinquagesimam octauam huius, erit Binomium tertiũ: Deinde d. multiplicans e. faciat ipsam f. eritq; f. per præcedentẽ, binomiũ tertiũ. Sed per corollariũ. 11^e huius f. quadratum est ipsius c. ergo per 57^a huius c. radix ipsius f. binomij tertij, erit bimediale secundum, qđ fuit propositum. Eadem penitus argumentatione vteris pro reliquis irrationalium generibus, tam bimembribus, quàm residualibus. Sed in residualibus, pro quinquagesima octaua, & 57 citabis sexagesimam primam, & sexagesimam, quę de residuis loquuntur: itaque constat veritas propositionis.



PRO-

PROPOSITIO 64^a.

Omnis quantitas commensurabilis cuipiam ex irrationalium ordine, est eiusdem generis irrationalis. Et habet eidem proportionalia & commensurabilia nomina. Esto à quantitas, quæpiam, vel potentia tantùm rationalis, vel medialis, vel bimẽbris, siue residualis: ipsiq; a. commensurabilis esto b. Aio, quòd b. est eiusdem generis irrationalis, cuius a. Diuidatur enim b. in ipsam a. & proueniat c. eritque per 51^a huius c. rationalis. Cùm verò quotiẽs in diuisorem producat diuisum, iam c. multiplicans a. facit ipsam b. Rationalis autem c: Igitur per 49^a huius, si a. sit vnimembris quantitas, si bimembris, vel residualis, per præcedentem, erit b. eiusdem generis, cuius a. & eidem commensurabilis: quod est propositum. Quòd autem b. habeat nomina proportionalia & cõmensurabilia nominibus ipsius a. constabit, si qua secatur a. eadem rõne in mẽbra secetur & b. qđ erat propositionis reliquũ.



PROPOSITIO 65^a.

Omnis quantitas irrationalis diuisa per quamuis rationalem, exhibet in quotiente quantitatem sibi cognominem & commensurabilem. Exempli gratia, b. quantitas irrationalis, siue vnimembris, siue bimembris, siue residualis, diuidatur per c. rationalem, & proueniat a. Dico, quòd a. est eiusdem generis, cuius b. & ipsi commensurabilis. Nam cùm diuisor in quotiẽtem producat diuisum: iam c. in a. ducta, faciet ipsam b. Ducatur igitur c. in ipsam d. sibi æqualem, & producat ipsam e. eritque e. rationalis: & per primam sexti, sicut d ad a. sic e. ad b. Et permutatim, sicut d. ad e. sic a. ad b. Commensurabilis autem est d. ipsi e. quoniam vtraque rationalis. Igitur per 48^a huius, & a. commensurabilis ipsi b. quare, per precedentem, erit & a. eiusdem generis, cuius ipsa b. supponebatur. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO 66^a.

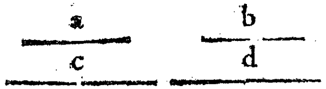
Omnes duæ quantitates inuicem commensurabiles coniunctæ, conficiunt eiusdem generis quantitatem & sibi commensurabilẽ. Sunto a b. quantitates inuicem commensurabiles: Aio, quòd totum a b. erit quantitas eiusdem generis, & vtrique ipsarum a b. commensurabilis. Quòd enim a b. totum ipsis a b. singulis est commensurabile, constat, per quadragesimam sextam huius. Quòd autem eiusdem generis cum ipsis. constat per pręmissam sexagesimam quartam: constat ergo totum propositum.

Ff 2 COROL-

COROLLARIVM.

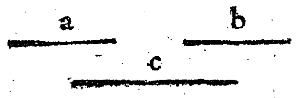
Vnde manifestum est, quòd aggregatum ex quotcunque quantitatibus inuicem commensurabilibus, est singulis partibus commensurabile & eiusdem generis cum eisdem.

PROPOSITIO 67ª.



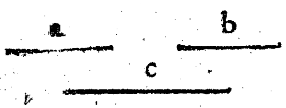
Omnis quantitas potentialiter commensurabilis alicui ex irrationalibus, est eiusdem generis quantitas. Sit exempli gratia, quantitas a. bimediale secundum: sitq; ipsi a. potentialiter commensurabilis ipsa b. Aio, quòd b. est etiam bimediale secundum. Sunto enim quadrata ipsius a. ipsa c. atque ipsius b. ipsa d. Eritque, per 58ª huius, c. binomium tertium: commensurabilis autem est per hyp. ipsi c. ipsa d. Igitur per 64ª huius d. binomium tertium est. Sed ipsius d. radix ipsa b. est. Ergo, per 57ª b. bimediale secundum erit. quod fuit demonstrandum. Similiter in cæteris irrationalibus, tam bimembribus, quàm residualibus constabit propositum.

PROPOSITIO 68ª.



Omnis quantitas potentia rationalis multiplicans aliquam ex irrationalibus, producit eiusdem generis quantitatem. Exempli gratia, a. quantitas potentia rationalis multiplicet b. bimediale secundum, & producat c. Aio, quòd c. est bimediale secundum. Nam, per diffi. multiplicationis, sicut est a. multiplicans ad positam rationalem, sic c. productum ad b. multiplicatam. Sed a. potentialiter commensurabilis est positæ rationali per hyp. igitur per 48ª huius & c. ipsi b. potentialiter commensurabilis est. Cumq; b. sit bimediale secundum, erit, per præcedentem, & c. bimediale secundum. quod fuit ostendendum. Non aliter in singulis cæteris vtriusque ordinis irrationalibus constat propositum.

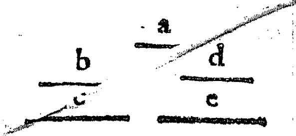
PROPOSITIO 69ª.



Omnis quantitas irrationalis diuisa in quantitatem potentia rationalem, exhibet in quotiente quantitatem sibi cognominem. Exempli gratia, quantitas a. potẽtia tm̃ rationalis, diuidat b. bimediale primum, & proueniat c. aio, ꝙ c. est bimediale primum. Nam per diffin. diuisionis, sicut est diuisor ad positam rationalem, sic est b. diuisa, ad c. quotientem. Sed a. potentialiter commensurabilis est positæ rationali per hypotesim: ergo & b. potentialiter commensurabilis est

est ipsi c. per 48ª huius. Sed b. bimediale primum. Igitur vt c. bimediale primum per 66ª præmissam. quod fuit ostendendum. Et eodem syllogismo per singula irrationalium genera repetito, constat propositum.

PROPOSITIO 70ª.



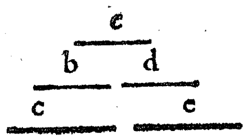
Duæ quantitates bimembres eiusdem generis inuicem commensurabiles, per ordinem sex irrationalium sumptæ, inter se multiplicatæ, producunt singulas binomij species. Quod 58ª propositio de quadrato, hæc de producto irrationalium concludit. Sunto, exempli gratia, a b. singulæ quantitates bimedialia secunda, inuicem commensurabilia. Quarum productum sit c. aio, quòd c. est binomium tertium. Sit enim ipsi æqualis quantitas d. & ex a. in d. fiat e. Eritq; e. quadratum ipsius a. & perinde binomium tertiũ per 58ª huius. Et quoniam, per primam sexti, sicut b. ad d. sic c. ad e. & ipsa b. ipsi d. per hyp. commensurabilis est. idcirco, per 48ª huius, & c. ipsi e. commensurabilis erit: Sed e. binomium tertium: ergo, per 64ª & c. binomium tertium est. quod fuit demonstrandum. Quòd si a b. ponantur binomia commensurabilia, erit e. binomiũ primũ. Si autem a b. bimedialia prima commensurabilia: hinc e. binomium secundum. Si maiores, binomiũ quartum. Si potentes rationale ac mediale, binomiũ quintum: si potentes duo medialia, binomium sextum esse demonstrabitur: sicut propositio concludit.

PROPOSITIO 71ª.

Duæ quantitates residuales eiusdem generis inuicem commensurabiles, per ordinem sex generum sumptæ, inter se multiplicatæ, producunt singulas residui species. Quod 61ª propositio de quadrato, hæc præsens de producto residualium concludit. Itaque sicut præcedens ostensa est per 58ª & 48ª & 64ª: ita præsens propositio per 61ª 48ª & 64ª eodem processu & descriptione demonstrabit.

PROPOSITIO 72ª.

Duæ quantitates bimembres eiusdem generis potentialiter inuicem commensurabiles, inter se multiplicatæ, producunt binomia. Exempli gratia, sunto a. & b. bimedialia secunda potentialiter inter se commensurabilia, & ex a. in b. fiat c. aio, quòd c. binomium est. Ponatur enim d. ipsi æqualis, & ex a.



in d. fiat e. quod per 58ª erit binomium. Verùm per primam sexti, sicut b. ad d. sic c. ad e. & b. commensurabilis potentialiter ipsi d. igitur, per 48ª & c. commensurabilis potentialiter ipsi e. Sed e. binomium: ergo, per 67ª huius, c. binomium erit: quod fuit ostendendum. Similiter siue a b. sint binomia, siue bimedialia prima, siue ex tribus generibus reliquis esse supponantur, semper c. binomium demonstrabitur.

PROPOSITIO 73ª.

Duæ quantitates residuales eiusdem generis inuicem potentia commensurabiles, inter se multiplicatæ, residuum producunt. Exempli gratia, a. & b. residua medialia secunda inuicem potentialiter commensurabilia: & ex a. in b. fiat c. Aio, ꝙ c. residuum est. Ostenditur hęc omnino sicut præcedens: hoc excepto, quòd pro 58ª, citanda est 61ª, quippe quæ de residualibus agit.

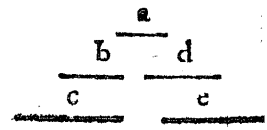
PROPOSITIO 74ª.

Omne binomium in Residuum eorundem nominum multiplicatum, producit quantitatem rationalem. Esto binomium, cuius maius membrum a b. minus vero b c. Mox ipsi c b. æqualis esto b d. eritque ad residuum eorundem nominum, hoc est excessus eorundem membrorum. Itaque ostendendum est, quòd si c a. binomium multiplicetur in a d. producetur quantitas rationalis. Cum enim a c. sit aggregatum quantitatum duarum a b. b c. atque a d. sit differentia earundem, constatque per quintam secundi Elementorum, quòd ex ductu aggregati radicum in differentiam eorum producatur differentia quadratorum: Iam illud, quòd fuit ex a c. in ipsam a d. erit excessus, quo □. ipsius a b. excedit quadratum ipsius b c. Verùm, per diffin. binomij huiusmodi quadrata rationalia sunt; igitur talis excessus rationalis est. Quare rationale est, quod fit ex a c. in a d. quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 75ª.

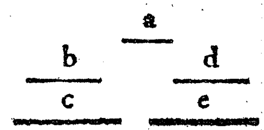
Omne binomium in Residuum proportionalium & commensurabilium nominum multiplicatum, producit quantitatem rationalem. Sunto duo binomia & residuum a. & b. quorum nomina maius maiori, & minus minori proportionalia

sint



sint & cõmensurabilia, & ex ductu a. in b. fiat c. Aio, quòd c. rationale est. Ponatur ipsi binomio æqualia nomina habens d. residuum: & ex a. in d. fiat e. quòd per præcedentem erit rationale. Cum autem b d. sicut residua proportionalium & commensurabilium nominum, erunt b d. inter se commensurebilia: sed per primam sexti, sicut b. ad d. sic c. ad e. Igitur per quadragesimam octauam huius, c. commensurabilia ipsi e. Cùmque e. sit rationalis, erit & c. rationalis. Sicut demonstrandum fuit.

PROPOSITIO 76ª.



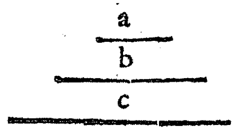
Si Binomium multiplicans aliquam quantitatem, produxerit quantitatem rationalem: multiplicata quantitas residuum est, cuius nomina proportionalia, & commensurabilia sunt binomij nominibus. Binomium a. multiplicet b. quantitatem, & producat c. rationalem. Aio, quòd b. Residuum, est cuius nomina proportionalia sunt & commensurabilia ipsius a. binomij nominibus. Ponantur enim d. Residuum eorundem nominum, siue commensurabilium, & proportionalium cum nominibus a. binomij. & ex a. in d. fiat e. eritque per præcedentem, vel ante præmissam ipsa e. Rationalis. Sed per primam sexti, sicut c. ad e. sic c. ad d. commensurabilis: est autem c. ipsi e. quia sunt rationales. Ergo per quadragesimam octauam huius, b. commensurabilis ipsi d. Fuit autem d. residuum: igitur per 64ª & b. residuum & commensurabilium nominum ipsi d. Sed nomina ipsius d. commensurabilia nominibus ipsius a. binomij, & proportionalia: itaq; & ipsius b. residui erunt eisdem commensurabilia & proportionalia: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 77ª.

Si Residuum multiplicans aliquam quantitatem fecerit quantitatem rationalem, multiplicata quantitas binomium est, cuius nomina proportionalia sunt, & commensurabilia residui nominibus. Hæc in eadem omnino descriptione, & eodem processu demonstratur: Hoc excepto, quòd vbi ponebatur binomium, ponatur residuum, & è contrario.

PROPOSITIO 78ª.

Omnis rationalis quantitas diuisa in binomium, exhibet in quotiente residuum, cuius nomina commensurabilia sunt, & proportionalia ipsius binomij nominibus. Exempli gratia, rationalis quantitas c. diuidatur per a. binomium, & proueniat b. Aio, quòd b. residuum est, cuius nomina commensurabilia sunt & proportionalia ipsius a. binomij nominibus. Nam cùm diuisor a. in quotientem b. producat diuisam c. sitque binomium, & c. rationalis: iam, per 76ª præcedentem, b. residuum erit nominum commensurabilium & proportionalium ipsius a. binomij nominibus. quod est propositum.

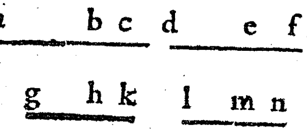


PROPOSITIO 79ª.

Omnis rationalis quantitas diuisa in residuum, exhibet in quotiente binomium, cuius nomina incommensurabilia sunt & proportionalia ipsius residui nominibus. Sicut præcedens per 76ª præmissam, ita præsens per 77ª demonstratur.

PROPOSITIO 80ª.

Binomia, quarum radices habent inuicem proportionalia & commensurabilia nomina, sortiuntur quoque proportionalia inter se & commensurabilia nomina. Sint, exempli gratia, a b c. d e f. binomia tertia, quorum maiora membra a b. d e. minora verò b c. e f. deinde sumantur horum binomiorum radices. sitq; ipsi⁹ a b c. radix g h k & ipsius d e f. radix l m n. per 57ª huius eruntque per eandem g h k. l m n. bimedialia secunda: Sint ergo talium bimedialium membra, maiora quidem g h. l m. minora verò h k. m n. Et supponatur vt g h. ipsi l m. Atque h k. ipsi m n. comparatum, proportionalia sint & commensurabilia. Dico hinc, quòd & binomiorum a b c. d e f. ipsum membrum a b. ipsi d e. atque ipsum b c. ipsi e f. comparatum, proportionalia sunt & commensurabilia; quod sic ostenditur. Quoniam quantitas g k. l n. habent membra commensurabilia, & proportionalia, maius maiori, & minus minori, erunt coniunctim & totum toti proportionalia, & per quadragesimam octauam huius, commensurabilia. Igitur, per quinquagesimam secundam huius, ipsorum g h. l n. quadrata, scilicet, a c. d f. erunt sicut numerus quadratus ad numerum quadratum inter se, & ideo commensurabilia: & idcirco per sexagesimam



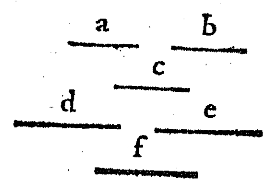
gesimamquartam huius, habebunt membra inuicem proportionalia & commensurabilia, scilicet a b. ipsi d e. atque b c. ipsi e f. quod est propositum. Similiter in cęteris binomiis, & eorum radicibus constabit id, quòd demonstrandum proponitur.

PROPOSITIO 81ª.

Residua, quorum radices habent inuicem proportionalia & commensurabilia nomina, sortiuntur etiam proportionalia inter se et commensurabilia nomina. Quod in præcedenti de binomijs eorumque radicibus, quæ sunt bimembres quantitates, ostensum fuit: hic similiter penitus demonstrabitur de residuis, eorumque radicibus, quæ sunt Residuales quantitates. Quandoquidem eadem sunt Residualium, quæ Bimembrium nomina; quæ coniuncta, bimembres; ablata verò minus à maiori residuales quantitates faciunt.

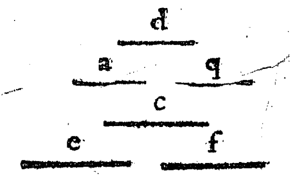
PROPOSITIO 82ª.

Omnis irrationalis bimembris quantitas multiplicans residualem quantitatem eorundem, siue proportionalium & commensurabilium nominum, producit quantitatem potentialiter rationalem, & quandoque rationalem. Sunto, gratia exempli, a. binomiale secundum: & b. residuum mediale secundum eorundem, siue proportionalium & commensurabilium inuicem membrorum: multiplicet autem a. ipsum b. & producat c. Aio, quòd c. est potentialiter rationalis, siue quandoque simpliciter rationalis. Quod sic patet. Sit ipsius a. quadratum d. & ipsius b. quadratum e. Eritque per 58ª huius, d. binomium tertium: atque e. residuum tertium per 61ª fiat: ergo ex d. in e. quantitas f. Et quoniam a. b. habent per hyp. proportionalia & commensurabilia inuicem nomina: iam eorum quadrata d e. per precedentem & antepræmissam habebunt inter se proportionalia & commensurabilia nomina. Quamobrem, per 74ª, vel 75ª huius, d. binomium multiplicans e. binomium, producit quantitatem rationalem. Igitur f. rationalis est, & ideo c. quæ per corollarium 11ª. huius, est radix ipsius f. potentialiter rationalis est. Et si f. fuerit quadratus numerus, tunc & magnitudine rationalis erit. quod fuit demonstrandum. Similiter idipsum



sum de quauis bimembri quantitate, suaque residuali ostendetur sicut propoponitur.

PROPOSIDIO 83ª.



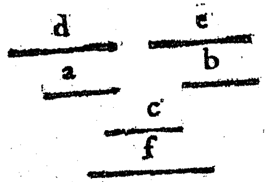
Si binomium secetur per Residuum proportionalium & commensurabilium nominum, proueniet ex diuisione Binomium primum. Esto a. residuum. b verò binomium: quorum nomina nominibus proportionalia & commensurabilia, maius maiori, & minus minori. Secetur autem b. in ipsum a. & proueniat c. Aio, quòd c. binomium primum erit. Ponatur enim d. binomium, cuius nomina ipsius a. residui nominibus, singula singulis sint æqualia: & ex d. in a. proueniat e. eritque per septuagesimamquartam harum, e. rationalis. Item ex d. in b. fiat f. eritque, per septuagesimã præmissam f. binomium primum: quandoquidem d b. sunt binomia inuicem commensurabilia. Cumque per primam sexti, sicut a. ad b. sic e. ad f. Iam idcirco, si secetur f. in e. proueniat c. quæ proueniebat ex diuisione ipsius b. in a. Verum e. rationalis fuit, atque f. binomium primum: igitur & per sexagesimamquintam huius, binomium primum erit. q. erat demonstrandum.

PROPOSITIO 84ª.

Si residuum secetur per binomium proportionalium & commensurabilium nominum, proueniet ex diuisione residuum primum. Hæc præmissa ostenditur similiter per eadem, sicut premissa: sed vbi in premissa ponitur residuum, hìc ponatur binomium, & è contrario: & pro 70ª citetur 71ª, quæ loquitur de residualibus. Quibus exceptis descriptio est eadem.

PROPOSITIO 85ª.

Si quælibet bimembris quantitas secetur per residualem quantitatem proportionalium & commensurabilium nominum, proueniat ex diuisione tali Binomium. Exempli gratia, sit a. Residuũ mediale secundum atque b. bimediale secundum proportionalium inuicem, & commensurabilium membrorum. Deinde secetur b. in ipsum a. & proueniat c. Aio, quòd c. binomiũ erit. Sunto enim ipsorum a b. quadrata d e. eritque per 61ª d. residuũ tertiũ, & per 58ª e. binomium tertiũ: per 80ª & 81am premissa proportionalium & commensurabilium nominum



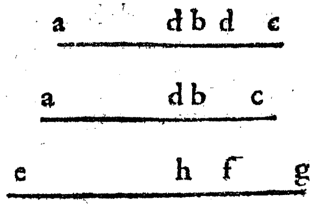
Itaque secetur e. in d. & proueniat f. eritque per ante-

antepremissam f. binomium primum. Sed per corollar. 11ª huius, ipsius f. radix est c. igitur per 57ª huius c. binomium est, quod est propositum. similiter, si a. quæcunque residualis, & b. eius bimembris quantitas proportionalium & commensurabilium membrorum supponatur, semper c. binomium erit. Sicut demonstrandum proponitur.

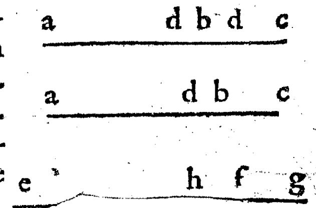
PROPOSITIO 86ª.

Si qualibet residualis quantitas secetur per bimembrem quantitatem proportionalium & commensurabilium nominum: proueniet ex diuisione tali residuum. Ostendetur hæc non aliter, quàm præcedens. Sed vbi in præmissa proponitur residualis quantitas, hìc ponatur bimembris, & è contrario: & pro 82ª & 57ª citandæ sint, 83ª & 60ª, & descriptio maneat eadem.

PROPOSITIO 87ª.



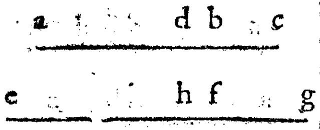
Impossibile est, binomium alibi, quàm in suo puncto diuidi, seruata membrorum diffinitione. Esto binomium constans ex membris a b. maiori, b c. minori, vt diffinitio exigit. Aio, q̃ impossibile est ipsum a c. binomium alibi, quàm in puncto b. secari, vtpote in puncto d. ita vt a d. d c. membra sint rationalia & potentialiter tantum commensurabilia. Quod sic constat. Sit binomium a c. primum, secundum, quartum, vel quintum: in quo vna portionum a b. b c. rationalis est: & tunc, si punctum d. fuerit in portione rationali, erit iam portio a d. rationalis: sed d c. bimembris, nam constabit ex d b. rationali, & b c. potentialiter tantum rationali: non igitur erit d c. potentia rationalis, vt postulat binomij diffi. Si verò punctum d. fuerit in portione b c. potentia tantum rationali: cogetur aduersarius facere ipsam a d. rationalem: Vnde b d. rationalis erit, cùm a b. sit per hyp. rationalis. Sed b c. potentia tantùm retionalis: ergo d c. residuum, & nequaquam potentia rationalis. Hoc autem pro binomiis primo ac quarto, in quibus portio maior a b. rationalis supponitur. Pro secundo aũt ac 5º in quibus b c. portio minor rationalis supponitur transferes syllogismum. Pro tertio autem & sexto binomijs, in quibus vtraque portio potentialiter tantum rationalis est, sic procedam.



Ponatur

Ponantur membrorum a b. bc. quadrata ſimul ſumpta conficere quantitatem e f. duplum autem eius, quod fit ex a b. in b c. ſit quantitas f g. Vnde per quartam ſecundi Elementorum, totum e g. erit quadratum ipſius a c. vnde, cum a c. ſit binomium, erit, per 58ª huius, e g. binomium primũ. Itaque ſi a b c. binomium ſuſcipit in alio, quàm b. puncto, vt in d. diuiſionem: tunc aggregatum quadratorum a d. d c. ſit e h. eritque reliquum h g. duplum eius, quod ex a d. in d c. Cumque ex demonſtratione 58ª huius, e h. h g. ſint membra ipſis e g. binomij: ſequetur, vt ipſum e g. binomium primum ſecetur in alio, quàm f. puncto: quod dudum impoſſibile oſtenſum fuit. Quæ demonſtratio non ſolùm pro tertio, & ſexto, ſed etiam pro cęteris inſeruit binomijs.

PROPOSITIO 88ª.

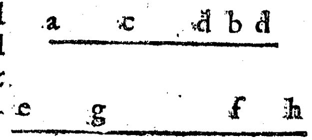


Impoſſibile eſt, quamlibet cæterarum quinque bimembrium quantitatem alibi quàm in ſuo termino diſtingui, ſeruata diffinitione. Quod de binomio præmiſſa concludit, hoc præſens de bimediali primo, ſecundo, cæteriſque tribus irrationalibus proponit. Sit in exemplum a b c, bimediale ſecundum: cuius maius membrum a b. minus autem b c. Aio, quòd impoſſibile eſt ipſum a c. bimediale ſecundum, alibi quàm in puncto b. vt pote in puncto d. ita ſecari, vt a d. d c. portiones ſint eiuſdem diffinitionis, cuius erant ipſæ a b. b c. Quod ſic conſtat. Ponatur ipſius a b c. bimedialis ſecundi quadratum e f g. ita, vt e f. ſit cumulus ex quadratis a b. b c. & f g. duplũ producti ex a b. in b c. eritque ex demonſtratione 58ᵉ huius, e g. binomium tertium, cuius membra e f. f g. Quòd ſi a b c. bimediale ſecundum alibi quàm in b. puncto, vt in d. patitur diuiſionem: tunc per 57ª ponetur aggregatum ex quadratis a d. d c. ipſum e h. & reſiduum f g. duplum eius, quod ex a b. in b c. ita vt ipſum e g. binomium tertium alibi, quàm in f. puncto in membra ſuæ diffinitionis diſtinguatur, quod, per præcedentem, eſt impoſſibile. Et perinde impoſſibile erit ipſum a b c. bimediale ſecundum alibi quàm in b. puncto diſtingui. quod fuit propoſitum. Quod & de reliquis reſidualibus ſimiliter conſtabit.

PROPO-

PROPOSITIO 89ª.

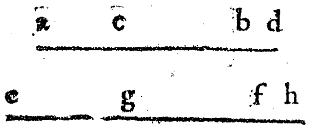
Impoſſibile eſt reſiduum eſſe exceſſum aliorum, quàm ſuorum membrorum, ſeruata eius diffinitione. Sunto reſidui mẽbra, maius quidem a b. minus verò b c. ita vt eorum exceſſus c a. ſit ipſum reſiduum. Aio igitur, quòd a c. non poteſt eſſe exceſſus aliorum membrorum quàm a b. b c. ita vt membra talia ſint rationalia, & potentialiter commenſurabilia. Sint enim, ſi poſſibile eſt, talia membra a d. d c. vt eorum exceſſus; ſit dictum a c. reſiduum. Et tunc ſi maius membrum a d. ſit rationale, ſicut in primo, vel quarto reſiduo, cum & a d. vt ſupponitur, rationale ſit; erit eorum differentia b d. rationalis: verùm b c. potentia tantùm rationalis per diffinitionẽ binomij primi vel quarti. Igitur d c. binomium eſt, non autem potentia rationalis, quod eſt ſuppoſito contrarium. Aſtruitur ergo propoſitum. Quòd ſi minus membrum b c. ſit rationalis, vt in ſecundo, & quinto reſiduo, tunc rurſus b d. rationalis: ſed a b. potentia tantùm rationale, per diffin. ſecundi, vel quinti binomij: ergo a d. binomium, non potentialiter rationalis eſt. Quod ſuppoſito contradicit. Conſtat igitur propoſita impoſſibilitas: & hoc, quando a d. ponitur maior, quàm a b. Quando verò minor, ſcilicet cùm punctum d. ponitur inter puncta b c. tunc arguetur ſimiliter, vel a d. vel d c. eſſe reſiduum: quod ſimiliter ſuppoſito aduerſarij refragatur. Sic quo ad primum, ſecundum, quartum, & quintum reſiduum, conſtat propoſitum. Quo ad tertium verò, ſextumque reſiduum, ſic procedam. Ponam e f. aggregatum ex quadratis ipſarum a b. b c. Item f g. duplum eius, quod fit ex a b. in b c. Eritque per quinquageſimam nonam huius, e g. quadratum ipſius a c. ſiue, quod idem eſt, a c. radix ipſius e g. Cumque a c. ſit tertium, vel ſextum reſiduum, erit, per ſexageſimam primam e g. reſiduum primum. Itaque, ſi a c. reſiduum ſit per alia, quàm a b. b c. membra, vtpote per a d. d c. tunc aggregatum ex quadratis ipſorum a d. d c. ſit e h. duplum verò eius, quod ex a d. in d c. ſit h g. Cumque ex demonſtratione ſexageſimæ primæ, tunc ipſius e g. reſidui primi membra ſint e h. h g. ſequitur, vt ipſum e g. reſiduum primum conſtet per exceſſum



aliorum

aliorum, quàm e f. f g. membrorum: quod dudum impossibile fuit ostensum. Quę demonstratio non solùm tertio & sexto, sed etiam cæteris residuis vsu venit. Sic constat penitus, quod proponitur.

PROPOSITIO 90ª.



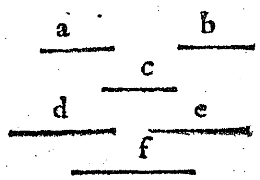
Impossibile est quamlibet cæterarum quinq; residualium quantitatum esse excessum aliorum, quàm suorum membrorum, seruata diffinitione. Quod præmissa de Residuo conclusit, hæc præsens de residuo mediali primo, secundo, cæterisque tribus residualibus quantitatibus proponit. Vt si sit, exempli gratia, Residuum mediale secundum, cuius nomen maius a b. minus verò b c. ita vt residuum ipsum mediale secundum sit a c. Aio igitur, quòd a c. non potest esse excessus aliorum, quàm a b. b c. membrorum, vt puta ipsorum a d. d c. ita vt a d. d c. habeant cōditiones diffinitionis ipsius medialis, quas habent a b. b c. Si enim hoc possibile est: tunc aggregatum ex quadratis ipsorum a b. b c. sit e f. duplum verò eius, quod fit ex a b. in b c. sit f g. Eritque per 59ª huius a c. radix ipsius e g. Cumque a c. sit residuum mediale secundum, erit, per sexagesimamprimam e g. Residuum tertium. Itaque si a c. residuum mediale secundum esse potest excessus aliorum, quàm a b. b c. vt pote ipsorum a d. d c. membrorum: tunc aggregatum ex quadratis ipsorum a d. d c. duplum verò eius, quod ex a d. in d c. sit g h. Eruntque ex demonstratione sexagesimæ primæ tunc ipsius e g. residui tertij membra e h. h g. Quare sequetur, vt ipsum e g. Residuum tertium fiat per excessum aliorum, quàm e f. f g. membrorum: quod per præcedentem impossibile est. Et perinde impossibile erit ipsum a c. Residuum mediale secundum esse aliorum quàm a b. b c. propriorum membrorum excessum, seruatis diffinitionis conditionibus. quod fuit demonstrandum. quæ demonstratio similiter ad reliquas residuales quantitates transfertur. Sic constat penitus propositum.

PROPOSITIO 91ª

Omnis medialis quantitas multiplicans aliquam irrationalem de numero sex generum, siue bimembrem siue residualē pro-

ducit

ducit omnino aliquam de numero earundem. Exempli gratia: a. quantitas medialis multiplicet ipsam b. maiorem, & faciat c. Aio, quòd c. est vna sex generum, quibus adnumeratur Maior, videlicet aut binomium, aut bimediale primum, aut secundum, & cætera. Ponatur enim ipsius a. quadratū d. quod erit potentia rationale, per diffinitionem Medialis. Sit etiam ipsius b. quadratum e. quod per quinquagesimam octauam huius erit binomium quartum. Itaque ipsa d. multiplicet ipsam e. & proueniat f. eritque f. per 68ª harum binomium. Sed per corollarium vndecimę huius f. est quadratum ipsius c. Igitur per quinquagesimamseptimam huius c. radix ipsius f. binomij erit vna ex irrationalibus bimembribus sex generum, quod fuit demonstrandum. Similiter si b. ponatur binomium, aut bimediale vtrumlibet, aut altera ex duabus reliquis; semper f. ostendetur esse binomium: & perinde c. vna sex generum bimembrium. Non aliter pro residualibus argumentaberis: sed pro 58ª citabis sexagesima prima: & pro quinquagesima septima citabis sexagesimam, quæ de residuis agunt. Quam ob rem si posuisses b. Minorem, aut quālibet cæterarum quinque residualium, ostendisses f. esse residuum: & perinde c. vnum ex residualium generum numero, quemadmodum demonstrandum proponitur.



PROPOSITIO 92ª.

Omnis medialis quantitas diuidens aliquam ex irrationalibus, siue bimembribus, siue residualibus, præstat in quotiente aliquā de numero eorundem. Hæc similiter omnino demonstratur sicut præmissa: verùm, loco sexagesimæ octauæ citabis sexagesimam nonam, quæ loquitur de diuisione. Et pro corollario vndecimæ adduces corollarium duodecimæ, & pro multiplicatione vtere diuisione, sicut proponitur.

PROPOSITIO 93ª.

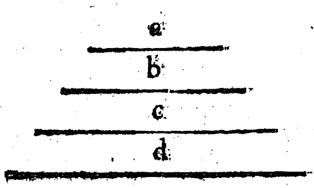
Omnis quantitas secundo quadrato commensurabilis alicui irrationali siue de numero bimembrium, siue residualium, est etiā vna de numero earundem. Exempli gratia, sit a. Bimediale primum: & quantitas b. ipsi a. commensurabilis in quadrato secundo. Aio, quòd b. est etiam vna sex generum, ex quibus bimediale primum. Sit eñ ipsius a. quadratum c. & ipsius b.

quadratum

quadratum d. Eruntque c d. potentialiter commensurabiles, quandoquidem earum quadrata sunt secunda quadrata ipsarum a b. per hyp. commensurabilia. Sed c. binomium secundum est, per quinquagesimamoctauam harum : ergo & per sexagesimam septimam binomium erit. Quare ipsius d. radix ipsa b. per quinquagesimam septimam, erit aliqua sex bimembrium. quod erat demonstrandum. Similiter si a. ponatur binomium, vel bimediale secundum, vel aliqua ex tribus reliquis : semper d. binomium esse arguetur, & perinde b. vna sex generum, in quibus binomium numeratur. Eodem syllogismo vteris pro residualibus, dum loco quinquagesimæ octauæ citetur sexagesima prima, & loco quinquagesimæ septimæ vocetur sexagesima, quæ de residuis loquitur, sicut in antepræmissa.

PROPOSITIO 94ª.

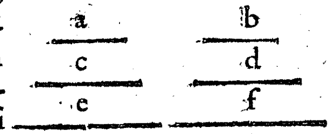
Omnis irrationalis quantitas siue de numero sit bimembrium siue residualium, non solùm magnitudine ac potentia irrationalis est, hoc est, quo ad primum quadratum; sed etiam quo ad secundum, quo ad tertium, & quo ad sequentia in infinitũ quadrata. Nam, quo ad binomium primum, secundum, quartum, & quintum, in quibus vna portionum rationalis, reliqua irrationalis est, patet propositum : cùm enim partes sint inter se incommensurabiles, erit per quadragesimam septimam huius, tam congeries, quàm excessus incommensurabilis toti, & perinde totum irrationale : & quoniam excessus incommensurabilis partibus, erit & excessus etiam irrationalis. Quo fit, vt tam binomium, quàm residuum primum, secundum, quartum, & quintum irrationale sit. Sed pro binomio tertio, & sexto, suoque residuo, ac præ cæteris bimembrium, aut residualium generibus sic procedam. Sit a. bimediale primum, aio, quòd a. irrationale est magnitudine. Exponatur enim eius quadratum b. quod per quinquagesimamoctauam huius, erit binomium secundum : sed binomium secundum dudum irrationale fuit. Igitur a. potentia irrationalis est : quare & magnitudine per postremum corollarium quinquagesimæ tertię huius. Et similiter faciam de cæteris generibus tam bimemembribus, quàm residualibus : loco tamen quinquagesimæ octauæ adducta 61ª. Quod autem omnis tam bimembris quàm residualis quantitas



quantitas sit potentialiter in infinitum irrationalis, constabit sic. Sit talis quantitas a. eius quadratum b. eiusdem quadratum secundum c. eius quadratum tertium d. & deinceps in infinitum. Quando igitur quantitas a. bimembris est, tunc per quinquagesimam octauam b. erit binomium, atque c. & d. cæteraque in infinitum quadrata semper binomia prima. Quę cùm irrationalia sint, constat propositum. Quando verò quantitas a. residualis supponitur, tunc per sexagesimā primā b. erit residuum. Inde autem c. & d. & sequentia semper quadrata residua prima, & perinde irrationalia, quemadmodum demonstrandum proponitur.

PROPOSITIO 95ª.

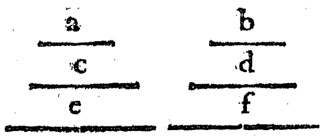
Binomium & residuum non solùm inter se magnitudine, sed etiam primo, secundo, & omni deinceps in infinitum quadrato incommensurabilia sunt. Sit a. quoduis binomium. b. autem quodlibet residuum. Aio, quòd a b. & simpliciter, & potentialiter in infinitum incommensurabilia sunt. Nam si b. ipsi a. commensurabilis esset, cùm a. sit binomium, esset & b. binomium per sexagesimam quartam huius : quod est contra hyp. Non sunt igitur a b. commensurabiles, sed incommensurabiles. Deinde sunto ipsorum a b. prima quidem quadrata c d. secunda e f. & deinceps sequentia. Erunq; per quinquagesimam octauam & sexagesimam primam huius, c. binomium, d. autem residuum primi ordinis. Et similiter e. binomium, & f. residuum eiusdem ordinis, quæ sunt inuicem, hoc est, tam c d. quàm e f. & deinceps, incommensurabiles : quoniam scilicet binomium Residuo incommensurabile dudum ostensum est. Igitur potentiæ ipsorum a b. primę, secundæ & sequentes incommensurabiles ad inuicem, sicut proponitur.



PROPOSITIO 96ª.

Bimembris quantitas & residualis non solùm inter se magnitudine, sed etiam potentialiter in infinitum incommensurabiles sunt. Sit a. quęcunque bimembris, b. verò quælibet Residualis. Aio, quòd a b. incommensurabiles ad inuicem sunt : secus enim per sexagesimam quartam huius, essent eiusdem generis : quod est contra hypothesim. Deinde sint ipsarum a b. quadrata prima c d. secunda e f. & deinceps : eruntque per quinquagesimam octauam, & sexagesimam primam c.

binomium,

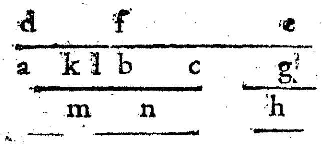


binomium, & d. residuum: item e. binomium primum, & f. residuum primum: igitur, per præcedentem, tã ipsa c d. inter se, quàm e f. inter se, & deinceps sequentia inter se, incommensurabilia sunt. Quare ipsorum a b. tam primæ, quàm secundæ, quàm sequentes in infinitum potentia sunt incommensurabiles, sicut demonstrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Manifestum est igitur, quòd sicut omnis bimembris de numero sex generum quantitatis, primum quadratum est binomium: secundum verò, tertium & omne sequens in infinitum, semper est binomium primum: ita omnis residualis ex alio senario quantitatis primum quadratum residuum: secundum verò, tertium & quotcunque deinceps, semper est residuum primum. Quod non est parua admiratione dignum.

PROPOSITIO 97.



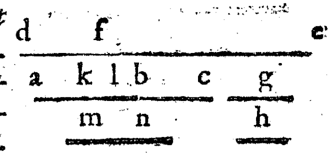
Quadrata portionum irrationalis lineæ bimembris, quæ maior appellatur, sunt binomium & residuum quartæ speciei. Constat hoc apertè in descriptione & theoria quinquagesimę octauę huius, quando a b c. est binomium quartum m n. est maior. fuit autem ibi a k. potentior quàm k l. in eo, quòd fit ex a l. l b. hoc est, in quarta parte ipsius e f. hoc est, in quadrato, quod ex dimidio ipsius b c. quod dimidium incommensurabile est ipsi a k. quoniam eorum dupla, scilicet a b. b c. membra binomij sunt incommensurabilia: quo fit, vt a k. rationalis potentior sit, quàm k l. potentialiter tantùm rationalis in quadrato radicis sibi incommensurabilis: Atque ideo, per diffinitionem, a k l. sit binomium quartum ex membris a k. k l. constans: vtque l b. eorundem membrorum excessus sit residuum quartum. Erat verò a l. quadratum ipsius m. atque l b. quadratum ipsius n, quę sunt membra maioris prędictę, hoc est m. membrum maius: & n. membrum minus. Igitur quadrata talium membrorum, sunt binomium quartum, & residuum quartum. quod fuit demonstrandum.

CORO-

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd tales portiones, quę constituunt Maiorem, sunt etiam ipsę irrationales Maior, & Minor. Hoc est, magna portio est irrationalis, quæ Maior appellatur: parua verò portio, irrationalis, quę Minor dicitur. Nam, cùm quadratum magnę portionis sit binomium quartum, iam per quinquagesimam septimam ipsa magna portio erit irrationalis, quę Maior. Cumque quadratum paruę portionis sit residuum quartum: iam per sexagesimã, ipsa parua portio erit irrationalis, quę Minor. Atque hęc est causa, quòd tales irrationales, Maior, & Minor vocantur: quoniam earum membra singula cadunt sub diffinitionem compositi: vnde & membra singula rursus in portiones homogeneas, & sic deinceps in infinitum (quod mirabile est) secantur.

PROPOSITIO 98.



Quadrata portionum Potentis Rationale, ac mediale sunt Binomium ac residuum aliquando quintæ, aliquãdo sextæ speciei. Nam in descriptione quinquagesimę septimę huius, quando a b c. est binomium quintum, tunc m n. est potens rationale ac mediale. Quadratum autem portionis m. est a l. quadratum autem portionis n. est l b. contigit autem a l. esse binomium quintum vel sextum. atque l b. esse residuum quintum, vel sextum: quod sic patet. Cùm a b c. sit binomium quintum, iam a b. est rationalis potentia tantùm, & idcirco a k. eius dimidium rationalis potentia tantùm. Itaque si k l. sit rationalis, quod tunc contingit, cum d f est numerus quadratus, & perinde g. ipsius d f. quarta pars numerus quadratus: tunc a l. est binomium quintum. Sit autem k l. sit potentia tantùm rationalis, quando videlicet d f. & perinde ipsius quadrans g. non est numerus quadratus: Tunc k l. est binomium sextum. Et eodem modo variatur l b. de residuo quinto in sextum, cùm sit excessus membrorum dicti binomij. Constat ergo propositum.

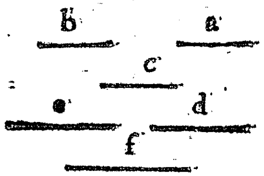
PROPOSITIO 99ª.

Quadrata potentis duo medialia portionum, sunt etiam binomium, etiam Residuum; quinque quintæ & quinque sextæ speciei. Hæc constat eodem penitus modo, quo præmissa in eadem quinquagesimæ sextę descriptione.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd tam potentis rationale ac mediale, quàm potentis duo medialia portiones sunt q̃nque potens rationale ac mediale: Atque cum rationali mediale potens: & quinque sunt Potens duo medialia: Atq; cum mediali mediale potens. Quod corollarium constat ex quinquagesima septima, & 60ª. & ex duabus præmissis.

PROPOSITIO 100ª.



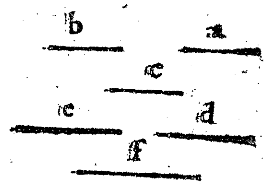
Omnis quantitas potentia rationalis diuisa in binomium, exhibet in quotiente Residuum. Quantitas a. potentialiter rationalis diuidatur per binomium b. & proueniat c. Aio, q̃ c. residuum est. Sit enim quadratum ipsius a. quantitas d. quę rationalis erit. Item, quadratum ipsius b. sit e. quod per quinquagesimam octauam huius, erit binomium primum. Deinde diuidatur d. per e. & proueniat f. quæ per septuagesimam octauam huius, erit residuum nominum commensurabilium nominibus ipsius e. & proportionalium, & perinde Residuum primum. Sed per corollarium duodecimæ huius f. est quadratum ipsius c. hoc est c. radix est ipsius f. Residui primi: igitur, per sexagesimam huius c. residuum est. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 101ª.

Omnis quantitas potentia rationalis diuisa in residuum, exhibet in quotiente binomium. Hæc propositio constat eo modo, quo præcedens. Ita vt loco binomij, Residuum; & pro Residuo, binomium ponatur; & pro septuagesima octaua citetur septuagesima nona: quandoquidem d. rationalis diuidenda est per e. Residuum primum. & pro quinquagesima octaua sumatur sexagesima prima, quæ loquitur de quadratis residualium.

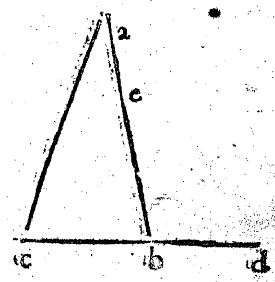
PROPOSITIO 102ª.

Omnis quantitas potentialiter rationalis, diuisa in binominale, reddit in quotiente residualem correlatiuam: Diuisa verò in residualem, reddit in quotiente binominalem correlatiuam. Idemq; dicendum de quantitate simpliciter rationali. Exempli gratia, Quantitas a. rationalis simpliciter, siue tantùm potentialiter, diuidatur per b. bimediale secundum, & proueniat c. aio, quòd c. erit residuum mediale secundum. Sit enim ipsius a. quadratum d. quæ rationalis erit: item ipsius b. quadratum e. quod per sexagesimam primam huius, erit binomium tertium. Deinde secetur d. per e. & proueniat f. Eritq; per septuagesimam octauam huius f. Residuum tertium. Sed per corollar. duodecimæ huius, c. radix est ipsius f. igitur per sexagesimam huius, c. erit Residuum mediale secũdum: quod est propositum. Similiter pro cæteris binominalibus procedemus. Quòd si ponatur quantitas a. rationalis diuidi, exempli causa, per b. residuum mediale secundum, atque ex diuisione prouenire c. eodem modo ostendetur c. esse bimediale secundum: sed tunc, pro sexagesima prima citabitur quinquagesima octaua, & pro septuagesima octaua citabitur septuagesima nona, & pro sexagesima citabitur quinquagesima septima, vt suppositis congruit.

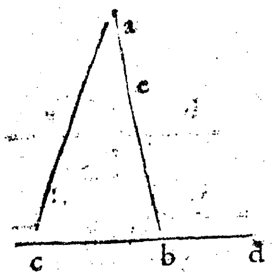


PROPOSITIO 103ª.

Omnis quantitatis secundum extremam, mediamq; rationem diuisæ, vtraque portio Residuum est, maior scilicet quintum, minor autem primum. Agam per lineas, à quibus argumentum transferri potest ad quoduis quantitatis genus. Ponatur linea rationalis a b. quæ perpendicularis sit ad ipsam c b d. sitque b c. dimidium ipsius a b. coniunctaque a c. ponatur ipsi a c. æqualis c d. & abscindatur de ipsa a b. ipsi b d. æqualis b e. Quod fieri potest: nam a b. b c. simul maius sint, quàm a c. hoc est quàm c d. Sit ergo per vndecimam secundi Elementorum, linea a b. secetur in puncto e. Ita vt rectangulum b a. a e. æquale sit quadrato b e. & perinde a b. b e. e a. sint continuè proportionales: hoc est, vt tota a b. ad maiorem portionem b e. talem habeat rationem, qualem ipsa b e. ad minorem portionem e a. Ostendendum itaque est, quòd existente a b. rationali b e.



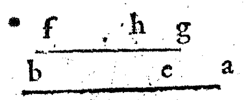
erit Residuum quintum: & e a. Residuum primum, sic. Quoniam a b. dupla est ad b c. ideo quadratum ipsius a b. quadruplum erit ad quadratum ipsius b c. Sed per penultimam primi Elementorum, quadratum ipsius a c. æquale est quadratis a b. b c. simul sumptis. Igitur quadratum ipsius a c. & ideo ipsius c d. quincuplum erit ad quadratum ipsius b c. Cumque b c. per hyp. sit rationalis: erunt d c. potentia tantùm rationalis: & b c. longitudine rationalis: quare, per diffin. harum, excessus b d. Residuum quintum erit: quandoquidem d c. potentior quàm c b. in quadrato lineæ sibi incommensurabili: Igitur & b e. ipsi b d. æqualis, Residuum quintum erit. Atque ideo, per sexagesimam primam huius, quadratum ipsius b e. erit residuum primum. Est autem quadratum ipsius b e. æquale rectangulo b a. a e. igitur quod fit ex b a. in ipsam a e. residuum primum est. Sed quod fit ex b a. in a e. diuisum in b a. rationalem, exhibet ipsam a e. Ergo, per sexagesimam quintam huius, a e. quotiens diuisionis, est commensurabilis & cognominis ipsi diuisæ, hoc est, quod fit ex b a. in a e. quod est residuum primum: Itaque a e. Residuum primum est: quod restabat demonstrandum. Quæ demonstratio, ad omnem quantitatem transfertur: sicut infert propositio.



PROPOSITIO 104^a.

Si maior portio quantitatis secundùm extremam mediamq́, rationem diuisæ, fuerit rationalis; minor erit Residuum quintum.

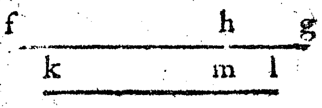
Sit quantitas f g. vt proponitur, diuisa in partes f h. h g. ponaturque f h. maior portio rationalis. Dico, quòd reliqua g h. erit Residuum quintum. Ponatur enim rationalis quantitas a b. sic diuisa in partes b e. e a. Eritque per præcedentem, maior pars b e. residuum quintum, & reliqua e a. residuum primum. Cumque, propter proportionem similem, sit sicut b a. ad ipsam b e. sic f h. ad ipsam h g. & permutatim, sicut b a. ad ipsam f h. sic b e. ad ipsam h g. atque b a. & f h. sint inter se commensurabiles, quia rationales; erunt per quadragesimam octauam huius, ipsæ b e. h g. inter se commensurabiles: Sed b e. residuum quintum. Igitur per sexagesimam quartam huius, h g. residuum quintum erit. Quod fuit demonstrandum.



PROPO-

PROPOSITIO 105^a.

Si minor portio quantitatis secundùm extremam mediamq́, rationem diuisæ, fuerit rationalis, minor erit binomium quintum.



Sit quantitas f g. vt proponitur, diuisa in partes f h. h g. ponaturque minor portio g h. rationalis. Dico tunc, quòd f h. maior portio erit binomium quintum. Ponatur enim quantitas k l. similiter diuisa, in k m. m l. cuius maior portio k m. sit rationalis: eritque, per præcedentem, l m. reliqua portio residuum quintum. Sed propter similem proportionem, sicut l m. ad ipsam m k. sic g h. ad ipsam h f. Ergo per decimam quintam sexti, quod fit ex l m. h f. æquale est ei, quod fit ex m k. g h. rationale autem, quòd ex m k. g h. quandoquidem ipsæ rationales. Igitur quod ex l m. h f. rationale est. Sic ergo l m. Residuum quintum multiplicans ipsam h f. producit quantitatem rationalem. Quare, per septuagesimam septimam ipsam, h f. multiplicata quantitas erit binomium quintum: quod ostendendũ proponebatur.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quòd si tota linea sic diuisa, siue vtralibet portionum ponatur potentia tantùm rationalis, adhuc portiones erunt, quæ dictæ sunt, irrationales, scilicet Residua, & binomium. Nam si duę lineæ, vna rationalis, & altera potentialiter tantùm rationalis sic diuisę fuerint, propter proportionem eandem; portiones huius, portionibus illius, per quadragesimam octauam, commensurabiles potentialiter erunt: & idcirco per sexagesimam septimam, eiusdem generis cum illis. Similiter, si portio maior illius rationalis, ac portio maior huius potentia tantùm rationalis ponatur, tunc reliquę portiones erunt residua. Si verò minor portio illius rationalis, ac minor huius potentia tantùm rationalis sit, tunc maiores binomia erunt: sicut infert corollarium.

PROPOSITIO 106^a.

Si circulus, cuius diameter rationalis circumscribat triangulum, quadratum, & hexagonum æquilaterum: solum latus hexagoni rationale est: latus verò tam trianguli, quàm quadrati

Gg 4 poten-

Potentialiter tantùm rationale & longitudine incommensurabile ipsius circuli diametro. Patet: nam latus hexagoni æquale est semidiametro circuli circumscribentis, vt in quarto Elementorum ostensum est. Latus autem trianguli potentialiter triplum; latus verò quadrati potentialiter duplum est ad semidiametrum: quæ rationes cùm nequaquàm sint, sicut numeri quadrati ad numerum quadratum, iam per secundum Corollarium quinquagesimætertiæ huius, latera talia incommensurabilia sunt semidiametro, & perinde diametro: sicut proponitur. Talis autem laterum ratio in decimotertio Elementorum commonstratur.

COROLLARIVM.

Et manifestum est simul, quòd latus triãguli ad latus quadrati in eodem circulo descriptorum potentialiter est sesquialterum, & perinde incommensurabile.

PROPOSITIO 107ª.

Si circulus, cuius diameter rationalis circumscribat decagonum, pentagonum, octogonum, atque dodecagonum æquilaterum: tunc latus decagoni erit Residuum quintum, latus pentagoni minor, latus octogoni minor, latus dodecagoni residuũ sextum. De lateribus decagoni, & pentagoni ostensum est in decimotertio Elementorum: de lateribus autem octogoni & dodecagoni ostensum est in speculationibus nostris: sed ex his demonstrationibus hæ regulæ deducuntur.

DE FIGVRIS ÆQVILATERIS REGVLAE.

QVando triangulum, quadratum, hexagonum, decagonum, pentagonum, octogonum, dodecagonum in circulo, cuius diameter rationalis, describuntur, hæ sunt regulæ inueniendi huiusmodi figurarum latera singula.

Quadratum lateris trianguli triplum est ad quadratum semidiametri.

Quadratum lateris quadrati, hoc est, ipsum quadratum descriptum, duplum est ad quadratum semidiametri.

Latus hexagoni æquale est ipsi semidiametro.

Latus

Latus decagoni est residuum quintum, cuius maior portio potentialiter sesquiquarta est ad semidiametrum. Minor verò portio est dimidium semidiametri.

Quadratum lateris pentagoni est residuum quartum, cuius maior portio est dupla sesquialtera ad quadratum semidiametri: minor verò portio potentialiter sequisquarta ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum linea irrationalis erit, quę, MINOR.

Quadratum lateris octogoni est etiam Residuum quartum, cuius maior portio dupla est ad quadratum semidiametri: minor verò portio potentialiter dupla ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum octogoni, sicut pentagoni, irrationalis erit, quæ, MINOR.

Latus dodecagoni est residuum sextum, cuius maior portio potentialiter sesquialtera est ad semidiametrum: minor verò potentialiter sub dupla eiusdem semidiametri.

PROPOSITIO 180ª.

Si sphæra, cuius diameter rationalis, circumscribat quinque solida regularia: tam pyramidis, quàm octahedri & cubi latus potentia tantùm rationale est: ipsiq; diametro longitudine incommensurabile: latus autem icosahedri, minor: latus verò dodecahedri, Residuum sextum. Patet: nam latus pyramidis ad semidiametrum potentia est, sicut 8. ad 3. latus octahedri duplum, latus cubi sesquitertium, latera duorum reliquorum irrationalia, sicut in tertiodecimo Elementorum ostensum est. Vnde regulæ sequentes.

DE SOLIDIS REGVLARIBVS REGVLAE.

QVando Pyramis, octahedrum, cubus, icosahedrum, dodecahedrum in sphæra, cuius diameter rationalis, describuntur; hæ sunt regulę inueniendi huiusmodi solidorum latera singula.

Quadratum lateris pyramidis duplum superpartiens duas tertias est ad quadratum semidiametri.

Quadratum

Quadratum lateris octahedri, duplum est ad quadratum semidiametri.

Quadratum lateris cubi, sesquitertium est ad quadratum semidiametri.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd latus Pyramidis ad latus octahedri potentia sesquitertium: ad latus cubi: duplum, & latus octahedri ad latus cubi sesquialterum.

Quadratum lateris icosahedri est residuum quartum, cuius maior portio dupla est ad quadratum semidiametri: minor verò portio potentialiter subsesquiquarta ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum erit irrationalis, quæ MINOR.

Latus dodecahedri est Residuum sextum, cuius maior portio est potentialiter superpartiens duas tertias ad semidiametrum; minor verò portio subtripla eiusdem semidiametri.

Ex quo calculo sequitur, Ingeniosissime Lector, vt sicut quadratum lateris hexagoni, siue semidiametri cum quadrato lateris decagoni coniunctum constat quadratum lateris pentagoni; sic & in solidis in eadem sphæra descriptis, quadratum lateris pyramidis, cum quadrato cubici lateris simul acceptum, constituit quadratum spæricæ diametri. Item sicut in circulo, semidiametro, siue latere hexagoni secundum extremam, mediamque rationem diuisa, maior portio est decagoni latus: ita in sphæra, latere cubi similiter diuiso, maior portio erit dodecahedri latus. Quæ omnia quamquam demonstrata sunt in Elementis Geometricis, tamen ex ipso calculo apertissimè notescunt. Quorum exempla hìc subijcio.

LATERA

LATERA FIGVRARVM AEQVILATERVM.

Semidiameter circuli——2.	Rat[lis].	□.eius——4
Latus △[li] ————r.12.Ra.po.		□.eius——12.
Latus □[ti] ————r. 8.Ra.po.		□.eius——8
Latus ✳[ni] ————2. Ra.		□.eius——4
Latus decagoni——r.v. m̃.1. Res. 5[ii]		□.ei9--6.m̃.r.20.Res p[ii]
Latus ⬠ —r.v.--10.m̃.r.20.Minor		□.ei9-10.m̃.r.20.Res.4[ii]
Latus 8[ni].—r.v—8.m̃.r.32.Minor.		□.ei9--8.m̃.r.32.Res.4[ii]
Latus 12[ni]——r.6.m̃.r.2. Res. 6[ii].		

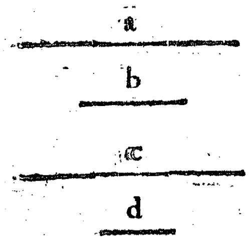
LATERA SOLIDORVM REGVLARIVM.

Semidiameter sphæræ——2.Rat[lis]	□.eius——4
Latus Pyramidis — r. $10\frac{2}{3}$ Ra.po.	□.eius——$10\frac{2}{3}$
Latus Octahedri—— r. 8.Ra.po.	□.eius——8
Latus Cubi————r. $5\frac{1}{3}$ Ra.po.	□.eius——$5\frac{1}{3}$
L.Icosahedri-r.v.8.m̃.r. $12\frac{4}{5}$ Minor	□.ei9 8.m̃.r. $12\frac{4}{5}$ Res.4[ii]
L.Dodecahedri.r. $6\frac{2}{3}$ m̃.r. $1\frac{1}{3}$ Res.6[ii]	

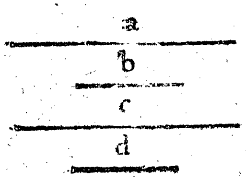
Si linea duorũ pedũ secetur secundũ extremã mediamq; rationem, maior eius portio fiet r. 5.m̃. 1. Residuum scilicet quintum. Minor vero.3.m̃.r.5. primum. Item si linea r. $5\frac{1}{3}$ similiter diuidatur, maior eius portio erit r. 6. $\frac{2}{3}$ m̃. r. $1\frac{1}{3}$ residuum sextum. Minor verò.r. 12.m̃.r. $6\frac{2}{3}$.

PROPOSITIO 109[a].

Si circuli pentagonũ æquilaterũ circũscribentis diameter fuerit linea irrationalis Minor cõmensurabilis minori propriè; tunc latus pentagoni erit Residuum quartum. Si autẽ latus Pentagoni ponatur Rationale; tunc diameter erit irrationalis, quæ Maior. Si demum latus pentagoni ponatur Maior prædictæ commen-



commensurabilis : tunc diameter erit binomium. Sit a. linea circuli diameter rationalis, b. autem linea latus pentagoni in eo circulo descripti. Eritque per 107^a precedentem, b. minor. Rursum ponatur c. linea minor ipsi b. commensurabilis diametro alterius circuli, & latus pentagoni in circulo c. descripti sit linea d. aio, quòd linea d. est residuum quartum. Cùm enim diametri circulorum sint lateribus similium figurarum circumscriptarum proportionales, erit, sicut a. ad b. sic c. ad d. Quare, quod fit ex a. in d. æquum erit ei, quod ex b. in c. Sed id, quod ex b in c. est Residuum quartum per septuagesimam primam huius, quoniam b c. sunt minores inuicem commensurabiles : igitur, quod fit ex a. in d. erit Residuum quartum. Cumq; idipsum diuisum in a. rationalem exhibeat in quotiente ipsam d. erit d. per sexagesimam quintam huius, Residuum quartum : & hæc est prima pars propositi. Deinde ponatur d. latus pentagoni rationale : tunc dico, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum erit maior. Nam propter dictam proportionem diametrorum & laterum, erit, quod fit ex a d. equum ei, quod ex b c. Rationale est autem, quod fit ex a d. quoniam a d. rationales ponuntur. Igitur rationale est, quòd fit ex b c. sed hoc diuisum per b. Minorem reddit ipsam c. ergo per centesimam secundam huius, c. Maior est ipsius b. Minoris correlatiua. & hoc est, quod secundo loco proponebatur. Demum ponatur d. latus pentagoni Maior, ipsius b. correlatiua, hoc est, commensurabilium & proportionalium nominum: tunc aio, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum, erit binomium. Namque, vt prius, erit quod fit ex a d. æquum ei, quod ex b c. Sed quod ex a. rationali in d. Maiorem fit, per sexagesimam tertiam huius: Maior est ipsi d. Maiori commensurabilis. Igitur, quod sub b c. Maior est proportionalium & commensurabilium nominum ipsius b. nominibus commẽsurabilium. Verùm hoc diuisum per b. Minorem, per octuagesimam quintam, exhibet binomium, exhibet autem ipsam c. Ergo c. Binomium: quod supererat demonstrandum.



COROL-

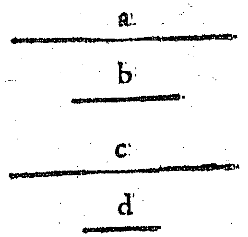
COROLLARIVM.

Quod si pro latere pentagoni, sumatur latus octogoni: vel si pro diametro circuli, sumatur diameter sphære : & pro latere pentagoni latus icosahedri : eadem omnia, quæ proposita & demonstrata sunt, sequentur. Nam, per 107^a præcedentem, posita diametro rationali, tam latus octogoni in circulo talis diametri, quàm latus icosahedri in talis diametri sphæra descripti, Minor est, per premissam, centesimam octauam.

PROPOSITIO 110^a.

Si circuli decagonum æquilaterum circumscribentis diameter fuerit Residuum commensurabile Residuo proprio : tunc latus decagoni erit Residuum primum. Si autem latus decagoni ponatur rationale: tunc diameter erit Binomium : commensurabilium nominum Residui proprij nominibus. Si demum latus decagoni ponatur binomium commensurabilium nominum Residui proprij nominibus : tunc diameter erit binomium primum.

Sit a. linea Circuli diameter rationalis, b. autem linea latus decagoni in eo descripti : eritque, per præmissam 107^a b. residuum quintum. Rursum ponatur c. linea Residuum ipsi b. commensurabile, diameter alterius circuli. Et latus decagoni in circulo c. descripti sit linea d. Dico tunc quòd d. erit Residuum primum. Nam propter proportionem harum quatuor linearum, erit, quod fit ex a d. æquum ei, quòd ex b c. Sed quod ex b c. fit, per septuagesimam primam huius, est Residuum primum : quoniam b c. sunt residua inuicem commensurabilia. Igitur quod fit ex a d. Residuum primum est. Quod diuisum in a. rationalem, cum exhibeat in quotiente ipsam d. Erit d. per sexagesimam quintam huius, Residuum primum. Et hæc est prima pars propositi. Deinde ponatur d. latus decagoni rationale : tunc aio, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum erit Binomium habens nomina commensurabilia ipsius b. Residui nominibus. Nam propter dictam proportionem diametrorum & laterum, erit quod fit ex a d. æquale ei quod fit ex b c. Rationale est autem, quod fit ex a d. quoniam a d. Rationales ponuntur. Igi-



tur

tur Rationale est, quod ex b c. Sed hoc cùm diuisum per b. Residuum exhibeat in quotiente ipsam. c. erit per septuagesimam nonam huius, c. binomium commẽsurabilium nominum ipsius b. diuisoris nominibus: quod secundo loco proponebatur. Demum ponatur d. latus Decagoni binomium commensurabilium nominum ipsius b. residui nominibus: Dico tunc, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum, erit Binomium primum. Nam, sicut antea, erit, quod fit ex a d. ęquum ei, quod ex b c. Sed quod ex a. Rationali in d. binomium fit, est, per sexagesimam tertiam huius, binomium ipsi d. binomio commensurabile: igitur quod sub b c. binomium est nominum commensurabilium ipsius b. Residui nominibus: Cumque hoc diuisum per b. residuum exhibeat in quotiente ipsam c. iampridem per octuagesimam tertiam huius, erit c. binomium primum: & hoc est tertium, quod restabat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quòd si pro latere decagoni, sumatur latus Dodecagoni: vel si pro diametro circuli, sumatur diameter sphęre, & pro latere Decagoni latus Dodecahedri: eadem omnia quę proposita hic & ostensa sunt, similiter sequentur. Nam, per 107^{a}, posita diametro rationali, latus dodecagoni Residuum sextum. At per 108, latus dodecahedri, adhuc idem residuum est.

Deniq; tam super lateribus isopleuratum figurarum, tam planarum, quàm solidarum, quàm super earum perpendicularibus, quàm etiam super lineę media extremaque ratione diuisę portionibus possent formari varię ac penè infinitę quęstiones; nunc videlicet circuli diametrum, nunc latera, nũc segmẽta sapponẽdo irrationalia, nunc cuiusuis speciei aut ordinis irrationalia. sic igitur in immensa, atque inextricabilem irrationalium syluam, videlicet trinomia, quadrinomia, mediales secundas, tertias, & cęteras, quę infinitæ sunt. Quę tamen ex ipso calculo curiosis notescere possunt. Nobis satis sit hactenus processisse, praximque decimi

decimi Elementorum demonstrasse, ac multa ab Euclide omissa conclusisse. Cętera relinquo curiosioribus. Sed obscura, minusque necessaria minus curanda sunt. Quod & Cicero in Officiis pręcipere videtur.

Libri secundi Arithmeticorum Maurolyci finis: hora decimaoctaua, diei Sabbati, qui fuit Iulij 24°. Cùm Messanæ cum multo pontis & arcus apparatu expectaretur Io. Cerda, Methynensium Dux, Prorex. Indict. 15.

M. D. LVII.

VENETIIS, M D LXXV.
Apud Franciscum Franciscium Senensem.

INDEX LVCVBRATIONVM.

EVclidis elementa, discussis Interpretum erroribus, tam Cāpani nimium sibi confidentis, quàm Zamberti professionem Ignorantis. Cum additionibus quarundam propositionum, præsertim ad regularia solida spectantiam.

Theodosij Sphærica elementa libris tribus, astronomiæ principijs necessaria.

Menelai Sphærica libris. 3. multis demonstrationibus adaucta, ad scientiam sphæralium triangulorum pertinentia.

Apollonij Conica elementa libris 4. & demonstrationibus, & lineamentis opportunis instaurata.

Sereni Cylindrica, libris. 2.

Archimedis opera, De dimensione Circuli, De Sphera & Cylindro. De Isoperimetris, De momentis æqualibus, De Quadratura Parabolæ. De spheroidibus & Conoidibus figuris. De spiralibus. Cum additione demonstrationum, facilius demonstrata. *

Iordanj Arithemetica, & Data.

Theonis Data geometrica.

Rogerii Bacconis, & Io. Petsan Perspectiuæ breuiatæ cum adnotationibus errorum.

Ptolemei Specula. Et de speculo vstorio libellus.

Autolyci de sphera, quæ mouetur.

Theodosij de habitationibus.

Euclidis Phænomena breuissimè demonstrata.

Aristotelis problemata mechanica, cum additionibus complurimis, & iis, quæ ad pyxidem nauticam, & quæ ad Iridem spectant.

PROPRIA IPSIVS AVTHORIS.

Prologi, siue sermones quidam De diuisione artium, De quantitate, De proportione, De mathematicæ authoribus, De sphæra, De Cosmographia De Conicis, De solidis regularibus, De operibus Archimedis, De quadratura Circuli, De Instrumentis, De Calculo, De perspectiua, De musica, De diuinatione.

* Arithmetica speculatiua libris duobus: in quorum primo multa de formis tam planis, quàm solidis numerorum à nemine hactenus animaduersa. In secundo autem theoria & praxis rationalium & Irrationalium magnitudinum per numerarios terminos cum multis nouis, quæ ad decimū

Euclidis faciunt, demonstrationibus abunde tractatur.
Arithmetica data libellis quattuor demonstrata.
Positionũ & rei demõstrationes ad quattuor præcepta vel capita redactæ.
Sphæricorum libelli duo. In quibus multa à Menelao neglecta, vel omissa supplentur pro Sphæralium scientia triangulorum.
Sphera mobilis in octo Capita pro circulis primi motus.
Cosmographia de forma, situ, numeroq; cœlorum & elementorum olim Petro Bembo dicata.
Conicorum elemẽtorum quintus & Sextus post quattuor Apollonii libros locandi.
De Compaginatione solidorum regularium.
Quæ figuræ tam planæ, quàm solidæ locum impleant, vbi Auerroes Geometriam ignorasse indicatur.
De momentis æqualibus libri quattuor: in quorum postremo de centris solidorum ab Archimede omissis agitur: & de centro solidi parabolici.
* De quadrati geometrici, Quadrantis, & Astrolabi speculatione, fabrica, vsuq́ue.
* De lineis horariis libri 3. In quibus tota huiusmodi linearum theoria, quo ad situm, colligantiam & descriptionem ipsarum plene tractatur. Nam lineæ horariæ à meridie cœptæ, secant periferiam quandam in iis punctis in quibus eandem tangunt lineæ horariæ ab occasu vl' ortu exensæ. Talis autem periferia vl' circulus est, uel ex Conicis sectionibus aliqua, scilicet Parabolè, Ellipsis, uel hyperbole.
Photismi de lumine, & umbra, ad perspectiuam & radiorum incidentiam facientes.
Diaphana in 3. libros diuisa. In quorum primo de perspicuis corporibus. In 2. de iride. in 3. autem de organi uisualis structura, & conspiciliorum formis agitur.
Quæstionum arithmeticarum libelli. 3. Geometricarum libelli 2. Astronomicorum problematum tres: in quibus regulæ cum exemplis traduntur.
Adnotationes omnimodæ in diuersos Mathematicæ locos.
Canones tabularũ Alfonsi, Blanchini Eclipsium, Directionũ primi mobilis.
Compendium Mathematicæ breuissimum.
Elementorum Euclidis Epitome cum nouis & artificiosissimis in quintium, in arithmetica, in decimum, & in solidorum libros demonstrationibus.
Conicorum Apollonii breuiarium libris 3. facilius & directe demonstratũ.
Tabula sinus recti supponens sinum maximum siue circuli semidiametrum plurium, quàm millies mille particularum. quod est totius geometrici, astronomiciq; calculi necessarium instrumentum.
Compendium magnæ constructionis Ptolomaicæ omnium obseruationũ astronomicarum seriem paucis comprehendens ex breuiario Io. Regimontii.
* Compendium Boetianæ Musicæ, cum optimis speculationibus & calculo ac modulatuum ratione, & systematum proportione.
* Sphera in compendium breuiter omnia comprehendens, cum motuum secundorum Theoria.
* Computus Ecclesiasticus breuis & exactus.
Adnotationes in sphæram Io. Sacrobusti, & in Theoricas planetarum.
* Quadrati, Quadrantis, Astrolabi, instrumenti armillaris & Sphæræ solidæ demonstratio, fabrica, & usus, per nouam, artificiosam, breuemq́ue speculationem.
* De lineis horariis regulæ breuissimæ, & Theoria pro quocunque horizonte.
Compendium Sicanicæ historiæ.
Martyrologium Sanctorum correctum & instauratum. Cum Topographia & aliis appendicibus.
Hymnorum ecclesiasticorum liber unus.
Carminum & Epigrammatum libelli duo.
Poemata Phocylidis & Pythagoræ moralia Latino mœtro.
Genealogia Deorũ, Io. Boccacii adaucta, cũ multis Illustriũ uirorũ & principum carptim collectis prosapiis ad poesim & historiam necessariis.
Rhythmi vulgari seu uernaculo sermone, in laudem S. Crucis.
Chronologia ab Adamo protoplasto, Christi, principum, præsulum, & notabilium rerum, breuissima.
Itinerarium Syriacum cum historiis ad loca sacra pertinentibus.
Ad Petrum Bembum de Aetneo incendio.
Ad Synodi Tridentini patres epistola.

Breuiaria.

Platinæ de uitis Pontificum.
Sex librorum de uitis patrum.
Decem librorum Laertii de uitis Philosophorum.
Petri Criniti de uitis Poetarum.
Octo librorum Polydori de inuentoribus rerum.
Consiliorum Synodalium.
Sex librorum Diodori Siculi.
Grammaticarum institutionum libri sex.
Quadrati horarii fabrica, & vsus.

Demonstratio & praxs.

Trium tabellarum sinus recti, beneficæ & fœcundæ, ad scientiam & calculum triangulorum sphæralium utiles.
Compendium iudiciariæ ex optimis quibusque authoribus decerptum in quo de naturis signorum & domorum 12. septemq́ue planetarum cõ-

ſtellationum, aſpectuum, directionum, profectionum, horoſcoporum, electionum, & quæſtionum Regulæ, præſertim ad agricolas, medicos, nautas & milites, & excluſis ſuperſtitionibus, directæ.

Notandum quòd ex ſupra ſcriptis operibus

Theodoſij, Menelai Maurolyci Spherica: Item Autolici Sphæra, Theodoſii de habitationibus, Euclidis Phænomena. Demonſtratio & praxis trium tabellarum ſinus recti, fœcundæ, ac Beneficæ, Compendium Mathemathicæ breuiſſimum ſimul in unum uolumen: Meſſanæ impreſſa fuerunt à Petro Spina filio, Georgii Spinæ Germani. anno ſaluti 1558.

Item

Coſmographia olim Petro Bembo dicata 3. lib. Impreſſa fuit Venetiis apud Iunctas. anno ſalutis 1543. Et rurſum Baſileæ apud Io. Oponimum.

Item Ilio.

Quadrati horarii fabrica & uſus d. Io. XX. dicata, venetiis apud Nicolaum Baſſaninum anno ſal. 1546.

Item

Grammatica quædam rudimenta, Meſſanæ per eundem Georgii Spinæ filium anno ſalutis 1528.

Rhythmi quoque materni de laude S. C. ibidẽ per eoſdẽ anno ſalutis. 1552.

Item

Martyrologium correctum & inſtauratum Reuerend. domino M. Ant. Amulio Card. dicatum cum opographia cum multis appendicibus. anno ſalutis 1567. menſe Septembris Venetiis apud Iunctas impreſſum, & iterum in forma parua menſe Iulio. 1568.

Item

Hiſtoriæ Sicanicæ compendium cũ epiſtola ſimul ad patres Tridentinæ Synodi, Meſſanæ impreſſum per eundem Georgii Spinæ filium & nepotes. anno ſal. 1562.

Item

De uita Xpi, eiuſq; matris, & geſtis Apoſtolorum libelli octo ſenariis rythmis uulgaribus. Venetiis per Auguſtinum Bindonum. 1556

INDEX COPIOSVS
IN DVOS LIBROS
ARITHMETICORVM,
Alphabetico ordine diſpoſitus.

De litera A.

De litera B.

De litera C.

De litera D.

De litera E.

De litera F.

De litera G.

De litera H.

De litera L.

De litera M.

De litera N.

De litera O.

De litera P.

De litera Q.

De litera R.

De litera S.

De litera T.

Errata sic corrigito.

Fol. 106. uersu ultimo, æquum æquus. 117. 28. extrema extremam. 129. 1. Residum Residuum. 154. 30. proueniat. 163. 3. minor maior.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DE GRANADA