Modelos de función de transferencia: modelos ARMAX

Tere García Muñoz (tgarciam@ugr.es)
Román Salmerón Gómez (romansg@ugr.es)
Alessio Gaggero (alessiogaggero@ugr.es)

Universidad de Granada
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Tema 4– Econometría 3
Grado en Económicas

MODELOS DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA O MODELOS ARMAX:

- Generalización del análisis unidimensional de series temporales: incorporar al modelo otras variables exógenas como explicativas.
- Puesto que estas variables pueden aparecer retardadas se introducen **relaciones de carácter dinámico**.
- Y, recibe el nombre de **output**, y las explicativas, X, de **input**.
- Algunos ejemplos de interés en Economía: variables impulso y escalón.

Consideremos X_t, Y_t dos series debidamente transformadas para ser **estacionarias** (en el caso de que no lo fueran).
El modelo ARMAX o modelo de función de transferencia se puede expresar como:

$$\begin{aligned} Y_t &= \left(\nu_0 + \nu_1 B + \nu_2 B^2 + \nu_3 B^3 + \cdots\right) X_t + \eta_t \\ &= \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \nu_3 X_{t-3} + \cdots + \eta_t. \end{aligned}$$

- η_t representa al ruido, se supone que es estacionario e independiente del *input* X_t.
- ν_j se denominan **coeficientes de respuesta al impulso**: describen el peso que tienen los valores pasados de X_t a la hora de pronosticar Y_t.
- Para que la función de transferencia sea estable suponemos que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |\nu_j| < +\infty.$$

- Observemos que en $(\nu_0 + \nu_1 B + \nu_2 B^2 + \nu_3 B^3 + \ldots)$ hay infinitos términos.

Esta situación se solventa representando un polinomio de orden infinito como cociente de dos polinomios de orden finito. Esto es:

$$\nu(B) = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} = \frac{\omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2 + \ldots + \omega_s B^s}{\delta_0 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \ldots - \delta_r B^r}.$$

Usualmente en aplicaciones de carácter económico los valores de r y s no son superiores a 2.

$$Y_t = \frac{(\omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2 + \ldots + \omega_s B^s)}{(\delta_0 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \ldots - \delta_r B^r)} X_t + \eta_t \tag{1}$$

En ocasiones el efecto de X_t no se transmite de manera instantánea a Y_t, sino que lo hace con un retardo de b periodos

$$Y_t = \frac{(\omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2 + \ldots + \omega_s B^s)}{(\delta_0 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \ldots - \delta_r B^r)} X_{t-b} + \eta_t$$

$$Y_t = \frac{(\omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2 + \ldots + \omega_s B^s)}{(\delta_0 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \ldots - \delta_r B^r)} B^b X_t + \eta_t$$

Suponiendo, por comodidad, que $\delta_0 = 1$,

$$\begin{aligned} Y_t &= \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \cdots + \delta_r Y_{t-r} \\ &\quad + \omega_0 X_{t-b} + \omega_1 X_{t-b-1} + \cdots + \omega_s X_{t-b-s} + \textit{perturbacion}. \end{aligned}$$

Mediante esta representación se puede observar cómo la variable *output*, Y, depende de su propio pasado y de la información actual (si $b = 0$) y pasada del *input*, X.

Dado el proceso ARMA estacionario

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) Y_t = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q)\epsilon_t,$$

suponemos que se ve afectado en un instante dado, $t = t_0$, por un suceso conocido, c_0.

$$(1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p) Y_t = c_0 I_t(t_0)+(1+\theta_1 B+\cdots+\theta_q B^q)\epsilon_t, \quad I_t(t_0) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ si } t \neq t_0 \\ 1, \text{ si } t = t_0 \end{array} \right. ,$$

donde I_t recibe el nombre de **variable impulso**.
El efecto puede darse en distintos periodos **consecutivos**. Esta situación se podría representar a partir de m variables impulso:

$$\begin{aligned} \phi_p(B) Y_t &= c_0 I_t(t_0) + c_1 I_t(t_1) + \cdots + c_m I_t(t_m) + \theta_q(B)\epsilon_t \\ &= c_0 I_t(t_0) + c_1 I_{t-1}(t_0) + \cdots + c_m I_{t-m}(t_0) + \theta_q(B)\epsilon_t \\ &= (c_0 + c_1 B + \cdots + c_m B^m) I_t(t_0) + \theta_q(B)\epsilon_t \end{aligned}$$

donde $c(B)$ describe el efecto de la variable impulso (todos sus coeficientes provienen de la misma causa) y corresponde a una función de transferencia.

EJEMPLO

En una serie temporal diaria de transporte por carretera que mide el número de vehículos que circulan por una carretera ser produce un accidente que obliga a cortes parciales durante dos días hasta que se arreglan los desperfectos. Un mes después del accidente se estima el siguiente modelo de intervención donde $I_t(t_0)$ es una variable impulso que toma el valor uno en el día del accidente:

$$z_t = -(2100 + 3500B + 1000B^2 + 400B^3)I_t(t_0) + (1 - 0{,}5B)\epsilon_t$$

Interpreta los efectos de la variable impulso.

El modelo de intervención indica que el día del accidente hubo una disminución de 2100 vehículos. El segundo día la disminución es de 3500 vehículos. El tercer día, que las condiciones ya eran normales, hay todavía una disminución del tráfico de 1000 vehículos y el cuarto día de 400.

Dado el proceso ARMA estacionario

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) Y_t = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q)\epsilon_t,$$

suponemos que se ve afectado por un efecto permanente, c_0, a partir de un instante t_0:

$$(1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p) Y_t = c_0 S_t(t_0)+(1+\theta_1 B+\cdots+\theta_q B^q)\epsilon_t, \quad S_t(t_0) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < t_0 \\ 1, \text{ si } t \geq t_0 \end{cases}$$

donde S_t recibe el nombre de **variable escalón**.
Si se considera que el efecto permanente se introduce gradualmente (en varios periodos **consecutivos**) hasta que se estabiliza, habría que considerar m variables escalón:

$$\begin{aligned} \phi_p(B) Y_t &= c_0 S_t(t_0) + c_1 S_t(t_1) + \cdots + c_m S_t(t_m) + \theta_q(B)\epsilon_t \\ &= c_0 I_t(t_0) + c_1 S_{t-1}(t_0) + \cdots + c_m S_{t-m}(t_0) + \theta_q(B)\epsilon_t \\ &= (c_0 + c_1 B + \cdots + c_m B^m) S_t(t_0) + \theta_q(B)\epsilon_t \end{aligned}$$

donde $c(B)$ describe el efecto de la variable escalón y corresponde a una función de transferencia.
El efecto total de la variable escalón, $c_0 + \cdots + c_m$, recibe el nombre de **ganancia** de la función de transferencia.

EJEMPLO

En una serie temporal que mide las ventas mensuales de un artículo el efecto de una subida de precios se representa mediante una variable escalón siguiendo este modelo de intervención:

$$z_t = (-70 - 30B + 20B^2)S_t(t_0) + (1 - 0{,}3B)\epsilon_t$$

Interpreta los efectos de la variable escalón

El modelo de intervención indica que en el mes de la subida se produjo una disminución de 70 unidades. En el mes siguiente se produjo una disminución adicional de 30 unidades y en el tercero una subida de 20. El efecto total es una bajada de 80 unidades, que es la ganancia de la función de transferencia.