



UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física Moderna

**Estudio de propiedades estáticas y dinámicas
de sistemas hadrónicos de tres cuerpos**

TESIS DOCTORAL

Conrado Albertus Torres

Granada, Octubre de 2005

Índice general

1. Introducción	1
2. Hipernúcleos $\Lambda\Lambda$	5
2.1. Introducción	5
2.2. Modelo para hipernúcleos $\Lambda\Lambda$	6
2.2.1. Interacción $\Lambda\Lambda$ en un hipernúcleo	7
2.2.2. Potenciales Λ -núcleo	22
2.3. Función de onda variacional	25
2.4. Resultados	29
2.4.1. Efecto de inclusión del término RPA en el potencial	29
2.4.2. Sensibilidad al potencial Λ -núcleo	31
2.4.3. Distancia relativa entre los hiperones Λ	32
2.4.4. Sensibilidad a los acoplamientos del mesón ϕ	32
2.4.5. Dependencia de la energía de excitación utilizada en la función de Lindhard	32
2.5. Conclusiones	33
3. Desintegración mesónica de hipernúcleos Λ	43
3.1. Introducción	43
3.2. Descripción teórica de la desintegración piónica de hipernúcleos Λ	45
3.3. Estructura nuclear y balance energético	50
3.4. Resultados y conclusiones	54

4. Estudio de bariones pesados en modelos quark con simetría de quark pesado	67
4.1. Introducción	67
4.2. Hamiltoniano intrínseco	69
4.3. Interacciones quark–quark	70
4.3.1. Interacciones fenomenológicas	70
4.3.2. Interacciones quark–quark inspiradas en simetría quirál	71
4.4. Funciones de onda	73
4.5. Propiedades estáticas: densidades de carga, de masa y momento magnético orbital	77
4.6. Resultados	79
4.6.1. Masas	79
4.6.2. Radios cuadráticos de masa y de carga, densidades y factores de forma	82
4.6.3. Funciones de onda en el origen	82
4.6.4. Multipolos	93
4.7. Conclusiones	93
5. Estudio de las desintegraciones semileptónicas de los bariones Λ_b y Ξ_b	99
5.1. Introducción	99
5.2. Anchura diferencial de desintegración y factores de forma	101
5.3. Factores de forma	104
5.3.1. Elementos de matriz	104
5.3.2. Desarrollo en el momento interno del quark pesado y ecuaciones para los factores de forma	105
5.4. HQET y factores de forma	107
5.5. Resultados	108
5.5.1. Predicciones de NRCQM para los factores de forma	109
5.5.2. Análisis combinado: HQET y NRCQM	110
5.6. Conclusiones	112

6. Estudio de las desintegraciones semileptónicas $B \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$, $D \rightarrow Kl \bar{\nu}_l$ y $D \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$	121
6.1. Introducción	121
6.2. Desintegración semileptónica $B \rightarrow \pi$	123
6.2.1. Anchura diferencial de desintegración y factores de forma	123
6.2.2. Modelo no relativista de quarks constituyentes: contribución de quarks de valencia	123
6.2.3. Modelo no relativista de quarks constituyentes: contribución de la resonancia B^*	125
6.2.4. Representación de Omnès para f^+	128
6.2.5. Determinación de V_{ub} : Análisis de errores	132
6.3. Estudio de las desintegraciones semileptónicas $D \rightarrow \pi$ y $D \rightarrow K$	136
6.3.1. Transición $D \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$	137
6.3.2. Transición $D \rightarrow Kl \bar{\nu}_l$	139
6.4. Conclusiones	144
7. Conclusiones	145
A. Sistemas de tres cuerpos: Movimiento del centro de masas y cálculo de valores esperados con funciones de onda variacionales tipo Jastrow	147
B. Autoenergía y propagador de los mesones σ y ω en el medio nuclear	153
B.1. Autoenergía del mesón ω	153
B.2. Autoenergía del mesón σ	155
B.3. Término de mezcla σ - ω	155
B.4. Matriz de autoenergías	156
C. Desconvolución de la densidad de centros	159
D. Parámetros de las funciones de onda variacionales de bariones pesados	161
E. Cálculo de las integrales \mathcal{I} y \mathcal{K}	165

F. Relación de dispersión de Omnès con múltiples sustracciones	167
Bibliografía	171

Capítulo 1

Introducción

El uso de técnicas variacionales para abordar el estudio de sistemas de muchos cuerpos es práctica habitual en sistemas nucleares [1, 2, 3] y atómicos [1, 4, 5, 6]. Sin embargo estas técnicas no son usualmente utilizadas en la descripción de bariones a partir de modelos no relativistas de quarks constituyentes (NRCQM) o en la descripción de hipernúcleos doble Λ . En estos sistemas es práctica habitual el uso de ecuaciones tipo Faddeev para resolver las ecuaciones de tres cuerpos involucradas [7, 8]. Por regla general, las funciones de onda obtenidas a partir de tratamientos tipo Faddeev son complicadas, difíciles de utilizar en cálculos ulteriores y no son accesibles por grupos distintos al que las obtuvo. Además, los cálculos existentes no incorporan explícitamente ingredientes dinámicos fundamentales y simetrías aproximadas, que facilitan en gran medida el tratamiento del problema. A grandes rasgos, los antecedentes más relevantes que han motivado o condicionado la realización de esta memoria son:

1. *Física de Hipernúcleos:*

En el caso de hipernúcleos $\Lambda\Lambda$, y dentro del esquema Faddeev es difícil incluir correcciones a las interacciones debidas al medio nuclear. La práctica totalidad del esfuerzo en este campo se ha centrado en describir las aparentes inconsistencias existentes entre la masa experimental del hipernúcleo ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ y las masas experimentales de los hipernúcleos ${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$ y ${}^{12}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$ [7]. Dichas inconsistencias aparecen cuando se utiliza, en las ecuaciones Faddeev de tres cuerpos, una interacción $\Lambda\Lambda$ ajustada en el vacío. Se ha prestado muy poca atención en la literatura al origen y tamaño de las posibles correcciones de medio.

El momento angular orbital relativo de los dos hiperones $\Lambda\Lambda$ en el estado fundamental de muchos hipernúcleos $\Lambda\Lambda$, y en particular de todos los detectados hasta el momento, es onda s . Este hecho facilita un tratamiento variacional del sistema de tres cuerpos (*core* nuclear y los dos hiperones Λ) con funciones de prueba tipo Jastrow. Los factores Jastrow, ampliamente utilizados en Física Nuclear [1, 2, 3], tratan de forma sencilla el fuerte *core* repulsivo del potencial $\Lambda\Lambda$ a cortas distancias y conducen a un sencillo esquema de resolución del problema de tres cuerpos

planteado, que posibilita la inclusión de correcciones de medio tipo RPA a la interacción $\Lambda\Lambda$ de vacío.

2. *Bariones pesados y NRCQM:*

Las importantes simplificaciones que se deducen en estos sistemas gracias a la simetría de quarks pesados (HQS) [9] han sido ignoradas en los cálculos existentes (basados en la resolución de ecuaciones tipo Faddeev) de masas y funciones de onda. Esta simetría aproximada, permite simplificar considerablemente la descripción del sistema y obtener de forma simple, utilizando técnicas variacionales con funciones de onda determinadas en términos de unos pocos parámetros, resultados equivalentes a los que se obtienen con tediosos cálculos tipo Faddeev [8].

Esta simplificación del tratamiento permite abordar el estudio de las desintegraciones semileptónicas de estos bariones, donde de nuevo HQS debe de jugar un papel primordial. Por otra parte, aparecen nuevas dificultades relacionadas con la no conservación de la corriente vectorial, o con las limitaciones inherentes a los desarrollos no relativistas que tradicionalmente se asumen. No existen cálculos realistas de estos procesos utilizando modelos no relativistas de quarks constituyentes. El estudio de estas desintegraciones es de capital importancia, no sólo desde un punto de vista teórico, como un escenario diferente donde testear HQS, sino que también proporcionaría una determinación independiente del elemento $|V_{cb}|$ de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [9].

En esta Tesis Doctoral se ha desarrollado un método variacional simple para el estudio de las propiedades del estado fundamental de sistemas hadrónicos de tres cuerpos. Utilizando este método, en los capítulos 2 y 3 se calculan las energías de los estados fundamentales de los hipernúcleos ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$, ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$ y ${}_{\Lambda\Lambda}^{12}\text{B}$, utilizando una interacción barión-barión del tipo Bonn-Jülich, convenientemente modificada en el seno del medio nuclear. También se discuten posibles incertidumbres teóricas, se predicen masas de otros hipernúcleos medios y pesados, todavía no detectados experimentalmente, y se mejoran los modelos existentes de la desintegración mesónica de hiperones Λ en núcleos finitos.

A continuación, en los capítulos 4 y 5 se realiza un estudio detallado de bariones pesados (Λ_h , Σ_h , Σ_h^* , Ξ_h , Ξ_h' , Ξ_h^* , Ω_h y Ω_h^* , donde el quark pesado es $h = c, b$). Utilizando diversos modelos para la interacción entre quarks, se calculan masas, radios cuadráticos medios de carga y masa, momentos magnéticos, factores de forma electromagnéticos y correlaciones de pares para todos los bariones mencionados anteriormente. El método variacional utilizado se simplifica considerablemente gracias al uso de la HQS, que se infiere de Cromodinámica Cuántica (QCD) cuando se trata con sistemas que contienen quarks mucho más pesados que la escala (Λ_{QCD}) de confinamiento típica de QCD. Utilizando las funciones de onda variacionales, también se estudia en detalle las desintegraciones semileptónicas $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c l \bar{\nu}_l$ y $\Xi_b \rightarrow \Xi_c l \bar{\nu}_l$ y se determina el modulo del parámetro $|V_{cb}|$ de la matriz de CKM, a partir de la medida experimental de la anchura parcial de desintegración del primero de los procesos.

Por último y utilizando el mismo tipo de modelos de quarks constituyentes, en el capítulo 6 se estudian las desintegraciones semileptónicas $B \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$, $D \rightarrow K l \bar{\nu}_l$ y $D \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$ de gran interés, por ejemplo la primera para determinar el elemento $|V_{ub}|$ de la matriz de CKM.

Capítulo 2

Hipernúcleos $\Lambda\Lambda$

2.1. Introducción

Los datos de dispersión hiperón–nucleón (YN) disponibles han sido utilizados por los grupos de Nijmegen, Bonn–Jülich y Tübingen para obtener interacciones realistas YN, así como información parcial sobre la interacción hiperón–hiperón (YY). Debido a los escasos datos existentes, los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ constituyen un medio valioso para conocer detalles de la interacción barión–barión en el sector de extrañeza $S = -2$.

Consideremos el hipernúcleo ${}_{\Lambda\Lambda}^{A+2}Z$ compuesto por un núcleo y dos bariones Λ ligados. Definimos la cantidad $B_{\Lambda\Lambda}$ como la energía de ligadura total ($B_{\Lambda\Lambda} > 0$) del hipernúcleo doble- Λ , ésta queda definida por

$$B_{\Lambda\Lambda} = - [M({}_{\Lambda\Lambda}^{A+2}Z) - M({}^AZ) - 2m_{\Lambda}] \quad (2.1)$$

donde $M(\dots)$ denota la masa del sistema correspondiente y $m_{\Lambda} = 1115.6$ MeV. También es usual definir la magnitud $\Delta B_{\Lambda\Lambda}$, como

$$\Delta B_{\Lambda\Lambda} = B_{\Lambda\Lambda} - 2B_{\Lambda} \quad (2.2)$$

siendo $B_{\Lambda} > 0$ la energía de ligadura de un hipernúcleo Λ . Esta cantidad, y una vez descontado el efecto debido al reordenamiento del core nuclear producido por el segundo hiperón, está íntimamente relacionada con la interacción de los dos hiperones en el seno de un medio nuclear.

Hasta muy recientemente, se conocían las energías de ligadura del estado fundamental de tres hipernúcleos $\Lambda\Lambda$: ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$, ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$ y ${}_{\Lambda\Lambda}^{13}\text{B}$ (véase la tabla 2.1). En 2001 se informó sobre la producción del hipernúcleo ${}_{\Lambda\Lambda}^4\text{H}$ [10], y por otra parte los antiguos datos de la referencia [16] referentes al hipernúcleo ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$ han sido también reanalizados [11]. Fruto de este estudio, su energía de ligadura ha sido actualizada respecto a su valor previo de 10.8 MeV [16].

Cálculos basados en técnicas Faddeev y Faddeev-Yakubowski, utilizando un esquema de *clusters* de partículas α para el core nuclear, no han logrado demostrar la

${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$	${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$	${}_{\Lambda\Lambda}^{13}\text{B}$
$7.25^{+0.38}_{-0.31}$	17.7 ± 0.4	27.5 ± 0.7

Cuadro 2.1: Energías de ligadura, $B_{\Lambda\Lambda}$, experimentales en MeV de los hipernúcleos ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$ ([11]), ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$ ([12], [13], [14]) y ${}_{\Lambda\Lambda}^{13}\text{B}$ ([14], [15]).

compatibilidad de las energías de ligadura de ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$ y ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$ [7]. Como resultado de estos trabajos, se ha llegado a sugerir la posibilidad de que la determinación experimental de la energía de ligadura del hipernúcleo ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$ no sea correcta, y que el valor recogido en la tabla 2.1, no correspondiera al estado fundamental del hipernúcleo, sino a la energía de ligadura de un estado excitado.

Nosotros en este capítulo utilizaremos un esquema variacional para describir la dinámica de los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$. Esto no constituye una novedad, y existen trabajos previos [17, 18] donde se aborda el estudio de estos sistemas desde este esquema de trabajo. En la primera de estas referencias se aplican técnicas variacionales en un contexto donde se modela el core nuclear en términos de partículas α . En el segundo trabajo, la función de onda variacional se desarrolla en términos de una familia de funciones tipo Hylleraas, y se pone de manifiesto la importancia de las correlaciones de corto alcance para obtener teóricamente las energías de ligadura. Además, en este trabajo se sugiere por primera vez que las correlaciones de largo alcance tipo RPA pueden ser muy relevantes a la hora de compatibilizar las interacciones $\Lambda\Lambda$ de vacío con las energías de ligadura conocidas de los hipernúcleos doble Λ . Este capítulo está basado en los resultados de la ref. [19], donde por primera vez se calculan de forma realista los efectos tipo RPA en estos sistemas hipernucleares, y constituye la principal aportación del capítulo.

2.2. Modelo para hipernúcleos $\Lambda\Lambda$

Siguiendo el esquema de trabajo planteado en la ref. [18] consideramos los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ como un sistema de tres cuerpos (dos hiperones Λ y el núcleo). Así la energías de ligadura y la función de onda intrínseca $\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, con $\vec{r}_{1,2}$ las coordenadas relativas de los hiperones respecto al núcleo, quedan determinadas diagonalizando el hamiltoniano intrínseco, obtenido una vez que se ha separado el movimiento del centro de masas (apéndice A)

$$H = h_{sp}(1) + h_{sp}(2) + V_{\Lambda\Lambda}(1, 2) - \frac{\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2}{M_A} \quad (2.3)$$

con M_A la masa del core nuclear, $V_{\Lambda\Lambda}(1, 2)$ el potencial $\Lambda\Lambda$ en el seno del medio nuclear, $-\frac{\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2}{M_A}$ el término de Hughes–Eckart, que, aunque de pequeño valor, no es totalmente despreciable en núcleos ligeros, y $h_{sp}(i)$, $i = 1, 2$ el hamiltoniano de un hiperón Λ en

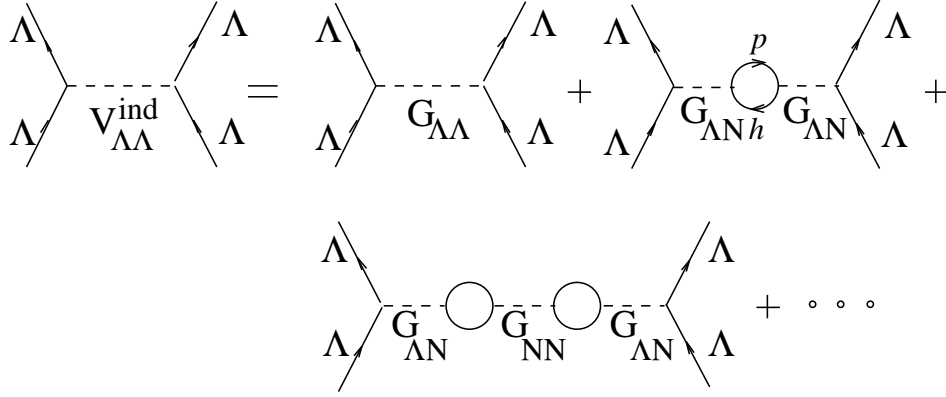


Figura 2.1: Definición diagramática de $V_{\Lambda\Lambda}^{\text{ind}}$.

presencia del núcleo

$$h_{sp}(i) = -\frac{\vec{\nabla}_i^2}{2\mu_A} + V_{\Lambda\Lambda}(|\vec{r}_i|) \quad (2.4)$$

donde μ_A es la masa reducida del hiperón Λ respecto al núcleo y $V_{\Lambda\Lambda}$ es el potencial Λ -núcleo ajustado para reproducir la energía de ligadura $B_\Lambda > 0$ del correspondiente hipernúcleo ${}^{A+1}_\Lambda Z$.

Debido a la presencia del par de hiperones Λ , el núcleo sufre un efecto de reorganización dinámica. Como ya mencionamos, tanto este efecto como la interacción entre los hiperones Λ , $V_{\Lambda\Lambda}$, contribuyen a $\Delta B_{\Lambda\Lambda}$. Sin embargo, el efecto de la reorganización estará suprimido respecto a la interacción entre los hiperones Λ en, al menos, una potencia de la densidad nuclear, que es el parámetro natural en desarrollos relacionados con sistemas de muchas partículas. Supondremos inicialmente que este efecto de reordenación proporciona una contribución del orden de 0.5 MeV a $\Delta B_{\Lambda\Lambda}$ para hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ ligeros, tal y como sugiere el trabajo de la ref [17] y despreciable para hipernúcleos pesados como ${}^{42}_{\Lambda\Lambda}\text{Ca}$, ${}^{92}_{\Lambda\Lambda}\text{Zr}$ y ${}^{210}_{\Lambda\Lambda}\text{Pb}$, que también consideraremos. En este trabajo no estudiaremos en detalle estos efectos de reordenamiento, sino que nos concentraremos en el papel desempeñado por las correlaciones de largo alcance tipo RPA. No obstante, el modelo RPA usado, tal y como se detalla más adelante, resume excitaciones partícula-agujero ($p-h$), y por tanto, tiene en cuenta parcialmente esta reorganización del núcleo. En cualquier caso admitiremos incertidumbres en nuestros resultados del orden 0.5 MeV para hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ ligeros, que resultan ser del mismo tamaño que los errores experimentales de sus energías de ligadura.

2.2.1. Interacción $\Lambda\Lambda$ en un hipernúcleo

El potencial $V_{\Lambda\Lambda}$ es una interacción efectiva que tiene en cuenta la dinámica de los hiperones Λ en presencia del core nuclear, y no sólo su dinámica en el vacío. Esta interacción efectiva se aproxima por una interacción inducida ($V_{\Lambda\Lambda}^{\text{ind}}$) construida en términos de las matrices G correspondientes a los procesos $\Lambda\Lambda \rightarrow \Lambda\Lambda$, $\Lambda N \rightarrow \Lambda N$ y $NN \rightarrow NN$,

tal y como se muestra diagramáticamente en la fig. 2.1. Esta interacción inducida combina la dinámica a cortas distancias (mediante $G_{\Lambda\Lambda}$) y la dinámica a largas distancias mediante la iteración de excitaciones $p-h$ (serie RPA) a través de $G_{\Lambda N}$ y G_{NN} . Cerca del umbral ($2m_\Lambda$) la dinámica de la interacción barión–barión en el canal $S = -2$ puede ser descrita mediante dos canales acoplados: $\Lambda\Lambda$ y ΞN . Para dos hiperones Λ y debido al bloqueo de Pauli, la razón de las contribuciones de $\Lambda\Lambda \rightarrow \Xi N \rightarrow \Lambda\Lambda$ y $\Lambda\Lambda \rightarrow \Lambda\Lambda$ (sin estados intermedios ΞN) en el medio nuclear está muy suprimida con respecto a su valor en el vacío. Este hecho está explícitamente demostrado para el hipernúcleo ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ en ref. [21], si bien un trabajo más reciente [22], usando un modelo basado en potenciales del grupo de Nijmegen, estima en alrededor de 0.4 MeV el incremento en $\Delta B_{\Lambda\Lambda}$ debido a la inclusión de estados intermedios ΞN . El grupo de Barcelona, utilizando también una interacción de Nijmegen, ha mostrado recientemente [23] que aunque efectivamente el acoplamiento $\Lambda\Lambda - \Xi N$ incrementa sustancialmente la energía de ligadura, la incorporación adicional del canal $\Sigma\Sigma$, que se acopla simultáneamente a los canales $\Lambda\Lambda$ y ΞN tiene un efecto drástico y reduce la energía de ligadura hasta valores muy cercanos a los obtenidos a partir del canal diagonal $\Lambda\Lambda$, sin tener en cuenta la dinámica de canales acoplados. En cualquier caso, un efecto de alrededor de 0.4 MeV, como se sugiere en [22], es del mismo orden que los errores experimentales y que otras incertidumbres teóricas discutidas anteriormente, y adoptaremos un esquema de trabajo en el cual aproximaremos $G_{\Lambda\Lambda}$ por $V_{\Lambda\Lambda}^{free}$, el elemento diagonal del potencial $\Lambda\Lambda - \Xi N$ en el vacío. Así, distinguiremos dos contribuciones a la interacción entre los hiperones Λ en el seno del medio nuclear: $V_{\Lambda\Lambda} = V_{\Lambda\Lambda}^{free} + \delta V_{\Lambda\Lambda}^{RPA}$. El primero de los términos da cuenta del primer diagrama del lado derecho de la igualdad en la fig. 2.1, mientras que construiremos $\delta V_{\Lambda\Lambda}^{RPA}$ sumando la serie RPA que se obtiene del resto de diagramas de la figura. Consideremos con detalle cada uno de estos términos.

Interacción $\Lambda\Lambda$ en el vacío

Los escasos datos de difusión hiperón–nucleón (YN) existentes, han sido utilizados por los grupos de Nijmegen [24, 25], Bonn–Jülich [26, 27] y Tübingen [28, 29] para determinar interacciones hiperón–nucleón realistas y algunos términos de los potenciales hiperón–hiperón (veáse también ref. [30]).

El modelo de Tübingen está basado en una descripción de los bariones en términos de quarks constituyentes. Con técnicas de *cluster* se deduce una interacción entre bariones, cuyo comportamiento a distancias intermedias y largas ha de ser corregido mediante la inclusión del intercambio explícito de mesones π y σ ; este último mesón se toma como un singlete de $SU(3)$, con una masa de 520 MeV. Intentar implementar correcciones debidas al medio nuclear dentro de este esquema es complicado y por esta razón no hemos utilizado este tipo de modelos.

Por su parte los modelos de Nijmegen y Bonn–Jülich están contruidos a partir del intercambio de mesones. La interacción YN construida por el grupo de Jülich sigue el mismo patrón del potencial NN desarrollado por el grupo de Bonn [31]. En estos modelos se implementa una interacción atractiva a distancias intermedias mediante el

intercambio del meson σ (escalar isospín y con números cuánticos de espín–paridad 0^+), con una masa de alrededor de 600 MeV. El mesón σ no se trata como una partícula física, sino como una descripción efectiva del intercambio de dos piones correlacionados. Sin embargo, el grupo de Nijmegen interpreta que la interacción en el canal escalar–isoscalar es generada por el intercambio de mesones escalares físicos (S^* , δ , ϵ and κ), y utiliza la simetría $SU(3)$ para relacionar los acoplamientos de estos mesones con nucleones e hiperones. El uso de un número elevado de mesones intercambiados en los modelos de Nijmegen, complica el cálculo de correcciones a estos potenciales debidas al medio nuclear. Así y para poder incluir correcciones de medio, en este trabajo hemos considerado el modelo de Bonn–Jülich (fig. 2.2) para describir las interacciones entre bariones en el vacío. El potencial $\Lambda\Lambda$ que utilizaremos en el vacío da lugar, en ausencia de correcciones nucleares, a energías muy similares de las que se deducen de interacciones tipo Nijmegen NSC97e,b, recientemente propuestas [32].

Consideramos el modelo de Bonn–Jülich [26, 27], donde se incluye el intercambio entre los dos hiperones Λ de mesones σ ($I = 0, J^P = 0^+$), ω y ϕ ($I = 0, J^P = 1^-$). Otras contribuciones como la de los mesones η y η' son despreciables, como veremos, en aproximación no relativista, ya que son proporcionales al momento del hiperón. Tampoco existe contribución a la interacción inducida por el intercambio de mesones isovectoriales (π ó ρ) debido a la conservación de isospín

Los vértices que nos interesan para describir la interacción de dos hiperones Λ son

$$\mathcal{L}_{\Lambda\Lambda ps} = \frac{f_{\Lambda\Lambda ps}}{m_{ps}} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi \partial_\mu \phi_{ps} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_{\Lambda\Lambda s} = g_{\Lambda\Lambda s} \bar{\psi} \psi \phi_s \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_{\Lambda\Lambda v} = g_{\Lambda\Lambda v} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \phi_v^\mu + \frac{f_{\Lambda\Lambda v}}{4m_N} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi (\partial^\mu \phi_v^\nu - \partial^\nu \phi_v^\mu) \quad (2.7)$$

para los vértices $\Lambda\Lambda$ con mesones pseudoescalares (η , η') escalares (σ) y vectoriales (ω , ϕ), donde ψ y ϕ_{ps} , ϕ_s y ϕ_v^μ son los campos del hiperón Λ y de los distintos tipos de mesones respectivamente, $m_N = 938.926$ MeV es la masa del nucleón, γ^μ son las matrices de Dirac y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Los acoplamientos f_{ps} , g_s , g_v y f_v dependen del tipo de barión y de mesón, aunque la simetría $SU(6)$ impone ciertas relaciones entre ellos.

Además se utilizan en los vértices factores de forma de tipo monopolar

$$F_\alpha(\vec{k}) = \left(\frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_\alpha^2 + \vec{k}^2} \right) \quad (2.8)$$

donde m_α es la masa del mesón intercambiado y \vec{k} el momento transferido. Los factores de forma atenúan la contribución de altos valores de momento, esto es, la dinámica de cortas distancias. Estos factores son debidos a la estructura extendida (quarks) de los hadrones, y el parámetro Λ_α , la llamada masa del corte que gobierna el rango de supresión, se relaciona con el tamaño de los mismos. La masa del mesón intercambiado determina el alcance de la interacción. Dentro del modelo se intercambian únicamente

mesones cuya masa está por debajo de un cierto valor, típicamente del rango de valores de $\Lambda_\alpha \sim 1.2\text{--}1.5$ GeV.

A partir de los lagrangianos de las ecs. (2.5)-(2.7), se obtienen tras una reducción no relativista los potenciales correspondientes al intercambio de cada tipo de mesón. La amplitud de Feynmann, η asociada a los diagramas de la fig. 2.2, en primer orden

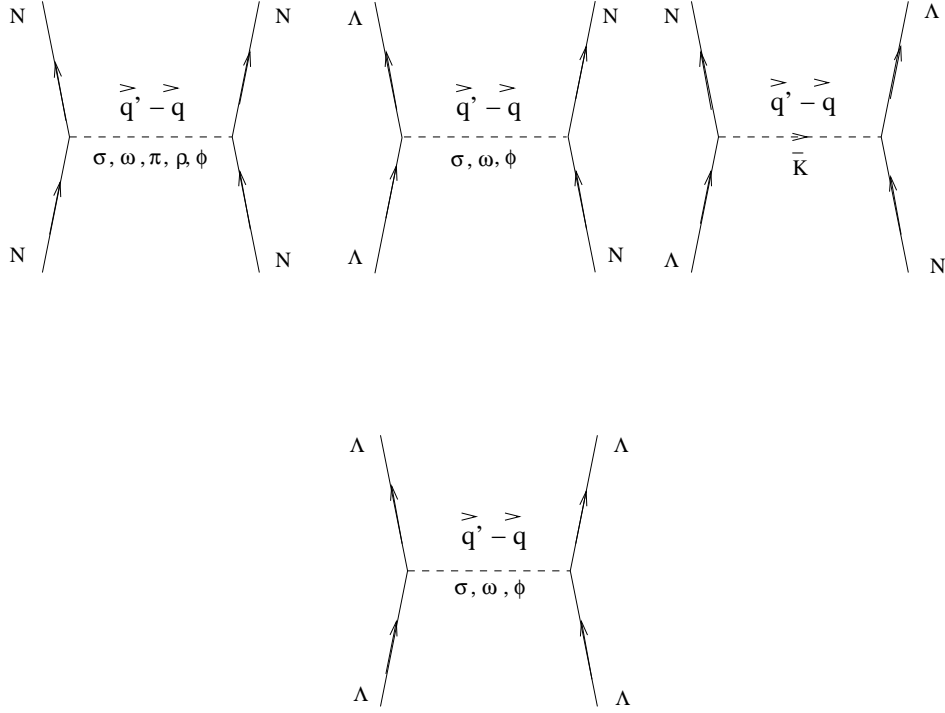


Figura 2.2: Intercambio de mesones en el contexto del modelo de Bonn-Jülich entre pares NN AN y AA.

en teoría de perturbaciones, para el proceso $\Lambda\Lambda \rightarrow \Lambda\Lambda$, se puede relacionar con la amplitud mecano-cuántica f de difusión en el centro de masas (CM),

$$f(\vec{q}' \leftarrow \vec{q}) = \frac{-i}{8\pi\sqrt{s}}\eta(\vec{q}', \vec{q}) \quad (2.9)$$

donde s es el cuadrado de la energía total en el CM y \vec{q} y \vec{q}' son los momentos iniciales y finales del par de bariones en el sistema CM. En la aproximación de Born (compatible con el primer orden de teoría de perturbaciones), podemos obtener los potenciales en espacio de momentos.

$$\langle \vec{q}' | V | \vec{q} \rangle = -\frac{1}{\mu_\Lambda(2\pi)^2}f(\vec{q}' \leftarrow \vec{q}) = \frac{i}{32\pi^3\mu_\Lambda\sqrt{s}}\eta(\vec{q}', \vec{q}) \quad (2.10)$$

donde μ_Λ es la masa reducida del sistema $\Lambda\Lambda$.

En el cálculo de la amplitud de Feynmann, $\eta(\vec{q}', \vec{q})$, utilizamos [33]

$$\bar{u}(\vec{q}')u(\vec{q}) = N'N \left[1 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})}{(E' + m_\Lambda)(E + m_\Lambda)} \right] \quad (2.11)$$

para los acoplamientos escalares, con u el spinor de la partícula Λ , $E = \sqrt{m_\Lambda^2 + \vec{q}^2}$ y $E' = \sqrt{m_\Lambda^2 + \vec{q}'^2}$, las constantes de normalización son $N = \sqrt{\frac{E+m_\Lambda}{2m_\Lambda}}$ y $N' = \sqrt{\frac{E'+m_\Lambda}{2m_\Lambda}}$. Nótese que con esta normalización, $\bar{u}u = 1$. Para los vértices pseudo-escalares tenemos

$$\bar{u}(\vec{q}')\gamma_5(\not{q} - \not{q}')u(\vec{q}) = 2m_\Lambda\bar{u}\gamma_5u \quad (2.12)$$

donde hemos empleado la ecuación de Dirac, y [33]

$$\bar{u}(\vec{q}')\gamma_5u(\vec{q}) = N'N \left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{E + m_\Lambda} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}'}{E' + m_\Lambda} \right] \quad (2.13)$$

y para los vértices vectoriales [33],

$$\bar{u}(\vec{q}')\gamma^0u(\vec{q}) = N'N \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})}{(E' + m_\Lambda)(E + m_\Lambda)} \right] \quad (2.14)$$

$$\bar{u}(\vec{q}')\vec{\gamma}u(\vec{q}) = N'N \left[\vec{\sigma} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{E + m_\Lambda} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}'}{E' + m_\Lambda} \vec{\sigma} \right] \quad (2.15)$$

Despreciando $\mathcal{O}(q^4/m_\Lambda^4, q'^4/m_\Lambda^4)$ e introduciendo las nuevas variables

$$\vec{k} \equiv \vec{q}' - \vec{q} \quad , \quad \vec{p} \equiv \frac{1}{2}(\vec{q}' + \vec{q}) \quad (2.16)$$

tenemos los siguientes potenciales en espacio de momentos [31] para mesones pseudoescalares,

$$V_{ps}(\vec{k}) = -\frac{g_{ps}^2}{4m_\Lambda^2} \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k})}{k^2 + m_{ps}^2} \quad (2.17)$$

y para el intercambio de mesones escalares,

$$V_s(\vec{k}, \vec{p}) = -\frac{g_s^2}{k^2 + m_s^2} \left[1 - \frac{p^2}{2m_\Lambda^2} + \frac{k^2}{8m_\Lambda^2} - \frac{i}{2m_\Lambda^2} \vec{S} \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) \right] \quad (2.18)$$

siendo

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$$

el espín total del sistema. Notemos que en el caso escalar, a diferencia del pseudoescalar, interviene el momento \vec{p} . Este término es el responsable de la aparición de los términos no locales en el potencial en espacio de posiciones, una vez que se realice la transformada de Fourier.

Para el intercambio de mesones vectoriales, el potencial resulta ser

$$\begin{aligned} V_v(\vec{k}, \vec{p}) = & \frac{1}{k^2 + m_v^2} \left\{ g_v^2 \left[1 + \frac{3p^2}{2m_\Lambda^2} - \frac{k^2}{8m_\Lambda^2} + \frac{3i}{2m_\Lambda^2} \vec{S} \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \frac{k^2}{4m_\Lambda^2} + \frac{1}{4m_\Lambda^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{g_v f_v}{2m_N} \left[-\frac{k^2}{m_\Lambda} + \frac{4i}{m_\Lambda} \vec{S} \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \frac{k^2}{m_\Lambda} + \frac{1}{m_\Lambda} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{f_v^2}{4m_N^2} \left[-\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 k^2 + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k}) \right] \right\} \quad (2.19) \end{aligned}$$

Realizando la transformada de Fourier, obtenemos los correspondientes potenciales en espacio de posiciones. Así, para el intercambio de mesones pseudoescalares (η, η') y mesones escalares (σ)

$$V_{ps}(m_{ps}, r) = \frac{m_{ps} g_{ps}^2}{12 \ 4\pi} \left[\left(\frac{m_{ps}}{m_\Lambda} \right)^2 Y(m_{ps}r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + Z(m_{ps}r) S_{12} \right] \quad (2.20)$$

$$V_s(m_s, r) = -\frac{g_s^2 m_s}{4\pi} \left[\left\{ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_s}{m_\Lambda} \right)^2 \right\} Y(m_s r) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4m_\Lambda^2} [\nabla^2 Y(m_s r) + Y(m_s r) \nabla^2] + \frac{1}{2} Z_1(m_s r) \vec{L} \cdot \vec{S} \right] \quad (2.21)$$

y en el caso de mesones vectoriales (ω, ϕ)

$$V_v(m_v, r) = \frac{g_v^2 m_v}{4\pi} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_v}{m_\Lambda} \right)^2 \right] Y(m_v r) - \right. \\ \left. - \frac{3}{4m_\Lambda^2} [\nabla^2 Y(m_v r) + Y(m_v r) \nabla^2] + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{m_v}{m_\Lambda} \right)^2 Y(m_v r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \frac{3}{2} Z_1(m_v r) \vec{L} \cdot \vec{S} - \frac{Z(m_v r)}{12} S_{12} \right\} + \\ + \frac{m_\Lambda m_v g_v f_v}{m_N 2 \ 4\pi} \left\{ \left(\frac{m_v}{m_\Lambda} \right)^2 Y(m_v r) + \frac{2}{3} \left(\frac{m_v}{m_\Lambda} \right)^2 Y(m_v r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \right. \\ \left. - 4Z_1(m_v r) \vec{L} \cdot \vec{S} - \frac{1}{3} Z(m_v r) S_{12} \right\} + \\ + \left(\frac{m_\Lambda}{m_N} \right)^2 \frac{f_v^2}{4\pi} m_v \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{m_v}{m_\Lambda} \right)^2 Y(m_v r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \frac{1}{12} Z(m_v r) S_{12} \right\} \quad (2.22)$$

En las expresiones anteriores se hace referencia a las funciones a continuación definidas:

$$Y(x) = \frac{e^{-x}}{x} \\ Z(x) = \left(\frac{m_\alpha}{m_\Lambda} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right) Y(x) \\ Z_1(x) = \left(\frac{m_\alpha}{m_\Lambda} \right)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) Y(x) \\ S_{12} = 3 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \\ \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\vec{L}^2}{r^2}$$

Como se ve en la ec. (2.17), la contribución debida al intercambio de los mesones η y η' es proporcional al momento transferido entre los dos hiperones, elevado al cuadrado. En sistemas ligados, como los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$, es evidentemente pequeña, y la despreciamos en esta memoria. Los valores tomados para las masas de los mesones son $m_\sigma = 550$ MeV, $m_\omega = 782.6$ MeV y $m_\phi = 1019.41$ MeV.

Las expresiones obtenidas en el apartado anterior nos dan de forma general los potenciales para la interacción $\Lambda\Lambda$. Sin embargo, nosotros estamos interesados en el canal 1S_0 , esto es, los dos hiperones Λ están acoplados a momento angular y espín igual a cero, estado en que se han medido los sistemas que nos interesan. Esto supone hacer las siguientes sustituciones en las expresiones dadas anteriormente para el caso de los potenciales, tanto en espacio de momentos como de posiciones,

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = -3 \quad (2.23)$$

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = 0 \quad (2.24)$$

$$S_{12} = 0 \quad (2.25)$$

Como se menciona más arriba, se deben emplear factores de forma para tener en cuenta el tamaño finito de los bariones. Utilizando factores de forma de tipo monopolar en cada vértice (2.8), debemos hacer la siguiente sustitución en la integral de Fourier sobre $|\vec{k}| = k$

$$V(m, r) = \int_0^\infty dk \frac{f(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + m^2} \longrightarrow \int_0^\infty dk \frac{f(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + m^2} \left(\frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 + k^2} \right)^2 \quad (2.26)$$

siendo m la masa del mesón intercambiado y f una función que completa, en cada caso, el integrando correspondiente al potencial debido al intercambio de cada mesón. Esta última expresión puede ser reescrita en términos de derivadas con respecto a la masa de corte

$$\int_0^\infty dk \frac{f(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + m^2} \left(\frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 + k^2} \right)^2 = -(\Lambda^2 - m^2)^2 \frac{d}{d(\Lambda^2)} \int_0^\infty dk \frac{f(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + m^2} \frac{1}{\Lambda^2 + k^2} \quad (2.27)$$

descomponiendo el integrando

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{\Lambda^2 + k^2} = \frac{1}{\Lambda^2 - m^2} \left[\frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{1}{k^2 + \Lambda^2} \right] \quad (2.28)$$

obtenemos

$$\int_0^\infty dk \frac{f(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + m^2} \left(\frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 + k^2} \right)^2 = \int_0^\infty dk \frac{f(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + m^2} + \left[(\Lambda^2 - m^2)^2 \frac{d}{d(\Lambda^2)} \int_0^\infty dk \frac{f(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\Lambda^2 - m^2} \frac{1}{k^2 + \Lambda^2} \right] \quad (2.29)$$

de lo que se deduce la siguiente expresión extendida para los potenciales,

$$V(r) = V(m, r) - V(\Lambda, r) + \frac{\Lambda^2 - m^2}{2\Lambda} \left. \frac{\partial V(z, r)}{\partial z} \right|_{z=\Lambda} \quad (2.30)$$

Vértice	$g_\alpha/\sqrt{4\pi}$	$f_\alpha/\sqrt{4\pi}$	Λ_α (GeV)
$\omega\Lambda\Lambda$	2.981	-2.796	2
$\sigma\Lambda\Lambda$	2.138	-	1
$\phi\Lambda\Lambda$	-2.108	-3.954	1.5–2.5

Cuadro 2.2: Constantes de acoplamiento y masas de corte que aparecen en los vértices $\omega\Lambda\Lambda$, $\sigma\Lambda\Lambda$, $\phi\Lambda\Lambda$. Estos valores están tomados del modelo \hat{A} de la ref. [27].

Una vez introducidas las sustituciones propias para el canal 1S_0 y los factores de forma según se indica, llegamos a las siguientes expresiones para los potenciales de intercambio de σ , ω y ϕ , que constituyen nuestro modelo de interacción Λ - Λ en el vacío.

$$V_\sigma(r) = -m_\sigma \frac{g_{\sigma\Lambda\Lambda}^2}{4\pi} \left\{ \tilde{Y}(\sigma, r) + \frac{1}{2m_\Lambda^2} \left[\left(\vec{\nabla} \tilde{Y}(\sigma, r) \right)_L \cdot \vec{\nabla} + \tilde{Y}(\sigma, r) \vec{\nabla}^2 \right] \right\} \quad (2.31)$$

$$V_\alpha(r) = \frac{m_\alpha}{4\pi} \left\{ \hat{g}_{\alpha\Lambda\Lambda}^2 \tilde{Y}(\alpha, r) + \frac{g_{\alpha\Lambda\Lambda}^2 - \hat{g}_{\alpha\Lambda\Lambda}^2 (\Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}^2 - m_\alpha^2)^2}{m_\alpha^2 2m_\alpha \Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}} e^{-\Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda} r} - \right. \quad (2.32)$$

$$\left. - \frac{3g_{\alpha\Lambda\Lambda}^2}{2m_\Lambda^2} \left[\left(\vec{\nabla} \tilde{Y}(\alpha, r) \right)_L \cdot \vec{\nabla} + \tilde{Y}(\alpha, r) \vec{\nabla}^2 \right] \right\}, \quad \alpha = \omega, \phi$$

en donde con el subíndice L indicamos que el operador sólo actúa sobre \tilde{Y} , y $\hat{g}_{\alpha\Lambda\Lambda}^2$

$$\hat{g}_{\alpha\Lambda\Lambda}^2 = g_{\alpha\Lambda\Lambda}^2 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{m_\alpha}{m_\Lambda} \right)^2 \frac{3g_{\alpha\Lambda\Lambda}^2}{2} + \frac{m_\Lambda}{m_N} g_{\alpha\Lambda\Lambda} f_{\alpha\Lambda\Lambda} + \left(\frac{m_\Lambda f_{\alpha\Lambda\Lambda}}{m_N} \right)^2 \right) \quad (2.33)$$

y también hemos definido

$$\tilde{Y}(\alpha, r) = Y(m_\alpha r) - \left\{ 1 + \frac{r}{2\Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}} (\Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}^2 - m_\alpha^2) \right\} \frac{\Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}}{m_\alpha} Y(\Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda} r) \quad (2.34)$$

y en las expresiones anteriores $\alpha = \omega, \phi$. Dentro del esquema de los potenciales de Bonn–Jülich, hemos utilizado simetría $SU(6)$ (espín–sabor) para deducir los acoplamientos de los mesones vectoriales ω y ϕ al hiperón Λ a partir del acoplamiento de estos mesones al nucleón. Tal y como se asume en la ref. [31], hemos utilizado un ángulo de mezcla ideal entre los mesones ω y ϕ , para el cual el contenido de quarks del mesón ϕ resulta ser $s\bar{s}$ y por tanto no se acopla al nucleón. Esta elección también determina los acoplamientos $\phi\Lambda\Lambda$ en términos de los acoplamientos $\omega\Lambda\Lambda$. En la tabla 2.2 se recopilan los valores de las constantes de acoplamiento y masas de corte para los vértices $\omega\Lambda\Lambda$, $\sigma\Lambda\Lambda$ y $\phi\Lambda\Lambda$, tomados del modelo \hat{A} de la ref. [27]. Éste modelo está ajustado a los datos conocidos de difusión YN . No obstante, como el mesón ϕ no se acopla al nucleón, en la ref. [27] no se dan valores para la masa de corte $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$, y hemos asumido que esta masa de corte debe de ser similar a $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ y mayor que la masa del mesón ϕ . Así, hemos estudiado tres valores para ella: 1.5, 2.0 y 2.5 GeV.

En las figuras 2.3 a 2.5 se representan los potenciales de intercambio de los mesones ω , σ y ϕ . El potencial de intercambio del mesón ϕ con las constantes de acoplamiento

dadas por la predicción $SU(6)$, a diferencia del potencial debido al intercambio de ω resulta atractivo en lugar de repulsivo debido a que la simetría cambia el signo de la constante de acoplamiento $g_{\phi\Lambda\Lambda}$ con respecto a $g_{\omega\Lambda\Lambda}$.

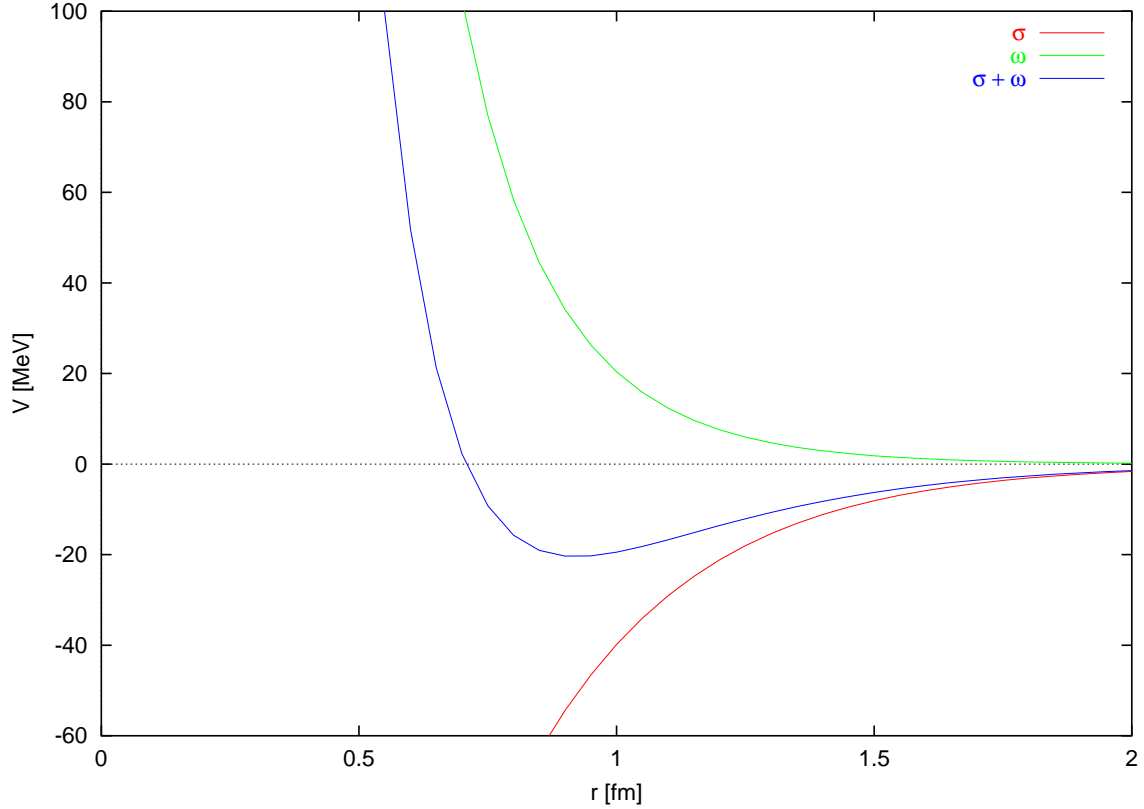


Figura 2.3: Contribuciones locales a la interacción $\Lambda\Lambda$ debidas al intercambio de mesones σ y ω . El mesón ω proporciona una contribución fuertemente repulsiva a cortas distancias, mientras que la contribución del intercambio de σ es atractiva. En la suma de las dos contribuciones, se puede seguir observando el core repulsivo a cortas distancias.

Interacción $\Lambda\Lambda$ en materia nuclear

Consideraremos en primer lugar dos hiperones Λ en el seno de un gas de Fermi de nucleones no interactuantes, caracterizado por una densidad constante ρ . La serie de diagramas que queremos sumar, recopilados en la fig. 2.1, corresponden a la representación diagramática de una ecuación tipo Dyson. Como consecuencia, la interacción entre los hiperones Λ se ve modificada en el seno del medio nuclear, ya que los portadores de la interacción fuerte pueden interactuar con otros nucleones, produciendo excitaciones intermedias tipo partícula–hueco. De los mesones considerados en el modelo para $V_{\Lambda\Lambda}^{free}$ en el espacio libre, sólo dos, σ y ω producen excitaciones partícula–hueco, ya que el mesón ϕ no se acopla a los nucleones, como se discutió anteriormente.

La ecuación de Dyson nos permite pasar del propagador libre de un mesón, al propagador renormalizado en el medio (fig. 2.1), que queda determinado por la función

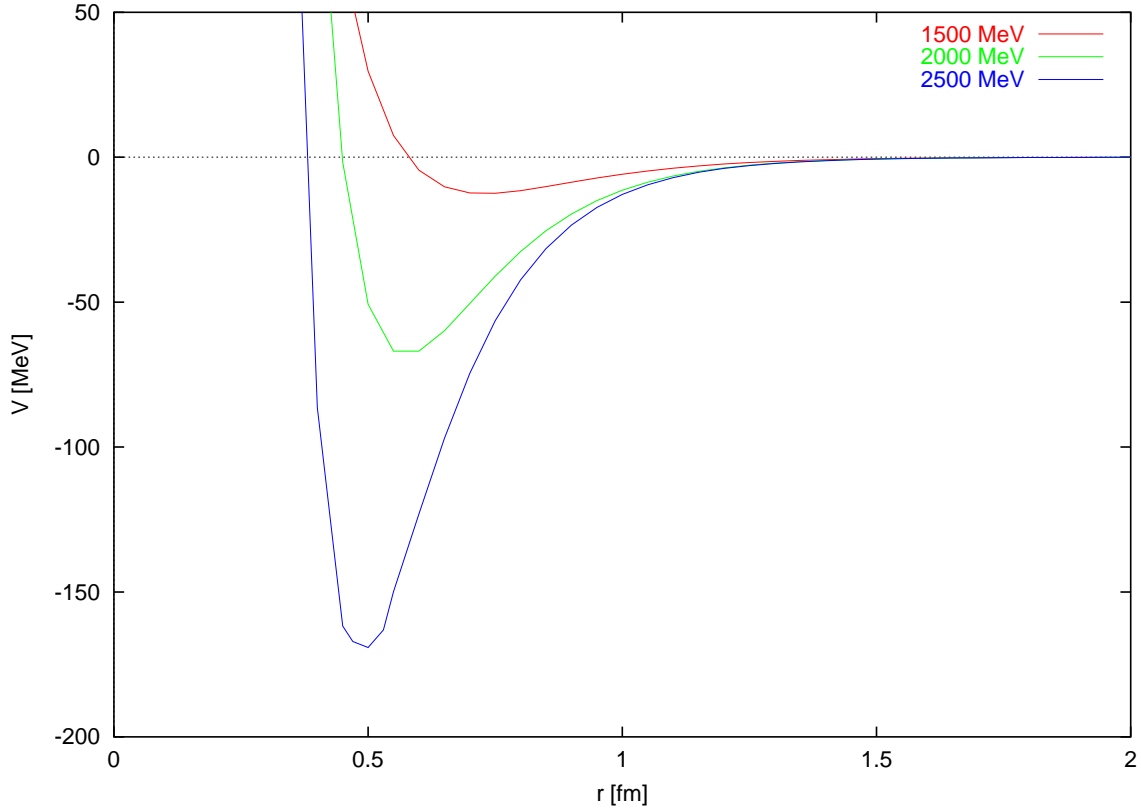


Figura 2.4: Potencial $\Lambda\Lambda$ local debido al intercambio de mesones ϕ con valores de la masa de corte $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ de 1.5, 2.0 y 2.5 GeV.

de Lindhard [34, 35]. Véamoslo en primer lugar en un caso simple, ignorando por el momento cualquier tipo de estructura de espín o isoespín. La ecuación de Dyson se escribe

$$\begin{aligned}
 iD_0(q) \longrightarrow iD(q) = & \quad (2.35) \\
 & iD_0(q) + iD_0(q)(-i\Pi(q))iD_0(q) + \\
 & + iD_0(q)(-i\Pi(q))iD_0(q)(-i\Pi(q))iD_0(q) + \dots
 \end{aligned}$$

donde como es habitual, con $-i\Pi(q)$ denotamos al buble o burbuja fermiónica (fig. 2.6).

$$-i\Pi(q) = (ig_1)(ig_2)(-1)4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG_0(k)iG_0(k+q) \quad (2.36)$$

donde ig_i son las constantes de acoplamiento en cada vértice y se incluye un factor -1 por tratarse de un buble fermiónico y el factor 4 para tener en cuenta suma sobre espín e isospín. G_0 es el propagador del nucleón en materia nuclear, en aproximación no relativista

$$G_0(p) = \frac{1 - n(|\vec{p}|)}{p^0 - \epsilon(\vec{p}) + i\eta} + \frac{n(|\vec{p}|)}{p^0 - \epsilon(\vec{p}) - i\eta} \quad (2.37)$$

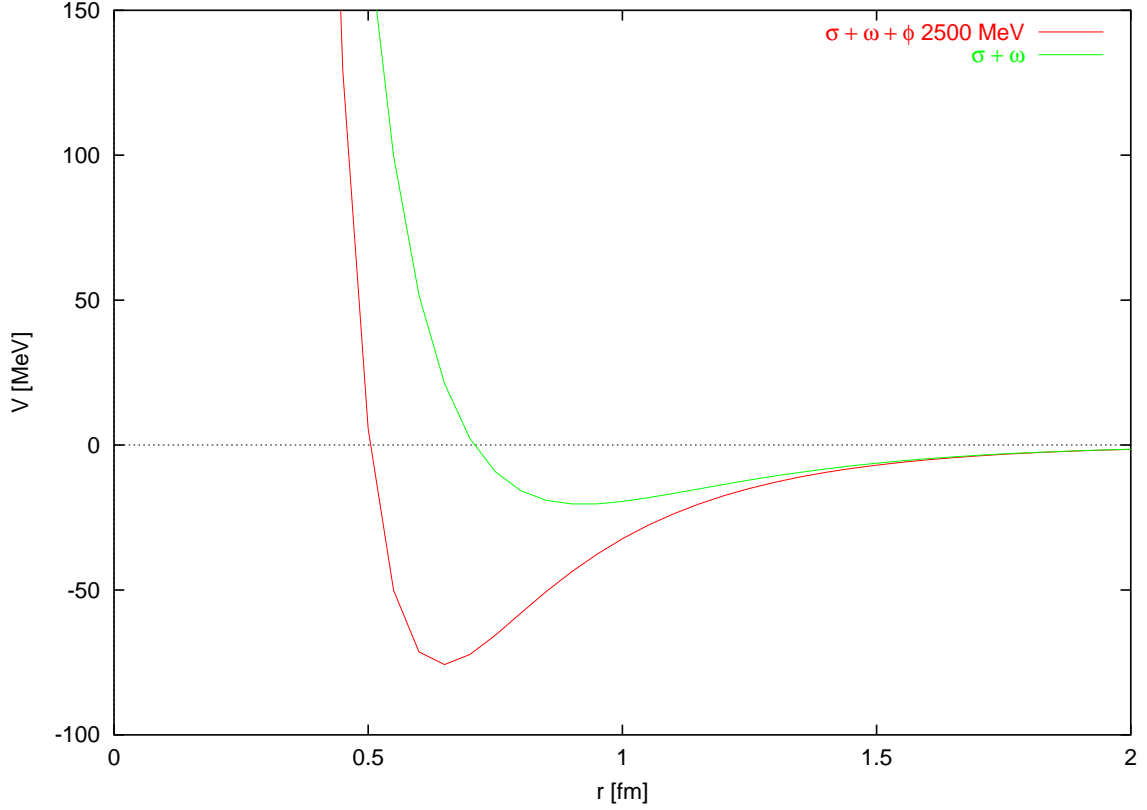


Figura 2.5: Potencial debido al intercambio de mesones σ , ω y ϕ habiendo fijado el valor de la masa de corte $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ a 2.5 GeV. Para su comparación se muestra también la contribución debida exclusivamente al intercambio de mesones σ y ω . Si incluimos el intercambio de un mesón ϕ , el mínimo es más profundo y se encuentra a distancias más cortas que para la contribución de los mesones σ y ω

donde $\epsilon(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ y el número de ocupación para un gas libre viene dado por $n(|\vec{p}|) = \Theta(|\vec{p}| - k_F)$, con Θ la función paso y k_F el momento de Fermi relacionado con la densidad $k_F = \left(\frac{3\pi^2}{2}\rho\right)^{1/3}$. Así, tenemos,

$$\begin{aligned}
 -i\Pi(q) = & (-ig_1)(-ig_2) \cdot 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1 - n(|\vec{k}|)}{k^0 - \epsilon(\vec{k}) + i\eta} + \frac{n(|\vec{k}|)}{k^0 - \epsilon(\vec{k}) - i\eta} \right) \times \quad (2.38) \\
 & \times \left(\frac{1 - n(|\vec{k} + \vec{q}|)}{k^0 + q^0 - \epsilon(\vec{k} + \vec{q}) + i\eta} + \frac{n(|\vec{k} + \vec{q}|)}{k^0 + q^0 - \epsilon(\vec{k} + \vec{q}) - i\eta} \right)
 \end{aligned}$$

Podemos escribir la autoenergía anterior en términos de la función de Lindhard [34,

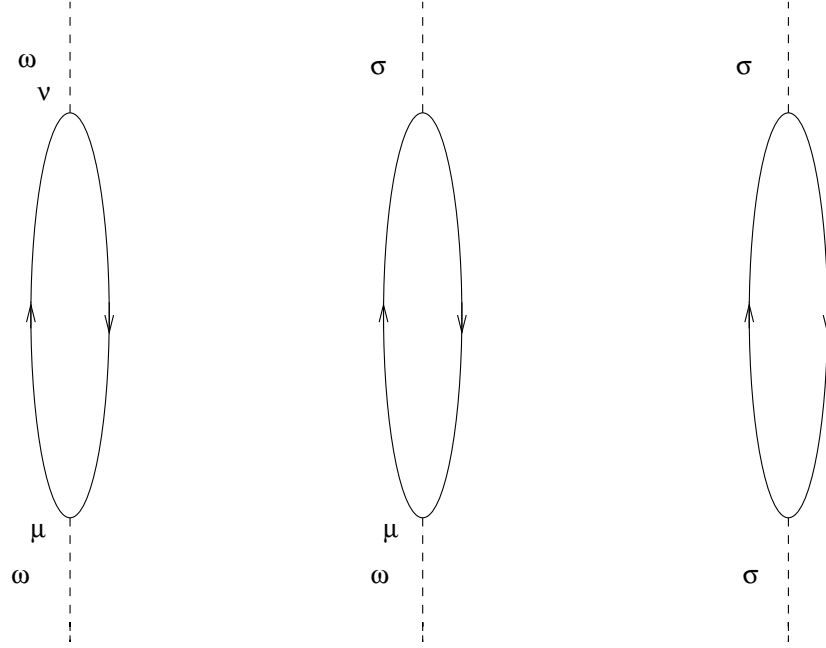


Figura 2.6: Diagramas elementales de autoenergía

35].

$$\begin{aligned}
 \Pi(q) &= g_1 g_2 U(q) = & (2.39) \\
 &= g_1 g_2 \cdot (-4i) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1 - n(|\vec{k}|)}{k^0 - \epsilon(\vec{k}) + i\eta} + \frac{n(|\vec{k}|)}{k^0 - \epsilon(\vec{k}) - i\eta} \right) \times \\
 &\quad \times \left(\frac{1 - n(|\vec{k} + \vec{q}|)}{k^0 + q^0 - \epsilon(\vec{k} + \vec{q}) + i\eta} + \frac{n(|\vec{k} + \vec{q}|)}{k^0 + q^0 - \epsilon(\vec{k} + \vec{q}) - i\eta} \right)
 \end{aligned}$$

La integral sobre k^0 se puede realizar fácilmente. De los cuatro términos posibles, debido a la estructura de polos del plano complejo de k^0 sólo son no nulos los términos cruzados, y después de integrar, se obtiene

$$U(q; \rho) = 4 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{n(|\vec{k}|)(1 - n(|\vec{k} + \vec{q}|))}{q^0 - \epsilon(\vec{k} + \vec{q}) + \epsilon(\vec{k}) + i\eta} \right) + \left(\frac{n(|\vec{k} + \vec{q}|)(1 - n(|\vec{k}|))}{-q^0 - \epsilon(\vec{k}) + \epsilon(\vec{k} + \vec{q}) + i\eta} \right) \right] \quad (2.40)$$

Los dos términos de la integral anterior corresponden a los diagramas directo y cruzado (fig. 2.7).

Volviendo al problema que nos ocupa, necesitamos estudiar la propagación de mesones σ y ω en el medio nuclear, donde pueden mezclarse tal y como se mostraba diagramáticamente en la fig. 2.6. Este problema, en el contexto de líquidos de Fermi, ya ha sido abordado en la ref. [36]. Siguiendo esta última referencia, tenemos que el propagador unificado de los mesones σ y ω , $\mathcal{D}(Q)$, queda determinado por la ecuación de Dyson

$$\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}^0(Q) + \mathcal{D}^0(Q)\Pi(Q)\mathcal{D}(Q) \quad (2.41)$$

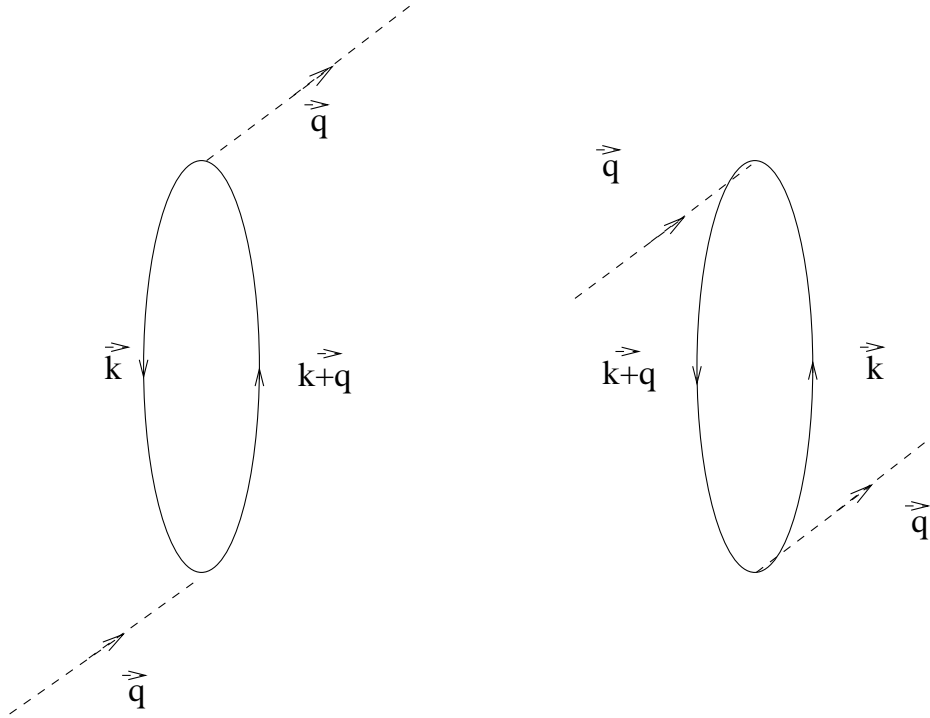


Figura 2.7: Diagramas directo y cruzado de la excitación partícula–agujero, contenidos en la función de Lindhard.

donde Q es el cuádrimomento de las partículas intercambiadas, $\mathcal{D}^0(Q)$ es una matriz 5×5 compuesta de los propagadores en el vacío de los mesones σ y ω ,

$$\begin{bmatrix} D_{\mu\nu}^{\omega}(Q) & 0 \\ 0 & D^{\sigma}(Q) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

y la matriz Π es la autoenergía irreducible de σ – ω en el medio

$$\begin{bmatrix} \Pi(Q)_{\mu\nu} & \Pi(Q)_{\mu} \\ \Pi(Q)_{\nu} & \Pi(Q)_{s} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

siendo $\Pi(Q)_{\mu\nu}$ y $\Pi(Q)_s$ las autoenergías de los mesones ω y σ , y por otra parte $\Pi(Q)_{\nu}$ genera mezclas de propagadores escalares y vectoriales en el medio. Este término no existe en el vacío, ya que está prohibido por invarianza Lorentz, que queda rota por la presencia del mar de Fermi.

En el trabajo de la ref. [18] se demostró que $V_{\Lambda\Lambda}^{free}$ daba la mayor parte del potencial efectivo en el medio $V_{\Lambda\Lambda}$, lo cual nos ha permitido realizar una serie de aproximaciones en el cálculo de Π_Q :

- Aproximamos $G_{\Lambda N}$ y G_{NN} (fig. 2.1) por los elementos diagonales de las interacciones ΛN y NN , que quedan bien descritos por los intercambios de σ y ω en el canal 1S_0 . Los vértices $\Lambda\Lambda\sigma$ y $\Lambda\Lambda\omega$ han sido discutidos anteriormente, mientras que las constantes de acoplamiento y los factores de forma para los vértices $NN\sigma$

Vértice	$g_\alpha/\sqrt{4\pi}$	$f_\alpha/\sqrt{4\pi}$	Λ_α (GeV)
ωNN	4.472	0	1.5
σNN	2.385	-	1.7

Cuadro 2.3: Valores en el modelo de Bonn (ref. [31]) de las constantes de acoplamiento y masas de corte para los vértices ωNN y σNN usadas en esta memoria.

y $NN\omega$ están ampliamente discutidos en ref. [31]. En la tabla 2.3 se recopilan los valores de las constantes de acoplamiento y masas de corte utilizados en este trabajo.

- A la hora de evaluar las autoenergías, sólo hemos considerado excitaciones tipo $p - h$ sobre el nivel de Fermi. Esta aproximación se corresponde con calcular los diagramas de la fig. 2.6 y los cruzados de éstos que no están explícitamente indicados en la figura.
- Trabajamos con un mar de Fermi no relativista y evaluamos las excitaciones $p - h$ en el límite estático. Así, el cuadrimomento transferido será $Q^\mu = (q^0 = 0, 0, 0, q)$

Con estas aproximaciones, los elementos de la matriz $\Pi(0, q)$ resultan ser

$$\Pi_{i,j} = U(0, q; \rho) C_i^N(q) C_j^N(q), \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (2.44)$$

con $C^B \equiv (g_{\omega BB}(q), 0, 0, 0, g_{\sigma BB}(q))$ y siendo

$$g_{\alpha BB}(q) = g_{\alpha BB} \frac{\Lambda_{\alpha BB}^2 - m_\alpha^2}{\Lambda_{\alpha BB}^2 + q^2}, \quad \alpha = \omega, \sigma, \quad B = \Lambda, N \quad (2.45)$$

y $U(0, q; \rho)$ la función de Lindhard. Sustituyendo esta autoenergía en la ecuación de Dyson (2.41), encontramos la expresión del propagador modificado por el medio nuclear:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (1 - \mathcal{D}^0 \Pi)^{-1} \mathcal{D}^0 = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\mathcal{D}_\omega^0 (1 - \mathcal{D}_\sigma^0 \Pi_s) & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{D}_\sigma^0 \mathcal{D}_\omega^0 \Pi^0 \\ 0 & \Delta D_\omega^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta D_\omega^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}_\omega^0 \mathcal{D}_\sigma^0 \Pi^0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{D}_\sigma^0 (1 + \mathcal{D}_\omega^0 \Pi^{00}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

En el apéndice B se detalla el cálculo de la matriz de autoenergía y del propagador modificado \mathcal{D} . Con este propagador renormalizado, la serie RPA de diagramas de la fig. 2.1 (del segundo en adelante, en el segundo miembro de la igualdad) puede ser resumada, y obtenemos

$$\begin{aligned} \delta V_{\Lambda\Lambda}^{RPA}(q, \rho) &= \sum_{ij=1}^5 C_i^\Lambda(q) [\mathcal{D}(Q) - \mathcal{D}^0(Q)]_{ij} C_j^\Lambda(q) \\ &= U(0, q; \rho) \frac{(W_{\Lambda N}^\sigma - W_{\Lambda N}^\omega)^2}{1 + U(W_{NN}^\sigma - W_{NN}^\omega)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde $\mathcal{D}^0(Q)$ cuenta por el primer diagrama del segundo miembro de la igualdad en la fig. 2.1, que tiene que ser sustraído para evitar doble contaje, y finalmente

$$W_{BB'}^\alpha = \frac{g_{\alpha BB}(q)g_{\alpha B'B'}(q)}{q^2 + m_\alpha^2} \quad (2.48)$$

A la hora de utilizar estas expresiones en el caso de núcleos finitos debemos tener en cuenta que en la función de Lindhard, $U(0, q; \rho)$, se debe de incluir un valor finito de energía de excitación (*gap*) para partículas (véase el apéndice de la ref. [37]). Este valor del *gap* es necesario para tener en cuenta energías de excitación en núcleos finitos. Si q^0 fuera distinto de cero, no existiría ningún problema, pero en la aproximación estática en que nosotros estamos trabajando ($q^0 \sim 0$), la función de Lindhard tiene un límite no nulo cuando $|\vec{q}| \rightarrow 0$ [37]. Sin embargo, en un núcleo finito de capa cerrada no hay transición posible entre el *core* y un estado excitado si $q^0 = |\vec{q}| = 0$, ya que el elemento de matriz de transición

$$\frac{\langle \phi_n | e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} | \phi_0 \rangle}{\epsilon_{ps}} \quad (2.49)$$

es cero. El numerador se cancela mientras que el denominador (diferencia de energía entre el estado fundamental y el excitado) tiene un valor mínimo distinto de cero. Ésto constituye una diferencia importante entre el medio nuclear infinito y un núcleo finito. En materia nuclear existen excitaciones a energía cero, mientras que en un núcleo finito existe un mínimo valor Δ de energía de excitación. Esta mínima energía de excitación o *gap* se incluye en los denominadores de los términos de partícula del integrando que define la función de Lindhard (véase el apéndice de [37]). Incluyendo este *gap* vemos que $U(q^0 = 0, |\vec{q}|, \rho) \rightarrow 0$ cuando $|\vec{q}| \rightarrow 0$.

Para tener en cuenta valores típicos de energías de excitación, usamos valores típicos del *gap* de 1 y 3 MeV, siendo los resultados poco sensibles a los cambios de valor excepto en el caso del ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$, en que tomamos un *gap* de 20 MeV [38] como promedio de las energías de separación de un protón y un neutrón, S_p y S_n .

Núcleos finitos

La transformada de Fourier de $\delta V_{\Lambda\Lambda}^{RPA}(q, \rho)$ (ec. (2.47)) proporciona en el espacio de coordenadas, la interacción RPA en función de la densidad constante de la materia nuclear. Sin embargo, en un núcleo finito, los portadores de la interacción sienten diferentes densidades cuando viajan desde un hiperón al otro. Tenemos en cuenta esto, promediando sobre todas las densidades que sienten los portadores de la interacción. Suponiendo trayectorias en línea recta entre los dos hiperones Λ y tomando la aproximación de densidad local, obtenemos la siguiente expresión.

$$\delta V_{\Lambda\Lambda}^{RPA}(1, 2) = \int_0^1 d\lambda \delta V_{\Lambda\Lambda}^{RPA}(r_{12}, \rho(|\vec{r}_2 + \lambda\vec{r}_{12}|)) \quad (2.50)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad de centros de nucleones. Definido así, este potencial depende de las posiciones de los dos hiperones y no sólo de la distancia relativa, ya que es necesario conocer la densidad en la región ocupada por los hiperones.

O.A.	R [fm]	α	2pF	c [fm]	a [fm]
He	1.358	0.000	Ca	3.510	0.563
Be	1.770	0.631	Zr	4.480	0.550
B	1.690	0.811	Pb	6.624	0.549

Cuadro 2.4: Parámetros [39] de las densidades de carga de diversos núcleos.

Hemos usado densidades tipo *oscilador armónico* (OA)

$$\rho_{OA}(r) = \rho_0 \left(1 + \alpha \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) e^{-\left(\frac{r}{R} \right)^2} \quad (2.51)$$

para los tres hipernúcleos más ligeros (${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, ${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$ y ${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$) que hemos estudiado, mientras que para los tres más pesados empleamos una densidad de tipo *Fermi de dos parámetros* (2pF)

$$\rho_{2pF}(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}} \quad (2.52)$$

En la tabla 2.4 recopilamos los parámetros de densidad que hemos utilizado [39]. Estos parámetros nos dan las densidades de carga. En el apéndice C de esta memoria se detalla el proceso de desconvolución, que permite obtener las densidades de centros necesarias en las expresiones anteriores.

2.2.2. Potenciales Λ -núcleo

Buena parte de los cálculos han sido realizados con un potencial fenomenológico de tipo Woods-Saxon propuesto por Bouyssy [41] (fig. 2.8). Este potencial no está basado en ningún modelo elemental para la interacción Λ - N y tiene un solo parámetro libre, V_0 que se ajusta para reproducir la energía de ligadura del hipernúcleo ${}^A+1_{\Lambda}Z$

$$\mathcal{V}_{\Lambda A}^{BOY} = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (2.53)$$

$$R = 1.1A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$$

$$a = 0.6 \text{ fm}$$

En la fig. 2.8 se representa la forma y profundidad de estos potenciales fenomenológicos para diversos hipernúcleos.

También hemos utilizado otros potenciales que sí provienen de modelos para la dinámica del sistema Λ - N . Para obtener un potencial Λ -núcleo a partir de un potencial Λ - N , es necesario sumar la contribución de cada nucleón del núcleo¹.

Para núcleos de capa cerrada, todos los acoplamientos que involucran el momento angular total o acoplamientos de espín del tipo $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ ó S_{12} en el potencial Λ - N no

¹En la Tabla 2.4 se dan detalles sobre las densidades de los cores nucleares de los hipernúcleos que hemos considerado.

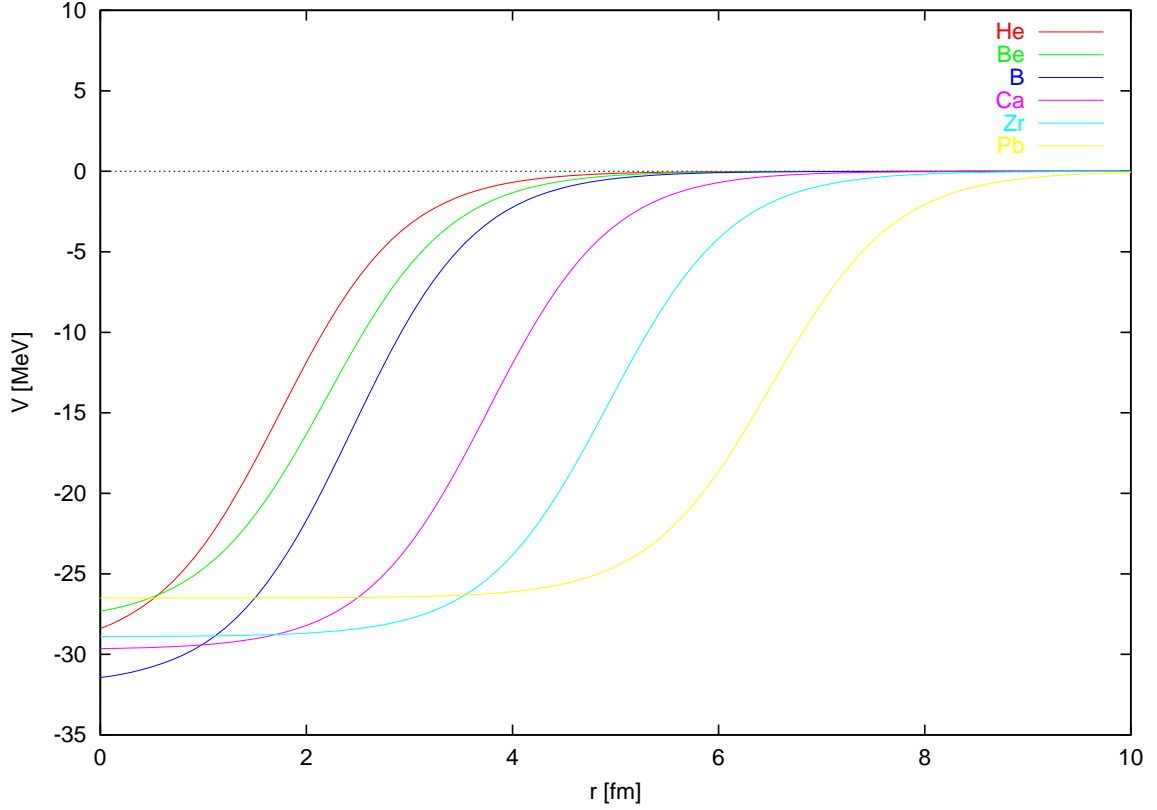


Figura 2.8: Potenciales tipo BOY (ec. (2.54)) para diversos hipernúcleos considerados en esta memoria. Se trata de potenciales tipo Woods-Saxon donde el alcance depende del número másico A

contribuyen, y para este caso particular tenemos que el potencial Λ -núcleo es central y se obtiene simplemente promediando con la densidad de nucleones del núcleo

$$\mathcal{V}_{\Lambda\Lambda}(r) = \int d^3r' \rho_c(|\vec{r} - \vec{r}'|) V_{\Lambda N}(r') \quad (2.54)$$

donde ρ_c es la densidad de centros, obtenida mediante desconvolución de la densidad de carga (apéndice C), que es la magnitud accesible experimentalmente, y donde asumimos el mismo tipo de distribución para protones que para neutrones.

Hemos utilizado diversos modelos para la interacción Λ -N.

- Un modelo efectivo de intercambio σ - ω . Este modelo es una versión simplificada del desarrollado en las referencias [26, 31]. Se consideran factores de forma de tipo monopolar, y por simplicidad hemos despreciado todo tipo de términos no locales y los términos de espín, que no contribuyen en núcleos de capa cerrada y, además, también se desprecian todos los términos de orden $\mathcal{O}\left(\left(\frac{m_{\text{mesón}}}{m_{\text{barión}}}\right)^2\right)$ ó $\mathcal{O}\left(\frac{m_{\text{mesón}}^2(m_{\Lambda}^2 - m_N^2)}{m_{\text{barión}}^4}\right)$

El potencial antes de incluir factores de forma, tiene la estructura

$$V_{\Lambda N}^{SW}(r) = V_{\Lambda N}^{\sigma}(r) + V_{\Lambda N}^{\omega}(r) \quad (2.55)$$

$$V_{\Lambda N}^{\sigma}(r) = -\frac{\bar{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}g_{\sigma NN}}{4\pi}m_{\sigma}Y(m_{\sigma}r) \quad (2.56)$$

$$V_{\Lambda N}^{\omega}(r) = \frac{m_{\omega}}{4\pi}\left(\bar{g}_{\omega\Lambda\Lambda}g_{\omega NN} - \frac{1}{4}\frac{m_{\omega}^2}{m_{\Lambda}m_N}\left(\bar{g}_{\omega\Lambda\Lambda}g_{\omega NN} - \frac{m_{\Lambda}}{m_N}\bar{g}_{\omega\Lambda\Lambda}f_{\omega NN} - g_{\omega\Lambda\Lambda}\bar{f}_{\omega\Lambda\Lambda}\right)\right)Y(m_{\omega}r) \quad (2.57)$$

Los acoplamientos $g_{\sigma NN}$, $g_{\omega NN}$ y $f_{\omega NN}$, como ya mencionamos anteriormente, fueron determinados en la ref. [31], y están recopilados en la tabla 2.3

Por otra parte, los acoplamientos $\bar{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}$, $\bar{g}_{\omega\Lambda\Lambda}$ y $\bar{f}_{\omega\Lambda\Lambda}$, deberían coincidir con los recopilados en la tabla 2.2. Sin embargo, estos acoplamientos podrían ser diferentes debido a que se está tratando con interacciones efectivas cuyos parámetros también tienen en cuenta contribuciones no incluidas explícitamente, como intercambio de mesones K , K^* , o estados intermedios tipo ΣN , así como efectos de renormalización debidos al medio nuclear. Por tanto, es preferible utilizar una nomenclatura distinta para estas constantes efectivas, incluyendo una barra ($g \rightarrow \bar{g}$). En los potenciales que hemos usado, las constantes $\bar{g}_{\omega\Lambda\Lambda}$ y $\bar{f}_{\omega\Lambda\Lambda}$ están fijadas a los mismos valores que $g_{\omega\Lambda\Lambda}$ y $f_{\omega\Lambda\Lambda}$ toman en el modelo de Bonn-Jülich, y $\bar{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}$ se ajusta para reproducir la energía del estado fundamental del sistema ${}_{\Lambda}^{A+1}Z$.

Los factores de forma se incluyen de forma análoga al caso del potencial $\Lambda\Lambda$ (véanse las ecs. (2.26)-(2.30)). En este caso, al ser distintos los bariones que interactúan, tenemos factores de forma diferentes en cada vértice, y la situación se simplifica. Entonces la sustitución sería

$$\int dk \frac{f(k) e^{ikr}}{k^2 + m^2} \longrightarrow \int dk \frac{f(k) e^{ikr}}{k^2 + m^2} \left(\frac{\Lambda_1^2 - m^2}{\Lambda_1^2 + k^2}\right) \left(\frac{\Lambda_2^2 - m^2}{\Lambda_2^2 + k^2}\right) \quad (2.58)$$

Descomponiendo en fracciones simples el integrando, se llega a la expresión [31]

$$V_{\Lambda N}^{\alpha}(r) = V_{\Lambda N}^{\alpha}(m_{\alpha}, r) - \frac{\Lambda_{\alpha NN}^2 - m_{\alpha}^2}{\Lambda_{\alpha NN}^2 - \Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}^2}V_{\Lambda N}^{\alpha}(\Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}, r) + \frac{\Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}^2 - m_{\alpha}^2}{\Lambda_{\alpha NN}^2 - \Lambda_{\alpha\Lambda\Lambda}^2}V_{\Lambda N}^{\alpha}(\Lambda_{\alpha NN}, r) \quad (2.59)$$

Hemos considerado un valor de 1 GeV para $\Lambda_{\sigma\Lambda\Lambda}$ a la hora de construir estos potenciales (SW1). Para el ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$, hemos estudiado también el caso $\Lambda_{\sigma\Lambda\Lambda} = 2$ GeV (SW2). Véanse las figs. 2.9 y 2.10

- Existen diversos trabajos específicos sobre el hipernúcleo ${}_{\Lambda}^5\text{He}$, en especial dedicados a su desintegración mesónica, y se han sugerido distintos potenciales. De entre estos, vamos a seleccionar dos, que incluyen parte repulsiva (YNG) o no

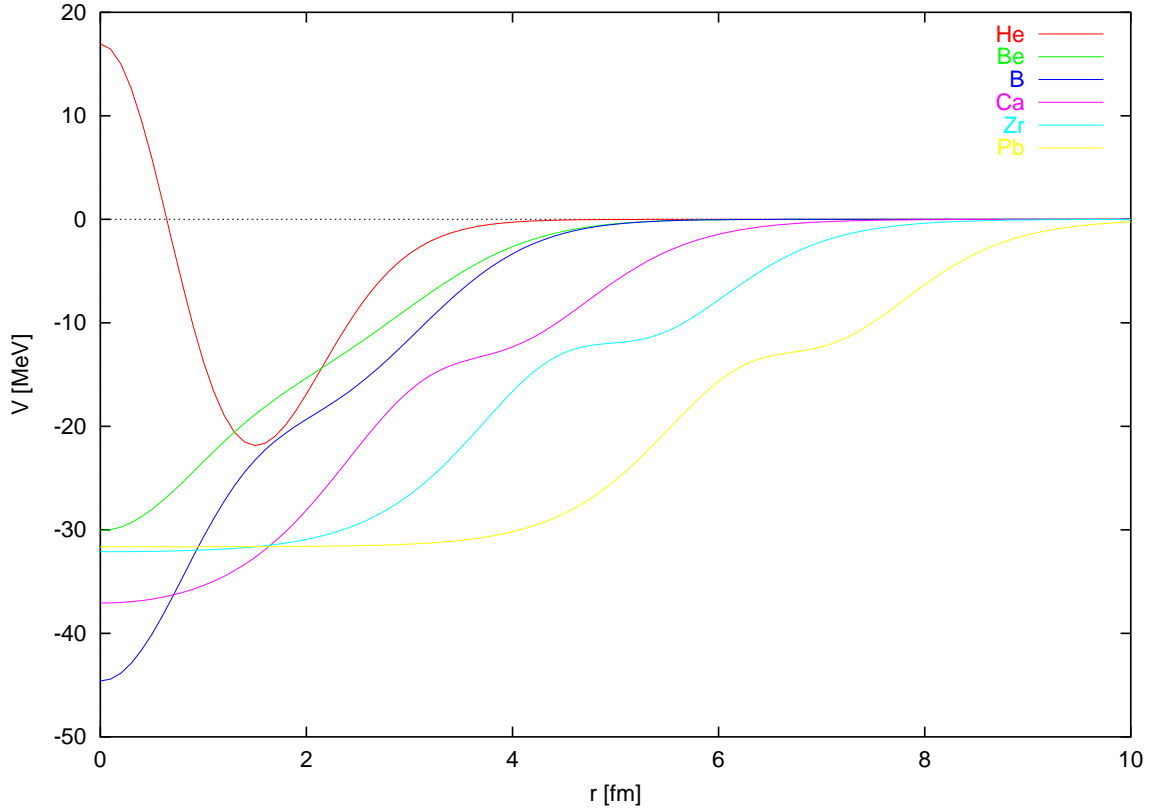


Figura 2.9: Potenciales tipo SW1 ($\Lambda_{\sigma\Lambda\Lambda} = 1$ GeV) para distintos hipernúcleos.

(ORG) en la interacción ΛN , y cuyos parámetros, han sido ajustados para reproducir la energía del estado fundamental del sistema ${}^5_{\Lambda}\text{He}$. Estos potenciales están dados por [42, 43]

$$\begin{aligned} V_{\Lambda N}^{ORG}(r) &= -38.19e^{-\left(\frac{r}{1.034}\right)^2} \text{ MeV} \\ V_{\Lambda N}^{YNG}(r) &= \left[919e^{-\left(\frac{r}{0.5}\right)^2} - 206.54e^{-\left(\frac{r}{0.9}\right)^2} - 9.62e^{-\left(\frac{r}{1.5}\right)^2} \right] \text{ MeV} \end{aligned} \quad (2.60)$$

con r dado en fm. En la fig. 2.10 se muestran los distintos potenciales usados en el estudio del ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$.

En la tabla 2.5 recopilamos los valores de los diversos parámetros libres que han aparecido en la discusión de los potenciales Λ -núcleo de esta sección.

2.3. Función de onda variacional

El esquema planteado en las secciones anteriores modela los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ como un problema de tres cuerpos, y se han discutido la forma y naturaleza de las interacciones entre los mismos. En esta sección discutiremos la familia de funciones a las que

Hipernúcleo	$\Lambda_{\sigma\Lambda\Lambda}$ [GeV]	YNG	ORG	BOY	SW1 1	SW2 2
${}^5_{\Lambda}\text{He}$	B_{Λ} [MeV]	3.12	3.10	3.12(2)	3.12(2)	3.12(2)
	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ [fm]	3.16	2.77	3.02(1)	3.12(1)	3.00(1)
	$-V_0$ ó $\hat{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}$			29.95(6)	3.4916(11)	2.5662(7)
${}^9_{\Lambda}\text{Be}$	B_{Λ} [MeV]			6.71(4)	6.71(4)	6.71(4)
	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ [fm]			2.46(1)	2.61(1)	2.533(5)
	$-V_0$ ó $\hat{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}$			28.02(7)	3.4389(16)	2.5436(12)
${}^{12}_{\Lambda}\text{B}$	B_{Λ} [MeV]			11.37(6)	11.37(6)	11.37(6)
	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ [fm]			2.216(3)	2.259(4)	2.183(3)
	$-V_0$ ó $\hat{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}$			31.98(10)	3.3938(14)	2.506(1)
${}^{41}_{\Lambda}\text{Ca}$	B_{Λ} [MeV]			18.7 ± 1.1	18.7 ± 1.1	18.7 ± 1.1
	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ [fm]			2.47(3)	2.21(3)	2.26(3)
	$-V_0$ ó $\hat{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}$			29.7 ± 1.3	3.194(16)	2.390(12)
${}^{91}_{\Lambda}\text{Zr}$	B_{Λ} [MeV]			22.0(5)	22.0(5)	22.0(5)
	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ [fm]			2.91(1)	2.562(7)	2.390(12)
	$-V_0$ ó $\hat{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}$			28.9(5)	3.129(7)	2.353(5)
${}^{209}_{\Lambda}\text{Pb}$	B_{Λ} [MeV]			26.5(5)	26.5(5)	26.5(5)
	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ [fm]			3.588(7)	3.341(1)	3.428(5)
	$-V_0$ ó $\hat{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}$			30.7(5)	3.145(7)	2.371(5)

Cuadro 2.5: Energías de ligadura y radio cuadrático medio del estado fundamental de diferentes hipernúcleos Λ utilizando los potenciales descritos en la sección 2.2.2 de esta memoria. En la tabla se dan también los parámetros de ajuste. Los errores (entre paréntesis) en los parámetros son debidos a errores experimentales en las energías de ligadura que se ajustan. En esta tabla hemos usado $\hat{g}_{\sigma\Lambda\Lambda} = \bar{g}_{\sigma\Lambda\Lambda}/\sqrt{4\pi}$

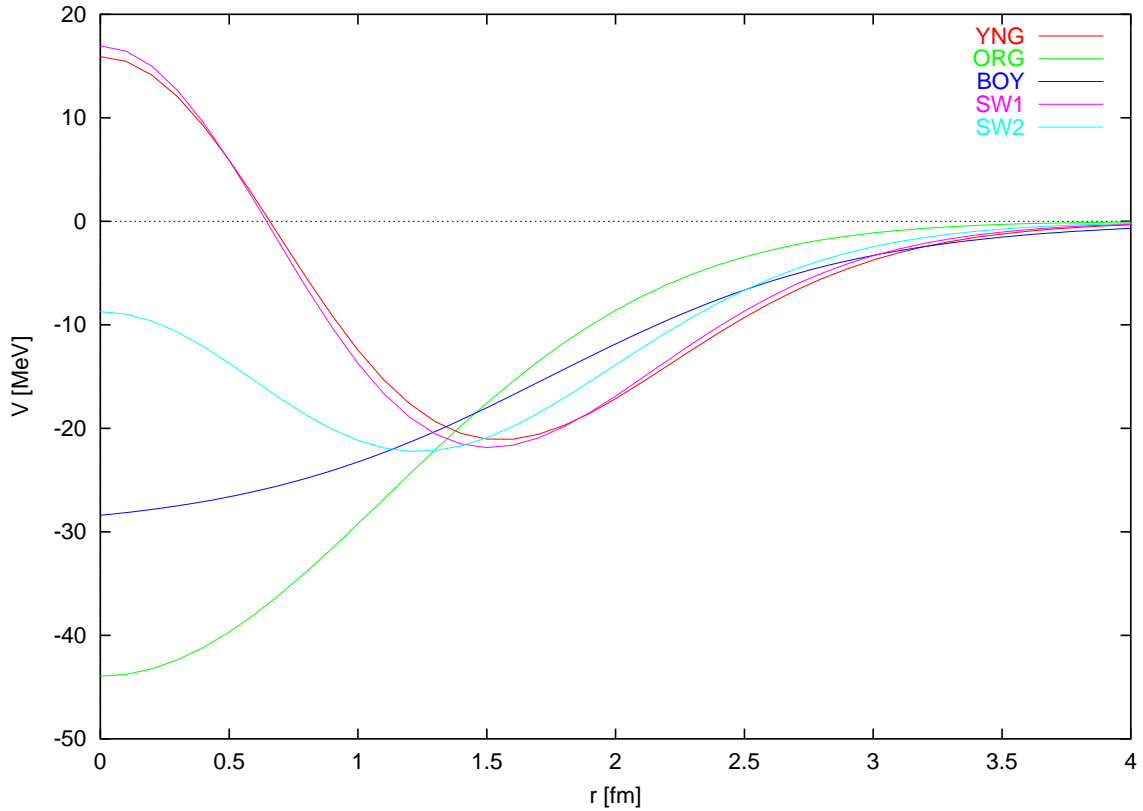


Figura 2.10: Potenciales considerados para el hipernúcleo ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$. Sólo los potenciales SW1 e YNG presentan repulsión a cortas distancias. Los estudios de desintegración mesónica favorecen estos potenciales.

aplicaremos el principio variacional. En la ref. [18] se estudiaron esquemas basados en técnicas tipo Hartree-Fock (HF) y variacionales (VAR), donde se podían incluir correlaciones de corto alcance: dependencia de r_{12} en la función de onda. En ambos casos la interacción efectiva $\Lambda\Lambda$ obtenida al ajustar los datos experimentales era mucho más atractiva que la que se deduce del sistema hiperón-nucleón en el vacío. Dado que la interacción efectiva $\Lambda\Lambda$ obtenida a partir de intercambio de σ , ω y ϕ , tiene un comportamiento *hard core* a cortas distancias, fijado el potencial $\Lambda\Lambda$, las energías obtenidas mediante el procedimiento VAR eran 30-40% más bajas que las obtenidas mediante HF. Esto es debido a la posibilidad de disminuir drásticamente la probabilidad de que los dos hiperones estén muy juntos, gracias a la dependencia de r_{12} de la función de onda variacional.

Para estudiar el estado fundamental de hipernúcleos $\Lambda\Lambda$, acoplamos el momento angular orbital relativo y el espín de los dos hiperones a cero (canal 1S_0). Por tanto la función de onda espacial sólo puede depender de las distancias relativas r_1 , r_2 y r_{12} ,

$$\Phi(1, 2) = \Psi(r_1, r_2, r_{12})\chi^{S=0} \quad (2.61)$$

donde $\chi^{S=0}$ es la función de onda singlete de espín. Notese que el momento angular orbital relativo de cada hiperón con el núcleo no es necesariamente cero, aunque ambos

son iguales para poder ser acoplados a cero. Por último, por tratarse de fermiones idénticos, se debe de cumplir

$$\Psi(r_1, r_2, r_{12}) = \Psi(r_2, r_1, r_{12}) \quad (2.62)$$

En la ref. [18] la función de onda se desarrollo en términos de una familia de funciones tipo Hylleraas.

$$\Psi(r_1, r_2, r_{12}) = \sum_{abc} C_{abc} (r_1^a r_2^b + r_1^b r_2^a) r_{12}^c e^{-\alpha(r_1+r_2)} \quad (2.63)$$

Esta familia de funciones, si bien es muy adecuada en el tratamiento de problemas de Física Atómica, donde no aparecen potenciales fuertemente repulsivos a cortas distancias, no constituyen un conjunto de funciones de onda que permita una solución eficiente del problema de los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$, ya que en la referencia [18] se necesitaron hasta un total de 161 términos para obtener convergencia.

En este trabajo hemos adoptado un esquema variacional distinto, y hemos utilizado una familia de funciones de onda tipo Jastrow. Los factores Jastrow, ampliamente utilizados en Física Nuclear [1, 2, 3], tratan de forma sencilla el fuerte core repulsivo del potencial $\Lambda\Lambda$ a cortas distancias y conducen a un sencillo esquema de resolución del problema de tres cuerpos planteado, con la inclusión de correcciones de medio de tipo RPA a la interacción $\Lambda\Lambda$ de vacío. Así, tomamos como funciones prueba en el esquema variacional

$$\Psi(r_1, r_2, r_{12}) = N f(r_{12}) \phi(r_1) \phi(r_2) \quad (2.64)$$

con $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$f(r_{12}) = \left(1 + \frac{a_1}{1 + \left(\frac{r_{12}-R}{b_1}\right)^2} \right) \prod_{i=2}^3 \left(1 - a_i e^{-b_i^2 r_{12}^2} \right) \quad (2.65)$$

donde $a_i, b_i, R, i = 1, 3$ son siete parámetros a ajustar variacionalmente y N es una constante de normalización. La función de onda monoparticular, ϕ , la fijamos a la función de onda del estado fundamental (onda s) del hipernúcleo simple Λ correspondiente. Así, el conjunto de funciones propuestas constituyen una familia de funciones simples y manejables.

A la hora de buscar la función de correlación, $f(r_{12})$ se han seguido los siguientes criterios:

- La función de correlación tiende a un valor constante cuando $r_{12} \rightarrow \infty$, puesto que en ese límite $V_{\Lambda\Lambda} \rightarrow 0$ y el hamiltoniano pasa a ser esencialmente suma de operadores monoparticulares $h_{sp}(i)$. Ese valor constante es irrelevante por normalización y tomaremos que $f \rightarrow 1$ cuando $r_{12} \rightarrow 0$.
- Se toman funciones tales que $f(r_{12}) \sim 0$ cuando $r_{12} \rightarrow 0$. De esta forma se evita el intenso efecto repulsivo del potencial $\Lambda\Lambda$ cuando los dos hiperones están próximos el uno del otro.

- Se buscan formas funcionales para f que puedan acomodar un máximo en las proximidades del mínimo del potencial $\Lambda\Lambda$, que resulta estar muy próximo a la zona repulsiva de la interacción. Utilizamos, un factor lorentziano porque proporciona mejores resultados que emplear sólo tres factores gaussianos.

Con esta familia de funciones en primer lugar, hemos reproducido todos los resultados variacionales obtenidos en [18], donde no se consideraban efectos RPA. La enorme simplificación conseguida en la función de onda supone el primer resultado importante de este trabajo, la cual nos ha permitido evaluar el efecto de las correlaciones tipo RPA.

2.4. Resultados

2.4.1. Efecto de inclusión del término RPA en el potencial

En la ref. [7] se afirma que los valores experimentales de las energías de ligadura correspondientes a los hipernúcleos ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$ y ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$ no son compatibles entre sí. Los autores usan un modelo basado en *clusters* de partículas α , y que modela los hipernúcleos ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$ y ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$, como sistemas de tres y cuatro cuerpos respectivamente. Para el hipernúcleo ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$ nuestro modelo es más completo, pues mejoramos la descripción al incluir correlaciones tipo RPA, Para el caso del hipernúcleo ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$, el modelo α -*cluster* de estos autores implementa unos grados de libertad (interacción α - α) distintos de los RPA discutidos en este trabajo. No obstante, es interesante resaltar que la generalización de un modelo basado en α -*clusters*, no sólo a hipernúcleos más pesados, sino también al ${}_{\Lambda\Lambda}^{13}\text{B}$, supone, cuando menos, una dificultad casi insalvable.

En la tabla 2.6 mostramos los resultados que obtenemos para las energías de ligadura de diversos hipernúcleos $\Lambda\Lambda$. En cuanto a la interacción Λ -núcleo, se ha utilizado el potencial YNG para el helio y BOY para el resto de hipernúcleos. A modo de ejemplo, los parámetros que determinan la función de correlación, para cada hipernúcleo, están recogidos en la tabla 2.7 para un caso particular. Los resultados de la tabla 2.6 muestran cómo las masas de los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ conocidos son compatibles con los datos de dispersión barión-barión, una vez que las correcciones de medio tipo RPA han sido tenidas en cuenta. En particular, se encuentra un acuerdo razonable y simultáneo con las energías de ligadura experimentales de ${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$, ${}_{\Lambda\Lambda}^{10}\text{Be}$ y ${}_{\Lambda\Lambda}^{13}\text{B}$ cuando se utiliza $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV. Ésto contradice las conclusiones de los autores de la ref. [7].

En las figuras 2.11 y 2.12, mostramos las funciones reducidas radiales monoparticulares con normalización $\int_0^\infty dr |u(r)|^2 = 1$ relacionadas con $\phi(r)$ mediante $\phi(r) = \frac{u(r)}{r} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ para diversos potenciales Λ -núcleo.

En las figuras 2.13, 2.14 y 2.15 mostramos las funciones de correlación $f(r_{12})$, ec.(2.65), calculadas para los diferentes hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ estudiados en este trabajo. Como se apuntó más arriba, la normalización se escoge de tal forma que tienden a uno

	$B_{\Lambda\Lambda}^{\text{exp}}$	Sin RPA				Con RPA			
		$\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ [GeV]				$\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ [GeV]			
		no ϕ	1.5	2.0	2.5	no ϕ	1.5	2.0	2.5
${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	$7.25^{+0.38}_{-0.31}$	6.15	6.22	6.53	6.84	6.34	6.41	6.82	7.33
${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	17.7 ± 0.4	13.1	13.2	13.7	14.2	14.5	14.6	15.6	16.8
${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	27.5 ± 0.7	22.5	22.6	23.2	23.8	24.2	24.2	25.4	27.0
${}^{42}_{\Lambda\Lambda}\text{Ca}$	—	37.2	37.3	37.7	38.1	38.3	38.2	39.1	40.1
${}^{92}_{\Lambda\Lambda}\text{Zr}$	—	44.1	44.2	44.4	44.7	44.6	44.7	45.2	46.0
${}^{210}_{\Lambda\Lambda}\text{Pb}$	—	53.1	53.1	53.3	53.4	53.4	53.4	53.7	54.1

Cuadro 2.6: Energías de ligadura $B_{\Lambda\Lambda}$ (MeV). Las energías experimentales han sido tomadas de las referencias [11] (He), [12], [13],[14] (Be) y [14], [15] (B). Mostramos los resultados teóricos con y sin inclusión de los efectos RPA, discutidos en la sección 2.2.1 de esta memoria, y con diferentes tratamientos para el potencial debido al potencial de intercambio del mesón ϕ . Los valores de B_{Λ} calculados son 3.12, 6.71, 11.37, 18.7, 22.0 y 26.5 MeV, para los hipernúcleos ${}^5_{\Lambda}\text{He}$, ${}^9_{\Lambda}\text{Be}$, ${}^{12}_{\Lambda}\text{B}$, ${}^{41}_{\Lambda}\text{Ca}$, ${}^{91}_{\Lambda}\text{Zr}$ y ${}^{209}_{\Lambda}\text{Pb}$ respectivamente (tabla 2.5). Se ha utilizado el potencial YNG para el helio y BOY para el resto.

cuando $r_{12} \rightarrow \infty$, por tanto, para grandes distancias de separación r_{12} , la función de onda total se factoriza como el producto de dos funciones de onda monoparticulares.

Para entender mejor la importancia de las correcciones debidas al término RPA del potencial, definimos las cantidades Δ_1 y Δ_2 como

$$\Delta_1 = \frac{B_{\Lambda\Lambda}^{\text{RPA}} - B_{\Lambda\Lambda}}{B_{\Lambda\Lambda}} \quad (2.66)$$

$$\Delta_2 = \frac{\Delta B_{\Lambda\Lambda}^{\text{RPA}} - \Delta B_{\Lambda\Lambda}}{\Delta B_{\Lambda\Lambda}} = \frac{B_{\Lambda\Lambda}^{\text{RPA}} - B_{\Lambda\Lambda}}{B_{\Lambda\Lambda} - 2B_{\Lambda}}$$

Los valores de estos parámetros se dan en la tabla 2.8 para el caso $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV, donde puede verse que las correcciones RPA que encontramos en este trabajo son importantes, sobretodo para núcleos medios. En el caso del hipernúcleo ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, como cabría esperar, Δ_2 toma el valor más pequeño. Para núcleos pesados, el valor mismo

	a_1	b_1	R	a_2	b_2	a_3	b_3
He	6.51	0.81	0.24	0.91	0.94	0.88	0.98
Be	3.33	0.82	0.44	0.77	1.29	0.88	1.16
B	5.39	0.72	0.43	0.81	1.12	0.84	0.99
Ca	1.75	0.71	0.59	0.90	1.47	0.58	1.41
Zr	2.60	0.74	0.51	0.55	1.61	0.91	1.15
Pb	3.75	0.73	0.47	0.85	0.99	0.75	1.51

Cuadro 2.7: Parámetros, en fm, de la función $f(r_{12})$ para una interacción $\Lambda\Lambda$ con correcciones de RPA y una masa de corte de $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV.

	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	${}^{42}_{\Lambda\Lambda}\text{Ca}$	${}^{92}_{\Lambda\Lambda}\text{Zr}$	${}^{210}_{\Lambda\Lambda}\text{Pb}$
Δ_1	0.07	0.18	0.13	0.05	0.03	0.01
Δ_2	0.82	3.33	3.02	2.86	1.86	1.76

Cuadro 2.8: Efecto de correcciones de medio tipo RPA.

		Sin RPA				Con RPA			
		$\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ [GeV]				$\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ [GeV]			
		no ϕ	1.5	2.0	2.5	no ϕ	1.5	2.0	2.5
${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	$7.25^{+0.38}_{-0.31}$	5.96	6.05	6.35	6.66	6.14	6.22	6.64	7.17
${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	17.7 ± 0.4	13.6	13.7	14.1	14.6	14.8	14.9	15.6	16.7
${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	27.5 ± 0.7	22.4	22.5	23.1	23.7	24.1	24.1	25.2	26.8
${}^{42}_{\Lambda\Lambda}\text{Ca}$	—	36.9	36.9	37.6	38.1	38.5	38.5	39.6	41.2
${}^{92}_{\Lambda\Lambda}\text{Zr}$	—	43.8	43.9	44.3	44.6	44.7	44.7	45.5	46.4
${}^{210}_{\Lambda\Lambda}\text{Pb}$	—	53.0	53.1	53.2	53.4	53.4	53.4	53.8	54.3

Cuadro 2.9: Idem tabla 2.6, pero utilizando el modelo SW1 para describir la interacción Λ -núcleo para todos los hipernúcleos.

de $\Delta B_{\Lambda\Lambda}$ es más pequeño, porque en promedio los dos hiperones están más alejados el uno del otro que en un núcleo más ligero.

2.4.2. Sensibilidad al potencial Λ -núcleo

También hemos estudiado la sensibilidad de nuestros resultados al potencial Λ -núcleo utilizado. Así, en la tabla 2.9 mostramos los resultados obtenidos con el potencial SW1. Estos resultados son similares a los mostrados en la tabla 2.6.

Para el caso del hipernúcleo ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, hemos examinado también los resultados obtenidos con potenciales ORG, BOY y SW2 (sección 2.2.2). Los resultados se muestran en la tabla 2.10. Estos potenciales no incorporan el efecto de una repulsión $\Lambda\Lambda$ a cortas distancias y por tanto, el radio cuadrático medio del ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ es menor (tabla 2.5). Como consecuencia, cuando se incluyen correlaciones RPA, las energías de ligadura que obtenemos con estos potenciales son mayores que los valores recogidos en las tablas 2.6, 2.9 y mayores que el valor experimental si se usa $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV. Los resultados experimentales de desintegración mesónica [42, 43], también parecen desfavorecer estas interacciones sin repulsión a cortas distancias.

Potencial	Sin RPA				Con RPA			
	no ϕ	$\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ [GeV]			no ϕ	$\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$ [GeV]		
		1.5	2.0	2.5		1.5	2.0	2.5
ORG	5.85	5.98	6.52	7.07	6.67	6.72	7.64	8.87
BOY	6.08	6.14	6.48	6.94	6.48	6.54	7.14	7.86
SW2	6.26	6.36	6.75	7.16	6.61	6.67	7.26	7.95

Cuadro 2.10: Igual que la tabla 2.9 pero para el ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ y usando diversos potenciales Λ -núcleo.

2.4.3. Distancia relativa entre los hiperones Λ

Una cantidad de interés es la probabilidad $P(r_{12})$ de encontrar los dos hiperones Λ a una cierta distancia relativa, r_{12} . Esta probabilidad viene dada por

$$P(r_{12}) = \int d^3r_1 \int d^3r_2 \delta(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - r_{12}) |\Psi(r_1, r_2, r_{12})|^2 \quad (2.67)$$

En las figuras 2.16, 2.17 y 2.18 se muestran las probabilidades $P(r_{12})$ calculadas con los potenciales BOY, YNG y SW1. La moda de esta distribución de probabilidad se encuentra en torno a los 2 fm para núcleos ligeros. Por otra parte, se observa una tendencia de los hiperones Λ a estar más alejadas entre sí en los hipernúcleos más pesados.

2.4.4. Sensibilidad a los acoplamiento del mesón ϕ

Otro aspecto estudiado en este trabajo ha sido la sensibilidad de los resultados frente a cambios en las constantes de acoplamiento del mesón ϕ . En este sentido hemos variado las constantes de acoplamiento $g_{\phi\Lambda\Lambda}$ y $f_{\phi\Lambda\Lambda}$ en un $\pm 5\%$ y $\pm 10\%$ con respecto a la predicción $SU(6)$ (tabla 2.2). Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 2.11, 2.12. Encontramos cambios moderadamente apreciables en las energías para los valores más altos de $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda}$. Estos cambios llegan a ser mayores para variaciones de $f_{\phi\Lambda\Lambda}$ que para variaciones de $g_{\phi\Lambda\Lambda}$, aumentan con A , y son mayores cuando los efectos RPA son tenidos en cuenta. Por ejemplo, para $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV con RPA las energías de los hipernúcleos ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, ${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$ y ${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$ varían entre los rangos 7.00–7.74, 16.0–17.7 y 26.0–28.2 MeV, respectivamente.

2.4.5. Dependencia de la energía de excitación utilizada en la función de Lindhard

También se han considerado distintos valores para el *gap* de excitación incluido en la función de Lindhard, en particular para el caso del ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$. En este punto hemos considerado valores para la energía de excitación del helio de 20 y 24 MeV. Los cambios

	Λ_ϕ [GeV]	Sin RPA			Con RPA		
		1.5	2	2.5	1.5	2	2.5
−10 %	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.27	6.59	6.91	6.44	6.88	7.42
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.2	13.7	14.3	14.7	15.7	17.0
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.7	23.3	23.9	24.4	25.7	27.3
−5 %	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.26	6.56	6.88	6.42	6.86	7.35
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.2	13.7	14.2	14.6	15.6	16.9
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.6	23.2	23.8	24.3	25.5	27.1
SU(6)	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.22	6.53	6.84	6.41	6.82	7.33
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.2	13.7	14.2	14.6	15.6	16.8
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.6	23.2	23.8	24.2	25.4	27.0
+5 %	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.22	6.51	6.82	6.38	6.77	7.26
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.2	13.6	14.1	14.5	15.5	16.6
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.6	23.1	23.7	24.2	25.3	26.8
+10 %	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.21	6.49	6.80	6.35	6.73	7.21
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.1	13.6	14.1	14.5	15.4	16.5
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.6	23.1	23.6	24.1	25.2	26.6

Cuadro 2.11: Energías de ligadura (en MeV) obtenidas variando $g_{\phi\Lambda\Lambda} = \pm 5\%, \pm 10\%$ con respecto al valor de SU(6), con $f_{\phi\Lambda\Lambda}$ fijado al valor predicho por esta simetría.

son moderados. Sin embargo, si se toma un *gap* de sólo 3 MeV, las diferencias son muy apreciables. Los resultados se encuentran en la tabla 2.13

2.5. Conclusiones

Hemos mostrado que no es posible describir las masas experimentales de los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ sin incluir correcciones de medio. La resumación de la serie RPA nos ha permitido deducir un potencial $\Lambda\Lambda$ efectivo, que depende del hipernúcleo considerado, que aumenta la energía de ligadura y que proporciona, cuando se tienen en cuenta incertidumbres teóricas y experimentales, una descripción razonable de las masas de los hipernúcleos de ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, ${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$ y ${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$. Es importante resaltar, que esta interacción efectiva está construida a partir de una interacción tipo Bonn–Jülich ajustada a los datos de difusión barión–barión en el espacio libre, incorporando predicciones que se deducen de la simetría espín–sabor $SU(6)$.

Por tanto, nuestras conclusiones contradicen a las de los autores de la ref. [7] sobre la incompatibilidad de las energías de ligadura de ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, ${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$ y ${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$.

Λ_ϕ [GeV]		Sin RPA			Con RPA		
		1.5	2	2.5	1.5	2	2.5
-10 %	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.19	6.41	6.64	6.33	6.68	7.00
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.1	13.5	13.8	14.5	15.1	16.0
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.5	22.9	23.4	24.1	24.9	26.0
-5 %	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.21	6.47	6.74	6.37	6.72	7.15
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.2	13.6	14.0	14.5	15.3	16.3
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.6	23.1	23.6	24.2	25.1	26.4
SU(6)	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.22	6.53	6.84	6.41	6.82	7.33
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.2	13.7	14.2	14.6	15.6	16.8
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.6	23.2	23.8	24.2	25.4	27.0
+5 %	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.26	6.61	6.99	6.43	6.91	7.51
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.2	13.8	14.6	14.7	15.8	17.2
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.7	23.3	24.0	24.3	25.7	27.6
+10 %	${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$	6.29	6.69	7.13	6.47	7.03	7.74
	${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$	13.3	13.9	14.6	14.7	16.1	17.7
	${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$	22.7	23.5	24.3	24.4	26.0	28.2

Cuadro 2.12: Energías de ligadura (en MeV) obtenidas variando $f_{\phi\Lambda\Lambda} = \pm 5\%, \pm 10\%$ con respecto al valor de SU(6), con $g_{\phi\Lambda\Lambda}$ fijado al valor predicho por esta simetría.

gap	no ϕ	$\Lambda_\phi = 1500$	$\Lambda_\phi = 2000$	$\Lambda_\phi = 2500$
24 MeV	6.30	6.38	6.79	7.27
20 MeV	6.34	6.41	6.82	7.33
3 MeV	6.70	6.77	7.25	7.87

Cuadro 2.13: Energías de ligadura (en MeV) para el hipernúcleo ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ obtenidas con diferentes valores del gap de excitación. En todos los casos, se utiliza el potencial YNG para describir la interacción Λ -núcleo y se incluyen efectos RPA.

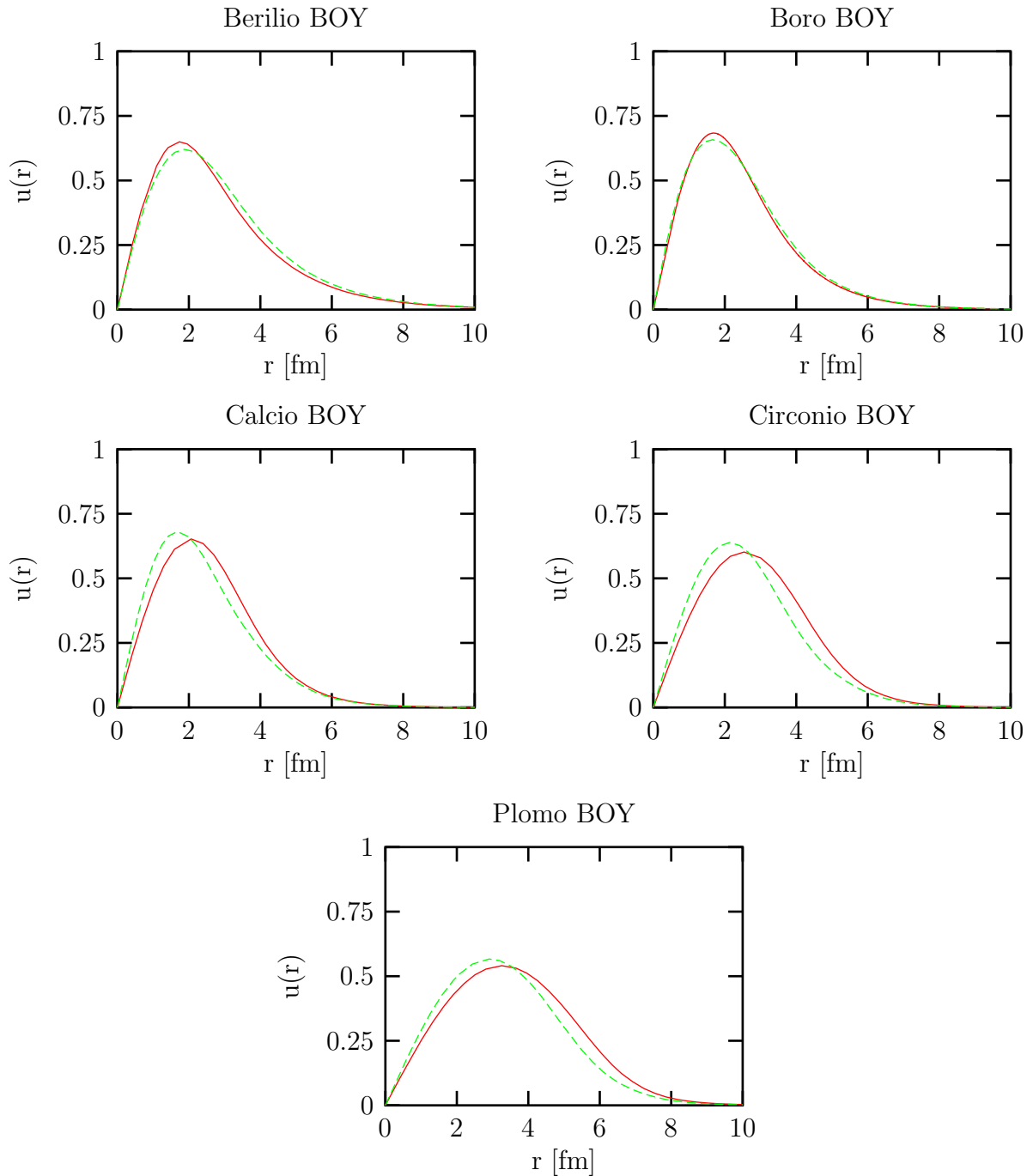


Figura 2.11: Funciones radiales reducidas monoparticulares para para los potenciales BOY y SW1. Clave de colores: Rojo: BOY; Verde: SW1.

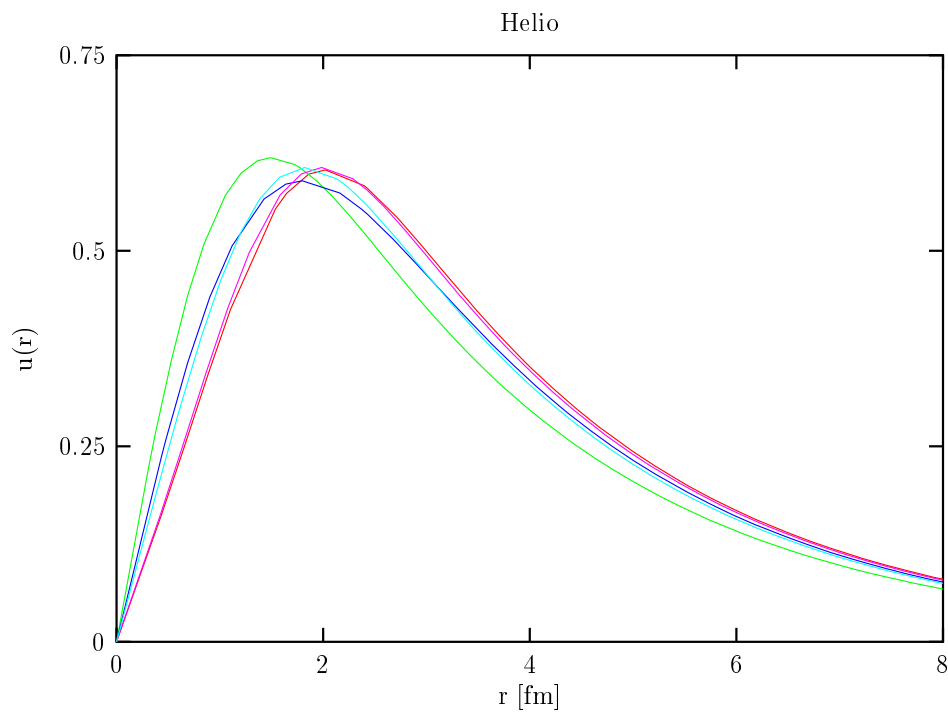


Figura 2.12: Funciones de onda para los distintos potenciales usados en el estudio del hipernúcleo ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$. Clave de colores: Rojo: YNG; Verde: ORG; Azul: BOY; Violeta: SW1; Celeste: SW2. Las líneas roja y violeta prácticamente se superponen, debido a que estos dos tipos de potencial son casi idénticos. El potencial ORG es el más profundo en el origen, y este potencial es, pues, aquél en que la función de onda tiene su máximo más cerca del origen.

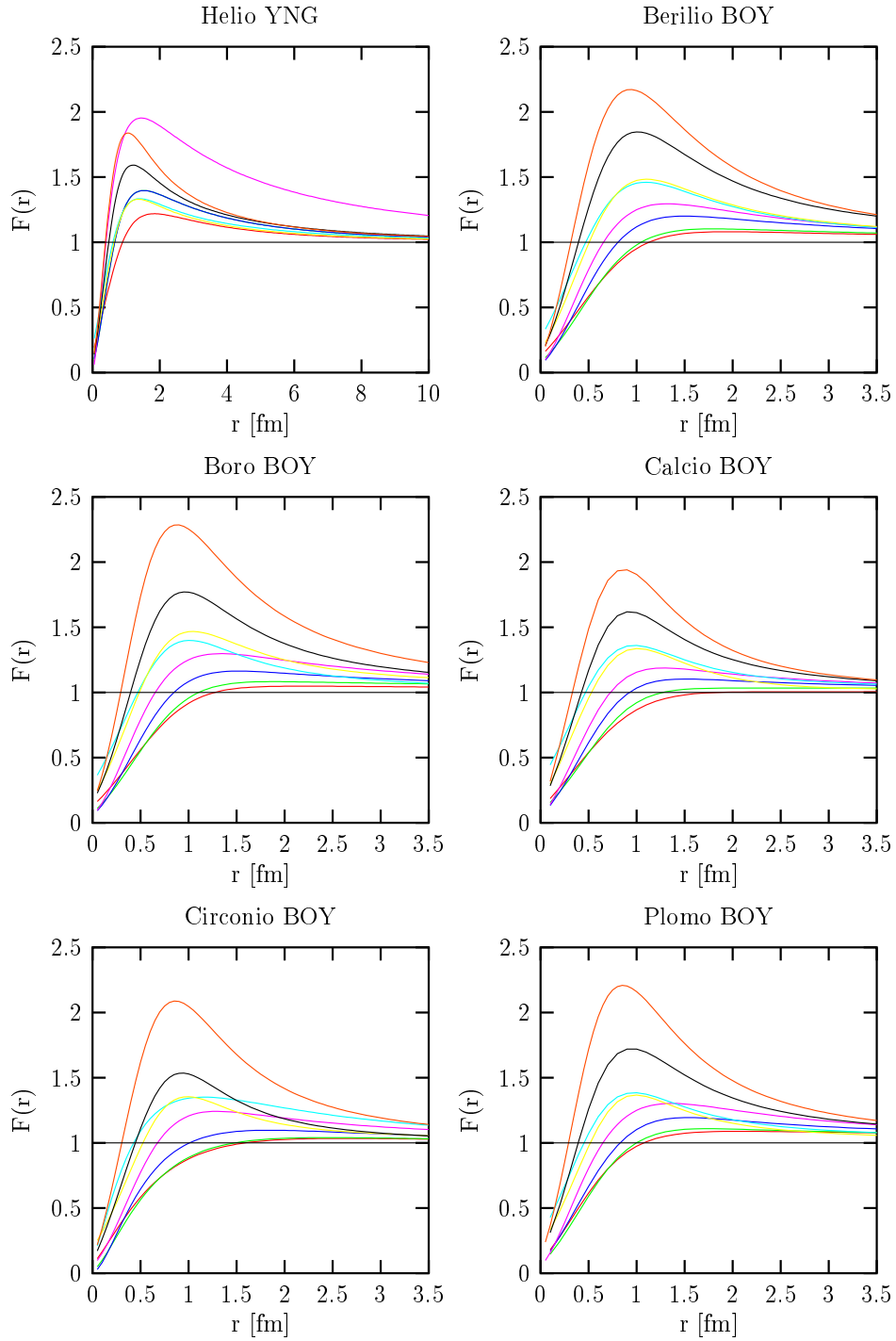


Figura 2.13: Funciones de correlación calculadas para los potenciales YNG y BOY. Clave de colores: Rojo: Sin RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Verde: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Azul: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Violeta: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV; Celeste: Con RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Amarillo: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Negro: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Naranja: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV

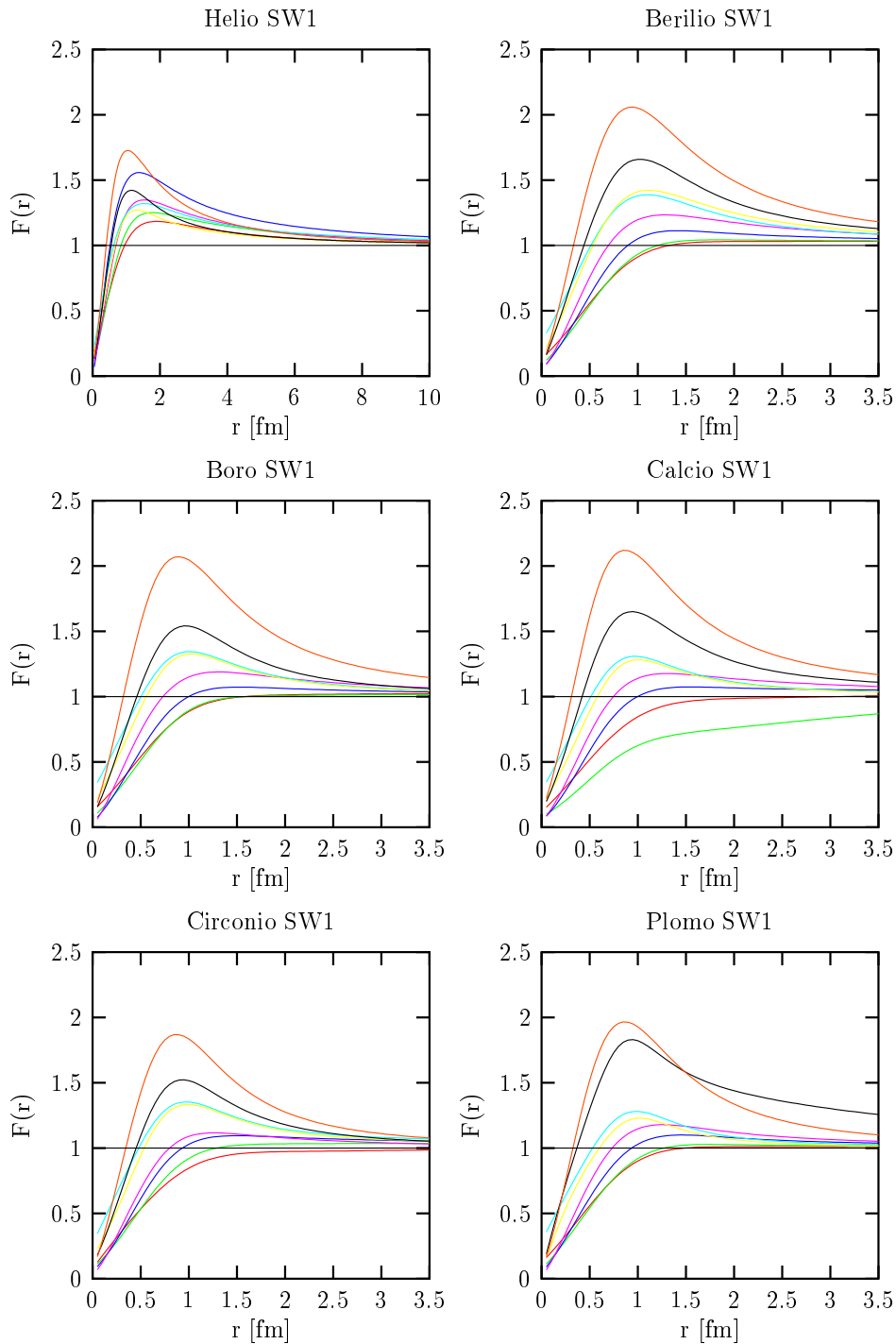


Figura 2.14: Funciones de correlación calculadas para los potenciales SW1. Clave de colores: Rojo: Sin RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Verde: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Azul: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Violeta: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV; Celeste: Con RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Amarillo: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Negro: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Naranja: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV

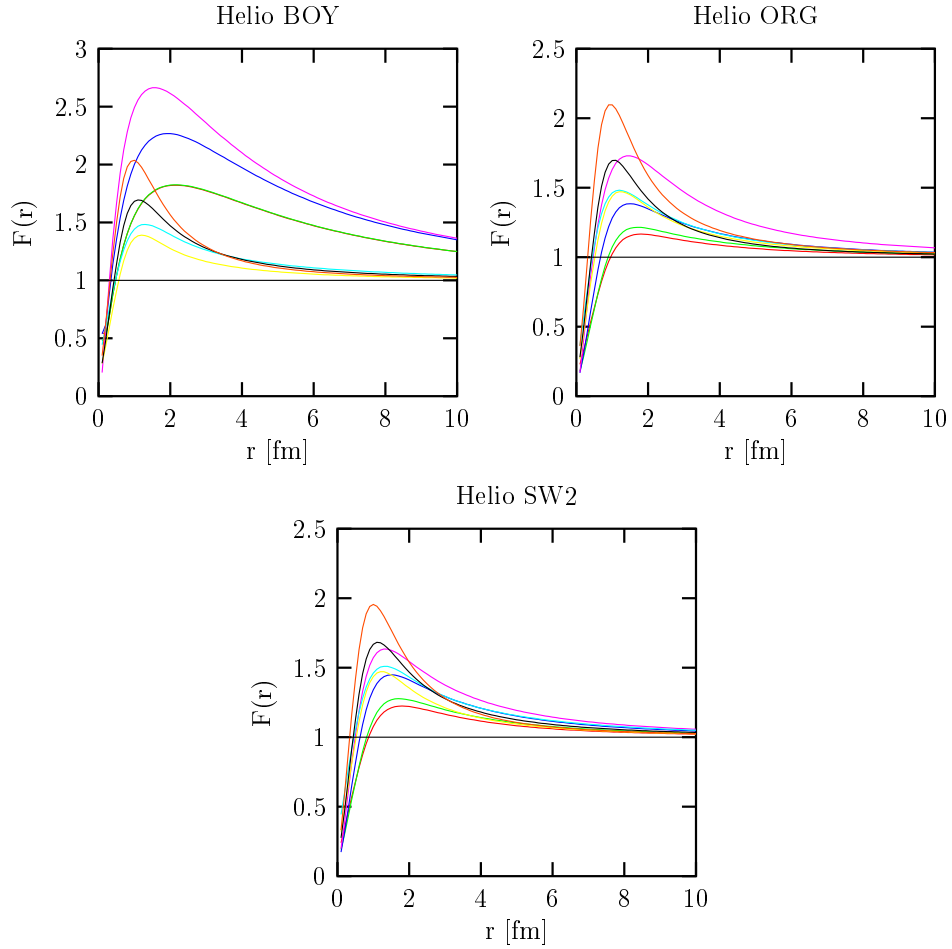


Figura 2.15: Funciones de correlación para otros potenciales Λ -He. Clave de colores: Rojo: Sin RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Verde: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Azul: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Violeta: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV; Celeste: Con RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Amarillo: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Negro: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Naranja: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV

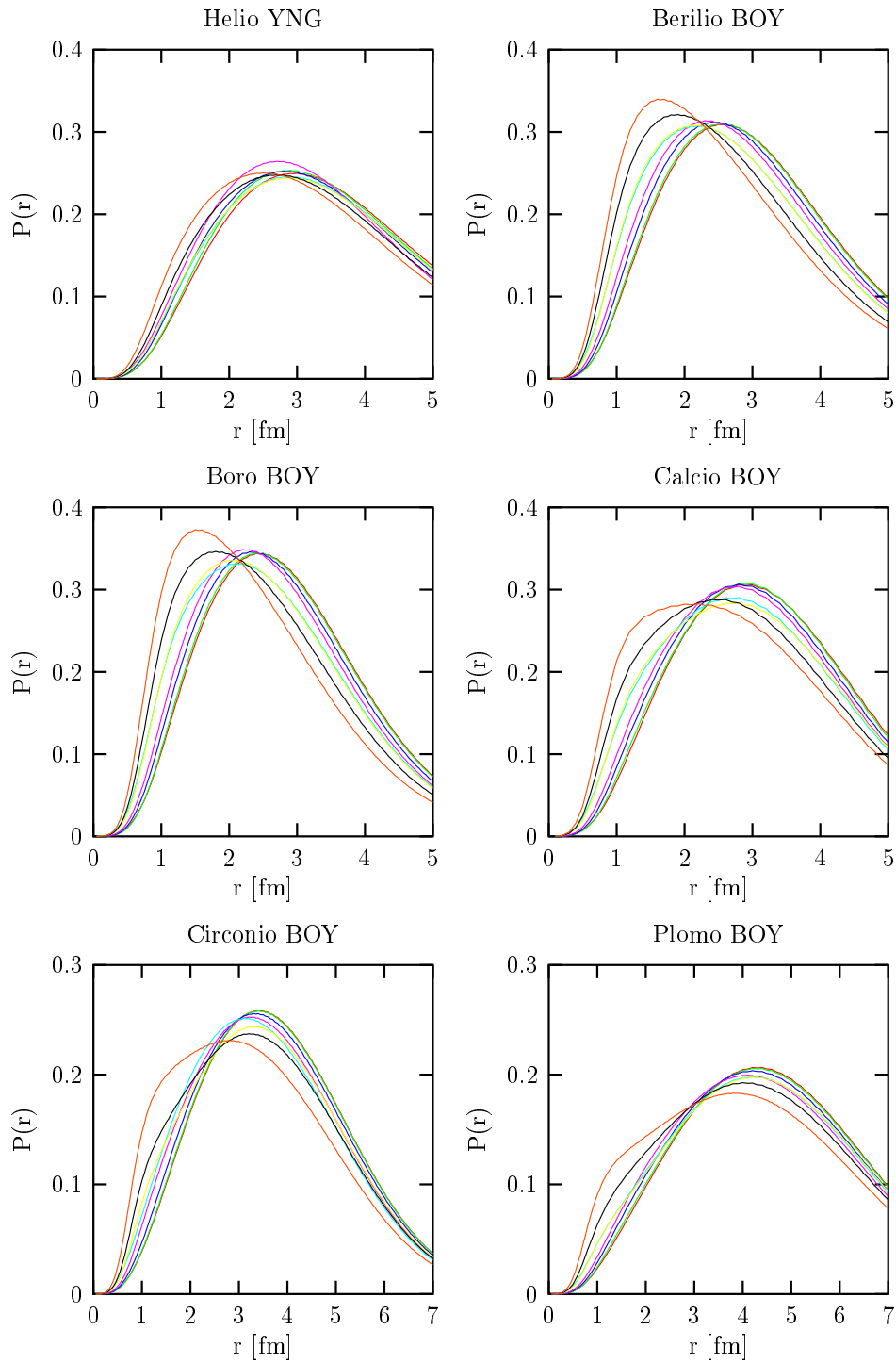


Figura 2.16: Distancia relativa entre los hiperones Λ para potenciales YNG y BOY. Clave de colores: Rojo: Sin RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Verde: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Azul: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Violeta: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV; Celeste: Con RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Amarillo: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Negro: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Naranja: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV

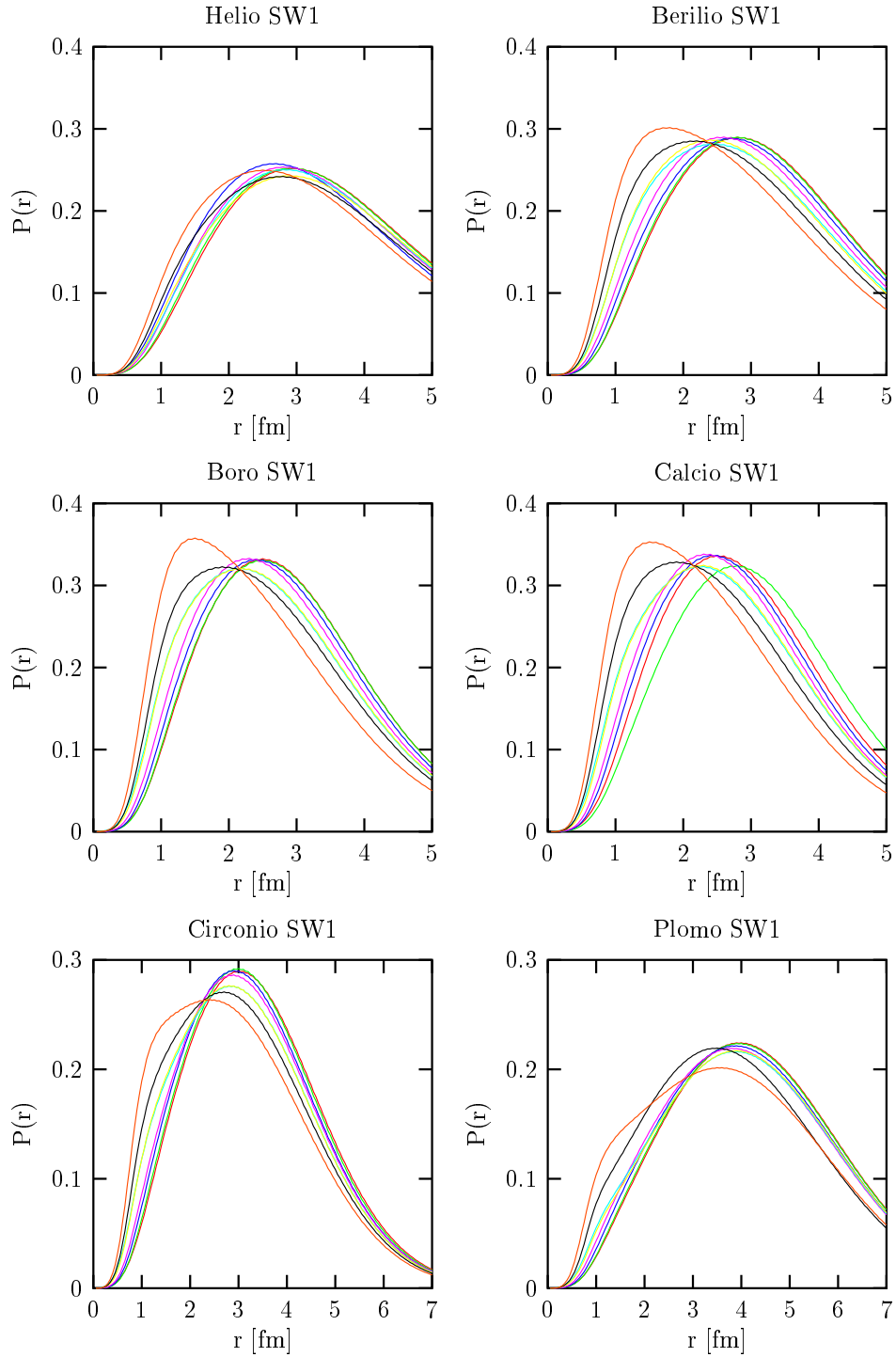


Figura 2.17: Distancia relativa entre los hiperones Λ para el potencial SW1. Clave de colores: Rojo: Sin RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Verde: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Azul: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Violeta: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV; Celeste: Con RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Amarillo: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Negro: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Naranja: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV

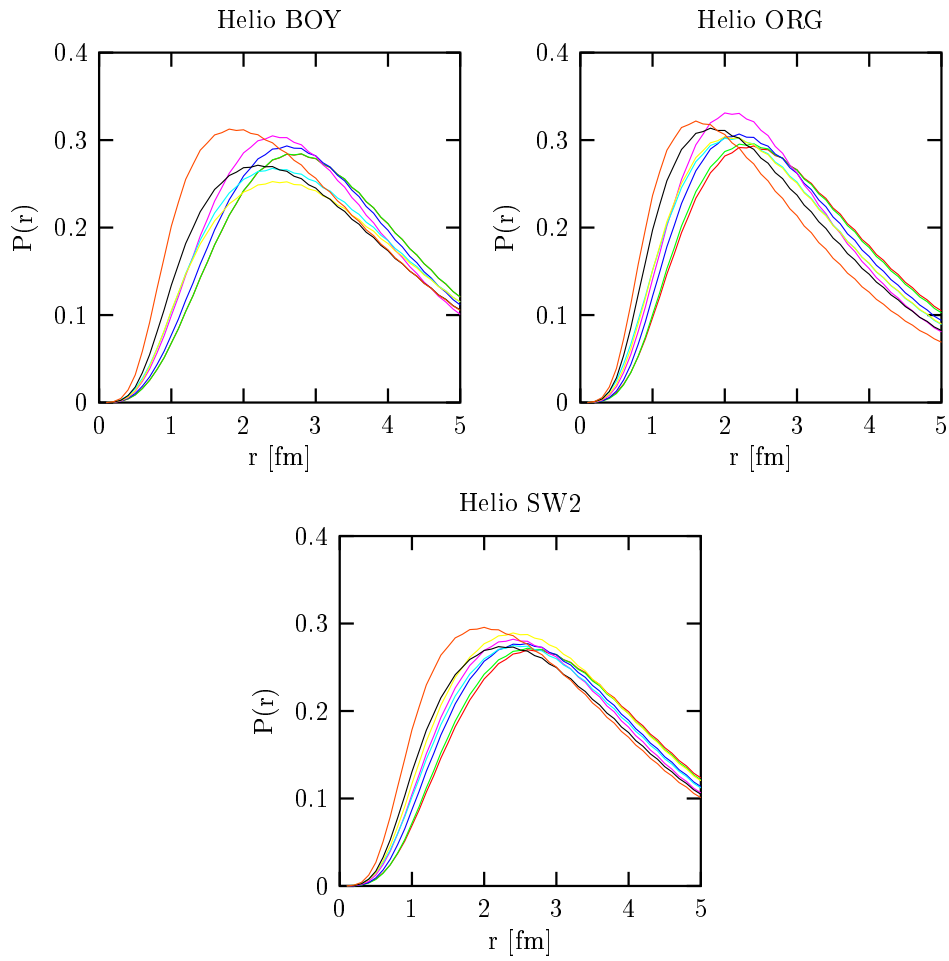


Figura 2.18: Distancia relativa entre los hiperones Λ para los potenciales ORG, SW2 y BOY. Clave de colores: Rojo: Sin RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Verde: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Azul: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Violeta: Sin RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV; Celeste: Con RPA, sin intercambio de mesón ϕ ; Amarillo: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 1.5$ GeV; Negro: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.0$ GeV; Naranja: Con RPA, $\Lambda_{\phi\Lambda\Lambda} = 2.5$ GeV

Capítulo 3

Desintegración mesónica de hipernúcleos Λ

3.1. Introducción

Tras la descripción satisfactoria de los hipernúcleos doble $\Lambda\Lambda$ encontrada en el capítulo anterior, parecería natural estudiar la desintegración mesónica de estos sistemas. Sin embargo, ésta es difícil de medir, y los resultados no deben ser distintos de aquellos encontrados en la ref. [18], puesto que la anchura de desintegración, al ser un proceso para el cual existe una importante reducción debido al bloqueo de Pauli, depende del trimomento del nucleón saliente y de la cola de la amplitud de probabilidad de encontrar a un hiperón Λ a una cierta distancia del centro del núcleo. El primero de estos factores queda totalmente determinado por el balance energético en la desintegración. Mientras que en [18] se mostró que funciones de onda Hartree-Fock y variacionales, ajustadas para dar la misma energía de ligadura, predecían anchuras mesónicas, que diferían en menos de un 5%, claramente fuera de las posibilidades de ser discriminadas experimentalmente en la actualidad.

Sin embargo, recientemente se ha medido [44] el canal cargado de desintegración mesónica de los hipernúcleos ${}^1_2\Lambda\text{C}$, ${}^{28}_\Lambda\text{Si}$ y ${}^{56}_\Lambda\text{Fe}$. Así, a la vista de estos resultados experimentales es oportuno considerar de nuevo el modelo de la ref. [45] para la desintegración piónica de hipernúcleos simple Λ , en el cual están basadas las predicciones de la ref. [18] para hipernúcleos $\Lambda\Lambda$, y confrontar sus predicciones con las nuevas medidas experimentales existentes. Además, y como resultado de este reanálisis, hemos mejorado determinados aspectos del modelo la ref. [45], en especial el correcto balance energético en la reacción y el tratamiento de la contribución del espectro continuo.

La desintegración piónica de los hipernúcleos Λ ha recibido mucha atención en el pasado desde el punto de vista experimental ([44], [46]–[52]) y teórico ([45], [53]–[70]). Es un hecho bien conocido que la desintegración mesónica queda suprimida debido al bloqueo de Pauli, aunque la consideración de ondas distorsionadas para el pión

saliente [45, 59, 67] disminuye considerablemente el efecto del bloqueo. Por otra parte, la importancia del uso de un balance correcto de energía fue puesto de manifiesto en [45]. Tradicionalmente se han propuesto dos escenarios para describir estos procesos: el método del propagador de polarización (PPM) [58, 65, 68], suplementado por técnicas de teoría cuántica de campos [69, 70], y el método de la función de onda (WFM) [45], [59]-[64]. En PPM, el cálculo de la anchura piónica se lleva a cabo en materia nuclear, y el resultado se traslada a núcleos finitos por medio de la aproximación de densidad local (LDA). Ambos métodos, PPM y WFM quedan relacionados en un límite semiclásico [66], siendo más fiable WFM ya que el canal de desintegración mesónico es muy sensible a la estructura de capas del hipernúcleo, especialmente para sistemas ligeros.

En la ref. [45] se empleó, para distintos núcleos, un modelo simple de capas tipo Woods–Saxon (WS) con un potencial central de profundidad constante. Este potencial global, no incluía interacción de espín–órbita y sólo el radio del pozo Woods–Saxon dependía específicamente del núcleo considerado ($\propto A^{1/3}$). Las energías de ligadura de las capas tenían que ser globalmente aumentadas o disminuidas a mano para reproducir la diferencia de masas entre los estados fundamentales de los núcleos inicial y final involucrados. Además, la contribución del continuo a la desintegración fue estimada discretizando los niveles de energía positiva del nucleón por medio de una barrera infinita situada a una distancia de 20 fm. A pesar de estas aproximaciones, este modelo predice un valor de la anchura de desintegración de $^{12}_{\Lambda}\text{C}$ compatible, dentro de los errores experimentales, con las medidas disponibles en aquel tiempo, para los canales de desintegración en π^0 y π^- .

Como ya hemos mencionado, en el laboratorio japonés KEK se ha medido recientemente y de forma bastante precisa, la anchura de desintegración mesónica en π^- de $^{12}_{\Lambda}\text{C}$ y $^{28}_{\Lambda}\text{Si}$, y se ha dado una cota superior a su valor para $^{56}_{\Lambda}\text{Fe}$ [44]. El propósito de este trabajo ha sido actualizar los resultados de la ref. [45], mejorando la descripción de la estructura nuclear del proceso, por medio de unos potenciales más realistas para cada uno de los núcleos, ajustando los parámetros de un pozo WS con términos de espín–órbita al estado fundamental y a las energías de algunos estados excitados de los núcleos finales involucrados en la desintegración. Por otra parte, también hemos implementado un modelo de capas en el continuo (CSM) con objeto de describir las contribuciones en las cuales el nucleón, proveniente de la desintegración del hiperón Λ , no resulta atrapado por el núcleo residual. La suma sobre estados discretos de la ref. [45] se sustituye por la integral adecuada sobre estados del continuo. Este tratamiento más correcto del espectro continuo es importante, en tanto que, por ejemplo, en el caso de la desintegración π^- de $^{28}_{\Lambda}\text{Si}$, esta contribución supone el 50% del total, a diferencia de los casos considerados en [45, 59], donde esta contribución era mucho menor.

Esta descripción más precisa de la estructura nuclear en el estudio de la desintegración mesónica, permite usar los datos experimentales de KEK como un test de la dinámica pión–núcleo utilizada en ref. [45], y detallada en las refs. [71, 72]. El conocimiento preciso de la dinámica pión–núcleo es a su vez relevante, por ejemplo, en el estudio de la restauración parcial de la simetría quiral en el medio nuclear [73]-[75].

Este capítulo está basado en los resultados de la ref. [76].

3.2. Descripción teórica de la desintegración piónica de hipernúcleos Λ

Nos proponemos calcular la anchura de desintegración mesónica como la suma de las siguientes contribuciones¹

$${}^A_\Lambda Z \rightarrow ({}^A Z)_d + \pi^0 \quad (3.1)$$

$${}^A_\Lambda Z \rightarrow ({}^A(Z+1))_d + \pi^- \quad (3.2)$$

$${}^A_\Lambda Z \rightarrow ({}^{A-1}Z)_{gs} + n + \pi^0 \quad (3.3)$$

$${}^A_\Lambda Z \rightarrow ({}^{A-1}Z)_{gs} + p + \pi^- \quad (3.4)$$

donde el símbolo d denota el estado fundamental o un estado excitado discreto del núcleo final. Evaluaremos los procesos de las ecs. (3.1) y (3.2) colocando el nucleón saliente de la desintegración del hiperón Λ en un estado ligado no ocupado en la estructura de capas del núcleo final. Por otra parte, la notación gs en las ecs. (3.3) y (3.4) indica que en esas reacciones el núcleo resultante queda en su estado fundamental. En estos dos casos, el nucleón saliente va al continuo (energía positiva). Denotaremos a esta contribución por Γ_c , mientras que la contribución de las dos primeras reacciones (espectro discreto) se indica con Γ_d . La anchura total es la suma de estas dos contribuciones, esto es, $\Gamma = \Gamma_d + \Gamma_c$.

Experimentalmente, lo que puede observarse son los procesos inclusivos

$${}^A_\Lambda Z \rightarrow X + \pi^0 \quad (3.5)$$

$${}^A_\Lambda Z \rightarrow X + \pi^- \quad (3.6)$$

La principal contribución corresponde sin embargo a los procesos exclusivos de las ecs. (3.1) a (3.4).

La desintegración piónica se modela por un hamiltoniano de transición del tipo

$$\delta\bar{H}_{\Lambda\pi N}^\lambda = -Gm_\pi^2 \left\{ S - \frac{P}{m_\pi} \vec{\sigma} \cdot \vec{q}_{cm} \right\} \tau^\lambda \quad (3.7)$$

donde $(Gm_\pi^2)^2/8\pi = 1.945 \times 10^{-15}$, las constantes S y P son iguales a 1.06 y 0.527 respectivamente, y m_π es la masa del pión (139.57 ó 134.98 MeV para π^- o π^0). Por

¹Emplearemos la notación ${}^A_\Lambda Z$, para denotar un hipernúcleo formado por un núcleo ${}^{A-1}Z$ y un hiperón Λ ligado. Esta notación es una generalización de la empleada en el capítulo anterior para hipernúcleos $\Lambda\Lambda$.

otra parte, \vec{q}_{cm} es el momento del pión saliente en el sistema de referencia donde el hiperón Λ está en reposo, y las matrices de Pauli $\vec{\sigma}$ y τ^λ , λ es un índice cartesiano de isospín que será contraído con el campo del pión, actúan sobre los espacios de Hilbert de espín e isospín respectivamente. Tomando la función de onda de isospín del hiperón Λ como la de un neutrón, el operador τ^λ en la ec. (3.7) implementa la regla $\Delta T = 1/2$, que predice una anchura de desintegración doble para el canal $\Lambda \rightarrow \pi^- p$ que para el canal $\Lambda \rightarrow \pi^0 n$.

La anchura de desintegración del hiperón Λ en el vacío resulta ser

$$\Gamma_{\text{vac}}^{(\alpha)} = C^{(\alpha)} \frac{(Gm_\pi^2)^2}{4\pi} \frac{Mq_{cm}}{M_\Lambda} \left\{ S^2 + \left(\frac{P}{m_\pi} \right)^2 q_{cm}^2 \right\} \quad \alpha = p, n \quad (3.8)$$

$$q_{cm} = \frac{\lambda^{1/2}(M_\Lambda^2, M^2, m_\pi^2)}{2M_\Lambda} \quad (3.9)$$

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \quad (3.10)$$

donde α indica un protón o un neutrón, o equivalentemente, una desintegración produciendo un π^- o π^0 en el estado final, $C^{(p)} = 4$ ó $C^{(n)} = 2$ son coeficientes de isospín y M (938.27 ó 939.57 MeV para protón o neutrón, respectivamente) y M_Λ (1115.68 MeV) son las masas del nucleón y del hiperón Λ respectivamente.

La anchura de desintegración total en el vacío viene dada por la suma de las contribuciones en las que el nucleón resultante es un protón o un neutrón

$$\Gamma_\Lambda = \Gamma_{\text{vac}}^{(p)} + \Gamma_{\text{vac}}^{(n)} \quad (3.11)$$

En el caso de un hipernúcleo, suponiendo que el hiperón Λ está en una estado $1s_{1/2}$ y una estructura de capas cerradas para el sistema nuclear subyacente $A-1Z$, la anchura para los procesos de las ecs. (3.1) a (3.4) viene dada por²

$$\begin{aligned} \Gamma^{(\alpha)} = & \frac{C^{(\alpha)}}{2} \sum_{N=nljm>F} \sum_{m_{s_\Lambda}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{w(q)} 2\pi\delta(E_\Lambda - w(q) - E_N) (Gm_\pi^2)^2 \\ & \times \left| \left\langle \Lambda, m_{s_\Lambda} \left| \left[S - \frac{P}{m_\pi} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_\pi \right] \right| nljm, \tilde{\phi}_\pi^\alpha(\vec{q})^* \right\rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $nljm$ y E_N representan los números cuánticos y la energía relativista del nucleón saliente, $|\Lambda, m_{s_\Lambda}\rangle$ denota la función de onda del hiperón Λ con tercera componente de momento angular m_{s_Λ} . Por otra parte, E_Λ es la energía del hiperón Λ , incluyendo su masa y $w(q)$ es la energía del pión. El índice de suma N en la ec. (3.12) varía sobre estados no ocupados $nljm$, correspondientes a orbitales de protón o neutrón, de acuerdo con α .

²Esta expresión es válida para las contribuciones discretas (ecs. (3.1) y (3.2)). Las modificaciones necesarias para incluir la contribución del continuo se discuten más adelante.

La función de onda del pión $\tilde{\phi}_\pi^\alpha(\vec{q}, x)^*$ corresponde a una solución entrante de la ecuación de Klein–Gordon

$$\left[-\vec{\nabla}^2 + m_\pi^2 + 2w(q)V_{\text{opt}}(\vec{x}) \right] \tilde{\phi}_\pi^\alpha(\vec{q}, x) = [w(q) - V_C(\vec{x})]^2 \tilde{\phi}_\pi^\alpha(\vec{q}, x) \quad (3.13)$$

con V_C el potencial coulombiano creado por el núcleo, considerando efectos de tamaño finito y de polarización del vacío, para π^- y cero para π^0 . A su vez V_{opt} es el potencial óptico que describe la interacción π –núcleo. Este potencial ha sido derivado microscópicamente en las referencias [71] y [72], donde también se detallan algunas de sus predicciones. Incluye los términos usuales de orden más bajo, construidos a partir de las interacciones πN en ondas s y p . Además contiene términos de segundo orden en densidad, que dan cuenta de procesos de absorción de piones. También incluye otras correcciones usuales como el término de *re-scattering* de Pauli de segundo orden, el término de transformación angular (ATT), el efecto Lorentz-Lorenz y correlaciones nucleares de corto y largo alcance. Este potencial óptico reproduce satisfactoriamente los datos de átomos piónicos (energías de ligadura y anchuras de absorción fuerte) [71] y la dispersión π –núcleo a baja energía [72].

Utilizando técnicas de álgebra de momento angular, se puede expresar la anchura de desintegración del hiperón Λ en el seno del núcleo como

$$\Gamma^{(\alpha)} = \sum_{N=nlj>F} \Gamma_N^{(\alpha)} \quad (3.14)$$

$$\Gamma_N^{(\alpha)} = \frac{C^{(\alpha)}}{4\pi} (Gm_\pi^2)^2 \frac{q_N}{1 + w(q_N)/E_A} \left[S^2 S_N^{(s)}(q_N) + \left(\frac{P}{m_\pi} \right)^2 \vec{q}_N^2 S_N^{(p)}(q_N) \right] \quad (3.15)$$

con

$$q_N = [(E_\Lambda - E_N)^2 - m_\pi^2]^{1/2} \quad (3.16)$$

Nótese que E_N , q_N y las integrales $S_N^{(s)}(q_N)$ y $S_N^{(p)}(q_N)$ definidas a continuación dependen del isospín α . Se ha incluido el factor de retroceso $(1 + w/E_A)^{-1}$, con E_A la energía (incluyendo su masa) del núcleo hijo, ya que mayor parte de la desintegración corresponde a nucleones en estados ligados excitados, y como consecuencia, el núcleo de masa M_A retrocede como un todo.

Las contribuciones de onda s y p , $S_N^{(s)}(q_N)$ y $S_N^{(p)}(q_N)$ vienen dadas por

$$S_{nlj}^{(s)}(q_N) = \frac{2j+1}{2} |I_{nlj}(q_N)|^2 \quad (3.17)$$

$$S_{nlj}^{(p)}(q_N) = \frac{1}{\vec{q}^2} \{ l |M_{nlj}(q_N)|^2 \delta_{j,l-1/2} + (l+1) |N_{nlj}(q_N)|^2 \delta_{j,l+1/2} \} \quad (3.18)$$

con

$$I_{nlj}(q_N) = \int_0^\infty r^2 dr R_{1s}^{(\Lambda)}(r) R_l^{(\pi)}(q_N; r) R_{nlj}(r) \quad (3.19)$$

$$M_{nlj}(q_N) = \int_0^\infty r^2 dr R_{1s}^{(\Lambda)}(r) \left(\frac{dR_{l-1}^{(\pi)}(q_N; r)}{dr} - (l-1) \frac{R_{l-1}^{(\pi)}(q_N; r)}{r} \right) R_{nlj}(r) \quad (3.20)$$

$$N_{nlj}(q_N) = \int_0^\infty r^2 dr R_{1s}^{(\Lambda)}(r) \left(\frac{dR_{l+1}^{(\pi)}(q_N; r)}{dr} + (l+2) \frac{R_{l+1}^{(\pi)}(q_N; r)}{r} \right) R_{nlj}(r) \quad (3.21)$$

$R_l^{(\pi)}(q_N; r)$ son las funciones radiales del pión para cada onda parcial, regulares en el origen y con comportamiento asintótico

$$R_l^{(\pi)}(q_N; r)_{r \rightarrow \infty} \approx e^{i\delta_l} \frac{1}{qr} \sin \left(qr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (3.22)$$

para π^0 , y

$$R_l^{(\pi)}(q_N; r)_{r \rightarrow \infty} \approx e^{i\delta_l + \sigma_l} \frac{1}{qr} \sin \left(qr - l \frac{\pi}{2} + \sigma_l + \delta_l - \eta \ln 2qr \right) \quad (3.23)$$

para π^- , siendo η y σ_l respectivamente el parámetro y el desfase de Coulomb definidos según la ref. [20], y δ_l el desfase complejo (para tener en cuenta inelasticidades) obtenido de la solución numérica de la ecuación de Klein–Gordon. Finalmente, $R_{1s}^{(\Lambda)}(r)$ y $R_{nlj}(r)$ representan las funciones de onda radiales del hiperón Λ y del nucleón, normalizadas de la forma usual

$$\int_0^\infty dr r^2 |R(r)|^2 = 1 \quad (3.24)$$

La función de onda del hiperón Λ en el hipernúcleo inicial se obtiene a partir de un potencial WS [18] que da cuenta de la interacción entre el hiperón Λ y el núcleo, con los parámetros recogidos en la tabla 3.1. La dinámica del nucleón se describe con detalle en la Sección 3.3.

Algunos de los núcleos considerados no son de capa cerrada. En este caso, los nucleones de la desintegración del hiperón Λ pueden llenar cualquiera de los n_h estados vacíos en la capa con números cuánticos n , l y j . Esto es tenido en cuenta multiplicando $S_N^{(s)}$ y $S_N^{(p)}$ por $n_h/(2j+1)$.

Las ecuaciones anteriores ((3.12)–(3.24)) pueden ser usadas para calcular la contribución del espectro discreto a la anchura de desintegración piónica, pero cuando los nucleones producto de la desintegración del hiperón Λ van al espectro continuo (energía positiva) es preciso sustituir la suma $\sum_{N=nljm>F}$ de la ec. (3.14) por una suma sobre

	V_0^Λ	R^Λ	a^Λ	B_Λ
	[MeV]	[fm]	[fm]	[MeV]
$^{12}_\Lambda\text{C}$	31.1	2.45	0.60	10.8 [77]
$^{28}_\Lambda\text{Si}$	30.1	3.30	0.60	16.6 [78]
$^{56}_\Lambda\text{Fe}$	30.3	4.18	0.60	21.0 [56, 57]

Cuadro 3.1: Parámetros del potencial WS de interacción Λ -núcleo. Suponemos que el hiperón Λ está en su estado fundamental ($1s_{1/2}$). La energía total del hiperón Λ , E_Λ está dada por $M_\Lambda - B_\Lambda$

multipolos y una integral sobre energías de nucleón, esto es,

$$\sum_{N=nljm>F} \rightarrow \sum_{lj} \int_M^{E_{\text{máx}}} dE \frac{2Mp}{\pi} \quad (3.25)$$

$$R_{nlj}(r) \rightarrow R_{lj}(p; r) \quad (3.26)$$

siendo E y $p = \sqrt{E^2 - M^2}$ la energía y momento del nucleón, $E_{\text{máx}} = E_\Lambda - m_\pi$ la energía máxima del nucleón, despreciando el retroceso del núcleo, y donde $R_{lj}(p; r)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger de energía positiva [79], con el mismo potencial que el utilizado para los nucleones ligados en el cálculo de la contribución del espectro discreto. La normalización de estas funciones de onda en el continuo es la misma que la detallada para los piones (ecs. (3.22) y (3.23)).

Como test del desarrollo multipolar de la contribución del continuo, hemos calculado con las anteriores expresiones (ecs. (3.14)–(3.26)) la anchura de desintegración en el vacío del hiperón Λ . Para ello, se toma $A = 1$ y se sustituyen las funciones de onda radiales del pión y del nucleón por las funciones esféricas de Bessel y la función radial del barión Λ por $\sqrt{4\pi/V}$, siendo $V = 4\pi L^3/3$ el volumen de integración, que debe tender a infinito a la hora de calcular observables físicos. Este test es directo, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \int_0^L dr r^2 j_l(pr) j_l(qr) \right|^2 \\ &= \frac{4\pi}{V} \int_0^L dr r^2 \left(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l^2(pr) \right) \int_0^L dr r^2 j_l(pr) j_l(qr) + \mathcal{O}(1/L) \\ &= \frac{\pi}{2p^2} \delta(p-q) + \mathcal{O}(1/L) \quad (3.27) \end{aligned}$$

Por otra parte, este test nos ha permitido evaluar las técnicas numéricas empleadas y la precisión de los algoritmos para resolver ecuaciones diferenciales y llevar a cabo las

	V_0	R_0	a_0	V_{LS}	R_{LS}	a_{LS}
	[MeV]	[fm]	[fm]	[MeV]	[fm]	[fm]
$^{12}_{\Lambda}\text{C}$	-57.0	2.86	0.53	-6.05	2.86	0.53
$^{28}_{\Lambda}\text{Si}$	-66.2	3.50	0.70	-3.30	3.75	0.70
$^{56}_{\Lambda}\text{Fe}$	-54.0	4.70	0.50	-8.30	4.70	0.50

Cuadro 3.2: Parámetros del potencial WS para neutrones.

integraciones numéricas y las sumas sobre multipolos. La idea consiste en, tomando como punto de partida las ecs. (3.14)–(3.26) con una función de onda radial de Λ dada por $\sqrt{4\pi/V}$, y anulando el potencial de interacción π –núcleo y el potencial que sufren los nucleones, recuperar numéricamente en el límite en que L tiende a infinito, la anchura de desintegración del hiperón Λ en el vacío. Este cálculo es mucho más exigente, desde el punto de vista numérico, que el detallado anteriormente, ya que la delta de Dirac de la ec. (3.27) debe ser construida numéricamente, sumando sobre un gran número de multipolos y con integrales lentamente convergentes.

3.3. Estructura nuclear y balance energético

La estructura nuclear del sistema $(A-1)Z$ se modela mediante un determinante de Slater construido con funciones de onda monoparticulares obtenidas diagonalizando un potencial tipo Woods–Saxon

$$V_{\text{WS}} = V_0 f(r, R_0, a_0) + V_{LS} \frac{\vec{l} \cdot \vec{\sigma}}{r} \frac{df(r, R_{LS}, a_{LS})}{dr} + \tilde{V}_C(r) \quad (3.28)$$

donde

$$f(r, R, a) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad (3.29)$$

ya siendo $\tilde{V}_C(r)$ el potencial coulombiano creado por una distribución uniforme de carga de radio R_C . Los parámetros se recopilan en las tablas 3.2 y 3.3 para neutrones y protones respectivamente. Los valores de estos parámetros han sido ajustados³ para reproducir algunos valores experimentales de energías monoparticulares cerca del nivel de Fermi [80, 81]. Esto garantiza un balance energético correcto para la desintegración a la primera capa disponible y a algunos estados excitados.

La principal contribución a los procesos de las ecs. (3.1) y (3.2) proviene de situaciones en que el núcleo hijo queda en el estado fundamental o en los primeros estados excitados. Puesto que el bloqueo de Pauli depende fuertemente de la energía del pión

³Principalmente se ajustan las profundidades V_0 y V_{LS} , y se toman valores usuales para los radios y los parámetros de espesor a .

	V_0 [MeV]	R_0 [fm]	a_0 [fm]	V_{LS} [MeV]	R_{LS} [fm]	a_{LS} [fm]	R_C [fm]
${}^{12}_{\Lambda}\text{C}$	-38.4	2.86	0.53	-6.05	2.86	0.53	2.86
${}^{28}_{\Lambda}\text{Si}$	-47.4	3.75	0.53	-10.0	3.75	0.53	3.75
${}^{56}_{\Lambda}\text{Fe}$	-50.8	4.70	0.50	-8.30	4.70	0.50	4.70

Cuadro 3.3: Parámetros del potencial WS para protones.

	Neutrón	Energía [MeV]	Protón	Energía [MeV]
${}^{12}_{\Lambda}\text{C}$	$1p_{3/2}$	-18.72	$1p_{1/2}$	-0.60
${}^{28}_{\Lambda}\text{Si}$	$1d_{5/2}$	-17.18	$2s_{1/2}$	-2.07
${}^{12}_{\Lambda}\text{C}$	$2p_{3/2}$	-11.20	$1f_{7/2}$	-5.85

Cuadro 3.4: Energías monoparticulares de la primera capa disponible en la desintegración piónica de los hipernúcleos considerados en este trabajo. Las energías han sido obtenidas a partir de las energías de separación de protones y neutrones de los núcleos AZ y ${}^A(Z+1)$ respectivamente, tomadas de la ref. [38].

después de la desintegración, es importante llevar a cabo un balance energético correcto, como se muestra en la ref. [45], usando siempre que sea posible energías experimentales. Así, la energía de la primera capa no ocupada se fija a la diferencia de masas entre los estados fundamentales de los núcleos AZ y ${}^{A-1}Z$ en el caso de desintegración en el canal π^0 y entre ${}^A(Z+1)$ y ${}^{A-1}Z$ en el caso de desintegraciones en el canal π^- . En la tabla 3.4 se dan para las primeras capas disponibles, las energías obtenidas del modo descrito. Las energías de esta tabla no determinan totalmente el campo medio que afecta al nucleón, y se tiene la posibilidad de ajustar la energía de algún estado excitado. A continuación se indican detalles sobre los niveles ajustados.

${}^{12}_{\Lambda}\text{C}$ Suponemos una configuración de capa cerrada $1p_{3/2}$ para protones y neutrones en el estado fundamental de ${}^{12}\text{C}$ y $1p_{1/2}$ para protones y $1p_{3/2}^{-1}$ para neutrones en el estado fundamental de ${}^{12}\text{N}$, el resto de niveles ajustados por los parámetros de las tablas 3.2 y 3.3 son:

- Neutrones: Se fija la energía de la capa $1p_{1/2}$ de neutrones a partir de la energía del primer estado excitado del ${}^{12}\text{C}$ ($2^+ {}^{12}\text{C}^*$ (4.43) MeV). Suponemos una configuración partícula-agujero $1p_{1/2}$, $1p_{3/2}^{-1}$ que determina una energía de ligadura para la capa $1p_{1/2}$ de -14.29 MeV. Este estado excitado del ${}^{12}\text{C}$ puede tener contribuciones debidas a los protones, mezcla de configuraciones, excitaciones $2p2h$ o superiores o grados de libertad colectivos, no tenidos en cuenta en este modelo sencillo. Sin embargo, en tanto que este

estado tenga una componente importante $|1p_{1/2}, 1p_{3/2}^{-1}\rangle$, esta configuración estará disponible en la desintegración y el procedimiento descrito garantizará un balance de energía correcto, no sólo cuando el núcleo resultante de ^{12}C queda en su estado fundamental, sino también cuando queda en su primer estado excitado, dando lugar a funciones de onda adecuadas para el pión en ambos casos. Los elementos de matriz que aparecen en la evaluación de la anchura de desintegración, aunque son fuertemente dependientes de la función de onda del pión, son menos sensibles a los detalles específicos de la función de onda nuclear.

- Protones: No hay estados excitados del ^{12}N sencillos de describir en términos de un modelo de capas, ya que todos los niveles recopilados en [38] son estados resonantes poblados en reacciones nucleares. Así pues, se toma el mismo potencial espín-órbita usado en el canal neutrónico, y se toma una profundidad del potencial central capaz de reproducir la capa $1p_{1/2}$, como se indica en la tabla 3.4. El potencial ajustado de esta forma no proporciona estados excitados para ^{12}N .

$^{28}_{\Lambda}\text{Si}$ Para el estado fundamental de ^{28}Si , suponemos una estructura de capa cerrada $1d_{5/2}$ de protones y de neutrones, y una configuración $2s_{1/2}$ para protones y $1d_{5/2}^{-1}$ para neutrones en el estado fundamental de ^{28}P . El resto de capas se ajustan de la siguiente manera:

- Neutrones: Se fija la energía de la capa de neutrones $2s_{1/2}$ a partir de la energía del primer estado excitado de ^{28}Si ($2^+ \text{ } ^{28}\text{Si}^*$ (1.78) MeV). Suponemos para neutrones una configuración partícula-agujero del tipo $|2s_{1/2}, 1d_{5/2}^{-1}\rangle$ que determina una energía de ligadura para la capa $2s_{1/2}$ de 15.40 MeV. Las limitaciones y ventajas de describir la desintegración mesónica utilizando esta simple imagen de la estructura nuclear subyacente son similares a las ya mencionadas en el caso del ^{12}C . Debe mencionarse, que ajustar el potencial para reproducir simultáneamente las energías empíricas de las capas $1d_{5/2}$ y $2s_{1/2}$, manteniendo la energía de la capa $1d_{3/2}$ por encima de la capa $2s_{1/2}$, es delicado y por ello se ha usado un valor relativamente alto (0.70 fm) para los parámetros de espesor a_0 y a_{LS} . Con valores menores del espesor, por ejemplo 0.58 fm, para ajustar las energías de las capas $1d_{5/2}$ y $2s_{1/2}$, se requiere un valor de la intensidad del potencial espín-órbita muy pequeño ($V_{LS} = -0.1$ MeV frente a $V_0 = -65.75$ MeV). Sin embargo, a pesar de que las capas $1d_{5/2}$ y $1d_{3/2}$ quedan prácticamente degeneradas, estando ésta última por debajo de la $2s_{1/2}$, la anchura de desintegración es bastante estable y resulta ser sólo un 10% mayor que el resultado expuesto en la Sección 3.4. Este incremento es debido a un aumento de la contribución de la capa $1d_{3/2}$, pero la correspondiente configuración $|1d_{3/2}, 1d_{5/2}^{-1}\rangle$ tiene una energía de excitación demasiado pequeña como para corresponder a algún estado excitado del ^{28}Si .
- Protones: Para el ^{28}P , tal y como ocurría en el caso de ^{12}N no hay estados

excitados sencillos de explicar en el contexto de un modelo de capas, en tanto que todos los niveles recopilados en la ref. [38] son de nuevo estados resonantes poblados en reacciones nucleares. Se fija nuevamente la profundidad de la parte central del potencial para reproducir la capa $2s_{1/2}$ (tabla 3.4), y se toma una profundidad para el potencial espín-órbita de tal forma que la siguiente capa ($1d_{3/2}$) aparezca en el espectro continuo. Más adelante se discutirá como depende los resultados del valor preciso de la profundidad del potencial de espín-órbita. Si tomamos el mismo potencial de espín-órbita utilizado para neutrones, aparecen estados excitados que no pueden ser identificados experimentalmente.

${}^{56}_{\Lambda}\text{Fe}$ La estructura nuclear de este hipernúcleo es más difícil de describir dentro de un modelo de capas sencillo que la del ${}^{12}_{\Lambda}\text{C}$ ó ${}^{28}_{\Lambda}\text{Si}$. Así, nuestros resultados para la desintegración de ${}^{56}_{\Lambda}\text{Fe}$ estarán sujetos a mayores incertidumbres teóricas. En lo que concierne a los estados fundamentales, supondremos una configuración constituida por dos agujeros de protón apareados en la capa $1f_{7/2}$ y dos neutrones apareados en la capa $2p_{3/2}$ para el ${}^{56}\text{Fe}$, y un agujero de protón en la capa $1f_{7/2}$ y un neutrón en la capa $2p_{3/2}$ para el ${}^{56}\text{Co}$. El ajuste del resto de capas es como sigue:

- Neutrones: Se fija la energía de la capa $1f_{5/2}$ de neutrones a partir de la energía del primer estado excitado del ${}^{56}\text{Fe}$ ($2^+ {}^{56}\text{Fe}^*$ (0.847) MeV). Suponemos para neutrones una configuración de dos partículas $|2p_{3/2}, 1f_{5/2}\rangle$, que implica una energía de ligadura para la capa $1f_{5/2}$ de 10.35 MeV.
- Protones: El primer estado excitado del ${}^{56}\text{Co}$ tiene un valor de espín-paridad de 3^+ , y una energía de excitación de 0.16 MeV. En principio uno podría usarlo para fijar las propiedades del potencial WS. Se podría intentar describir este estado mediante una configuración de dos agujeros apareados en la capa $1f_{7/2}$ y una partícula en la capa $2p_{3/2}$, de tal forma que se podría determinar la energía de la capa $2p_{3/2}$. Pero la capa $1f_{7/2}$ completa 28 protones, es decir, un número mágico. Así, sería de esperar un *gap* de energía apreciable entre esta capa y la siguiente en energía, $2p_{3/2}$, del orden de 1 MeV y no 0.16 MeV. Así, el estado excitado 3^+ probablemente tendrá una componente neutrónica apreciable (un neutrón en la capa $2p_{3/2}$ y otro en la capa $1f_{5/2}$) o componentes más complejas no tenidas en cuenta en este sencillo modelo de capas. Parece seguro asumir que este estado no tendrá una componente importante $|2p_{3/2}, 1f_{7/2}^{-2}\rangle$. Así pues, tomamos el mismo potencial espín-órbita que en el caso de neutrones, y fijamos la profundidad de la parte central del potencial de tal forma que se reproduzca la energía de la capa $1f_{7/2}$. El campo medio así ajustado lleva a un estado excitado unos 5 MeV por encima del estado fundamental.

${}^A_Z\Lambda$	$V_{\text{ópt}}$	Γ_d	Γ_c	Γ	$\Gamma_{\text{exp}} [48]$
${}^{12}_\Lambda\text{C}$	FP	0.136	0.008	0.144	0.217 ± 0.084
	NQ	0.150	0.008	0.158	
${}^{28}_\Lambda\text{Si}$	FP	0.061	0.001	0.062	
	NQ	0.074	0.001	0.075	
${}^{56}_\Lambda\text{Fe}$	FP	0.010	0.003	0.013	
	NQ	0.010	0.003	0.013	

Cuadro 3.5: Anchuras de desintegración piónica en el canal π^0 , en unidades de Γ_Λ , calculadas con dos potenciales ópticos pión–núcleo. En las filas que denotamos por FP, se dan los resultados obtenidos con el potencial π –núcleo completo de la ref. [72]. Por NQ caracterizamos los resultados obtenidos cuando no se incluye la parte imaginaria del potencial debida a la dispersión cuasielástica de piones.

3.4. Resultados y conclusiones

Los resultados obtenidos para las anchuras de desintegración mesónica de los hipernúcleos ${}^{12}_\Lambda\text{C}$, ${}^{28}_\Lambda\text{Si}$ y ${}^{56}_\Lambda\text{Fe}$, calculados con dos potenciales ópticos pión–núcleo diferentes, se recogen en las tablas 3.5 y 3.6. El efecto de la parte imaginaria del potencial óptico pión–núcleo es eliminar del flujo de piones emergentes aquellos piones afectados por dispersión cuasielástica o que son absorbidos. Sin embargo, mientras los piones absorbidos deben ser eliminados definitivamente del flujo, no es este el caso de los que sufren dispersión cuasielástica, ya que aunque colisionen y cambien su dirección o su energía, seguirán ahí y serán observados. El efecto de incluirlos es moderado, como se hace notar en [45]. El acuerdo con las medidas de KEK es bueno, y también es bueno con medidas anteriores de la desintegración de ${}^{12}_\Lambda\text{C}$ en el canal π^0 . Ésto constituye un claro éxito del modelo de las referencias [71] y [72] para describir la dinámica pión–nucleón a bajas energías.

En la ref. [45] se obtuvo un valor de $0.086 \Gamma_\Lambda$ para la desintegración de ${}^{12}_\Lambda\text{C}$ en el canal π^- . En este nuevo cálculo se encuentra un valor más alto (25 %), más acorde con el experimento. Las diferencias son mayores si prestamos atención a la contribución del espectro continuo, y también aparecen en el canal π^0 . Tanto en el trabajo expuesto en el presente capítulo, como en el de la ref. [45], se ha usado la misma función de onda para el π^- saliente. La diferencia entonces radica en el mejor tratamiento de la dinámica nuclear subyacente realizado aquí. Como se verá más adelante, el método de la barrera empleado en la ref. [45] para estimar la contribución del espectro continuo compara razonablemente bien con el más correcto tratamiento seguido aquí, cuando se usa el mismo potencial nuclear. Por tanto, las discrepancias han de ser atribuidas no sólo a los

${}^A_Z\Lambda$	V_{opt}	Γ_d	Γ_c	Γ	$\Gamma_{\text{exp}} [44]$
	FP	0.079	0.027	0.106	
${}^{12}_\Lambda\text{C}$					$0.113 \pm 0.013 \pm 0.005$
	NQ	0.082	0.028	0.110	
	FP	0.018	0.019	0.037	
${}^{28}_\Lambda\text{Si}$					$0.047 \pm 0.008 \pm 0.002$
	NQ	0.020	0.019	0.039	
	FP	0.005	0.009	0.014	
${}^{56}_\Lambda\text{Fe}$					< 0.015 (90 % C.L.)
	NQ	0.004	0.010	0.014	

Cuadro 3.6: Idem tabla 3.5 en el canal π^-

diferentes potenciales WS usados en ambos trabajos, sino también al procedimiento, en cierto modo artificial, seguido en [45] para forzar un balance de energía correcto en la desintegración.

Nótese también que en las tablas 3.5 y 3.6, las anchuras calculadas son siempre ligeramente menores que las experimentales. La contribución de otros canales de reacción, distintos de los de las ecs. (3.1) a (3.4), aunque en principio sería de poca importancia, mejorarían los resultados del presente cálculo.

A diferencia de la mayoría de los hipernúcleos estudiados previamente usando el WFM ([59]-[64]), para los tres hipernúcleos considerados en este trabajo, la contribución del continuo ha desempeñado un papel crucial. Sirva de ejemplo el caso de la desintegración de ${}^{28}_\Lambda\text{Si}$ en el canal π^- , donde Γ_c es del mismo tamaño que Γ_d (0.020 frente a 0.019, en unidades de Γ_Λ) y es, por tanto, esencial a la hora de entender los datos experimentales. Esto refuerza la necesidad de actualizar el cálculo de la ref. [45], donde la contribución del espectro continuo se calculó de un modo muy simplificado, ya que se estaba suponiendo que era una fracción pequeña del total. En la ref. [45] la contribución del espectro continuo se estimó discretizando los niveles de energía positivos para los nucleones, por medio de una barrera infinita de potencial colocada a unos 20 fm. En la tabla 3.7 se comparan los resultados del CSM implementado aquí, con los que se deducen del modelo de la ref. [45]. En ambos casos se usa el mismo potencial WS. El acuerdo entre ambos métodos es mejor de lo que cabría esperar en principio. En el modelo de la ref. [45], la importante contribución del continuo es debida a la presencia de un estado cuasiligado (1.27 MeV) $1d_{3/2}$, y éste tiene su contrapartida en el tamaño del multipolo $d_{3/2}$ en el modelo de capas continuo. Más aún, la anchura diferencial $d\Gamma_{d_{3/2}}^{(p)}/dE$ presenta un pico estrecho, localizado aproximadamente en 1.27 MeV (resonancia), que da la mayor parte de la contribución a la anchura integrada parcial, como se puede ver en la fig. 3.1. Pequeños cambios en el potencial WS de protones pueden llevar esta capa al espectro discreto, y su importante contribución estaría incluida en Γ_d , aunque el total $\Gamma_d + \Gamma_c$ permanecería prácticamente sin cambios. Por

ejemplo, si se usa un profundidad de -7 MeV en el potencial de espín-órbita en lugar de -10 MeV, la capa $1d_{3/2}$ se hace ligada por -0.1 MeV y la anchura total es, en este ejemplo, $0.042 \Gamma_\Lambda$ en lugar del valor $0.039 \Gamma_\Lambda$, indicado en la tabla 3.6. En el modelo de la ref. [45], la posición exacta de la barrera puede tener influencia en las energías, el número de capas y la contribución de cada capa, pero la contribución total de Γ_c permanece constante, en tanto que la barrera esté lo suficientemente lejos.

Hemos examinado también la sensibilidad de los resultados frente a variaciones de los parámetros del potencial WS. Así, hemos incrementado o reducido la profundidad del potencial de espín-órbita en un 10 % y hemos reajustado la profundidad del término central V_0 para obtener las masas del estado fundamental de los núcleos involucrados, esto es, V_0 se modifica para obtener nuevamente las energías de la tabla 3.4 con los nuevos valores del término de interacción espín-órbita. Los resultados son bastante estables, con cambios del 2 % a lo sumo, excepto para el ${}^{56}_\Lambda\text{Fe}$ en el canal π^- donde la incertidumbre puede ser de hasta un 6 %.

En las figs. 3.1 a 3.6 se muestran para los tres hipernúcleos estudiados, los espectros continuos de energía de los nucleones salientes para los primeros multipolos, y en las tablas 3.8 y 3.9 la contribución a Γ_d de cada una de las capas no ocupadas en los canales π^- y π^0 . Todos estos resultados han sido obtenidos eliminando el término de la parte imaginaria del potencial óptico que proviene de la dispersión cuasielástica del pión saliente.

Este trabajo		Barrera a 20 fm [45]		
Multipolo	$[\Gamma_{lj}^p]_c$	Capa	Energía [MeV]	$[\Gamma_{lj}^p]_c$
		$3s_{1/2}$	2.45	0.0002
		$4s_{1/2}$	5.19	0.0003
		$5s_{1/2}$	2.45	0.0002
$s_{1/2}$	0.0007	Total $s_{1/2}$		0.0007
		$3p_{3/2}$	4.59	0.0005
		$4p_{3/2}$	7.25	0.0004
$p_{3/2}$	0.0011	Total $p_{3/2}$		0.0009
		$3p_{1/2}$	5.02	0.0002
		$4p_{1/2}$	8.14	0.0002
$p_{1/2}$	0.0007	Total $p_{1/2}$		0.0004
		$1d_{3/2}$	1.27	0.0160
		$2d_{3/2}$	3.22	0.0001
		$3d_{3/2}$	6.31	0.0001
$d_{3/2}$	0.0165	Total $d_{3/2}$		0.0162
$\Gamma_c = 0.019$		$\Gamma_c = 0.018$		

Cuadro 3.7: Desintegración π^- del hipernúcleo ${}^{28}_{\Lambda}\text{Si}$. Todos los cálculos se han realizado excluyendo de la parte imaginaria del potencial óptico, la contribución de la dispersión cuasielástica de piones. Se detallan las contribuciones del espectro continuo a la desintegración piónica, en unidades de Γ_{Λ} , utilizando dos métodos: i) la suma de multipolos del tipo $[\Gamma_{lj}^p]_c$ definidos en las ecs. (3.14) y (3.25) y ii) la suma de las contribuciones de estados ligados de energía positiva (debido al efecto de una barrera infinita de potencial colocada a 20 fm) [45]. Sólo se tienen en cuenta contribuciones mayores que $5 \times 10^{-4} \Gamma_{\Lambda}$.

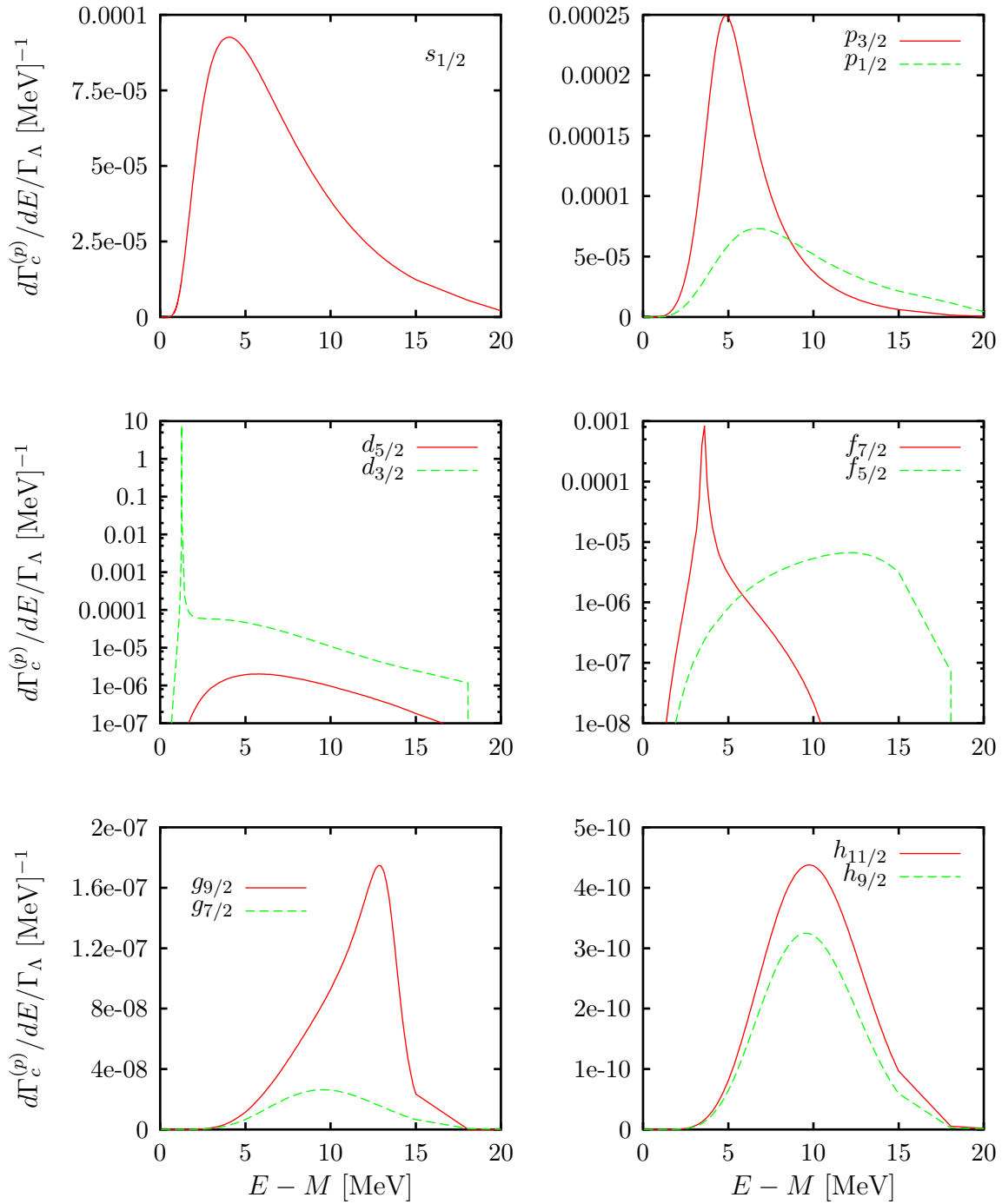


Figura 3.1: Espectro continuo de energía del protón saliente en la desintegración de $^{28}_{\Lambda}\text{Si}$ en el canal π^- . Los resultados se han obtenido excluyendo la parte imaginaria del potencial responsable de la dispersión cuasielástica pión-núcleo.

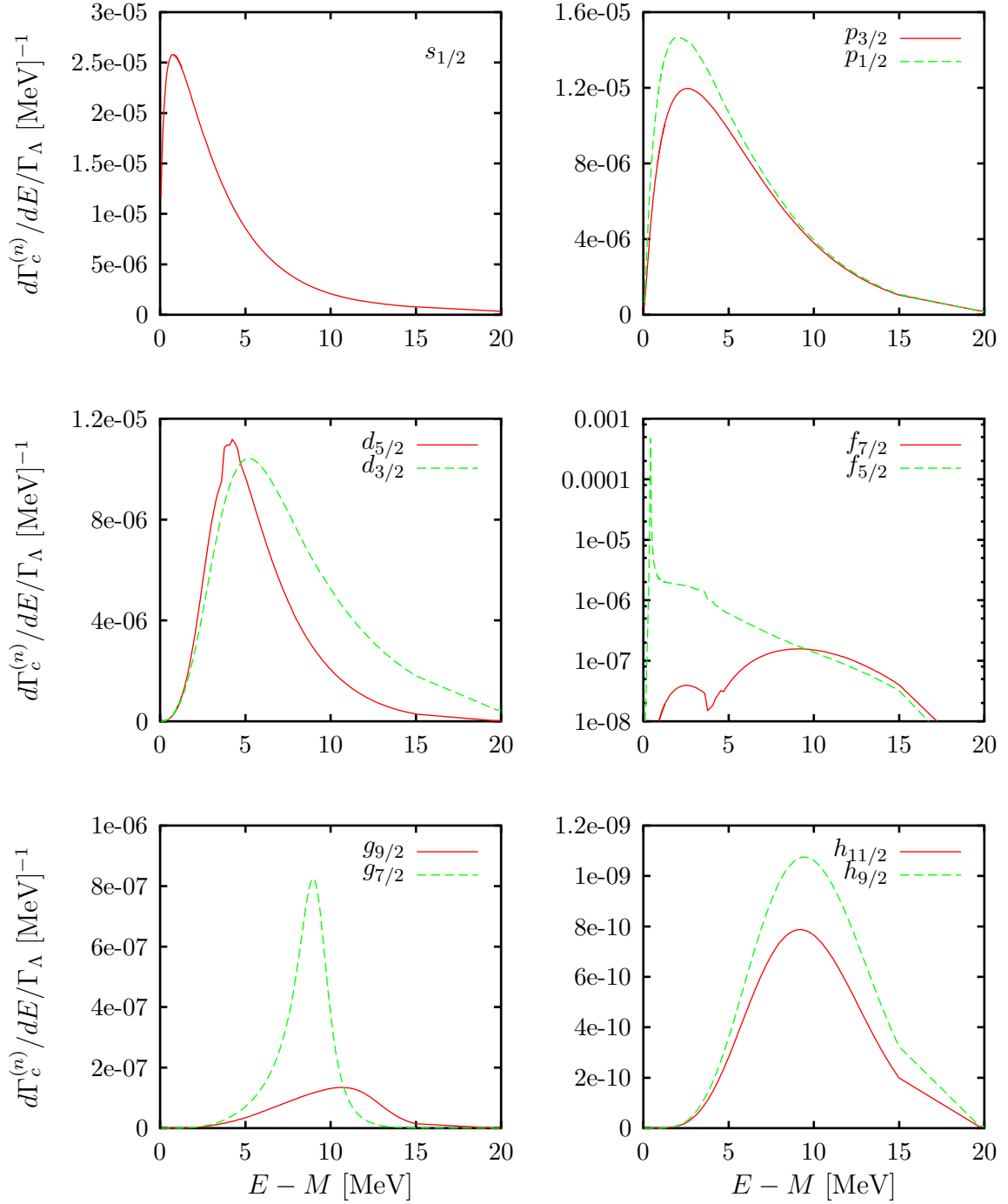


Figura 3.2: Idem fig. 3.1 en el canal π^0 .

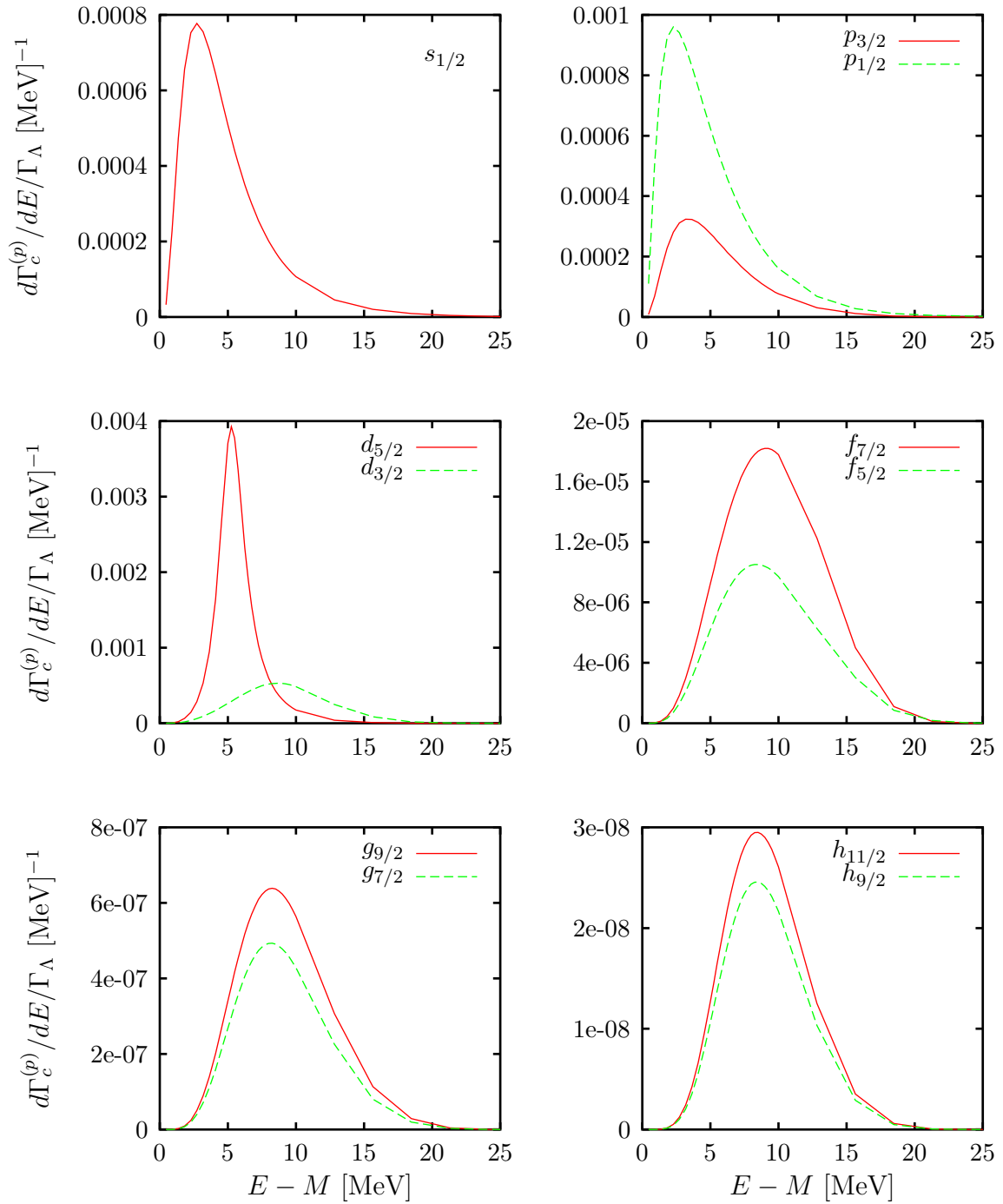
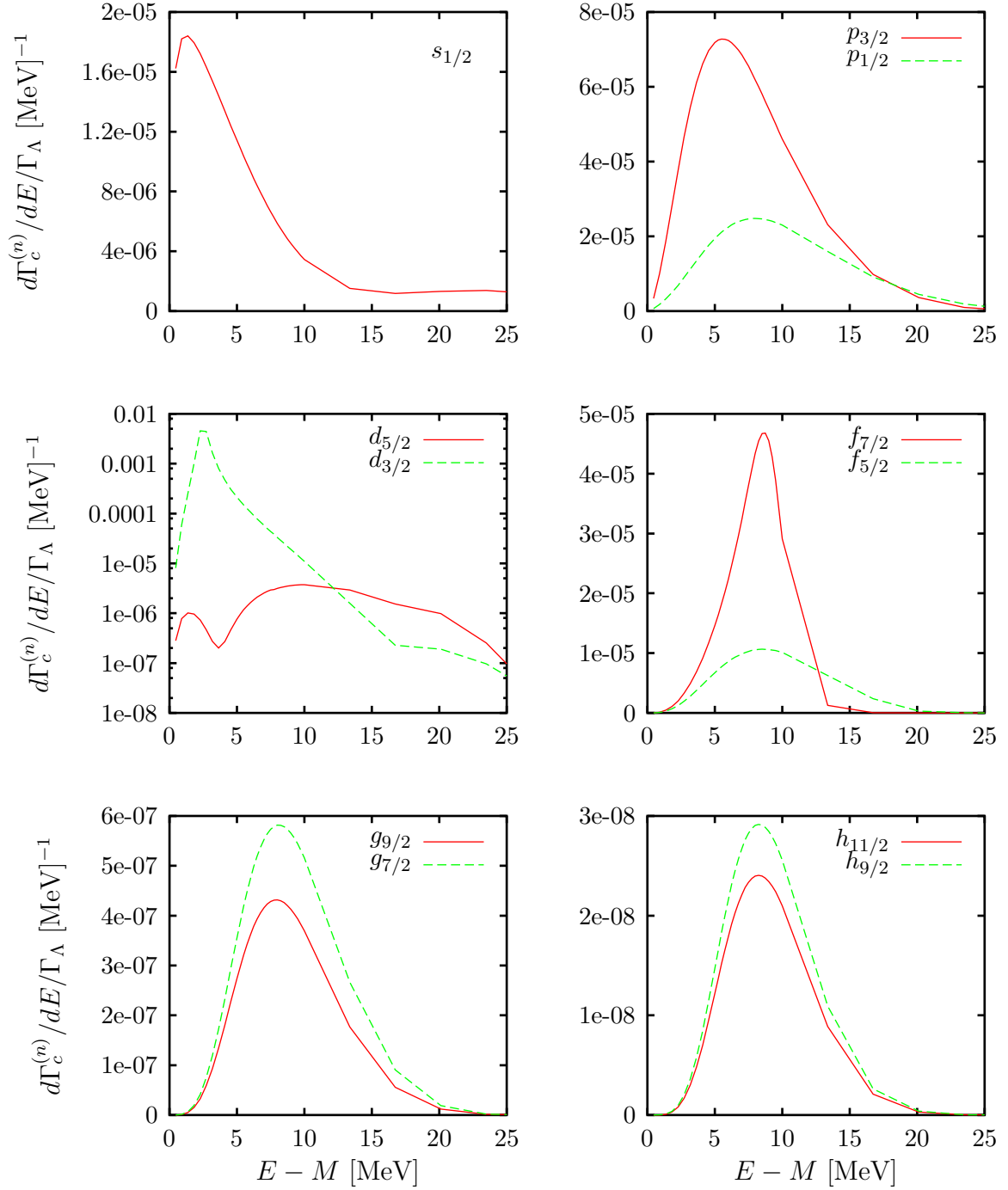


Figura 3.3: Espectro continuo de energía del protón saliente en la desintegración de $^{12}_\Lambda\text{C}$ en el canal π^- . Los resultados se han obtenido excluyendo la parte imaginaria del potencial responsable de la dispersión cuasielástica pión-núcleo.

Figura 3.4: Idem fig. 3.3, en el canal π^0 .

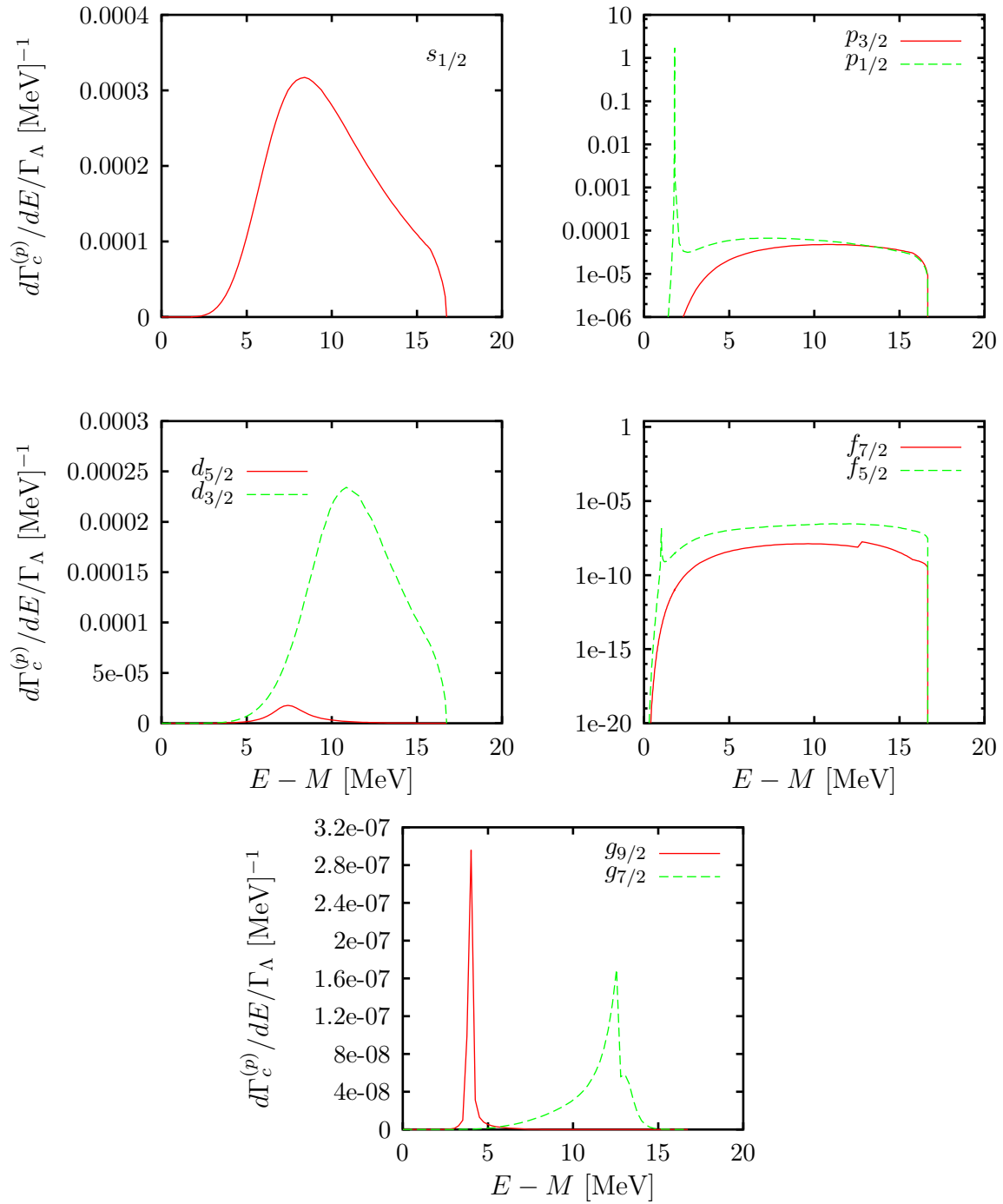


Figura 3.5: Espectro continuo de energía del protón saliente en la desintegración de $^{56}_{\Lambda}\text{Fe}$ en el canal π^- . Los resultados se han obtenido excluyendo la parte imaginaria del potencial responsable de la dispersión cuasielástica pión-núcleo.

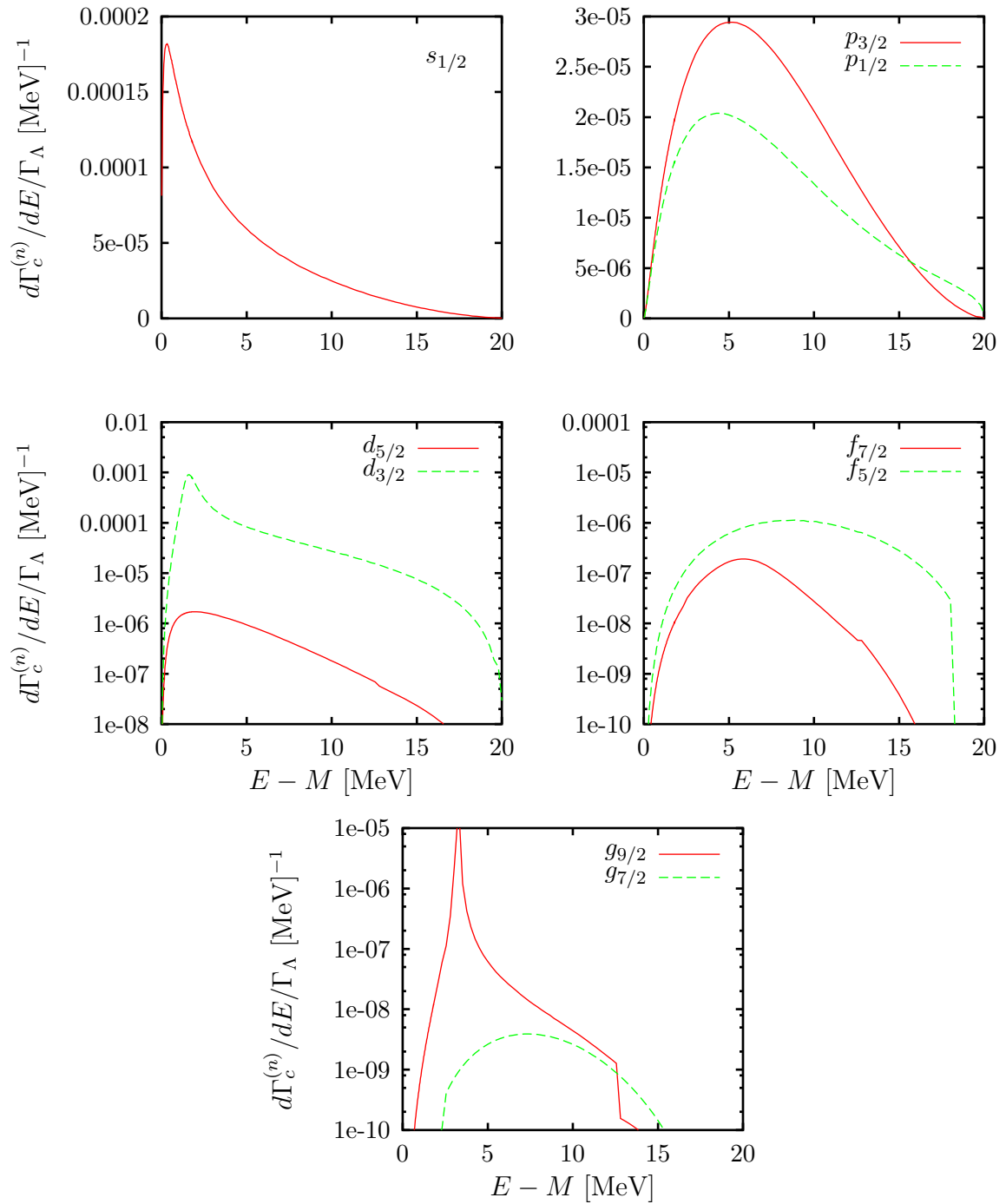


Figura 3.6: Idem fig. 3.5 en el canal π^0 .

${}^A_{\Lambda}Z$	Capa	Energía	
		[MeV]	$[\Gamma_{l_j}^n]_d$
	$1p_{3/2}$	-18.72	0.0473
	$1p_{1/2}$	-14.29	0.0865
	$1d_{5/2}$	-3.51	0.0156
	$2s_{1/2}$	-2.07	0.0008
	Total		0.150
${}^{12}_{\Lambda}C$	$1d_{5/2}$	-17.18	0.0086
	$2s_{1/2}$	-15.40	0.0285
	$1d_{3/2}$	-14.76	0.0342
	$2p_{3/2}$	-3.29	0.0009
	$1f_{7/2}$	-2.95	0.0010
	$2p_{1/2}$	-2.35	0.0009
	Total		0.074
${}^{28}_{\Lambda}Si$	$2p_{3/2}$	-11.20	0.0029
	$1f_{5/2}$	-10.35	0.0027
	$2p_{1/2}$	-8.84	0.0035
	$1g_{9/2}$	-6.33	0.0001
	$2d_{5/2}$	-1.08	0.0002
	$3s_{1/2}$	-0.33	0.0008
	Total		0.010
${}^{56}_{\Lambda}Fe$	Total		0.010

Cuadro 3.8: Contribuciones del espectro discreto a la anchura de desintegración piónica en el canal π^0 , en unidades de Γ_{Λ} . Se detallan los resultados obtenidos para cada una de las capas no ocupadas, que en todos los casos se han obtenido sin incluir el término de la parte imaginaria del potencial óptico que da cuenta de la dispersión cuasielástica de piones.

${}^A_{\Lambda}Z$	Capa	Energía	
		[MeV]	$[\Gamma_{l_j}^n]_d$
${}^{12}_{\Lambda}C$	$1p_{1/2}$	-0.60	0.0817
	Total		0.082
${}^{28}_{\Lambda}Si$	$2s_{1/2}$	-2.07	0.0204
	Total		0.020
${}^{56}_{\Lambda}Fe$	$1f_{7/2}$	-5.85	0.0013
	$2p_{3/2}$	-0.37	0.0031
	Total		0.004

Cuadro 3.9: Idem tabla 3.8 en el canal π^- .

Capítulo 4

Estudio de bariones pesados en modelos quark con simetría de quark pesado

4.1. Introducción

Ya antes de que se confirmara la existencia de bariones encantados [82], bariones que contienen un quark c , existían una gran número de trabajos en los que se intentaba predecir sus masas [83]–[85], momentos magnéticos [86, 87] o propiedades de sus modos de desintegración [88]–[90]. Existe en la actualidad un interés renovado en la espectroscopía y en las propiedades de desintegración de bariones con contenido en quarks b y c , motivado por el descubrimiento de Λ_b en el CERN [91], la observación de la mayoría de los bariones con encanto [92], así como evidencias sobre la desintegración semileptónica de Λ_b y Ξ_b [93, 94].

La Simetría de Quarks Pesados (HQS) es una herramienta de excepcional utilidad para el estudio de la dinámica de sistemas que incluyen quarks b o c [95]–[97], y ha sido ampliamente utilizada en sistemas con encanto o belleza. Por ejemplo, para describir sistemas con quarks b , todas las simulaciones de QCD en el retículo (*lattice QCD*) hacen uso de HQS [98]. HQS es una simetría aproximada $SU(N_F)$, donde N_F es el número de quarks con sabor pesado c, b, \dots , que presenta la teoría de la Cromodinámica Cuántica (QCD), en sistemas que contienen quarks pesados cuyas masas son mucho mayores que otras escalas típicas ($q = \Lambda_{QCD}, m_u, m_d, m_s, \dots$) que caracterizan la dinámica de los restantes grados de libertad del sistema. Esta simetría tiene cierta similitud con la aproximada independencia de las propiedades de los electrones atómicos de la masa y espín de los núcleos atómicos, fijada la carga total del núcleo. Despreciando correcciones del orden $\mathcal{O}(q/m_Q)^1$, esta simetría aproximada garantiza que los números cuánticos de

¹ q y m_Q representan la escala típica de los grados de libertad ligeros y la masa del quark pesado respectivamente.

Barión	S	J^P	I	S_{ligero}^π	Quark content	$M_{\text{exp. [92]}}$ [MeV]	$M_{\text{Latt. [99]}}$ [MeV]
Λ_c	0	$\frac{1}{2}^+$	0	0^+	udc	2285 ± 1	2270 ± 50
Σ_c	0	$\frac{1}{2}^+$	1	1^+	llc	2452 ± 1	2460 ± 80
Σ_c^*	0	$\frac{3}{2}^+$	1	1^+	llc	2518 ± 2	2440 ± 70
Ξ_c	-1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	0^+	lsc	2469 ± 3	2410 ± 50
Ξ_c'	-1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	1^+	lsc	2576 ± 3	2570 ± 80
Ξ_c^*	-1	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	1^+	lsc	2646 ± 2	2550 ± 80
Ω_c	-2	$\frac{1}{2}^+$	0	1^+	ssc	2698 ± 3	2680 ± 70
Ω_c^*	-2	$\frac{3}{2}^+$	0	1^+	ssc		2660 ± 80
Λ_b	0	$\frac{1}{2}^+$	0	0^+	udb	5624 ± 9	5640 ± 60
Σ_b	0	$\frac{1}{2}^+$	1	1^+	llb		5770 ± 70
Σ_b^*	0	$\frac{3}{2}^+$	1	1^+	llb		5780 ± 70
Ξ_b	-1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	0^+	lsb		5760 ± 60
Ξ_b'	-1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	1^+	lsb		5900 ± 70
Ξ_b^*	-1	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	1^+	lsb		5900 ± 80
Ω_b	-2	$\frac{1}{2}^+$	0	1^+	ssb		5990 ± 70
Ω_b^*	-2	$\frac{3}{2}^+$	0	1^+	ssb		6000 ± 70

Cuadro 4.1: Resumen de los números cuánticos y de las masas (experimentales o estimadas en simulaciones de QCD en el retículo [99]) correspondientes a bariones con un único quark pesado. S_{ligero}^π e I representan el espín-paridad y el isospín de los grados de libertad ligeros y S , J^P son la extrañeza y el espín-paridad del barión (l indica un quark ligero de sabor u ó d). Las masas experimentales promediadas en isospín están tomadas de la ref. [92] y el error tiene en cuenta la diferencia de masas entre los miembros del mismo multiplete. Los errores en las masas calculadas en simulaciones de *lattice* QCD han sido obtenidos sumando en cuadraturas los errores estadísticos y sistemáticos de la ref. [99].

los grados de libertad de los quarks ligeros en el seno de un barión pesado están bien definidos (tabla 4.1). En particular, según las predicciones de esta simetría, los pares Σ y Σ^* , Ξ' y Ξ^* y Ω y Ω^* se degeneran en el límite en que la masa del quark pesado se hace infinita.

Sin embargo hasta el momento, HQS no ha sido empleada de forma sistemática en el contexto de modelos no relativistas de quarks constituyentes. Estos modelos basados en potenciales parcialmente inspirados en QCD, describen razonablemente bien los hadrones, como estados ligados de quarks constituyentes, y las principales características de la interacción barión–barión [100]–[102]. La mayor parte de las interacciones quark–quark incluyen términos con la forma y estructura de color determinada por el intercambio de un gluón (OGE) [103] y un término de confinamiento. La fuerza que confina a los quarks todavía no es bien conocida, aunque se supone que está originada por efectos no perturbativos de largo alcance de QCD [104]. Estos términos no incorporan otra característica importante de QCD: la simetría quirral (CS) y su patrón de ruptura espontánea. Los términos de interacción quark–quark deducidos a partir de la ruptura espontánea de la simetría quirral (SCSB) han sido tenidos en cuenta en la descripción de sistemas nucleón–nucleón y en el espectro de bariones ligeros [105]–[109].

En este capítulo, utilizamos las técnicas variacionales desarrolladas en el estudio de hipernúcleos $\Lambda\Lambda$, a la resolución del problema de tres cuerpos que se plantea en el estudio de bariones con un quark pesado. Este procedimiento se ve notablemente simplificado gracias a HQS, y obtenemos funciones de onda simples y manejables². Utilizaremos diferentes interacciones fenomenológicas quark–quark [110, 8] cuyos parámetros han sido fijados estudiando el espectro mesónico. Con estos potenciales evaluaremos las masas y diversas propiedades estáticas de los bariones de la tabla 4.1. Algunos de estos bariones fueron previamente estudiados en [8], donde se solucionan ecuaciones de tipo Faddeev. Veremos como nuestro sencillo modelo reproduce los resultados de la referencia [8], y además encontraremos las predicciones de los potenciales quark–quark propuestos en [105]. Estas últimas interacciones incorporan simetría quirral SU(2) y dan lugar a un espectro mesónico en razonable acuerdo con el experimento [111].

Este capítulo está basado en los resultados de la ref. [112].

4.2. Hamiltoniano intrínseco

Una vez separado el movimiento libre del centro de masas del barión, tal y como se describe en el apéndice A, el hamiltoniano que controla la dinámica interna del sistema de tres quarks (q , q' y Q , con $q, q' = l$, $Q = b, c$) interactuando mutuamente³ viene

²Usamos una familia de funciones de onda en la que los números cuánticos de los grados de libertad ligeros están bien definidos.

³ l representa un quark ligero, de sabor u ó d

dado por

$$\begin{aligned}
 H^{\text{int}} &= \sum_{i=q,q'} h_i^{\text{SP}} + V_{qq'}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \text{espín}) - \frac{\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2}{m_Q} + \sum_{i=q,q',Q} m_i \quad (4.1) \\
 h_i^{\text{SP}} &= -\frac{\vec{\nabla}_i^2}{2\mu_i} + V_{Qi}(\vec{r}_i, \text{espín})
 \end{aligned}$$

donde m_q , $m_{q'}$ y m_Q son las masas de los quarks y los términos de interacción quark–quark dependen de los números cuánticos de espín y sabor de los quarks, además de sus coordenadas (x_1 , x_2 y x_h para q , q' y Q respectivamente, véase fig. A.1). Además, $\mu_{1,2} = (1/m_{q,q'} + 1/m_Q)^{-1}$ y $\vec{\nabla}_{1,2} = \partial/\partial\vec{r}_{1,2}$. Los hamiltonianos monoparticulares (h_i^{SP}), dan cuenta la dinámica del quark ligero en el campo medio creado por el quark pesado.

4.3. Interacciones quark–quark

4.3.1. Interacciones fenomenológicas

Se recopilan aquí algunas interacciones quark–antiquark ajustadas a un gran número de estados mesónicos en cada sector de sabor. Estas interacciones tienen la estructura general ($i, j = l, s, c, b$):

$$\begin{aligned}
 V_{ij}^{q\bar{q}}(r) &= -\frac{\kappa(1 - e^{-r/r_c})}{r} + \lambda r^p - \Lambda \quad (4.2) \\
 &+ \left\{ a_0 \frac{\kappa}{m_i m_j} \frac{e^{-r/r_c}}{r r_0^2} + \frac{2\pi}{3m_i m_j} \kappa' (1 - e^{-r/r_c}) \frac{e^{-r^2/x_0^2}}{\pi^{\frac{3}{2}} x_0^3} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \right\}
 \end{aligned}$$

con $\vec{\sigma}$ las matrices de espín de Pauli, m_i las masas de los quarks y

$$x_0(m_i, m_j) = A \left(\frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \right)^{-B} \quad (4.3)$$

Hemos considerado cinco interacciones diferentes, una propuesta por Bhaduri ([110]) y colaboradores, y otras cuatro debidas a Silvestre-Brac y Semay ([8, 113]). Los parámetros de estos potenciales están recogidos en la tabla 4.2. Las diferentes interacciones difieren entre sí en los factores de forma utilizados en los términos hiperfinos, la intensidad del potencial de confinamiento ($p = 1$, como sugieren los cálculos lattice QCD [114] o $p = 2/3$, que en el caso de mesones, proporciona el comportamiento asintótico correcto de las trayectorias de Regge [115]) o en el factor de forma incluido en el potencial de intercambio de un gluón (OGE).

Para encontrar las correspondientes interacciones quark–quark, a partir de las anteriores, hemos utilizado la prescripción $V_{ij}^{qq} = V_{ij}^{q\bar{q}}/2$ que asume una dependencia de color del tipo $\vec{\lambda}_i \vec{\lambda}_j$ ($\vec{\lambda}$ son las matrices de Gell–Mann) del potencial.

	BD	AL1	AL2	AP1	AP2
κ	0.52	0.5069	0.5871	0.4242	0.5743
$r_c [\text{GeV}^{-1}]$	0.	0.	0.1844	0.	0.3466
p	1	1	1	2/3	2/3
$\lambda [\text{GeV}^{(1+p)}]$	0.186	0.1653	0.1673	0.3898	0.3978
$\Lambda [\text{GeV}]$	0.9135	0.8321	0.8182	1.1313	1.1146
a_0	1	0	0	0	0
$r_0 [\text{GeV}^{-1}]$	2.305	—	—	—	—
κ'	0.	1.8609	1.8475	1.8025	1.8993
$m_u = m_d [\text{GeV}]$	0.337	0.315	0.320	0.277	0.280
$m_s [\text{GeV}]$	0.600	0.577	0.587	0.553	0.569
$m_c [\text{GeV}]$	1.870	1.836	1.851	1.819	1.840
$m_b [\text{GeV}]$	5.259	5.227	5.231	5.206	5.213
B	—	0.2204	0.2132	0.3263	0.3478
$A [\text{GeV}^{B-1}]$	—	1.6553	1.6560	1.5296	1.5321

Cuadro 4.2: Parámetros, tomados de las refs. [110, 8], de los diferentes potenciales fenomenológicos (ecs. (4.2) y (4.3)).

4.3.2. Interacciones quark–quark inspiradas en simetría quiral

Trabajando en el contexto del modelo sigma lineal $SU(2)$, Fernández y colaboradores han derivado en la ref. [105] una interacción quark–quark que, aparte de los términos usuales de intercambio de un gluón (OGE) y confinamiento, incluye potenciales pseudoescalares (V^{PS}) y escalares (V^S) inducidos por el intercambio de bosones de Goldstone y mesones escalares. Este modelo fue usado en [111] para analizar el espectro de mesones sin extrañeza con buenos resultados. Analizaremos aquí las predicciones de este modelo, inspirado en ruptura de simetría quiral $SU(2)$, para el espectro de bariones sin extrañeza. El estudio de bariones con extrañeza requeriría extender el modelo de [105] a tres sabores. Una realización lineal de la ruptura espontánea de simetría $SU(3)$ quiral requeriría el intercambio de nuevos bosones de Goldstone, por ejemplo kaones o mesones η , así como más mesones escalares. Esta extensión del modelo de la referencia [105] ha sido recientemente publicada [116], pero en esta memoria nos restringiremos al sector $SU(2)$ [105].

En el sector quark–quark, y para sabores u y d tenemos

$$V_{ij}^{qq} = V_{ij}^{\text{OGE}} + V_{ij}^{\text{CON}} + V_{ij}^{\text{PS}} + V_{ij}^{\text{S}}, \quad i, j = u, d \quad (4.4)$$

$$V_{ij}^{\text{OGE}}(r) = \frac{\alpha_s}{4} \vec{\lambda}_i \vec{\lambda}_j \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\pi}{m_i m_j} \left(1 + \frac{2}{3} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j \right) \frac{e^{-r/r_0}}{4\pi r_0^2 r} \right\} \quad (4.5)$$

$$V_{ij}^{\text{CON}}(r) = (-a_c r + a_b) \vec{\lambda}_i \vec{\lambda}_j \quad (4.6)$$

$$V_{ij}^{\text{PS}}(r) = \frac{\alpha_{ch} m_\pi}{1 - m_\pi^2 / \Lambda_{\text{CSB}}^2} \frac{1}{3} \left\{ Y(m_\pi r) - \frac{\Lambda_{\text{CSB}}^3}{m_\pi^3} Y(\Lambda_{\text{CSB}} r) \right\} (\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j) (\vec{\tau}_i \vec{\tau}_j) \quad (4.7)$$

$$V_{ij}^S(r) = -\frac{4\alpha_{ch}m_i m_j m_\sigma}{m_\pi^2} \frac{1}{1 - m_\sigma^2/\Lambda_{\text{CSB}}^2} \left\{ Y(m_\sigma r) - \frac{\Lambda_{\text{CSB}}}{m_\sigma} Y(\Lambda_{\text{CSB}} r) \right\} \quad (4.8)$$

con $\vec{\tau}$ las matrices de Pauli de isospín, $Y(x) = e^{-x}/x$ y $(\vec{\lambda}_i \vec{\lambda}_j)$ toma el valor $-8/3$ para pares quark–quark en un barión. Los parámetros dados en las referencias [105, 111] son

$$\begin{aligned} r_0 &= 0.145 \text{ fm} \\ \alpha_s &= 0.7 \\ \Lambda_{\text{CSB}} &= 3.15 \text{ fm}^{-1} \\ a_c &= 140 \text{ MeV/fm} \\ m_u = m_d &= 313 \text{ MeV} \\ \alpha_{ch} &= 0.027569 \\ m_\pi &= 138 \text{ MeV} \\ m_\sigma &= 675 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para reproducir la diferencia de masas entre los mesones $\rho - \pi$ ($\approx 771 - 138 = 633$ MeV) nosotros encontramos que el parámetro r_0 necesita ser ligeramente reducido a 0.1419 fm. Por otra parte, a_b toma el valor 122.1 MeV. Nótese, que para pares $q\bar{q}$, el operador $\vec{\lambda}_i \vec{\lambda}_j$ toma el valor $-16/3$ y que el operador de isospín $\vec{\tau}_i \vec{\tau}_j$ cambia de signo.

Para usar la interacción que se acaba de exponer para describir bariones pesados sin extrañeza, ésta debe ser suplementada por interacciones entre los quarks pesados (c ó b) y los quarks ligeros (u ó d). Entre los potenciales fenomenológicos descritos en la sec. 4.3.1 (tabla 4.2), el potencial AL1 utiliza masas de los quarks ligeros muy similares a las masas usadas en las refs. [105, 111] (315 frente a 313 MeV) y el término de confinamiento es lineal en ambos casos. Además, el potencial AL1 predice masas de los mesones D , D^* , B y B^* muy próximas a los valores experimentales, y también las masas de los mesones π y ρ (138 MeV y 770 MeV) de acuerdo con las que se obtienen con la interacción quark–quark de la ec. (4.4). De este modo, calcularemos las masas de los bariones $\Lambda_{b,c}$, $\Sigma_{b,c}$ y $\Sigma_{b,c}^*$ con un nuevo potencial, llamado AL1 χ , definido de esta forma:

- La interacción entre quarks ligeros (u ó d) queda descrita por el potencial de la ec. (4.4), que incorpora un patrón de ruptura espontánea de la simetría quiral y los parámetros de la ec. (4.9), excepto $m_u = m_d = 315$ MeV, $r_0 = 0.1414$ fm y $a_b = 122.4$ MeV. Estos dos últimos parámetros han sido modificados para obtener valores de 138 y 770 MeV (los valores que proporciona el potencial AL1) para las masas de los mesones π y ρ , cuando se utiliza una masa de 315 MeV para los quarks ligeros. Este nuevo conjunto de parámetros da lugar a mesones con masas de 138, 1236 y 1918 (770, 1558 y 2173) MeV y los números cuánticos del mesón π (ρ), en buen acuerdo con los resultados de la ref. [111].
- Se adopta el modelo AL1 para describir la interacción entre los quarks pesados y los quarks u ó d .

De esta forma, comparando los resultados obtenidos mediante las interacciones $AL1$ y $AL1\chi$ será posible cuantificar el efecto de incluir un patrón de ruptura espontánea de la simetría quiral al describir la dinámica de los quarks ligeros. Semejante estudio no ha sido nunca llevado a cabo en bariones pesados, y es de gran interés, en tanto que los números cuánticos de los grados de libertad ligeros en bariones de tipo Λ ó Σ tienen una clara correspondencia con los de los mesones π ó ρ .

4.4. Funciones de onda

En un barión, la función de onda singlete de color es completamente antisimétrica bajo el intercambio de cualquiera de los tres quarks. Así, asumiendo simetría $SU(3)$, la función de onda deberá ser completamente simétrica bajo intercambio de sabor, espín y grados de libertad espaciales de cualquiera de los quarks ligeros (u , d ó s). Por otra parte, para cualquiera de las interacciones descritas en la sec. 4.3, se tiene que tanto el espín total del barión, $\vec{S}_B = (\vec{\sigma}_q + \vec{\sigma}'_q + \vec{\sigma}_Q)/2$ como el momento angular orbital de los quarks ligeros con respecto a Q , \vec{L} , definido como

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \quad (4.10)$$

con

$$\vec{l}_k = -i\vec{r}_k \times \vec{\nabla}_k \quad k = 1, 2 \quad (4.11)$$

conmutan con el Hamiltoniano intrínseco. Supondremos que en el estado fundamental de los bariones, los quarks ligeros están en onda s , esto es, $L = 0$. Esto implica que la función de onda espacial sólo puede depender de las distancias relativas r_1 , r_2 y $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Nótese que cuando la masa del quark pesado se hace tender a infinito ($m_Q \rightarrow \infty$), el espín total de los grados de libertad ligeros

$$\vec{S}_{\text{ligero}} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_q + \vec{\sigma}_{q'}) \quad (4.12)$$

también conmuta con el hamiltoniano intrínseco, ya que los términos del tipo $\vec{\sigma}_Q \cdot \vec{\sigma}_{q,q'}/(m_Q m_{q,q'})$ se anulan en este límite.

Con toda esta información, y teniendo en cuenta los números cuánticos de los grados de libertad ligeros en cada barión, recopilados en la tabla 4.1, y que en general están siempre bien definidos en el límite estático, hemos elegido las siguientes funciones de onda⁴ en nuestro cálculo variacional:

- Bariones de tipo Λ . $I = 0$, $S_{\text{ligero}} = 0$

$$|\Lambda_Q; J = \frac{1}{2}, M_J \rangle = \left\{ |00\rangle_I \otimes |00\rangle_{S_{\text{ligero}}} \right\} \Psi_U^{\Lambda_Q}(r_1, r_2, r_{12}) \otimes |Q; M_J \rangle \quad (4.13)$$

⁴Se ha empleado la notación $|I, M_I\rangle_I$, $|ls\rangle$ ó $|sl\rangle$ y $|S, M_S\rangle$ para los términos de isospín, sabor y espín respectivamente.

donde $\Psi_u^{\Lambda_Q}(r_1, r_2, r_{12}) = \Psi_u^{\Lambda_Q}(r_2, r_1, r_{12})$ para garantizar la completa simetría de la función de onda bajo el intercambio del sabor, espín y coordenadas de los dos quarks ligeros (u ó d) y M_J es la tercera componente del momento angular total del barión. La simetría $SU(3)$ ($SU(2)$ en el caso de un barión de tipo Λ_Q) permitiría también una componente de la función de onda del tipo

$$\sum_{M_S M_Q} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) |M_Q M_S M_J\rangle \left\{ |00\rangle_I \otimes |1M_S\rangle_{S_{\text{ligerito}}} \right\} \Theta_u^{\Lambda_Q}(r_1, r_2, r_{12}) \otimes |Q; M_Q\rangle \quad (4.14)$$

con $\Theta_u^{\Lambda_Q}(r_1, r_2, r_{12}) = -\Theta_u^{\Lambda_Q}(r_2, r_1, r_{12})$ (incluyendo términos $r_1 - r_2$, por ejemplo), donde los números reales $(j_1 j_2 j | m_1 m_2 m) = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$ son coeficientes de Clebsch–Gordan. Sin embargo, una componente de este tipo está prohibida por HQS en el límite $m_Q \rightarrow \infty$, ya que en este caso S_{ligerito} está bien definido y fijado a cero para bariones de tipo Λ_Q . La función de onda más general compatible con la simetría $SU(2)$ involucraría una combinación lineal de las dos componentes de las ecs. (4.13) y (4.14). Despreciando términos de orden $\mathcal{O}(q/m_Q)$, HQS impone una condición adicional, que justifica el uso de funciones de onda del tipo indicado en la ec. (4.13), lo que supone una simplificación del problema de tres cuerpos considerado.

- Bariones de tipo Σ ó Σ^* $I = 1$, $S_{\text{ligerito}} = 1$

$$\begin{aligned} |\Sigma_Q; J = \frac{1}{2}, M_J; M_T\rangle &= \sum_{M_S M_Q} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) |M_Q M_S M_J\rangle \left\{ |1M_T\rangle_I \otimes |1M_S\rangle_{S_{\text{ligerito}}} \right\} \\ &\times \Psi_u^{\Sigma_Q}(r_1, r_2, r_{12}) \otimes |Q; M_Q\rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} |\Sigma_Q^*; J = \frac{3}{2}, M_J; M_T\rangle &= \sum_{M_S M_Q} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) |M_Q M_S M_J\rangle \left\{ |1M_T\rangle_I \otimes |1M_S\rangle_{S_{\text{ligerito}}} \right\} \\ &\times \Psi_u^{\Sigma_Q^*}(r_1, r_2, r_{12}) \otimes |Q; M_Q\rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

siendo M_T y M_Q las terceras componentes del isospín total del barión y del espín del quark pesado respectivamente. De la misma forma que en el caso de bariones Λ_Q , y guiados por HQS, no hemos considerado componentes construidas con la función de onda singlete de espín $|00\rangle_{S_{\text{ligerito}}}$ y una función de onda espacial antisimétrica, ya que estarían suprimidas por potencias de q/m_Q . HQS impone simplificaciones similares para el resto de bariones, y omitiremos de ahora en adelante cualquier otro comentario similar.

- Bariones de tipo Ξ , $I = \frac{1}{2}$ $S_{\text{ligerito}} = 0$

$$\begin{aligned} |\Xi_Q; J = \frac{1}{2}, M_J; M_T\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |ls\rangle \Psi_{ls}^{\Xi_Q}(r_1, r_2, r_{12}) - \right. \\ &\left. |sl\rangle \Psi_{sl}^{\Xi_Q}(r_1, r_2, r_{12}) \right\} \otimes |00\rangle_{S_{\text{ligerito}}} \otimes |Q; M_J\rangle \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde la tercera componente del isospín del barión, M_T es la del quark ligero l (esto es, $1/2$ ó $-1/2$ para u ó d respectivamente).

- Bariones de tipo Ξ' ó Ξ^* , $I = \frac{1}{2}$ $S_{\text{ligerero}} = 1$

$$\begin{aligned}
|\Xi'_Q; J = \frac{1}{2}, M_J; M_T \rangle &= \sum_{M_S M_Q} \left(\frac{1}{2} 1 \frac{1}{2} |M_Q M_S M_J \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \right. \\
&\times \left. \left\{ |ls \rangle \Psi_{ls}^{\Xi'_Q}(r_1, r_2, r_{12}) + |sl \rangle \Psi_{sl}^{\Xi'_Q}(r_1, r_2, r_{12}) \right\} \right. \\
&\otimes |1M_S \rangle_{S_{\text{ligerero}}} \otimes |Q; M_Q \rangle
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
|\Xi^*_Q; J = \frac{3}{2}, M_J; M_T \rangle &= \sum_{M_S M_Q} \left(\frac{1}{2} 1 \frac{3}{2} |M_Q M_S M_J \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \right. \\
&\times \left. \left\{ |ls \rangle \Psi_{ls}^{\Xi^*_Q}(r_1, r_2, r_{12}) + |sl \rangle \Psi_{sl}^{\Xi^*_Q}(r_1, r_2, r_{12}) \right\} \right. \\
&\otimes |1M_S \rangle_{S_{\text{ligerero}}} \otimes |Q; M_Q \rangle
\end{aligned} \tag{4.19}$$

donde la tercera componente de isospín del barión es la del quark ligero l .

- Bariones de tipo Ω ó Ω^* , $I = 0$ $S_{\text{ligerero}} = 1$

$$\begin{aligned}
|\Omega_Q; J = \frac{1}{2}, M_J \rangle &= \sum_{M_S M_Q} \left(\frac{1}{2} 1 \frac{1}{2} |M_Q M_S M_J \rangle |1M_S \rangle_{S_{\text{ligerero}}} \Psi_{ss}^{\Omega_Q}(r_1, r_2, r_{12}) \right. \\
&\otimes |Q; M_Q \rangle
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
|\Omega^*_Q; J = \frac{3}{2}, M_J \rangle &= \sum_{M_S M_Q} \left(\frac{1}{2} 1 \frac{3}{2} |M_Q M_S M_J \rangle |1M_S \rangle_{S_{\text{ligerero}}} \Psi_{ss}^{\Omega^*_Q}(r_1, r_2, r_{12}) \right. \\
&\otimes |Q; M_Q \rangle
\end{aligned} \tag{4.21}$$

con $\Psi_{ss}^{\Omega_Q}(r_1, r_2, r_{12}) = \Psi_{ss}^{\Omega_Q}(r_2, r_1, r_{12})$.

La función de onda espacial quedará determinada por el principio variacional, es decir, $\delta \langle B_Q | H | B_Q \rangle = 0$. Por simplicidad, utilizamos una familia de funciones de onda con parámetros libres que quedan determinados minimizando la masa del barión. El término de intercambio de gluones tiene una función delta regularizada que proporciona un fuerte efecto atractivo o repulsivo a cortas distancias, especialmente entre quarks ligeros⁵ Como vimos en el capítulo 2, familias de funciones variacionales tipo Jastrow proporcionan resultados excelentes y funciones de onda notablemente más simples que cuando se utilizan otro tipo de familias, como por ejemplo series Hylleraas, etc. Así, utilizamos funciones prueba del tipo

$$\Psi_{qq'}^{B_Q}(r_1, r_2, r_{12}) = N F^{B_Q}(r_{12}) \phi_q^Q(r_1) \phi_{q'}^Q(r_2) \tag{4.22}$$

⁵El tamaño de este término de la interacción OGE es proporcional al inverso de las masas de los quarks involucrados.

donde N es una constante determinada por normalización⁶

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3r_1 \int d^3r_2 \left| \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1, r_2, r_{12}) \right|^2 \\ &= 8\pi^2 \int_0^{+\infty} dr_1 r_1^2 \int_0^{+\infty} dr_2 r_2^2 \int_{-1}^{+1} d\mu \left| \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1, r_2, r_{12}) \right|^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

siendo μ el coseno del ángulo formado por \vec{r}_1 y \vec{r}_2 y $r_{12} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\mu}$.

Por simplicidad, esencialmente fijamos las funciones ϕ_q^Q y $\phi_{q'}^Q$, en lugar de dejarlas completamente arbitrarias y tratar de determinarlas utilizando el principio variacional. Estas funciones las construimos con la función de onda del estado fundamental en onda s del hamiltoniano monoparticular $h_{q,q'}^{sp}$ definido en ec. (4.1), y un factor que modifica su comportamiento a largas distancias

$$\begin{aligned} \phi_q^Q(r_1) &= (1 + \alpha_q r_1) \varphi_q^Q(r_1) \\ \phi_{q'}^Q(r_2) &= (1 + \alpha_{q'} r_2) \varphi_{q'}^Q(r_2) \end{aligned} \quad (4.24)$$

con sólo un parámetro libre para bariones con dos quarks ligeros l (u ó d) y dos en el caso de bariones con un quark ligero l y otro extraño s .

Por otra parte, se construye la función de correlación entre quarks ligeros, F^{BQ} como combinación lineal de gaussianas

$$F^{BQ}(r_{12}) = f^{BQ}(r_{12}) \sum_{j=1}^4 a_j e^{-b_j^2(r_{12}+d_j)^2}, \quad a_1 = 1 \quad (4.25)$$

$$f^{BQ}(r_{12}) = \begin{cases} 1 - e^{-cr_{12}} & \text{si } V_{qq'}^B(r_{12} = 0) \gg 0 \\ 1 \quad (c \rightarrow +\infty) & \text{si } V_{qq'}^B(r_{12} = 0) \leq 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

donde $V_{qq'}^B$ denota el potencial entre quarks ligeros para números cuánticos de espín e isospín correspondientes al barión B . A grandes distancias y debido al potencial de confinamiento, la función de correlación F^{BQ} se debe de anular⁷. También se anulará en el origen en aquellos casos en que $V_{qq'}^B$ es fuertemente repulsivo a cortas distancias (este es el caso, por ejemplo, de la interacción $AL1\chi$ y $S_{\text{ligero}} = 1$, esto es, los bariones Σ y Σ^*). Uno de los parámetros a_j puede ser absorbido dentro de la normalización, y así además de los parámetros c y $\alpha_{q,q'}$, tenemos un total de once parámetros libres que deben de ser determinados aplicando el principio variacional. La masa del barión es el

⁶Nótese que la familia de funciones tipo Jastrow supone una factorización de la función de onda en tres factores, cada uno de los cuales depende sólo de las variables involucradas r_1 , r_2 y r_{12} . Dependencias del tipo $r_1 - r_2$, mencionadas en la discusión de la ec. (4.14), no tienen cabida en funciones de onda factorizables de este tipo.

⁷El potencial de confinamiento también induce que los parámetros variacionales $\alpha_{q,q'}$ no sean cero, puesto que a diferencia de lo que ocurre en el caso de hipernúcleos $\Lambda\Lambda$, el producto de funciones monoparticulares $\varphi_q^Q(r_1)\varphi_{q'}^Q(r_2)$ no es solución del hamiltoniano a grandes distancias de separación entre los dos quarks ligeros.

valor esperado del hamiltoniano intrínseco, que se calcula tal y como se detalla en el apéndice A.

Dada la función de onda espacial del barión, la probabilidad \mathcal{P}_l de encontrar cada uno de los quarks ligeros con momento angular l referido al quark pesado y acoplados a $L = 0$ viene dada por

$$\mathcal{P}_l = 4\pi^2(2l+1) \int_0^{+\infty} dr_1 r_1^2 \int_0^{+\infty} dr_2 r_2^2 \left| \int_{-1}^{+1} d\mu P_l(\mu) \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1, r_2, r_{12}) \right|^2 \quad (4.27)$$

siendo P_l el polinomio de Legendre de orden l .

4.5. Propiedades estáticas: densidades de carga, de masa y momento magnético orbital

Al ser el operador de carga diagonal en el espacio espín-sabor, la densidad de carga en el punto de coordenadas \vec{r} , está dada por

$$\begin{aligned} \rho_e^{BQ}(\vec{r}) &= \int d^3R d^3r_1 d^3r_2 \left| \frac{e^{i\vec{P}_{CM}\cdot\vec{R}}}{\sqrt{V}} \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1, r_2, r_{12}) \right|^2 \times \\ &\quad (e_Q \delta^2(\vec{r} - \vec{y}_h) + e_q \delta^3(\vec{r} - \vec{y}_1) + e_{q'} \delta^3(\vec{r} - \vec{y}_2)) \\ &= \int d^3r_1 d^3r_2 \left| \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1, r_2, r_{12}) \right|^2 \times \\ &\quad (e_Q \delta^2(\vec{r} - \vec{y}_h) + e_q \delta^3(\vec{r} - \vec{y}_1) + e_{q'} \delta^3(\vec{r} - \vec{y}_2)) \\ &\equiv \rho_e^{BQ}(\vec{r})|_Q + \rho_e^{BQ}(\vec{r})|_q + \rho_e^{BQ}(\vec{r})|_{q'} \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde $\delta^3(\dots)$ y \vec{P}_{CM} son la delta de Dirac tridimensional y el momento de centro de masas, mientras que V es el volumen de interacción que cancela $\int d^3R$. Por su parte, $e_{q,q',Q}$ representan las cargas eléctricas de los quarks, en unidades de carga del protón (e). De la fig. A.1, se tiene

$$\begin{aligned} \vec{y}_h &= -\frac{m_q \vec{r}_1 + m_{q'} \vec{r}_2}{M} \\ \vec{y}_1 &= \vec{y}_h + \vec{r}_1 \\ \vec{y}_2 &= \vec{y}_h + \vec{r}_2 \end{aligned}$$

Al depender la función de onda exclusivamente de escalares (r_1 , r_2 y $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$) para el caso de bariones con $L = 0$, la densidad de carga es esféricamente simétrica.

El factor de forma se define de la manera usual

$$\mathcal{F}_e^{BQ}(\vec{q}) = \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho_e^{BQ}(r) \quad (4.29)$$

y depende exclusivamente de $|\vec{q}|$. El radio cuadrático medio de carga se define como

$$\langle r^2 \rangle_e^{BQ} = \int d^3r r^2 \rho_e^{BQ}(r) = 4\pi \int dr r^4 \rho_e^{BQ}(r) \quad (4.30)$$

De forma análoga, para la densidad de masa tenemos

$$\begin{aligned} \rho_m^{BQ}(\vec{r}) &= \int d^3R d^3r_1 d^3r_2 \left| \frac{e^{i\vec{P}_{CM}\cdot\vec{R}}}{\sqrt{V}} \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1, r_2, r_{12}) \right|^2 \times \\ &\quad \left(\frac{m_Q}{M} \delta^2(\vec{r} - \vec{y}_h) + \frac{m_q}{M} \delta^3(\vec{r} - \vec{y}_1) + \frac{m_{q'}}{M} \delta^3(\vec{r} - \vec{y}_2) \right) \\ &\equiv \rho_m^{BQ}(\vec{r})|_Q + \rho_m^{BQ}(\vec{r})|_q + \rho_m^{BQ}(\vec{r})|_{q'} \end{aligned} \quad (4.31)$$

con $M = m_q + m'_q + m_Q$ y donde hemos normalizado la densidad a 1. Sustituyendo en (4.30) la densidad de carga por la de masa, definimos el radio cuadrático medio de masa

$$\langle r^2 \rangle_m^{BQ} = \int d^3r r^2 \rho_m^{BQ}(r) = 4\pi \int dr r^4 \rho_m^{BQ}(r) \quad (4.32)$$

El momento magnético orbital está definido en términos de las velocidades $\vec{v}_{h,1,2}$ de los quarks Q , q y q' con respecto a la posición del centro de masas

$$\begin{aligned} \vec{\mu}^{BQ} &= \int d^3R d^3r_1 d^3r_2 \frac{e^{-i\vec{P}_{CM}\cdot\vec{R}}}{\sqrt{V}} (\Psi_{qq'}^{BQ}(r_1, r_2, r_{12}))^* \\ &\quad \times \left(\frac{e_Q}{2m_Q} (\vec{y}_h \times m_Q \vec{v}_{y_h}) + \frac{e_q}{2m_q} (\vec{y}_1 \times m_q \vec{v}_{y_1}) + \frac{e_{q'}}{2m_{q'}} (\vec{y}_2 \times m_{q'} \vec{v}_{y_2}) \right) \\ &\quad \times \frac{e^{-i\vec{P}_{CM}\cdot\vec{R}}}{\sqrt{V}} \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1, r_2, r_{12}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

con⁸ $m_q \vec{v}_{y_1} = -i \vec{\nabla}_1$, $m_{q'} \vec{v}_{y_2} = -i \vec{\nabla}_2$ y $m_Q \vec{v}_{y_h} = i(\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2)$. Al depender la función de onda sólo de escalares, el momento magnético orbital intrínseco es cero, a pesar de que las parejas (Q, q) , (Q, q') no están en onda relativa s . Entonces, el momento magnético del barión se debe enteramente a la contribución de espín, y al estar considerando funciones de onda que implementan HQS y por tanto para las que el espín de los grados de libertad ligeros y del quark pesado están bien definidos, el momento magnético debe coincidir con él que se obtendría en un simple modelo quark.

Finalmente y para testear el esquema variacional planteado, calculamos también algunas cantidades $(\rho_i(0))$ definidas en [8] y que en esta referencia se las denomina *funciones de onda en el origen* para el par (j, k) , donde (i, j, k) es una permutación

⁸Nótese que en la definición de la energía cinética clásica aparece un término de la forma $\vec{v}_{y_1} \cdot \vec{v}_{y_2}$ y por tanto el operador $m_q \vec{v}_{y_1}$ no es proporcional a $-i \vec{\nabla}_{y_1}$, sino que se escribe $m_q \vec{v}_{y_1} = \frac{M-m_q}{M} (-i \vec{\nabla}_{y_1}) - \frac{m_{q'}}{M} (-i \vec{\nabla}_{y_2}) = (-i \vec{\nabla}_1)$. De forma similar $m_{q'} \vec{v}_{y_2} = (-i \vec{\nabla}_2)$.

cíclica de (Q, q, q') . En [8] se introducen las siguientes coordenadas de Jacobi

$$\begin{aligned}\vec{s}_Q(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{s}_q(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= a_q \vec{r}_2, \quad a_q = \sqrt{\frac{m_Q(m_q + m_{q'})}{m_q(m_Q + m_{q'})}} \\ \vec{s}_{q'}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= a_{q'} \vec{r}_1, \quad a_{q'} = -\sqrt{\frac{m_Q(m_q + m_{q'})}{m_{q'}(m_Q + m_q)}}\end{aligned}\tag{4.34}$$

y funciones de correlación

$$\eta_i^{BQ}(s) = \frac{1}{s^2} \int d^3r_1 d^3r_2 |\Psi(r_1, r_2, r_{12})|^2 \delta(s - |\vec{s}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|), \quad i = Q, q, q' \tag{4.35}$$

Entonces las *funciones de onda en el origen* están definidas por [8]

$$\begin{aligned}\eta_Q^{BQ}(s=0) &= 16\pi^2 \int_0^\infty dt t^2 \left| \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1 = t, r_2 = t, r_{12} = 0) \right|^2 \\ \eta_q^{BQ}(s=0) &= \frac{16\pi^2}{a_q^3} \int_0^\infty dt t^2 \left| \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1 = t, r_2 = 0, r_{12} = t) \right|^2 \\ \eta_{q'}^{BQ}(s=0) &= \frac{16\pi^2}{|a_{q'}|^3} \int_0^\infty dt t^2 \left| \Psi_{qq'}^{BQ}(r_1 = 0, r_2 = t, r_{12} = t) \right|^2\end{aligned}\tag{4.36}$$

4.6. Resultados

4.6.1. Masas

En las tablas 4.3 y 4.4 se presentan las masas variacionales obtenidas con los potenciales descritos en las secciones precedentes. En estos cálculos hemos utilizado un paso de integración de 10^{-2} fm y estimamos el error numérico de las masas en 0.5 MeV. Por otra parte, incluyendo un mayor número de gaussianas⁹ en las funciones de correlación (ec. (4.25)) o términos cuadráticos o cúbicos en los términos de largas distancias de las funciones de onda monoparticulares (ec. 4.24) las energías variacionales no pueden ser disminuidas en más de 0.5 MeV. Para minimizar en el espacio multidimensional de parámetros variacionales hemos utilizado un algoritmo *Simplex* [117]. Las correspondientes funciones de onda pueden ser reconstruidas utilizando los parámetros recopilados en las tablas D.2 y D.3 del apéndice D.

Cuando ha sido posible, hemos comparado nuestros resultados con los obtenidos en la ref. [8] resolviendo las ecuaciones de Faddeev. En general, nuestros resultados están de acuerdo con los de [8], habiendo encontrado en general discrepancias menores¹⁰ de

⁹En el apéndice D (tabla D.1) se ilustra la dependencia de nuestros resultados del número de gaussianas empleado.

¹⁰Estas diferencias son pequeñas fracciones de las energías de ligadura.

3 MeV, y sólo en tres casos (Ω_c y Σ_b con el potencial BD y Λ_b con la interacción AL2), las discrepancias entre los resultados de [8] y del procedimiento variacional descrito aquí son superiores a 5 MeV.

Las masas obtenidas resolviendo las ecuaciones de Faddeev son en general menores que aquellas obtenidas mediante el procedimiento variacional, pero en algunos casos las masas obtenidas mediante este último método son inferiores a las obtenidas aplicando las técnicas de Faddeev, proporcionando así una mejor estimación de la masa del barión (obsérvese, por ejemplo, el caso de la masa del barión Λ_b calculada con el potencial AL2, que es 8 MeV inferior que la obtenida en la ref. [8]). Recordando que, según [8] sus resultados Faddeev están afectados por incertidumbres del orden de 5 MeV, podemos concluir que nuestros resultados variacionales y los Faddeev de la ref. [8] están de acuerdo, considerando las incertidumbres teóricas de ambos métodos. Así pues, es razonable pensar que las correcciones de masa finita a las funciones de onda, determinadas por el primer orden de HQS (ecs. (4.13) y (4.15) a (4.21)), deben de producir pequeños cambios en las masas calculadas para los estados fundamentales, incluso para el sector *charm*, donde HQS debería constituir una peor aproximación.

También hemos calculado las masas de los bariones Σ^* , Ξ' , Ξ^* y Ω^* que no fueron estudiados en la ref. [8]. Nótese que los términos del potencial de la forma $\vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_Q / m_q m_Q$ rompen¹¹ la degeneración entre los estados triplete de S_{ligero} (Σ - Σ^* , Ξ' - Ξ^* y Ω - Ω^*). Las cinco interacciones fenomenológicas consideradas en [8] predicen masas, para todos los bariones considerados, en buen acuerdo con los datos experimentales existentes o con las estimaciones que se deducen en simulaciones de QCD en el retículo.

Por otra parte, mientras que las interacciones AL1 y AL1 χ dan lugar a masas similares (con diferencias del orden de 10 MeV) para los bariones Σ_Q y Σ_Q^* , la masa del barión Λ_c (Λ_b), resulta ser 155 MeV (168 MeV) menor cuando se utiliza el potencial AL1 χ , que incorpora en cierta medida algunos aspectos de simetría quiral, que cuando se trabaja con la interacción puramente fenomenológica AL1. En términos de energías de ligadura ($B_Q = M[\Lambda_Q] - m_Q - m_u - m_d$), encontramos cambios relativos de hasta el 90 %

$$\begin{aligned} \left| \frac{B_c^{AL1} - B_c^{AL1\chi}}{B_c^{AL1}} \right| &= 0.9 \\ \left| \frac{B_b^{AL1} - B_b^{AL1\chi}}{B_b^{AL1}} \right| &= 0.7 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Estas diferencias tan importantes son debidas al diferente comportamiento del potencial de intercambio de un pión (OPE) en los sectores quark–quark y quark–antiquark. En el primer caso, a partir de la ec. (4.7), el operador $(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j)$ ($\vec{\tau}_i \vec{\tau}_j$) proporciona un valor 9 con los números cuánticos de los quarks ligeros del barión Λ_Q y 1 para los bariones Σ_Q y Σ_Q^* . Este operador de espín–isospín cambia de signo y pasa a ser $-(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j)$ ($\vec{\tau}_i \vec{\tau}_j$)

¹¹Para bariones en onda *s*, el operador de espín $\vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_Q$ se anula en el caso de funciones de onda acopladas a $S_{ligero} = 0$ y para estados triplete $S_{ligero} = 1$ toma el valor 1 ó -2 según momento angular total sea $J = \frac{3}{2}$ ó $J = \frac{1}{2}$ respectivamente.

Barión		BD	AL2	AP1	AP2	AL1	AL1 χ	Exp	
Λ_b	FAD	5660	5637	5659	5643	5643	—	5624 ± 9	
	VAR	5663	5629	5659	5643	5643	5475		
Σ_b	FAD	5865	5844	5868	5859	5849	—	$5770^\dagger \pm 70$	
	VAR	5871	5844	5870	5861	5851	5841		
	Σ_b^*	VAR	5900	5874	5899	5893	5882		5869
Ξ_b	FAD	5830	5803	5819	5805	5808	—	$5760^\dagger \pm 70$	
	VAR	5832	5800	5820	5807	5808	—		
	Ξ_b'	VAR	5963	5939	5959	5946	5946		—
	Ξ_b^*	VAR	5989	5970	5987	5979	5975		—
Ω_b	FAD	6048	6029	6033	6020	6035	—	$5990^\dagger \pm 70$	
	VAR	6050	6030	6036	6023	6033	—		
	Ω_b^*	VAR	6074	6061	6068	6056	6063		—

Cuadro 4.3: Masas en MeV de los bariones con un quark b utilizando los seis potenciales considerados en este trabajo. Se dan los resultados obtenidos aplicando el esquema variacional descrito en este capítulo (VAR), así como los resultados de la ref. [8] obtenidos aplicando técnicas tipo Faddeev (FAD). De estos últimos valores, se ha eliminado el efecto de la interacción a tres cuerpos $V_{123} = \text{constant}/m_q m_{q'} m_Q$ considerado en dicha referencia. Cuando se ha dispuesto de ellas, se dan las masas experimentales [92], y en el resto de ocasiones se recopilan los valores obtenidos en simulaciones de QCD en el retículo (marcadas con el símbolo \dagger) [99].

para el caso quark–antiquark, y se obtiene un factor 3 ó -1 para los mesones π ó ρ , respectivamente. En promedio, ambos potenciales AL1 y AL1 χ son fuertemente atractivos (moderadamente repulsivos) en el canal del π (ρ), y han sido ajustados para proporcionar la misma masa del estado fundamental del mesón π (ρ). Para bariones, la intensidad del potencial AL1 queda reducida en un factor dos, debido a la prescripción $V_{ij}^{q\bar{q}} = V_{ij}^{q\bar{q}}/2$ inducida por el operador de color $\vec{\lambda}_i \vec{\lambda}_j$. Sin embargo, esto no ocurre para el potencial AL1 χ . En este caso, los términos de intercambio de gluones y de confinamiento siguen la citada prescripción, pero mientras que el término de intercambio de escalares permanece inalterado, el potencial OPE es tres veces más atractivo en un barión Λ_Q que en un pión. El efecto resultante es que el sector ligero de la interacción AL1 χ en el barión ve reducida su intensidad un factor significativamente menor que 2. El término OPE desempeña un papel menor en estados triplete de espín (ρ , Σ_Q y Σ_Q^*) y de esta forma se entiende por qué los potenciales AL1 y AL1 χ predicen masas similares para los bariones Σ_Q y Σ_Q^* .

Barión		BD	AL2	AP1	AP2	AL1	AL1 χ	Exp
Λ_c	FAD	2321	2302	2311	2313	2296	–	2285 ± 1
	VAR	2320	2305	2308	2310	2295	2140	
Σ_c	FAD	2494	2474	2484	2491	2466	–	2452 ± 1
	VAR	2498	2479	2484	2491	2469	2457	
Σ_c^*	VAR	2570	2559	2560	2571	2548	2535	2518 ± 2
Ξ_c	FAD	2502	2480	2485	2488	2473	–	2469 ± 3
	VAR	2506	2480	2485	2488	2474	–	
Ξ_c'	VAR	2606	2584	2587	2592	2578	–	2576 ± 3
Ξ_c^*	VAR	2671	2661	2664	2672	2655	–	2646 ± 2
Ω_c	FAD	2707	2686	2678	2682	2678	–	2698 ± 3
	VAR	2713	2683	2682	2684	2681	–	
Ω_c^*	VAR	2770	2759	2759	2765	2755	–	$2660^\dagger \pm 80$

Cuadro 4.4: Idem tabla 4.3 para bariones *encantados*.

4.6.2. Radios cuadráticos de masa y de carga, densidades y factores de forma

También hemos calculado los radios cuadráticos medios de masa y de carga, los factores de forma de carga y las densidades de masa para todos los bariones y las seis interacciones consideradas. Los resultados se presentan en las tablas 4.5 a 4.8 y en las figuras 4.1 a 4.7. Comparamos nuestros resultados, cuando esto es posible, con los resultados obtenidos en el esquema Faddeev de la ref. [8], encontrando un gran acuerdo, con pequeñas diferencias del orden de 3 – 4% en el peor de los casos. Las diferencias entre las predicciones de los potenciales AL1 y AL1 χ son bastante pequeñas, y será difícil usarlas para decantarse experimentalmente por una u otra interacción.

4.6.3. Funciones de onda en el origen

Como un último test de la bondad de nuestro esquema variacional, y siguiendo la ref. [8], hemos calculado las llamadas *funciones de onda en el origen* para los diferentes pares de quarks en el interior del barión (ec. (4.36)). El valor absoluto de esta cantidad depende considerablemente del procedimiento numérico usado para resolver el problema de tres cuerpos¹². Nuestros resultados se recopilan en las tabla 4.9 y 4.10, donde los comparamos con los resultados de [8].

Para bariones de tipo Λ , Σ y Ω nuestros resultados y los de la ref. [8] están en buen acuerdo¹³ dentro de 10 – 20%. Este resultado es notable, ya que, según se menciona

¹²De hecho, la función de onda en el origen es especialmente sensible a correlaciones de corto alcance que no son tenidas en cuenta de forma precisa en tratamientos aproximados.

¹³En el caso de bariones Σ al considerar la interacción BD, los resultados Faddeev y variacionales

Barión		BD	AL2	AP1	AP2	AL1	AL1 χ	
Λ_b	FAD	0.043	0.044	0.046	0.044	0.045	–	
	VAR	0.045	0.043	0.048	0.045	0.045	0.042	
Σ_b	FAD	0.051	0.053	0.056	0.053	0.054	–	
	VAR	0.051	0.053	0.055	0.053	0.057	0.059	
	Σ_b^*	VAR	0.052	0.056	0.058	0.056	0.060	0.061
Ξ_b	FAD	0.045	0.046	0.048	0.046	0.048	–	
	VAR	0.047	0.046	0.050	0.047	0.049	–	
	Ξ'_b	VAR	0.053	0.053	0.059	0.052	0.060	–
	Ξ_b^*	VAR	0.052	0.057	0.060	0.054	0.059	–
Ω_b	FAD	0.050	0.052	0.055	0.051	0.054	–	
	VAR	0.050	0.054	0.057	0.053	0.057	–	
	Ω_b^*	VAR	0.051	0.055	0.061	0.056	0.059	–

Cuadro 4.5: Radios cuadráticos medios de masa (fm^2) para bariones con un quark b (véase la ec. (4.32)). Los resultados variacionales y Faddeev (ref. [8]) se denotan por VAR y FAD respectivamente

Barión		BD	AL2	AP1	AP2	AL1	AL1 χ	
Λ_c	FAD	0.097	0.101	0.109	0.103	0.104	–	
	VAR	0.100	0.101	0.108	0.106	0.106	0.101	
Σ_c	FAD	0.111	0.117	0.128	0.121	0.121	–	
	VAR	0.112	0.118	0.127	0.118	0.123	0.123	
	Σ_c^*	VAR	0.122	0.131	0.138	0.131	0.135	0.139
Ξ_c	FAD	0.097	0.100	0.107	0.101	0.104	–	
	VAR	0.099	0.103	0.110	0.104	0.105	–	
	Ξ'_c	VAR	0.106	0.110	0.122	0.111	0.119	–
	Ξ_c^*	VAR	0.115	0.123	0.133	0.126	0.123	–
Ω_c	FAD	0.100	0.103	0.110	0.102	0.108	–	
	VAR	0.096	0.101	0.110	0.103	0.108	–	
	Ω_c^*	VAR	0.107	0.117	0.122	0.113	0.120	–

Cuadro 4.6: Idem tabla 4.5 para bariones *encantados*.

Barión		BD	AL2	AP1	AP2	AL1	AL1 χ
Λ_b^0	FAD	0.115	0.123	0.148	0.140	0.128	–
	VAR	0.121	0.122	0.152	0.143	0.127	0.119
Σ_b^-	FAD	-0.280	-0.305	-0.369	-0.347	-0.318	–
	VAR	-0.279	-0.304	-0.357	-0.341	-0.332	-0.345
Σ_b^0	FAD	0.138	0.151	0.183	0.172	0.157	–
	VAR	0.138	0.150	0.176	0.169	0.164	0.171
Σ_b^+	FAD	0.555	0.607	0.734	0.692	0.633	–
	VAR	0.555	0.603	0.710	0.679	0.659	0.687
Σ_b^{*-}	VAR	-0.289	-0.322	-0.376	-0.364	-0.349	-0.358
Σ_b^{*0}	VAR	0.143	0.159	0.186	0.180	0.172	0.177
Σ_b^{*+}	VAR	0.574	0.639	0.747	0.725	0.694	0.711
Ξ_b^-	FAD	-0.193	-0.203	-0.234	-0.219	-0.212	–
	VAR	-0.198	-0.201	-0.240	-0.220	-0.213	–
Ξ_b^0	FAD	0.151	0.161	0.197	0.187	0.168	–
	VAR	0.150	0.151	0.189	0.180	0.158	–
$\Xi_b^{\prime-}$	VAR	-0.228	-0.235	-0.285	-0.248	-0.267	–
$\Xi_b^{\prime0}$	VAR	0.184	0.188	0.234	0.209	0.214	–
Ξ_b^{*-}	VAR	-0.224	-0.250	-0.287	-0.259	-0.266	–
Ξ_b^{*0}	VAR	0.179	0.201	0.236	0.221	0.212	–
Ω_b^-	FAD	-0.164	-0.173	-0.191	-0.174	-0.183	–
	VAR	-0.163	-0.177	-0.196	-0.180	-0.189	–
Ω_b^{*-}	VAR	-0.167	-0.182	-0.210	-0.189	-0.196	–

Cuadro 4.7: Radios cuadráticos medios de carga (unidades efm^2) para bariones con un quark b (véase la ec. (4.30)). Los resultados variacionales y Faddeev se denotan con VAR y FAD (ref. [8]) respectivamente.

Barión		BD	AL2	AP1	AP2	AL1	AL1 χ
Λ_c^+	FAD	0.117	0.124	0.147	0.139	0.129	–
	VAR	0.120	0.125	0.145	0.142	0.131	0.124
Σ_c^0	FAD	-0.224	-0.245	-0.304	-0.287	-0.256	–
	VAR	-0.226	-0.248	-0.299	-0.279	-0.261	-0.260
Σ_c^+	FAD	0.134	0.145	0.174	0.164	0.151	–
	VAR	0.135	0.147	0.172	0.160	0.153	0.154
Σ_c^{++}	FAD	0.494	0.535	0.652	0.615	0.557	–
	VAR	0.497	0.541	0.643	0.599	0.568	0.567
Σ_c^{*0}	VAR	-0.246	-0.274	-0.323	-0.307	-0.283	-0.293
Σ_c^{*+}	VAR	0.148	0.163	0.187	0.177	0.168	0.173
Σ_c^{*++}	VAR	0.541	0.599	0.697	0.661	0.619	0.639
Ξ_c^0	FAD	-0.145	-0.154	-0.183	-0.171	-0.161	–
	VAR	-0.148	-0.156	-0.182	-0.174	-0.163	–
Ξ_c^+	FAD	0.160	0.170	0.206	0.196	0.177	–
	VAR	0.158	0.170	0.198	0.196	0.179	–
$\Xi_c^{\prime 0}$	VAR	-0.164	-0.179	-0.213	-0.196	-0.192	–
$\Xi_c^{\prime +}$	VAR	0.174	0.199	0.234	0.218	0.207	–
Ξ_c^{*0}	VAR	-0.177	-0.196	-0.232	-0.217	-0.198	–
Ξ_c^{*+}	VAR	0.190	0.218	0.254	0.241	0.213	–
Ω_c^0	FAD	-0.111	-0.117	-0.131	-0.120	-0.124	–
	VAR	-0.108	-0.115	-0.131	-0.120	-0.124	–
Ω_c^{*0}	VAR	-0.118	-0.132	-0.143	-0.131	-0.138	–

Cuadro 4.8: Idem tabla 4.7 para bariones *encantados*.

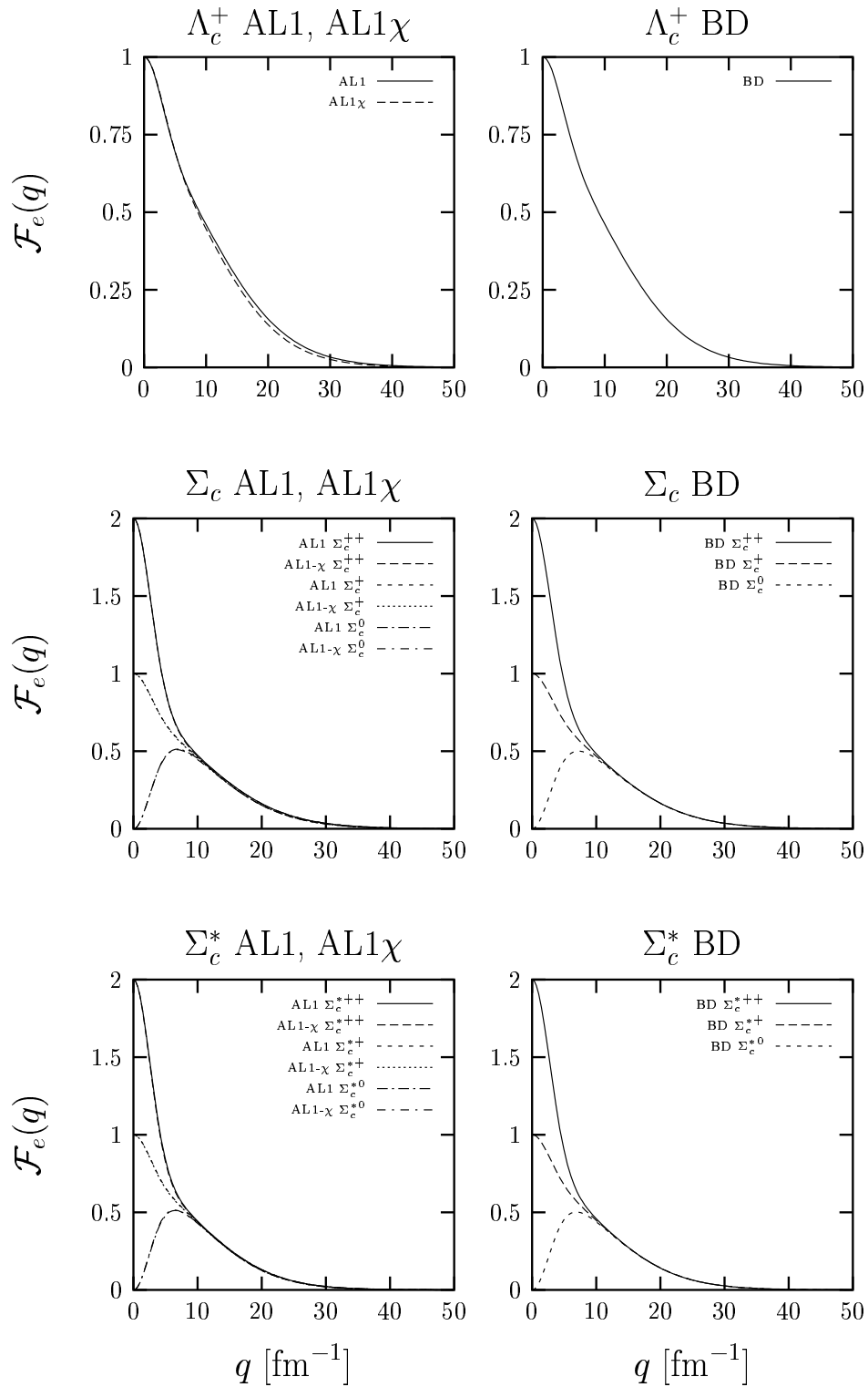


Figura 4.1: Factores de forma eléctricos para bariones *encantados* sin extrañeza obtenidos con las interacciones AL1, BD y AL1 χ . Nótese que $\mathcal{F}_e(0)$ determina la carga del barión.

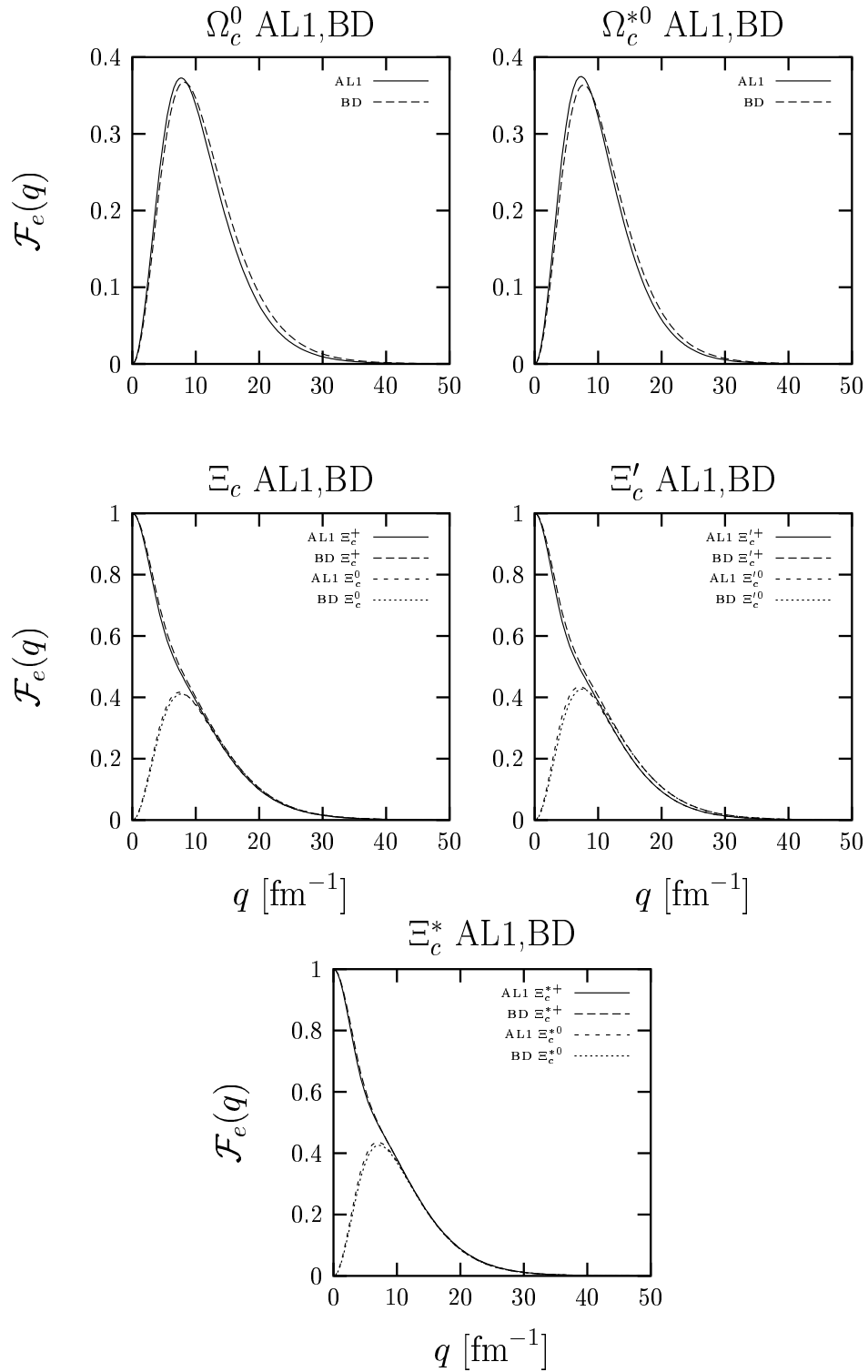


Figura 4.2: Factores de forma eléctricos para bariones *encantados* con extrañeza, obtenidos con las interacciones AL1 y BD. Nótese que $\mathcal{F}_e(0)$ determina la carga del barión.

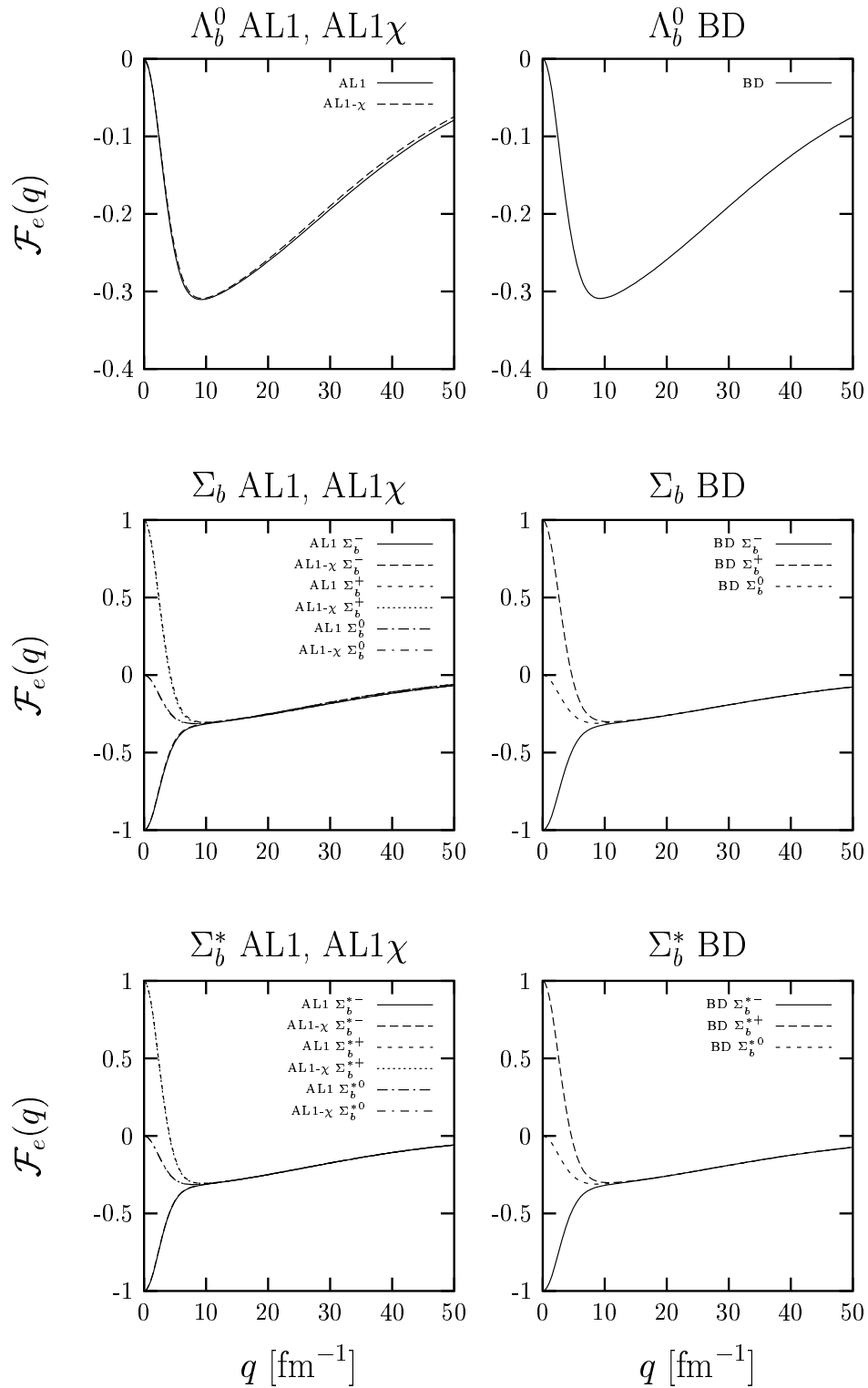


Figura 4.3: Factores de forma eléctricos para bariones con un quark b sin extrañeza obtenidos con las interacciones AL1, BD y AL1 χ . Nótese que $\mathcal{F}_e(0)$ determina la carga del barión.

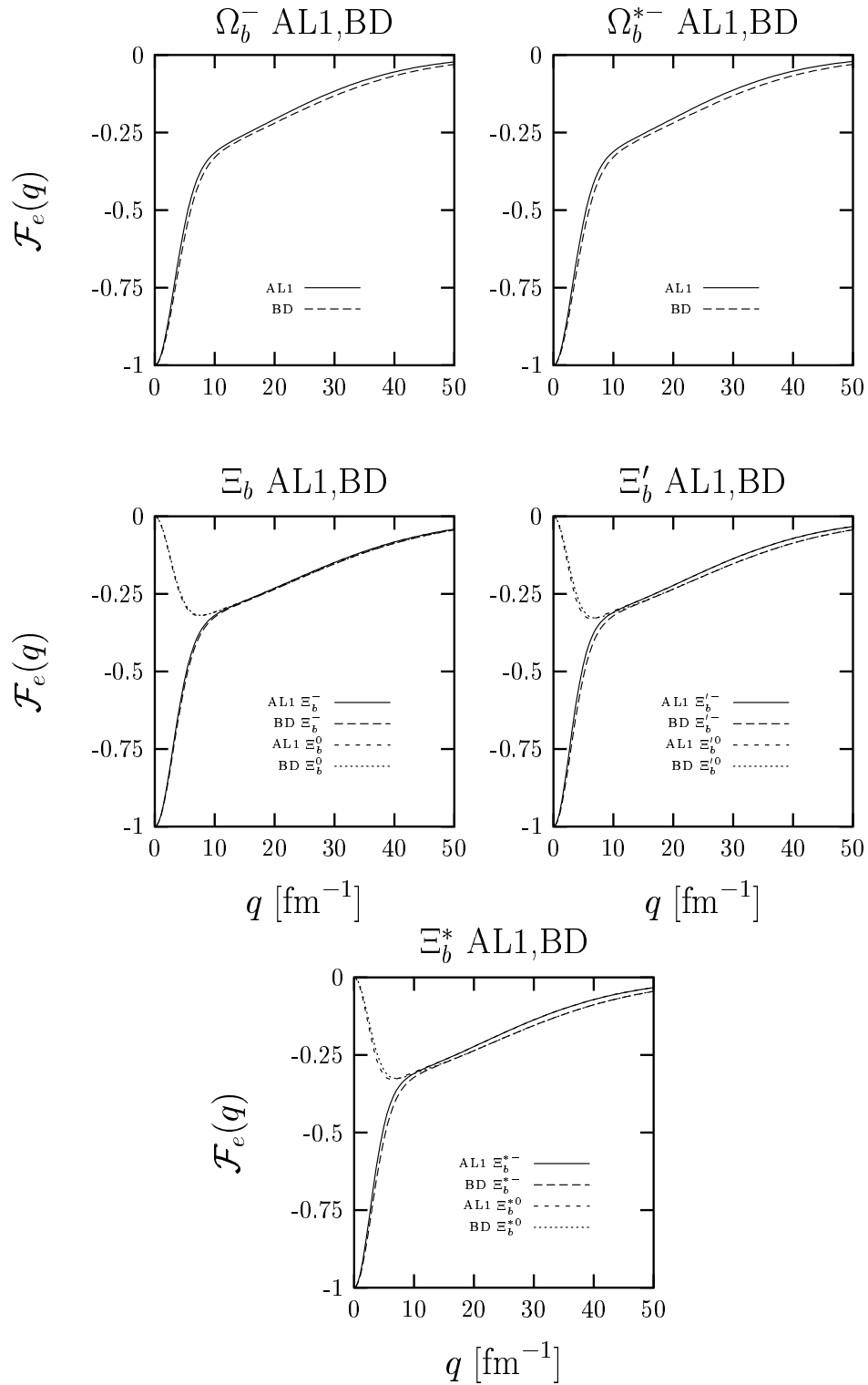


Figura 4.4: Factores de forma eléctricos para bariones con un quark b con extrañeza, obtenidos con las interacciones AL1 y BD.

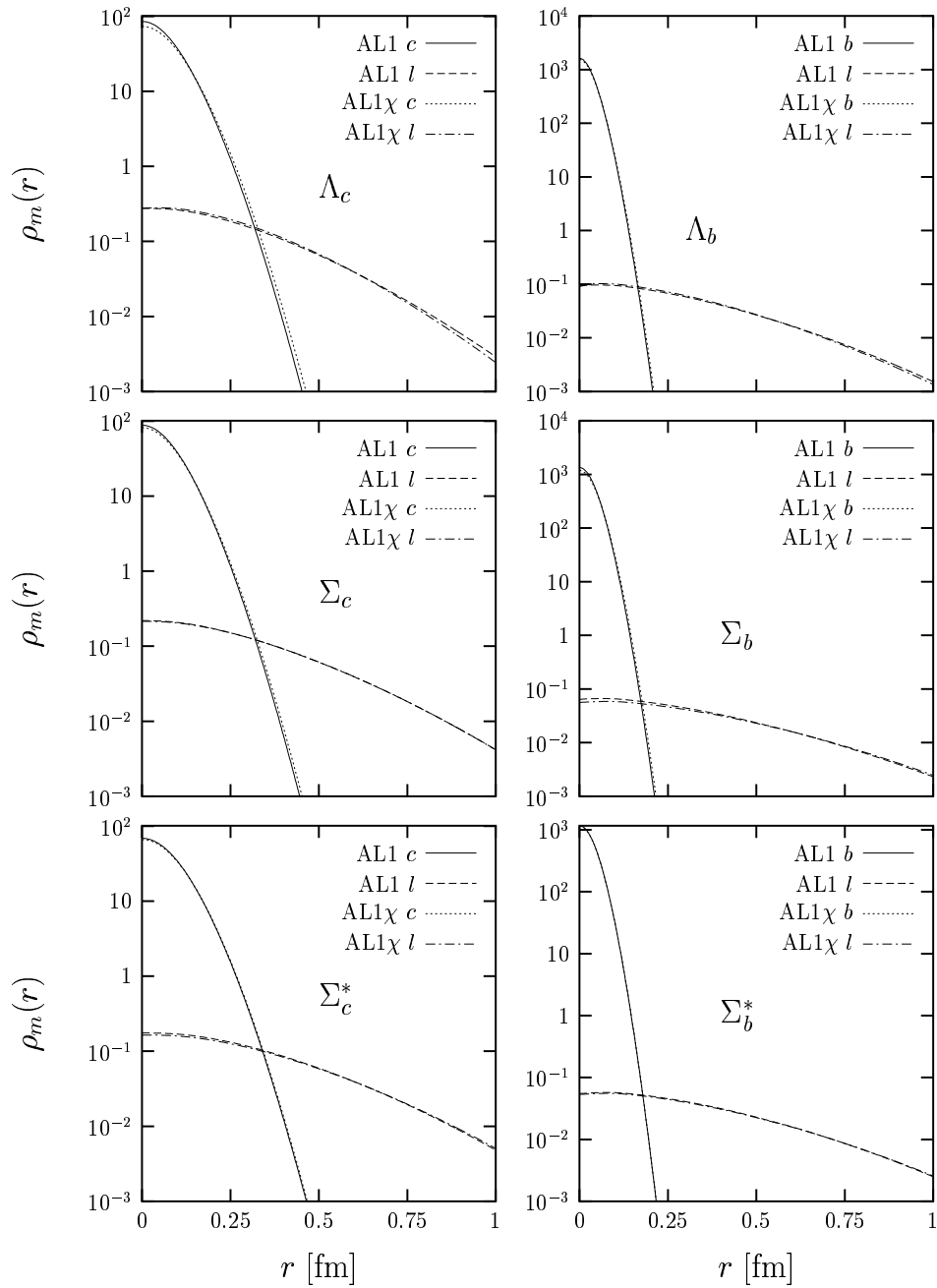


Figura 4.5: Densidades de masa [fm $^{-3}$], $\rho_m^{BQ}(\vec{r})|_{Q=c,b}$, $\rho_m^{BQ}(\vec{r})|_{q=l}$ (ec. (4.32)) para bariones sin extrañeza, obtenidos con los potenciales AL1 y AL1 χ .

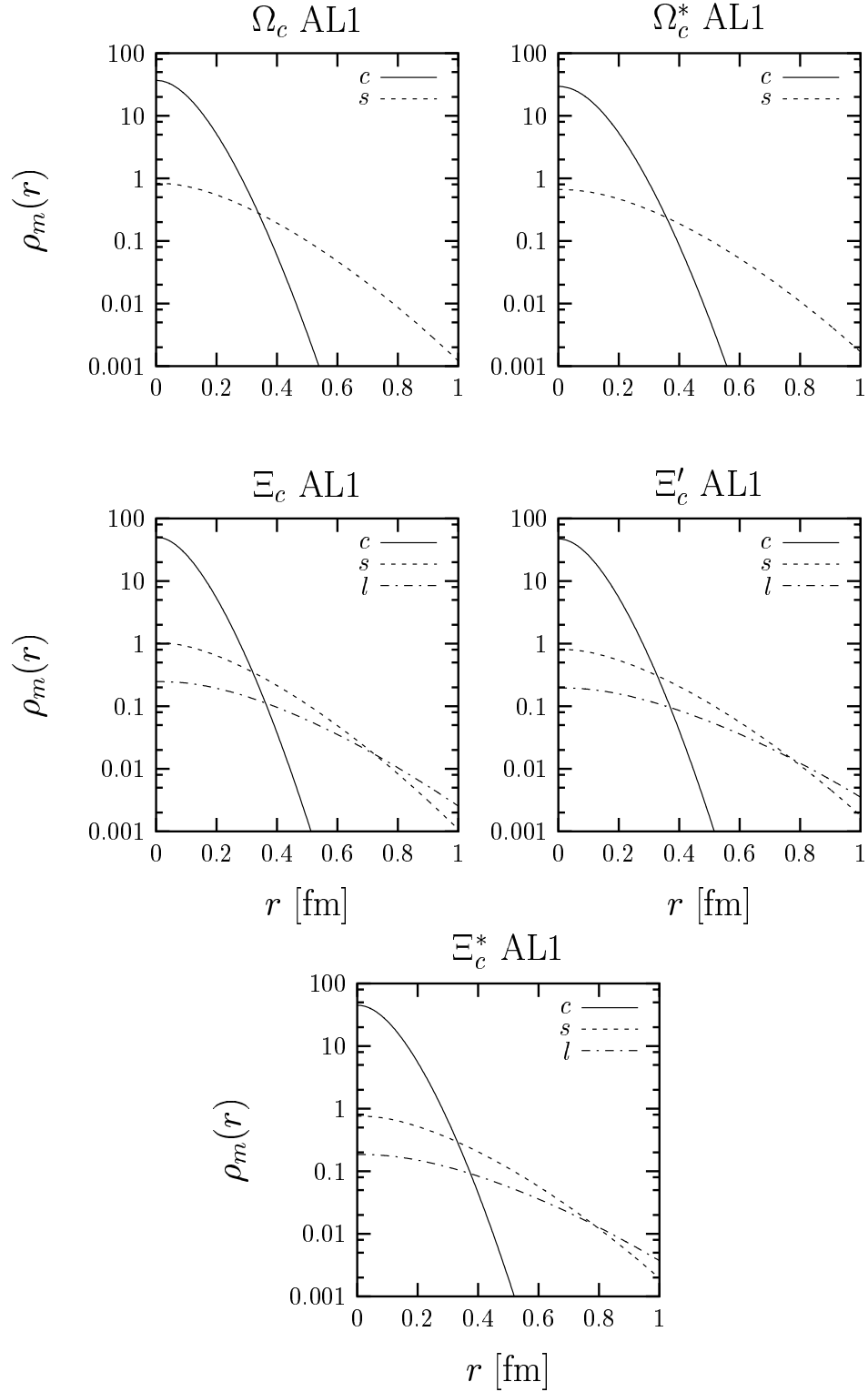


Figura 4.6: Densidades de masa [fm^{-3}], $\rho_m^{BQ}(\vec{r})|_{Q=c}$, $\rho_m^{BQ}(\vec{r})|_{q=l,s}$ (ec. (4.32)) para bariones encantados con extrañeza, obtenidos con los potenciales AL1 y AL1 χ .

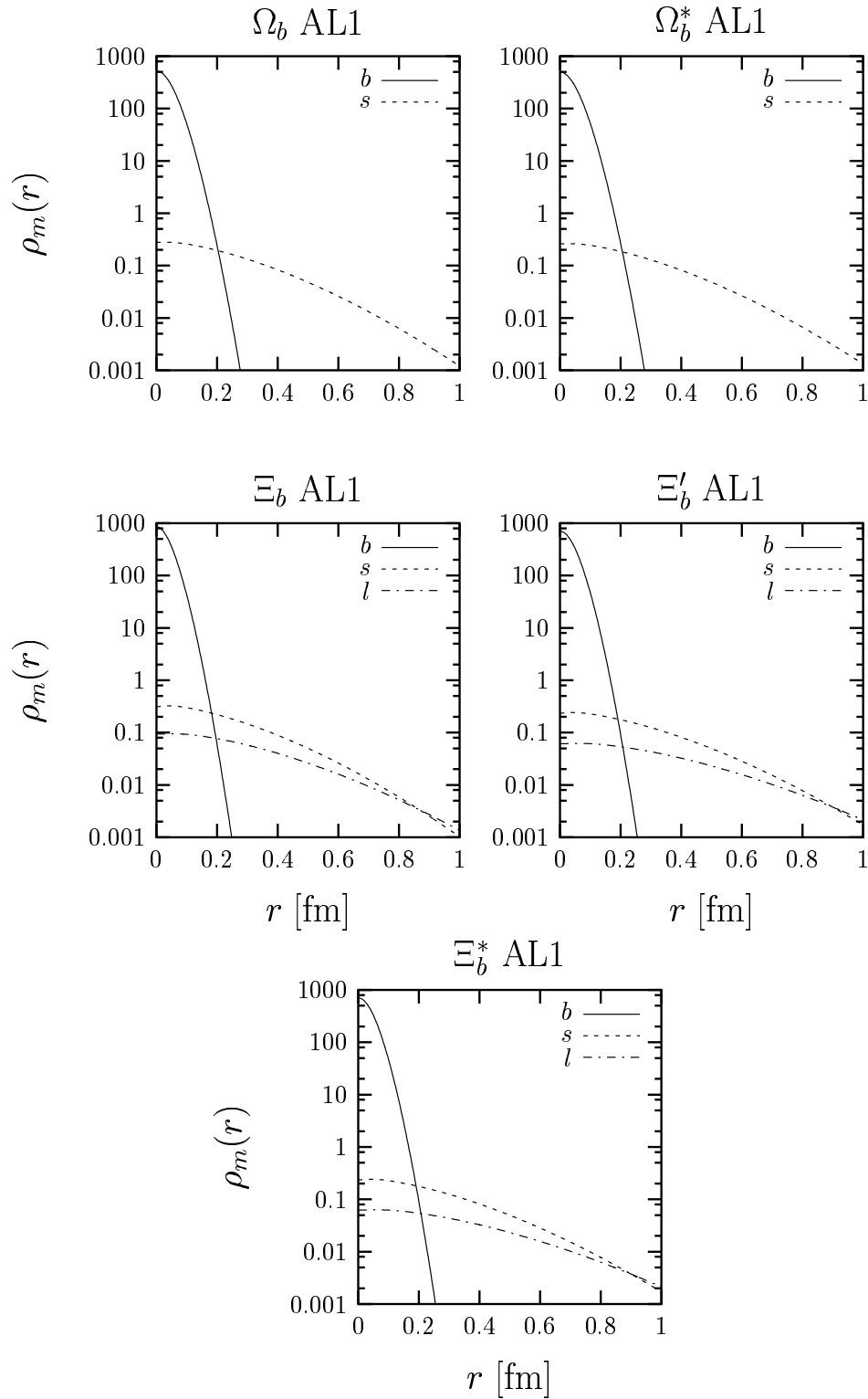


Figura 4.7: Densidades de masa [fm^{-3}], $\rho_m^{BQ}(\vec{r})|_{Q=b}$ $\rho_m^{BQ}(\vec{r})|_{q=l,s}$ (ec. (4.32)) para bariones con un quark b y extrañeza, obtenidos con los potenciales AL1 y AL1 χ .

en [8] no es extraño que tratamientos aproximados del problema de tres cuerpos proporcionen resultados para la función de onda en el origen que difieran en un orden de magnitud.

Sin embargo el desacuerdo entre los resultados variacionales y Faddeev para bariones Ξ es total, con discrepancias de más de un factor tres. No tenemos una explicación para este hecho. Quizas no entendimos correctamente la definición dada en la ref. [8] o nuestras funciones de onda para los bariones Ξ son incorrectas. No creemos que esta última posibilidad sea cierta. En este sentido es preciso indicar que los resultados Faddeev para las funciones de onda en el origen en bariones Ξ son anormalmente grandes (hasta un factor cuatro) cuando son comparadas con el resto de bariones Λ_Q , Σ_Q y Ω_Q , sin que exista en principio ninguna razón para ello. Este hecho no se observa en los resultados variacionales.

4.6.4. Multipolos

En las tablas 4.11 a 4.14 se muestran las probabilidades \mathcal{P}_l definidas en ec. (4.27), de encontrar cada uno de los dos quarks ligeros con momento angular l y acoplados a $L = 0$, para bariones Λ y Σ . Se dan los resultados para dos interacciones, AL1 y AL1 χ , pero las características generales de esta descomposición multipolar no dependen significativamente de la interacción elegida. Sólo contribuyen multipolos hasta $l = 3$ ó $l = 4$, siendo $l = 0$ el multipolo dominante¹⁴.

4.7. Conclusiones

En este capítulo hemos desarrollado un esquema variacional para estudiar bariones que contienen un quark pesado c ó b . Hemos calculado masas y funciones de onda a partir del principio variacional aplicado a un familia de funciones tipo Jastrow, que están diseñadas a partir de las predicciones de HQS al orden dominante. Para diversos potenciales, esta técnica es capaz de reproducir cálculos previos obtenidos mediante ecuaciones de Faddeev. Hemos comparado con éxito masas, radios cuadráticos medios de carga y masa, y funciones de onda en el origen. Así pues, es razonable pensar que las correcciones de masa finita a las funciones de onda, determinadas por el primer orden

dan valores muy diferentes del valor de la función de onda en el origen para el par ll . De hecho, el resultado Faddeev es no nulo, mientras que sí lo es en el esquema variacional. Esto es debido a que en nuestro esquema variacional suponemos una configuración $S_{ligero} = 1$ pura para este barión. Como el potencial BD para triplete de espín entre quarks ligeros es infinitamente repulsivo para $r_{12} = 0$, la función de onda variacional en el origen se cancela (debido a la función de correlación f^{BQ} (ec. (4.26))). Sin embargo, el cálculo Faddeev mantiene la componente $S_{ligero} = 0$, suprimida por HQS, de la función de onda del barión Σ , y en tanto que la configuración singlete de espín del potencial BD es atractiva, se obtiene una función de onda en el origen no nula para el par ll .

¹⁴Nótese que se muestran probabilidades: las componentes de la función de onda para cada valor de l , son, salvo un signo, la raíz cuadrada de los valores presentados en la tablas 4.11 a 4.14.

Barión	Par		BD	AL2	AP1	AP2	AL1	AL1 χ
Λ	ll	FAD	23.3	15.2	12.2	12.1	14.9	–
	ll	VAR	19.5	19.1	14.4	14.8	18.3	74.7
	Ql	FAD	8.8	7.7	6.1	6.4	7.4	–
	Ql	VAR	7.5	7.9	4.9	5.6	6.9	7.0
Σ	ll	FAD	6.8	6.4	4.9	5.4	6.0	–
	ll	VAR	0.0	6.9	5.5	5.3	6.7	0.0
	Ql	FAD	7.1	5.9	4.7	4.9	5.7	–
	Ql	VAR	6.7	6.1	3.9	4.5	4.8	4.2
Σ^*	ll	VAR	0.0	6.3	5.1	5.2	6.4	0.0
	Ql	VAR	6.4	5.2	3.3	3.5	4.0	3.9
Ξ	ls	FAD	93.1	72.0	66.8	68.4	70.2	–
	ls	VAR	23.8	20.4	15.6	17.2	20.2	–
	Ql	FAD	51.4	48.1	44.6	48.0	46.1	–
	Ql	VAR	11.6	11.9	8.7	10.2	10.0	–
	Qs	FAD	39.9	35.5	32.4	33.4	34.9	–
	Qs	VAR	8.7	8.3	6.1	7.2	7.3	–
Ξ'	ls	VAR	11.9	10.1	8.2	9.1	9.2	–
	Ql	VAR	9.8	9.5	5.8	8.6	6.7	–
	Qs	VAR	8.2	7.3	4.7	6.3	5.5	–
Ξ^*	ls	VAR	12.1	9.3	7.9	8.4	9.4	–
	Ql	VAR	10.4	8.0	5.7	7.7	6.8	–
	Qs	VAR	8.4	6.3	4.7	6.0	5.5	–
Ω	ss	FAD	16.7	15.6	13.7	15.3	14.6	–
	ss	VAR	19.9	15.8	13.1	16.9	15.5	–
	Qs	FAD	16.0	13.8	12.8	13.3	13.5	–
	Qs	VAR	15.3	12.5	10.8	11.6	11.1	–
Ω^*	ss	VAR	18.4	15.7	12.5	15.0	14.3	–
	Qs	VAR	15.0	11.7	9.4	10.7	10.4	–

Cuadro 4.9: Funciones de onda en el origen para bariones con un quark b , $\eta_i^{B_Q}(0)$, en unidades fm^3 (véase la ec. (4.36)). En la segunda columna, los pares ll y ss corresponden a $\eta_Q^{B_{ll}}(0)$ y $\eta_Q^{B_{ss}}(0)$. Para bariones extraños [no extraños] los pares Ql y Qs corresponden a $\eta_{q'=s}^{B_{Ql}}(0)$ [$\eta_{q=l}^{B_{Ql}}(0) = \eta_{q'=l}^{B_{Ql}}(0)$] y $\eta_{q=l}^{B_{Qs}}(0)$. Los resultados variacionales y Faddeev (ref. [8]) se denotan por VAR y FAD respectivamente. Para bariones Σ y Σ^* suponemos una configuración pura $S_{\text{light}} = 1$. La estimación variacional para $\eta_Q^{B_{ll}}(0)$, e interacciones BD y AL1 χ se anula en estos casos, puesto que la interacción entre quarks ligeros en triplete de espín es infinitamente repulsiva en $r_{12} = 0$ para estos potenciales.

Barión	Par		BD	AL2	AP1	AP2	AL1	AL1 χ
Λ	ll	FAD	23.1	15.0	12.1	11.9	14.8	—
	ll	VAR	22.8	18.5	14.0	13.9	18.6	54.0
	Ql	FAD	8.8	7.7	6.1	6.4	7.4	—
	Ql	VAR	7.6	7.0	5.6	5.5	6.5	6.0
Σ	ll	FAD	6.9	6.6	5.0	5.6	6.1	—
	ll	VAR	0.0	6.8	5.2	6.2	5.7	0.0
	Ql	FAD	8.2	6.7	5.3	5.5	6.5	—
	Ql	VAR	7.3	6.0	4.6	5.2	5.9	5.5
Σ^*	ll	VAR	0.0	6.6	4.7	5.3	5.9	0.0
	Ql	VAR	5.7	4.3	3.5	3.8	4.4	4.1
Ξ	ls	FAD	70.5	54.6	51.0	52.1	53.5	—
	ls	VAR	21.1	21.9	17.0	18.1	19.3	—
	Ql	FAD	40.0	37.0	34.4	37.0	35.5	—
	Ql	VAR	11.7	9.5	8.3	8.7	9.1	—
	Qs	FAD	30.8	27.7	25.3	26.4	27.1	—
	Qs	VAR	8.8	7.5	6.1	6.8	7.8	—
Ξ'	ls	VAR	12.5	10.3	8.4	9.2	9.6	—
	Ql	VAR	11.3	9.5	7.1	9.0	8.2	—
	Qs	VAR	8.7	8.2	5.8	6.9	6.5	—
Ξ^*	ls	VAR	12.1	8.8	6.8	7.9	8.9	—
	Ql	VAR	8.5	6.4	5.8	6.0	7.7	—
	Qs	VAR	6.7	5.7	4.8	4.6	6.1	—
Ω	ss	FAD	16.5	15.5	13.8	15.3	14.6	—
	ss	VAR	17.7	17.2	14.8	16.9	15.7	—
	Qs	FAD	17.8	15.4	14.4	15.0	15.1	—
	Qs	VAR	17.0	14.5	12.3	13.5	13.0	—
Ω^*	ss	VAR	18.7	13.5	13.5	14.9	13.0	—
	Qs	VAR	12.6	9.9	9.4	10.2	9.7	—

Cuadro 4.10: Idem tabla 4.9 para bariones *encantados*.

l	0	1	2	3	4	5	6
$AL1\chi-\mathcal{P}_l$	0.79079	0.16186	0.03237	0.00894	0.00324	0.00139	0.00067
$\sum_{k=0}^l \mathcal{P}_k$	0.7908	0.9526	0.9850	0.9940	0.9972	0.9986	0.9993
$AL1-\mathcal{P}_l$	0.87368	0.11207	0.01221	0.00169	0.00032	0.00008	0.00003
$\sum_{k=0}^l \mathcal{P}_k$	0.8737	0.9857	0.9980	0.9996	1.0000	1.0000	1.0000

Cuadro 4.11: Probabilidades \mathcal{P}_l (definidas en la ec. (4.27)) para distintas ondas. Los resultados mostrados se corresponde al barión Λ_b y las interacciones AL1 y AL1 χ . Los errores son siempre inferiores a una unidad en el último dígito.

l	0	1	2	3	4	5	6
$AL1\chi-\mathcal{P}_l$	0.75495	0.18706	0.04066	0.01103	0.00368	0.00143	0.00062
$\sum_{k=0}^l \mathcal{P}_k$	0.7550	0.9420	0.9827	0.9937	0.9974	0.9988	0.9994
$AL1-\mathcal{P}_l$	0.87389	0.10972	0.01346	0.00227	0.00052	0.00015	0.00005
$\sum_{k=0}^l \mathcal{P}_k$	0.8739	0.9836	0.9971	0.9993	0.9999	1.0000	1.0000

Cuadro 4.12: Idem tabla 4.11 para el barión Λ_c .

l	0	1	2	3	4	5	6
$AL1\chi-\mathcal{P}_l$	0.95010	0.04777	0.00204	0.00013	0.00002	0.00000	0.00000
$\sum_{k=0}^l \mathcal{P}_k$	0.9501	0.9979	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$AL1-\mathcal{P}_l$	0.96109	0.03734	0.00153	0.00011	0.00001	0.00000	0.00000
$\sum_{k=0}^l \mathcal{P}_k$	0.9611	0.9984	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Cuadro 4.13: Idem tabla 4.11 para el barión Σ_b .

l	0	1	2	3	4	5	6
$AL1\chi-\mathcal{P}_l$	0.95074	0.04711	0.00210	0.00014	0.00002	0.00000	0.00000
$\sum_{k=0}^l \mathcal{P}_k$	0.9507	0.9978	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$AL1-\mathcal{P}_l$	0.96542	0.03377	0.00091	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000
$\sum_{k=0}^l \mathcal{P}_k$	0.9654	0.9992	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Cuadro 4.14: Idem tabla 4.11 para el barión Σ_c .

de HQS (ecs. (4.13) y (4.15) a (4.21)), deben de producir pequeños cambios en estos observables.

Gracias a HQS las funciones de onda son notablemente más simples y manejables que las obtenidas resolviendo las ecuaciones de Faddeev, y son fáciles de utilizar en otros contextos, al estar parametrizadas de forma sencilla (tablas D.2 y D.3).

Hemos obtenido el espectro de masas que se deduce del potencial quark–quark derivado en la ref. [105], y que incluye ciertos rasgos de simetría SU(2) quiral. Este potencial, predice masas para los bariones Λ_Q , 155 MeV en el sector c y 168 MeV en el sector b , menores que el potencial fenomenológico AL1. Teniendo en cuenta que la inclusión del patrón de rotura espontánea de la simetría quiral debe llevarnos a un contexto mejor fundamentado desde el punto de vista teórico de la espectroscopia de hadrones, los resultados de este trabajo pueden hacernos sospechar de la existencia de interacciones a tres cuerpos con los números cuánticos de los bariones Λ_Q .

Utilizando las funciones de onda encontradas en este capítulo, estudiaremos en el siguiente, la desintegración semileptónica $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c l \bar{\nu}_l$, recientemente medida y de gran interés para estimar el parámetro $|V_{cb}|$ de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

Capítulo 5

Estudio de las desintegraciones semileptónicas de los bariones Λ_b y Ξ_b

5.1. Introducción

El correcto entendimiento de los efectos no perturbativos de QCD que afectan las transiciones semileptónicas exclusivas $b \rightarrow c$, es condición necesaria para determinar el elemento cb (V_{cb}) de la matriz de Cabbibo–Kobayashi–Maskawa (CKM), a partir de medidas experimentales. Con este fin, ha habido un considerable esfuerzo en el sector mesónico, donde las consecuencias de HQS (simetría de quarks pesados) [95, 96] fueron por primera vez estudiadas de forma sistemática gracias a la formulación de la Teoría Efectiva de Quarks Pesados (HQET) [118]. Así, existen una gran cantidad de cálculos basados en simulaciones Monte Carlo de QCD en un espacio–tiempo discretizado (*Lattice QCD*) [98],[119]–[121] y otros muchos análisis (HQET, reglas de suma, modelos quark,...) [9],[122]–[135] que se encuentran disponibles en la literatura. Desde el punto de vista experimental también ha existido una gran actividad, destacando las recientes medidas de las colaboraciones CLEO y Belle [136]–[138] de las desintegraciones $B \rightarrow D^* l \bar{\nu}_l$.

El descubrimiento del barión Λ_b en el CERN [91], la observación de la mayoría de los bariones con encanto del multiplete de SU(3) del segundo nivel de la representación 20 de SU(4) [92], así como la reciente medida de la desintegración semileptónica del barión Λ_b [139], hace muy apropiado el estudio de las interacciones débiles en el contexto de bariones pesados. La medida experimental de la anchura de desintegración semileptónica del barión Λ_b^0 puede utilizarse para determinar, de forma independiente, el módulo de V_{cb} , siempre que los efectos de la interacción fuerte en esta desintegración sean entendidos. Existe una gran cantidad de trabajos en este sentido [140]–[161], y la mayor parte de los esquemas utilizados en el sector de mesones B han sido explorados para bariones. Una característica común de todos estos estudios es la imposibilidad de

describir la anchura diferencial de desintegración para todos los valores de q^2 físicamente accesibles (siendo q el cuadrimomento transferido a los leptones en el proceso). Así, los cálculos *lattice* y aquellos basados en HQET, describen bien la región próxima a $q_{máx}^2 = (m_{\Lambda_b} - m_{\Lambda_c})^2$, al igual que los tradicionales modelos no relativistas de quarks constituyentes (NRCQM), mientras que técnicas basadas en reglas de suma dan descripciones adecuadas en las proximidades de $q^2 = 0$.

En el límite en que la masa de los quarks es infinita, HQS proporciona un control teórico de aspectos no perturbativos del cálculo. El número de factores de forma, que parametrizan las desintegraciones semileptónicas de bariones pesados, se reduce ampliamente utilizando relaciones de HQET [162, 163, 164]. Además, los bariones $\Lambda_{b,c}, \Xi_{b,c}$ tienen una estructura particularmente simple, en tanto que están compuestos por un quark pesado y grados de libertad ligeros acoplados a momento angular cero. HQET plantea un desarrollo de observables en potencias inversas de las masas de los quarks pesados. A primer orden en este desarrollo, un único factor de forma, la función de Isgur–Wise, describe la desintegración semileptónica $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$. En el siguiente orden, $1/m_Q$ [165], es necesario introducir otra función y un parámetro de masa [166, 167]. Sin embargo, HQET no predice estos factores de forma universales, ni el parámetro de masa, y se deben emplear otros métodos no perturbativos para determinarlos.

En este trabajo estudiaremos las correcciones no perturbativas al elemento de matriz electrodébil $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ utilizando diferentes modelos no relativistas de quarks constituyentes. Utilizaremos una aproximación llamada *modelo espectador*, en la cual los grados de libertad ligeros son meros espectadores y, por tanto, trataremos simplemente con operadores de un cuerpo. Trabajaremos en espacio de coordenadas, y utilizaremos las funciones de onda obtenidas en el capítulo 4, mediante un método variacional, significativamente simplificado gracias a la imposición de HQS. Así, en el barión Λ_Q consideraremos sólo componentes de la función de onda, en las cuales los quarks ligeros están acoplados a espín cero ($S_{light} = 0$). La componente triplete ($S_{light} = 1$), está suprimida por un factor $1/m_Q$. Dentro del modelo espectador, como los grados de libertad ligeros quedan inalterados en la desintegración, y gracias a la ortogonalidad entre estados singlete y triplete, las componentes $S_{light} = 1$ de la función de onda del barión Λ_Q inducirían correcciones suprimidas por dos potencias de la masa de los quarks pesados.

También propondremos un desarrollo novedoso del operador electrodébil de transición, que nos permitirá calcular las anchuras diferenciales de desintegración y factores de forma para todos los valores de q^2 físicamente accesibles. Consideraremos sólo términos de primer orden en el momento interno del quark pesado dentro del barión, pero consideraremos todos los ordenes en el momento transferido $|\vec{q}|$, que puede llegar a ser comparable con la masa de los quarks pesados. Además, para mejorar nuestra descripción del proceso, impondremos relaciones entre los factores de forma deducidas utilizando HQET a orden $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m_Q}\right)$.

Este capítulo está basado en los resultados de la ref. [168].

5.2. Anchura diferencial de desintegración y factores de forma

Nos concentraremos en la desintegración $\Lambda_b(p) \rightarrow \Lambda_c(p')l(k')\bar{\nu}_l(k)$, donde p , k , p' y k' son los cuadrimomentos de las partículas involucradas. La generalización para estudiar la desintegración del barión Ξ_b es inmediata. En el sistema de referencia en que Λ_b está en reposo (LAB), la anchura diferencial de la desintegración se escribe

$$d\Gamma = 8 |V_{cb}|^2 m_{\Lambda_c} G^2 \frac{d^3 p'}{2E'_{\Lambda_c} (2\pi)^3} \frac{d^3 k}{2E_{\nu_l} (2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{2E'_l (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p-p'-k-k') L^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \quad (5.1)$$

donde $m_{\Lambda_c} = 2285 \text{ MeV}^1$ y $G = 1.1664 \cdot 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$ es la constante de Fermi. Finalmente, L y W son los tensores leptónico y hadrónico, respectivamente.

El tensor leptónico viene dado por

$$L_{\mu\sigma} = k'_\mu k'_\sigma + k_\mu k'_\sigma - g_{\mu\sigma} k \cdot k' + i\epsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} k'^\alpha k^\beta \quad (5.2)$$

donde hemos tomado la convención $\epsilon_{0123} = 1$ y $g^{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.

El tensor hadrónico incluye todo tipo de vértices no leptónicos y corresponde a la transición electrodébil cargada $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$. Está dado por

$$W^{\mu\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \langle \Lambda_c, \vec{p}', s | j_{cc}^\mu(0) | \Lambda_b; \vec{p}, r \rangle \langle \Lambda_c, \vec{p}', s | j_{cc}^\sigma(0) | \Lambda_b; \vec{p}, r \rangle^* \quad (5.3)$$

siendo r y s índices de helicidad. Los estados bariónicos están normalizados de tal forma que $\langle \vec{p}, r | \vec{p}', s \rangle = (2\pi)^3 (E/m) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rs}$. Finalmente, la corriente cargada está dada por

$$j_{cc}^\mu = \bar{\Psi}_c \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \Psi_b \quad (5.4)$$

con Ψ_b y Ψ_c campos de quarks. Los efectos no perturbativos de la interacción fuerte están contenidos en el elemento de matriz de la corriente electrodébil j_{cc}^μ , que puede ser escrito en términos de seis factores de forma F_i , G_i con $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_c, \vec{p}', s | j_{cc}^\mu(0) | \Lambda_b; \vec{p}, s \rangle &= \bar{u}_{\Lambda_c}^{(s)}(\vec{p}') [\gamma_\mu (F_1 - \gamma_5 G_1) \\ &+ v_\mu (F_2 - \gamma_5 G_2) \\ &+ v'_\mu (F_3 - \gamma_5 G_3)] u_{\Lambda_b}^{(r)}(\vec{p}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde u_{Λ_b} y u_{Λ_c} son espinores de Dirac adimensionales normalizados según $\bar{u}u = 1$, y $v_\mu = p_\mu/m_{\Lambda_b}$ ($v'_\mu = p'_\mu/m_{\Lambda_b}$) la tetravelocidad del barión Λ_b (Λ_c). Los factores de forma son función de $w = v \cdot v'$ o equivalentemente, de $q^2 = (p-p')^2 = m_{\Lambda_b}^2 + m_{\Lambda_c}^2 - 2m_{\Lambda_b}m_{\Lambda_c}w$. En la desintegración $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c l \bar{\nu}_l$, y despreciando las masas de los leptones (l y ν_l), q^2 varía desde 0, que corresponde a $w = w_{m\acute{a}x} = (m_{\Lambda_b}^2 + m_{\Lambda_c}^2)/2m_{\Lambda_b}m_{\Lambda_c}$ hasta $q_{m\acute{a}x}^2 = (m_{\Lambda_b} - m_{\Lambda_c})^2$ que corresponde a $w = 1$.

¹También tomamos $m_{\Lambda_b} = 5624 \text{ MeV}$, $m_{\Xi_b} = 5800 \text{ MeV}$ y $m_{\Xi_c} = 2469 \text{ MeV}$

Las anchuras diferenciales de desintegración correpondientes a un bosón W transversal (Γ_T) o longitudinalmente polarizado (Γ_L) están dadas por [169]

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma_T}{dw} &= \frac{G^2 |V_{cb}|^2}{12\pi^3} m_{\Lambda_c}^3 \sqrt{w^2 - 1} q^2 [(w - 1) |F_1(w)|^2 + (w + 1) |G_1(w)|^2] \\ \frac{d\Gamma_L}{dw} &= \frac{G^2 |V_{cb}|^2}{24\pi^3} m_{\Lambda_c}^3 \sqrt{w^2 - 1} [(w - 1) |\mathcal{F}^V(w)|^2 + (w + 1) |\mathcal{F}^A(w)|^2]\end{aligned}\quad (5.6)$$

donde hemos definido

$$\mathcal{F}^{V,A}(w) = (m_{\Lambda_b} \pm m_{\Lambda_c}) F_1^{V,A} + (1 \pm w) (m_{\Lambda_c} F_2^{V,A} + m_{\Lambda_b} F_3^{V,A})$$

con $F_i^V \equiv F_i(w)$ y $F_i^A \equiv G_i(w)$, $i = 1, 2, 3$ y donde el signo $+$ ($-$) va asociado al superíndice V (A).

La distribución respecto al ángulo polar se escribe [169]

$$\frac{d^2\Gamma}{dw d\cos\theta} = \frac{3}{8} \left(\frac{d\Gamma_T}{dw} + 2 \frac{d\Gamma_L}{dw} \right) \{1 + 2\alpha' \cos\theta + \alpha'' \cos^2\theta\} \quad (5.7)$$

donde θ es el ángulo entre \vec{k}' y \vec{p}' medido en el sistema de referencia en el cual el bosón $W_{off\ shell}$ está en reposo y α y α'' son parámetros de asimetría que pueden ser expresados como

$$\alpha' = \frac{\frac{d\Gamma_T}{dw} \frac{da_T}{dw}}{\frac{d\Gamma_T}{dw} + 2 \frac{d\Gamma_L}{dw}} \quad (5.8)$$

$$\frac{da_T}{dw} = -\frac{G^2 |V_{cb}|^2}{6\pi^3} \frac{m_{\Lambda_c}^3}{\frac{d\Gamma_T}{dw}} q^2 (w^2 - 1) F_1(w) G_1(w) \quad (5.9)$$

$$\alpha'' = \frac{\frac{d\Gamma_T}{dw} - 2 \frac{d\Gamma_L}{dw}}{\frac{d\Gamma_T}{dw} + 2 \frac{d\Gamma_L}{dw}}$$

Hay otros parámetros de asimetría cuando se considera la desintegración subsiguiente $\Lambda_c \rightarrow a + b$, donde a ($J_a = 1/2$) y b ($J_b = 0$) son hadrones. Suelen definirse dos nuevos ángulos: i) Θ_Λ , el ángulo entre el momento del barión Λ_c , en el sistema de referencia en reposo de Λ_b , y el momento del hadrón a , en el sistema en reposo de Λ_c , y ii) χ , el ángulo azimutal relativo entre los dos planos de desintegración definidos por los momentos de los leptones l y ν_l y los momentos de los hadrones a y b . Las distribuciones de desintegración con respecto a estos ángulos cumplen las siguientes relaciones de proporcionalidad [169]

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Gamma}{dw d\cos\Theta_\Lambda} &\propto 1 + P_L \alpha_\Lambda \cos\Theta_\Lambda \\ \frac{d^2\Gamma}{dw d\cos\chi} &\propto 1 - \frac{3\pi^2}{32\sqrt{2}} \gamma \alpha_\Lambda \cos\chi\end{aligned}\quad (5.10)$$

donde α_Λ es el parámetro de asimetría en la desintegración hadrónica del barión Λ_c . Para las desintegraciones no leptónicas $\Lambda_c \rightarrow \Lambda\pi$ y $\Lambda_c \rightarrow \Sigma\pi$ se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_{\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda\pi^+} &= -0.94_{-0.08}^{+0.24} \\ \alpha_{\Lambda_c^+ \rightarrow \Sigma^+\pi^0} &= -0.45 \pm 0.32\end{aligned}$$

tomando los resultados de la colaboración CLEO [170]. Según la colaboración ARGUS [171]

$$\alpha_{\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda\pi^+} = -0.96 \pm 0.42 \quad (5.11)$$

que es compatible con el anterior valor. P_L (polarización longitudinal del barión Λ_c) y γ vienen dadas por

$$\begin{aligned}P_L &= \frac{\frac{d\Gamma_T}{dw} \frac{da_T}{dw} + \frac{d\Gamma_L}{dw} \frac{da_L}{dw}}{\frac{d\Gamma_T}{dw} + \frac{d\Gamma_L}{dw}} \quad (5.12) \\ \frac{da_L}{dw} &= -\frac{G^2 |V_{cb}|^2 m_{\Lambda_c}^3}{12\pi^3} \frac{d\Gamma_L}{dw} (w^2 - 1) \mathcal{F}^V(w) \mathcal{F}^A(w)\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{\frac{G^2 |V_{cb}|^2 m_{\Lambda_c}^3}{6\sqrt{2}\pi^3} \sqrt{q^2} \sqrt{w^2 - 1} \{ (w+1) \mathcal{F}^A(w) G_1(w) - (w-1) \mathcal{F}^V(w) F_1(w) \}}{\frac{d\Gamma_T}{dw} + \frac{d\Gamma_L}{dw}} \quad (5.13)$$

Los parámetros de asimetría introducidos en las ec. (5.9) y (5.10) y en las ecs. (5.13) y (5.13) son funciones de w . Al promediar sobre w , de forma separada numerador y denominador, tenemos

$$\langle a_T \rangle = -\frac{G^2 |V_{cb}|^2 m_{\Lambda_c}^3}{6\pi^3} \frac{1}{\Gamma_T} \int_0^{w_{\text{máx}}} q^2 (w^2 - 1) F_1(w) G_1(w) dw \quad (5.14)$$

$$\langle a_L \rangle = -\frac{G^2 |V_{cb}|^2 m_{\Lambda_c}^3}{12\pi^3} \frac{1}{\Gamma_L} \int_0^{w_{\text{máx}}} (w^2 - 1) \mathcal{F}^V(w) \mathcal{F}^A(w) dw \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}\langle \gamma \rangle &= \frac{G^2 |V_{cb}|^2 m_{\Lambda_c}^3}{6\sqrt{2}\pi^3} \frac{1}{\Gamma} \int_0^{w_{\text{máx}}} \sqrt{q^2 (w^2 - 1)} \{ (w+1) \mathcal{F}^A(w) G_1(w) \\ &\quad - (w-1) \mathcal{F}^V(w) F_1(w) \} dw \quad (5.16)\end{aligned}$$

$$\langle \alpha' \rangle = \frac{\langle a_T \rangle}{1 + 2R_{L/T}} \quad (5.17)$$

$$\langle \alpha'' \rangle = \frac{1 - 2R_{L/T}}{1 + 2R_{L/T}} \quad (5.18)$$

$$\langle P_L \rangle = \frac{\langle a_T \rangle + \langle a_L \rangle R_{L/T}}{1 + R_{L/T}} \quad (5.19)$$

donde se ha definido

$$R_{L/T} = \frac{\Gamma_L}{\Gamma_T} \quad (5.20)$$

5.3. Factores de forma

5.3.1. Elementos de matriz

Nos concentraremos en el elemento de matriz $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$. En el contexto de modelos quark no relativistas, considerando exclusivamente operadores de corriente a un cuerpo (aproximación espectador), y en el sistema de referencia en reposo de Λ_b , encontramos

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_c; \vec{p}', s | j_{cc}^\alpha(0) | \Lambda_b; \vec{0}, r \rangle &= \sqrt{\frac{E'_{\Lambda_c}}{m_{\Lambda_b}}} \int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_h d^3 q'_h \sqrt{\frac{m_b}{E_b(\vec{q}_h)}} \sqrt{\frac{m_c}{E_c(\vec{q}'_h)}} \\ &\times [\bar{u}_c^{(s)}(\vec{q}'_h) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_b^{(r)}(\vec{q}_h)] [\phi_{\vec{p}'}^{\Lambda_c}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}'_h)]^* \phi_0^{\Lambda_b}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_h) \end{aligned} \quad (5.21)$$

con $\vec{p}' = \vec{p} - \vec{q} = -\vec{q}$ y siendo también u_c y u_b los espinores de Dirac de los quarks c y b . Las funciones de onda en espacio de momentos que aparecen en ec. (5.21) son las transformadas de Fourier de las correspondientes funciones en espacio de coordenadas

$$\phi_{\vec{P}}^{\Lambda_Q}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_h) = \int \frac{d^3 x_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3 x_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3 x_h}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i(\vec{q}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{q}_2 \cdot \vec{x}_2 + \vec{q}_h \cdot \vec{x}_h)} \psi_{\vec{P}}^{\Lambda_Q}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_h) \quad (5.22)$$

donde la función de onda espacial del barión Λ_Q con momento total \vec{P} está dada por

$$\frac{e^{i\vec{P} \cdot \vec{R}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \Psi_{ll}^{\Lambda_Q}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_h) \quad (5.23)$$

con $\Psi_{ll}^{\Lambda_Q}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_h)$ construido según se detalla en el capítulo 4 y \vec{R} la posición del centro de masas del barión. En la práctica, los cálculos se han realizado en el espacio de coordenadas

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_c; -\vec{q}, s | j_{cc}^\alpha(0) | \Lambda_b; \vec{0}, r \rangle &= \sqrt{\frac{E'_{\Lambda_c}}{m_{\Lambda_b}}} \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{i\vec{q} \cdot (m_q \vec{r}_1 + m_{q'} \vec{r}_2) / M_{tot}^c} [\Psi_{ll}^{\Lambda_c}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_h)]^* \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{m_b}{E_b(\vec{l})}} \sqrt{\frac{m_c}{E_c(\vec{l}')}} [\bar{u}_c^{(s)}(\vec{l}') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_b^{(r)}(\vec{l})] \right\} \\ &\Psi_{ll}^{\Lambda_b}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_h) \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde los operadores $\vec{l} = i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2$ y $\vec{l}' = \vec{l} - \vec{q}$ actúan sobre la función de onda intrínseca del barión Λ_b . Los sabores de los quarks ligeros son *up* y *down* y $M_{tot}^c = m_c + m_u + m_d$ con $m_u = m_d$ tal y como demanda la simetría de isospín $SU(2)$.

El elemento de matriz para la desintegración $\Xi_b \rightarrow \Xi_c$ se obtiene fácilmente de éste, sustituyendo $\Psi_{ll}^{\Lambda_Q}$ y $m_{q'} = m_u = m_d$ por $\Psi_{ls}^{\Xi_Q}$ y m_s , respectivamente.

5.3.2. Desarrollo en el momento interno del quark pesado y ecuaciones para los factores de forma

Todos los factores de forma ($F's$ y $G's$) se pueden deducir de las ecuaciones (tomamos \vec{q} en el sentido positivo del eje z) que se obtienen comparando ambos miembros de la ec. (5.24) para las componentes Lorentz $\alpha = 1$ y 2 , y distintas helicidades de los bariones inicial y final, y las componentes $\alpha = 0$ ó 3 entre estados de igual helicidad. El principal problema lo constituye la naturaleza operatorial del segundo miembro de la ec. (5.24), que requiere que se realicen ciertas aproximaciones para poder evaluarlo. Una primera posibilidad consiste en realizar un desarrollo no relativista de los momentos involucrados en ec. (5.24) (véase [146] y [147], por ejemplo), pero esto está justificado exclusivamente cerca de $q_{máx}^2$. En el sistema en el que el barión Λ_b está en reposo, \vec{l} es un momento interno y es mucho menor que cualquiera de las masas de los quarks pesados. Sin embargo, el momento transferido \vec{q} , que coincide salvo en un signo global con el momento total del barión Λ_c , puede ser importante (nótese que $|\vec{q}| = m_{\Lambda_c} \sqrt{w^2 - 1}$ y para $q^2 = 0$, $|\vec{q}(w = w_{máx})| \approx m_{\Lambda_b}/2$). Por tanto, proponemos un nuevo desarrollo del segundo miembro de la ec. (5.24), en el que se desprecian términos de segundo orden en \vec{l} , pero se mantienen todos los órdenes en \vec{q} . Por ejemplo, este desarrollo para la energía del quark c es

$$E_c(\vec{l}') \approx E_c(\vec{q}) \times \left[1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{q}}{E_c^2(\vec{q})} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\vec{l}^2}{m_Q^2} \right) \quad (5.25)$$

con $E_c(\vec{q}) = \sqrt{m_c^2 + \vec{q}^2} \equiv E_c$. Gracias a este desarrollo del operador de corriente electrodébil, en el cual \vec{q} es tratado exactamente, es posible calcular con precisión la anchura diferencial de desintegración para todo el rango de valores de q^2 físicamente accesibles en el proceso, mejorando así sustancialmente sobre otros cálculos realizados utilizando NRCQM.

Los factores de forma se obtienen de dos conjuntos (vector y axial) de tres ecuaciones con tres incógnitas ($F's$ y $G's$). Definiendo los factores de forma \hat{F}_i y \hat{G}_i como

$$\begin{aligned} \hat{F}_i(w) &= \left(\frac{E'_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c}}{2E'_{\Lambda_c}} \right)^{1/2} \left(\frac{2E_c}{E_c + m_c} \right)^{1/2} F_i(w) \\ \hat{G}_i(w) &= \left(\frac{E'_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c}}{2E'_{\Lambda_c}} \right)^{1/2} \left(\frac{2E_c}{E_c + m_c} \right)^{1/2} G_i(w) \end{aligned} \quad (5.26)$$

con $i = 1, 2, 3$, para la desintegración $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ obtenemos el siguiente sistema de

ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_1 + \hat{F}_2 + \frac{E'_{\Lambda_c}}{m_{\Lambda_c}} \hat{F}_3 &= \mathcal{I} + \frac{\vec{q}^2 \mathcal{K}}{2(E_c + m_c)} \left(\frac{m_c}{E_c^2} - \frac{1}{m_b} \right) \\
 \frac{|\vec{q}|}{E'_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c}} \hat{F}_1 + \frac{|\vec{q}|}{m_{\Lambda_c}} \hat{F}_3 &= \frac{|\vec{q}|}{E_c + m_c} - \frac{|\vec{q}| \mathcal{K}}{2} \left(\frac{m_c}{E_c^2} + \frac{1}{m_b} \right) \\
 \frac{|\vec{q}|}{E'_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c}} \hat{F}_1 &= \frac{|\vec{q}|}{E_c + m_c} - \frac{|\vec{q}| \mathcal{K}}{2} \left(\frac{m_c}{E_c^2} - \frac{1}{m_b} \right)
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

para los factores de forma vectoriales, donde hemos comparado los dos miembros de la ec. (5.24) para los índices Lorentz $\alpha = 0, 3$, con los bariones inicial y final en el mismo estado de helicidad, y $\alpha = 2$ y diferentes estados de helicidad inicial y final. Asimismo, para la corriente axial en la ec. (5.24), tomando $\alpha = 0, 3$ para transiciones diagonales en helicidad y $\alpha = 1$ con cambio de helicidad, encontramos

$$\begin{aligned}
 \frac{|\vec{q}|}{E_{\Lambda_c + m_{\Lambda_c}}} \left(-\hat{G}_1 + \hat{G}_2 + \frac{E'_{\Lambda_c}}{m_{\Lambda_c}} \hat{G}_3 \right) &= -\frac{|\vec{q}|}{\mathcal{I}} E_c + m_c + \frac{|\vec{q}| \mathcal{K}}{2} \left(\frac{m_c}{E_c^2} + \frac{1}{m_b} \right) \\
 \hat{G}_1 - \frac{\vec{q}^2}{m_{\Lambda_c}(E_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c})} &= \mathcal{I} + \frac{\vec{q}^2 \mathcal{K}}{2(E_c + m_c)} \left(\frac{m_c}{E_c^2} - \frac{1}{m_b} \right) \\
 \hat{G}_1 &= \mathcal{I} + \frac{\vec{q}^2 \mathcal{K}}{2(E_c + m_c)} \left(\frac{m_c}{E_c^2} + \frac{1}{m_b} \right)
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Las integrales adimensionales \mathcal{I} y \mathcal{K} quedan definidas como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}(w) &= \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{i\vec{q} \cdot (m_q \vec{r}_1 + m_{q'} \vec{r}_2) / M_{tot}^c} [\Psi_{ll}^{\Lambda_c}(r_1, r_2, r_{12})]^* \Psi_{ll}^{\Lambda_b}(r_1, r_2, r_{12}) \\
 \mathcal{K}(w) &= \frac{1}{\vec{q}^2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{i\vec{q} \cdot (m_q \vec{r}_1 + m_{q'} \vec{r}_2) / M_{tot}^c} [\Psi_{ll}^{\Lambda_c}(r_1, r_2, r_{12})]^* [\vec{l} \cdot \vec{q}] \Psi_{ll}^{\Lambda_b}(r_1, r_2, r_{12})
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Para transiciones degeneradas, esto es, $m_c = m_b = m_Q$ los factores \mathcal{I} y \mathcal{K} están relacionados: $2\mathcal{K}(w)/\mathcal{I}(w) = (m_q + m_{q'})/(m_q + m_{q'} + m_Q)$, como puede deducirse integrando por partes en la ec. (5.30). Estas integrales pueden simplificarse realizando un desarrollo en ondas parciales, y utilizando técnicas básicas de álgebra de Racah (véase apéndice E).

Conservación del número bariónico implica que $F(1) = \sum_i F_i(1) = 1$ cuando los bariones inicial y final son iguales. Si $w = 1$, entonces $\vec{q} = 0$, y la primera ecuación del sistema (5.27) nos dice que $\sum_i F_i(1) = \mathcal{I}(1)$. Por otra parte, $\mathcal{I}(1)$ da cuenta del solapamiento de las funciones de onda de los bariones Λ_b y Λ_c , y por tanto, es igual a 1 cuando el barión inicial es igual al final.

La conservación de la corriente vectorial para transiciones entre los mismos estados bariónicos inicial y final impone la restricción $F_2(w) = F_3(w)$, que es violada en la aproximación de espectador utilizada en este trabajo. Para $w = 1$, obtenemos $F_2(w) - F_3(w) = 1 - m_{\Lambda_Q}/M_{tot}$ y por tanto, la corriente vectorial no se conserva debido a la energía de ligadura del barión Λ_Q . Para restaurar la conservación de la corriente

vectorial, deberíamos incluir corrientes a dos cuerpos en nuestro modelo y por tanto ir más allá del modelo espectador planteado.

Las correspondientes integrales para la desintegración $\Xi_b \rightarrow \Xi_c$ se obtienen de las expresiones anteriores, realizando las sustituciones $\Psi_{ll}^{\Lambda_Q}$ y $m_{q'} = m_u = m_d$ por $\Psi_{ls}^{\Xi_Q}$ y m_s como habíamos señalado anteriormente. Nótese que los factores \mathcal{I} y \mathcal{K} dependen tanto de los quarks ligeros como de los pesados, por lo que de ahora en adelante utilizaremos la notación \mathcal{I}_Λ^{cb} , \mathcal{I}_Ξ^{cb} y de forma similar para los factores \mathcal{K} .

5.4. HQET y factores de forma

Cuando todas las escalas de energía relevantes en el problema son mucho menores que las masas de los quarks pesados, HQS resulta ser una herramienta excelente para describir la física de los quarks c y b . En las proximidades del punto cinemático $w = 1$, y a primer orden en el desarrollo de la masa del quark pesado, sólo se necesita una función universal (i.e. independiente del sabor de los quarks pesados) la llamada función de *Isgur–Wise* (ξ^{ren}) para describir la desintegración semileptónica² $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$. Al siguiente orden en la expansión $1/m_Q$, se requiere otra función universal (χ^{ren}) y un parámetro ($\bar{\Lambda}$) adicional para describir la desintegración. Estas funciones, y también los factores de forma que parametrizan el elemento de matriz de transición, dependen de la nube de quarks ligeros de los bariones inicial y final, y por tanto, es de esperar que sean distintas para la desintegración del barión Ξ_b . Sin embargo, uno espera pequeñas desviaciones debido a la simetría $SU(3)$ de sabor.

Los factores de forma necesarios en la desintegración $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$, incluyendo correcciones $\mathcal{O}(1/m_Q)$, se pueden escribir [9, 172]

$$\begin{aligned} F_i(w) &= N_i(w)\hat{\xi}_{cb}(w) + \mathcal{O}(1/m_Q^2) \\ G_i(w) &= N_i^5(w)\hat{\xi}_{cb}(w) + \mathcal{O}(1/m_Q^2) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\hat{\xi}_{cb} = \xi^{\text{ren}}(w) + \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2m_b} + \frac{\bar{\Lambda}}{2m_c} \right) \left[2\chi^{\text{ren}} + \frac{w-1}{w+1}\xi^{\text{ren}}(w) \right] \quad (5.32)$$

con $i = 1, 2, 3$, y donde los coeficientes N_i y N_i^5 contienen correcciones radiativas $(\hat{C}_i, \hat{C}_i^5)^3$, y correcciones de orden $1/m_Q$. $\bar{\Lambda}$ es la energía de ligadura del quark pesado en el correspondiente barión Λ ($\bar{\Lambda} = m_{\Lambda_Q} - m_Q$), y debido a que depende de la masa de los quarks pesados, $\hat{\xi}_{cb}$ ya no es un factor de forma universal. La función χ^{ren} aparece debido a la inclusión de operadores de dimensión más alta en el lagrangiano de la HQET, y se anula en el punto cinemático $w = 1$. Ambas funciones, $\hat{\xi}_{cb}$ y ξ^{ren} , están normalizadas a 1 en $w = 1$. Los valores numéricos de las funciones N_i , N_i^5 dependen

²Aunque llamada de la misma forma, debido a la diferente nube de quarks ligeros, esta función es diferente de la que interviene en los procesos semileptónicos $B \rightarrow D$ o $B \rightarrow D^*$.

³Estas correcciones radiativas son conocidas hasta orden $\alpha_s^2(z\ln z)^n$, donde $z = m_c/m_b$ es el cociente de las masas de los quarks pesados y $n = 0, 1, 2$

w	N_1	N_3	N_3	$\sum_i N_i$	N_1^5	N_2^5	N_3^5
1.00	1.49	-0.36	-0.10	1.03	0.99	-0.42	0.15
1.11	1.40	-0.32	-0.09	0.99	0.94	-0.37	0.13
1.22	1.32	-0.30	-0.09	0.93	0.91	-0.34	0.12
1.33	1.26	-0.27	-0.08	0.91	0.88	-0.31	0.11
1.44	1.20	-0.25	-0.07	0.88	0.85	-0.28	0.10

Cuadro 5.1: Factores de corrección tomados de la ref. [9] para los factores de forma de la desintegración $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$

del valor de $\bar{\Lambda}$ que no es conocido con precisión. Se reproduce aquí (tabla 5.4) la tabla 4.1 de la ref. [9], donde estos factores fueron calculados⁴ para todos los valores de w accesibles en la desintegración $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c l \bar{\nu}_l$.

En el punto cinemático $w = 1$, el teorema de Luke [165] asegura que las cantidades $F(w) = \sum_i F_i(w)$ y G_1 no tienen correcciones de orden $\mathcal{O}(1/m_Q)$, y tenemos que

$$\begin{aligned} F(1) &= \sum_i F_i(1) = \eta_V + \mathcal{O}(1/m_Q^2) \\ G(1) &= \eta_A + \mathcal{O}(1/m_Q^2) \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde η_V y η_A quedan completamente determinadas por correcciones de cortas distancias (i.e. $N_1^5 = \hat{C}_1^5$ y $\sum_i N_i(1) = \sum \hat{C}_i(1)$), que, en principio, son bien conocidas en tanto que son calculadas usando técnicas de QCD perturbativa. La segunda relación puede ser usada para obtener un valor independiente de $|V_{cb}|$, hasta correcciones $1/m_Q^2$, a partir de la medida de la desintegración semileptónica del barión Λ_b cerca de $w = 1$, donde ésta está gobernado por el factor de forma G_1 . A partir de la ec. (5.7), se tiene

$$\lim_{w \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{w^2 - 1}} \frac{d\Gamma}{dw} = \frac{G^2 |V_{cb}|^2}{4\pi^3} m_{\Lambda_c}^3 (m_{\Lambda_b} - m_{\Lambda_c})^2 \eta_A^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_c^2}\right) \quad (5.34)$$

5.5. Resultados

Para realizar los cálculos hemos utilizado las funciones de onda obtenidas en el capítulo 4 para los diferentes NRCQM (BD, AL1, AL2, AP1, AP2 y AL1 χ) estudiados allí. En el estudio de la desintegración del barión Λ_b prestaremos especial atención a las diferencias existentes entre el potencial fenomenológico AL1 y el potencial AL1 χ , que incluye ciertos ingredientes del patrón de ruptura espontánea de simetría quiral SU(2) de QCD.

⁴En la ref. [9], los parámetros $\bar{\Lambda}/2m_b$ y $\bar{\Lambda}/2m_c$ se fijan a los valores 0.07 y 0.24, respectivamente.

Desde el punto de vista experimental, la probabilidad parcial (*branching ratio*) del modo semileptónico exclusivo de desintegración del barión Λ_b , fue medido por la colaboración DELPHI [139]

$$\text{Br}(\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}_l) = 5.0_{-0.8}^{+1.1}(\text{estad.})_{-1.2}^{+1.6}(\text{sist.}) \quad (5.35)$$

En la referencia [139] también se estima la función $\hat{\xi}_{cb}(w)$. Sin embargo, es necesario mencionar aquí que esta estimación sufre de ciertas incertidumbres teóricas, puesto que en la ref. [139], se consideran despreciables las correcciones de cortas distancias, esto es, los factores de corrección N_i, N_i^5 están calculados con $\hat{C}_1 = \hat{C}_1^5 = 1$ y $\hat{C}_{2,3} = \hat{C}_{2,3}^5 = 0$. También se supone en la ref. [139] una forma funcional del tipo

$$\hat{\xi}_{cb}(w) = e^{-\hat{\rho}^2(w-1)} \quad (5.36)$$

Ajustando el valor de la ec. (5.35), en la ref. [139] se encuentra un valor de $\hat{\rho}^2$

$$\hat{\rho}^2 = 2.0_{-1.1}^{+0.8} \quad (5.37)$$

Por otra parte, el *branching ratio* contemplado en el *Particle Data Group* [92] es

$$\text{Br}(\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}_l + \text{cualquier cosa}) = (9.2 \pm 2.1) \% \quad (5.38)$$

que es consistente, dentro de una desviación estándar, con el valor dado en la ec. (5.35). Sin embargo, ninguno de los dos valores experimentales se corresponde a una medida directa. Consideraremos un valor promedio pesado de ambos valores experimentales⁵,

$$\langle \text{Br}(\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}_l) \rangle = (6.8 \pm 1.3) \% \quad (5.39)$$

La anchura total del barión Λ_b^0 queda determinada por su vida media $\tau_{\Lambda_b^0} = 1.229 \pm 0.080$ ps [92], y así tenemos

$$\Gamma(\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}_l) = (5.5 \pm 1.4) 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad (5.40)$$

Observaciones realizadas por la colaboración DELPHI en desintegraciones $\bar{B}_d^0 \rightarrow D^{*+} l^- \bar{\nu}_l$ han sido usadas para medir el elemento $|V_{cb}|$ de la matriz CKM [138]

$$|V_{cb}| = 0.0414 \pm 0.0012(\text{estad.}) \pm 0.0021(\text{sist.}) \pm 0.0018(\text{teor.}) \quad (5.41)$$

5.5.1. Predicciones de NRCQM para los factores de forma

Analizaremos primero las predicciones de modelos de quarks constituyentes sin incluir ningún aspecto debido a HQET. En las fig. 5.1 y 5.2 se presentan los factores de forma de la transición semileptónica $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$, obtenidos utilizando la interacción AL1, así como las predicciones para $\hat{\xi}_{cb}$ que se deducen a partir de los diferentes factores de forma ($\hat{\xi}_{cb} = F_i/N_i, G_i/N_i^5, F/\sum_i N_i, i = 1, 2, 3$)⁶.

Cabe hacer aquí varias puntualizaciones:

⁵Sumamos en cuadraturas los errores experimentales de la ec. (5.35)

⁶Los factores correctores N_i, N_i^5 los obtenemos interpolando los valores de la tabla 5.4.

- Tal y como predice HQS, los factores de forma F_2 , F_3 , G_2 y G_3 son significativamente menores que los dominantes F_1 y G_1 .
- Volviendo a la discusión de la sec. 5.3.2 sobre la conservación de la corriente vectorial en transiciones degeneradas, debemos concluir, que las estimaciones de los NRCQM para los factores de forma F_2 y F_3 no son fiables, puesto que éstas resultan ser comparables a las incertidumbres teóricas ($\mathcal{O}(1 - m_{\Lambda_Q}/M_{tot})$) que los afectan. La situación es similar en el caso de los factores de forma axiales G_2 y G_3 . Además las funciones $\hat{\xi}_{bc}$ deducidas de los factores de forma F_2 , F_3 , G_2 y G_3 difieren apreciablemente entre sí, y están en total desacuerdo con las obtenidas utilizando los factores de forma F y G_1 .
- Las predicciones de los NRCQM para los factores de forma vector F y axial G_1 son mucho más fiables y conducen a funciones $\hat{\xi}_{bc}$ similares, con discrepancias en torno al 4%, que pueden ser atribuidas a correcciones $\mathcal{O}(1/m_Q^2)$ no incluidas, o bien a deficiencias de los NRCQM. Los resultados de las ref. [157] para F y G_1 , obtenidos en simulaciones Monte Carlo de QCD en el retículo, aunque tienen errores grandes, están en buen acuerdo con los resultados de la fig. 5.1.

5.5.2. Análisis combinado: HQET y NRCQM

Supondremos correcta la estimación NRCQM del factor de forma $F = F_1 + F_2 + F_3$ para todo el rango de valores accesibles de w^7 y usaremos este factor de forma para deducir la función $\hat{\xi}_{cb}$. Con esta última función, la ec. (5.31) y los coeficientes N_i, N_i^5 tabulados en la tabla 5.4, reconstruimos el resto de los factores de forma. Finalmente utilizando los factores de forma así determinados, calculamos las anchuras diferenciales longitudinales y transversales de desintegración y los parámetros de asimetría definidos en la sec. 5.2.

Asímismo estimaremos las incertidumbres teóricas del presente análisis. Para ello, tendremos en cuenta la dispersión de resultados obtenidos cuando i) se usan diferentes interacciones quark–quark y ii) cuando se utiliza la función $\hat{\xi}_{cb}$ deducida a partir del factor de forma G_1 , en lugar de la determinada por el factor de forma vectorial F .

Desintegración del barión Λ_b

Los resultados de nuestro análisis, basado en diferentes modelos no relativistas de quarks constituyentes en los cuales se han impuesto restricciones deducidas en HQET, se resumen en las tablas 5.2 y 5.3 y en las figuras 5.3 y 5.4. En la primera de estas tablas, se recogen las anchuras semileptónicas totales y parcialmente integradas, separando las contribuciones correspondientes a bosones W longitudinal (Γ_L) y transversalmente polarizados (Γ_T). También se muestra el valor de ξ_{cb} y de sus derivadas en $w = 1$,

⁷Recordemos que NRCQM predice correctamente $F(1)$ en el caso de desintegraciones degeneradas.

así como el valor de las incertidumbres del presente análisis. Comparamos siempre que es posible con resultados de la ref. [157] (simulación Monte Carlo de QCD en un espacio-tiempo discretizado). En la segunda tabla se muestran los resultados de los parámetros de asimetría (ecs. (5.14)-(5.20)) promediados en w . Nuestros resultados están en excelente acuerdo con los de las referencias [159]-[161] obtenidos en un modelo de quarks constituyente en el cono de luz.

Como se puede apreciar en la fig. 5.4, los cálculos NRCQM de la sec. 5.5.1 conducen a anchuras diferenciales de desintegración similares (con discrepancias en torno al 2 – 3 %) a las que obtenemos cuando las restricciones de HQET son impuestas. Este hecho no debe ser considerado significativo, sino meramente accidental. Para los parámetros de asimetría de la tabla 5.3 las discrepancias son mayores en general, siendo del orden del 20 % para $\langle a_T \rangle$ y $\langle \alpha' \rangle$.

A partir de nuestra determinación teórica de la anchura de desintegración total (tabla 5.2) y de las estimaciones experimentales (ec. (5.40)), obtenemos

$$|V_{cb}| = 0.040 \pm 0.005(\text{estad.})_{-0.002}^{+0.001}(\text{teor}) \quad (5.42)$$

en muy buen acuerdo con la reciente determinación de este parámetro en la desintegración $\bar{B}_c^0 \rightarrow D^{*+} l^- \bar{\nu}_l$ (ec. (5.41)).

Las incertidumbres experimentales en el *branching ratio* semileptónico de Λ_b son la mayor fuente de error en la determinación de $|V_{cb}|$ que aquí se presenta, siendo el error teórico en las ecs. (5.42) y (5.41) comparable. Nuestros resultados para las anchuras parcialmente integradas están de acuerdo con los cálculos *lattice* de la ref. [157] desde $w = 1$ hasta $w \approx 1.20$ ($|\vec{q}| \approx 0.66m_{\Lambda_c}$), donde los cálculos *lattice* son fiables, y nuestra anchura totalmente integrada $\Gamma = 3.46_{-0.11}^{+0.27} |V_{cb}|^2 10^{13} \text{s}^{-1}$ es compatible con el valor $\Gamma = (3.1 \pm 1.0) |V_{cb}|^2 10^{13} \text{s}^{-1}$ obtenido en la ref. [158] usando reglas de suma de QCD.

Con respecto a la función $\hat{\xi}_{cb}$ (función de Isgur-Wise con correcciones $1/m_Q$), nuestro resultado muestra una clara diferencia respecto de la forma funcional de una sola exponencial (ec. (5.36)) asumido por la colaboración DELPHI. En el rango de valores de w físicamente accesible en la desintegración, $\hat{\xi}_{cb}$ está bien descrita por un polinomio de tercer grado en potencias de $(w-1)$. En lo que respecta a $\hat{\xi}'_{cb}$, nuestra predicción yace en el límite inferior del rango dado en la ec. (5.37). Como se mencionó anteriormente, las correcciones debidas a QCD perturbativa fueron despreciadas en la ref. [139]. Si al relacionar el factor de forma F , calculado según un NRCQM, con la función $\hat{\xi}_{cb}$ no incluimos la contribución de cortas distancias, la pendiente de esta última función se hace mayor en valor absoluto (encontramos $\hat{\xi}'_{cb} = -0.99$) y por tanto está en mejor acuerdo con la determinación de la colaboración DELPHI. Por otra parte, la suposición de la ref. [139] sobre la forma funcional de la ec. (5.36) produce pendientes mayores en valor absoluto. Así, si se asume la forma de la ec. (5.36), para obtener una anchura de $3.46 |V_{cb}|^2 10^{13} \text{s}^{-1}$ (modelo AL1+HQET-F) se necesitaría un valor de $\hat{\rho} = 1.20^8$.

⁸Ambas aproximaciones proporcionan distribuciones $\frac{d\Gamma}{dw}$ similares, haciendo difícil la tarea de diferenciarlas experimentalmente.

Las diferencias entre las predicciones basadas en los modelos AL1 y AL1 χ para las anchuras parciales de desintegración son pequeñas (del orden del 1%). Esta es la misma situación que encontramos cuando comparamos los resultados obtenidos usando las diferentes interacciones quark-antiquark.

Desintegración del barión Ξ_b

Nuestros resultados del análisis conjunto NRCQM–HQET para la desintegración del barión Ξ_b están recopilados en las tablas 5.3 y 5.4. Como en el caso del barión Λ_b , los observables de la desintegración no dependen significativamente del potencial quark-quark utilizado. Esto, nos permite hacer predicciones precisas (tabla 5.4) y que están en buen acuerdo con los resultados *lattice* de la ref. [157]. Por otra parte, encontramos pequeñas desviaciones de la simetría $SU(3)$, por ejemplo

$$\frac{\Gamma(\Xi_b \rightarrow \Xi_c l^- \bar{\nu}_l)}{\Gamma(\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c l^- \bar{\nu}_l)} = 0.86_{-0.07}^{+0.10} \quad (5.43)$$

Finalmente en la fig. 5.5 se presentan las funciones $\hat{\xi}_{cb}$ (funciones de Isgur–Wise corregidas con términos de orden $1/m_Q$) obtenidas para las desintegraciones $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ y $\Xi_b \rightarrow \Xi_c$. En ambos casos, se presenta el análisis conjunto NRCQM–HQET basado en el factor de forma F . En esta figura se puede apreciar el tamaño de las violaciones de la simetría $SU(3)$ en función de w . La pendiente en $w = 1$ es significativamente mayor, en valor absoluto, para la desintegración $\Xi_b \rightarrow \Xi_c$ que para el caso $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$. Un comportamiento similar se ha encontrado también en el sector mesónico en los estudios de las desintegraciones $B \rightarrow D, D^*$ y $B \rightarrow D_s, D_s^*$. Las simulaciones de QCD en el retículo también encuentran que la pendiente de la función de Isgur–Wise es mayor, en valor absoluto, en los casos donde el quark espectador es un quark s [98].

5.6. Conclusiones

Hemos identificado dos deficiencias importantes de los estudios de las desintegraciones semileptónicas de los bariones Λ_b y Ξ_b basados en modelos no relativistas de quarks constituyentes:

1. El desarrollo habitual en momentos de la corriente electrodébil no es apropiado lejos de la región $w = 1$.
2. Cuando el modelo espectador (corrientes a un cuerpo) se utiliza, la corriente electrodébil vectorial no se conserva en transiciones degeneradas.

En este capítulo hemos tratado de solucionar estos problemas, y así hemos propuesto un nuevo desarrollo del operador de corriente electrodébil, manteniendo todos los

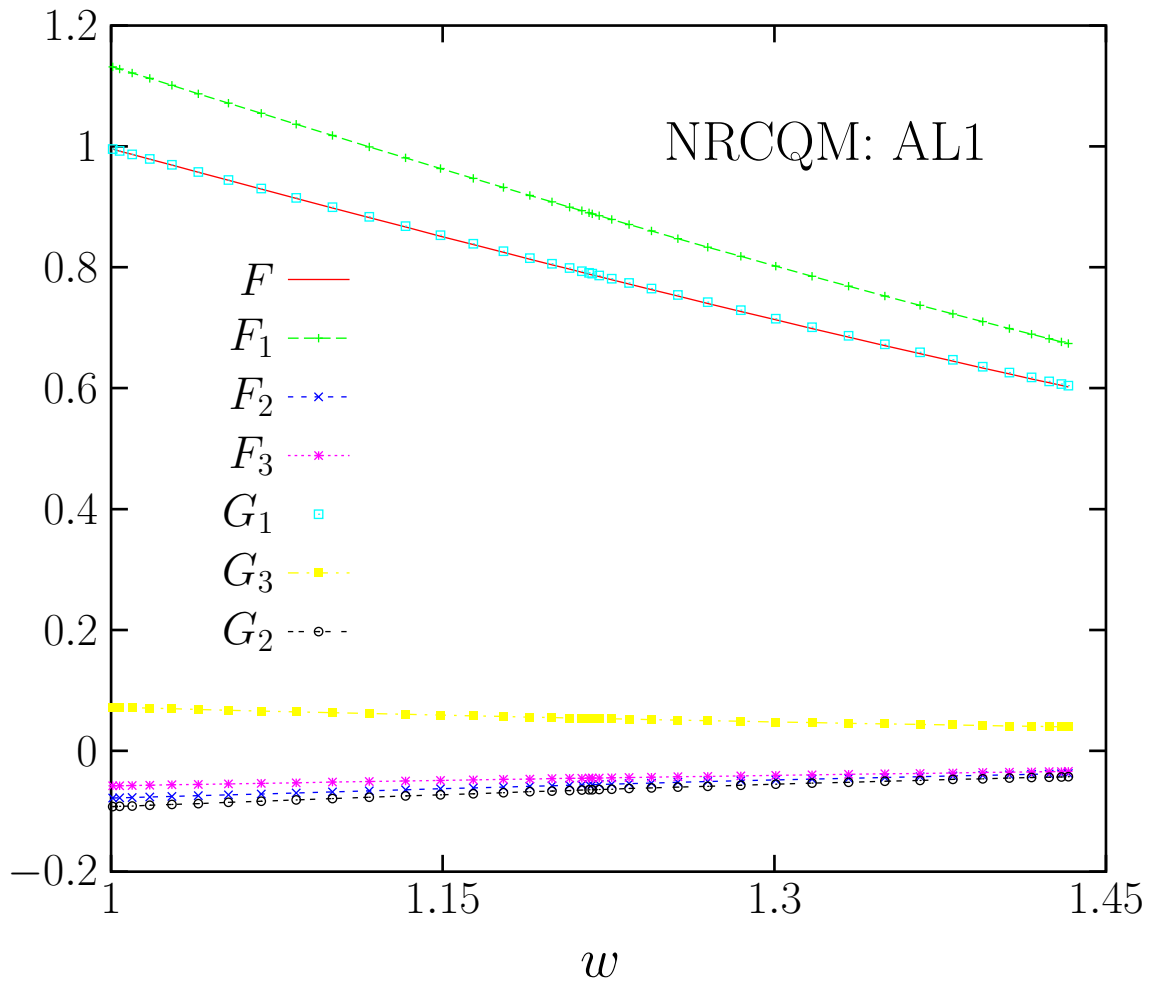


Figura 5.1: Factores de forma para la desintegración $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c l \bar{\nu}_l$, utilizando la interacción AL1.

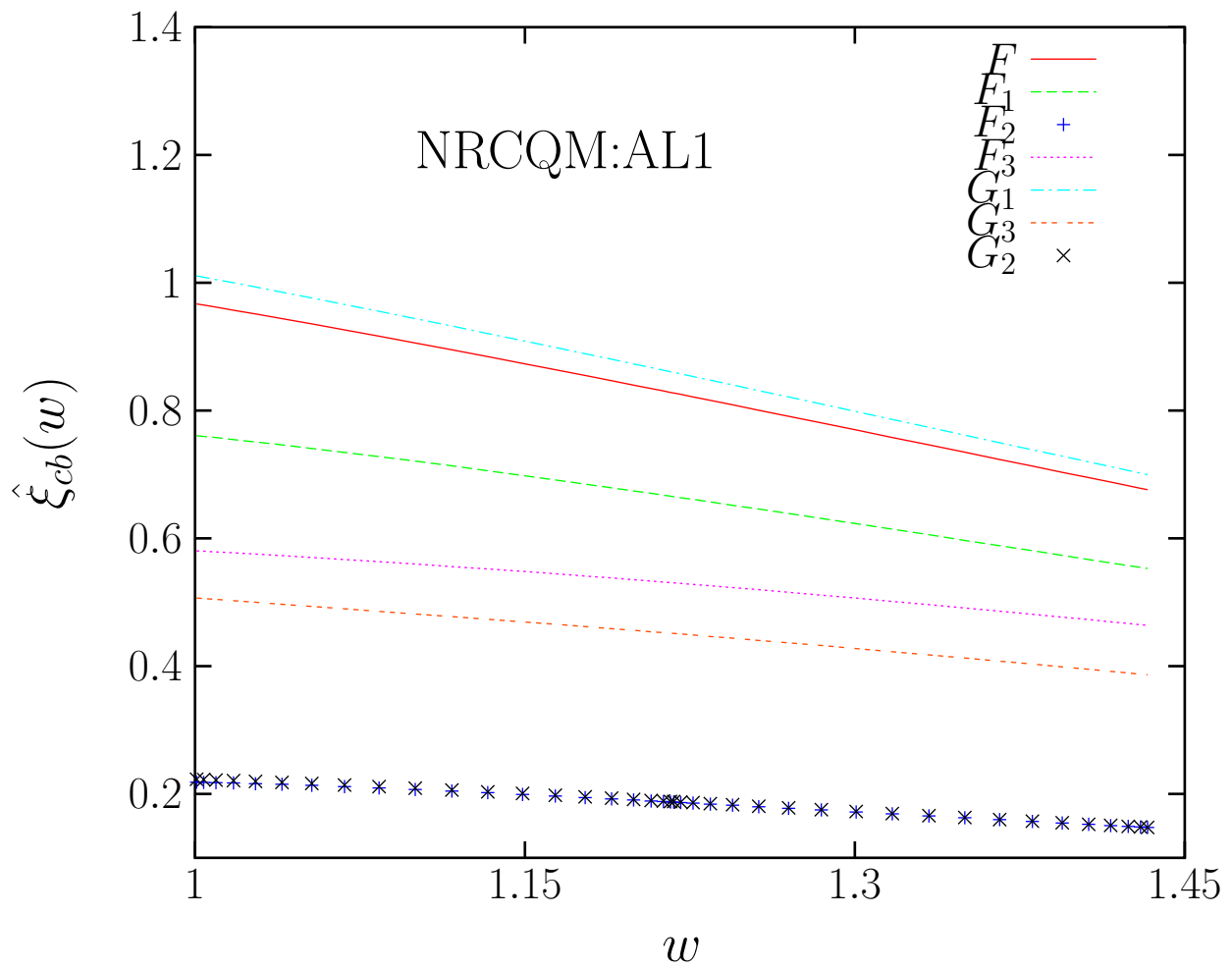


Figura 5.2: Función $\hat{\xi}_{cb}$ deducida a partir de los diversos factores de forma, utilizando la interacción AL1, que parametrizan la desintegración $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c l \bar{\nu}_l$.

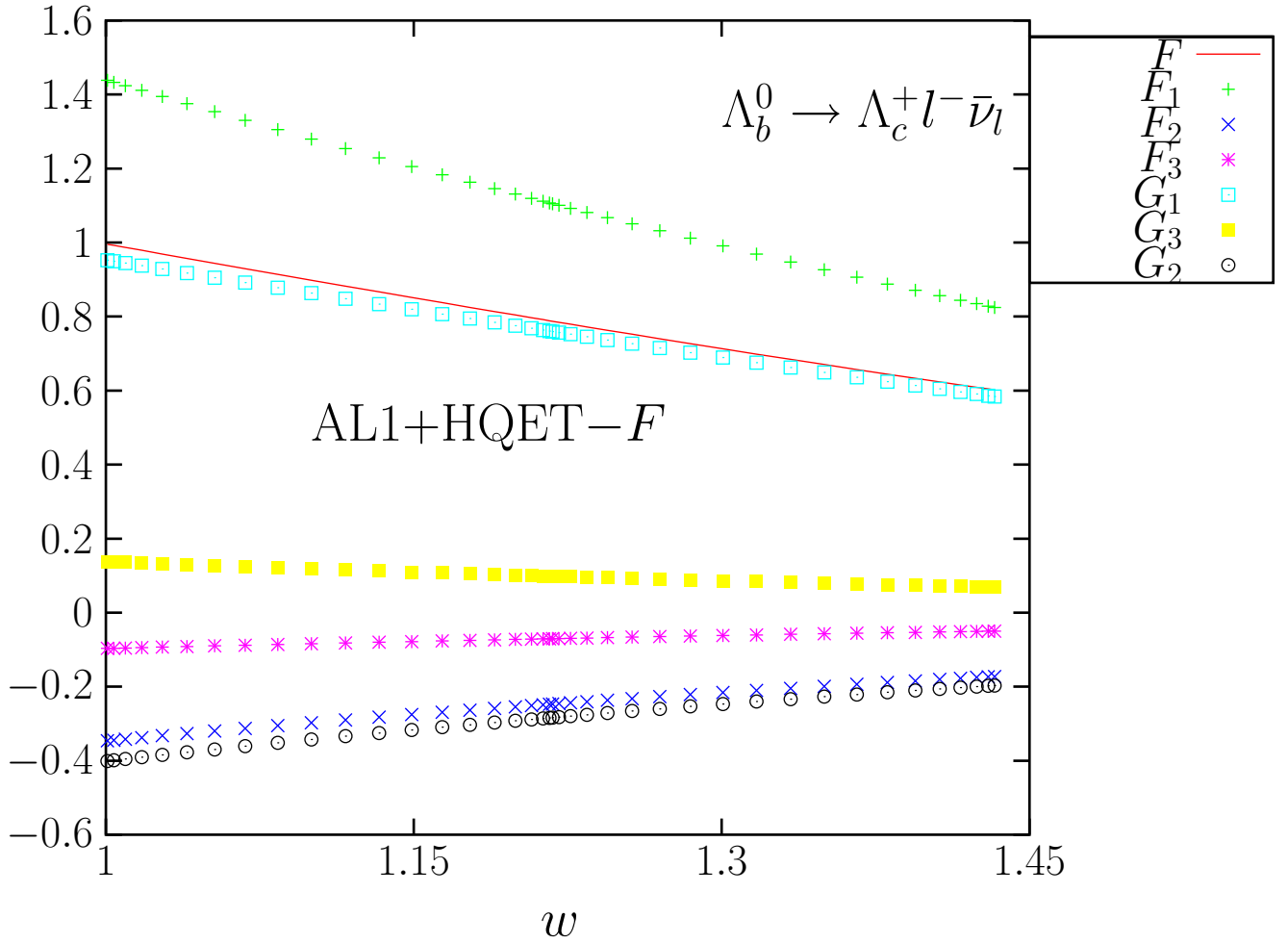


Figura 5.3: Factores de forma obtenidos con el potencial AL1 y aplicando las restricciones impuestas por HQET (ec. (5.31)). La función $\hat{\xi}_{cb}$ está determinada a partir del factor de forma F .

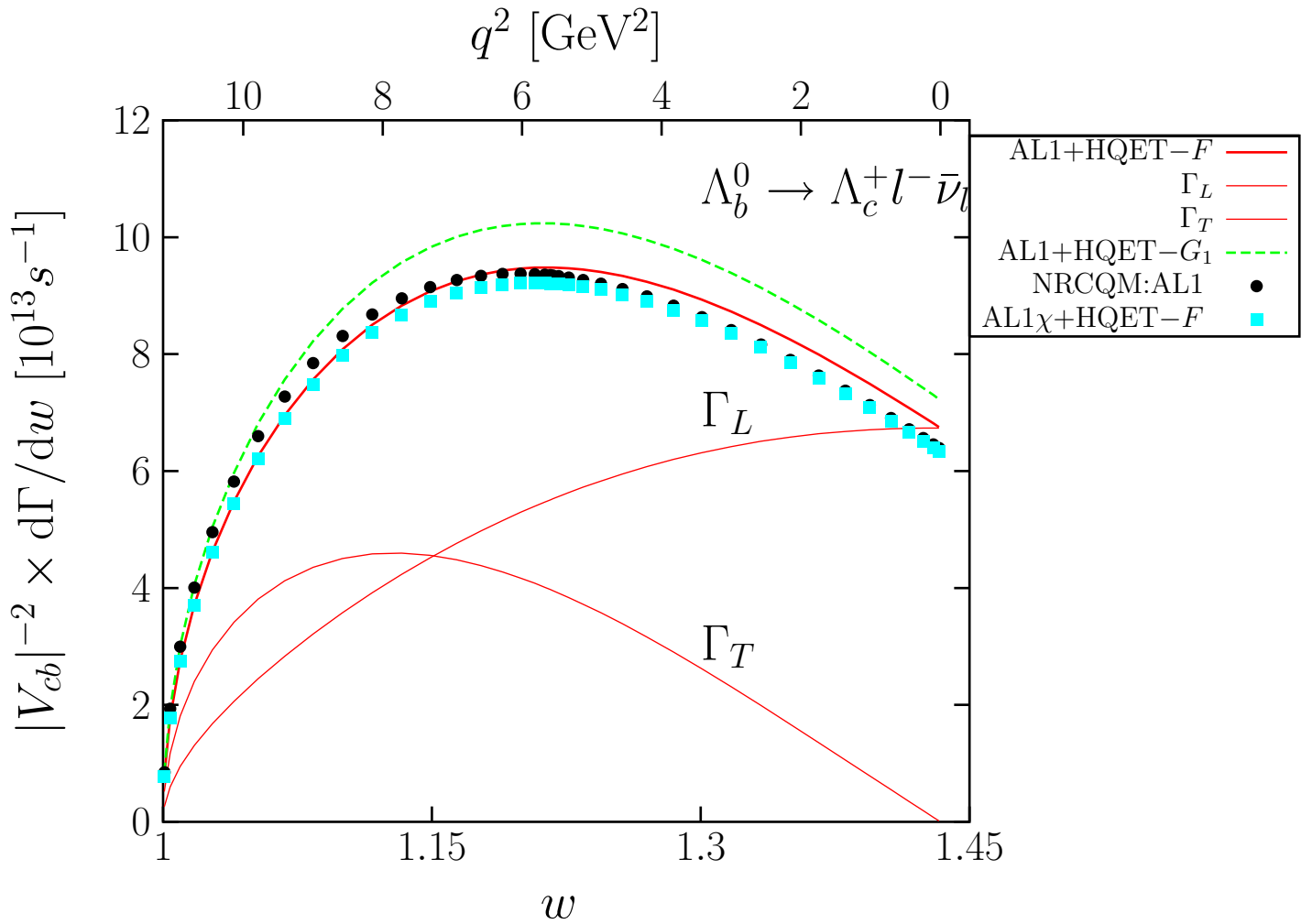


Figura 5.4: Anchuras diferenciales de desintegración obtenidas con los potenciales AL1 y AL1 χ y aplicando las restricciones impuestas por HQET (ec. (5.31)). Por HQET- F y HQET- G_1 se denotan las predicciones obtenidas con la función $\hat{\xi}_{cb}$ determinada a partir de los factores de forma F y G_1 , respectivamente. Para el modelo AL1+HQET- F se presentan también las anchuras diferenciales longitudinal y transversal. Asimismo, se incluyen las predicciones del modelo AL1, sin incluir las relaciones de HQET.

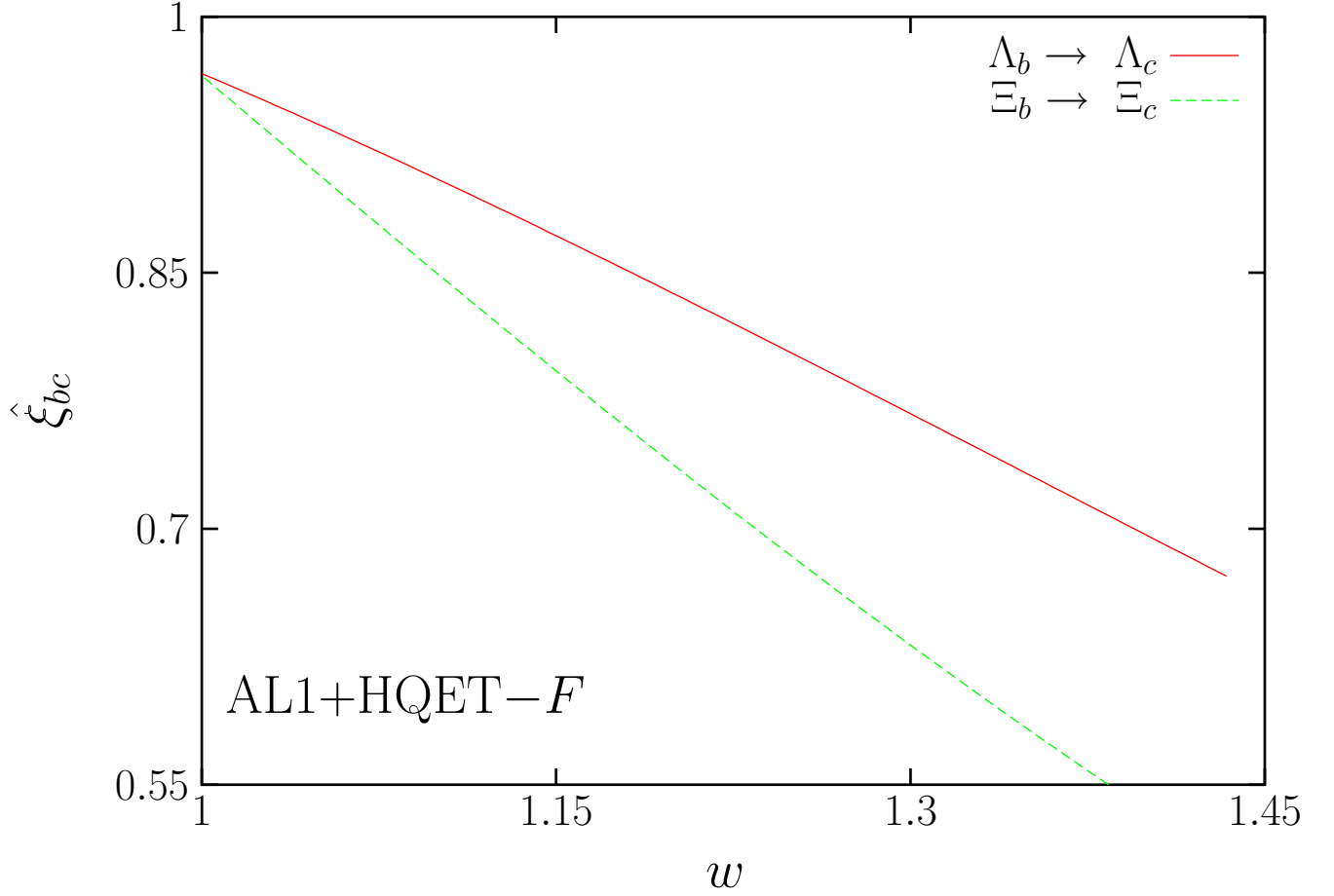


Figura 5.5: Funciones $\hat{\xi}_{cb}$ (función de Isgur–Wise corregida con términos de orden $1/m_Q$) obtenidas para las desintegraciones $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ y $\Xi_b \rightarrow \Xi_c$. En ambos casos, se presenta el análisis conjunto NRCQM–HQET basado en el factor de forma F y la interacción AL1.

órdenes del momento transferido \vec{q} . Para tratar la segunda de las deficiencias mencionadas, hemos impuesto relaciones entre los factores de forma deducidas en HQET.

Este análisis conjunto conduce a una descripción fiable y precisa de los factores de forma de la desintegración semileptónica del barión Λ_b . Determinamos la función $\hat{\xi}_{cb}$ (función de Isgur–Wise corregida con terminos de orden $1/m_Q$) que gobierna el proceso y gracias a las medidas experimentales de las referencias [92, 139], hemos determinado el valor del módulo del elemento cb de la matriz CKM. Nuestra determinación de $|V_{cb}|$ (ec. (5.42)) está de acuerdo con la obtenida en la desintegración semileptónica $B \rightarrow D^*$ (ec. (5.41)). Si los errores que encontramos en este capítulo para $|V_{cb}|$ son mayores, es debido a la peor determinación experimental de la anchura semileptónica de desintegración del barión Λ_b . También hemos calculado los parámetros de asimetría, promediados en w , que determinan la distribución angular de la desintegración.

En cuanto a la desintegración del barión Ξ_b , encontramos una determinación fiable de los observables de la desintegración, y estimamos que las desviaciones de la simetría $SU(3)$ tienen un tamaño de alrededor del 15%. En el punto cinemático $w = 1$, la pendiente de $\hat{\xi}_{cb}$ es mayor en la desintegración $\Xi_b \rightarrow \Xi_c$ que en el caso $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$.

	F^{HQET} AL1	G_1^{HQET} AL1	F^{HQET} AL1 χ	F^{HQET} AL2	F^{HQET} AP1	F^{HQET} AP2	F^{HQET} BD	Theor. Avg.	<i>Lattice</i> [157]
Γ	3.46	3.73	3.35	3.57	3.50	3.60	3.49	$3.46^{+0.27}_{-0.11}$	–
Γ_L	2.14	2.31	2.07	2.22	2.18	2.25	2.16	$2.14^{+0.17}_{-0.07}$	–
Γ_T	1.31	1.42	1.28	1.34	1.33	1.36	1.32	$1.31^{+0.11}_{-0.03}$	–
$\hat{\Gamma}_L, w_0$									
1.10	0.23	0.25	0.22	0.22	0.23	0.23	0.23	$0.23^{+0.02}_{-0.01}$	$0.23^{+0.03}_{-0.02}$
1.15	0.43	0.47	0.42	0.43	0.43	0.43	0.43	$0.43^{+0.04}_{-0.01}$	$0.44^{+0.08}_{-0.06}$
1.20	0.68	0.73	0.66	0.69	0.68	0.68	0.68	$0.68^{+0.05}_{-0.02}$	$0.71^{+0.17}_{-0.13}$
1.25	0.96	1.04	0.94	0.98	0.97	0.97	0.96	$0.96^{+0.08}_{-0.02}$	$1.0^{+0.3}_{-0.2}$
1.30	1.26	1.37	1.23	1.29	1.28	1.28	1.27	$1.26^{+0.11}_{-0.03}$	$1.4^{+0.5}_{-0.4}$
1.35	1.59	1.71	1.54	1.63	1.61	1.61	1.60	$1.59^{+0.12}_{-0.05}$	–
$\hat{\Gamma}_T, w_0$									
1.10	0.34	0.37	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	$0.34^{+0.03}_{-0.00}$	$0.34^{+0.06}_{-0.04}$
1.15	0.57	0.62	0.56	0.58	0.57	0.57	0.57	$0.57^{+0.05}_{-0.01}$	$0.53^{+0.16}_{-0.14}$
1.20	0.79	0.86	0.78	0.80	0.80	0.80	0.79	$0.79^{+0.07}_{-0.01}$	$0.7^{+0.3}_{-0.3}$
1.25	0.98	1.06	0.96	1.00	0.99	0.99	0.99	$0.98^{+0.08}_{-0.02}$	$0.8^{+0.6}_{-0.5}$
1.30	1.14	1.23	1.11	1.16	1.15	1.15	1.14	$1.14^{+0.09}_{-0.03}$	$0.8^{+0.9}_{-0.8}$
1.35	1.24	1.35	1.22	1.27	1.26	1.26	1.25	$1.24^{+0.11}_{-0.02}$	–
$\hat{\xi}_{cb}(1)$	0.97	1.01	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	$0.97^{+0.04}_{-0.00}$	0.99 ± 0.01
$-\hat{\xi}'_{cb}(1)$	0.58	0.65	0.64	0.52	0.58	0.52	0.56	$0.58^{+0.07}_{-0.06}$	1.1 ± 1.0
$-\hat{\xi}''_{cb}(1)$	0.73	0.59	0.72	0.79	0.63	0.70	0.82	$0.73^{+0.09}_{-0.14}$	–
$\hat{\xi}'''_{cb}(1)$	2.3	2.0	2.6	2.3	1.8	1.9	2.5	$2.3^{+0.3}_{-0.5}$	–

Cuadro 5.2: Desintegración semileptónica del barión Λ_b : Predicciones teóricas de las anchuras de desintegración ($\hat{\Gamma}_{L,T} = \int_1^{w_0} dw \frac{d\Gamma_{L,T}}{dw}$) totalmente y parcialmente integradas (en unidades de $|V_{cb}|^2 10^{13} \text{ s}^{-1}$), y de la función $\hat{\xi}_{cb}(w)$ y sus derivadas en $w = 1$. El significado de las columnas 2–8 es el mismo que en las figs. 5.3 y 5.4, con los cambios obvios debidos al uso de diferentes interacciones quark-quark. En la novena columna (resultados teóricos promediados) se tabulan nuestros resultados finales, donde los errores teóricos han sido estimados a partir de la dispersión de resultados de las columnas anteriores. Finalmente en la última columna se recopilan los resultados *Lattice QCD* de la ref. [157].

	$\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}_l$	$\Xi_b^0 \rightarrow \Xi_c^+ l^- \bar{\nu}_l$
$R_{L/T}$	1.63 ± 0.02	1.53 ± 0.04
$\langle a_T \rangle$	-0.665 ± 0.002	-0.628 ± 0.004
$\langle a_L \rangle$	-0.954 ± 0.001	-0.945 ± 0.002
$\langle P_L \rangle$	-0.844 ± 0.003	-0.820 ± 0.004
$\langle \alpha' \rangle$	-0.156 ± 0.001	-0.154 ± 0.001
$\langle \alpha'' \rangle$	-0.531 ± 0.004	-0.508 ± 0.008
$\langle \gamma \rangle$	0.439 ± 0.004	0.475 ± 0.006

Cuadro 5.3: Predicciones teóricas para los parámetros de asimetría, promediados en w , definidos en las ecs. (5.14)–(5.20). Mostramos los resultados obtenidos con el modelo AL1+HQET– F . Las incertidumbres teóricas han sido determinadas como en la tabla 5.2.

	F^{HQET} AL1	G_1^{HQET} AL1	F^{HQET} AL2	F^{HQET} AP1	F^{HQET} AP2	F^{HQET} BD	Theor. Avg.	Lattice [157]
Γ	2.96	3.21	3.04	2.97	3.12	3.08	$2.96^{+0.25}_{-0.00}$	–
Γ_L	1.79	1.94	1.85	1.80	1.90	1.88	$1.79^{+0.15}_{-0.00}$	–
Γ_T	1.17	1.27	1.19	1.17	1.22	1.21	$1.17^{+0.10}_{-0.00}$	–
$\hat{\Gamma}_L, w_0$								
1.10	0.27	0.29	0.27	0.27	0.27	0.27	$0.27^{+0.02}_{-0.00}$	$0.28^{+0.02}_{-0.03}$
1.15	0.49	0.54	0.50	0.49	0.50	0.50	$0.49^{+0.05}_{-0.00}$	$0.54^{+0.07}_{-0.08}$
1.20	0.75	0.82	0.76	0.75	0.77	0.77	$0.75^{+0.07}_{-0.00}$	$0.86^{+0.14}_{-0.16}$
1.25	1.03	1.12	1.05	1.03	1.07	1.06	$1.03^{+0.09}_{-0.00}$	$1.2^{+0.2}_{-0.3}$
1.30	1.31	1.42	1.34	1.31	1.37	1.36	$1.31^{+0.11}_{-0.00}$	$1.7^{+0.4}_{-0.4}$
$\hat{\Gamma}_T, w_0$								
1.10	0.39	0.43	0.39	0.39	0.40	0.40	$0.39^{+0.04}_{-0.00}$	$0.38^{+0.05}_{-0.05}$
1.15	0.63	0.68	0.63	0.63	0.64	0.64	$0.63^{+0.05}_{-0.00}$	$0.58^{+0.13}_{-0.15}$
1.20	0.83	0.90	0.84	0.83	0.85	0.85	$0.83^{+0.07}_{-0.00}$	$0.7^{+0.3}_{-0.3}$
1.25	0.99	1.08	1.01	0.99	1.02	1.02	$0.99^{+0.09}_{-0.00}$	–
1.30	1.10	1.19	1.12	1.10	1.14	1.13	$1.10^{+0.09}_{-0.00}$	–
$\hat{\xi}_{cb}(1)$	0.97	1.01	0.96	0.97	0.97	0.97	$0.97^{+0.04}_{-0.01}$	0.99 ± 0.01
$-\hat{\xi}'_{cb}(1)$	1.14	1.22	1.06	1.15	1.02	1.05	1.14 ± 0.08	1.4 ± 0.8
$-\hat{\xi}''_{cb}(1)$	0.13	0.00	0.30	0.03	0.30	0.37	$0.13^{+0.24}_{-0.16}$	–
$\hat{\xi}'''_{cb}(1)$	4.6	4.5	4.7	4.3	4.3	4.7	$4.6^{+0.1}_{-0.3}$	–

Cuadro 5.4: Idem tabla 5.2 para la desintegración semileptónica del barión Ξ_b .

Capítulo 6

Estudio de las desintegraciones semileptónicas $B \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$, $D \rightarrow K l \bar{\nu}_l$ y $D \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$

6.1. Introducción

En el capítulo anterior estudiamos la desintegración semileptónica de los bariones Λ_b y Ξ_b . Se trataba de utilizar las medidas experimentales existentes de las correspondientes anchuras para obtener información del elemento cb de la matriz CKM. Utilizamos diferentes interacciones quark–quark detalladas en el capítulo 4. En este capítulo, pretendemos utilizar estos potenciales para estudiar ciertas desintegraciones semileptónicas de los mesones B y D . El estudio de las desintegraciones exclusivas de mesones B es de gran interés, ya que pueden ser usadas para determinar los elementos $|V_{ub}|$ y $|V_{cb}|$ de la matriz de CKM. En este último caso, HQS simplifica notablemente el esquema teórico y permite un mejor control de las incertidumbres teóricas [92]. Es una situación similar a la estudiada en el capítulo 5. En este capítulo estudiaremos los modos de desintegración $B \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$, $D \rightarrow K l \bar{\nu}_l$ y $D \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$.

Recientemente, la colaboración CLEO ha medido [173, 174] la anchura de desintegración del modo $B \rightarrow \pi l^+ \nu_l$. Estas medidas pueden ser utilizadas para obtener información sobre el elemento $|V_{ub}|$ de la CKM. El estudio de esta reacción exclusiva constituye una importante alternativa a la extracción de $|V_{ub}|$ a partir de medidas en reacciones inclusivas $B \rightarrow X_u l^+ \nu_l$. Sin embargo, en las desintegraciones semileptónicas de mesones con quarks c ó b en mesones ligeros, no hay simetrías de sabor que permitan simplificar o relacionar los factores de forma hadrónicos, y así, los errores en $|V_{ub}|$ están dominados por incertidumbres teóricas. La determinación de $|V_{ub}|$ con incertidumbres bien controladas continúa siendo una de las prioridades en la física de sabores pesados.

La amplitud de transición en la desintegración exclusiva $b \rightarrow u$ factoriza en una parte leptónica y una hadrónica. Los efectos no perturbativos debidos a la interacción

fuerte afectan al elemento de matriz hadrónico, y en los últimos años se ha realizado un ingente esfuerzo para entenderlos y controlarlos. Se han explorado diferentes esquemas: simulaciones Monte Carlo de QCD en el retículo (primero ignorando el efecto de los lazos de quarks, aproximación *quenched*, [175]–[181], y más recientemente utilizando configuraciones dinámicas [182, 183]), reglas de suma de QCD en el cono de luz (LCSR) [184]–[191] y modelos de quarks constituyentes [192]–[199]. Cada esquema tiene su rango de aplicabilidad. Así, aproximaciones tipo LCSR son adecuadas para describir la fenomenología de la región de bajo momento transferido q^2 , mientras que *lattice* QCD, debido al volumen y espaciado finitos del retículo proporciona resultados fiables sólo en la región de alto q^2 . Finalmente los modelos quark dan resultados, a priori, en todo el rango de valores de q^2 , pero no están basados directamente en el lagrangiano de QCD, y sus parámetros o bien no son directamente medibles o no son de carácter fundamental en la teoría.

El teorema de Watson nos permite escribir relaciones de dispersión para cada factor de forma del elemento de matriz hadrónico de la transición $B \rightarrow \pi l^+ \nu_l$. Son las llamadas representaciones de Omnès [200, 201] de los factores de forma, que permiten relacionar la dependencia de q^2 de los factores de forma con la dependencia de la energía total en centro de masas de las amplitudes de dispersión elástica $B\pi \rightarrow B\pi$. Un trabajo pionero en este sentido fue el de la ref. [202], en el cual se estudiaron relaciones de dispersión con una única sustracción, y aunque los resultados que se encontraron fueron prometedores, se constató que sufrían de importantes incertidumbres debido al pobre conocimiento de los desfasajes $B\pi \rightarrow B\pi$ lejos del umbral. En este capítulo utilizaremos representaciones tipo Omnès, con múltiples sustracciones, para los factores de forma. De esta forma, se disminuye considerablemente la dependencia de los factores de forma del comportamiento de las amplitudes de dispersión elástica a altas energías. Además, utilizaremos las predicciones obtenidas para $q^2 = 0$ en esquemas del tipo LCSR, para extender, gracias a técnicas Omnès, las predicciones de un simple modelo quark no relativista de su región de aplicabilidad (cerca de $q_{\text{máx}}^2 = (m_B - m_\pi)^2$) a todo el rango de valores de q^2 físicamente accesibles en la desintegración. También compararemos nuestros resultados con cálculos previos obtenidos mediante simulaciones de QCD en el retículo. Estimaremos bandas de error teóricas para los factores de forma y la anchura de desintegración aplicando técnicas Monte Carlo. Finalmente estudiaremos las desintegraciones semileptónicas $D \rightarrow \pi$ y $D \rightarrow K$, para las que existen medidas precisas y los elementos relevantes de la CKM ($|V_{cd}|$ y $|V_{cs}|$) son bien conocidos, lo que nos proporcionará una test adicional del esquema utilizado.

Este capítulo está basado en los resultados de la ref. [203].

6.2. Desintegración semileptónica $B \rightarrow \pi$

6.2.1. Anchura diferencial de desintegración y factores de forma

Imponiendo invarianza bajo transformaciones de Lorentz, paridad e inversión temporal, el elemento de matriz de la corriente electrodébil, entre los estados hadrónicos inicial y final, para la desintegración semileptónica $B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$ puede ser parametrizado en términos de dos factores de forma adimensionales¹

$$\langle \pi(p_\pi) | V^\mu | B(p_B) \rangle = \left(p_B + p_\pi - q \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} \right)^\mu f^+(q^2) + q^\mu \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} f^0(q^2) \quad (6.1)$$

donde $q^\mu = (p_B - p_\pi)^\mu$ es el cuadrimomento transferido y $m_B = 5279.4$ MeV y $m_\pi = 139.57$ MeV son las masas de los mesones B^0 y π^- .

El significado físico de los factores de forma queda claro en la base de helicidad. Utilizando esta base y en el sistema del centro de masas de la pareja de leptones salientes, f^+ y f^0 se corresponden con amplitudes de transición con números cuánticos de espín-paridad 1^- y 0^+ respectivamente.

Despreciando la masa de los leptones, la anchura de desintegración viene dada por

$$\Gamma(B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) = \frac{G_F^2 |V_{ub}|^2}{192\pi^3 m_B^3} \int_0^{q_{\text{máx}}^2} dq^2 [\lambda^2(q^2)]^{3/2} [f^+(q^2)]^2 \quad (6.2)$$

con $q_{\text{máx}}^2 = (m_B - m_\pi)^2$, $G_F = 1.16637 \times 10^{-5}$ GeV⁻² la constante de Fermi y $\lambda(q^2) = (m_B^2 + m_\pi^2 - q^2)^2 - 4m_B^2 m_\pi^2 = 4m_B^2 |\vec{p}_\pi|^2$, siendo \vec{p}_π el trimomento del pión en el sistema de referencia donde el mesón B está en reposo.

Las medidas de la vida media del mesón B^0 , $\tau_{B^0} = (1.536 \pm 0.014) \times 10^{-12}$ s, y de la probabilidad del modo de desintegración $B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$, $\mathcal{B}_{\text{exp}}(B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) = (5.7 \pm 1.0) \times 10^{-14}$ [92] nos permiten deducir

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{exp}}(B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) &= (8.7 \pm 1.5) \times 10^7 \text{ s}^{-1} \\ &= (5.7 \pm 1.0) \times 10^{-14} \text{ MeV} \end{aligned} \quad (6.3)$$

siendo $l = e$ ó μ .

6.2.2. Modelo no relativista de quarks constituyentes: contribución de quarks de valencia

Asumiendo que a nivel quark el operador que induce la transición $b \rightarrow u$ es un operador de un cuerpo (modelo espectador), considerando exclusivamente la contribución de los quarks de valencia, y suponiendo que los mesones B y π son estados ligados

¹Nótese que la corriente axial no contribuye a transiciones entre mesones pseudoescalares.

quark–antiquark en onda s , un NRCQM predice (las masas de los quarks constituyentes son m_b y $m_l = m_u = m_d$) [204]

$$\frac{\langle \pi(E_\pi, -\vec{q}) | V^\mu | B(m_B, \vec{0}) \rangle}{\sqrt{4m_B E_\pi}} = \int \frac{d^3l}{4\pi} \sqrt{\frac{E_b(\vec{l}) + m_b}{2E_b(\vec{l})}} \sqrt{\frac{E_u(\vec{l} + \vec{q}) + m_u}{2E_u(\vec{l} + \vec{q})}} \times \quad (6.4)$$

$$\phi_{\text{rel}}^B(|\vec{l}|) \phi_{\text{rel}}^\pi(|\vec{l} + \vec{q}| \frac{m_{\text{esp}}}{m_u + m_{\text{esp}}}) \mathcal{V}^\mu(\vec{l}, \vec{q})$$

$$\mathcal{V}^\mu(\vec{l}, \vec{q}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\vec{l}^2 + \vec{l} \cdot \vec{q}}{(E_b(\vec{l}) + m_b)(E_u(\vec{l} + \vec{q}) + m_u)} \\ -\frac{\vec{l}}{E_b(\vec{l}) + m_b} - \frac{\vec{l} + \vec{q}}{E_u(\vec{l} + \vec{q}) + m_u} \end{pmatrix}$$

con $E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{q}^2}$, $E_{b,u}(\vec{k}) = \sqrt{m_{b,u}^2 + \vec{k}^2}$, m_{esp} la masa del quark espectador (m_d en el caso de esta desintegración) y $\phi_{\text{rel}}^{B,\pi}(k)$ la transformada de Fourier de la función de onda radial de los mesones B ó π que describe la dinámica relativa del par quark–antiquark².

Para evaluar las funciones de onda en espacio de coordenadas, hemos considerado las distintas interacciones entre quarks definidas y utilizadas en los capítulos 4 y 5.

Típicas predicciones para los factores de forma f^+ y f^0 se muestran en la fig. 6.1. Se ha usado el potencial AL1 y se muestran también los resultados de las simulaciones, en la aproximación *quenched* de QCD en el retículo de las referencias [179, 180]. Recientemente se han presentado resultados preliminares obtenidos utilizando configuraciones dinámicas (*unquenched lattice results*) [182, 183]. Estos nuevos resultados están, teniendo en cuenta los errores estadísticos, en buen acuerdo [205] con los más antiguos de las referencias [179, 180]. Por otra parte, esquemas tipo LCSR pueden proporcionar datos precisos y bien fundamentados, desde el punto de vista teórico, en la región proxima a $q^2 = 0$. Así el esquema LCSR de la ref. [187] encuentra

$$f^+(0) = 0.28 \pm 0.05 \quad (6.5)$$

que también se ha incluido en la fig. 6.1. Los resultados de la fig. 6.1 claramente muestran las deficiencias de los NRCQM's a la hora de describir la desintegración semileptónica $B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$, cuando sólo se incluye la contribución de los quarks de valencia. Esta descripción falla en todo el rango de valores de q^2 físicamente accesibles. En la zona próxima a $q_{\text{máx}}^2$, donde la ecuación de Schrödinger no relativista debería proporcionar una descripción suficiente, se aprecia claramente la influencia de la resonancia B^* , mientras que en el extremo opuesto, las predicciones debidas a modelos no relativistas no son fiables³. Como resultado, se obtiene en este esquema un valor para la anchura

$$\Gamma_{\text{NRCQM}}^{\text{val}}(B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) = 2.4 \left(\frac{|V_{ub}|}{0.0032} \right)^2 \times 10^{-14} \text{ MeV} \quad (6.6)$$

²Su normalización queda fijada por $\int_0^\infty dk k^2 |\phi_{\text{rel}}^{B,\pi}(k)|^2 = 1$

³Téngase en cuenta que cerca de $q^2 = 0$ se tiene que $|\vec{q}| \approx 2.5 \text{ GeV}$

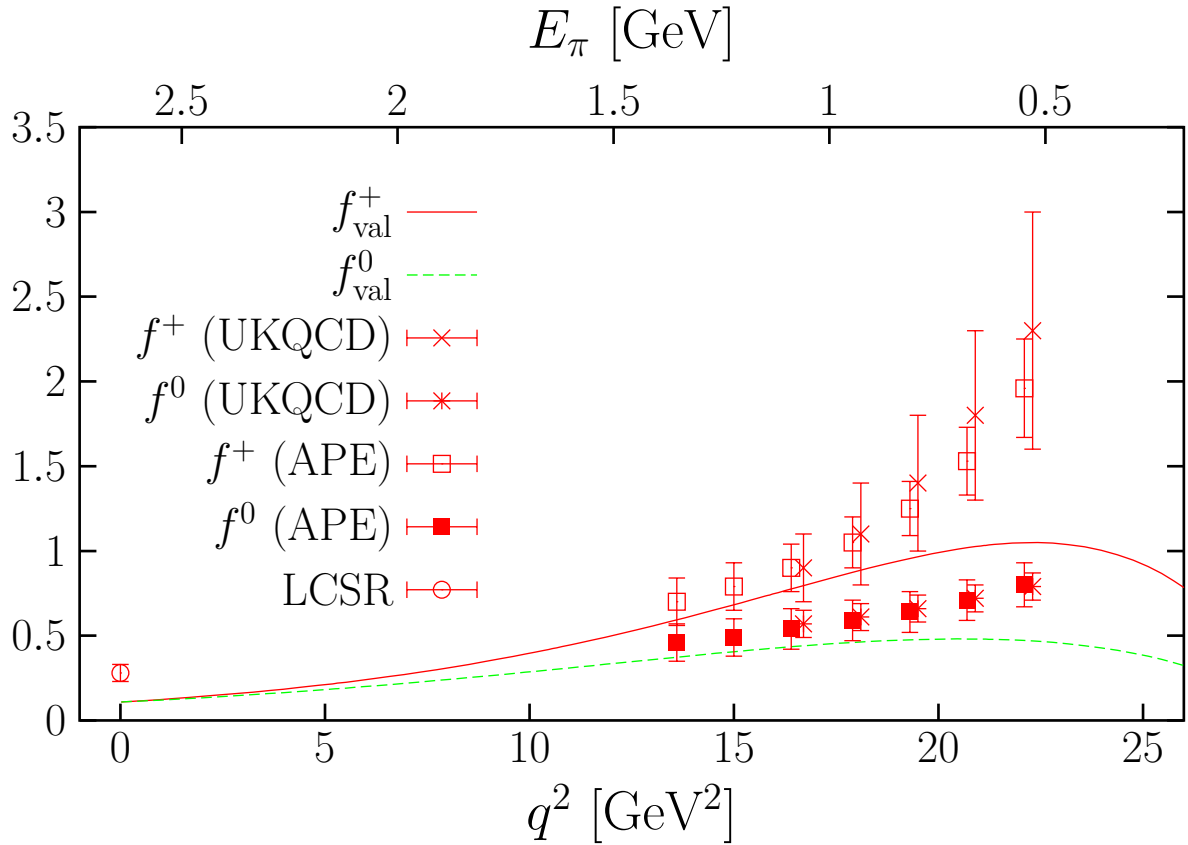


Figura 6.1: Factores de forma f^+ y f^0 deducidos utilizando el NRCQM AL1 [8], y considerando sólo la contribución de los quarks de valencia. Los puntos *lattice* son de las referencias [179] (UKQCD) y [180] (APE), y la estimación LCSR en $q^2 = 0$ está tomada de la ref. [187].

que es menor en un factor dos que la estimación experimental de la colaboración CLEO (ec. (6.3)).

6.2.3. Modelo no relativista de quarks constituyentes: contribución de la resonancia B^*

Un NRCQM debería ser fiable en la región próxima a $q_{\text{máx}}^2$, como ocurre en las desintegraciones $B \rightarrow Dl\bar{\nu}$ y $B \rightarrow D^*l\bar{\nu}$ tal y como se muestra en la ref. [204], para el mismo conjunto de potenciales utilizados aquí. La diferencia en el caso considerado en este capítulo, es la proximidad de la resonancia B^* a $q_{\text{máx}}^2$. De hecho, según se indicó por primera vez en la ref. [194], en el límite quiral, y con $m_b \rightarrow \infty$ la desintegración $B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$ debe estar dominada, en las proximidades de $q_{\text{máx}}^2$, por los efectos de esta resonancia.

En la imagen de la ref. [194], que es la que adoptaremos aquí, la contribución de la resonancia B^* desempeña un papel sólo en la región próxima a $q_{\text{máx}}^2$ ya que está suprimida por un vértice hadrónico blando. Este punto de vista contrasta con

otras parametrizaciones fenomenológicas de f^+ , que suponen que este factor de forma queda dominado por la resonancia B^* en todo el rango de valores accesibles de q^2 [175]. Los efectos de la resonancia B^* considerados aquí no son duales al modelo de quarks de

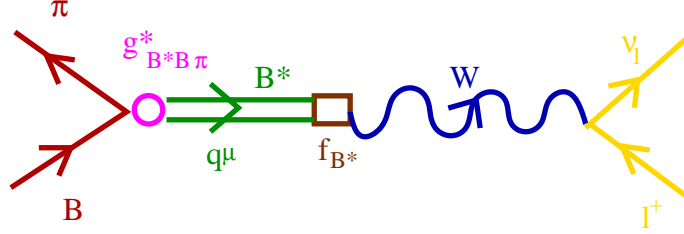


Figura 6.2: Contribución de la resonancia B^* al factor de forma f^+ en la desintegración semileptónica $B \rightarrow \pi$

valencia y han de ser añadidos de forma coherente, como una contribución genuina, a la desintegración del quark pesado cerca de $q^2_{\text{máx}}$ [194]. Nos concentraremos en el factor de forma f^+ , que determina la anchura de desintegración, siempre que se desprecien las masas de los leptones, y calcularemos la contribución de la resonancia B^* a este factor de forma. La contribución del diagrama de la fig. 6.2 a la amplitud hadrónica es

$$-iT^\mu = -i\hat{g}_{B^*B\pi}(q^2)p_\pi^\nu \left(i \frac{-g_\nu^\mu + \frac{q^\mu q_\nu}{m_{B^*}^2}}{q^2 - m_{B^*}^2} \right) i\sqrt{q^2}\hat{f}_{B^*}(q^2) \quad (6.7)$$

con normalizaciones definidas como en la ref. [204], y $m_{B^*} = 5325$ MeV. Por otra parte, \hat{f}_{B^*} y $\hat{g}_{B^*B\pi}$ son la constante de desintegración y la constante de acoplamiento fuerte $B^*B\pi$ para un mesón B^* virtual, respectivamente. Sobre la capa de masas, $\hat{f}_{B^*}(q^2 = m_{B^*}^2) \equiv f_{B^*}$ y $\hat{g}_{B^*B\pi}(q^2 = m_{B^*}^2) \equiv g_{B^*B\pi}$ se reducen a las constantes de desintegración del mesón B^* y a la constante de acoplamiento del B^* con los mesones B y π . Esta última está relacionada, en el límite en el cual el quark b es muy pesado, con la constante universal \hat{g} (independiente del sabor del quark pesado), que describe el vértice entre piones y mesones vectoriales y pseudoescalares, que contienen un quark pesado [206, 207]⁴.

$$g_{B^*B\pi} = \left(\frac{2\hat{g}\sqrt{m_B m_{B^*}}}{f_\pi} \right) (1 + \mathcal{O}(1/m_b)) \quad (6.8)$$

De la ec. (6.7) obtenemos

$$f_{\text{polo}}^+(q^2) = \frac{1}{2}\hat{g}_{B^*B\pi}(q^2) \frac{\sqrt{q^2}\hat{f}_{B^*}(q^2)}{m_{B^*}^2 - q^2} \quad (6.9)$$

No existe una determinación experimental directa de $g_{B^*B\pi}$, puesto que no hay espacio de fase suficiente para que se produzca la desintegración $B^* \rightarrow B\pi$, pero los datos experimentales disponibles para $D^* \rightarrow D\pi$ [92] pueden ser utilizados para

⁴Usamos $f_\pi \approx 131$ MeV

estimar⁵ \hat{g} y con ésta última obtener $g_{B^*B\pi}$. Tampoco hay medidas directas de f_{B^*} . En la ref. [204] calculamos estas dos cantidades con el mismo esquema de quarks constituyentes que el utilizado en este capítulo, y encontramos

$$g_{B^*B\pi}f_{B^*} = 9.1 \pm 0.9 \text{ GeV} \quad (6.10)$$

para su producto. También han sido calculadas en simulaciones de QCD en el retículo, f_{B^*} en la ref. [208] y $g_{B^*B\pi}$ en [209],

$$\begin{aligned} f_{B^*} &= 190 \pm 30 \text{ MeV} \\ g_{B^*B\pi} &= 47 \pm 5 \pm 8 \end{aligned} \quad (6.11)$$

y el producto de ambas resulta ser

$$[g_{B^*B\pi}f_{B^*}]_{\text{Latt-QCD}} = 8.9 \pm 2.2 \text{ GeV} \quad (6.12)$$

donde se han sumado los errores en cuadraturas. Este valor está en buen acuerdo con el calculado en la ref. [204], ec. (6.10), con diferencias del orden del 2 – 3 %. Existen otras estimaciones en la literatura para $g_{B^*B\pi}$ [210, 211] y f_{B^*} [212], pero son todas ellas compatibles, teniendo en cuenta las incertidumbres existentes, con los valores obtenidos en simulaciones de QCD en el retículo y recogidos en la ec. (6.12).

A la hora de evaluar la contribución de la resonancia B^* al factor de forma f^+ , utilizaremos el valor reseñado en la ec. (6.12) para el producto $\hat{g}_{B^*B\pi}(q^2)\hat{f}_{B^*}(q^2)$ en $q^2 = m_{B^*}^2$ y estimaremos su dependencia de q^2 gracias al esquema de quarks constituyentes de la ref. [204]. Todos los modelos de quarks constituyentes trabajan con funciones de onda de mesones reales, es decir sobre la capa de masas, por tanto toda posible dependencia de q^2 será debida a factores cinemáticos que relacionen los elementos de matriz dentro del modelo quark con los factores de forma hadrónicos. Así, por ejemplo, a partir de la ec. (13) de la ref. [204] inferimos una suave dependencia de q^2

$$\hat{f}_{B^*}(q^2)\sqrt[4]{q^2} = f_{B^*}\sqrt{m_{B^*}} \quad (6.13)$$

De la misma forma, podemos usar las ecs. (50) y (51) de la ref. [204] para determinar la dependencia de q^2 de $\hat{g}_{B^*B\pi}$. Fijamos el cuadrimomento del mesón B a $P'^\mu = (m_B, \vec{P}' = 0)$ y el del mesón B^* a $P^\mu = q^\mu = (m_B - E_\pi, \vec{P} = -\vec{q})$ ⁶, con $|\vec{q}| = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}$, y E_π determinado a partir de q^2 a través de la relación $E_\pi = (m_B^2 + m_\pi^2 - q^2)/2m_B$. Así, finalmente, obtenemos

$$f_{\text{polo}}^+(q^2) = \frac{1}{2}G_{B^*}(q^2)\frac{\sqrt[4]{q^2}}{\sqrt{m_{B^*}}}\frac{m_{B^*}[g_{B^*B\pi}f_{B^*}]_{\text{Latt-QCD}}}{m_{B^*}^2 - q^2} \quad (6.14)$$

donde $G_{B^*}(q^2) = \hat{g}_{B^*B\pi}(q^2)/g_{B^*B\pi}$, es un factor hadrónico adimensional normalizado a uno en $q^2 = m_{B^*}^2$ que tiene en cuenta la dependencia de q^2 de la amplitud $B \rightarrow B^*\pi$. En las figuras 6.3 y 6.4 se muestra la influencia de la resonancia B^* dentro de nuestro

⁵Es de esperar que las correcciones de masa finita a la escala del quark c sean apreciables.

⁶Por tanto su masa será $\sqrt{q^2}$

NRCQM y comparamos nuestros resultados con los obtenidos por Isgur y Wise en las referencias [194, 130] utilizando un modelo gaussiano de quarks constituyentes. Nuestro modelo para f_{pole}^+ da resultados similares a los de la ref. [194], aunque estos últimos decrecen más rápido debido a la base de osciladores armónicos que se usa en [194]. La inclusión de f_{polo}^+ mejora significativamente los resultados deducidos del modelo de quarks de valencia, y posibilita una descripción correcta de los datos de simulaciones *lattice* QCD desde $q_{\text{máx}}^2$ hasta valores de q^2 en torno a 15 GeV^2 . La región de bajo q^2 todavía queda póbrememente descrita, puesto que en esta región las correcciones relativistas deben de ser importantes.

La amplitud de la ec. (6.7) también proporciona una contribución al factor de forma f^0 . Aunque mejora la descripción del modelo de quarks de valencia para los valores más altos de q^2 , no es lo suficientemente importante, y sería necesario considerar la influencia de la resonancia más ligera con espín-paridad 0^+ [202]⁷.

6.2.4. Representación de Omnès para f^+

En esta sección utilizaremos la representación de Omnès del factor de forma f^+ para combinar los resultados obtenidos con los modelos de quarks constituyentes en la región de valores altos de q^2 (por encima de $15 - 18 \text{ GeV}^2$), con el valor obtenido mediante técnicas LCSR para $q^2 = 0$. Como consecuencia, determinaremos el factor de forma f^+ desde $q_{\text{máx}}^2$ hasta $q^2 = 0$, lo que nos permitirá realizar la integral de espacio de fase en la ec. (6.2) y así estimar el elemento $|V_{ub}|$ de la matriz CKM a partir de la probabilidad del modo semileptónico de desintegración del mesón B . Según se muestra en el apéndice F, la representación Omnès de f^+ sustraída en $n + 1$ puntos viene dada por

$$f^+(q^2) = \left(\prod_{j=0}^n [f^+(q_j^2)]^{\alpha_j(q^2)} \right) \exp \left\{ \mathcal{I}_\delta(q^2; q_0^2, q_1^2, \dots, q_n^2) \prod_{k=0}^n (q^2 - q_k^2) \right\} \quad (6.15)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\delta(q^2; q_0^2, q_1^2, \dots, q_n^2) &= \frac{1}{\pi} \int_{s_{th}}^{+\infty} \frac{ds}{(s - q_0^2) \cdots (s - q_n^2)} \frac{\delta(q^2)}{s - q^2} \\ \alpha_j(q^2) &= \prod_{j \neq k=0}^n \frac{q^2 - q_k^2}{q_j^2 - q_k^2} \end{aligned} \quad (6.16)$$

con $q^2 < s_{th} = (m_B + m_\pi)^2$ y $q_0^2, \dots, q_n^2 \in] - \infty, s_{th}]$. Esta representación del factor de forma requiere como datos, el desfasaje elástico $\pi B \rightarrow \pi B$ en el canal $J^P = 1^-$ e isospín $I = 1/2$, además del factor de forma en $n + 1$ puntos, q_0^2, \dots, q_n^2 , por debajo del umbral $B\pi$.

Es interesante resaltar que la representación de Omnès, desde un punto de vista teórico, se deriva a partir de primeros principios: la hipótesis de Mandelstam [214] de

⁷Por ejemplo, una resonancia en torno a los 5660 MeV [213]

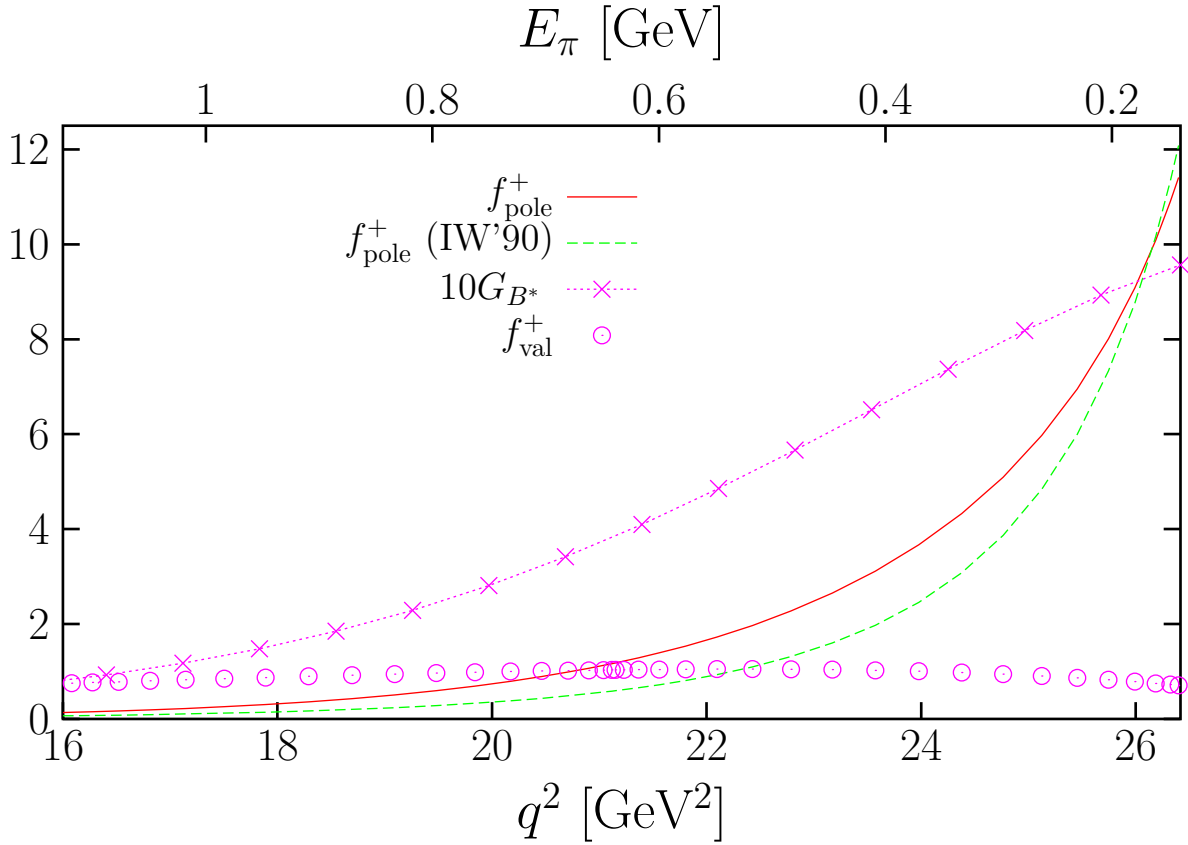


Figura 6.3: La línea continua denota la contribución, utilizando la interacción AL1, a f^+ de la resonancia B^* (ec. (6.14)), mientras que la línea discontinua indica la contribución de B^* a f^+ obtenida con el modelo gaussiano de quarks constituyentes de las referencias [130, 194]. También se muestra el factor hadrónico G_{B^*} definido en ec. (6.14) y la contribución de los quarks de valencia a f^+ presentada en la fig. 6.1.

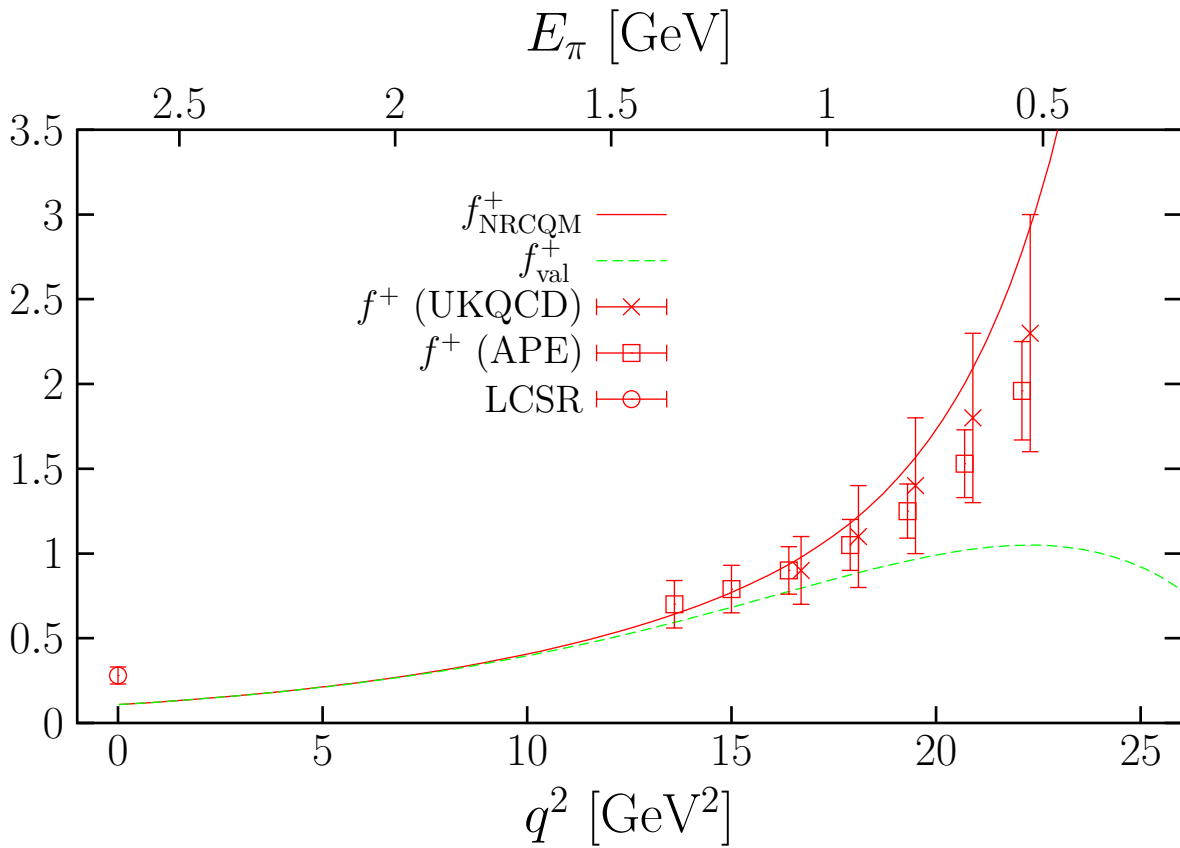


Figura 6.4: Contribución de los quarks de valencia y contribución de los quarks de valencia sumada a la contribución del polo B^* (denotada como NRCQM) a f^+ . Se han utilizado las funciones de onda para los mesones deducidas de la interacción AL1. Los puntos *lattice* son de las referencias [179] (UKQCD) y [180] (APE), y la estimación LCSR en $q^2 = 0$ está tomada de la ref. [187]

máxima analiticidad y el teorema de Watson [215].

$$\frac{f^+(s+i\epsilon)}{f^+(s-i\epsilon)} = \frac{T(s+i\epsilon)}{T(s-i\epsilon)} = e^{2i\delta(s)} \quad (6.17)$$

$$T(s) = \frac{8\pi i s}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s)} (e^{2i\delta(s)} - 1) \quad (6.18)$$

Este tipo de esquemas, basados en relaciones de dispersión tipo Omnès con múltiples sustracciones, ha sido utilizados con éxito [217] para describir los efectos producidos por la interacción de estados finales en desintegraciones del kaón⁸ y en la ref. [202] se empleó la representación de Omnès sustraída en un único punto ($q_0^2 = 0$) para estudiar la desintegración semileptónica $B \rightarrow \pi$. En este último trabajo, los desfases se evaluaron resolviendo la ecuación de Bethe–Salpeter en el llamado esquema *on-shell* (referencias [218, 219]), con un *kernel* determinado por la amplitud a nivel árbol, deducida a partir del lagrangiano de orden más bajo en HMChPT⁹ [207], conjuntamente con los diagramas de nivel árbol de intercambio de B^* que involucran la interacción de orden más bajo con acoplamiento \hat{g} . En la ref. [202] se describe el mesón B^* como un estado ligado $B\pi$ y este modelo debería describir aceptablemente los desfases cerca del umbral. Los resultados de este trabajo para f^+ fueron prometedores [202], pero las incertidumbres teóricas no eran en absoluto despreciables, en tanto que el cálculo del factor de Omnès \mathcal{I}_δ requiere conocer los desfases no sólo en el umbral, sino que también a energías más altas¹⁰.

Al incrementar el número de sustracciones, la región de integración relevante en la ec. (6.16) se reduce, y si el número de puntos es lo suficientemente grande, sólo es necesario el desfase cerca del umbral. Cerca del umbral, el desfase en onda p se comporta como

$$\delta(s) \approx n_b \pi - p^3 a + \dots \quad (6.19)$$

donde n_b es el número de estados ligados (teorema de Levinson [216]), p es el momento en el centro de masas del par πB y a es el volumen de dispersión. En nuestro caso $n_b = 1$, si consideramos el mesón B^* como un estado ligado $B\pi$. Realizando un gran número de sustracciones, la aproximación $\delta(s) \approx \pi$ está justificada. El factor Omnès \mathcal{I}_δ puede ser evaluado analíticamente en este caso, y se tiene, para $q^2 < s_{th}$

$$f^+(q^2) \approx \frac{1}{s_{th} - q^2} \prod_{j=0}^n [f^+(q_j^2)(s_{th} - q_j^2)]^{\alpha_j(q^2)}, \quad n \gg 1 \quad (6.20)$$

Además podemos utilizar esta expresión para combinar los resultados LCSR en $q^2 = 0$ y los obtenidos en la región de q^2 alto utilizando modelos de quarks constituyentes

⁸En aquel trabajo, sin embargo, se usaron múltiples derivadas evaluadas en un punto, en lugar de sustracciones en diversos valores de q^2 .

⁹Se corresponde con el acrónimo en inglés de *heavy meson chiral perturbation theory* (teoría quiral de perturbaciones para mesones pesados).

¹⁰Los efectos de resonancias más pesadas en los desfases no pueden ser despreciados lejos del umbral. En particular, el resultado obtenido mediante técnicas LCSR en $q^2 = 0$ sugiere que al menos una resonancia $J^P = 1^-$ localizada en torno a 6 GeV debe ser incluida en el esquema Omnès con una sustracción. Sin embargo, no se conoce bien ni su masa ni la intensidad de su acoplamiento al par $B\pi$.

y presentados en la subsección anterior. Así, determinamos las sustracciones en la ec. (6.20) utilizando las predicciones del NRCQM (sumando las contribuciones de los quarks de valencia y la del polo del B^*) para cinco valores, desde $q_{máx}^2$ ¹¹ hasta unos 18 GeV^2

$$(q^2/\text{GeV}^2, f^+(q^2)) = \begin{cases} (23.574, 4.1373) \\ (21.804, 2.5821) \\ (21.116, 2.1969) \\ (20.173, 1.7916) \\ (18.290, 1.2591) \end{cases} \quad (6.21)$$

y la predicción LCSR en $q^2 = 0$. Cuando se usa un número tan grande de sustracciones, los exponentes α_j son grandes y se tienen cancelaciones (condición de normalización, ec. (F.8)). Este es el motivo por el que en la ec. (6.21) se explicitan hasta un total de cinco dígitos. Somos sabedores de que las incertidumbres de los resultados de modelos quarks son mayores que la precisión de cinco dígitos, y discutiremos en detalle este aspecto más adelante. Los resultados que se obtienen utilizando la ec. (6.20) se muestran en la fig. 6.5. Vemos que se describen simultáneamente los datos *lattice* QCD para valores altos de q^2 y el dato del esquema LCSR en $q^2 = 0$. Así, y partiendo de un modelo de quarks constituyente, con sus obvias limitaciones, hemos conseguido una descripción realista del factor de forma f^+ en todo el rango de valores de q^2 físicamente accesible en la desintegración $B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$.

Finalmente, es preciso hacer un comentario sobre el error que se comete al utilizar la representación de Omnès simplificada de la ec. (6.20) en lugar de la exacta de la ec. (6.15). Por ejemplo, las diferencias entre el factor de forma obtenido si se utiliza¹² la ec. (6.15) con cinco sustracciones (eliminamos el punto con $q^2 = 21.1 \text{ GeV}^2$) y los resultados obtenidos con la aproximación de la ec. (6.20), mostrados en la fig. 6.5, son pequeñas. Estas diferencias son despreciables (menores del 1 %) para $q^2 > 10 \text{ GeV}^2$, y aunque mayores, todavía bastantes pequeñas (alrededor del 5–10 % como máximo en la región de 5 GeV^2) para $q^2 < 10 \text{ GeV}^2$.

6.2.5. Determinación de V_{ub} : Análisis de errores

El módulo del elemento V_{ub} de la CKM puede ser determinado comparando la medida experimental de la anchura de desintegración semileptónica del mesón B (ec. 6.3)

¹¹En la ec. (6.4) vemos que los argumentos de las funciones de onda de los mesones son $|\vec{l}|$ y $|\vec{l} + \vec{q}/2|$. Para $q^2 = 18 \text{ GeV}^2$, la mitad del momento transferido, $|\vec{q}|/2$, es del orden de $0.4 - 0.5 \text{ GeV}$ que es del mismo orden que $\langle \vec{l}^2 \rangle_{\phi^{B,\pi}}^{\frac{1}{2}}$. En tanto que las interacciones quark–antiquark no relativistas han sido ajustadas para reproducir las energías de ligadura, éstas incorporan correcciones relativistas de forma efectiva, y por tanto, se podría esperar que este escenario no relativista fuera capaz de proporcionar funciones de onda adecuadas para momentos del orden de $\langle \vec{l}^2 \rangle_{\phi^{B,\pi}}^{\frac{1}{2}}$. Esto explicaría por qué los modelos no relativistas pueden describir los datos de *lattice* QCD en un rango de valores de q^2 que varía desde $q_{máx}^2$ hasta por debajo incluso de 18 GeV^2 (véase fig. 6.4).

¹²Calculamos los desfases con el modelo de la ref. [202].

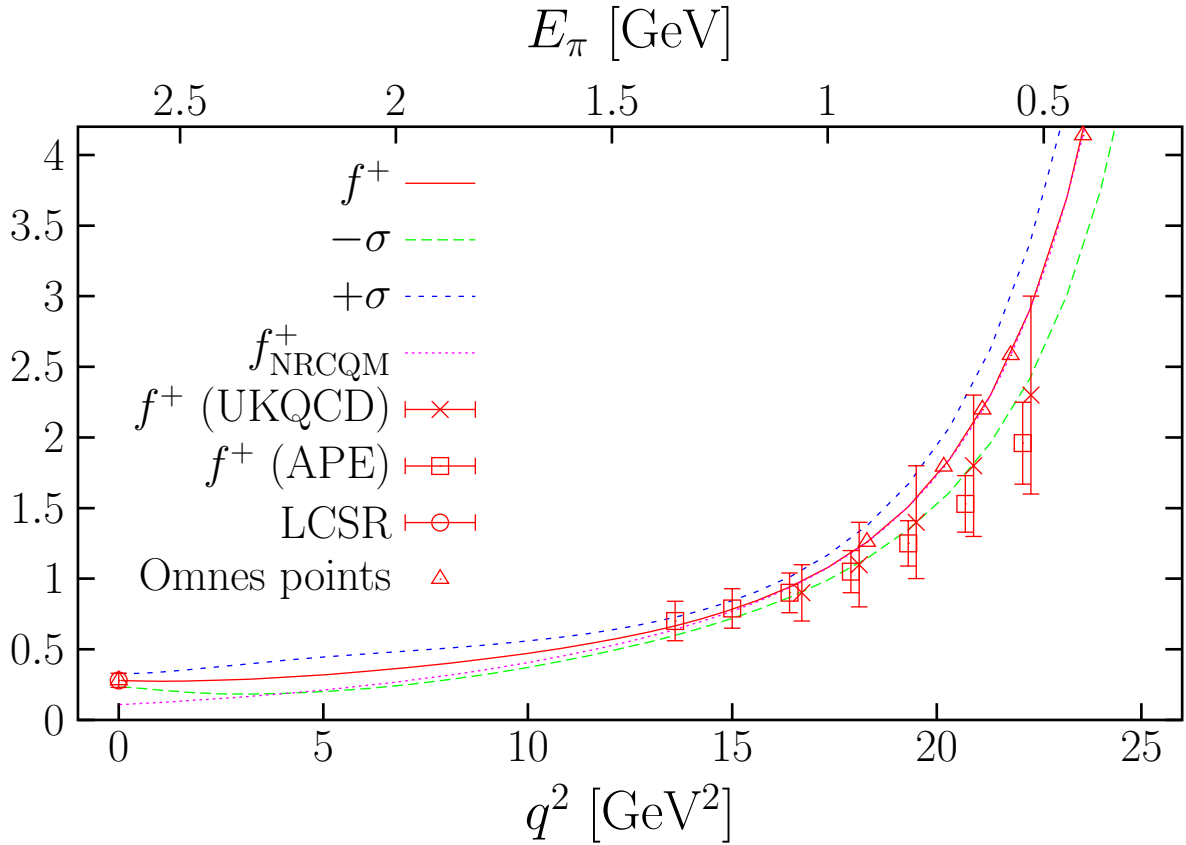


Figura 6.5: Factor de forma $f^+(q^2)$ para la desintegración $B \rightarrow \pi$. La línea continua muestra el factor de forma f^+ obtenido a partir de la representación de Omnes con 6 puntos de sustracción (ec. (6.20)). Los triángulos marcan los puntos de sustracción (cinco puntos obtenidos del modelo AL1-NRCQM y el resultado LCSR en $q^2 = 0$ de la ref. [187]). Los puntos *lattice* son de las referencias [179] (UKQCD) y [180] (APE). Se muestra también la contribución de quarks de valencia sumada a la contribución del polo B^* (denotada como NRCQM y evaluada con el potencial AL1) a f^+ . Finalmente, las líneas $\pm\sigma$ indican las bandas de incertidumbre teóricas del factor de forma inducidas por los errores en las ecs. (6.12) y (6.5) y por la dependencia de la interacción quark–antiquark del modelo (Véase la sec. 6.2.5).

con nuestra estimación teórica para la misma, que obtenemos tras realizar la integral de espacio de fases (ec. (6.2)) con el factor de forma determinado en la subsección anterior, gracias a la representación de Omnès. Prestaremos una especial atención a la determinación de las incertidumbres teóricas. En este sentido, tenemos dos fuentes de error.

- *Incertidumbres debidas a las interacciones quark–antiquark:*

Para estimar estos errores calcularemos la anchura integrada con las interacciones¹³ AL1, AL2, AP1, AP2 y BD, introducidas en el capítulo 4 y utilizadas en el capítulo 5 para describir las desintegraciones semileptónicas de los bariones Λ_b y Ξ_b . La dispersión de resultados obtenidos determinarán los errores debidos a este conocimiento impreciso de la dinámica interna de los mesones involucrados.

- *Incertidumbres en el valor de $[f_{B^*}g_{B^*B\pi}]$ y en los valores de f^+ en los puntos de sustracción utilizados en la representación de Omnès:*

Los errores en $[f_{B^*}g_{B^*B\pi}]$ (ecs. (6.12)) afectan a la contribución del polo de la resonancia B^* (ec. (6.14)), e inducen incertidumbres en las predicciones deducidas de los NRCQM's para los cinco puntos usados en la representación Omnès sustraída (ec. (6.20)). Las incertidumbres en la interacción quark–antiquark discutidas anteriormente, también contribuyen a los errores en los puntos utilizados en la representación Omnès. Por último, también es necesario tener en cuenta los errores (ec. (6.5)) que afectan al valor del factor de forma en el punto $q^2 = 0$ (LCSR).

Para tener en cuenta estas fuentes de error se han seguido los siguientes pasos.

1. Tomamos el potencial AL1 como interacción quark–antiquark. Por medio de una simulación Monte Carlo, se genera un total de 1000 pares de puntos¹⁴ de la forma

$$([f_{B^*}g_{B^*B\pi}]_{\text{Latt-QCD}}, f^+(0)_{\text{LCSR}})$$

mediante una distribución gaussiana bidimensional no correlacionada, con valores centrales y desviaciones estándar tomadas de las ecs. (6.12) y (6.5). Para cada uno de estos 1000 pares de puntos, se determinan los seis valores del factor de forma que serán usados en la representación Omnès. Así se tienen 1000 determinaciones de $f^+(q^2)$ en todo el rango de valores de q^2 accesibles en la desintegración $B \rightarrow \pi$. Para cada valor de q^2 se descartan el 16% de valores más bajos y más altos del factor de forma, y así encontramos una banda con un 68% de nivel de confianza para f^+ , que contribuye a las incertidumbres teóricas mostradas en la fig. (6.5).

¹³Como se mencionó en la sec. 6.2.2, estos potenciales han sido ajustados para reproducir el espectro de mesones ligeros y mesones constituidos por un quark ligero y otro pesado.

¹⁴Todos los errores que se estiman mediante simulaciones Monte Carlo en esta sección, son estables con distribuciones menores, de alrededor de 500 eventos.

Calculando la anchura de desintegración para cada uno de los 1000 factores de forma obtenidos, y desestimando el 16 % de anchuras más grandes y más pequeñas, obtenemos

$$\frac{\Gamma(B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu)}{|V_{ub}|^2} = (0.50_{-0.10}^{+0.14}) \times 10^{-8} \text{ MeV} \quad (6.22)$$

2. Fijamos el par $([f_{B^*} g_{B^* B \pi}]_{\text{Latt-QCD}}, f^+(0)_{\text{LCSR}})$ a sus valores centrales y calculamos la anchura de desintegración con cada una de las interacciones quark–antiquark discutidas anteriormente. De la dispersión de resultados obtenemos (tomando como valor central la anchura calculada con la interacción AL1)

$$\frac{\Gamma(B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu)}{|V_{ub}|^2} = (0.50 \pm 0.15) \times 10^{-8} \text{ MeV} \quad (6.23)$$

Sumando en cuadraturas ambas fuentes de error

$$\frac{\Gamma(B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu)}{|V_{ub}|^2} = (0.50 \pm 0.20) \times 10^{-8} \text{ MeV} \quad (6.24)$$

y comparando con la medida de la anchura de la ec. (6.3) llegamos a

$$|V_{ub}| = 0.0034 \pm 0.0003(\text{Exp.}) \pm 0.0007(\text{Teo.}) \quad (6.25)$$

La colaboración CLEO [174] obtiene a partir de su medida de la ec. (6.3), y combinando los resultados obtenidos para $f^+(q^2)$ con esquemas del tipo LCSR en la región $0 \leq q^2 < 16 \text{ GeV}^2$ y resultados de simulaciones Monte Carlo de QCD en el retículo para $16 \text{ GeV}^2 \leq q^2 < q_{\text{Máx}}^2$

$$|V_{ub}|_{\text{CLEO}} = 0.0032 \pm 0.0003(\text{Exp.})_{-0.0004}^{+0.0006}(\text{Teo.}) \quad (6.26)$$

El acuerdo entre ambas determinaciones es notable, y en ambos casos, las indeterminaciones están dominadas por el tratamiento teórico. También hemos calculado *branching ratios* parcialmente integrados,

$$\mathcal{B}(q_1^2 \leq q^2 < q_2^2) = \frac{\mathcal{B}_{\text{Exp}}^{\text{Total}}(B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu)}{\Gamma} \int_{q_1^2}^{q_2^2} dq^2 \frac{d\Gamma}{dq^2} \quad (6.27)$$

Las incertidumbres teóricas se cancelan parcialmente en $\int_{q_1^2}^{q_2^2} dq^2 \frac{d\Gamma}{dq^2} / \Gamma$. Nuestros resultados se recopilan en la tabla 6.1, donde se puede apreciar que comparan razonablemente con los de la ref. [174].

Finalmente, para cada valor de q^2 , consideramos los valores que se deducen para f^+ utilizando los diferentes potenciales quark–antiquark, obteniendo de esta forma una estimación de esta fuente de error teórico. Combinando¹⁵ esta estimación de incertidumbre teórica, con la incertidumbre, discutida anteriormente, e inducida por los errores de $([f_{B^*} g_{B^* B \pi}]_{\text{Latt-QCD}} \text{ y } f^+(0)_{\text{LCSR}})$ se obtienen las bandas de error dibujadas en la fig. 6.5.

¹⁵Sumamos en cuadraturas las diferentes fuentes de error.

	$B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu$	
	CLEO	Este trabajo
$\mathcal{B}(0 \leq q^2 < 8 \text{ GeV}^2)/10^{-5}$	4.3 ± 1.2	$4.3 \pm 0.7(\text{Exp.}) \pm 1.2(\text{Teo.})$
$\mathcal{B}(8 \leq q^2 < 16 \text{ GeV}^2)/10^{-5}$	6.5 ± 1.3	$4.1 \pm 0.7(\text{Exp.}) \pm 0.4(\text{Teo.})$
$\mathcal{B}(16 \text{ GeV}^2 \leq q^2)/10^{-5}$	2.5 ± 1.0	$4.9 \pm 0.8(\text{Exp.}) \pm 1.2(\text{Teo.})$

Cuadro 6.1: *Branching ratios* parcialmente integrados (Véase ec. (6.27))

6.3. Estudio de las desintegraciones semileptónicas $D \rightarrow \pi$ y $D \rightarrow K$

Como una test adicional de nuestras predicciones para la desintegración semileptónica $B \rightarrow \pi$, estudiamos las desintegraciones $D \rightarrow \pi$ y $D \rightarrow K$ para las que sí existen datos experimentales precisos [92]

$$\mathcal{B}_{\text{exp}}(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu) = (3.6 \pm 0.6) \times 10^{-3} \quad (6.28)$$

$$\Gamma_{\text{exp}}(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu) = (5.8 \pm 1.0) \times 10^{-12} \text{ MeV}$$

$$\mathcal{B}_{\text{exp}}(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu) = (3.58 \pm 0.18) \times 10^{-2} \quad (6.29)$$

$$\Gamma_{\text{exp}}(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu) = (57 \pm 3) \times 10^{-12} \text{ MeV}$$

con $\tau_{D^0} = (410.4 \pm 1.5) \times 10^{-15} \text{ s}$, $|V_{cd}| = 0.224 \pm 0.003$ y $|V_{cs}| = 0.9737 \pm 0.0007$.

En los últimos años ha habido un interés renovado en estas desintegraciones. Por una parte, se han presentado los primeros resultados de simulaciones de QCD en el retículo con tres sabores dinámicos [220], que han dejado obsoletos a los anteriores resultados obtenidos con la aproximación *quenched* [180, 181, 221]. Por otra parte, las colaboraciones CLEO [222] y BES [223] han realizado nuevas medidas de las probabilidades de ciertos modos de desintegración (*branching ratios*),

$$\text{BES : } \mathcal{B}(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) = (3.3 \pm 1.3) \times 10^{-3} \quad (6.30)$$

$$\mathcal{B}(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e) = (3.8 \pm 0.5) \times 10^{-2}$$

$$\text{CLEO : } \frac{\mathcal{B}(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)}{\mathcal{B}(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e)} = 0.082 \pm 0.006 \pm 0.005 \quad (6.31)$$

Ambas colaboraciones también han determinado los factores de forma en $q^2 = 0$. Según la colaboración BES,

$$f_{\pi}^+(0) = 0.73 \pm 0.14 \pm 0.06 \quad (6.32)$$

$$f_K^+(0) = 0.78 \pm 0.04 \pm 0.03$$

$$\frac{f_{\pi}^+(0)}{f_K^+(0)} = 0.93 \pm 0.19 \pm 0.07$$

mientras que CLEO refiere los valores

$$\frac{f_{\pi}^{+}(0)}{f_{K}^{+}(0)} = 0.86 \pm 0.07_{-0.04}^{+0.06} \pm 0.01 \quad (6.33)$$

En esta sección extenderemos¹⁶ el esquema desarrollado en las secciones precedentes para el estudio de la transición $B \rightarrow \pi$, para estudiar la desintegraciones semileptónicas $D^0 \rightarrow \pi^{-}l^{+}\nu_l$ y $D^0 \rightarrow K^{-}l^{+}\nu_l$.

6.3.1. Transición $D \rightarrow \pi l \bar{\nu}_l$

Puesto que sí existe espacio de fase suficiente para que ocurra la desintegración $D^* \rightarrow D\pi$, la constante hadrónica¹⁷ $g_{D^*D\pi}$ ha sido medida [224]

$$g_{D^*D\pi} = 17.9 \pm 0.3 \pm 1.9 \quad (6.34)$$

Sin embargo, no se conoce experimentalmente la constante de desintegración de la resonancia D^* . Tomando la estimación de la ref. [208]

$$f_{D^*} = (234 \pm 20) \text{ MeV} \quad (6.35)$$

obtenemos

$$[g_{D^*D\pi}f_{D^*}]_{\text{Exp-latt}} = 4.2 \pm 0.6 \text{ GeV} \quad (6.36)$$

donde los errores se han sumado en cuadraturas. En la ref. [204] encontramos, utilizando diferentes NRCQM's, un valor de $4.9 \pm 0.5 \text{ GeV}$ para el anterior producto, en buen acuerdo con el resultado de la ec. (6.36). El valor de la ec. (6.36) para $[g_{D^*D\pi}f_{D^*}]$ determina la contribución del polo de la resonancia D^* , para $q^2 > 0$, a f^+ y sumando esta contribución a la de los quarks de valencia, obtenemos la línea continua de la fig. 6.6. El acuerdo entre los resultados de nuestro modelo quark y los de la ref. [220], obtenidos mediante una simulación de QCD en el retículo con tres sabores dinámicos es espectacular. Como se aprecia en la fig. 6.6 la contribución del polo de la resonancia D^* es dominante por encima de $q^2 = 1.5 \text{ GeV}^2$ y sigue siendo importante hasta $q^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$.

En este caso no ha sido necesario utilizar la representación Omnès para mejorar la descripción del factor de forma, al ser ésta adecuada en todo el rango de valores de q^2 . Por otra parte, vemos en la fig. 6.6 que la energía del pión varía entre m_{π} y 1 GeV aproximadamente. En nuestro estudio anterior (sec. 6.2) de la desintegración $B \rightarrow \pi$, era precisamente 1 GeV el máximo valor de E_{π} en los puntos usados como

¹⁶Todas las fórmulas derivadas en la sec. 6.2 se pueden utilizar aquí, con las sustituciones obvias $B \rightarrow D, B^* \rightarrow D^*$ para el proceso $D \rightarrow \pi$, y $B \rightarrow D, \pi \rightarrow K, B^* \rightarrow D_s^*$ para la transición $D^0 \rightarrow K$. Además, tomaremos $m_{D^0} = 1864.6 \text{ MeV}$, $m_{D^*} = 2010 \text{ MeV}$, $m_{D_s^*} = 2112.1 \text{ MeV}$ y $m_{K^-} = 493.68 \text{ MeV}$.

¹⁷El valor de $g_{D^*D\pi} = 18.8 \pm 2.3 \pm 2.0$ referido en [225] y medido en una simulación Monte Carlo de QCD en un espacio-tiempo discretizado está en buen acuerdo con la medida experimental recogida en la ec. (6.34).

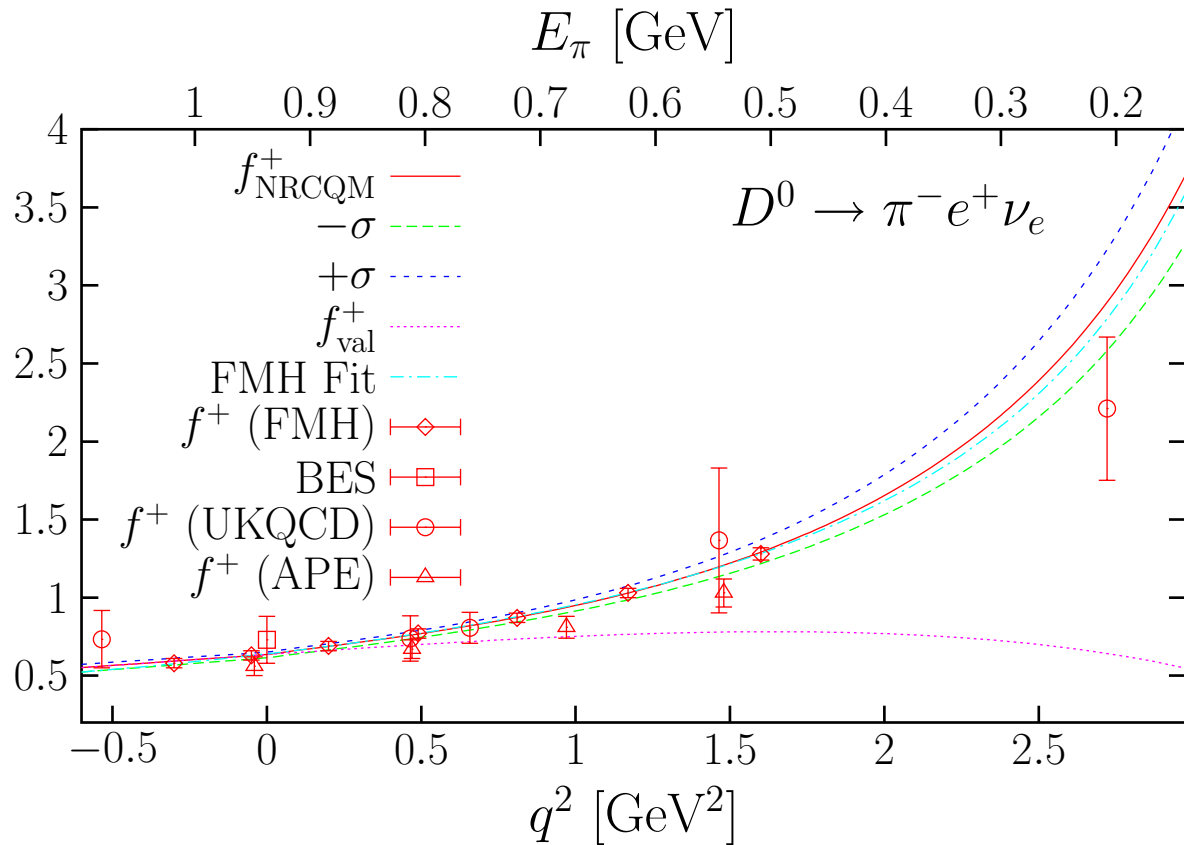


Figura 6.6: Factor de forma $f^+(q^2)$ para la desintegración $D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$. Se muestra la contribución a f^+ de los quarks de valencia y la contribución de los quarks de valencia sumada a la contribución del polo D^* (denotadas como val y NRCQM, respectivamente y ambas evaluadas con el potencial AL1). Los triángulos ([180]) y los círculos ([221]) hacen referencia a los resultados *lattice* QCD en la aproximación *quenched* de las colaboraciones APE y UKQCD, respectivamente. Los diamantes hacen referencia a los resultados de la colaboración Fermilab-MILC-HPQCD ([220], FMH) obtenidos a partir de una simulación de QCD en el retículo con tres sabores dinámicos. También incluimos el ajuste a los puntos FMH (FMH Fit) (ec. (5) de la ref. [220]) y la medida de la colaboración BES [223] del factor de forma f^+ a $q^2 = 0$ (cuadrado). Finalmente, las líneas $\pm\sigma$ indican las bandas de incertidumbre teóricas inducidas por los errores de la ec. (6.36) y por la dependencia de la interacción quark–antiquark del modelo.

datos de entrada en la representación de Omnès con múltiples sustracciones (fig. 6.5). Este hecho refuerza la credibilidad de nuestra determinación de $|V_{ub}|$.

Considerando las incertidumbres teóricas (los errores de la ec. (6.36), y la dispersión de resultados que obtenemos al trabajar con las distintas interacciones quark–antiquark) encontramos

$$\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) = [5.2 \pm 0.1(\text{Exp. } :V_{cd}) \pm 0.5(\text{Teo.})] \times 10^{-12} \text{ MeV} \quad (6.37)$$

de acuerdo con el resultado de la ec. (6.29). También obtenemos

$$f_\pi^+(0) = 0.63 \pm 0.02 \quad (6.38)$$

compatible, considerando los errores experimentales, con los resultados de las colaboraciones BES (0.73 ± 0.15) y Fermilab-MILC-HPQCD (0.64 ± 0.07).

Finalmente, en la figura 6.7 comparamos las predicciones de nuestro modelo, con el ajuste realizado por la colaboración FOCUS de sus datos para el cociente $f^+(q^2)/f^+(0)$ [226].

6.3.2. Transición $D \rightarrow Kl\bar{\nu}_l$

Puesto que no hay espacio de fase suficiente para que ocurra la desintegración $D_s^* \rightarrow DK$, estimaremos el valor de acoplamiento $g_{D_s^*DK}$ a partir del valor experimental de $g_{D^*D\pi}$ (ec. (6.34)). El parámetro \hat{g} de la ec. (6.8) describe el acoplamiento fuerte de mesones que contienen un quark c ó b a los miembros del octete pseudoescalar de bosones de Goldstone. Supondremos simetría $SU(3)$ para esta constante básica de la teoría quiral de perturbaciones para mesones pesados y usaremos [227]

$$g_{D_s^*DK} \approx \frac{2\hat{g}\sqrt{m_D m_{D_s^*}}}{f_K} \approx g_{D^*D\pi} \frac{\sqrt{m_{D_s^*}}}{\sqrt{m_D}} \frac{f_\pi}{f_K} \approx 15.3 \pm 1.6 \quad (6.39)$$

donde hemos usado $f_K/f_\pi \approx 1.2$ [228], y hemos utilizado las masas físicas de los mesones D^* y D_s^* . Por otra parte, según la simulación *lattice* realizada en la ref. [208]

$$f_{D_s^*} = 245 \pm 15 \text{ MeV} \quad (6.40)$$

y así encontramos

$$[g_{D_s^*DK} f_{D_s^*}]_{SU(3)\text{-latt}} = 3.9 \pm 0.5 \text{ GeV} \quad (6.41)$$

Nuestros resultados para esta desintegración se muestran en la fig. 6.8. Consideramos pertinente hacer varios comentarios:

- Nuestros resultados están en razonable acuerdo con los de la colaboración Fermilab-MILC-HPQCD [220], obtenidos a partir de una simulación de QCD

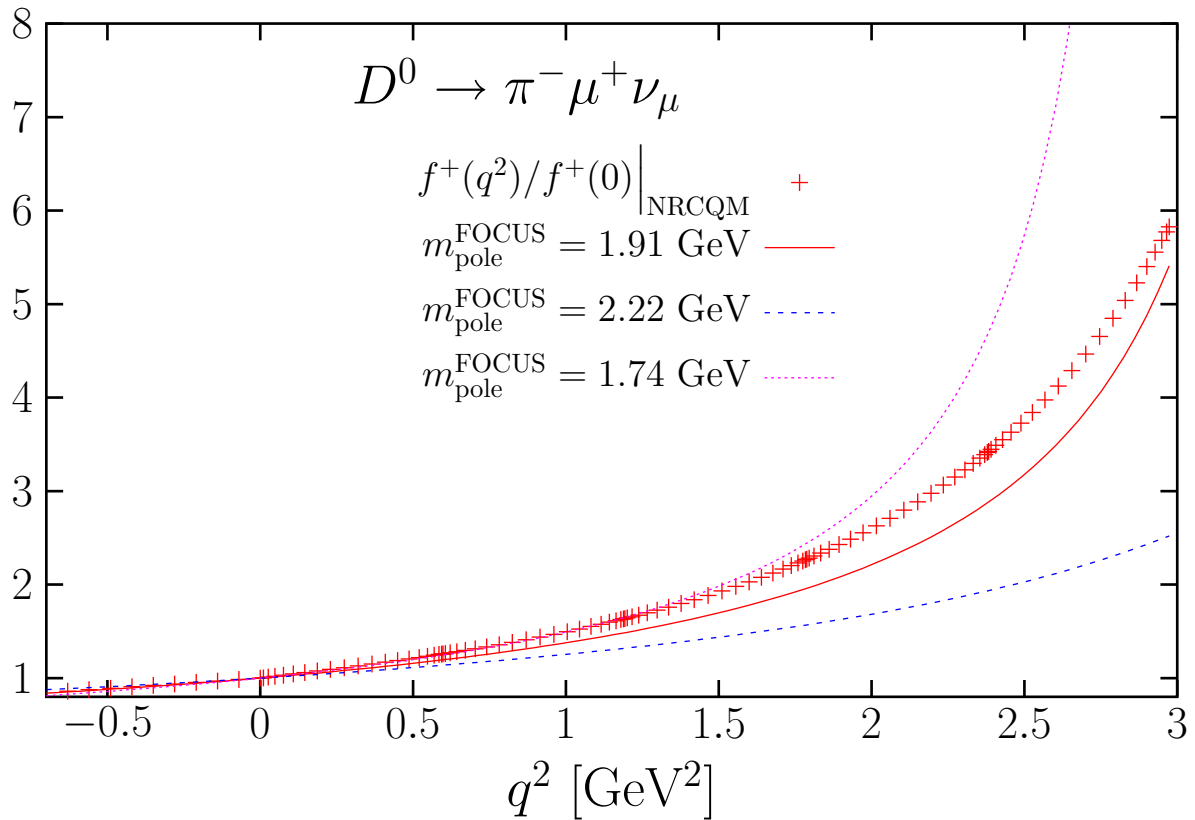


Figura 6.7: Cociente $f^+(q^2)/f^+(0)$ para la desintegración semileptónica $D^0 \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu_\mu$. Las cruces representan las predicciones, evaluadas con la interacción AL1, del modelo quark desarrollado en esta sección. Las líneas representan el ajuste (forma funcional tipo polo, con $m_{\text{pole}} = 1.91^{+0.31}_{-0.17}$ GeV) realizado por la colaboración FOCUS [226] de sus datos para este cociente.

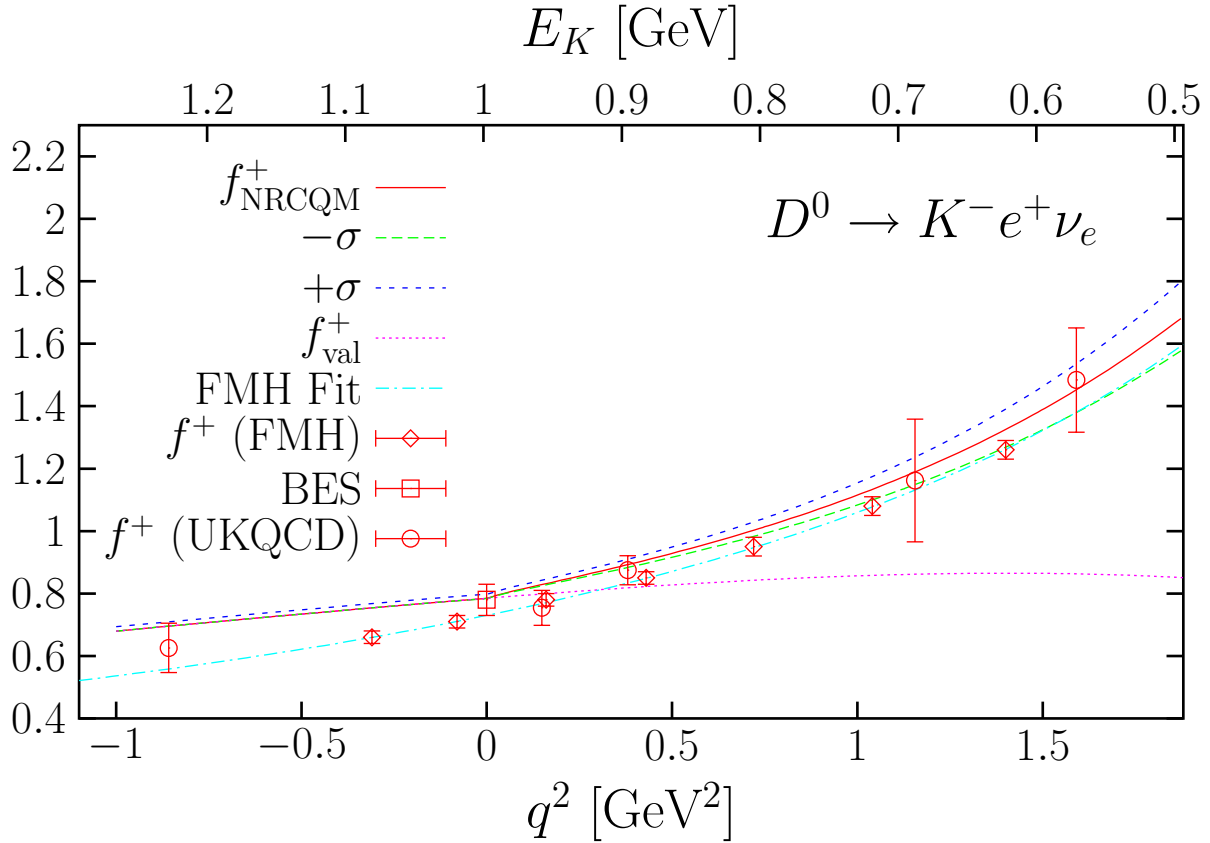


Figura 6.8: Factor de forma $f^+(q^2)$ para la desintegración $D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e$. Se muestra la contribución a f^+ de los quarks de valencia y la contribución de los quarks de valencia sumada a la contribución del polo D_s^* (denotadas como val y NRCQM, respectivamente y ambas evaluada con el potencial AL1). Los círculos ([221]) hacen referencia a los resultados *lattice* QCD en la aproximación *quenched* de la colaboración UKQCD, mientras que los diamantes hacen referencia a los resultados de la colaboración Fermilab-MILC-HPQCD ([220], FMH) obtenidos a partir de una simulación de QCD en el retículo con tres sabores dinámicos. También incluimos el ajuste a los puntos FMH (FMH Fit) (ec. (5) de la ref. [220]) y la medida de la colaboración BES [223] del factor de forma f^+ a $q^2 = 0$ (cuadrado). Finalmente, las líneas $\pm\sigma$ indican las bandas de incertidumbre teóricas inducidas por los errores de la ec. (6.41) y por la dependencia de la interacción quark–antiquark del modelo.

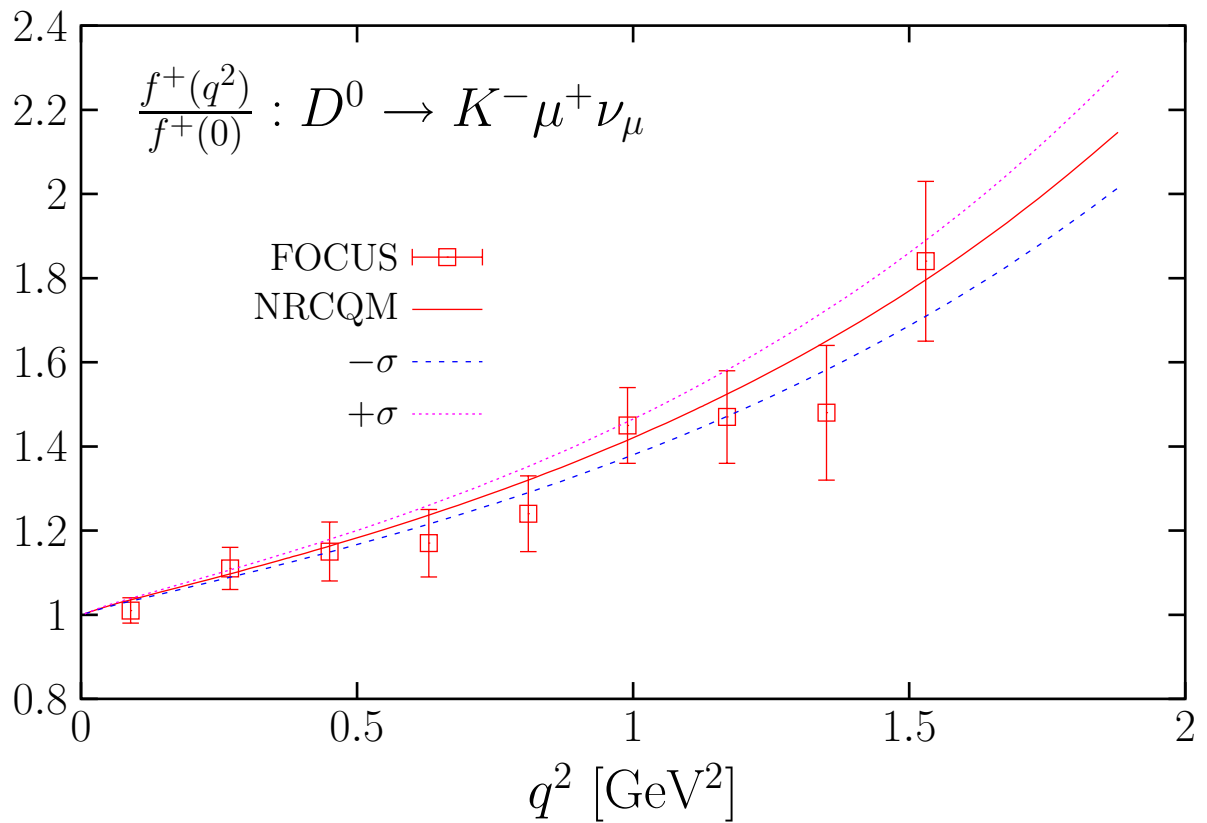


Figura 6.9: Idem a fig. 6.7 para la desintegración $D^0 \rightarrow K^- \mu^+ \nu_\mu$. En este caso, se muestran medidas experimentales directas para distintos valores de q^2 . Las líneas $\pm\sigma$ indican las bandas de incertidumbre teóricas inducidas por los errores de la ec. (6.41) y por la dependencia de la interacción quark–antiquark del modelo.

en el retículo con tres sabores dinámicos, hasta energías del kaón del orden de 1 GeV, cubriendo todo el rango de valores de q^2 físicamente accesibles en la desintegración. Sin embargo, las discrepancias son mayores en este caso que en el de la transición $D \rightarrow \pi$ y los resultados de la simulación *lattice unquenched* de la ref. [220] favorecen valores de $[g_{D_s^* DK} f_{D_s^*}]$ inferiores al valor central utilizado en nuestro modelo (ec. (6.41)). Las incertidumbres teóricas de f^+ en nuestro modelo están dominadas principalmente por los errores de $[g_{D_s^* DK} f_{D_s^*}]$. Sin embargo, hay que señalar que los errores en el valor de $g_{D_s^* DK}$ pueden ser mayores que los indicados en la ec. (6.41), ya que las correcciones a la relación $g_{D_s^* DK} \approx 2\hat{g}\sqrt{m_D m_{D_s^*}}/f_K$, debidas a violaciones de la simetría $SU(3)$ de sabor, pueden ser grandes ($m_s/m_c \gg m_{u,d}/m_c$).

- La contribución de la resonancia vectorial D_s^* es menos importante en este caso que para las desintegraciones $B \rightarrow \pi$ y $D \rightarrow \pi$, puesto que el mesón D_s^* está relativamente lejos de $\sqrt{q_{\text{máx}}^2}$.
- Nuestras predicciones para f^+ y $q^2 < 0$, región cinemática que no contribuye a la integral de espacio fásico, están sujetas a grandes incertidumbres, puesto que en esta región, el momento transferido es mayor que 1 GeV y, al igual que en el caso de la desintegración $B \rightarrow \pi$, los efectos relativistas pueden ser importantes. Se podría, en principio, mejorar estas predicciones utilizando técnicas tipo Omnès como se hizo en la sec. 6.2.

En la figura 6.9 comparamos las predicciones de nuestro modelo quark con medidas experimentales recientes de la colaboración FOCUS para el cociente $f^+(q^2)/f^+(0)$ [226]. Encontramos un acuerdo muy satisfactorio.

Para la anchura integrada, encontramos

$$\Gamma(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e) = (66 \pm 3 \text{ (Teo.)}) \times 10^{-12} \text{ GeV} \quad (6.42)$$

que está en torno a dos desviaciones estándar más alto que el valor de la ec. (6.30).

Por otra parte, nuestro modelo predice

$$\left. \frac{\mathcal{B}(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)}{\mathcal{B}(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e)} \right|_{\text{este trabajo}} = 0.079 \pm 0.008 \quad (6.43)$$

en muy buen acuerdo con el valor medido por la colaboración CLEO (ec. (6.31)). También obtenemos

$$f_K^+(0) = 0.79 \pm 0.01 \quad (6.44)$$

$$\frac{f_\pi^+(0)}{f_K^+(0)} = 0.80 \pm 0.03 \quad (6.45)$$

en razonable acuerdo con las medidas experimentales de las ecs. (6.32) y (6.33).

6.4. Conclusiones

Hemos puesto de manifiesto las limitaciones de un modelo de quarks de valencia para describir las desintegraciones semileptónicas $B \rightarrow \pi$, $D \rightarrow \pi$ y $D \rightarrow K$. Como primera corrección hemos incluido en cada caso, la contribución del polo de la resonancia vectorial pesado–ligero más cercana a $q_{\text{máx}}^2$.

En el caso de la desintegración $B \rightarrow \pi$, la inclusión de la resonancia B^* proporciona una descripción adecuada de f^+ desde $q_{\text{máx}}^2$ hasta alrededor de 18 GeV^2 . Se ha deducido una relación de dispersión tipo Omnès para f^+ con múltiples sustracciones, que disminuyen considerablemente la dependencia de los resultados del comportamiento de las amplitudes de dispersión elástica $B\pi$ a altas energías. Entonces hemos utilizado la representación de Omnès y los resultados obtenidos en esquemas tipo LCSR para $q^2 = 0$, para extender las predicciones de los modelos de quarks desde la región $q^2 > 18 \text{ GeV}^2$ a todo el rango de valores explorados en la desintegración, pudiendo de esta forma evaluar la anchura total. Asimismo se han estimado las incertidumbres teóricas que afectan a todas nuestras predicciones, y en concreto hemos encontrado $|V_{ub}| = 0.0034 \pm 0.0003(\text{Exp.}) \pm 0.0007(\text{Teo.})$, en buen acuerdo con la determinación de la colaboración experimental CLEO [174].

Para el caso de la desintegración semileptónica $D \rightarrow \pi$ nuestros resultados para f^+ , que incluyen la contribución de quarks de valencia y la del polo de la resonancia D^* , están en excelente acuerdo con los de la colaboración Fermilab-MILC-HPQCD [220] obtenidos a partir de una simulación de QCD en el retículo con tres sabores dinámicos. En este caso no ha habido necesidad de aplicar el esquema de Omnès. Encontramos $\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) = [5.2 \pm 0.1(\text{Exp.}) \pm 0.5(\text{Teo.})] \times 10^{-12} \text{ MeV}$ y $f_{\pi}^+(0) = 0.63 \pm 0.02$, que están de acuerdo con los resultados experimentales.

Finalmente, para la desintegración semileptónica $D \rightarrow K$, nuestros resultados, que incluyen la contribución de quarks de valencia y la del polo de la resonancia D_s^* , están de acuerdo en la región física con los resultados *lattice* de las referencias [220] y [221], y también con las recientes medidas de FOCUS [226]. Nuevamente, nuestros resultados para $\mathcal{B}(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)/\mathcal{B}(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e) = 0.079 \pm 0.008$, $f_K^+(0) = 0.79 \pm 0.01$ y $f_{\pi}^+(0)/f_K^+(0) = 0.80 \pm 0.03$ muestran acuerdo con los resultados de las colaboraciones CLEO [222] y BES [223].

Capítulo 7

Conclusiones

En esta Tesis Doctoral se ha desarrollado un método variacional simple para el estudio de las propiedades del estado fundamental de sistemas hadrónicos de tres cuerpos. Hemos incorporado explícitamente ingredientes dinámicos fundamentales y simetrías aproximadas, que facilitan en gran medida el tratamiento de los diversos problemas estudiados. Los principales resultados de este trabajo son:

- Hemos mostrado que no es posible describir las masas experimentales de los hipernúcleos $\Lambda\Lambda$ sin incluir correcciones de medio. La resumación de la serie RPA nos ha permitido deducir un potencial $\Lambda\Lambda$ efectivo, construido a partir de una interacción tipo Bonn-Jülich ajustada a los datos de difusión barión–barión en el espacio libre, que teniendo en cuenta las incertidumbres teóricas y experimentales, describe razonablemente las masas de los hipernúcleos de ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, ${}^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$ y ${}^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{B}$.
- Se ha reanalizado el modelo de la ref. [45] para la desintegración piónica de hipernúcleos Λ . En concreto, se ha mejorado la descripción de ciertos detalles de la estructura nuclear subyacente en el proceso, y también hemos implementado un modelo de capas en el continuo con objeto de describir las contribuciones en las cuales el nucleón, proveniente de la desintegración del hiperón Λ , no es atrapado por el núcleo residual.
- Se ha desarrollado un esquema variacional para estudiar el espectro y algunas propiedades estáticas de bariones que contienen un quark pesado c ó b . Hemos calculado masas y funciones de onda a partir del principio variacional aplicado a un familia de funciones tipo Jastrow, que están diseñadas a partir de las predicciones de HQS al orden dominante. Gracias a HQS las funciones de onda son notablemente más simples y manejables que las obtenidas resolviendo las ecuaciones de Faddeev, y son fáciles de utilizar en otros contextos, al estar parametrizadas de forma sencilla (tablas D.2 y D.3).
- Hemos identificado las deficiencias importantes de los estudios de las desintegraciones semileptónicas de los bariones Λ_b y Ξ_b basados en modelos no relativistas de quarks constituyentes. Hemos aportado soluciones a estos problemas, y

así hemos impuesto relaciones entre los factores de forma deducidas en HQET, y propuesto un nuevo desarrollo del operador de corriente electrodébil, manteniendo todos los órdenes del momento transferido \vec{q} . Este análisis conjunto conduce a una descripción fiable y precisa de los factores de forma en la desintegración semileptónica de los bariones Λ_b y Ξ_b . Hemos determinado la función $\hat{\xi}_{cb}$ (función de Isgur–Wise corregida con terminos de orden $1/m_Q$) que gobierna estos procesos y, determinado el valor del módulo del elemento cb de la matriz CKM. También hemos calculado los parámetros de asimetría que determinan la distribución angular de la desintegración.

- Hemos puesto de manifiesto las limitaciones de un modelo de quarks de valencia para describir las desintegraciones semileptónicas $B \rightarrow \pi$, $D \rightarrow \pi$ y $D \rightarrow K$. Como primera corrección hemos incluido en cada caso, la contribución del polo de la resonancia vectorial pesado–ligero más cercana a q_{\max}^2 . También hemos deducido una relación de dispersión tipo Omnès para f^+ con múltiples sustracciones, que disminuyen considerablemente la dependencia de los resultados del comportamiento de las amplitudes de dispersión elástica $B\pi$ a altas energías. Utilizado esta representación de Omnès hemos calculado el factor de forma f^+ en todo el rango de valores explorados en la desintegración $B \rightarrow \pi$, pudiendo de esta forma evaluar la anchura total. Asimismo se han estimado las incertidumbres teóricas que afectan a todas nuestras predicciones, y en concreto hemos encontrado $|V_{ub}| = 0.0034 \pm 0.0003(\text{Exp.}) \pm 0.0007(\text{Teo.})$, en buen acuerdo con la determinación de la colaboración experimental CLEO [174]. Para el caso de las desintegraciones semileptónicas $D \rightarrow \pi$ y $D \rightarrow K$ nuestros resultados para f^+ , que incluyen la contribución de quarks de valencia y la del polo de la resonancias D^* y D_s^* , están en buen acuerdo con los de la colaboración Fermilab-MILC-HPQCD [220] obtenidos a partir de una simulación de QCD en el retículo con tres sabores dinámicos.

Apéndice A

Sistemas de tres cuerpos: Movimiento del centro de masas y cálculo de valores esperados con funciones de onda variacionales tipo Jastrow

Supongamos un sistema de tres partículas q , q' y Q en interacción, con una dinámica determinada por un Hamiltoniano del tipo

$$H = -\frac{\vec{\nabla}_{x_h}^2}{2m_Q} - \frac{\vec{\nabla}_{x_1}^2}{2m_q} - \frac{\vec{\nabla}_{x_2}^2}{2m_{q'}} + \sum_{i=q,q',Q} m_i + V_{qQ}(\vec{x}_1 - \vec{x}_h, \text{espín}) + V_{q'Q}(\vec{x}_2 - \vec{x}_h, \text{espín}) + V_{qq'}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \text{espín}) \quad (\text{A.1})$$

donde $m_{q,q',Q}$ son las masas de las partículas. Para separar el movimiento libre del Centro de Masas (CM), definimos (fig. A.1 y [20]) los vectores de posición de las partículas q , q' con respecto a Q ($\vec{r}_{i=1,2}$) y el vector de posición relativo de las partículas q y q' ($\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$), además

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_q \vec{x}_1 + m_{q'} \vec{x}_2 + m_Q \vec{x}_h}{m_q + m_{q'} + m_Q} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{r}_i = \vec{x}_i - \vec{x}_h, \quad i = 1, 2$$

De forma inmediata, se tiene $r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta$, siendo θ el ángulo formado por los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . Escrito en estas coordenadas,

$$H = -\frac{\vec{\nabla}_{R_{CM}}^2}{2M_{\text{tot}}} + H_{\text{int}} \quad (\text{A.3})$$

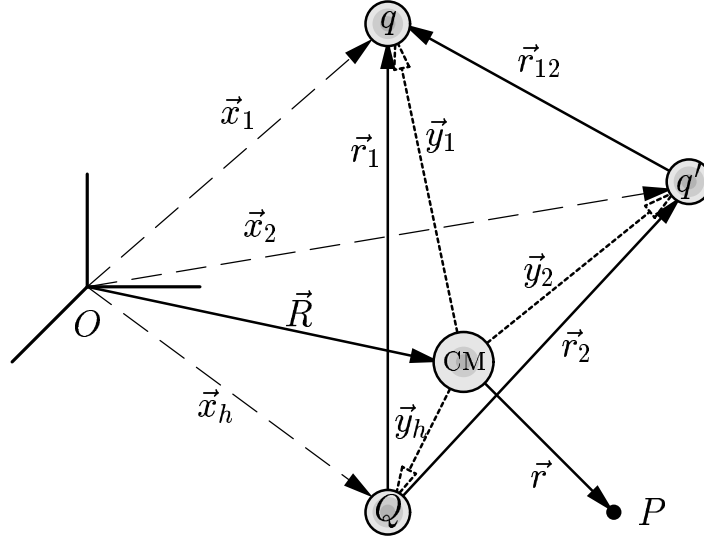


Figura A.1:

con M_{tot} la suma de todas las masas y el hamiltoniano intrínseco (donde se ha eliminado el movimiento libre del CM) toma la forma

$$H_{\text{int}} = h_q + h_{q'} + \sum_{i=q,q',Q} m_i - \frac{\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2}{m_Q} + V_{qq'}(\vec{r}_{12}, \text{espín}) \quad (\text{A.4})$$

donde h_q y $h_{q'}$ son hamiltonianos que involucran a una sola de las partículas q o q' y a Q ,

$$h_i = -\frac{\vec{\nabla}_{r_i}^2}{2\mu_{Qi}} + V_{iQ}(\vec{r}_i, \text{espín}), \quad i = q, q' \quad (\text{A.5})$$

siendo μ_{Qi} la masa reducida de las parejas Qq y Qq' .

En este trabajo hemos considerado siempre situaciones donde las partículas q y q' están acopladas a momento angular orbital relativo 0, es decir se encuentran en onda relativa s . En esta situación, la función de onda intrínseca, además del espín de las tres partículas, depende solo de las distancias relativas r_1 , r_2 y r_{12} .

Hemos utilizado técnicas variacionales para estimar la energía del estado fundamental de H_{int} , utilizando una familia de funciones variacionales tipo Jastrow¹

$$\Phi(1, 2) = \Psi(r_1, r_2, r_{12}) = f(r_{12})\phi_q(r_1)\phi_{q'}(r_2) \quad (\text{A.6})$$

donde $\phi_i(r_i)$ es la función de onda monoparticular del estado fundamental en onda s

¹Explicitamos solamente la dependencia espacial y no tenemos en este punto en cuenta la simetría de la función de onda.

del hamiltoniano² h_i (ec. (A.5))

$$\phi_i(r_i) = R_i(r_i)Y_{00}(\hat{r}_i) = \frac{R_i(r_i)}{\sqrt{4\pi}}, \quad i = q, q' \quad (\text{A.7})$$

y la forma específica de la función $f(r_{12})$ se tomará considerando la forma del potencial de interacción entre las partículas q y q' .

A continuación damos algunas fórmulas útiles para el cálculo del valor esperado de H_{int} , por simplicidad consideramos el caso de dos partículas idénticas, $q = q'$. La generalización al caso $q \neq q'$ es trivial. Es conveniente utilizar el sistema de coordenadas alternativo constituido por el vector de posición relativo de las partículas q, q' y la posición del centro de masas de éstas,

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \\ \vec{r} &\equiv \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{\vec{r}}{2} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{\vec{r}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Los momentos conjugados quedan relacionados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r_{1i}} &= \frac{\partial \psi}{\partial R_j} \frac{\partial R_j}{\partial r_{1i}} + \frac{\partial \psi}{\partial r_j} \frac{\partial r_j}{\partial r_{1i}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial R_i} + \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r_{2i}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial R_i} - \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

de donde

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_1 &\equiv \vec{\nabla}_{r_1} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}_R + \vec{\nabla} \\ \vec{\nabla}_2 &\equiv \vec{\nabla}_{r_2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}_R - \vec{\nabla} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \frac{1}{2} \vec{P} + \vec{p} \\ \vec{p}_2 &= \frac{1}{2} \vec{P} - \vec{p} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{p} &= \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

²En alguna ocasión hemos incluido también aquí algún parámetro variacional y $\phi_i(r_i)$ difiere ligeramente de $\frac{R_i(r_i)}{\sqrt{4\pi}}$, solución monoparticular del hamiltoniano h_i .

Apéndice A

A partir de ec. (A.4), la energía cinética puede ser escrita como suma de un operador que involucra sólo elementos de matriz de un cuerpo y otro operador a dos cuerpos, el término de Hughes-Eckart

$$T = T_{ob} + T_{HE} \quad (\text{A.14})$$

$$T_{ob} = \frac{\vec{p}_1^2}{2\mu_{Qq}} + \frac{\vec{p}_2^2}{2\mu_{Qq}} = \frac{1}{2\mu_{Qq}} \left[\frac{\vec{P}^2}{2} + 2\vec{p}^2 \right]$$

$$T_{HE} = \frac{1}{m_Q} \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \frac{1}{m_Q} \left[\frac{\vec{P}^2}{4} - \vec{p}^2 \right]$$

Se tiene, al derivar las funciones de onda variacionales,

$$\begin{aligned} T_{ob}\Psi &= -\frac{\vec{\nabla}_1^2 + \vec{\nabla}_2^2}{2\mu_{Qq}} \Psi(r_1, r_2, r_{12}) = -\frac{\vec{\nabla}_1^2 + \vec{\nabla}_2^2}{2\mu_{Qq}} f(r_{12}) \Psi_0(r_1, r_2) = \\ &= (T_{ob}f) \Psi_0 + f (T_{ob}\Psi_0) - \frac{1}{\mu_{Qq}} \left[(\vec{\nabla}_1 f) \cdot (\vec{\nabla}_1 \Psi_0) + (\vec{\nabla}_2 f) \cdot (\vec{\nabla}_2 \Psi_0) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_0(r_1, r_2) &= \frac{R(r_1)R(r_2)}{4\pi} \\ \vec{\nabla}_1 f = -\vec{\nabla}_2 f &= \vec{\nabla} f = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Y para el término de Hughes-Eckart resulta

$$\begin{aligned} \langle T_{HE} \rangle &= \int d^3r_1 d^3r_2 \Psi(r_1, r_2, r_{12}) \frac{1}{m_Q} \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \Psi(r_1, r_2, r_{12}) = \\ &= -\frac{1}{m_Q} \int d^3r_1 d^3r_2 \Psi(r_1, r_2, r_{12}) \vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2 \Psi(r_1, r_2, r_{12}) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned} \langle T_{HE} \rangle &= \frac{1}{m_Q} \int d^3r_1 d^3r_2 \left(\vec{\nabla}_1 \Psi(1, 2) \right) \cdot \left(\vec{\nabla}_2 \Psi(1, 2) \right) = \\ &= \frac{1}{m_Q} \int d^3r_1 d^3r_2 \left[\Psi_0 \vec{\nabla}_1 f + f \vec{\nabla}_1 \Psi_0 \right] \cdot \left[\Psi_0 \vec{\nabla}_2 f + f \vec{\nabla}_2 \Psi_0 \right] = \\ &= \frac{1}{m_Q} \int d^3r_1 d^3r_2 \left[\Psi_0 \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla}_1 \Psi_0 \right] \cdot \left[-\Psi_0 \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla}_2 \Psi_0 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

en donde que hemos tenido en cuenta $\vec{\nabla}_1 f = \vec{\nabla} f = -\vec{\nabla}_2 f$ de la ec. (A.11) y las dependencias de las funciones de onda.

$$\begin{aligned} \langle T_{HE} \rangle &= \frac{1}{m_Q} \int d^3r_1 d^3r_2 \left\{ -\left(\frac{df}{dr} \right)^2 \Psi_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + f^2 \frac{d\phi(r_1)}{dr_1} \frac{d\phi(r_2)}{dr_2} \phi(r_2) \phi(r_1) \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} + f \frac{df}{dr} \Psi_0 \frac{\vec{r}}{r} \left[\frac{\partial \Psi_0}{\partial r_2} \frac{\vec{r}_2}{r_2} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_1} \frac{\vec{r}_1}{r_1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

El último término de la ecuación anterior se puede simplificar,

$$\begin{aligned}
 & \int d^3r_1 d^3r_2 f \frac{df}{dr} \Psi_0 \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_2} \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \\
 & = \int d^3r_1 d^3r_2 \Psi(r_1, r_2, r_{12}) \left[\vec{\nabla}_1 f(r_{12}) \right] \cdot \left[\vec{\nabla}_2 \Psi_0(r_1, r_2) \right] = \\
 & \stackrel{1 \leftrightarrow 2}{=} \int d^3r_1 d^3r_2 \Psi(r_1, r_2, r_{12}) \left[\vec{\nabla}_2 f(r_{12}) \right] \cdot \left[\vec{\nabla}_1 \Psi_0(r_1, r_2) \right] \\
 & = - \int d^3r_1 d^3r_2 \Psi(r_2, r_1, r_{12}) \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_1} \frac{\vec{r}_1}{r_1}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Así, el término de Hughes-Eckart queda

$$\begin{aligned}
 & \langle T_{HE} \rangle = \\
 & = \int \frac{d^3r_1 d^3r_2}{m_Q} \left\{ - \left(\frac{df}{dr} \right)^2 \Psi_0^2 + f^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_1} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_2} \cos \theta_{12} - 2f \Psi_0 \frac{df}{dr} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_1} \frac{r_1 - r_2 \cos \theta_{12}}{r} \right\}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Como podemos ver, el término de Hughes-Eckart se anula, si la función de onda se puede factorizar en el producto de dos funciones dependientes de r_1 y r_2 , esto es, si f es constante.

Si para calcular las integrales elegimos como variable de integración r_{12} en lugar de $\cos \theta_{12}$ los límites de integración serán $|r_1 - r_2|$ y $r_1 + r_2$ que se corresponden con los casos $\cos \theta_{12} = +1$ y $\cos \theta_{12} = -1$ respectivamente. De esta forma, la medida para integrandos que dependen sólo de r_1 , r_2 y r_{12} resulta

$$\int d^3r_1 d^3r_2 F(r_1, r_2, r_{12}) = 8\pi^2 \int_0^\infty r_1 dr_1 \int_0^\infty r_2 dr_2 \int_{|r_1 - r_2|}^{|r_1 + r_2|} r_{12} dr_{12} F(r_1, r_2, r_{12}) \tag{A.22}$$

Apéndice B

Autoenergía y propagador de los mesones σ y ω en el medio nuclear

Este apéndice detalla el cálculo de la matriz de autoenergías (ec. (2.43)) y del propagador renormalizado de los mesones σ y ω en el seno de un medio nuclear.

B.1. Autoenergía del mesón ω .

Utilizaremos un acoplamiento ωNN de la forma $\mathcal{L} = g_{\omega NN} \bar{\Psi}_N \gamma_\mu \Psi_N \omega^\mu$, donde se ignora el término tensorial del acoplamiento. Como se ha mencionado, esto está justificado en el límite no relativista que utilizamos. La constante $g_{\omega NN}$ la tomamos del potencial de Bonn para la interacción NN (tabla 2.3). Además, incorporaremos más adelante factores de forma monopolares. El diagrama de autoenergía del mesón ω , (fig. 2.6), izquierda, es debido a la excitación de una partícula-agujero y viene dado por

$$-i\Pi_{\rho\sigma}(q) = -2i^4 g_{\omega NN}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\gamma_\rho(\not{k} + \not{q} + m)\gamma_\sigma(\not{k} + m))\tilde{G}(k+q)\tilde{G}(k) \quad (\text{B.1})$$

con \tilde{G} el propagador del nucleón en el medio nuclear, exceptuando la estructura de Dirac, este propagador es

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} 2\pi i \delta(k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}) n(|\vec{k}|) \quad (\text{B.2})$$

y siendo $n(|\vec{k}|)$ el número de ocupación y m la masa del nucleón. La traza viene dada por

$$\text{Tr}[\gamma_\rho(\not{k} + \not{q} + m)\gamma_\sigma(\not{k} + m)] = 4 [(k+q)_\rho k_\sigma + (k+q)_\sigma k_\rho + g_{\rho\sigma}(m^2 - (k+q)k)] \quad (\text{B.3})$$

Apéndice B

El correspondiente tensor de autoenergía es simétrico y ortogonal a q_ν , incluso en el medio, para ello basta

$$\begin{aligned} q^\rho \text{Tr}(\gamma_\rho(\not{k} + \not{q} + m)\gamma_\sigma(\not{k} + m)) &= & (B.4) \\ &= 4[q(k+q)k_\sigma + (k+q)_\sigma kq + q_\sigma(m^2 - (k+q)k)] \\ &= 4[k_\sigma((k+q)^2 - k^2) + q_\sigma(m^2 - k^2)] \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) &\propto & (B.5) \\ &\propto \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \{k^\nu [(q+k)^2 - m^2] - (k+q)^\nu [k^2 - m^2]\} \tilde{G}(k+q)\tilde{G}(k) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [k^\nu \tilde{G}(k) - (k+q)^\nu \tilde{G}(k+q)] = 0 \end{aligned}$$

Para encontrar la corrección dominante, vamos a despreciar correcciones del orden $\mathcal{O}\left(\frac{\text{momento}}{m_{\text{barión}}}\right)$, consistente con despreciar los términos tensoriales del acoplamiento del meson ω a los nucleones. Además, si la energía transferida, q^0 , es cero, podemos tomar $q^\mu = (0, 0, 0, |q|)$, con \vec{q} en la dirección del eje \hat{z} .

Entonces tenemos

$$0 = q_\mu \Pi^{\mu\nu} = -|\vec{q}| \Pi^{3\nu} \Rightarrow \Pi^{3\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (B.6)$$

por otra parte, y debido a la simetría bajo rotaciones Π^{10} , Π^{20} y Π^{ij} , $i \neq j = 1, 2, 3$ también se anulan trivialmente. Así, las únicas componentes de autoenergía no nulas son $\Pi^{00}(|\vec{q}|)$, $\Pi^{11}(|\vec{q}|)$ y $\Pi^{22}(|\vec{q}|)$. Las dos últimas componentes están suprimidos frente a $\Pi^{00}(|\vec{q}|)$ por factores $\mathcal{O}(k/m_{\text{barión}})$, y en la aproximación que estamos tomando las despreciamos. En la aproximación no relativista en que estamos trabajando

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{2m} G_0(k) \quad (B.7)$$

donde $G_0(k)$ es el propagador no relativista de la ec. (2.37). Así, trivialmente, al orden que estamos considerando,

$$\Pi^{00} = g_{\omega NN}^2(|\vec{q}|) U(q^0 = 0, |\vec{q}|) \quad (B.8)$$

donde hemos incorporado el factor de forma en la definición

$$g_{\omega NN}(|\vec{q}|) = g_{\omega NN} \frac{\Lambda_{\omega NN}^2 - m_\omega^2}{\Lambda_{\omega NN}^2 + \vec{q}^2} \quad (B.9)$$

con los factores de corte dados en la tabla 2.3.

B.2. Autoenergía del mesón σ .

Utilizamos el vértice σNN

$$\mathcal{L} = g_{\sigma NN} \bar{\Psi}_N \Psi_N \sigma \quad (\text{B.10})$$

donde $g_{\sigma NN}$ la tomamos del potencial de Bonn para la interacción NN (tabla 2.3), y como anteriormente hicimos, incorporamos al final el correspondiente factor de forma.

El diagrama de autoenergía del mesón σ debido a una excitación partícula–agujero (fig.2.6, derecha) viene dado por

$$-i\Pi_s(|\vec{q}|) = -2i^4 g_{\sigma NN}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) \tilde{G}(k+q) \text{Tr}[(\not{k} + \not{q} + m)(\not{k} + m)] \quad (\text{B.11})$$

en el límite no relativista en que estamos trabajando

$$\text{Tr}[(\not{k} + \not{q} + m)(\not{k} + m)] = 4m^2 + 4k(k+q) \approx 8m^2 \quad (\text{B.12})$$

y $\tilde{G}(k) = \frac{1}{2m} G_0(k)$, y por tanto

$$\Pi_s(|\vec{q}|) = g_{\sigma NN}^2 (|\vec{q}|) U(q^0 = 0, |\vec{q}|) \quad (\text{B.13})$$

donde de nuevo hemos incorporado factores de forma.

$$g_{\sigma NN} (|\vec{q}|) = g_{\sigma NN} \frac{\Lambda_{\sigma NN}^2 - m_\sigma^2}{\Lambda_{\sigma NN}^2 + \vec{q}^2} \quad (\text{B.14})$$

B.3. Término de mezcla $\sigma-\omega$

Estudiamos la excitación partícula agujero del diagrama central de la fig. 2.6, que genera mezcla entre la propagación de los mesones σ y ω en el medio nuclear.

$$-i\Pi^\mu(q) = -2i^4 g_{\sigma NN} g_{\omega NN} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) \tilde{G}(k+q) \text{Tr}[(\not{k} + \not{q} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m)] \quad (\text{B.15})$$

la traza vale

$$\text{Tr}[(\not{k} + \not{q} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m)] = 4m(2k^\mu + q^\mu) \quad (\text{B.16})$$

Así,

$$q_\mu \Pi^\mu(q) \propto \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) \tilde{G}(k+q) [(k+q)^2 - k^2] \quad (\text{B.17})$$

que se puede reescribir como

$$q^\mu \Pi_\mu(q) \propto \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\tilde{G}(k) - \tilde{G}(k+q)) = 0 \quad (\text{B.18})$$

Si $q^\mu = (0, 0, 0, |\vec{q}|)$ tenemos que $\Pi^3(q) = 0$, y como por invariancia bajo rotaciones, $\Pi^1(q)$ y $\Pi^2(q)$ son trivialmente cero, tenemos que la única componente no nula es la temporal.

$$\Pi^0(|\vec{q}|) = g_{\sigma NN} (|\vec{q}|) g_{\omega NN} (|\vec{q}|) U(q^0 = 0, |\vec{q}|) \quad (\text{B.19})$$

B.4. Matriz de autoenergías

Así tenemos que la matriz de autoenergías, en el espacio de dimensión 5 asociado a los mesones σ y ω toma la forma, en el límite no relativista considerado,

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= \begin{pmatrix} \Pi^{00}(|\vec{q}'|) & 0 & 0 & 0 & \Pi^0(|\vec{q}'|) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^0(|\vec{q}'|) & 0 & 0 & 0 & \Pi_s(|\vec{q}'|) \end{pmatrix} = & \quad (B.20) \\ &= U(q^0 = 0, |\vec{q}'|) \begin{pmatrix} g_{\omega NN}^2(|\vec{q}'|) & 0 & 0 & 0 & g_{\omega NN}(|\vec{q}'|)g_{\sigma NN}(|\vec{q}'|) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{\omega NN}(|\vec{q}'|)g_{\sigma NN}(|\vec{q}'|) & 0 & 0 & 0 & g_{\sigma NN}^2(|\vec{q}'|) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otra parte, si $q^\mu = (0, 0, 0, |\vec{q}'|)$, la matriz de propagadores toma la forma

$$\mathcal{D}^0 = \begin{pmatrix} -D_\omega^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_\omega^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_\omega^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_\sigma^0 \end{pmatrix} \quad (B.21)$$

Llevando esto a la ecuación de Dyson (2.41), tenemos que

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^0 + \mathcal{D}^0 \Pi \mathcal{D} = ((1 - \mathcal{D}^0 \Pi))^{-1} \mathcal{D}^0 \quad (B.22)$$

Es necesario asegurarse que la matriz

$$A = (1 - \mathcal{D}^0 \Pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + D_\omega^0 \Pi^{00} & 0 & 0 & 0 & D_\omega^0 \Pi^0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D_\sigma^0 \Pi^0 & 0 & 0 & 0 & 1 - D_\sigma^0 \Pi_\sigma \end{pmatrix} \quad (B.23)$$

es invertible. Su determinante viene dado por

$$\Delta \equiv \det A = 1 + U(q^0 = 0, |\vec{q}'|)(D_\omega^0 g_{\omega NN}^2(|\vec{q}'|) - D_\sigma^0 g_{\sigma NN}^2(|\vec{q}'|)) \quad (B.24)$$

que es cero sólo si $D_\omega^0 g_{\omega NN}^2(|\vec{q}'|) - D_\sigma^0 g_{\sigma NN}^2(|\vec{q}'|) = -1/U$.

El inverso de esta matriz es

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 - \mathcal{D}_\sigma^0 \Pi_s & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{D}_\omega^0 \Pi^0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 \\ \mathcal{D}_\sigma^0 \Pi^0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \mathcal{D}_\omega^0 \Pi^{00} \end{pmatrix} \quad (B.25)$$

Llevando esto a la ecuación de Dyson

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= (1 - \mathcal{D}^0 \Pi)^{-1} \mathcal{D}^0 = & (B.26) \\
 &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\mathcal{D}_\omega^0 (1 - \mathcal{D}_\sigma^0 \Pi_s) & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{D}_\sigma^0 \mathcal{D}_\omega^0 \Pi^0 \\ 0 & \Delta D_\omega^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta D_\omega^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}_\omega^0 \mathcal{D}_\sigma^0 \Pi^0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{D}_\sigma^0 (1 + \mathcal{D}_\omega^0 \Pi^{00}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Apéndice C

Desconvolución de la densidad de centros

Sean $\rho_e(\vec{r})$ y $\rho_c(\vec{r})$ las densidades de carga, que se determinan experimentalmente, y de centros de protones respectivamente. Ambas densidades están relacionadas gracias a que

$$\rho_e(\vec{r}) = \int d^3r_c \rho_c(\vec{r}_c) \rho_p(\vec{r} - \vec{r}_c) \quad (\text{C.1})$$

donde $\rho_p(\vec{r})$ es la densidad de carga del protón, la cual se asume que es de tipo gaussiano,

$$\rho_p(\vec{r}) = \rho_{0p} e^{-\left(\frac{r}{a_p}\right)^2} \quad (\text{C.2})$$

con $a_p^2 = \frac{2}{3} \langle r_p^2 \rangle = 0.46 \text{ fm}^2$.

De la ec. (C.1) se deduce trivialmente

$$F_e(\vec{q}) = F_p(\vec{q}) F_c(\vec{q}) \quad (\text{C.3})$$

donde los factores de forma $F_i(\vec{q})$ se definen de la forma usual

$$F_i(\vec{q}) = \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho_i(\vec{r}) \quad (\text{C.4})$$

Consideremos primero densidades de tipo oscilador armónico.

$$\rho_e(\vec{r}) = \rho_{0e} \left(1 + \alpha \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (\text{C.5})$$

Asumiendo también para la densidad de centros una forma tipo oscilador armónico, pero con parámetros α' y a' , la igualdad de la ec. (C.3) se transforma en

$$\left(1 - \frac{\alpha}{4} \frac{a^2 q^2}{1 + \frac{3\alpha}{2}} \right) e^{-\frac{a^2 q^2}{4}} = \left(1 - \frac{\alpha'}{4} \frac{a'^2 q^2}{1 + \frac{3\alpha'}{2}} \right) e^{-\frac{a'^2 q^2}{4}} e^{-\frac{a_p^2 q^2}{4}} \quad (\text{C.6})$$

Apéndice C

Y de aquí tenemos que

$$a^2 = a'^2 + a_p^2 \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\alpha a^2}{1 + \frac{3\alpha}{2}} = \frac{\alpha' a'^2}{1 + \frac{3\alpha'}{2}} = \frac{\alpha' (a^2 - a_p^2)}{1 + \frac{3\alpha}{2}} \quad (\text{C.8})$$

Definiendo

$$x = \frac{\alpha a^2}{1 + \frac{3\alpha}{2}} \frac{1}{a'^2} \quad (\text{C.9})$$

entonces

$$\frac{\alpha'}{1 + \frac{3\alpha'}{2}} = x \quad (\text{C.10})$$

y despejando

$$\alpha' = \frac{2x}{2 - 3x} \quad (\text{C.11})$$

Estas expresiones fijan totalmente los parámetros α' y a' de la densidad de centros.

Consideremos ahora el caso de la densidad de Fermi de dos parámetros para la densidad de carga

$$\rho_e(\vec{r}) = \frac{\rho_{0e}}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (\text{C.12})$$

y tomando la misma forma para la densidad de centros

$$\rho_c(\vec{r}) = \frac{\rho_{0c}}{1 + e^{\frac{r-R'}{a'}}} \quad (\text{C.13})$$

La ec. (C.3) nos da el factor de forma asociado a la densidad de centros en términos de los factores de forma asociados a las densidades de carga y del protón. Una densidad de Fermi no permite encontrar expresiones analíticas exactas, aunque sí aproximadas [40]. De la ec. (C.3) se deduce trivialmente

$$\langle r^2 \rangle_c + \langle r^2 \rangle_p = \langle r^2 \rangle_e \quad (\text{C.14})$$

por otra parte, si asumimos $\rho_{0e} = \rho_{0c}$, lo cual es razonable en tanto en cuanto el tamaño del protón es pequeño comparado con el del núcleo, tenemos dos ecuaciones que permiten, en principio escribir los parámetros de las densidades de centros (a' , R') en términos de los parámetros (a , R) de las densidades de carga. Usando, además, las expresiones aproximadas para densidades tipo Fermi

$$\langle r^2 \rangle \approx \frac{3}{5}R^2 + \frac{7}{5}\pi^2 a^2 \quad (\text{C.15})$$

$$1 = \int d^3r \rho(\vec{r}) \approx \frac{4}{3}\pi \rho_0 (R^3 + \pi^2 a^2 R) \quad (\text{C.16})$$

obtenemos finalmente las expresiones analíticas

$$R' \approx R \left(1 + \frac{5 \langle r^2 \rangle_p}{15R^2 + 7\pi^2 a^2} \right) \quad (\text{C.17})$$

$$a' \approx \left(\frac{R^3 - R'^3 + \pi^2 a^2 R'}{\pi^2 R'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.18})$$

Apéndice D

Parámetros de las funciones de onda variacionales de bariones pesados

Todos los resultados variacionales del capítulo 4 se han obtenido con funciones de correlación ligero-ligero, F^{BQ} , construidas como combinación lineal de cuatro gaussianas (véase ec. (4.25)). En la tabla D.1 y para el caso del barión Λ_c con una interacción entre quarks tipo AL1, mostramos como dependen la masa y el valor de la función de onda en el origen del número de gaussianas utilizadas para construir la función de correlación. Finalmente en las tablas D.2 y D.3 recopilamos los parámetros variacionales (los parámetros a son adimensionales, los d se dan en fm y los b en fm^{-1}) de las funciones de onda (ecs. (4.24) y (4.25)) de los bariones encantados y con belleza, para todas las interacciones quark-quark examinadas en el capítulo 4. Además para los potenciales BD y AL1 χ , el parámetro c (ec. (4.26)) esta fijado al valor 200 fm^{-1} para los bariones Σ and Σ^* . En el resto de casos, se hace tender c a $+\infty$. El conjunto de parámetros se corresponden al orden Λ , Σ Σ^* , Ξ Ξ' Ξ^* Ω y Ω^* .

Número de gaussianas	Λ_c Mass [MeV]	$\eta_{ll}^{\Lambda_c}(0)$ [fm^{-3}]	$\eta_{cl}^{\Lambda_c}(0)$ [fm^{-3}]
1	2302.1	16.4	5.2
2	2295.0	17.0	5.7
3	2294.8	18.6	6.2
4	2294.6	18.6	6.5
FAD	2296	14.8	7.4

Cuadro D.1: Masa del barión Λ_c y valores de la función de onda en el origen (véase ec. (4.36)) en función del número de gaussianas utilizadas para construir la función de correlación ligero-ligero. Todos los resultados se han obtenido con el potencial AL1 y por comparación también incluimos los resultados Faddeev (FAD) de la Ref. [8].

Apéndice D

	Bariones con quark c												
	b_1	d_1	a_2	b_2	d_2	a_3	b_3	d_3	a_4	b_4	d_4	α_q	$\alpha_{q'}$
AL1	0.51	0.76	0.67	0.73	0.73	0.56	0.85	0.76	0.77	1.12	0.84	0.19	0.19
AL1 χ	0.57	1.51	0.68	1.11	1.02	1.31	1.49	1.10	0.82	1.27	0.95	0.39	0.39
AL2	1.07	0.37	0.62	0.65	0.93	0.51	0.99	0.49	1.13	0.45	0.94	0.18	0.18
AP1	0.56	0.64	0.69	0.53	0.62	0.64	0.79	0.68	0.92	0.92	0.76	0.13	0.13
AP2	0.72	0.77	0.79	0.72	0.50	0.78	0.46	0.65	0.72	0.81	0.77	0.20	0.20
BD	1.08	0.86	0.34	0.45	0.61	0.79	0.56	0.83	1.28	0.87	0.74	0.22	0.22
AL1	0.55	-0.12	-0.61	0.62	0.01	0.52	0.63	0.24	0.77	0.50	0.27	0.06	0.06
AL1 χ	0.46	0.44	0.63	0.51	0.50	0.54	0.50	0.45	0.61	0.54	0.62	0.15	0.15
AL2	0.71	-0.12	1.00	0.56	0.50	0.51	0.44	0.26	1.17	0.43	0.68	0.13	0.13
AP1	0.43	0.42	0.75	0.51	0.39	0.53	0.38	0.37	0.62	0.49	0.48	0.10	0.10
AP2	0.42	0.43	0.80	0.42	0.47	0.54	0.52	0.38	0.68	0.55	0.70	0.07	0.07
BD	0.58	0.90	0.99	0.48	0.67	0.76	0.33	0.71	1.08	0.54	0.65	0.08	0.08
AL1	0.49	0.46	0.61	0.50	0.45	0.63	0.53	0.40	0.69	0.43	0.52	0.33	0.33
AL1 χ	0.46	0.45	0.62	0.45	0.46	0.69	0.54	0.38	0.72	0.43	0.57	0.37	0.37
AL2	0.67	0.44	0.92	0.49	0.70	0.86	0.53	0.05	0.90	0.44	0.48	0.41	0.41
AP1	0.42	0.43	0.64	0.48	0.42	0.64	0.46	0.38	0.69	0.49	0.53	0.32	0.32
AP2	0.45	0.51	0.63	0.50	0.47	0.64	0.51	0.39	0.62	0.41	0.53	0.32	0.32
BD	0.75	0.87	0.93	0.45	0.68	0.75	0.51	0.58	1.22	0.41	0.65	0.27	0.27
AL1	0.65	0.86	0.35	0.73	0.56	0.69	0.50	0.81	0.68	1.06	0.62	0.34	0.15
AL2	0.78	0.49	0.82	0.52	0.47	1.06	0.69	0.73	1.65	1.12	0.62	0.37	0.25
AP1	1.10	0.45	0.09	0.63	0.47	0.55	0.74	0.51	0.65	0.55	0.28	0.28	0.25
AP2	0.92	0.71	0.01	0.69	0.49	0.51	0.87	0.37	0.54	0.48	0.43	0.32	0.20
BD	0.82	0.82	0.45	0.33	0.57	0.77	0.60	0.75	2.10	0.86	0.55	0.23	0.18
AL1	0.53	0.51	0.64	0.58	0.54	0.60	0.60	0.43	0.71	0.51	0.59	0.24	0.22
AL2	0.61	0.46	1.00	0.67	0.47	0.77	0.50	0.39	0.99	0.48	0.41	0.16	0.04
AP1	0.50	0.51	0.66	0.57	0.52	0.60	0.60	0.43	0.69	0.50	0.56	0.23	0.20
AP2	0.61	0.45	0.44	0.47	0.39	0.74	0.42	0.49	0.69	0.57	0.52	0.08	0.08
BD	0.58	0.78	0.75	0.53	0.61	1.01	0.52	0.62	1.35	0.59	0.61	0.12	0.11
AL1	0.55	0.47	0.60	0.55	0.47	0.59	0.54	0.46	0.66	0.53	0.57	0.28	0.28
AL2	0.53	0.18	0.71	0.82	0.31	0.71	0.59	0.37	1.36	0.69	0.16	0.54	0.40
AP1	0.49	0.47	0.57	0.53	0.44	0.62	0.54	0.38	0.64	0.48	0.50	0.35	0.36
AP2	0.74	0.38	0.21	0.57	0.19	0.68	0.57	0.21	0.64	0.47	0.20	0.44	0.50
BD	0.61	0.83	0.69	0.49	0.69	1.09	0.64	0.74	1.48	0.52	0.67	0.39	0.36
AL1	0.66	0.43	0.10	0.59	0.58	0.92	0.56	0.55	0.75	0.71	0.65	0.17	0.17
AL2	0.71	0.46	0.86	0.75	0.43	0.80	0.55	0.42	0.83	0.69	0.50	0.13	0.13
AP1	0.78	0.14	0.97	0.50	0.97	-0.04	0.57	0.80	0.83	1.16	1.33	0.19	0.19
AP2	0.63	0.50	0.58	0.60	0.60	0.52	0.67	0.53	0.76	0.65	0.64	0.19	0.19
BD	1.02	0.20	0.75	0.51	0.22	0.68	0.58	0.33	1.37	0.90	0.21	0.04	0.04
AL1	0.74	0.49	0.46	0.59	0.49	0.63	0.66	0.38	0.74	0.52	0.45	0.44	0.44
AL2	0.86	0.17	0.43	0.50	0.47	0.38	0.48	0.53	0.70	0.67	0.62	0.50	0.50
AP1	0.70	0.61	0.40	0.61	0.54	0.75	0.60	0.49	0.72	0.54	0.60	0.46	0.46
AP2	0.67	0.49	0.25	0.77	0.61	0.55	0.74	0.45	0.69	0.56	0.43	0.47	0.47
BD	0.46	1.10	0.64	0.61	0.77	1.15	0.73	0.75	1.32	0.63	0.77	0.34	0.34

Cuadro D.2: Parámetros variacionales en el sector *encantado*.

	Bariones con quark b												α_q	$\alpha_{q'}$
	b_1	d_1	a_2	b_2	d_2	a_3	b_3	d_3	a_4	b_4	d_4			
AL1	0.60	0.54	0.58	0.71	0.76	0.46	0.75	0.72	0.78	0.84	0.77	0.00	0.00	
AL1 χ	0.48	2.67	1.09	1.67	1.40	1.74	1.54	1.04	0.66	1.30	1.59	0.09	0.09	
AL2	0.45	0.29	1.21	0.63	0.91	0.96	0.97	0.62	1.73	0.88	0.63	-0.08	-0.08	
AP1	0.56	0.67	0.72	0.53	0.65	0.66	0.80	0.70	0.94	0.91	0.78	0.09	0.09	
AP2	0.96	0.68	0.41	0.70	0.47	0.55	0.72	0.42	0.55	0.43	0.58	0.04	0.04	
BD	0.78	0.95	0.99	0.43	0.76	1.22	0.73	0.79	1.24	0.77	0.82	0.04	0.04	
AL1	0.38	0.18	1.17	0.48	0.44	0.69	0.58	0.33	0.86	0.59	0.74	0.08	0.08	
AL1 χ	0.49	0.44	0.68	0.47	0.50	0.59	0.54	0.38	0.65	0.46	0.67	0.21	0.21	
AL2	0.65	0.06	0.95	0.56	0.71	0.29	0.67	0.19	1.31	0.22	0.58	-0.08	-0.08	
AP1	0.43	0.39	1.09	0.51	0.44	0.99	0.39	0.41	1.09	0.54	0.55	0.09	0.09	
AP2	0.40	0.46	0.71	0.45	0.41	0.71	0.50	0.29	0.75	0.37	0.53	0.02	0.02	
BD	0.64	0.50	1.07	0.58	0.40	1.71	0.47	0.35	1.77	0.37	0.54	-0.05	-0.05	
AL1	0.44	0.45	0.63	0.52	0.48	0.58	0.49	0.41	0.68	0.54	0.57	0.23	0.23	
AL1 χ	0.39	0.51	0.69	0.55	0.40	0.60	0.46	0.41	0.60	0.52	0.45	0.23	0.23	
AL2	0.56	0.12	0.98	0.45	0.72	0.48	0.55	0.31	1.14	0.32	0.61	0.04	0.04	
AP1	0.39	0.51	0.70	0.55	0.40	0.59	0.46	0.41	0.60	0.52	0.45	0.22	0.22	
AP2	0.38	0.50	0.70	0.54	0.39	0.60	0.45	0.41	0.59	0.52	0.45	0.23	0.23	
BD	0.71	0.74	0.87	0.31	0.62	0.83	0.40	0.60	1.30	0.44	0.65	-0.014	-0.014	
AL1	0.62	0.61	0.60	0.75	0.72	0.54	0.82	0.62	0.76	0.71	0.70	0.10	0.06	
AL2	0.87	0.40	0.97	0.63	0.58	0.69	0.48	0.56	0.93	0.97	0.73	-0.03	-0.03	
AP1	0.92	0.63	0.47	0.64	0.50	0.71	0.74	0.40	0.68	0.46	0.54	0.06	0.04	
AP2	0.95	0.74	0.50	0.68	0.48	0.81	0.71	0.40	0.59	0.43	0.56	0.00	-0.05	
BD	0.84	0.85	1.13	0.52	0.86	0.18	0.73	1.06	1.10	1.46	1.12	0.06	0.01	
AL1	0.50	0.51	0.66	0.57	0.52	0.60	0.60	0.43	0.69	0.50	0.56	0.23	0.20	
AL2	0.69	0.21	1.12	0.53	0.42	0.58	0.41	0.21	1.29	0.48	0.68	-0.03	-0.03	
AP1	0.49	0.51	0.67	0.54	0.52	0.63	0.57	0.46	0.69	0.51	0.59	0.23	0.20	
AP2	0.49	0.48	0.57	0.52	0.43	0.64	0.53	0.38	0.64	0.47	0.49	-0.04	-0.03	
BD	0.74	0.92	0.90	0.33	0.62	0.89	0.50	0.63	1.26	0.49	0.72	0.02	-0.05	
AL1	0.50	0.51	0.66	0.57	0.52	0.60	0.60	0.51	0.69	0.50	0.56	0.22	0.20	
AL2	0.85	0.06	1.00	0.59	0.50	0.48	0.44	0.26	0.87	0.33	0.67	0.11	0.11	
AP1	0.49	0.52	0.68	0.51	0.51	0.65	0.53	0.48	0.70	0.52	0.62	0.23	0.20	
AP2	0.57	0.48	0.62	0.40	0.39	0.80	0.44	0.40	0.74	0.48	0.58	0.02	0.00	
BD	0.77	0.86	0.90	0.33	0.63	0.86	0.46	0.63	1.28	0.50	0.71	-0.03	-0.07	
AL1	0.60	0.45	0.58	0.61	0.58	0.49	0.55	0.50	0.72	0.66	0.66	0.13	0.13	
AL2	0.62	0.31	0.67	0.65	0.56	0.50	0.59	0.32	0.88	0.65	0.47	0.06	0.06	
AP1	0.72	0.26	0.69	0.66	0.32	0.51	0.62	0.22	0.75	0.57	0.26	0.08	0.08	
AP2	0.63	0.45	0.78	0.62	0.58	0.49	0.55	0.50	0.72	0.66	0.66	0.13	0.13	
BD	0.82	0.85	0.89	0.43	0.73	0.73	0.54	0.69	1.29	0.56	0.74	-0.07	-0.07	
AL1	0.58	0.48	0.60	0.59	0.56	0.55	0.57	0.49	0.71	0.61	0.63	0.18	0.18	
AL2	0.60	0.44	0.62	0.62	0.57	0.53	0.60	0.42	0.77	0.62	0.56	0.13	0.13	
AP1	0.57	0.49	0.66	0.50	0.50	0.57	0.57	0.48	0.73	0.59	0.62	0.20	0.20	
AP2	0.58	0.48	0.60	0.59	0.56	0.55	0.57	0.49	0.71	0.61	0.63	0.18	0.18	
BD	0.79	0.83	0.84	0.39	0.69	0.75	0.51	0.67	1.32	0.55	0.72	-0.07	-0.07	

Cuadro D.3: Parámetros variacionales en el sector del quark b .

Apéndice E

Cálculo de las integrales \mathcal{I} y \mathcal{K}

Utilizando un desarrollo en ondas parciales de las funciones de onda de los bariones Λ_b , Λ_c , Ξ_b y Ξ_c ,

$$\begin{aligned}\Psi_u^{\Lambda Q}(r_1, r_2, r_{12}) &= \sum_{l=0}^{\infty} f_l^Q(r_1, r_2) P_l(\mu) \\ \Psi_{ls}^{\Xi Q}(r_1, r_2, r_{12}) &= \sum_{l=0}^{\infty} g_l^Q(r_1, r_2) P_l(\mu)\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

donde $Q = c, b$, μ es el coseno del ángulo formado por los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , $r_{12} = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \mu)^{1/2}$ y P_l el polinomio de Legendre de grado l . Por tanto, las funciones de onda radiales $f_l^Q(r_1, r_2)$ y $g_l^Q(r_1, r_2)$ se obtienen a partir de las correspondientes funciones de onda

$$\begin{aligned}f_l^Q(r_1, r_2) &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu P_l(\mu) \Psi_u^{\Lambda Q}(r_1, r_2, r_{12}) \\ g_l^Q(r_1, r_2) &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu P_l(\mu) \Psi_{ls}^{\Xi Q}(r_1, r_2, r_{12})\end{aligned}\quad (\text{E.2})$$

donde r_{12} depende de r_1 , r_2 y de μ . En términos de estas funciones, el factor \mathcal{I} resulta ser

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\Lambda}^{cb}(w) &= (4\pi)^2 \sum_l \sum_{l'} \sum_{l''} (-1)^{l''} (ll'l''|000)^2 \\ &\times \int_0^{\infty} dr_1 r_1^2 j_{l''}(x_1) \int_0^{\infty} dr_2 r_2^2 j_{l''}(x_2) [f_l^c(r_1, r_2)]^* f_{l'}^b(r_1, r_2)\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

donde los quarks ligeros tienen sabor u ó d , y hemos usado las variables x_i definidas por

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{m_q |\vec{q}|}{M_{\text{tot}}^c} r_1 \\ x_2 &= \frac{m_{q'} |\vec{q}'|}{M_{\text{tot}}^c} r_2\end{aligned}\quad (\text{E.4})$$

Apéndice E

y $M_{\text{tot}}^c = m_c + m_d + m_u$ con $m_u = m_d$. Los factores $(l'l''|000)$ son coeficientes de Clebsh–Gordan y j_l son las funciones esféricas de Bessel.

Por otra parte, el factor \mathcal{K} se puede calcular como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\Lambda}^{cb}(w) = & \frac{16\pi^2}{\sqrt{3}|\vec{q}|} \sum_l \sum_{l'} \sum_{l''} \sum_{l'''} \sum_{L=l'+1, l''-1} (-1)^{l+L} i^{l''+l'''+1} \{(2L+1) \\ & (2l''+1)(2l''' + 1)\}^{1/2} (lLl''|000)(l'l'''|000)(l'''l''1|000)W(l'''l1L; l'l'') \\ & \int_0^\infty dr_1 r_1^2 \int_0^\infty dr_2 r_2^2 \left\{ j_{l''}(x_1)j_{l'''}(x_2) [f_l^c(r_1, r_2)]^* \Omega_L [f_{l'}^b(r_1, r_2)] \right. \\ & \left. + j_{l''}(\frac{m_{q'}}{m_q}x_1)j_{l'''}(\frac{m_q}{m_{q'}}x_2) [f_l^c(r_1, r_2)]^* \Omega_L [f_{l'}^b(r_1, r_2)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

donde $W(\dots)$ representa los coeficientes de Racah y los operadores diferenciales Ω_L están definidos por

$$\begin{aligned} \Omega_{L=l'+1} &= - \left(\frac{l'+1}{2l'+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{l'}{r_1} \right] \\ \Omega_{L=l''-1} &= \left(\frac{l''}{2l''+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{l''+1}{r_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

El factor \mathcal{K} es finito cuando $|\vec{q}| \rightarrow 0$, puesto que los órdenes (l'' y l''') de las dos funciones de Bessel no pueden ser ambos cero, debido al coeficiente de Clebsh–Gordan $(l'''l''1|000)$.

Para el estudio de la desintegración del barión Ξ_b , los factores \mathcal{I}_{Ξ}^{bc} y \mathcal{K}_{Ξ}^{bc} se obtienen a partir de las ecs. (E.4) y (E.6), tomando $m_{q'} = m_s$ y reemplazando las funciones de tipo f por las de tipo g .

En el límite $m_b > m_c \gg m_q, m_{q'}$ y en las proximidades de $w = 1$, los factores bariónicos \mathcal{I} y \mathcal{K} se comportan como $\mathcal{O}(1)$ y $\mathcal{O}(m_q/m_c, m_{q'}/m_c)$ respectivamente. En el caso de la integral \mathcal{I} , la contribución dominante corresponde a $l'' = 0$, mientras que para \mathcal{K} la contribución $l'' = l''' = 0$ está prohibida por el coeficiente de Clebsh–Gordan $(l''', l'', 1|000)$. Así pues, en este caso la contribución dominante vendrá dada por $l'' = 0$, $l''' = 1$ y $l' = 1$, $l'' = 1$, $l''' = 0$.

Apéndice F

Relación de dispersión de Omnès con múltiples sustracciones

Supongamos que el factor de forma¹ $f^+(s)$ es una función analítica en todo el plano complejo (de acuerdo con la hipótesis de Mandelstam de máxima analiticidad [214]), excepto por el corte $L \equiv [s_{th} = (m_B + m_\pi)^2, +\infty[$ a lo largo del eje real positivo, tal y como exige el teorema de Watson [215]. Para valores reales de $s < s_{th}$, el factor de forma es una función real, lo que implica que los valores del factor de forma por encima y debajo del corte son el complejo conjugado el uno del otro, esto es, $f^+(s + i\epsilon) = f^+(s - i\epsilon)^*$. Así pues, para $s > s_{th}$, el factor de forma f^+ presenta una discontinuidad al cruzar el corte, que está relacionada con su parte imaginaria, $f^+(s + i\epsilon) - f^+(s - i\epsilon) = 2i \mathcal{I}m f^+(s + i\epsilon)$. El teorema de Cauchy garantiza que $f^+(s)$ se puede escribir en términos de una integral dispersiva a lo largo del corte, así realizando una sustracción en $s_0 < s_{th}$ tenemos

$$f^+(s) = f^+(s_0) + \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_{th}}^{+\infty} \frac{dx}{x - s_0} \frac{\mathcal{I}m f^+(x)}{x - s}, \quad s \notin L, \quad s_0 < s_{th} \quad (\text{F.1})$$

Dependiendo del comportamiento asintótico de $f^+(s)$ en los extremos del corte, pueden ser necesarias más sustracciones para hacer la integral convergente. Supongamos de momento que una sustracción es suficiente. La solución de Omnès para la integral anterior es [200]

$$O(s) = f^+(s_0) \exp \left\{ \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_{th}}^{+\infty} \frac{dx}{x - s_0} \frac{\delta(x)}{x - s} \right\}, \quad s \notin L, \quad s_0 < s_{th} \quad (\text{F.2})$$

siendo $\delta(s)$ el desfasaje elástico² $\pi B \rightarrow \pi B$ en el canal $J^P = 1^-$ e isospín $I = 1/2$ (véanse las ecuaciones (6.17) y (6.18)). $O(s)$ proporciona el factor de forma físico, puesto que

¹Los resultados de este apéndice son generalizables a cualquier factor de forma o amplitud de dispersión con momento angular total e isospín definidos.

² $\delta(s)$ tiene que ser definido como una función continua de s

1. Para $s \geq s_{th}$ se tiene

$$\begin{aligned} O(s \pm i\epsilon) &= f^+(s_0) \exp \left\{ \frac{s - s_0}{\pi} \left[\mathcal{P} \int_{s_{th}}^{+\infty} \frac{dx}{x - s_0} \frac{\delta(x)}{x - s} \pm i\pi \frac{\delta(s)}{s - s_0} \right] \right\} \quad (\text{F.3}) \\ &= e^{\pm i\delta(s)} \left[f^+(s_0) \exp \left\{ \mathcal{P} \int_{s_{th}}^{+\infty} \frac{dx}{x - s_0} \frac{\delta x}{x - s} \right\} \right] \end{aligned}$$

donde \mathcal{P} denota la parte principal de la integral. Así, se cumple que $O(s + i\epsilon) = O(s - i\epsilon)^*$, la función O es real sobre el semieje real $s < s_{th}$ y no tiene más polos o cortes que los requeridos por el teorema de Watson, es decir $L \equiv [s_{th}, +\infty[$. La discontinuidad al cruzar el corte viene dada por $O(s + i\epsilon) - O(s - i\epsilon) = 2i \mathcal{I}m O(s + i\epsilon)$, y por construcción $O(s_0) = f(s_0)$. Así, $f^+(s)$ y $O(s)$ satisfacen la misma relación de dispersión (ec. (F.1)), y por tanto, ambas funciones difieren a lo sumo en un polinomio con coeficientes reales, que debe anularse en $s = s_0$.

2. Pero este polinomio es cero, ya que la función $O(s)$ satisface el teorema de Watson

$$\frac{O(s + i\epsilon)}{O(s - i\epsilon)} = e^{2i\delta(s)} = \frac{f^+(s + i\epsilon)}{f^+(s - i\epsilon)}, \quad s > s_{th} \quad (\text{F.4})$$

Si se realizan $n + 1$ sustracciones, se induce un polinomio de grado $n + 2$ en el denominador del integrando en la ec. (F.1). Así, para $s \notin L$

$$\begin{aligned} f^+(s) &= P_n(s) + \frac{(s - s_0)(s - s_1) \dots (s - s_n)}{\pi} \times \quad (\text{F.5}) \\ &\int_{s_{th}}^{+\infty} \frac{dx}{(x - s_0)(x - s_1) \dots (x - s_n)} \frac{\mathcal{I}m f^+(s)}{x - s}, \quad s_0, \dots, s_n < s_{th} \end{aligned}$$

donde $P_n(s)$ es un polinomio de orden n determinado por las $n + 1$ ecuaciones: $P_n(s_i) = f^+(s_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$

$$P_n(s) = \sum_{j=0}^n \alpha_j(s) f^+(s_j) \quad (\text{F.6})$$

$$\alpha_j(s) = \prod_{j \neq k=0}^n \frac{s - s_k}{s_j - s_k} \quad (\text{F.7})$$

Nótese que $\alpha_j(s)$ son polinomios de orden n y satisfacen

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j(s) = 1 \quad (\text{F.8})$$

De la ec. (6.17) se tiene para $s > s_{th}$

$$\begin{aligned} \log f^+(s + i\epsilon) - \log f^+(s - i\epsilon) &= \log \frac{f^+(s + i\epsilon)}{f^+(s - i\epsilon)} = 2i\delta(s) \quad (\text{F.9}) \\ &= 2i \mathcal{I}m[\log f^+(s + i\epsilon)] \end{aligned}$$

y podemos escribir, de forma análoga a la ec. (F.6), suponiendo que el factor de forma no se anula en $\mathcal{C} - s_{th}$ ³, o bien despreciando la contribución del corte del logaritmo, si éste tiene otro punto de ramificación finito distinto a $s = s_{th}$

$$\log f^+(s) = \hat{P}_n(s) + \frac{(s - s_0)(s - s_1) \dots (s - s_n)}{\pi} \times \int_{s_{th}}^{+\infty} \frac{dx}{(x - s_0)(x - s_1) \dots (x - s_n)} \frac{\delta(s)}{x - s}, \quad s \notin L \quad (\text{F.10})$$

con

$$\hat{P}_n(s) = \sum_{j=0}^n \alpha_j(s) \log f^+(s_j) \quad (\text{F.11})$$

y de esta ecuación se obtiene la ec. (6.15).

En la ec. (F.1) hemos supuesto que f^+ no tiene polos. Sin embargo, sabemos que si la amplitud de dispersión tiene un polo en $s_R = M_R^2 - iM_R\Gamma_R$ en su segunda hoja de Riemann (caso de una resonancia) o en su primera hoja de Riemann (caso de un estado ligado con $\Gamma_R = 0^+$ y $M_R^2 < s_{th}$), éste se puede manifestar como un polo en el plano complejo de f^+ (véase la ec. (6.9)). Por otra parte, la matriz S depende de $e^{2i\delta}$, y se tiene la libertad de añadir términos $m\pi$, con m entero, al desfase sin modificar la matriz S . Sin embargo, la representación Omnès del factor de forma dependerá del valor elegido para el entero m .

Para fijar esta ambigüedad, supondremos que el desfase en el umbral debe ser $\delta(s_{th}) = n_b\pi$, donde n_b es el número de estados ligados en el canal, mientras que $\delta(\infty) = k\pi$, donde k es el número de ceros de la amplitud de dispersión en la hoja física (esto es el teorema de Levinson [216]). Esta elección para los desfases tiene en cuenta la existencia de polos en la matriz de dispersión. Para mostrar esto, consideremos el ejemplo siguiente: supongamos una matriz T en onda- p proporcional a $(s - s_{th})/(s - M_R^2 + iM_R\Gamma_R)$. El desfase está dado en este caso por

$$\delta(s) = \pi + \arctan \left[\frac{-M_R\Gamma_R}{s - M_R^2} \right], \quad s > s_{th} \quad (\text{F.12})$$

con $\arctan \in [-\pi, \pi]$. Esto satisface $\delta(\infty) = \pi$, y si $M_R\Gamma_R \ll |s - M_R^2|$, también conduce a $\delta(s_{th}) = \pi$ ó 0 para un estado ligado o una resonancia respectivamente, de acuerdo con el teorema de Levinson. Por simplicidad, supongamos también que $\Gamma_R \ll M_R$. En este caso, podemos aproximar

$$\delta(s) \approx \pi [1 - H(M_R^2 - s)] = \pi H(s - M_R^2) \quad (\text{F.13})$$

donde $H(\dots)$ es la función paso. En tanto que

$$\begin{aligned} \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_{th}}^{+\infty} \frac{dx}{x - s_0} \frac{\delta(x)}{x - s} &\approx (s - s_0) \int_{\max(s_{th}, M_R^2)}^{+\infty} \frac{dx}{x - s_0} \frac{1}{x - s} \\ &= \log \left\{ \frac{\max(s_{th}, M_R^2) - s_0}{\max(s_{th}, M_R^2) - s} \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

³Nótese, que en todo este desarrollo se ha tratado $s = s_{th}$ como un punto de ramificación.

Apéndice F

se tiene que la solución de Omnès con una sustracción (ec. (F.2)) resulta

$$O(s) \approx f^+(s_0) \frac{\text{máx}(s_{th}, M_R^2) - s_0}{\text{máx}(s_{th}, M_R^2) - s} \quad (\text{F.15})$$

y tiene un polo en $s = M_R^2$ para una resonancia o en $s = s_{th}$ en el caso de un estado ligado. En el caso de una resonancia con anchura finita, el polo se moverá a $s = M_R^2 + iM_R\Gamma_R$. Para un estado ligado, e incluyendo correcciones a la aproximación $\delta(s) = \pi$ (ec. (6.19)), el factor de forma será sensible a la posición exacta del polo, en tanto que los parámetros de bajas energías (volumen de dispersión, rango efectivo ...) dependerán de su posición exacta ($s = M_R^2$).

Estas conclusiones se generalizan en caso de usar múltiples puntos de sustracción.

Bibliografía

- [1] Véase por ejemplo, las Tesis Doctorales de los Drs. A.J. Praena (2004) y A. Sarsa (1997). Ambas Tesis fueron desarrolladas y defendidas en el Departamento de Física Moderna de la Universidad de Granada.
- [2] E. Buendía, F.J. Gálvez, J. Praena y A. Sarsa, J. Phys. **G26** (2000) 1795; *ibidem* J. Phys. **G27** (2001) 2211; *ibidem* Nucl. Phys. **A710** (2002) 29.
- [3] J. Praena, E. Buendía, F.J. Gálvez y A. Sarsa, Phys. Rev. **C67** (2003) 044301.
- [4] E. Buendía, F.J. Gálvez y A. Sarsa, Int. J. Quantum Chem., **68** (1998) 405.
- [5] F. Arias de Saavedra, E. Buendía, F.J. Gálvez y A. Sarsa, Eur. Phys. Jour. **D2** (1998) 181.
- [6] F. Arias de Saavedra, E. Buendía, F.J. Gálvez y A. Sarsa, Eur. Phys. Jour. **D13** (2001) 201.
- [7] I. Filikhin, A. Gal, Phys. Rev **C65** (2002) 041001 (Rapid Communication)
- [8] B. Silvestre-Brac, Few-Body Systems 29 (1996) 1
- [9] M. Neubert, Phys. Rep. **245** (1994) 259
- [10] J. K. Ahn *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 132504
- [11] H. Takahashi, *et. al.*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 212502
- [12] M. Danysz *et al.*, Nucl. Phys. **49** (1963) 121
- [13] R.H. Dalitz *et al.*, Proc. R. Soc. London **A426** (1989) 1
- [14] G. B. Franklin. Nucl. Phys. **A585** (1995)83c
- [15] S. Aoki et al., Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 1729
- [16] D. J. Prowse, Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 782
- [17] A. R. Bodmer, Q. N. Usmani, J. Carlson, Nucl. Phys. **A422** (1984) 510
- [18] J. Caro, C. García-Recio, J. Nieves, Nucl. Phys. **A646** (1999) 342

Bibliografía

- [19] C. Albertus, J. E. Amaro, J. Nieves, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 032501
- [20] A. Galindo, P. Pascual, *Quantum Mechanics* Springer, Berlin (1991)
- [21] S. B. Carr, I. R. Afnan, B. F. Gibson, Nucl. Phys. **A625** (1997) 143
- [22] T. Yamada, C. Nakamoto, Phys. Rev. **C62** (2000) 034319
- [23] I. Vidaña, A. Ramos, A. Polls, Phys. Rev. **C70** (2004) 024306
- [24] P.M.M. Maessen, Th. A. Rijken and J.J. de Swart, Phys. Rev. **C40** (1989) 2226
- [25] M.M. Nagels, T.A. Rijken and J.J. de Swart, Phys. Rev **D12** (1975) 744; Phys. Rev **D15** (1977) 2547; Phys. Rev **D20** (1979) 1633
- [26] B. Holzenkamp, K. Holinde, J. Speth, Nucl. Phys. **A500** (1989) 485
- [27] A. Reuber, K. Holinde, J. Speth, Nucl. Phys. **A570** (1994) 543
- [28] U. Straub, Zong-Ye Zang, K. Braeuer, A. Faessler, S.B. Khadkikar, G. Luebeck, Nucl. Phys. **A483** (1988) 686
- [29] U. Straub, Zong-Ye Zang, K. Braeuer, A. Faessler, S.B. Khadkikar, G. Luebeck, Nucl. Phys. **A508** (1990) 385c
- [30] Proceedings of International Conferences on Hypernuclear and Strange Particle Physics: Nucl. Phys. **A547** (1992), Nucl. Phys. **A585** (1995), Nucl. Phys. **A639** (1998)
- [31] R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster, Phys. Rep. **149** (1987) 1
- [32] Th.A. Rijken, Nucl. Phys. **A691** (2001) 322c; V.G.J. Stoks and Th.A. Rijken, Phys. Rev. **C59** (1999) 3009.
- [33] T. Ericson, W. Weise, Pions and Nuclei. Clarendon Press. Oxford (1988).
- [34] A. L. Fetter, J. D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, McGraw-Hill (1971)
- [35] J. M. Nieves, Czech. Jour. Phys. **46** (1996) 673
- [36] T. Matsui, Nucl. Phys. **A370** (1981) 365
- [37] E. Oset, D. Strottman, H. Toki, J. Navarro, Phys. Rev. **C48** (1993) 2395
- [38] R. B. Firestone, *Table of Isotopes*, 8th Ed., J. Wiley, New York (1996)
- [39] C. W. Jager, H. de Vries, C. de Vries, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 14 (1974)
- [40] L. L. Salcedo, E. Oset, M. J. Vicente-Vacas, C. Garcia-Recio, Nucl. Phys. **A484**, (1988) 557

- [41] A. Bouyssy, Nucl. Phys. **A381** (1982) 445
- [42] T. Motoba, H. Bando, T. Fukuda, J. Zofka, Nucl. Phys. **A534** (1991) 597
- [43] T. Motoba, Nucl. Phys. **A547** (1992) 115c
- [44] Y. Sato *et al.*, Nucl. Phys. **A691** (2001) 189c
- [45] J. Nieves, E. Oset, Phys. Rev. **C47** (1993) 1478
- [46] A. Montwill *et al.*, Nucl. Phys. **A234** (1974) 413
- [47] R. Grace *et al.*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1055
- [48] A. Sakaguchi *et al.*, Nuovo Cimento **A102** (1989) 511
- [49] P. D. Barnes, Nucl. Phys. **A450** (1986) 43c
- [50] P. D. Barnes, Nucl. Phys. **A478** (1988) 127c
- [51] J. J. Szymanski *et al.*, Phys. Rev. **C43** (1991) 849
- [52] A. Sakaguchi *et al.*, Phys. Rev. **C43** (1991) 73
- [53] R. H. Dalitz, Phys. Rev. **112** (1958) 605
- [54] R. H. Dalitz, L. Liu, Phys. Rev. **116** (1959) 1312
- [55] Y. Kurihara, Y. Akaishi, H. Tanaka, Phys. Rev. **C31** (1985) 971
- [56] H. Bando, H. Takaki, Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 106
- [57] H. Bando, T. Motoba, J. Zofka, Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 4021
- [58] E. Oset, L. L. Salcedo, Nucl. Phys. **A443** (1985) 704
- [59] K. Itonaga, T. Motoba, H. Bando, Z. Phys. **A330** (1988) 209
- [60] T. Motoba, K. Itonaga, H. Bando, Nucl. Phys. **A489** (1988) 683
- [61] T. Motoba, Nucl. Phys. **A527** (1991) 485c
- [62] T. Motoba, Few-Body Sys. Suppl. **5** (1992) 386
- [63] T. Motoba, Nucl. Phys. **A547** (1992) 115c
- [64] U. Straub, J. Nieves, A. Faessler, E. Oset, Nucl. Phys. **A556** (1993) 531
- [65] A. Ramos, E. Oset, L. L. Salcedo, Phys. Rev. **C50** (1994) 2314
- [66] E. Oset, P. Fernández de Córdoba, J. Nieves, A. Ramos, L. L. Salcedo, Prog. Theor. Phys. Suppl. **117** (1994) 461

Bibliografía

- [67] T. Motoba, K. Itonaga, Prog. Theor. Phys. Suppl. **117** (1994) 477
- [68] L. Zhou, J. Piekarewicz, Phys. Rev. **C60** (1999) 024306
- [69] W. M. Alberico, A. De Pace, G. Garbarino, A. Ramos, Phys. Rev. **C61** (2000) 044314
- [70] W. M. Alberico, G. Garbarino, Phys. Rep. **369** (2002) 1
- [71] J. Nieves, E. Oset, C. García-Recio, Nucl. Phys. **A554** (1993) 509
- [72] J. Nieves, E. Oset, C. García-Recio, Nucl. Phys. **A554** (1993) 554
- [73] W. Weise, Nucl. Phys. **A690** (2001) 98
- [74] C. García-Recio, J. Nieves, E. Oset, Phys. Lett. **B541** (2002) 64
- [75] E. E. Kolomeitsev, N. Kaiser, W. Weise, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 092501
- [76] C. Albertus, J. E. Amaro, J. Nieves, Phys. Rev. **C67** (2003) 034604
- [77] P. Dłuzewski *et al.*, Nucl. Phys. **A484** (1988) 520
- [78] T. Hasegawa *et al.*, Phys. Rev. **C53** (1996) 1210
- [79] J. E. Amaro, J. A. Caballero, E. Moya de Guerra, T. W. Donnelly, A. M. Lallena, J. M. Udías, Nucl. Phys. **A602** (1996) 263
- [80] J. E. Amaro, C. García-Recio, A. M. Lallena, Nucl. Phys. **A567** (1994) 701
- [81] J. E. Amaro, A. M. Lallena, J. Nieves, Nucl. Phys. **A623** (1997) 529
- [82] C. Baltay *et al.*, Phys. Rev. Lett **42** (1979) 1721
- [83] L. A. Copley, N. Isgur, G. Karl, Phys. Rev. **D20** (1979) 768;
L. A. Copley, N. Isgur, G. Karl, Phys. Rev. **D20** (1981) 817, Erratum
- [84] K. Maltman, N. Isgur, Phys. Rev. **D22** (1980) 1701
- [85] J. M. Richark, P. Taxil, Phys. Lett. **B128** (1983) 453
- [86] A. L. Choudhury, V. Joshi, Phys. Rev. **D13** (1976) 3115
- [87] A. L. Choudhury, V. Joshi, Phys. Rev. **D13** (1976) 3120
- [88] M. B. Voloshin, V. I. Zakharov, L. B. Okun, Sov. J. Nucl. Phys. **22** (1975) 81
- [89] A. J. Buras, Nucl. Phys. **B109** (1976) 373
- [90] J. G. Körner, G. Kramer, J. Willrodt, Z. Phys. **C2** (1979) 117
- [91] C. Albajar *et al.* Phys. Lett. **B273** (1991) 540

-
- [92] S. Eidelman *et al.*, Phys. Lett **B592** (2004) 1
- [93] ALEPH Collaboration, R. Barate *et al.* Eur. Phys. J. **C2** (1998) 97
- [94] DELPHI Collaboration, P. Abreu *et al.* Eur. Phys. J. **C10** (1999) 185
- [95] N. Isgur, M. B. Wise, Phys. Lett. **B232** (1989) 113
- [96] N. Isgur, M. B. Wise, Phys. Lett. **B237** (1990) 527
- [97] J. G. Körner, M. Krämer, D. Pirjol, Prog. Part. Nucl. Phys. **33** (1994) 787
- [98] UKQCD Collaboration, S.P. Booth, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72**(1994) 462; UKQCD Collaboration, K. C. Bowler *et al.*, Phys. Rev. **D52** (1995) 5067; UKQCD Collaboration, J.M. Flynn, *et al.*, Nucl. Phys. **B461** (1996) 327; UKQCD Collaboration, K. C. Bowler *et al.*, Nucl. Phys. **B637** (2002) 293
- [99] UKQCD Collaboration, K. C. Bowler *et al.*, Phys. Rev **D54** (1996) 3619
- [100] Proceedings of the 9th International Conference on the Structure of Baryons (Baryons 2002), Newport News, VA, 3–8 March 2002
- [101] W. Lucha, F. Schröberl, D. Gromes, Phys. Rep. **200** (1991) 127
- [102] K. Shimizu, Rep. Prog. Phys. **52** (1989) 1
- [103] A. de Rújula, H. Georgi, S. L. Glashow Phys. Rev. **D12** (1975) 147
- [104] H. Suganuma, S. Sasaki, H. Toki, Nucl. Phys. **B435** (1995) 207
- [105] F. Fernández, A. Valcarce, U. Straub, A. Faessler, J. Phys. **G19** (1993) 2013
- [106] A. Valcarce, A. Buchmann, F. Fernández, A. Faessler, Phys. Rev. **C50** (1994) 2246
- [107] A. Valcarce, P. Gonzalez, F. Fernández, V. Vento, Phys. Lett. **B367** (1996) 35
- [108] L. Ya. Glozman, D. O. Riska, Phys. Rep. **268** (1996) 263
- [109] L. Ya. Glozman, W. Plessas, K. Varga, R. F. Wagenbrunn, Phys. Rev. **D58** (1998) 094030
- [110] R. K. Bhaduri, L. E. Cohler, Y. Nogami, Nuovo Cimento **A65** (1981) 376
- [111] L. A. Blanco, F. Fernández, A. Valcarce, Phys. Rev. **C59** (1999) 428
- [112] C. Albertus, J.E. Amaro, E. Hernández y J. Nieves, Nucl. Phys. **A740** (2004) 333
- [113] B. Silvestre-Brac, C. Semay, Internal Report, ISN 93.6999, Grenoble, 1993
- [114] F. Gutbrod, I. Montway, Phys. Lett. **B136** (1984) 411
-

Bibliografía

- [115] M. Fabre de la Ripelle, Phys. Lett. **B205** (1988) 97
- [116] J. Vijande, F. Fernández, A. Valcarce, J. Phys. **G31** (2005) 481
- [117] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, Numerical Recipes in FORTRAN 77, Cambridge University Press, 1992
- [118] H. Georgi, Phys. Lett. **B240** (1990) 447
- [119] C. W. Bernard, Y. Shen, A. Soni, **B317** (1993) 164
- [120] U. Aglietti, G. Martinelli, C. T. Sachrajda, Phys. Lett. **B324** (1994) 85; L. Lellouch *et al.*, Nucl. Phys. **B444** (1995) 401
- [121] S. Hashimoto, H. Matsufuru, Phys. Rev **D54** (1996) 4578; S. Hashimoto *et al.*, Phys. Rev. **D61** (2000) 014502
- [122] A. F. Falk, M. Neubert, Phys. Rev. **D47** (1993) 2982
- [123] M. Neubert, Phys. Lett. **B338** (1994) 84
- [124] A. G. Grozin, M. Neubert, Phys. Rev. **D55** (1997) 272
- [125] M. Neubert, Adv. Ser. Dir. High Energy Phys. **15** (1998) 239
- [126] I. Caprini, M. Neubert, Phys. Lett. **B380** (1996) 376
- [127] I. Caprini, L. Lellouch, M. Neubert, Nucl. Phys. **B530** (1998) 153
- [128] A. F. Falk, E. Jenkins, A. V. Manohar, M. B. Wise, Phys. Rev. **D49** (4553)
- [129] B. Grinstein, M. B. Wise, N. Isgur, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 298
- [130] N. Isgur, D. Scora, B. Grinstein, M.B. Wise, Phys. Rev. **D39** (1989) 799
- [131] D. Scora, N. Isgur, Phys. Rev. **D52** (1995) 2783
- [132] H. Hogaasen, M. Sadzikowski, Z. Phys. **C64** (1994) 427
- [133] H. M. Choi, C. R. Ji, Phys. Lett **B460** (1999) 461
- [134] S. Narison, Phys. Lett. **B325** (1994) 197
- [135] E. de Rafael, J. Tarón, Phys. Rev. **D50** (1994) 373
- [136] BELLE Collaboration, K. Abe *et al.*, Phys. Lett **B526** (2002) 247
- [137] CLEO Collaboration, J. P. Alexander *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2950-2954
- [138] DELPHI Collaboration, J. Abdallah *et al.*, Eur. Phys. J. C **33** (2004) 213
- [139] DELPHI Collaboration, J. Abdallah *et al.*, Phys. Lett. **B585** (2004) 63

-
- [140] S. Gottlieb, S. Tamhankar, Nucl. Phys. **B119** Proc. Suppl. (2003) 644
- [141] E. Jenkins, A. V. Manohar, Nucl. Phys. **B396** (1993) 38
- [142] A. V. Manohar, M. B. Wise, Phys. Rev. **D49** (1994) 1310
- [143] B. Holdom, M. Sutherland, J. Mureika, Phys. Rev **D49** (1994) 2359
- [144] A. G. Grozin, O. I. Yakovlev, Phys. Lett. **B291** (1992) 441
- [145] C. Jin, Phys. Rev. **D56** (1997) 7267
- [146] D. Chakraverty, T. De, B. Dutta-Roy, Mod. Phys. Lett. A **12** (1997) 195
- [147] D. Chakraverty, T. De, B. Dutta-Roy, K.S. Gupta, Int. J. Mod. Phys. A **14** (1999) 2385
- [148] M. A. Ivanov, V. E. Lyubovitskij, J. G. Körner, P. Kroll, Phys. Rev. **D56** (1997) 348; B. König, J. G. Körner, M. Krämer y P. Kroll, Phys. Rev. **D56** (1997) 4282
- [149] M. A. Ivanov, J. G. Körner, V. E. Lyubovitskij, A. G. Rusetsky, Phys. Rev. **D59** (1999) 074016
- [150] M. Tanaka, Phys. Rev. **D47** (1993) 4969
- [151] J. P. Lee, C. Liu, H. S. Song, Phys. Rev. **D58** (1998) 014013
- [152] M. Q. Huang, J. P. Lee, C. Liu, H. S. Song, Phys. Lett. **B502** (2001) 133
- [153] J. P. Lee, G. T. Park, Phys. Lett. **B552** (2003) 185
- [154] I. Dunietz, Phys. Rev. **D58** (1998) 094010
- [155] H. H. Shih, S. C. Lee, H. N. Li, Phys. Rev **D61** (2000) 114002
- [156] J. G. Körner, B. Melic, Phys. Rev. **D62** 074008
- [157] UKQCD Collaboration, K. C. Bowler *et al.*, Phys. Rev **D57** (1998) 6948
- [158] R. S. Marques de Carvalho, F. S. Navarra, M. Nielsen, E. Ferreira, H. G. Dosch, Phys. Rev. **D60** (1999) 034009
- [159] F. Cardarelli, S. Simula, Phys. Lett. B **421** (1998) 295
- [160] F. Cardarelli, S. Simula, Phys. Rev. **D60** (1999) 074018 (1998) 295
- [161] F. Cardarelli, S. Simula, Nucl. Phys. **A663** (2000)
- [162] N. Isgur, M. B. Wise, Nucl. Phys. **B348** (1991) 276
- [163] H. Georgi Nucl. Phys. **B348** (1991) 293
- [164] T. Mannel, W. Roberts, Z. Ryzak, Nucl. Phys. **B355** (1991) 38

Bibliografía

- [165] M. E. Luke, Phys. Lett. **B252** (1990) 447
- [166] H. Georgi, B. Grinstein, M. B. Wise, Phys. Lett. B **252** (1990) 456
- [167] P. Cho, B. Grinstein, Phys. Lett. **B258** (1992) 153
- [168] C. Albertus, E. Hernández y J. Nieves, Phys. Rev. **D71** (2005) 014012
- [169] J. G. Körner, M. Krämer, Phys. Lett. **B275** (1992) 495
- [170] CLEO Collaboration, M. Bishai, *et al.*, Phys. Lett. B **350** (1995) 256
- [171] ARGUS Collaboration, H. Albrecht, *et al.*, Phys. Lett. B **274** (1992) 239
- [172] M. Neubert, Nucl. Phys. **B416** (1994) 786
- [173] CLEO Collaboration, J.P. Alexander, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 5000
- [174] CLEO Collaboration, S. B. Athar *et al.*, Phys. Rev. **D68** (2003) 072003-1
- [175] UKQCD Collaboration, D. R. Burford *et al.*, Nucl. Phys. **B447** (1995) 425
- [176] UKQCD Collaboration, L. Del Debbio, J.M. Flynn, L. Lellouch, J. Nieves, Phys. Lett. **B416** (1998) 392
- [177] S. Hashimoto *et al.*, Phys. Rev. **D58** (1998) 014502-1
- [178] S. Aoki *et al.*, Phys. Rev. **D64** (2001) 114505-1
- [179] UKQCD Collaboration, K.C. Bowler *et al.*, Phys. Lett. B **486** (2000) 111
- [180] A. Abada *et al.*, Nucl. Phys. **B619** (2001) 565
- [181] A. X. El-Khadra *et al.*, Phys. Rev. **D64** (2001) 014502-1
- [182] HPQCD Collaboration, J. Shigemitsu, 22nd International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2004), Batavia, Illinois, 21-26 June 2004.
- [183] Fermilab Lattice Collaboration, M. Okamoto, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **140** 461-463, 2005. Batavia 2004, "Lattice field theory" 461-463
- [184] P. Ball V. M. Braun, Phys. Rev. **D58** (1998) 094016
- [185] P. Ball, JHEP **09** (1998) 005
- [186] P. Ball R. Zwicky, JHEP **10** (2001) 019
- [187] A. Khodjamirian *et al.*, Phys. Rev. **D62** (2000) 114002-1
- [188] Y.L. Wu, W.Y. Wang, Phys. Lett. B **515** (2001) 57
- [189] W.Y. Wang, Y.L. Wu, M. Zhong, Phys. Rev. **D67** (2003) 014024-1

-
- [190] J.G. Körner, C. Liu, C.T. Yan, Phys. Rev. **D66** (2002) 076007-1
- [191] Z.G. Wang, M. Zhou, T. Huang, Phys. Rev. **D67** (2003) 094006-1
- [192] W. Wirbel, B. Stech, M. Bauer, Z. Phys. **C29** (1985) 637
- [193] J. G. Körner, G.A. Shuler, Z. Phys. **C38** (1988) 511
- [194] N. Isgur, M.B. Wise, Phys. Rev. **D41** (1990) 151
- [195] W. Jaus, Phys. Rev. **D41** (1990) 3394
- [196] W. Jaus, Phys. Rev. **D53** (1996) 1349
- [197] I.L. Grach, I.M. Narodetskii, S. Simula, Phys. Lett. **385** (1996) 317
- [198] A. Deandrea, R. Gatto, G. Nardulli, A.D. Polosa, Phys. Rev. **D61** (2000) 017502
- [199] Riazuddin, T.A. Al-Aithan, A.H. Shah Gilani, Int. Jour. Mod. Phys. **A17** (2002) 4927
- [200] R. Omnès, Nuovo Cimento **8** (1958) 316
- [201] N. I. Mushkelishvili, Singular Integral Equations, Nordhoff, Groningen (1953)
- [202] J. M. Flynn, J. Nieves, Phys. Lett. **B505** (2001) 82
- [203] C. Albertus, J.M. Flynn, E. Hernández, J. Nieves, J.M. Verde-Velasco, Phys. Rev. **D72** (2005) 033002
- [204] C. Albertus, E. Hernández, J. Nieves, J. M. Verde-Velasco, Phys. Rev. **D71** (2005) 113006
- [205] S. Hashimoto, Int. J. Mod. Phys. **A20** 5133-5144, 2005."Beijing 2004", ICHEP 2004, vol. 1, 77-88
- [206] M. B. Wise, Phys. Rev. **D45** (1992) R2188
- [207] R. Casalbuoni *et al.*, Phys. Rep. **281** (1997)
- [208] UKQCD Collaboration, K. C. Bowler *et al.*, Nucl. Phys. **B619** (2001) 507
- [209] A. Abada *et al.*, JHEP **02** (2004) 016
- [210] V. M. Belyaev, V. M. Braun, A. Khodjamirian, R. Rückl, Phys. Rev. **D51** (1995) 6177
- [211] D. Becirevic, A. Le Yaouanc, JHEP (1999) 021
- [212] C. Bernard *et al.*, Phys. Rev. **D65** (2002) 014510
- [213] V. Ciulli, 8th International Symposium on Heavy Flavor Physics, Southampton, England, 25-29 July 1999.

Bibliografía

- [214] S. Mandelstam, Phys. Rev. **112** (1958) 1344
- [215] K. M. Watson, Phys. Rev. **95** (1954) 228
- [216] A. D. Martin, T. D. Spearman, *Elementary Particle Physics*, North-Holland, Amsterdam (1970) (p. 401)
- [217] E. Pallante, A. Pich, Nucl. Phys. **B592** (2001) 294
- [218] J. Nieves, E. Ruíz-Arriola, Phys. Lett. **455** (1999) 30
- [219] J. Nieves, E. Ruíz-Arriola, Nucl. Phys. **A679** (2000) 57
- [220] Fermilab Collaboration, MILC Collaboration, HPQCD Collaboration, C. Aubin *et al.* Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 011601-1
- [221] UKQCD Collaboration, K. C. Bowler *et al.* Phys. Rev. **D51** (1995) 4905
- [222] CLEO Collaboration, G. S. Huang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 011802
- [223] BES Collaboration, M. Abilikim *et al.*, Phys. Lett. **B597** (2004) 39
- [224] CLEO Collaboration, A. Anastassov *et al.*, Phys. Rev. **D65** (2002) 032003
- [225] A. Abada *et al.*, Phys. Rev. **D66** (2002) 074504
- [226] FOCUS Collaboration, J. M. Link *et al.* Phys. Lett. **B607** (2005) 233
- [227] P. Colangelo, F. De Fazio, Phys. Lett. **B532** (2002) 193
- [228] MILC Collaboration, C. Aubin *et al.* Phys. Rev. **D70** (2004) 114501