

6

FLEXIÓN

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

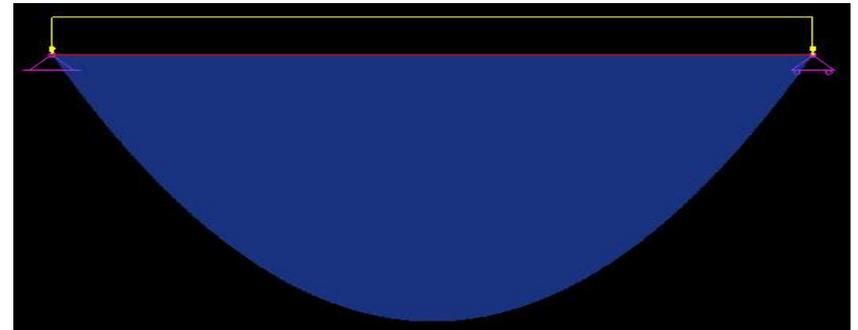
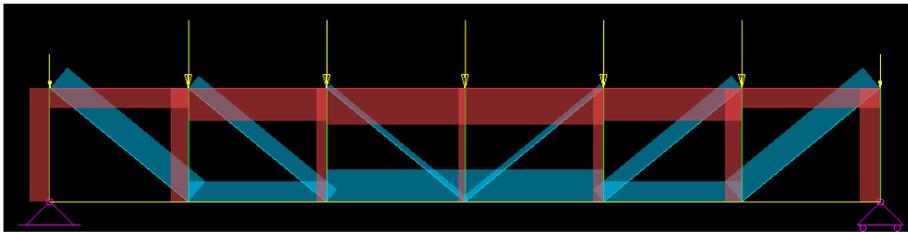
6 FASES:

- 1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica
- 2) Modelización: elaboración de modelo físico
- 3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos
- 4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos
- 5) Representación
- 6) Ejecución

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

6 FASES:

- 1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica
- 2) Modelización: elaboración de modelo físico
- 3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos
- 4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos
- 5) Representación
- 6) Ejecución



PROYECTO DE ESTRUCTURAS

6 FASES:

- 1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica
- 2) Modelización: elaboración de modelo físico
- 3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos
- 4) **Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos**
- 5) Representación
- 6) Ejecución

Dimensionado de barras: requisitos	{	<u>ESTABILIDAD</u> :	No pandea, no vuelca, etc.
		<u>RIGIDEZ</u> :	Deformación \leq Valores admisibles
		<u>RESISTENCIA</u> :	Acción \leq Resistencia

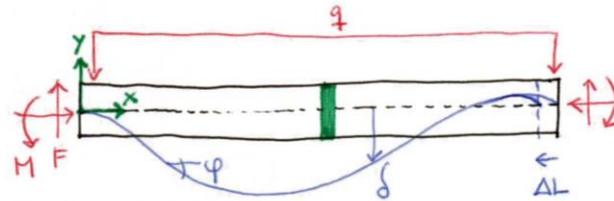
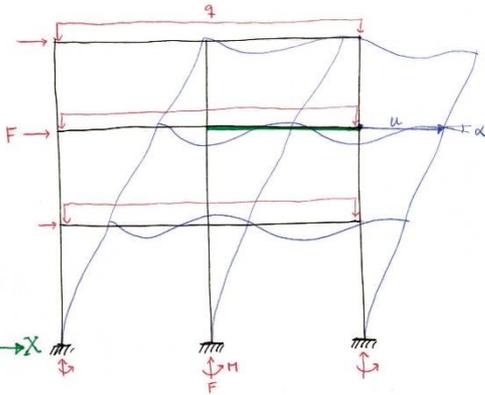
ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

ESTRUCTURA

Fuerzas y reacciones externas:

q, F, M

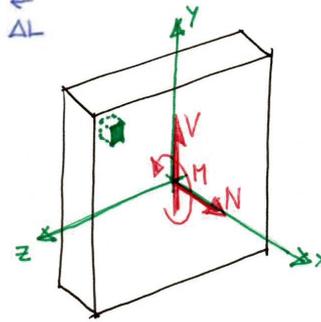
Movimientos absolutos:
desplazamientos (u) y
giros absolutos (α)



BARRA

Fuerzas y reacciones de
extremo: q, F, M

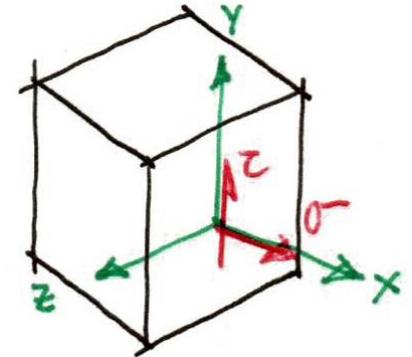
Movimientos relativos:
elongación (ΔL), deflexión (δ) y
giros relativos (φ)



REBANADA

Solicitaciones:
 N, V, M

Deformaciones: elongación,
distorsión y curvatura (κ)



PUNTO

Tensiones:
 σ, τ

Deformaciones:
elongación (ϵ) y distorsión (γ)

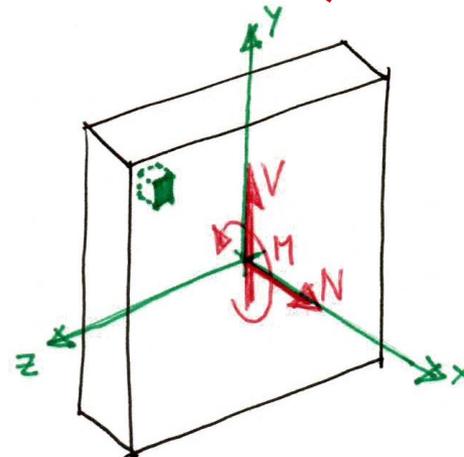
ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

ESTRUCTURA

Fuerzas y reacciones externas:
 q, F, M
 Movimientos absolutos:
 desplazamientos (u) y
 giros absolutos (α)

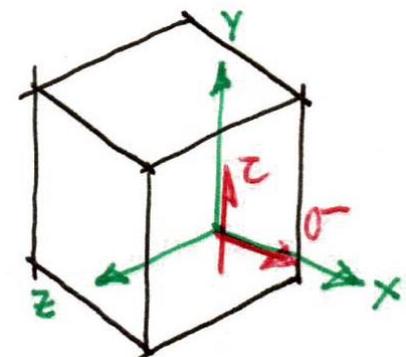
BARRA

Fuerzas y reacciones de
 extremo: q, F, M
 Movimientos relativos:
 elongación (ΔL), deflexión (δ) y
 giros relativos (φ)



REBANADA

Solicitaciones:
 N, V, M
 Deformaciones: elongación,
 distorsión y curvatura (κ)



PUNTO

Tensiones:
 σ, τ
 Deformaciones:
 elongación (ϵ) y distorsión (γ)

Dimensionado
 de barras:
 requisitos

ESTABILIDAD:

RIGIDEZ:

RESISTENCIA:

No pandea, no vuelca, etc.

Deformación \leq Valores admisibles

Acción \leq Resistencia

ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Dimensionado a Resistencia:

Garantizar que en todos los puntos de todas las secciones de todas las barras de la estructura, la tensión actuante es menor que la tensión admisible.

Basta hacer la comprobación en los puntos críticos, donde la tensión es máxima:

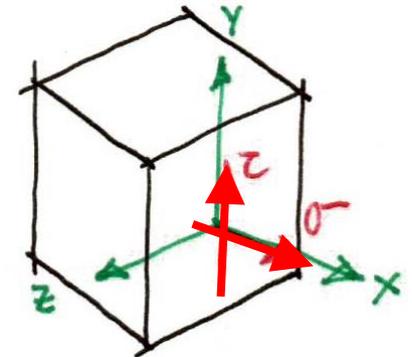
$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{adm}}$$

REBANADA

Solicitaciones:
N, V, M

Deformaciones: elongación,
distorsión y curvatura (κ)



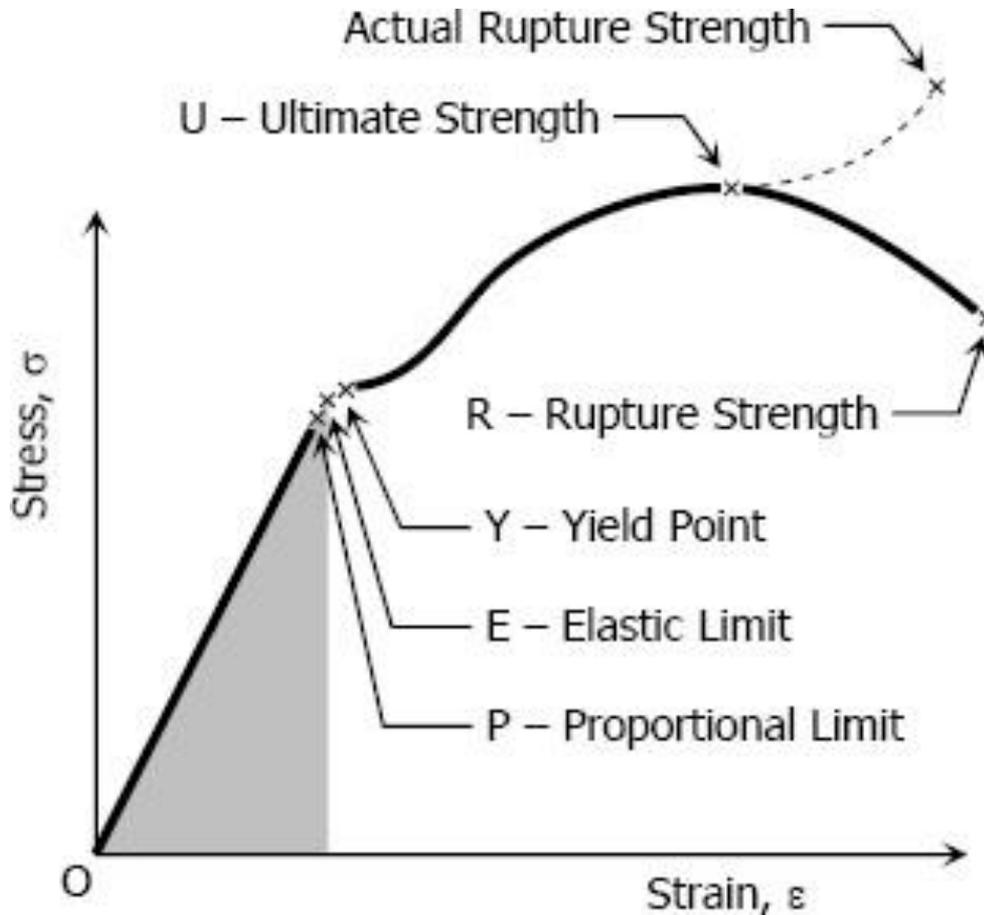
PUNTO

Tensiones:
 σ, τ

Deformaciones:
elongación (ϵ) y distorsión (γ)

TENSIÓN ADMISIBLE

Se toma como σ_{adm} el valor del límite elástico del material



PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

- 1) Principio de rigidez relativa (o pequeñas deformaciones)
- 2) Principio de proporcionalidad
- 3) Principio de superposición de efectos
- 4) Principio de equilibrio estático
- 5) Principio de compatibilidad de deformaciones
- 6) Principio de Saint-Venant
- 7) Hipótesis de Navier-Bernoulli

PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

1) Principio de rigidez relativa (o pequeñas deformaciones)

Las deformaciones son suficientemente pequeñas como para asumir las siguientes simplificaciones geométricas:

(φ en radianes!!)

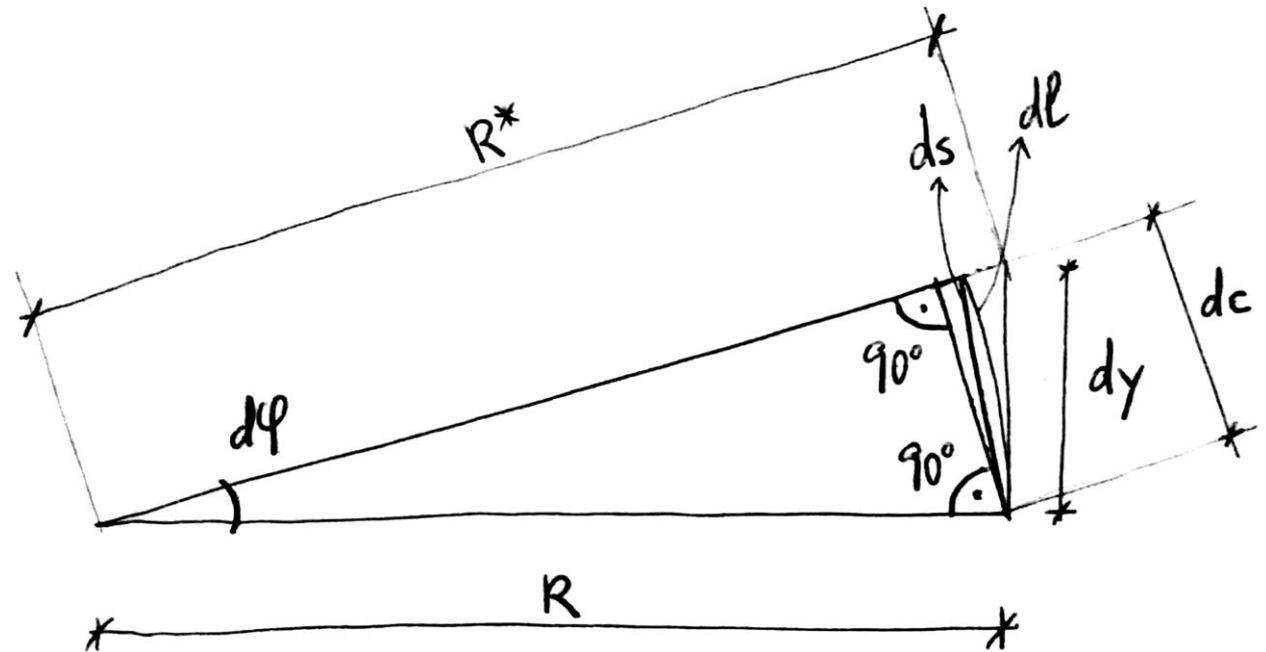
$$\tan(d\varphi) = d\varphi$$

$$\sin(d\varphi) = d\varphi$$

$$\cos(d\varphi) = 1$$

$$R = R^*$$

$$dy = dl = ds = dc$$



PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

7) Hipótesis de Navier-Bernoulli

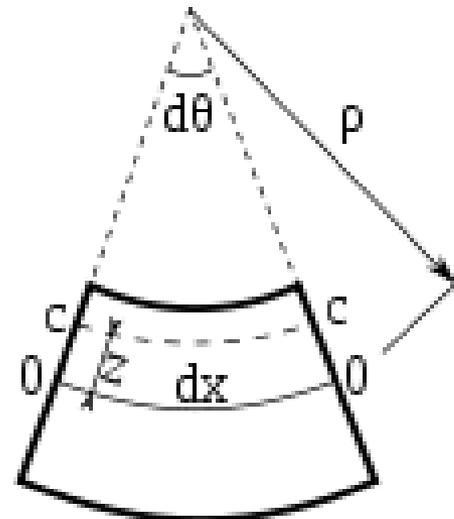
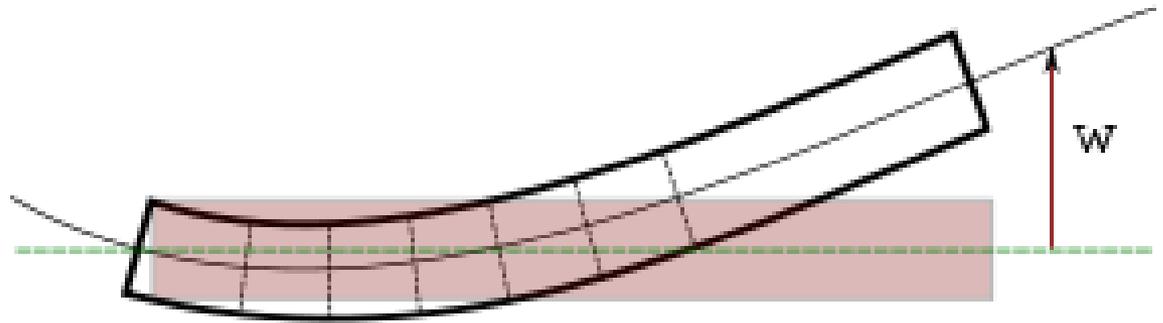
Las secciones de las barras se mantienen planas y perpendiculares a la directriz después de la deformación



Claude-Louis
Marie Henri
Navier
(1785 – 1836)



Jakob
Bernoulli
(1654 – 1705)



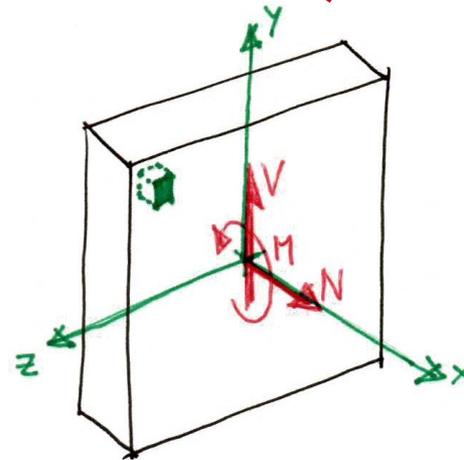
ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

ESTRUCTURA

Fuerzas y reacciones externas:
 q, F, M
Movimientos absolutos:
desplazamientos (u) y
giros absolutos (α)

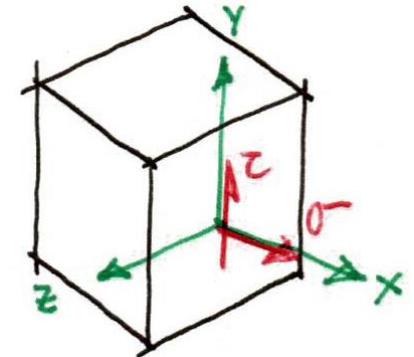
BARRA

Fuerzas y reacciones de
extremo: q, F, M
Movimientos relativos:
elongación (ΔL), deflexión (δ) y
giros relativos (φ)



REBANADA

Solicitaciones:
 N, V, M
Deformaciones: elongación,
distorsión y curvatura (κ)



PUNTO

Tensiones:
 σ, τ
Deformaciones:
elongación (ϵ) y distorsión (γ)

Comprobamos tensiones →

Necesario encontrar relación entre solicitaciones y tensiones!

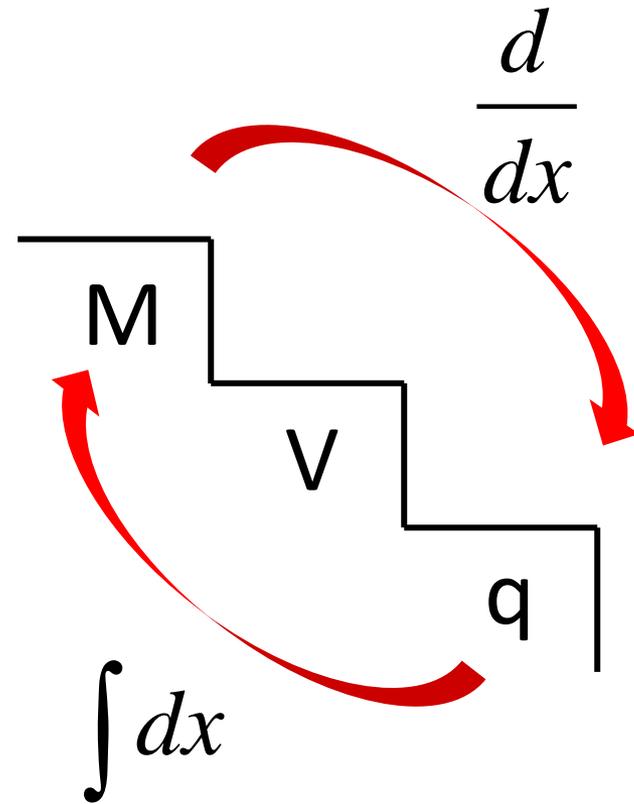
SOLICITACIONES EN SECCIONES DE BARRAS

RELACIÓN SOLICITACIONES – CARGAS

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

$$\frac{dV}{dx} = -q_y$$

$$\frac{dM}{dx} = -V$$

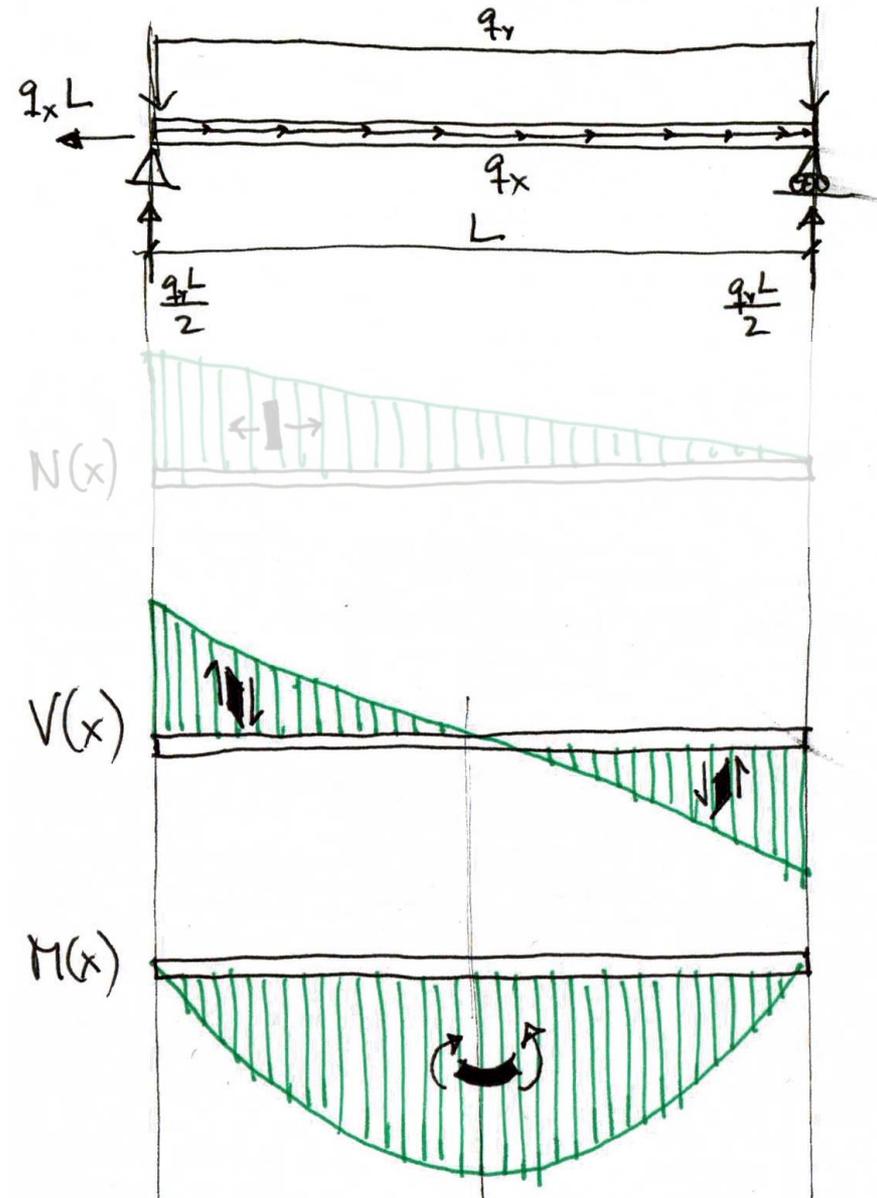


RELACIÓN ENTRE SOLICITACIONES Y CARGAS

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

$$\frac{dV}{dx} = -q_y$$

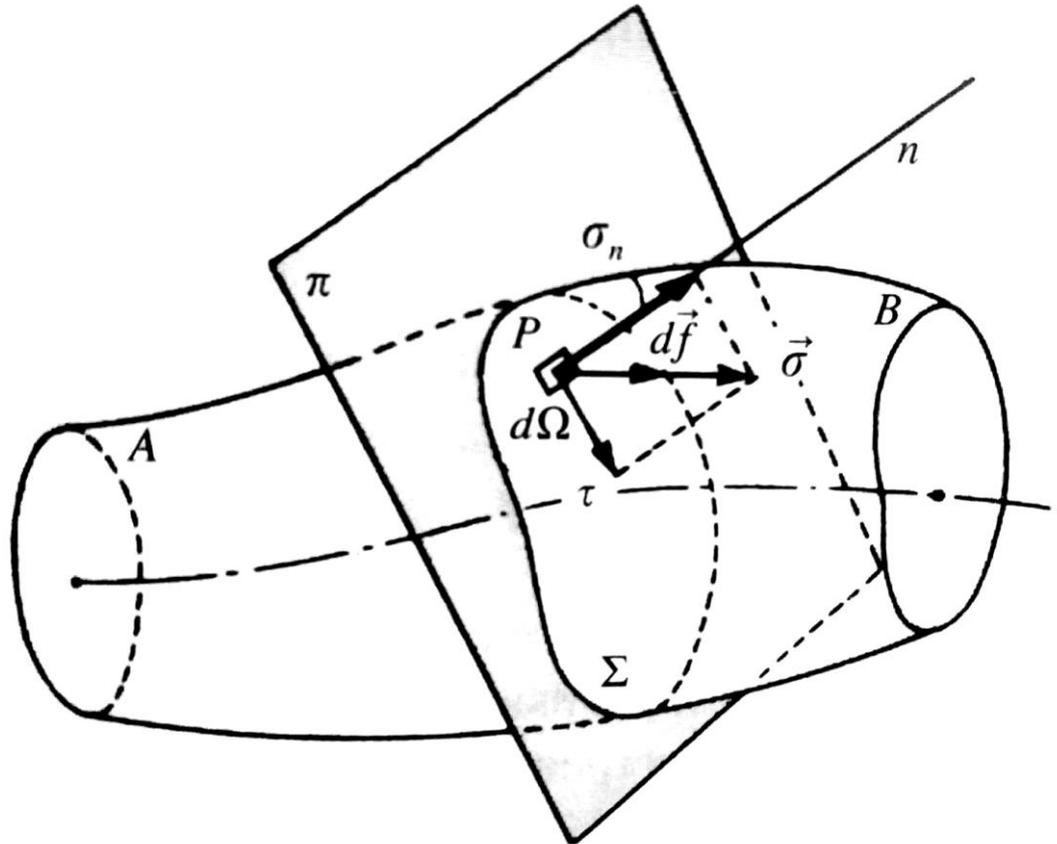
$$\frac{dM}{dx} = -V$$



COMPONENTES DE LA TENSIÓN EN UN PUNTO

La resultante de tensiones en un punto se puede descomponer en:

- **Tensión normal σ** : perpendicular al plano de la sección
- **Tensión tangencial τ** : paralela al plano de la sección



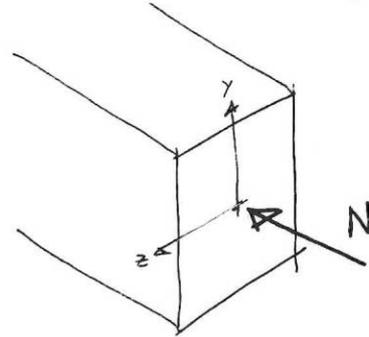
TIPO DE TENSION SEGUN LA SOLICITACION ACTUANTE

- N y M → σ
- V (y M_T) → τ

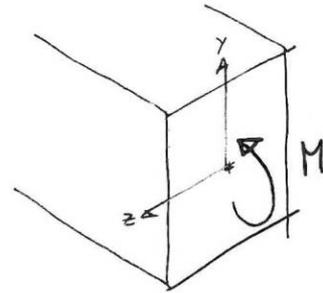
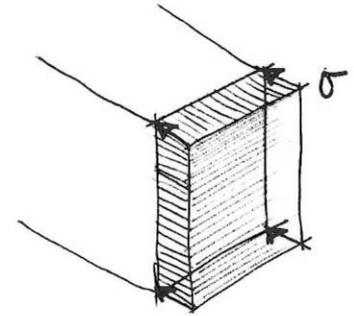
SOLICITACION (SECCION)

Relacion buscada

TENSION (PUNTOS)

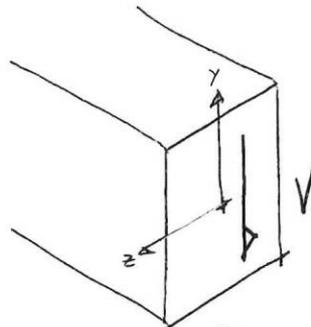
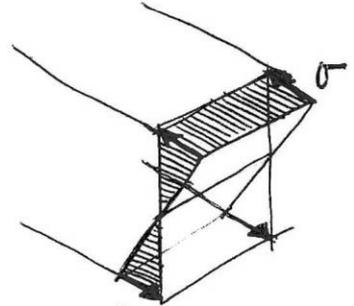


$$\sigma = \frac{N}{A}$$



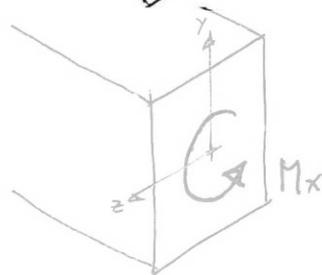
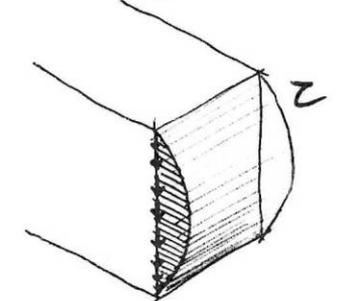
$$\sigma = -\frac{M}{I} y$$

(Ley de Navier)

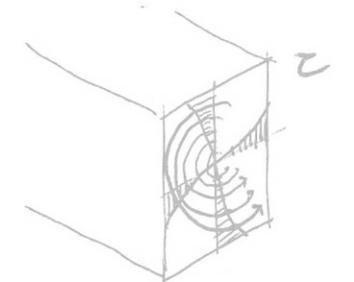


$$\tau = \frac{V s}{b I}$$

(Fórmula Colignon)



$$\tau = \frac{M_x}{I_0} \rho$$



CONCEPTOS PREVIOS

PROPIEDADES ESTÁTICAS DE LA SECCIÓN:

- Área: Suma de todos los puntos de la sección

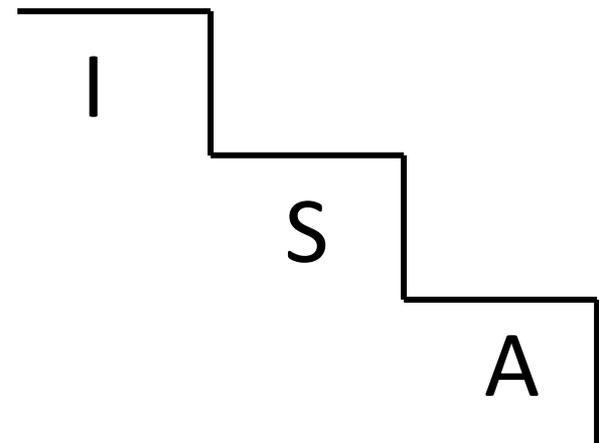
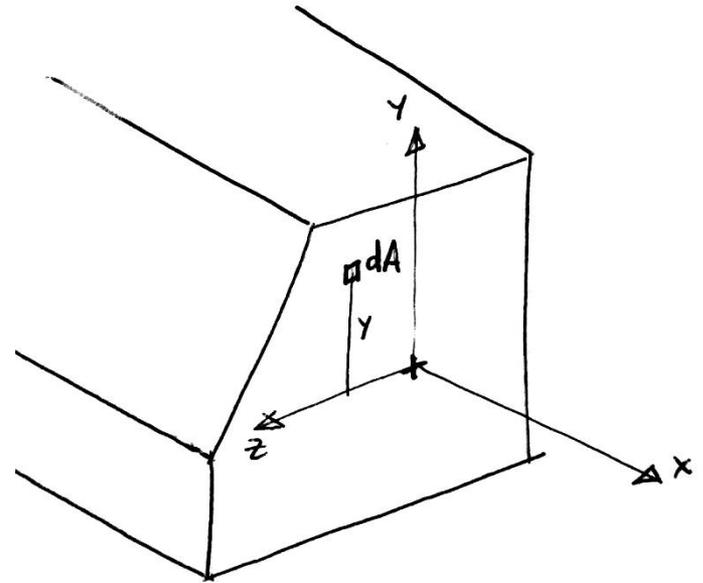
$$A = \int_A dA$$

- Momento estático: Suma de cada punto por su brazo mecánico

$$S = \int_A y dA$$

- (Momento de) inercia: Suma de cada punto por el **cuadrado** de su brazo mecánico

$$I = \int_A y^2 dA$$



CONCEPTOS PREVIOS

EQUILIBRIO ENTRE TENSIONES Y SOLICITACIONES

- Axil:

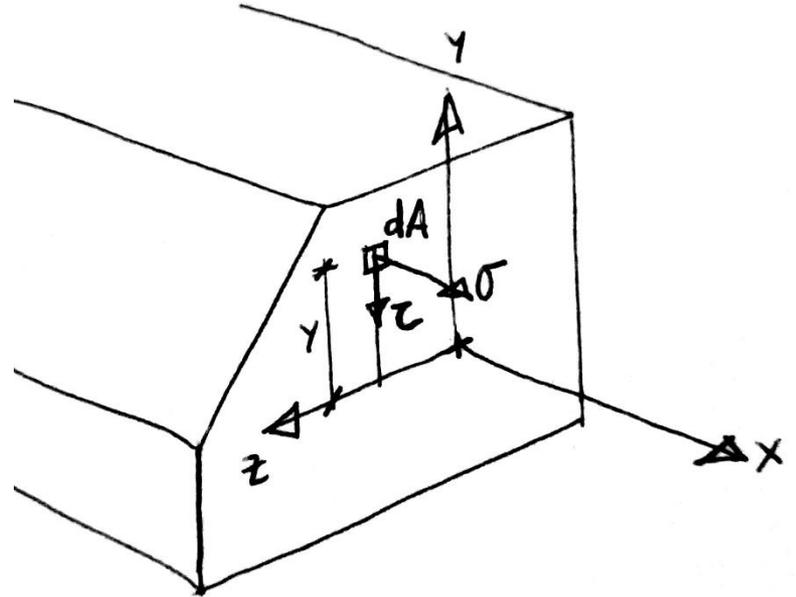
$$dN = dA \cdot \sigma \Rightarrow N = \int_A \sigma dA$$

- Cortante:

$$dV = dA \cdot \tau \Rightarrow V = \int_A \tau dA$$

- Momento:

$$dM = dA \cdot \sigma \cdot (-y) \Rightarrow M = - \int_A \sigma \cdot y dA$$



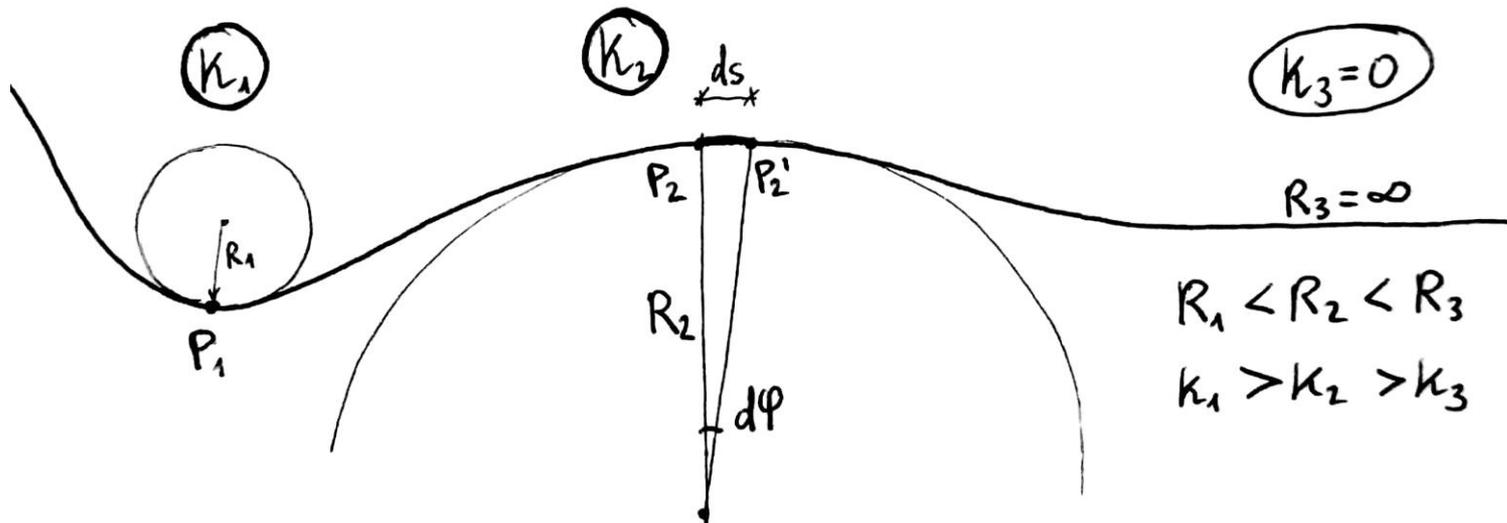
CONCEPTOS PREVIOS

CURVATURA (κ)

La curvatura κ en un punto P de una curva genérica es el inverso del radio R de la única circunferencia tangente a la curva en el punto P y en los puntos P' infinitamente cercanos a P .

Intuitivamente, da una idea de lo “doblada” que está la curva en cada punto.

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

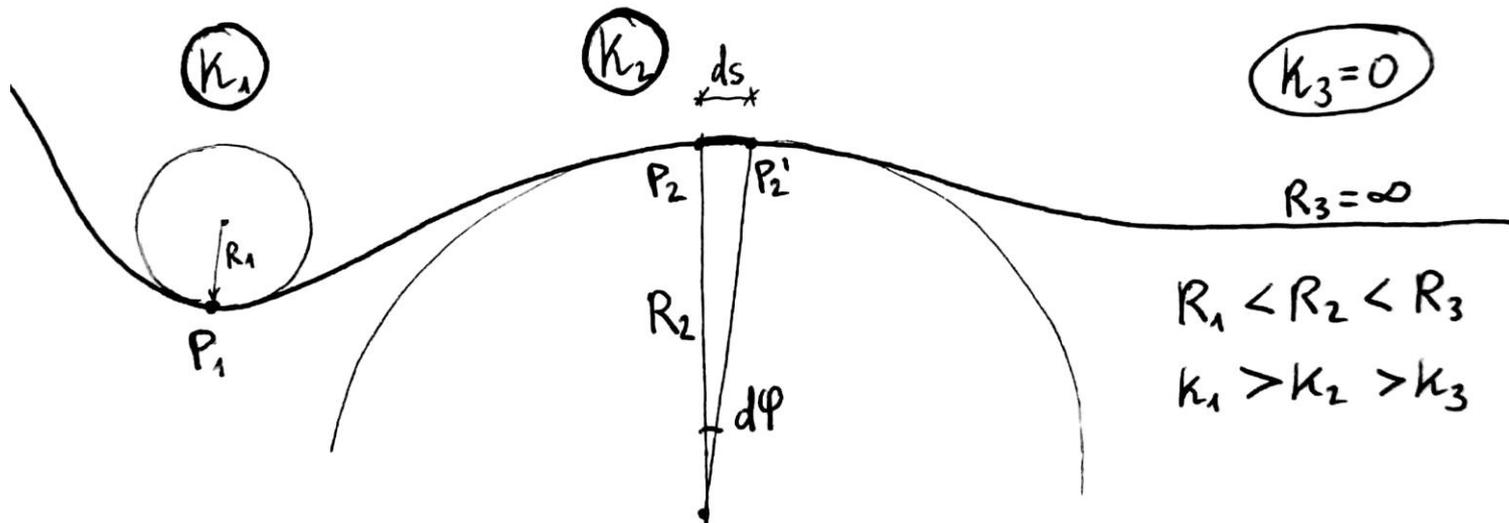


CONCEPTOS PREVIOS

CURVATURA (κ)

Desde el punto de vista de la circunferencia, se puede expresar como la variación del ángulo abierto ($d\varphi$) al recorrer una pequeña porción de curva (ds)

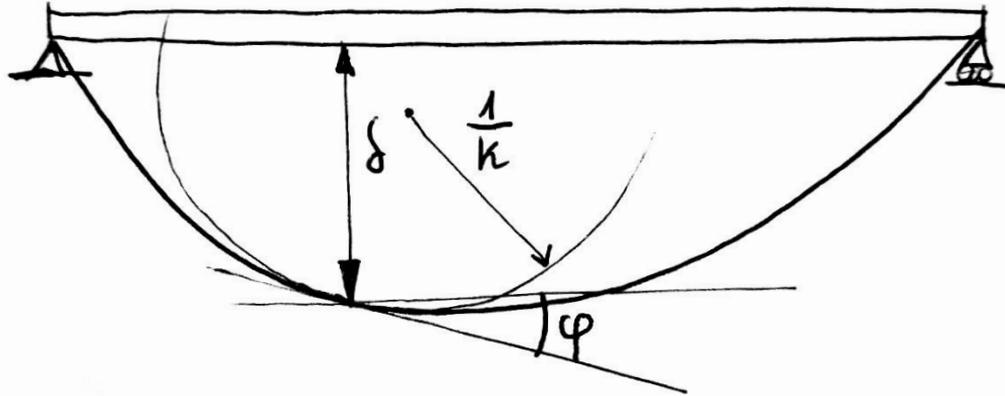
$$\tan(d\varphi) = \frac{ds}{R} \Rightarrow d\varphi = ds \cdot \kappa \Rightarrow \kappa = \frac{d\varphi}{ds}$$



MECANISMO DE FLEXIÓN

Para transmitir cargas aplicadas transversalmente a su directriz, la barra debe deformarse de tal manera que:

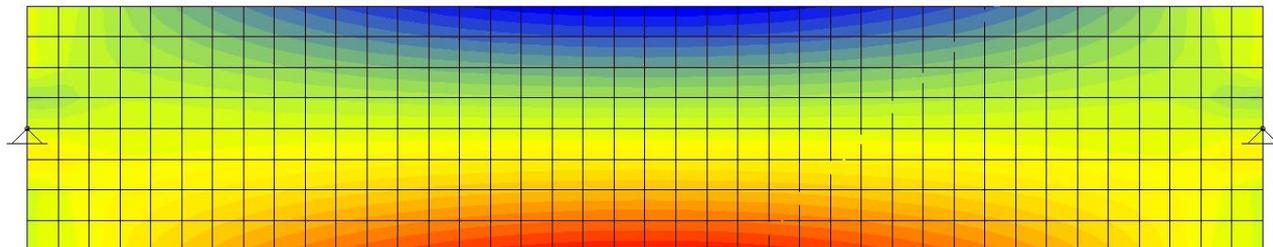
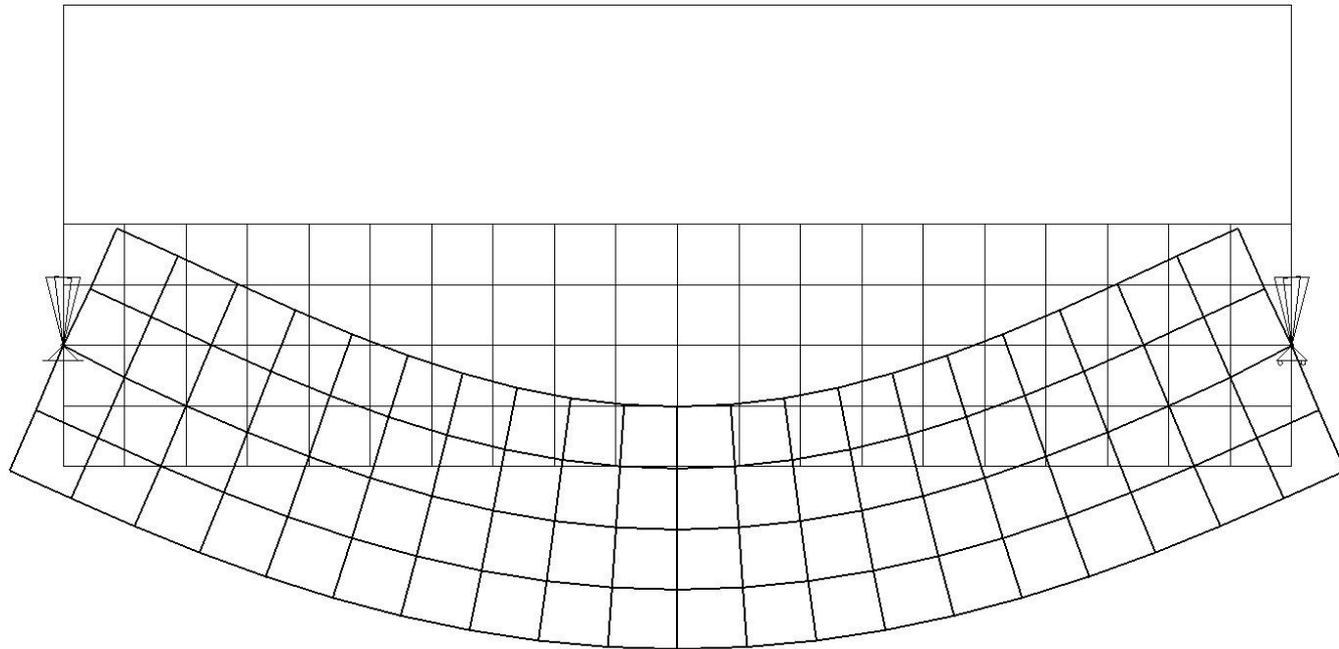
- La barra se **curva** (κ)
- Las secciones se ven obligadas a **girar** (φ)
- Algunos puntos **descienden** (δ)



Para conservar la energía total, la viga compensa la pérdida de energía potencial producida por el descenso de parte de su material a través de acumular energía de deformación elástica por flexión, de tal manera que al cesar el esfuerzo la viga recupera su posición inicial.

MECANISMO DE FLEXIÓN

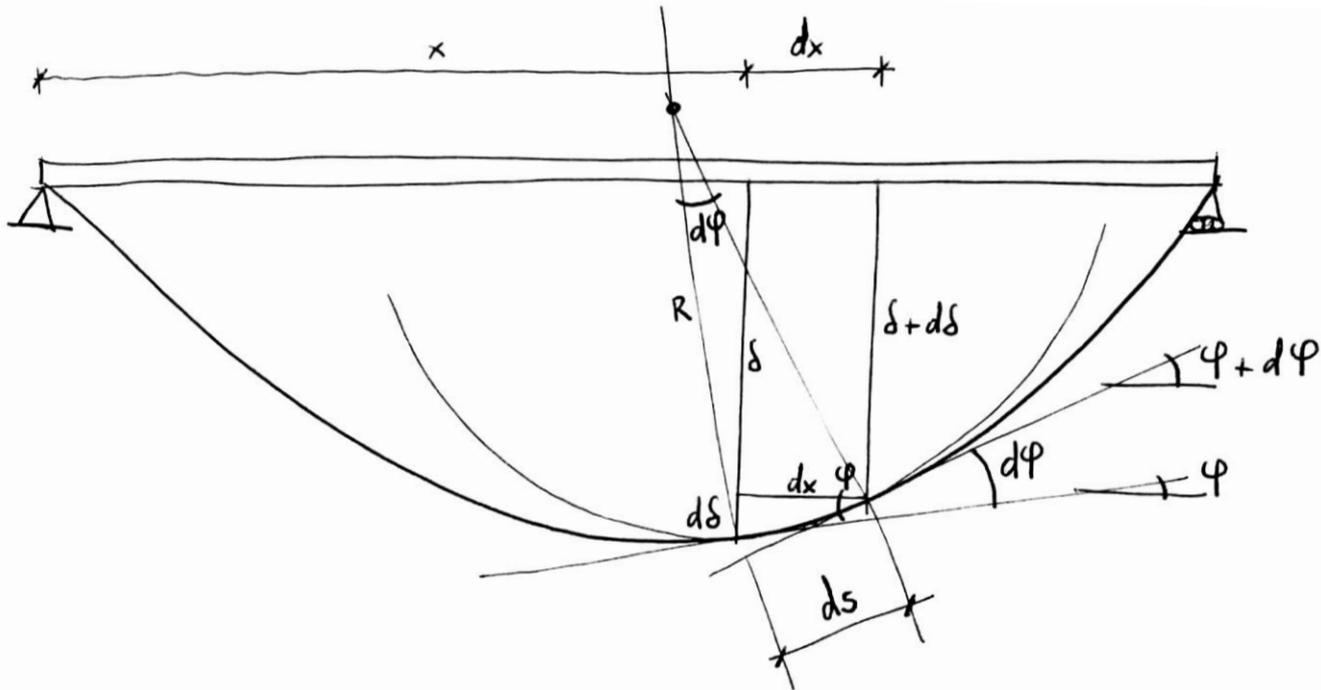
Las fibras experimentan **deformaciones longitudinales** (alargamientos o acortamientos), dependiendo de su posición dentro de la sección (coordenada local y).



ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA DEFLEXIÓN

Deflexión (δ), giro (φ) y curvatura (κ) están relacionados entre sí por el operador derivada, es decir, se puede interpretar su sentido físico en términos de pendientes y variaciones.

Se tiene una barra deformada. Por un punto cualquiera y por otro situado inmediatamente adyacente, se localizan sus tres variables: δ , φ , κ en el primer punto; $\delta+d\delta$, $\varphi+d\varphi$, κ en el segundo)



ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA DEFLEXIÓN

De ello resulta que:

- La curvatura mide lo “rápido” que varía el giro a lo largo de la barra
- El giro mide lo “rápido” que varía la deflexión a lo largo de la barra (su pendiente)

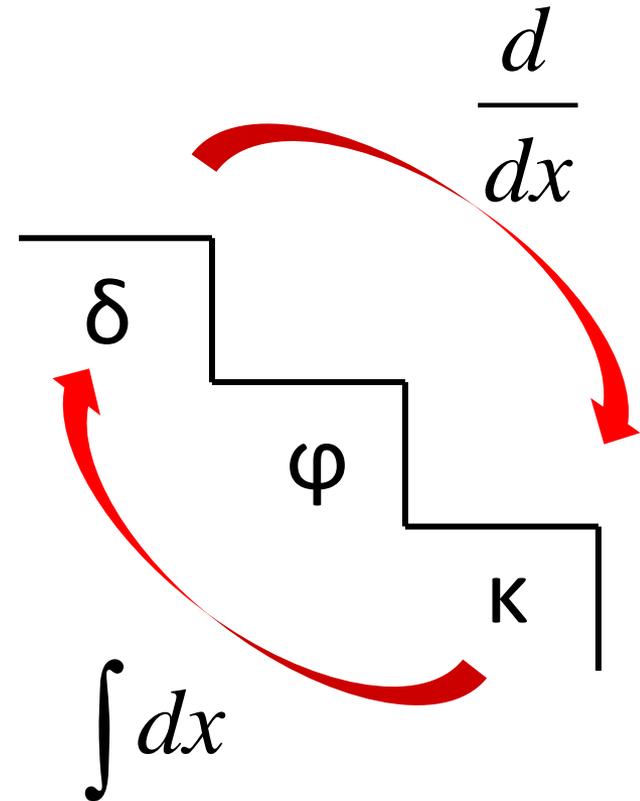
$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2\delta}{dx^2}$$

$$\varphi = \frac{d\delta}{dx}$$

En notación funcional:

$$\kappa(x) = \varphi'(x) = \delta''(x)$$

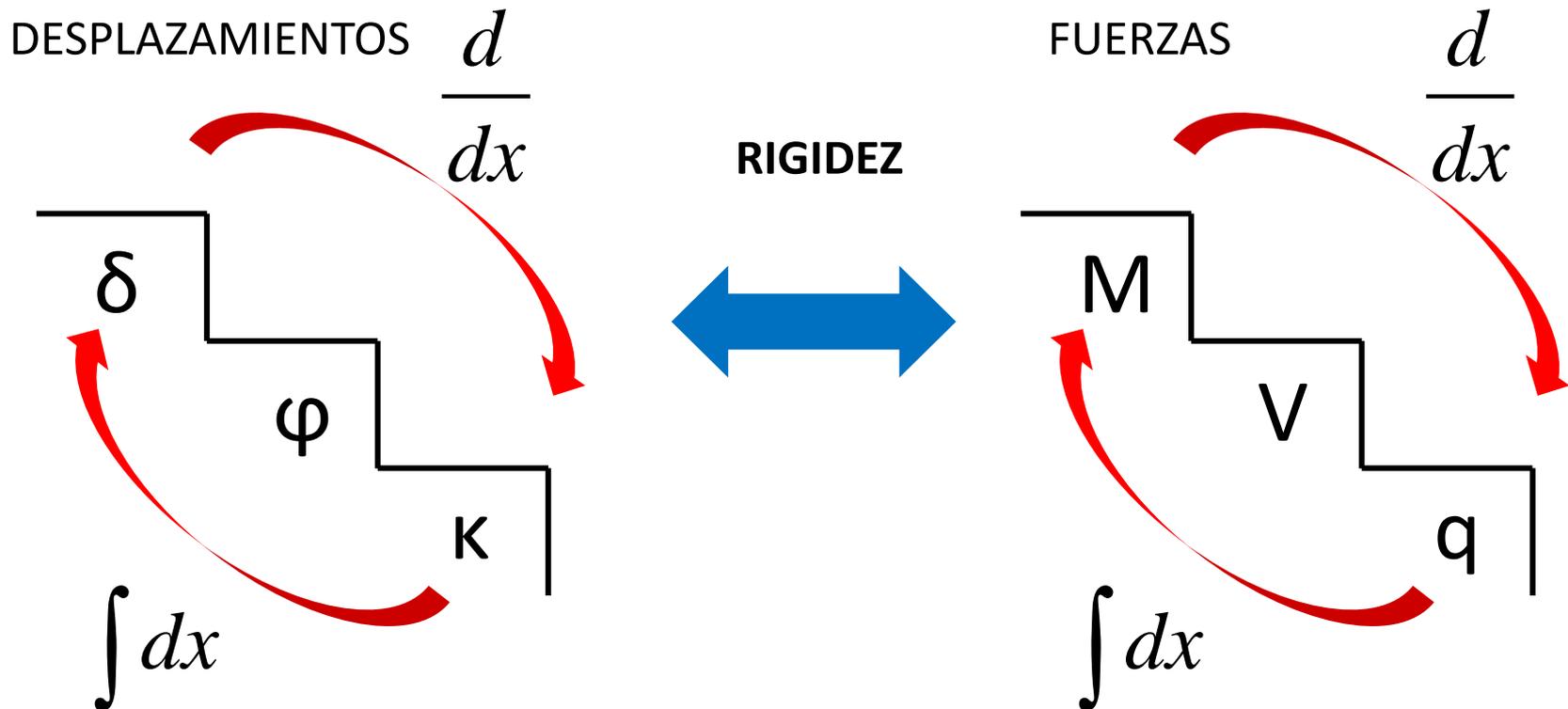
$$\varphi(x) = \delta'(x)$$



RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS

Las variables de **fuerza** (Momento – Cortante – Carga repartida) están relacionadas entre sí; y análogamente para las variables de **desplazamiento** (Deflexión – Giro – Curvatura).

¿Hay alguna relación entre estos dos grupos? Como cualquier relación fuerza-desplazamiento, habrá un parámetro de tipo “**rigidez**” que las relacione



RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS

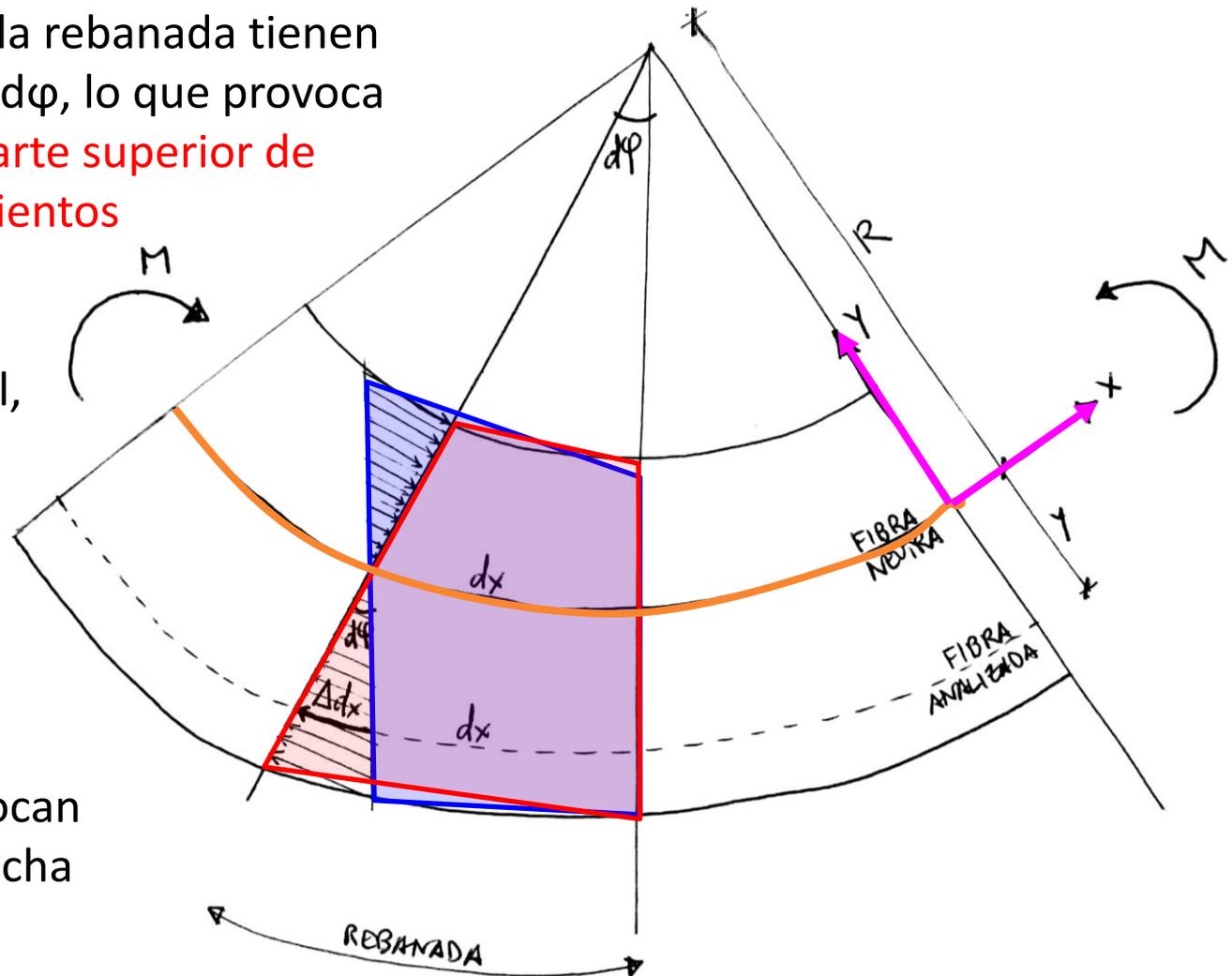
Se toma una porción de barra a flexión pura, y se analiza una **rebanada** (dx).

La curvatura $\kappa = 1/R$ es constante en la rebanada.

Las caras opuestas de la rebanada tienen una diferencia de giro $d\varphi$, lo que provoca **acortamientos en la parte superior de la rebanada y alargamientos en la parte inferior**.

Existe una fibra central, a una altura aún indeterminada, que ni se acorta ni se alarga: se denomina **fibra neutra** (FN).

Los **ejes locales** se colocan preliminarmente en dicha fibra neutra.



RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS

El alargamiento o acortamiento viene dado por la función de **deformación longitudinal $\varepsilon(y)$** , que depende de la **posición "y"** de la fibra analizada.

Dicha fibra, de longitud dx , experimenta un alargamiento Δdx , luego su deformación es:

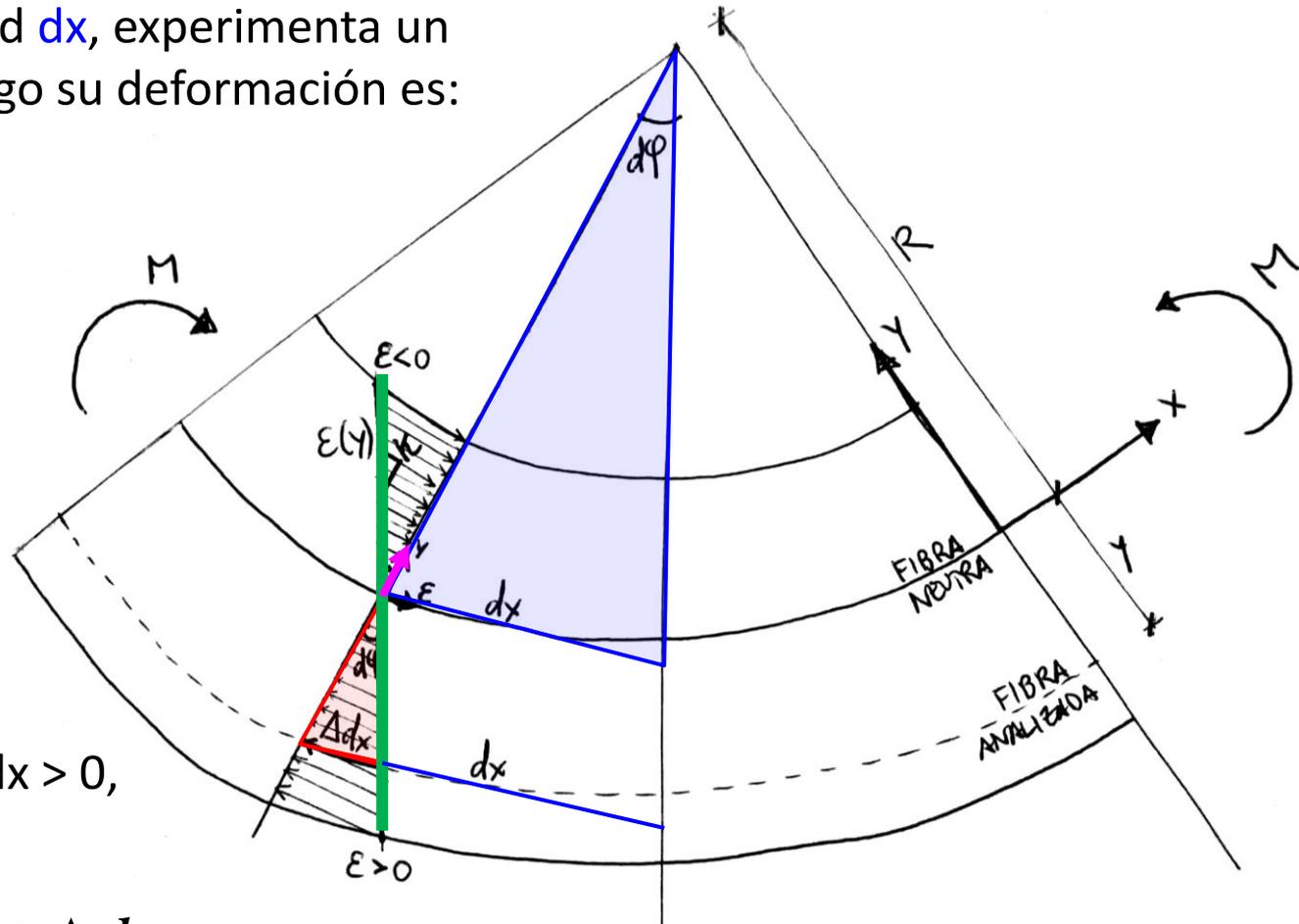
$$\varepsilon(y) = \frac{\Delta dx}{dx}$$

Por semejanza de triángulos, se tiene

$$\frac{|y|}{R} = \frac{|\Delta dx|}{dx}$$

En este caso $y < 0$ y $\Delta dx > 0$, luego

$$|y| = -y ; \quad |\Delta dx| = \Delta dx$$



RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS

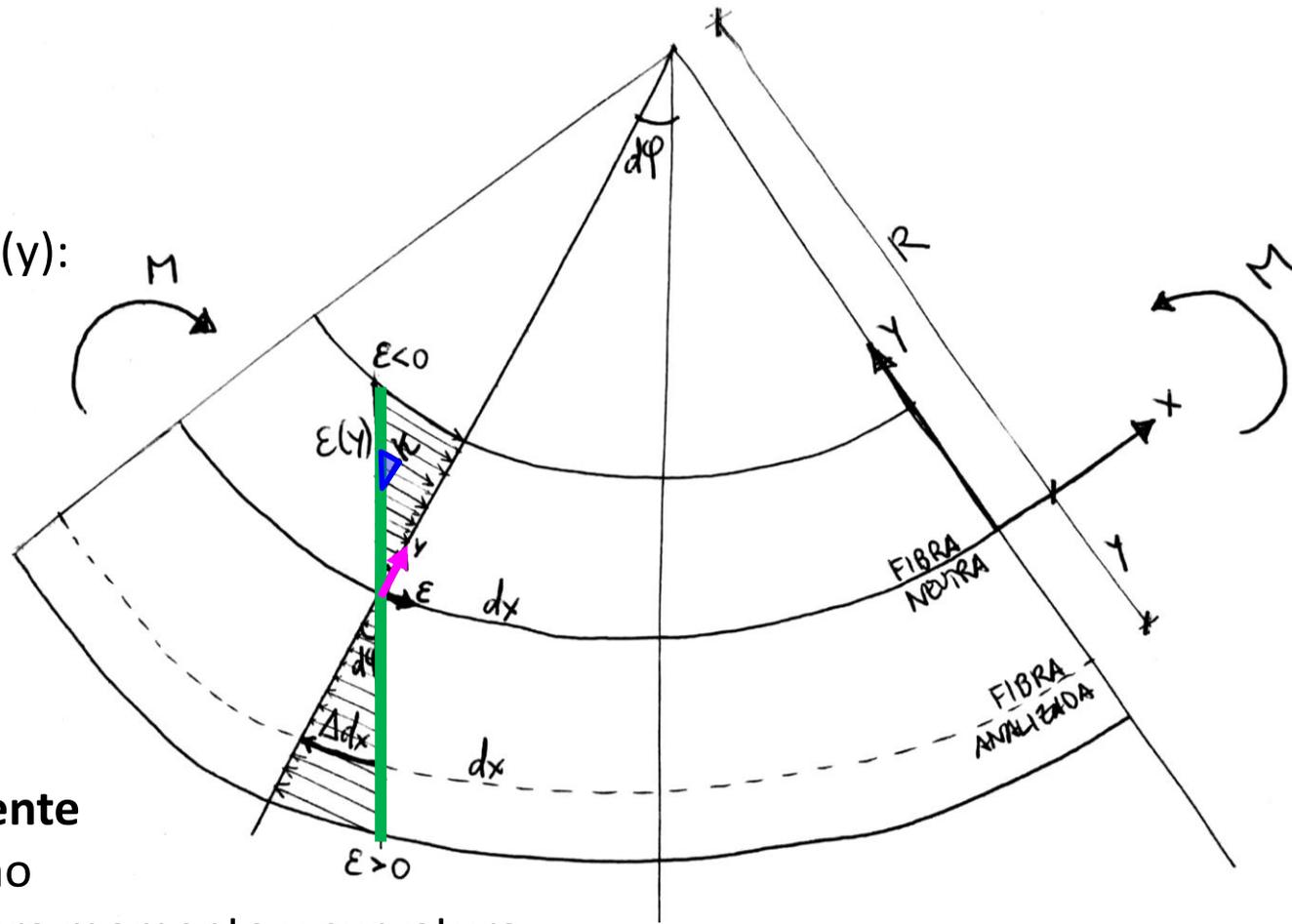
Por tanto:

$$\frac{-y}{R} = \frac{\Delta dx}{dx}$$

Sustituyendo por κ y $\varepsilon(y)$:

$$-\kappa \cdot y = \varepsilon(y)$$

Luego la **deformación** es una función **lineal** que depende de la altura de la fibra dentro de la sección (**cota y**), y cuya **pendiente** es la **curvatura**. El signo negativo indica que para momento y curvatura positivos, la parte superior de la sección ($y > 0$) se acorta ($\varepsilon < 0$), y viceversa.



RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS

Se busca ahora la función de **tensiones normales $\sigma(y)$** en las fibras de la sección
Sustituyendo $\varepsilon(y)$ en la Ley de Hooke:

$$\sigma(y) = E \cdot \varepsilon(y) = -E\kappa \cdot y$$

Luego $\sigma(y)$ es otra **función lineal** de y ,
con pendiente $-E\kappa$. Como
 $\varepsilon(y)$, para momento
positivo la parte
superior de la sección
se comprime y la
inferior se tracciona.

$$M > 0, \kappa > 0$$

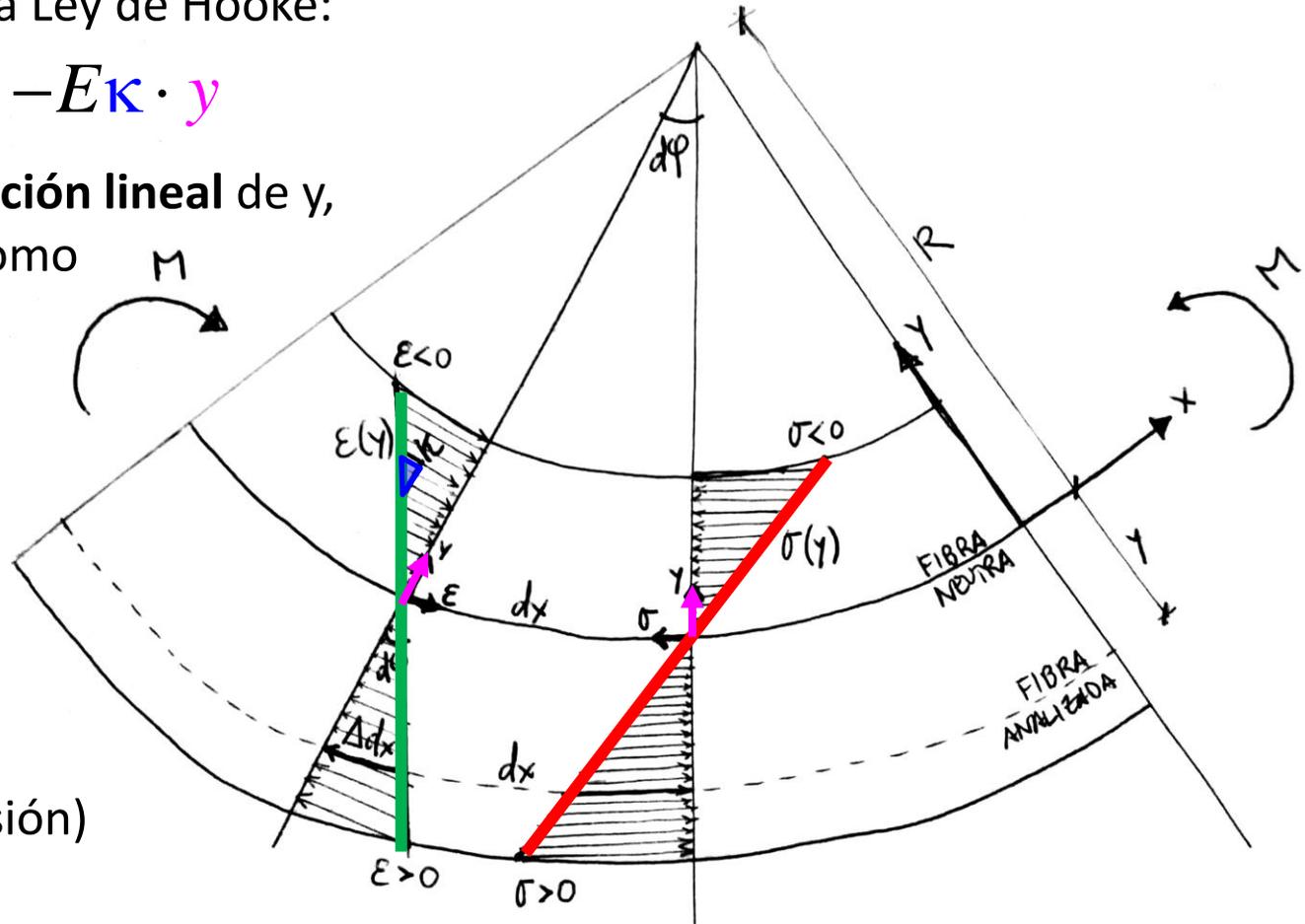
$$y > 0 \text{ (superior)}$$

$$\varepsilon, \sigma < 0 \text{ (compresión)}$$

$$y < 0 \text{ (inferior)}$$

$$\varepsilon, \sigma > 0 \text{ (tracción)}$$

$$M < 0, \kappa < 0 \rightarrow \text{Viceversa}$$



RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS

Las tensiones sobre la sección derecha de la rebanada deben estar en equilibrio con las sollicitaciones.

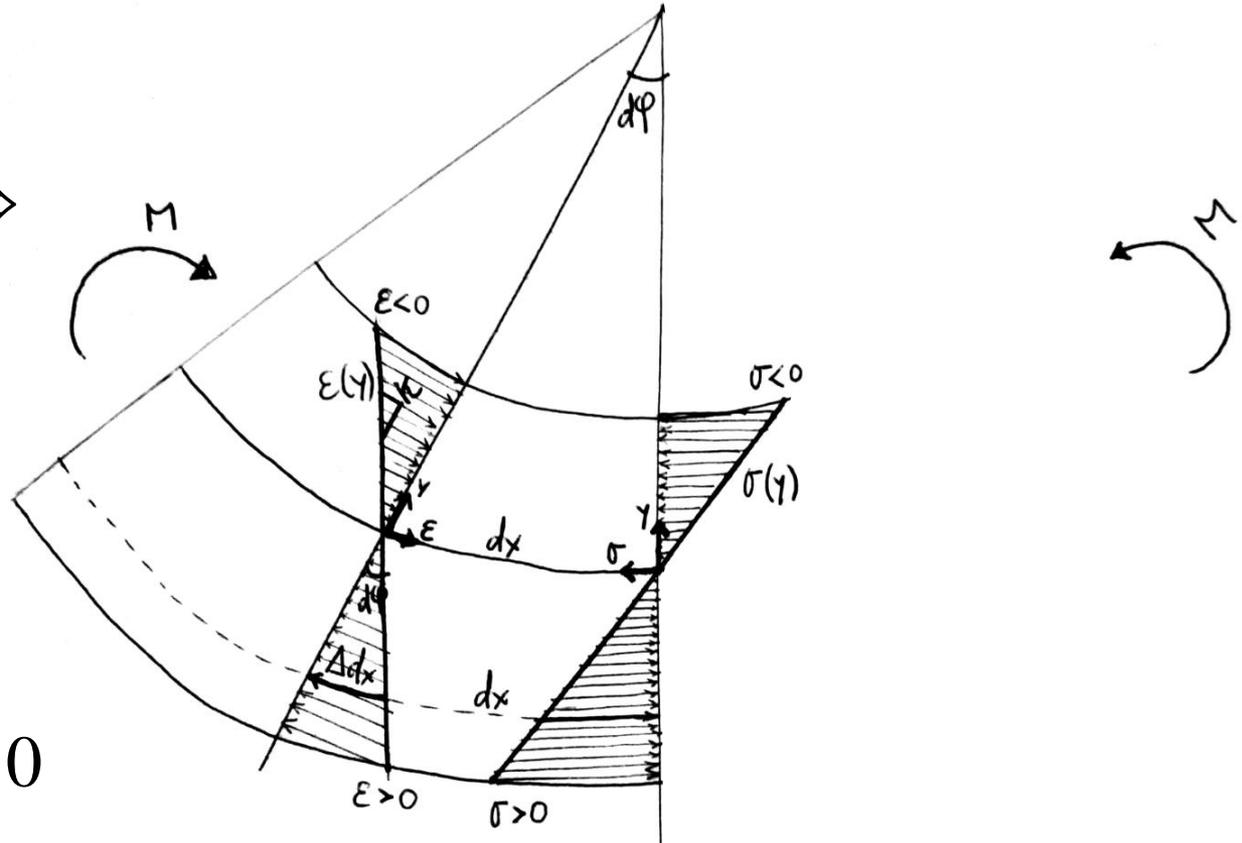
Equilibrio de axiles:

$$N = \int_A \sigma(y) dA = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A -E\kappa y dA =$$

$$= -E\kappa \int_A y dA = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A y dA = 0 \Rightarrow S = 0$$



Momento estático nulo \rightarrow Los ejes locales pasan por el CDG de la sección \rightarrow
 \rightarrow La **fibra neutra** es un plano horizontal que **pasa por el CDG de la sección**

RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS

Equilibrio de momentos:

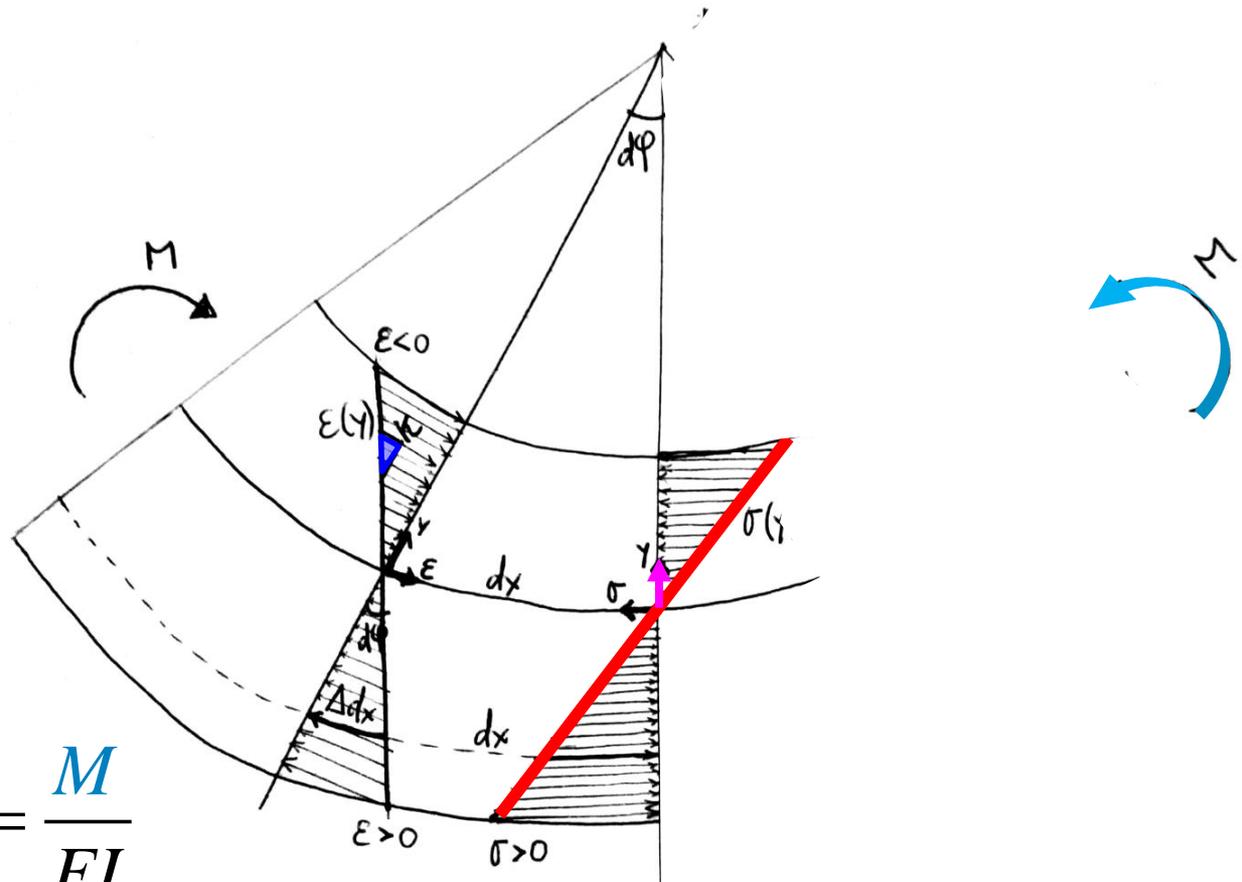
$$M = - \int_A \sigma(y) y dA =$$

$$= - \int_A - E \kappa y^2 dA =$$

$$= E \kappa \int_A y^2 dA =$$

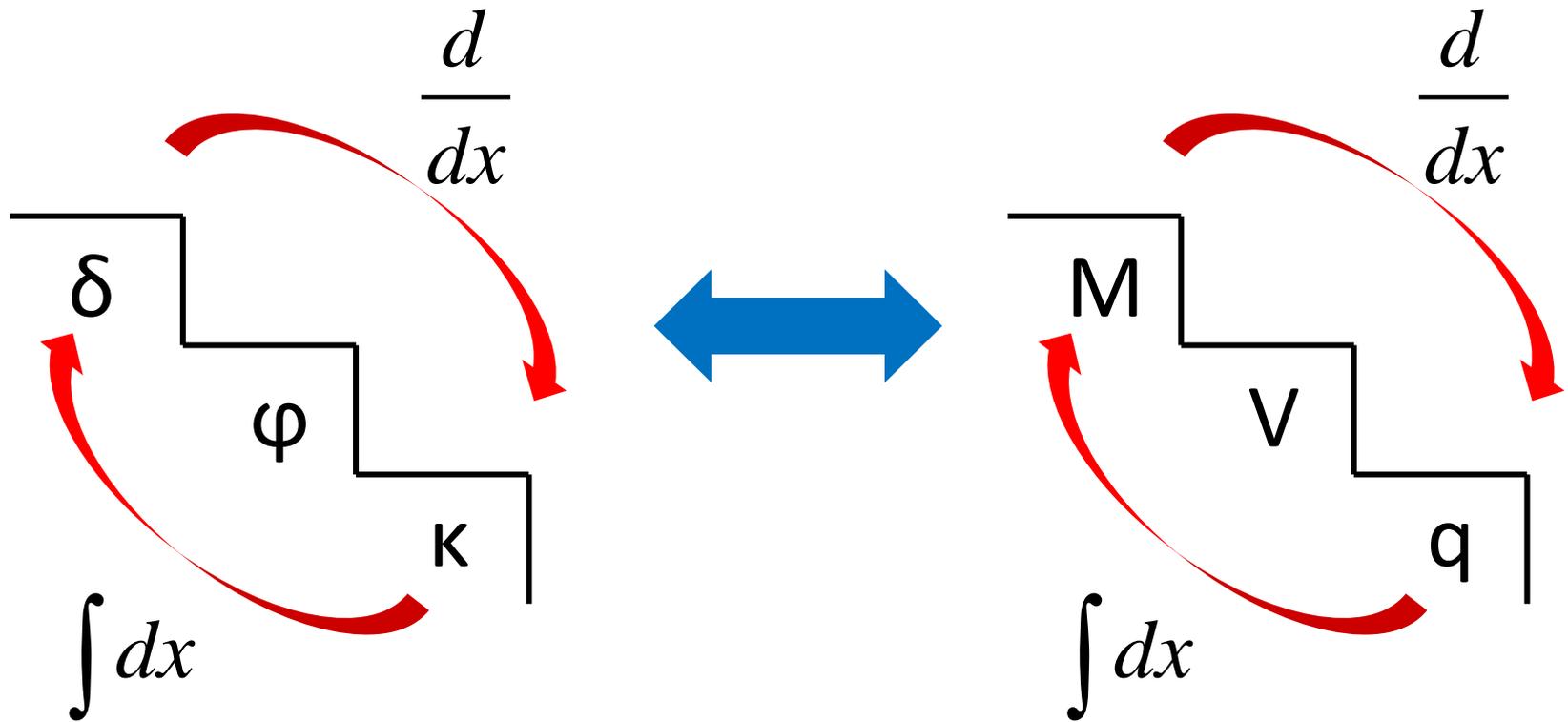
$$= E \kappa I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = EI \cdot \kappa \Rightarrow \kappa = \frac{M}{EI}$$

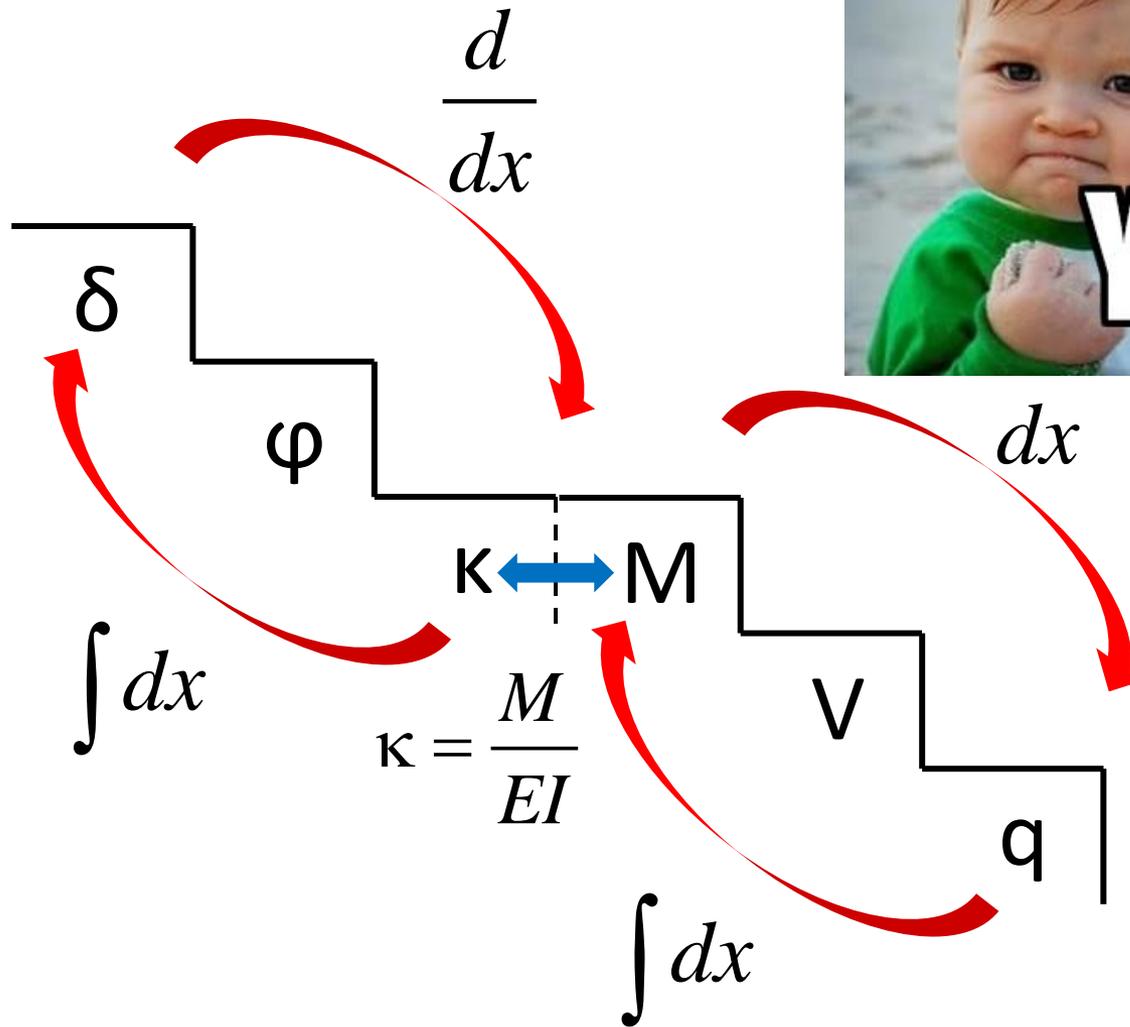


La relación buscada entre fuerzas y desplazamientos se da entre el **momento flector** y la **curvatura**, a través de un término de rigidez, el producto **EI**, que se denomina “**rigidez a flexión de la sección**” y depende del material y la forma.

RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS



RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS



LEY DE NAVIER (DE LA FLEXIÓN)

La fórmula de la tensión en cada fibra, $\sigma(y)$, a partir del momento sollicitación, se obtiene sustituyendo la expresión de la curvatura:

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

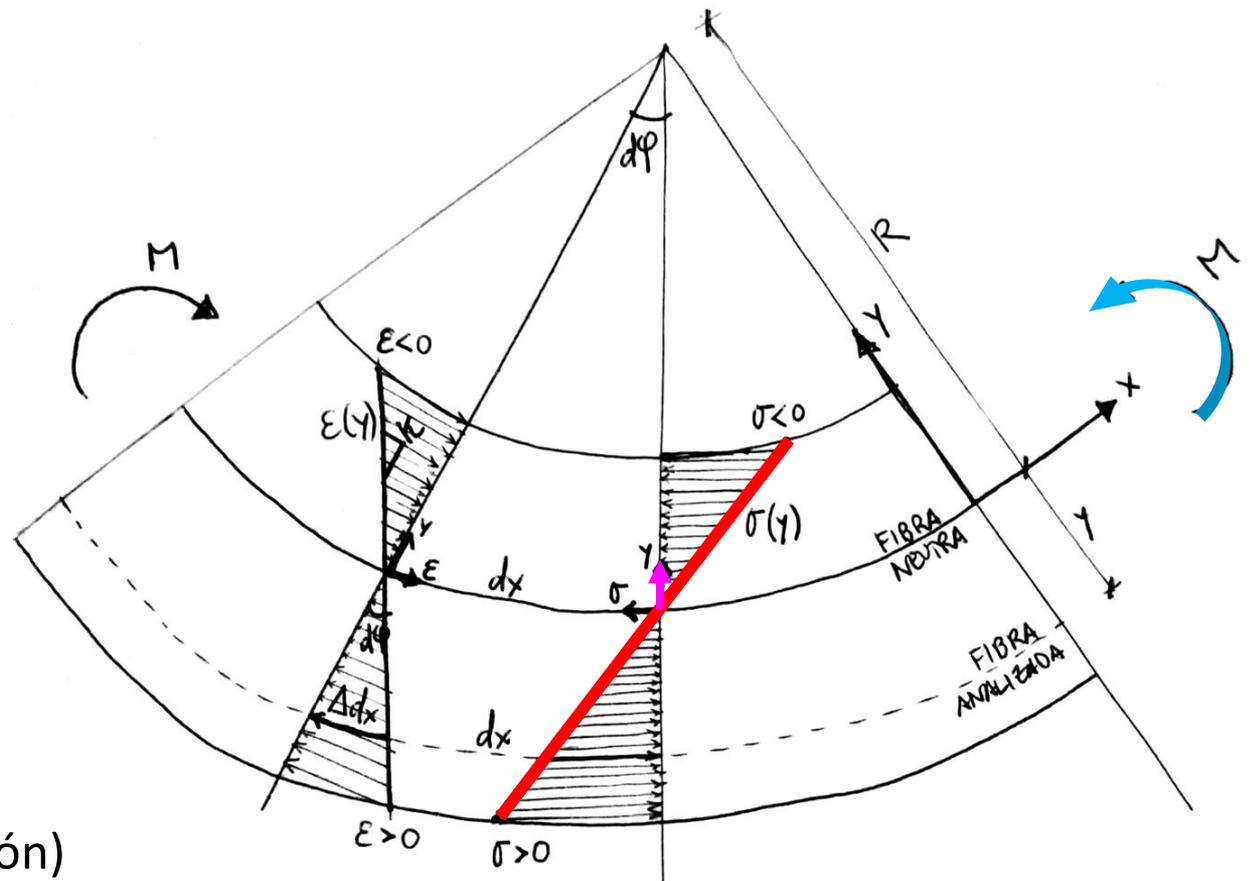
$$\sigma(y) = -E\kappa \cdot y =$$

$$= -E \frac{M}{EI} y =$$

$$= -\frac{M}{I} y$$

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I} y$$

Ley de Navier (de la flexión)



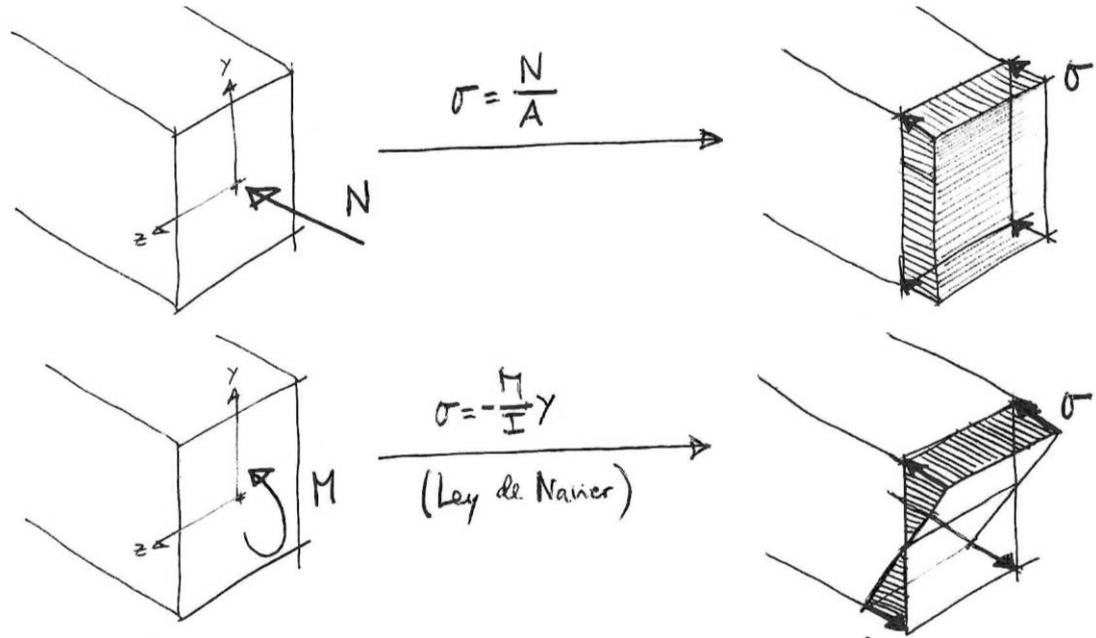
LEY DE NAVIER (DE LA FLEXIÓN)

Si se compara la ley de tensiones normales debida a la flexión con la debida al axil, se tiene que:

- En el numerador está la **solicitación** (\uparrow **solicitación** \Rightarrow \uparrow **tensión**)
- En el denominador está la característica de la **sección** que resiste la tensión (\uparrow **sección** \Rightarrow \downarrow **tensión**)
- Acompañando, está la variable **y** solo si la función no es constante (σ_M)

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

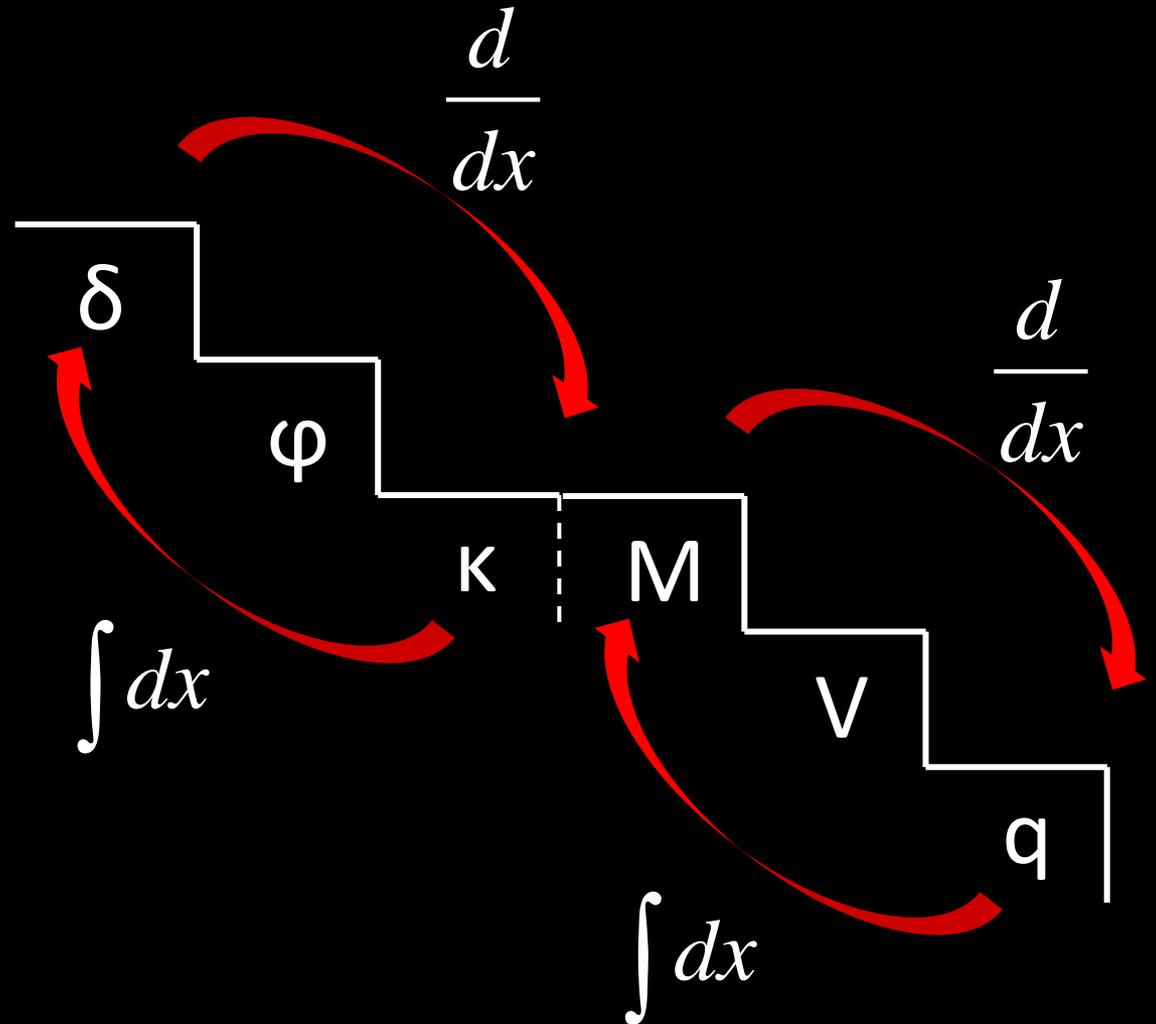
$$\sigma_M = -\frac{M}{I} y$$



RESUMEN DE FÓRMULAS

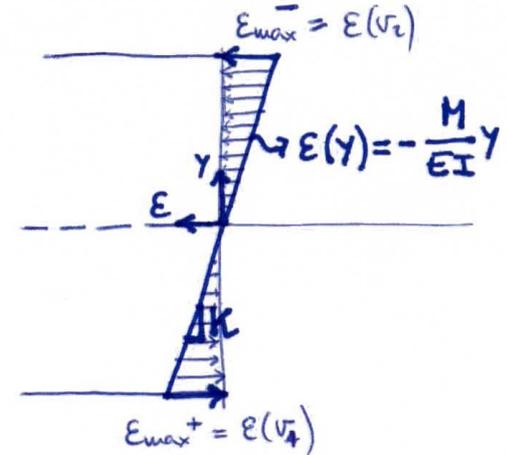
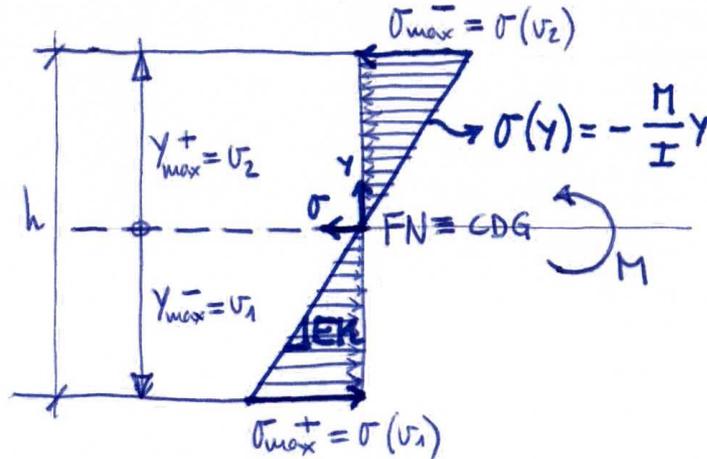
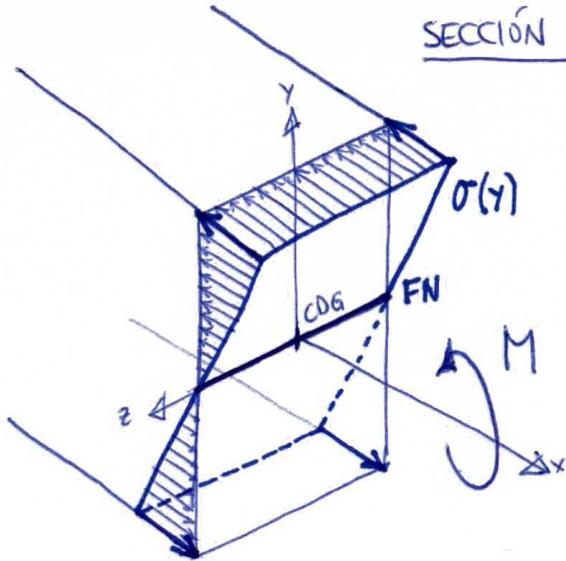
$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I} y$$

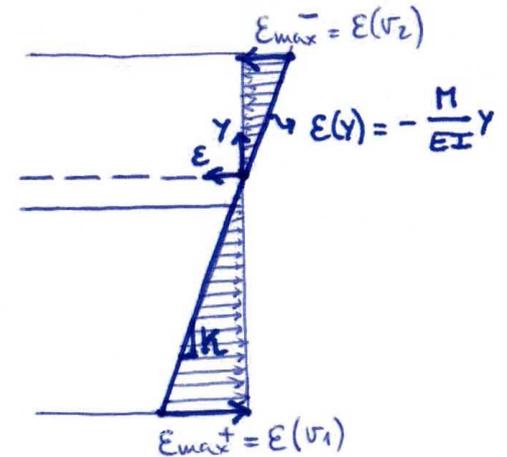
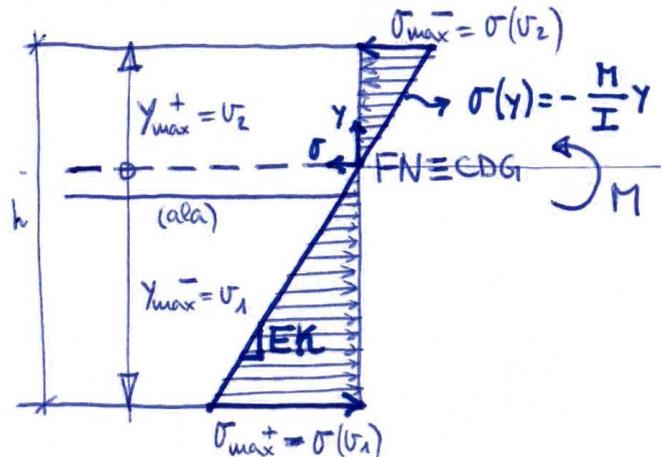
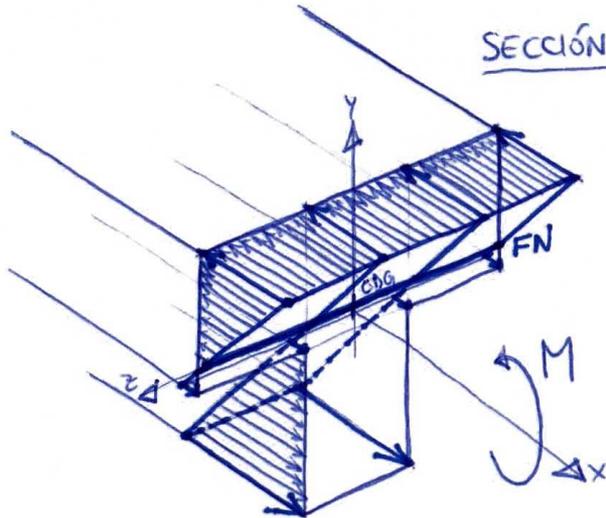


SECCIONES SIN SIMETRÍA

SECCIÓN CON SIMETRÍA VERTICAL: $|v_1| = |v_2| \Rightarrow |E_{max}^+| = |E_{max}^-| \Rightarrow |\sigma_{max}^+| = |\sigma_{max}^-|$



SECCIÓN SIN SIMETRÍA VERTICAL: $|v_1| > |v_2| \Rightarrow |E_{max}^+| > |E_{max}^-| \Rightarrow |\sigma_{max}^+| > |\sigma_{max}^-|$



DIMENSIONADO A FLEXIÓN PURA (O SIMPLE)

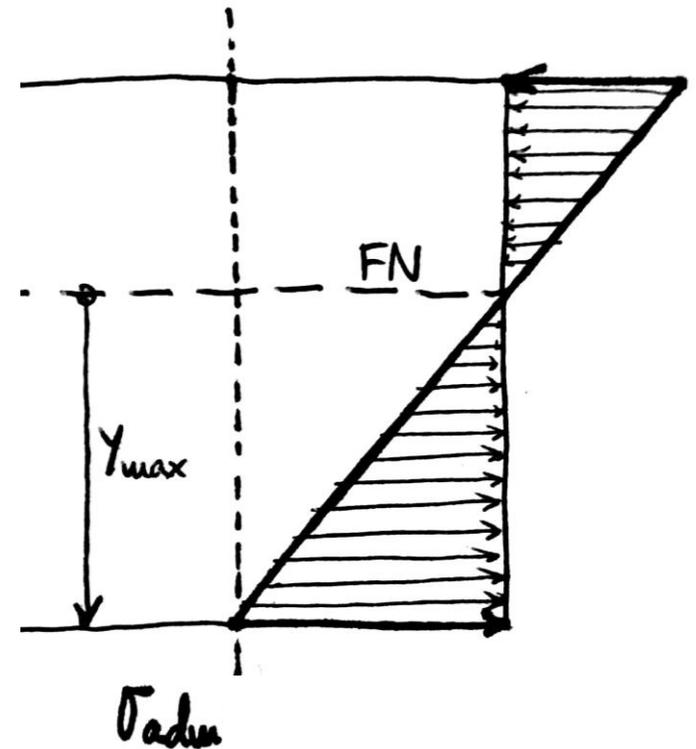
En este último caso, el dimensionado de la sección consiste en elegir una sección tal que la tensión máxima (σ_{\max}), que se alcanza en la fibra más alejada de la fibra neutra, sea menor o igual que la tensión admisible (σ_{adm}).

$$y_{\max} = \max \left\{ \left| y_{\max}^+ \right|, \left| y_{\max}^- \right| \right\}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma(y_{\max}) = \frac{|M|}{I} y_{\max}$$

Para ello, basta imponer $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{adm}}$, (con todas las variables en valor absoluto) y despejar las características geométricas de la sección buscada.

$$\sigma_{\text{adm}} = \sigma_{\max} = \frac{|M|}{I} y_{\max} \Rightarrow \frac{I}{y_{\max}} = \frac{|M|}{\sigma_{\text{adm}}}$$



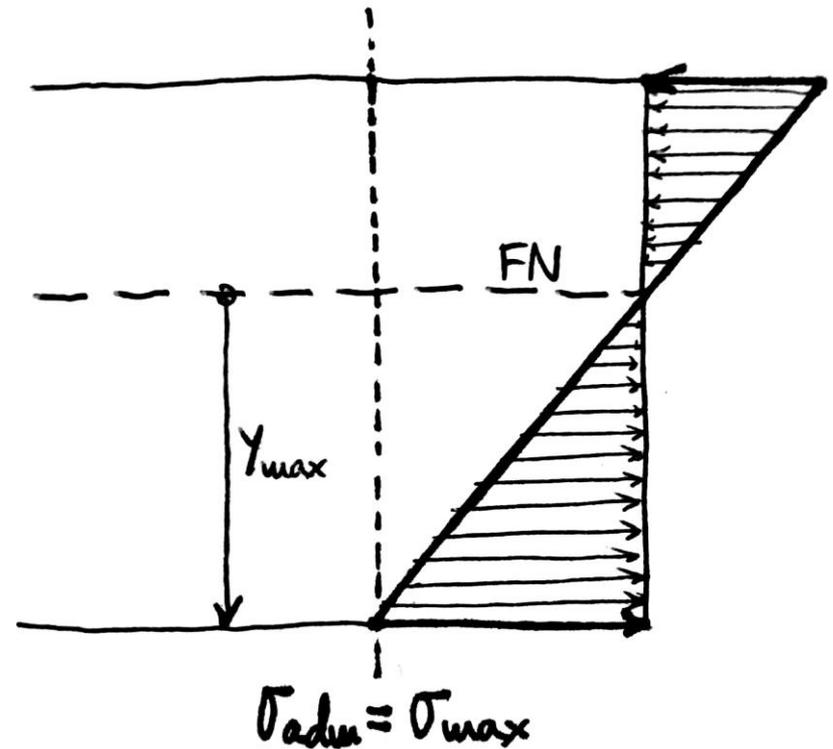
DIMENSIONADO A FLEXIÓN PURA (O SIMPLE)

De esta manera, el dimensionado a flexión consiste únicamente en encontrar una sección tal que su cociente I/y_{\max} , que sólo depende de su geometría, sea mayor que M/σ_{adm} . A I/y_{\max} lo denominamos **Módulo resistente (W)**.

$$\frac{I}{y_{\max}} = W$$

$$W \geq \frac{|M|}{\sigma_{adm}}$$

Fórmula para el dimensionado de secciones a flexión pura (o simple)



MÓDULO RESISTENTE

La **sección ideal** será la que consiga un **mayor módulo resistente** con la menor cantidad de material (**área mínima**). Esto es: maximizar la inercia y minimizar

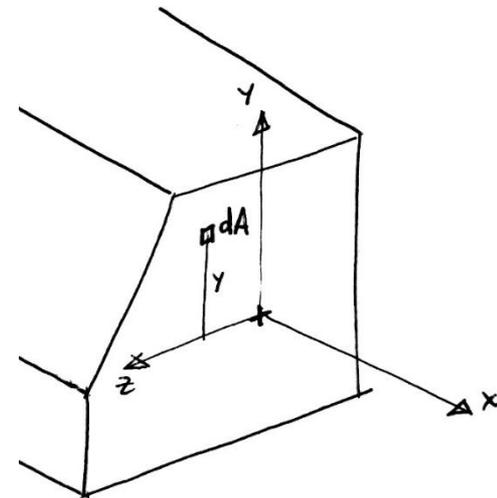
y_{\max} .

$$W = \frac{I}{y_{\max}}$$

Sin embargo, ambas estrategias son contrapuestas: la manera más eficaz de **maximizar la inercia es aumentar el canto de la sección**, de tal manera que las distancias “ y ” de los puntos respecto al CDG sean grandes

$$I = \int_A y^2 dA = \int_A (y^2 dy) dx$$

Dado que “ y ” tiene orden 3 en la expresión de la inercia (numerador de W) y orden 1 en el denominador, “gana” la inercia, es decir, **maximizar W es maximizar I** . Respecto de y_{\max} , lo óptimo es que haya simetría vertical, para minimizarla sin perder canto de sección.

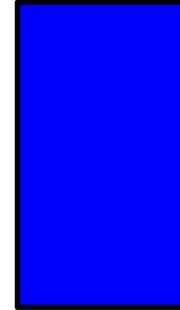


MÓDULO RESISTENTE

Algunas expresiones de W para distintas secciones son:

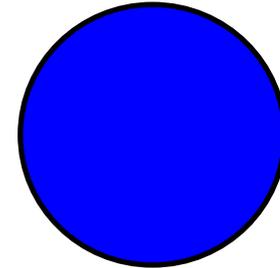
Sección rectangular:

$$W = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \approx 0.167Ah$$



Sección circular:

$$W = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{\pi h^4/64}{h/2} = \frac{\pi h^3}{32} \approx 0.098Ah$$

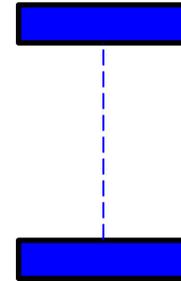


MÓDULO RESISTENTE

Algunas expresiones de W para distintas secciones son:

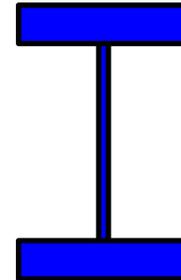
Sección óptima (teórica): toda el área concentrada lejos del CDG

$$W = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{2A/2 \left(\frac{h}{2} \right)^2}{h/2} = \frac{Ah}{2} = 0.5Ah$$



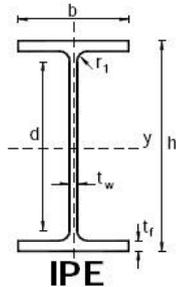
Sección óptima (real): perfiles en "I" (IPE, IPN):

$$W = \frac{I}{y_{\max}} \approx 0.35Ah$$

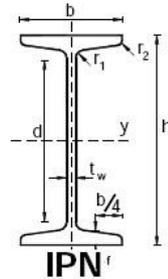


MÓDULO RESISTENTE

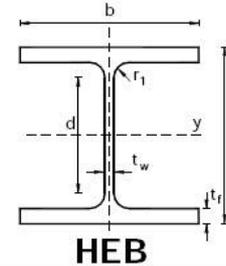
Para los distintos perfiles metálicos, los valores de W vienen va tabulados:



Perfil	propiedades Eje y		
	I_y mm ⁴ x 10 ⁵	I_y mm	$W_{e,y}$ mm ³ x 10 ³
IPE 80	0,80	32,4	20
IPE 100	1,71	40,7	34,2
IPE 120	3,18	49,0	53,0
IPE 140	5,41	57,4	77,3
IPE 160	8,69	65,8	109
IPE 180	13,2	74,2	146
IPE 200	19,4	82,6	194
IPE 220	27,7	91,1	252
IPE 240	38,9	99,7	324
IPE 270	57,9	112	429
IPE 300	83,6	125	557
IPE 330	118	137	713
IPE 360	163	150	904
IPE 400	231	165	1 160
IPE 450	337	185	1 500
IPE 500	482	204	1 930
IPE 550	671	223	2 440
IPE 600	921	243	3 070



Perfil	propiedades Eje y		
	I_y mm ⁴ x 10 ⁵	I_y mm	$W_{e,y}$ mm ³ x 10 ³
IPN 80	0,778	32	19,5
IPN 100	1,71	40,1	34,2
IPN 120	3,28	48,1	54,7
IPN 140	5,73	56,1	81,9
IPN 160	9,35	64	117
IPN 180	14,5	72	161
IPN 200	21,4	80	214
IPN 220	30,6	88	278
IPN 240	42,5	95,9	354
IPN 260	57,4	104	442
IPN 280	76	111	542
IPN 300	98	119	653
IPN 320	125	127	782
IPN 340	157	135	923
IPN 360	196	142	1 090
IPN 380	240	150	1 260
IPN 400	292	157	1 460
IPN 450	459	177	2 040
IPN 500	687	196	2 750
IPN 550	992	216	3 610
IPN 600	1390	234	4 630



Perfil	propiedades Eje y		
	I_y mm ⁴ x 10 ⁵	I_y mm	$W_{e,y}$ mm ³ x 10 ³
HEB 100	4,52	41,6	90
HEB 120	8,64	50,4	144
HEB 140	15,09	59,3	216
HEB 160	24,92	67,8	311
HEB 180	38,31	76,6	426
HEB 200	57,00	85,4	570
HEB 220	80,90	94,3	736
HEB 240	112,6	103	938
HEB 260	149,2	112	1 150
HEB 280	192,7	121	1 380
HEB 300	252	130	1 680
HEB 320	308	138	1 930
HEB 340	367	146	2 160
HEB 360	432	155	2 400
HEB 400	577	171	2 880
HEB 450	799	191	3 550
HEB 500	1 072	212	4 290
HEB 550	1 367	232	4 970
HEB 600	1 710	252	5 700
HEB 650	2 105	271	6 480
HEB 700	2 569	290	7 340
HEB 800	3 591	328	8 980
HEB 900	4 941	365	10 980
HEB 1000	6 448	401	12 890

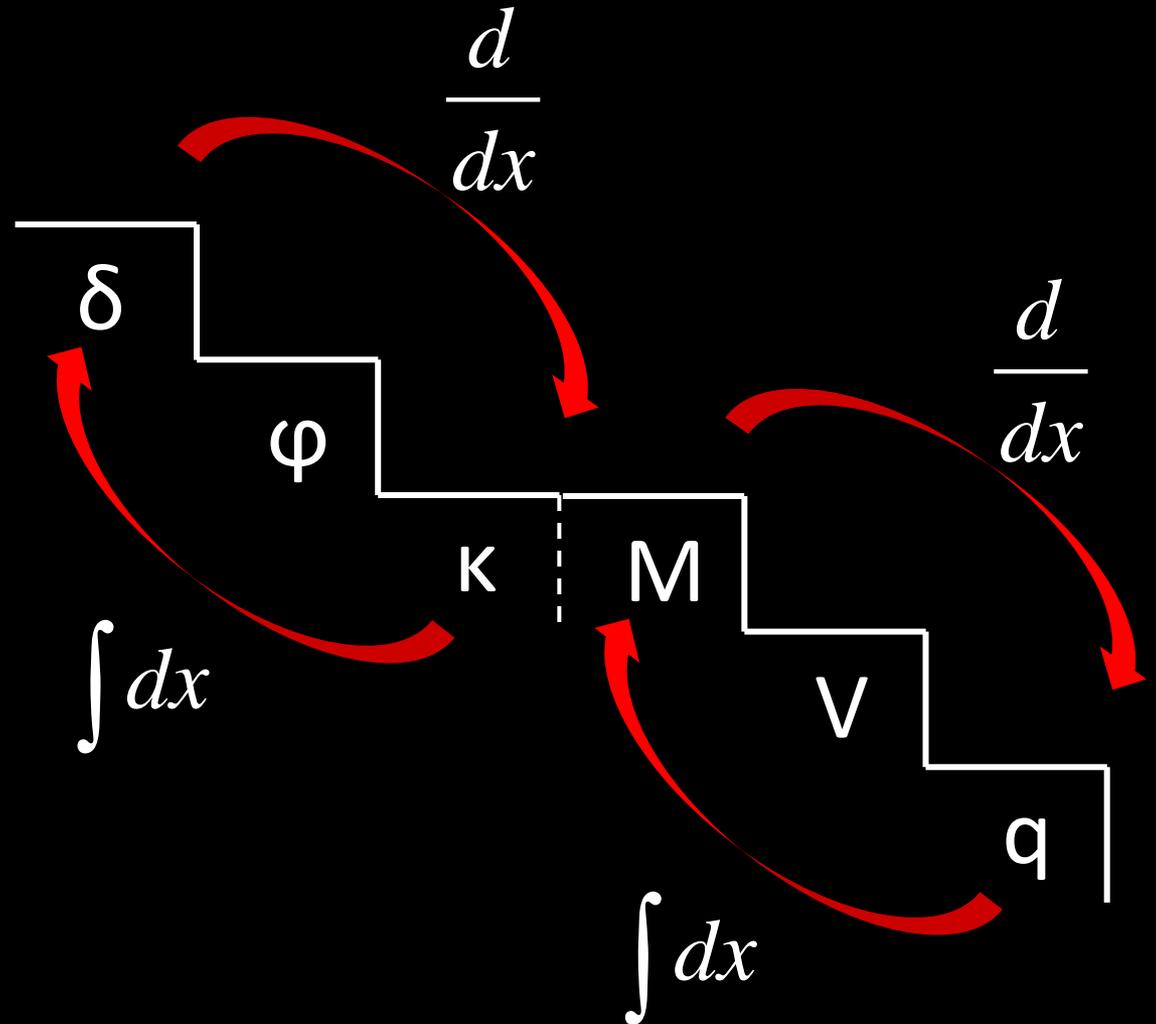
RESUMEN DE FÓRMULAS

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I} y$$

$$W = \frac{I}{y_{\max}}$$

$$W \geq \frac{|M|}{\sigma_{adm}}$$

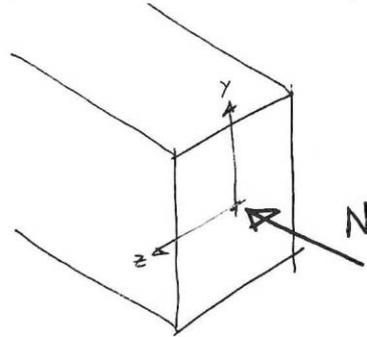


FLEXIÓN COMPUESTA

Por el principio de **superposición**, la función de tensiones para una sección sometida a flexión compuesta (N + M) es la suma de las funciones correspondientes:

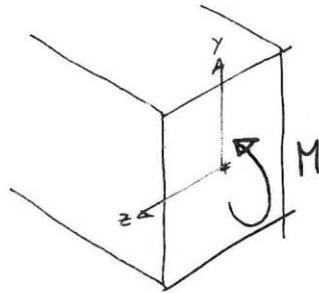
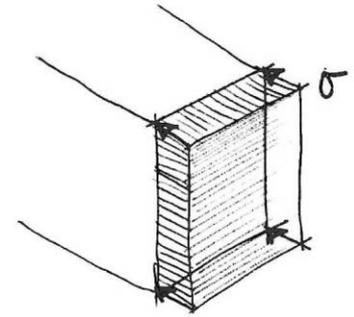
$$\sigma(y) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y$$

SOLICITACIÓN (SECCIÓN)



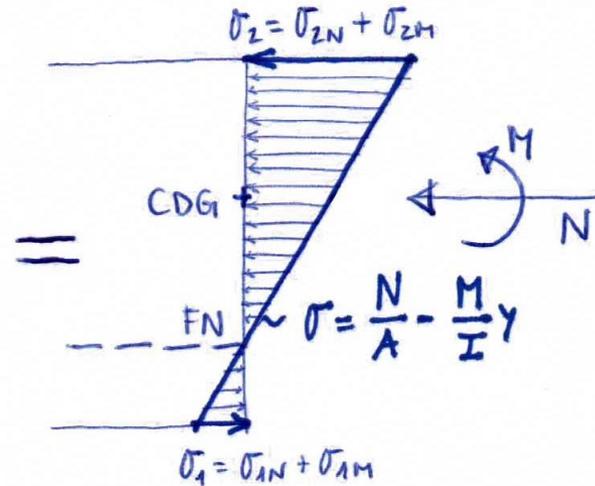
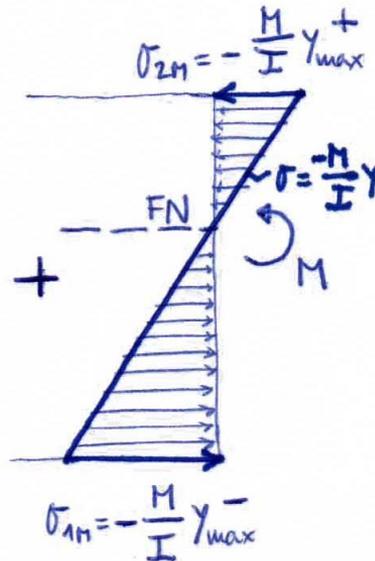
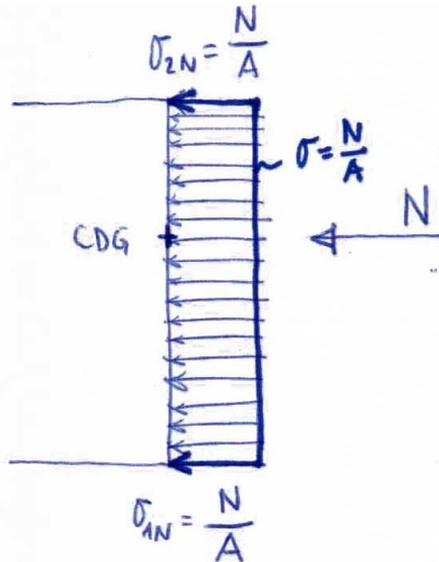
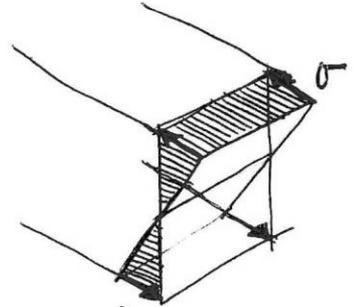
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

TENSION (PUNTOS)



$$\sigma = -\frac{M}{I} y$$

(Ley de Navier)

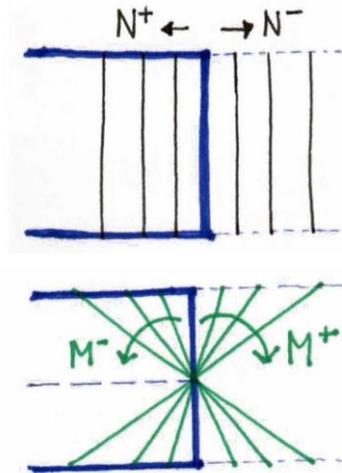


FLEXIÓN COMPUESTA

Se puede entender el plano de tensiones resultante como la combinación de:

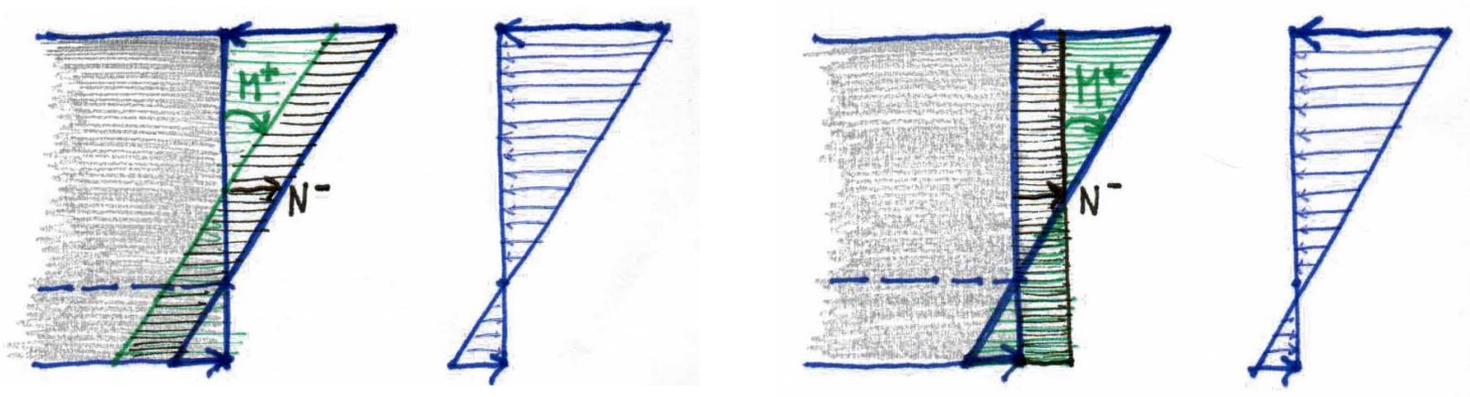
- Un **desplazamiento** debido a N
(compresión – derecha, tracción – izquierda)

- Un **giro** debido a M
(positivo – horario, negativo – antihorario)



(Regla mnemotécnica: simular con mano izquierda la sollicitación sobre rebanada izquierda)

Se pueden combinar en cualquier orden: giro + desplazamiento o viceversa:



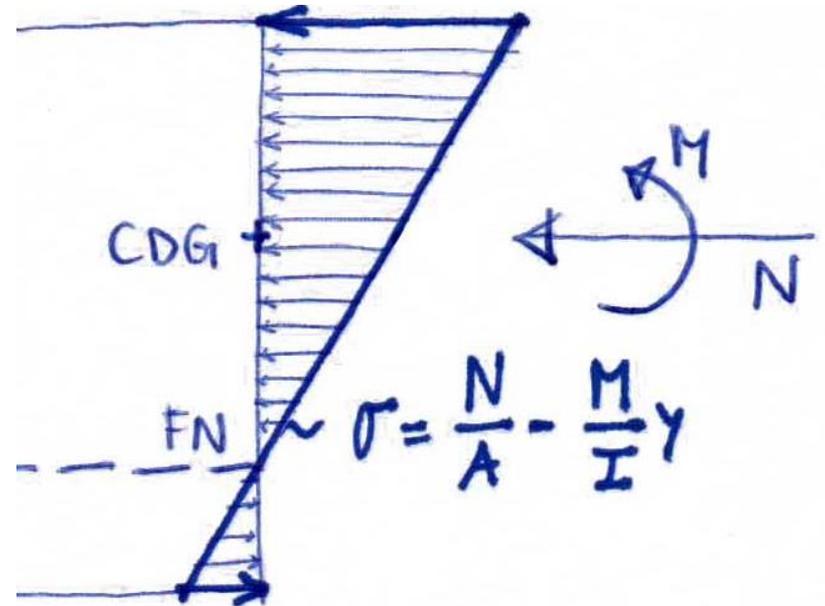
POSICIÓN DE LA FIBRA NEUTRA

En flexión simple, la fibra neutra pasa por el centro de gravedad de la sección ($y_{FN} = 0$). Sin embargo, el efecto del **axil**, desplazando el plano de tensiones en horizontal, **provoca que FN se desplace** hacia otra posición, en principio desconocida.

Para calcular la nueva y_{FN} , basta despejar “y” de la ley de flexión compuesta, sustituyendo $\sigma(y) = 0$ (condición para ser fibra neutra: que ni se comprima ni se traccione):

$$\sigma(y_{FN}) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y_{FN} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{FN} = \frac{I}{A} \frac{N}{M}$$

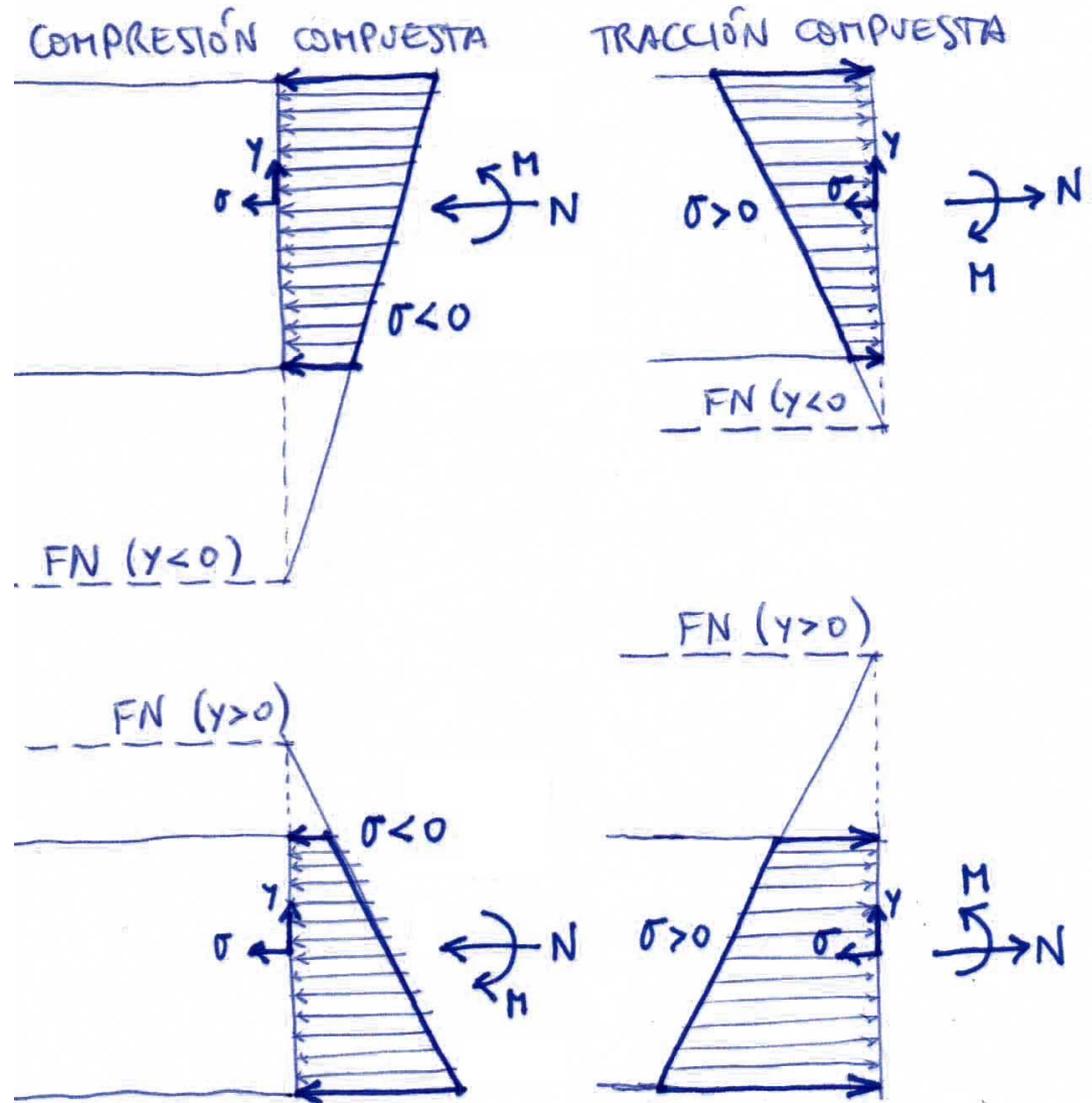


COMPRESIÓN Y TRACCIÓN COMPUESTA

Si el **axil** es **suficientemente grande** en relación al momento, la sección se encuentra toda ella comprimida o traccionada, según sea el signo del axil.

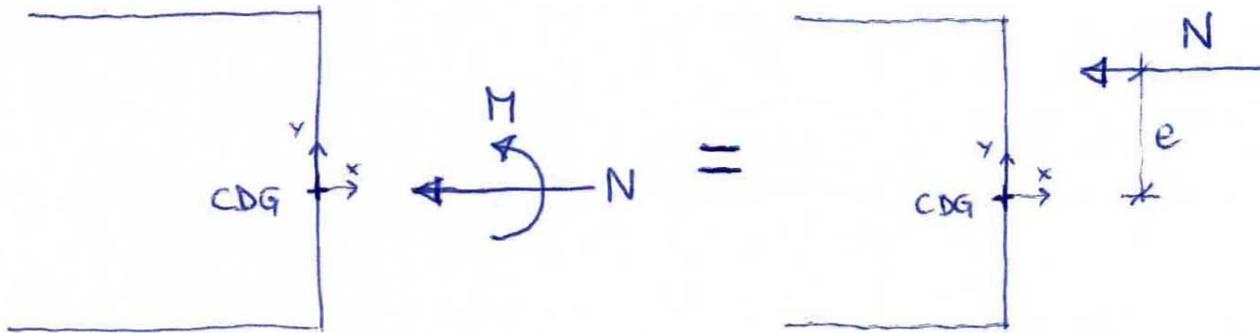
La FN se encuentra fuera de la sección; existen 4 posibles posiciones, correspondientes a las 4 combinaciones entre axil y momento de cada signo.

Este estado de flexión compuesta se suele llamar **compresión compuesta** o **tracción compuesta**

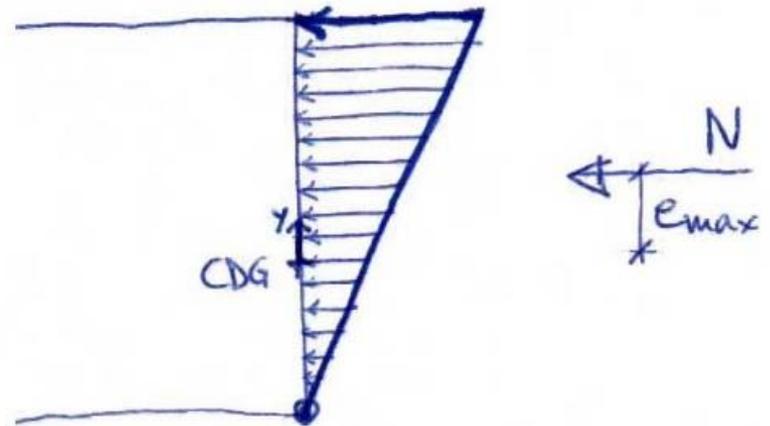


NÚCLEO CENTRAL

Cualquier estado de flexión compuesta (N+M) es equivalente a considerar que el axil actúa con una **excentricidad** (e), es decir, se sustituye el momento por una excentricidad: $M = N \cdot e$



Se define el **núcleo central** como el lugar geométrico de los puntos de aplicación de cualquier axil tal que la fibra neutra es tangente a la sección. En 2D, el axil está aplicado dentro del núcleo central si $|e| < |e_{\max}|$.



NÚCLEO CENTRAL

Para la sección rectangular, en 2D, el núcleo central ocupa el **tercio central**. Basta tomar la ley de la flexión compuesta, sustituir $M = N \cdot e$ e imponer que la tensión en cualquiera de las fibras extremas sea nula: $\sigma(y_{\max}) = \sigma(h/2) = 0$.

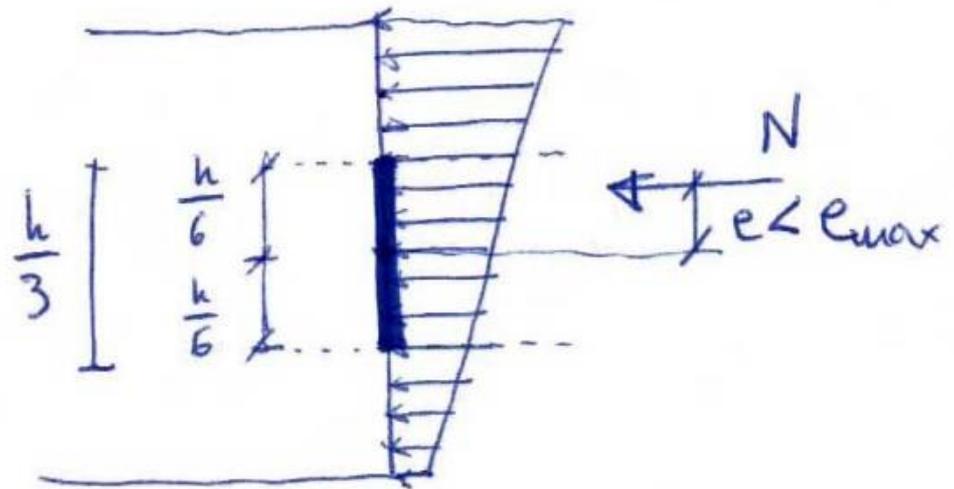
$$\sigma(y_{\max}) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y_{\max} = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} - \frac{N \cdot e_{\max}}{I} \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N \left(\frac{1}{bh} - \frac{e_{\max} h}{2 \cdot bh^3/12} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{bh} - \frac{6e_{\max}}{bh^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{bh} \left(1 - \frac{6e_{\max}}{h} \right) = 0 \Rightarrow$$

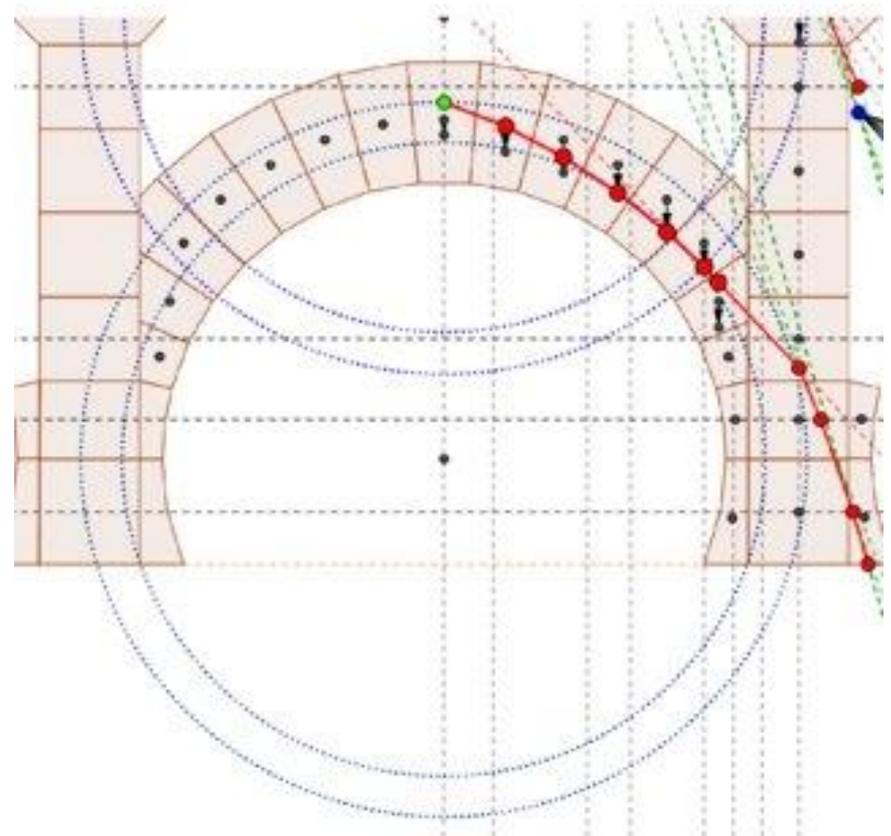
$$\Rightarrow 1 - \frac{6e_{\max}}{h} = 0 \Rightarrow e_{\max} = \frac{h}{6}$$



NÚCLEO CENTRAL

El núcleo central tiene **aplicaciones** varias:

- Arcos de fábrica en que se desea evitar la fisuración
- Zapatas donde se quiere evitar la separación del terreno
- ...



FLEXIÓN ESVIADA

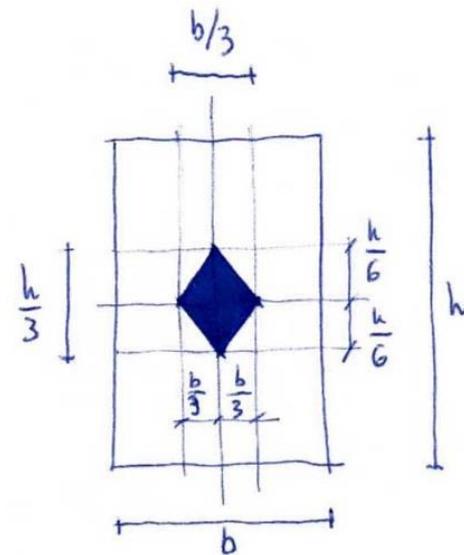
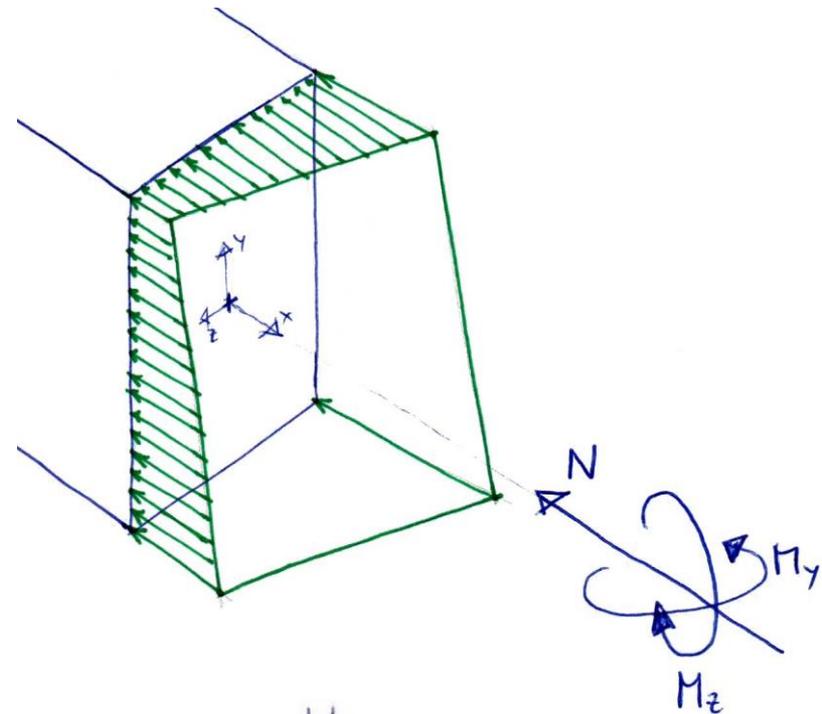
Por el principio de superposición, las tensiones cuando aparecen momentos flectores en las dos direcciones (M_z , M_y) es la suma de las correspondientes leyes de Navier:

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Si además existe un axil, la fórmula general de la flexión compuesta es:

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

La ley de tensiones forma un plano sobre la sección, y el núcleo central es un rombo de diagonales igual al tercio del lado correspondiente de la sección



RESUMEN DE FÓRMULAS

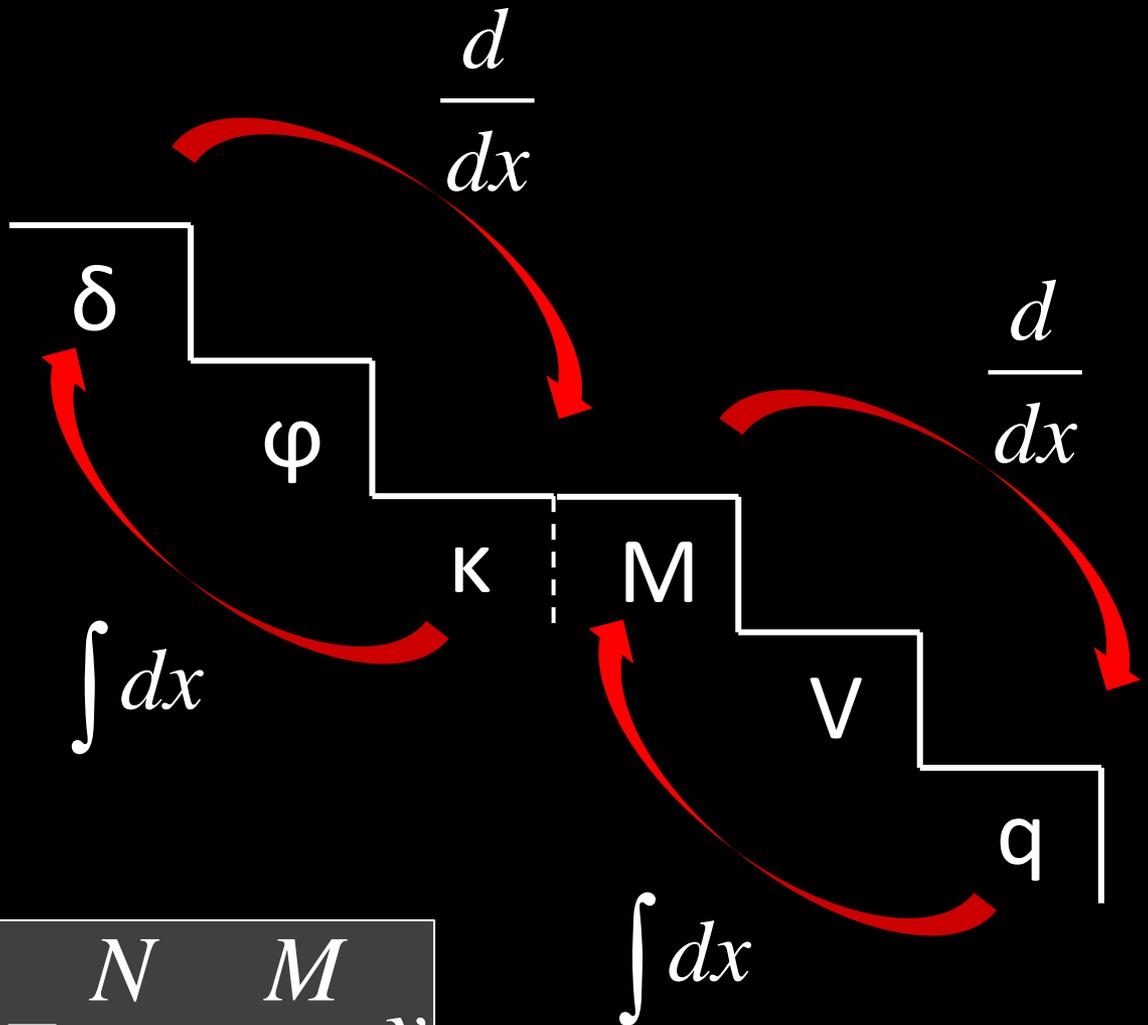
$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I} y$$

$$W = \frac{I}{y_{\max}}$$

$$W \geq \frac{|M|}{\sigma_{adm}}$$

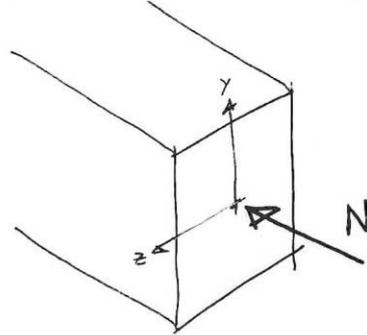
$$\sigma(y) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y$$



TIPO DE TENSIÓN SEGÚN LA SOLICITACIÓN ACTUANTE

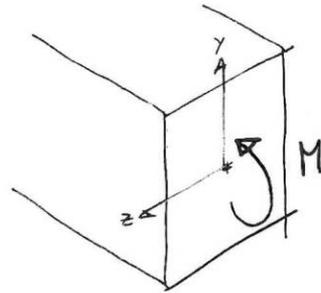
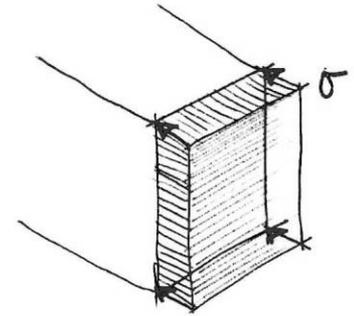
- N y M \rightarrow σ
- V y M_T \rightarrow τ

SOLICITACIÓN (SECCIÓN)



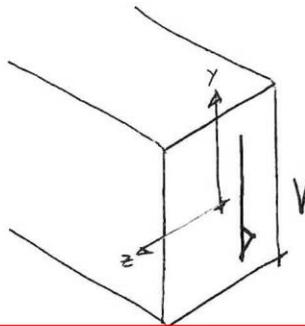
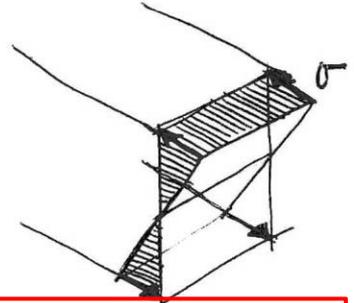
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

TENSIÓN (PUNTOS)



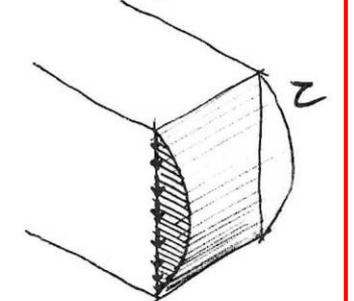
$$\sigma = -\frac{M}{I}y$$

(Ley de Navier)



$$\tau = \frac{Vs}{bI}$$

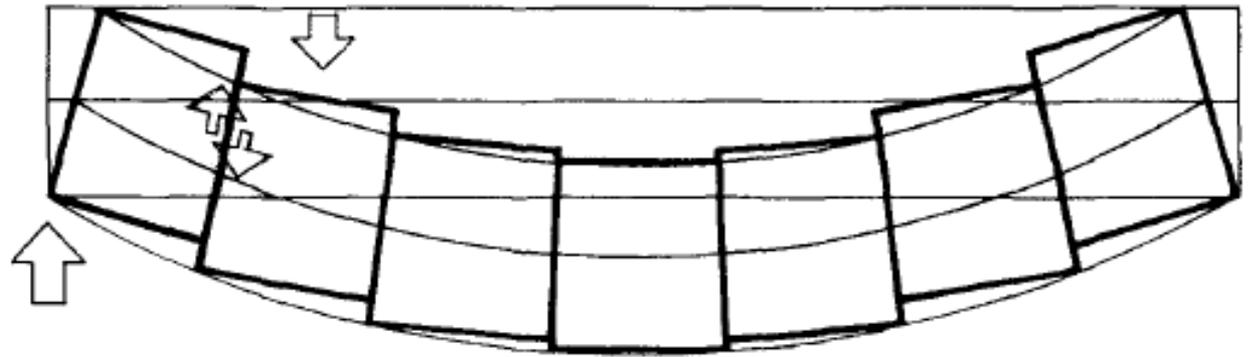
(Fórmula Colignon)



CORTANTE Y RASANTE

Si las “dovelas” o las “lajas” en las que se puede descomponer una viga no estuvieran “pegadas” entre sí, estas **piezas deslizarían** unas sobre otras. Los esfuerzos que las mantienen unidas son el **cortante y rasante**, respectivamente.

Cortante: tensiones tangenciales



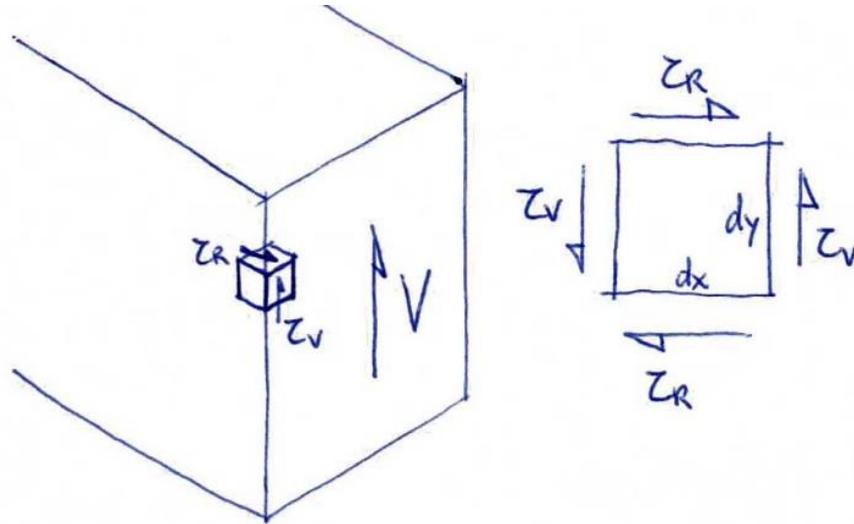
(En puridad, el rasante no es una sollicitación de barra porque no actúa a lo largo del eje x , que es el único que tiene dimensión real en una pieza unidimensional. Por ello, se busca una relación entre cortante y rasante para evitar referirnos al rasante)

Rasante: tensiones tangenciales



CORTANTE Y RASANTE

Ambos esfuerzos (cortante y rasante) producen **tensiones tangenciales** (τ_V y τ_R) sobre las caras verticales y horizontales, respectivamente, del elemento diferencial 2D.



Se demuestra, mediante el **Teorema de Cauchy**, que **ambas tensiones tangenciales son iguales**, sin más que calcular la resultante de tensiones en cada cara y tomar momentos respecto de una esquina del elemento diferencial:

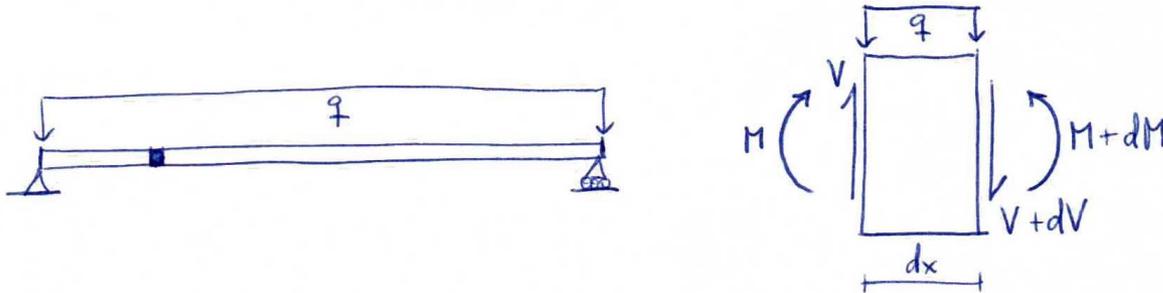
$$(\tau_R \cdot dx \cdot dz) dy - (\tau_V \cdot dy \cdot dz) dx = 0 \Rightarrow \tau_R = \tau_V$$

Por tanto, se puede utilizar τ_R para calcular τ_V

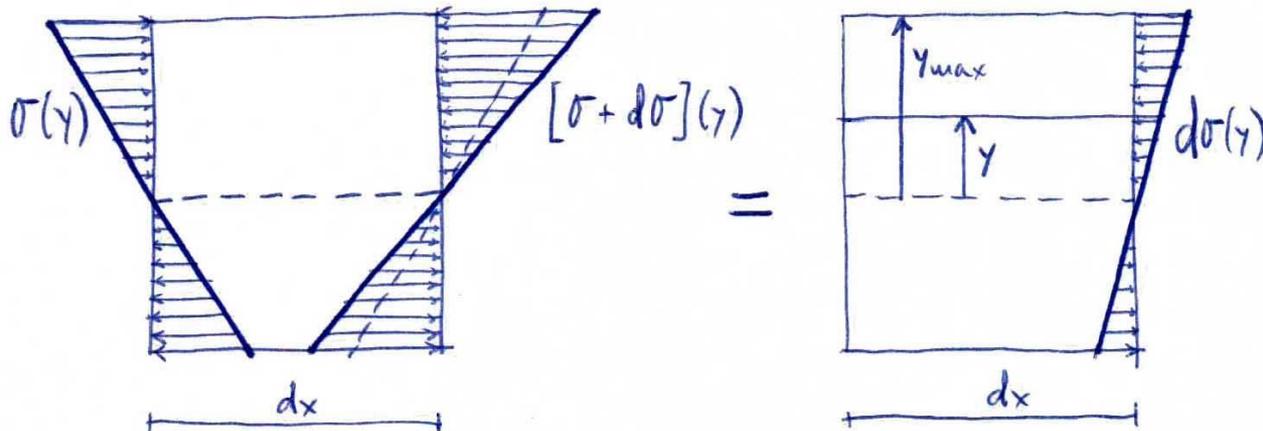
TENSIONES TANGENCIALES PRODUCIDAS POR EL CORTANTE

El objetivo es obtener una relación **entre V y τ** , es decir, conocer qué tensión tangencial en cada punto de la sección produce el cortante.

Se toma una rebanada en un caso de flexión simple ($M+V$, ambos positivos):

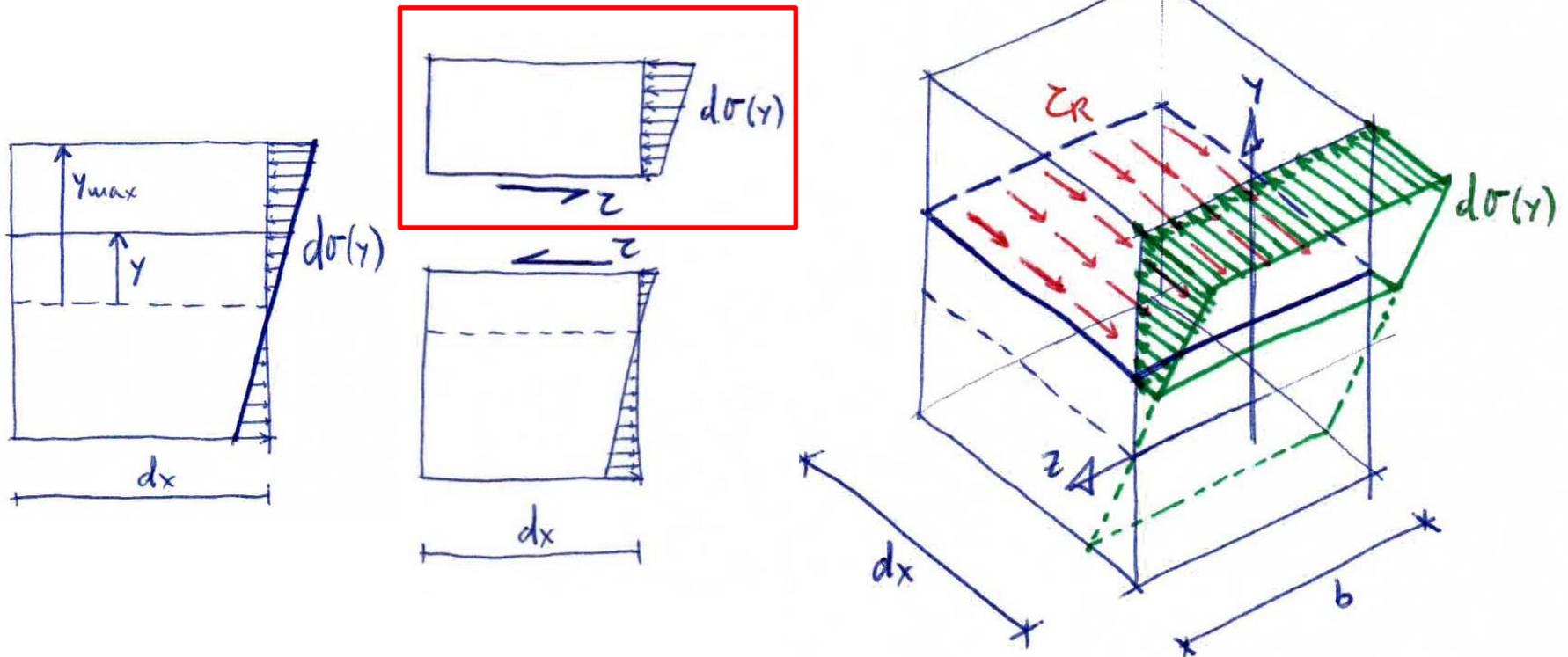


Sustituyendo los momentos por sus tensiones normales generadas, se tiene una resultante de tensiones equivalente al incremento de momento en una sección respecto de la opuesta:



TENSIONES TANGENCIALES PRODUCIDAS POR EL CORTANTE

Si se toma sólo el volumen de rebanada situado por encima de una cota “ y ” arbitraria, y considerando que se debe satisfacer el equilibrio de fuerzas horizontales, se concluye que debe aparecer en la superficie horizontal cortada una tensión rasante horizontal de sentido opuesto a la resultante de tensiones normales sobre la sección. Esta tensión rasante se define como positiva, por congruencia con el signo del cortante.

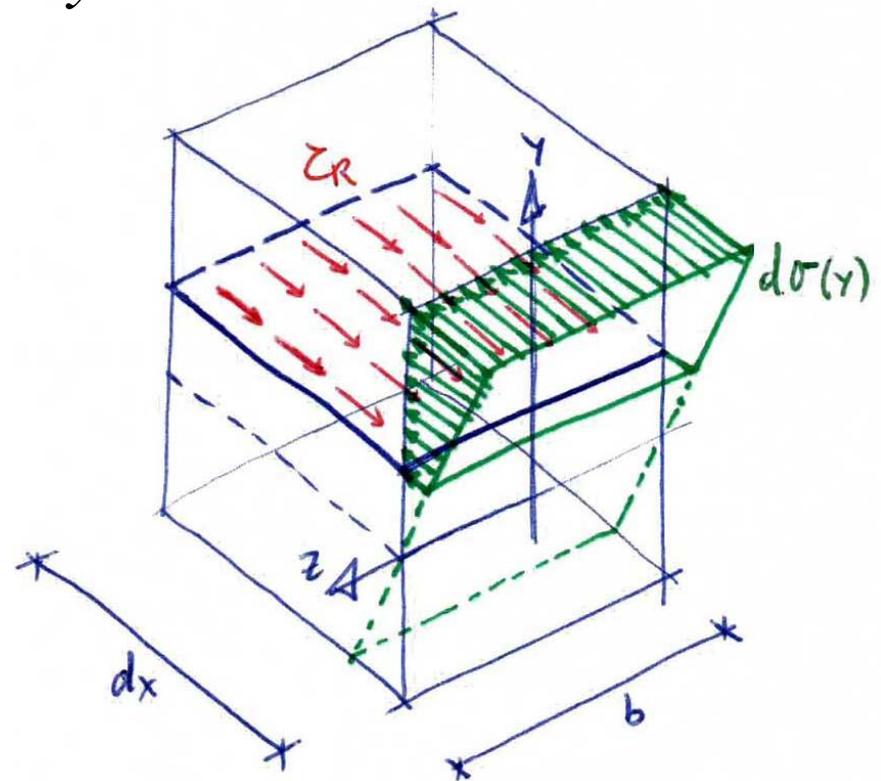


TENSIONES TANGENCIALES PRODUCIDAS POR EL CORTANTE

Planteando el equilibrio de fuerzas horizontales (y considerando la fuerza producida por una tensión es el producto de dicha tensión por la superficie donde actúa):

$$\tau(y) \cdot dx \cdot b(y) + \int_y^{y_{\max}} d\sigma(y) \cdot b(y) \cdot dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau(y) = - \frac{\int_y^{y_{\max}} d\sigma(y) \cdot b(y) \cdot dy}{b(y) \cdot dx}$$



TENSIONES TANGENCIALES PRODUCIDAS POR EL CORTANTE

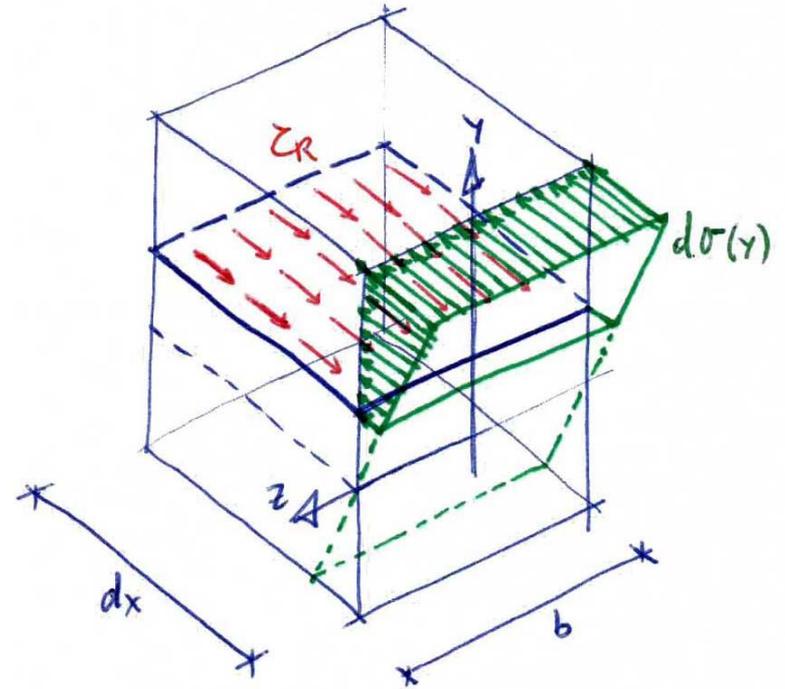
Se sustituye el diferencial de tensión normal por su valor según la Ley de Navier:

$$d\sigma(y) = -\frac{dM(x)}{I} y$$

Queda, por tanto:

$$\tau(y) = \frac{\int_{-y}^{y_{\max}} d\sigma(y) \cdot b(y) \cdot dy}{b(y) \cdot dx} =$$

$$= \frac{\int_{-y}^{y_{\max}} -\frac{dM(x)}{I} y \cdot b(y) \cdot dy}{b(y) \cdot dx} = \frac{dM(x)}{I \cdot b(y) \cdot dx} \int_{-y}^{y_{\max}} y \cdot b(y) \cdot dy$$



TENSIONES TANGENCIALES PRODUCIDAS POR EL CORTANTE

En esta última expresión, se sustituye el momento por su relación diferencial con el cortante:

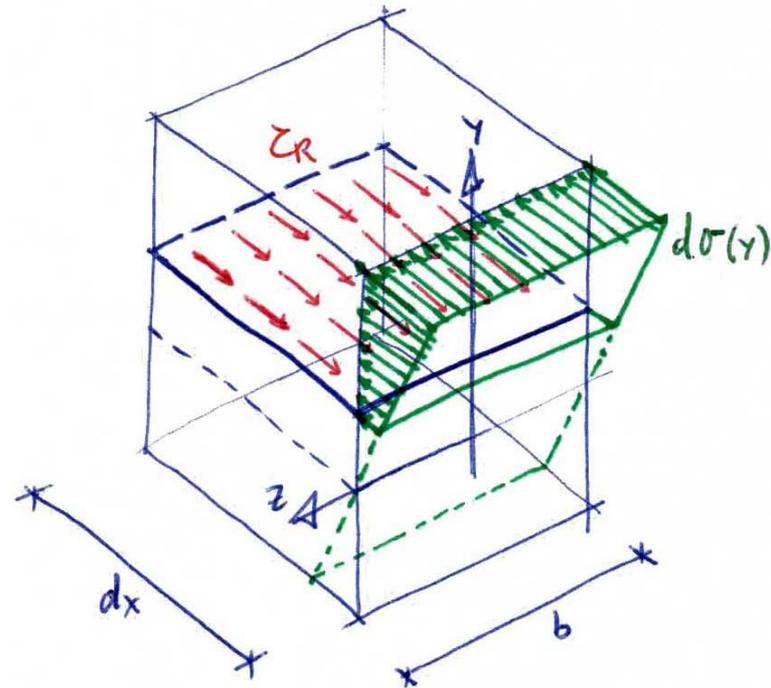
$$\frac{dM(x)}{dx} = V$$

Y la integral es, por definición, igual al momento estático de la parte de la sección situada por encima de la fibra “y” considerada:

$$\int_y^{y_{\max}} y \cdot b(y) \cdot dy = S(y)$$

Luego:

$$\tau(y) = \frac{dM(x)}{I \cdot b(y) \cdot dx} \int_y^{y_{\max}} y \cdot b(y) \cdot dy =$$
$$= \frac{V \cdot S(y)}{I \cdot b(y)}$$

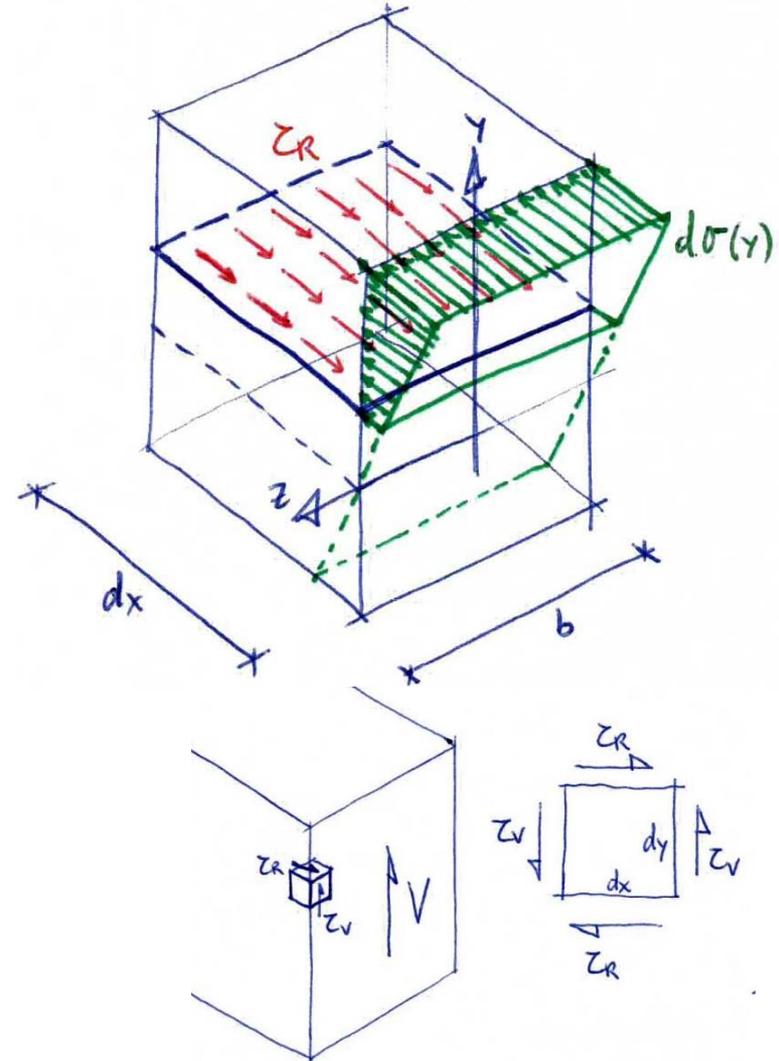


TENSIONES TANGENCIALES PRODUCIDAS POR EL CORTANTE

Por tanto, se demuestra que (para sección de ancho constante) la tensión rasante producida por el cortante en una fibra de la sección situada a una altura “y” es:

$$\tau(y) = \frac{V \cdot S(y)}{I \cdot b}$$

Por el Teorema de Cauchy, sabemos que la tensiones tangenciales cortante y rasante coinciden, luego la expresión anterior es también la **relación entre la tensión cortante y la sollicitación cortante**, y se denomina **Fórmula de Collignon**.



LEYES DE AXIL, FLEXIÓN Y CORTANTE

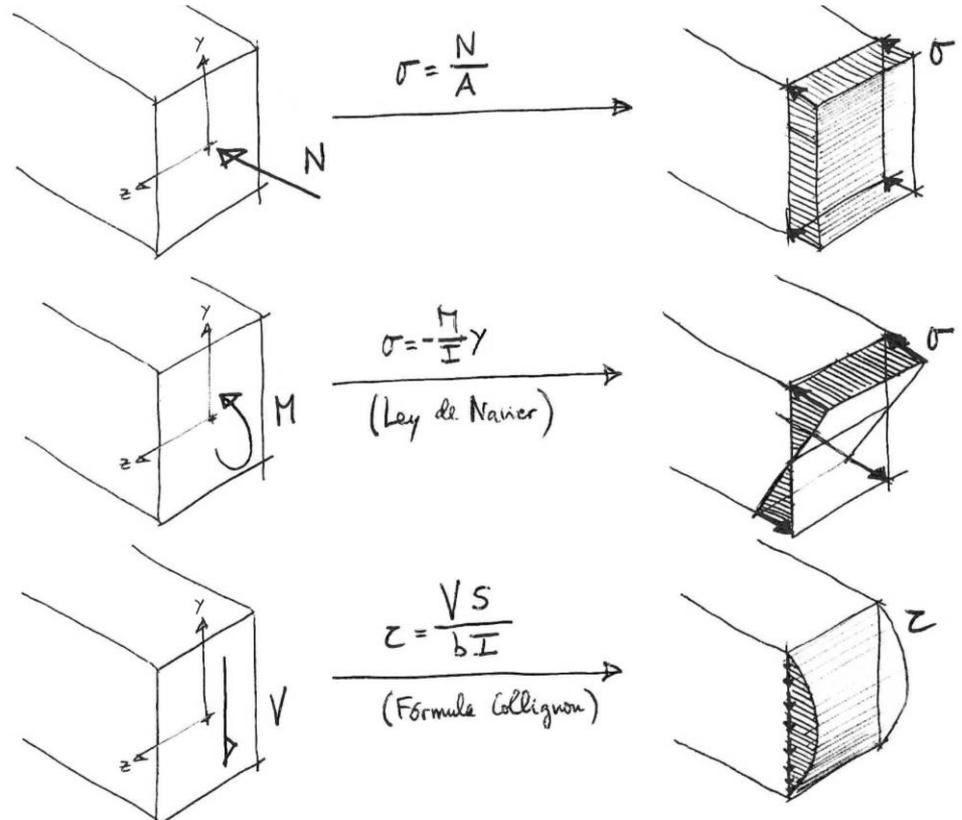
Comparando de nuevo:

- En el numerador está la **solicitación** (\uparrow **solicitación** \Rightarrow \uparrow **tensión**)
- En el denominador está la característica de la **sección** que resiste la tensión (\uparrow **sección** \Rightarrow \downarrow **tensión**)
- Acompañando, está la variable **y** solo si la función no es constante (σ_M y τ)

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_M = -\frac{M}{I} y$$

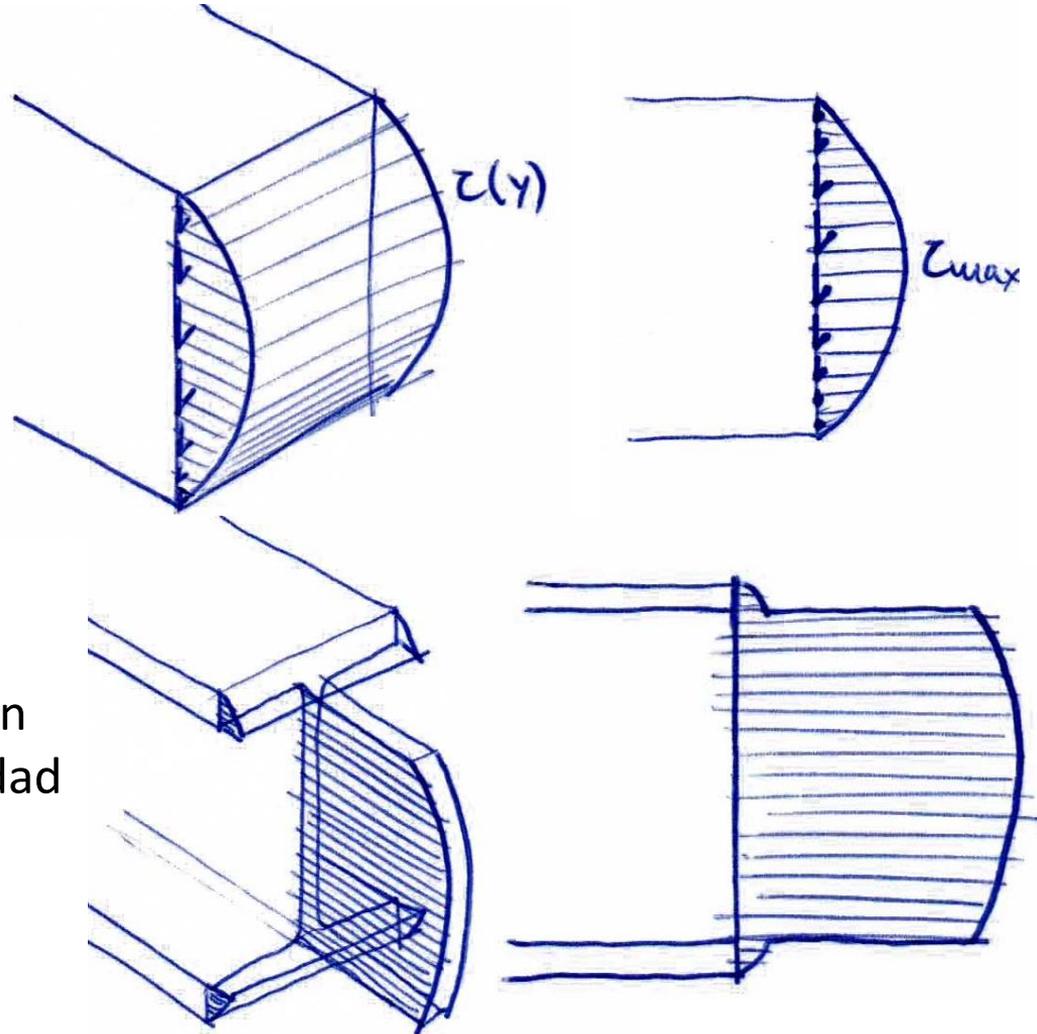
$$\tau = \frac{V}{bI} S(y)$$



TENSIONES TANGENCIALES PRODUCIDAS POR EL CORTANTE

La forma de la ley de tensiones tangenciales depende de la forma de la sección. Para la sección rectangular, la ley es parabólica y su máximo se alcanza en la fibra central:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} = \tau(0) &= \frac{V \cdot S(0)}{I \cdot b} = \\ &= \frac{V \cdot \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4}}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = 1.5 \frac{V}{A}\end{aligned}$$



En perfiles metálicos, la distribución es más compleja; la práctica totalidad de la tensión la absorbe el alma

RESUMEN DE FÓRMULAS

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I} y$$

$$W = \frac{I}{y_{\max}}$$

$$W \geq \frac{|M|}{\sigma_{adm}}$$

$$\sigma(y) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y$$

$$\tau(y) = \frac{V \cdot S(y)}{I \cdot b(y)}$$

