

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y
EMPRESARIALES



Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la
Empresa

PROPIEDADES DE EXTREMOS EN ALGUNOS
MODELOS PROBABILÍSTICOS BIVARIANTES
PARA LA ECONOMÍA

TESIS DOCTORAL

Juana María Vivo Molina

Granada - 2005

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Juana María Vivo Molina
D.L.: Gr. 1751 - 2005
ISBN: 84-338-3604-8



PROPIEDADES DE EXTREMOS EN ALGUNOS MODELOS PROBABILÍSTICOS BIVARIANTES PARA LA ECONOMÍA

MEMORIA QUE PRESENTA

JUANA MARÍA VIVO MOLINA

PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR

SEPTIEMBRE 2005

DIRECTORES

RAFAEL HERRERÍAS PLEGUEZUELO

JOSÉ CALLEJÓN CÉSPEDES

MANUEL FRANCO NICOLÁS

DPTO. MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

F. CC. ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

UNIVERSIDAD DE GRANADA

La presente Memoria titulada **Propiedades de Extremos en algunos Modelos Probabilísticos Bivariantes para la Economía**, que presenta Dña. Juana María Vivo Molina para optar al grado de Doctor, ha sido realizada en el Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los doctores D. Rafael Herrerías Pleguezuelo, D. José Callejón Céspedes y D. Manuel Franco Nicolás.

Granada, Septiembre de 2005

La doctoranda

Fdo.: Dña. Juana María Vivo Molina

Los directores

Fdo.: Dr. D. Rafael Herrerías Pleguezuelo
Catedrático de Universidad
Universidad de Granada

Fdo.: Dr. D. José Callejón Céspedes
Profesor Titular de Universidad
Universidad de Granada

Fdo.: Dr. D. Manuel Franco Nicolás
Profesor Titular de Universidad
Universidad de Murcia

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los profesores D. Rafael Herrerías Pleguezuelo, D. José Callejón Céspedes y D. Manuel Franco Nicolás, por la certera dirección, sin la cual no hubiera sido posible la realización de esta Memoria.

Así como a todos mis compañeros del Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía de la Universidad de Murcia, a los que quisiera agradecer sus constantes muestras de ánimo y apoyo durante todo este tiempo.

También me gustaría expresar mi gratitud a los miembros del Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa de la Universidad de Granada, por el apoyo y la familiaridad con la que me han acogido durante la elaboración de la misma.

Por último, a mi hijo, Manuel y mi marido, Manolo, por el tiempo que no les he podido dedicar; muy especialmente a Manuel que, desde que nació, ha vivido todos mis avatares y vicisitudes científicas y profesionales.

Juana Mari

A mi hijo, *Manuel*

Índice

Introducción	7
1. Modelos de probabilidad de interés económico	19
1.1. Introducción	19
1.2. Modelos de probabilidad univariantes usuales en valoración	22
1.3. Modelos de probabilidad bivariantes usuales en valoración	27
1.4. Modelos exponenciales bivariantes	33
1.5. Definiciones y propiedades de logconcauidad	43
1.6. Aplicación a modelos usuales en valoración	46
2. Mixturas generalizadas de exponenciales. Logconcauidad de estadísticos extremos	53
2.1. Introducción	53
2.2. Mixturas generalizadas de exponenciales	55
2.3. Logconcauidad de mixturas generalizadas de exponenciales	57

2.3.1.	Mixturas generalizadas de dos exponenciales	57
2.3.2.	Mixturas generalizadas de tres exponenciales	58
2.4.	Aplicación a los estadísticos extremos	63
2.4.1.	Modelo exponencial bivalente de Gumbel I	64
2.4.2.	Modelo exponencial bivalente de Gumbel II	65
2.4.3.	Modelo exponencial bivalente de Marshall y Olkin	66
2.4.4.	Modelo exponencial bivalente de Friday y Patil	67
2.4.5.	Modelo exponencial bivalente de Raftery I	69
2.4.6.	Modelo exponencial bivalente de Raftery II	70
2.4.7.	Modelo exponencial bivalente de Raftery III	72
3.	Mixturas generalizadas de cuatro exponenciales. Logconcauidad de estadísticos extremos	73
3.1.	Introducción	73
3.2.	Caracterización de mixturas generalizadas de cuatro exponenciales . . .	74
3.3.	Logconcauidad de mixturas generalizadas de cuatro exponenciales . . .	80
3.4.	Aplicación a los extremos de modelos exponenciales bivariantes	104
3.4.1.	Estadístico máximo del modelo exponencial bivalente de Gumbel I	104
3.4.2.	Estadísticos mínimo y máximo del modelo exponencial bivalente de Raftery	106

4. Extensiones de mixturas generalizadas. Propiedades de estadísticos extremos	109
4.1. Introducción	109
4.2. Mixturas generalizadas de gamma y exponenciales	111
4.2.1. Caracterización de mixturas generalizadas de gamma y exponen- ciales	112
4.2.2. Logconcavidad del estadístico máximo del modelo exponencial bivariante de Friday y Patil	127
4.3. Extensiones a modelos Weibull bivariantes	132
4.3.1. Modelos Weibull bivariantes	133
4.3.2. Caracterización de mixturas generalizadas de Weibull	139
4.3.3. Logconcavidad de mixturas generalizadas de Weibull	146
4.3.4. Aplicación a los estadísticos extremos	152
4.4. Propiedades de logconcavidad de otros modelos de probabilidad biva- riantes	160
4.4.1. Modelo exponencial bivariante de Gumbel III	160
4.4.2. Modelo cúbico	163
4.4.3. Modelo rectangular-triangular	164
4.4.4. Modelo piramidal	166
5. La función de supervivencia y los estadísticos extremos en los métodos	

de valoración	171
5.1. Introducción	171
5.2. Método de valoración de las dos funciones de supervivencia	174
5.2.1. Índice de calidad unidimensional	174
5.2.2. Índice de calidad multidimensional	176
5.3. Comportamiento mediante procedimientos de ponderación	183
5.3.1. Ponderación de las funciones de distribución marginales	185
5.3.2. Ponderación de las funciones de supervivencia marginales	192
5.3.3. Métodos de generación de modelos de probabilidad ponderados en valoración	200
5.4. Estadísticos extremos en los métodos de valoración	210
5.4.1. Estadístico máximo en el método de valoración de las dos fun- ciones de distribución	212
5.4.2. Estadístico mínimo en el método de valoración de las dos funcio- nes de distribución	215
5.4.3. Estadísticos mínimo y máximo en el método de valoración de las dos funciones de supervivencia	221
5.4.4. Logconcauidad de estadísticos extremos en valoración	222
5.5. Aplicaciones prácticas	224
5.5.1. Método de valoración de las dos funciones de supervivencia	225

5.5.2. Valoración mediante los procedimientos de ponderación	229
5.5.3. Valoración mediante los estadísticos extremos	234
Conclusiones	243
Referencias	249

Introducción

En la teoría clásica de riesgo es usual la suposición de independencia de riesgos. Sin embargo, debido a la creciente complejidad de los productos de seguros y reaseguros, los actuarios de estos han prestado mayor atención a la modelización de riesgos dependientes, como Dhaene y Goovaerts (1997), Müller (1997), Ambagaspitiya (1999), Denuit, Genest y Marceau (1999), Albrecher y Teugels (2004) y Cai y Li (2005), entre otros, siendo una línea de interés en los últimos años, la obtención de propiedades de modelos de riesgo bivariante de tipo-fase, como los modelos exponenciales bivariantes.

En esta dirección, Cai y Li (2005) obtienen cotas para algunos tipos de probabilidades de ruina y analizan el efecto de la dependencia sobre las probabilidades de ruina en el caso bidimensional. Asimismo, la descripción de las características del proceso de superávit de una cartera de seguros en la teoría de riesgo, usualmente requiere la suposición de independencia entre las reclamaciones y los tiempos entre ocurrencia de las mismas. Sin embargo, en muchas situaciones esta suposición es demasiado restrictiva y son necesarias generalizaciones a escenarios dependientes. Por ejemplo, cuando las reclamaciones se reciben según un proceso de renovación con tiempo genérico entre reclamaciones T y las cantidades reclamadas siguen otro proceso de renovación generado por la variable aleatoria U , es decir, las cantidades de la cartera están basadas

en un proceso de renovación bivalente generado por el par formado por las cantidades reclamadas y los intervalos de tiempo entre ellas (U, T) ; Albercher y Teugels (2004) dan algunos casos específicos de modelos de probabilidad bivariantes, como el modelo exponencial bivalente de Marshall y Olkin (1967), para generar dichos procesos.

Por otro lado, un procedimiento habitual de modelización económica con riesgo multidimensional, en presencia de dependencia así como de independencia entre los diferentes tipos de riesgos, consiste en la agregación de los múltiples parámetros de información en un estadístico agregado unidimensional que combina las distintas componentes en una medida de información univariante de dicho modelo. Esta agregación de las componentes define un simple estadístico utilizado para obtener soluciones o cotas; la distribución de este estadístico agregado y sus propiedades son de interés en dichos planteamientos, ver entre otros Milgrom y Weber (1982), Blackorby y Schworm (1984), Miravete (2001), Baron y Besanko (1999), Biais, Martimort y Rochet (2000) y Chan, Yang y Zhang (2003).

Además, diversos autores han estudiado o asumido ciertas propiedades sobre algunos estadísticos agregados, como supervivencia logcóncava y densidad logcóncava, por ejemplo Caplin y Nalebuff (1991a) y (1991b), An (1995) y (1998), Chakraborty (1999), Biais, Martimort y Rochet (2000) y Miravete (2001) y (2002). Una buena revisión de estas propiedades con implicaciones cualitativas interesantes en muchas áreas de economía, en ingeniería industrial y en biología, se encuentra en Bagnoli y Bergstrom (2005), tales como economía laboral, modelos de búsqueda de trabajo, teoría de regulación, análisis de actuaciones y ciencias políticas.

En este contexto, los estadísticos extremos mínimo y máximo, además de otras nu-

merosas aplicaciones estadísticas, son estadísticos agregados que pueden utilizarse en el estudio de modelos económicos multidimensionales. Por ejemplo, en el campo del análisis de supervivencia en riesgo debido a diferentes causas inobservables, el estadístico mínimo es el tiempo observable de defunción o muerte, y en la teoría de fiabilidad, los estadísticos mínimo y máximo representan los tiempos de vida de los sistemas en serie y en paralelo, respectivamente (ver Kaufmann, Grouchko y Cruon (1977) y Barlow y Proschan (1981)); donde un sistema de dos componentes puede representar un par de órganos de un ser vivo (ojos, riñones, ...), los dos motores de un aeroplano, el par cantidad y tiempo entre reclamaciones de una cartera de seguros, ...

En esta línea, varios autores han estudiado propiedades de logconcauidad para estructuras dependientes específicas, ver entre otros Baggs (1994), Baggs y Nagaraja (1996), Lynch (1999), Gupta y Gupta (2000) y (2001), Gupta y Warren (2001), Finkelstein y Esaulova (2005) y Gupta (2005). En particular, los estadísticos extremos de distintos modelos exponenciales bivariantes son predominantemente mixturas generalizadas, también llamadas distribuciones hiperexponenciales generalizadas en el campo de las ciencias de la computación. La caracterización de tales mixturas ha sido analizada por Stetuel (1967), Bartholomew (1969), Harris, Marchall y Botta (1992), Baggs (1994) y Baggs y Nagaraja (1996), y sus propiedades de logconcauidad se estudian en Baggs (1994), Baggs y Nagaraja (1996) y Nagaraja y Baggs (1996).

Uno de los objetivos de esta Memoria es profundizar en esta línea de investigación, estudiando la logconcauidad de los estadísticos extremos de algunos modelos exponenciales bivariantes que permanecían incompletos en los trabajos mencionados, caracterizando las mixturas generalizadas de distribuciones exponenciales y de distribuciones gamma y exponenciales, así como de las mixturas generalizadas de Weibull.

Por otra parte, en el campo de la teoría general de valoración, la tasación de bienes en ambiente de incertidumbre, es analizada frecuentemente mediante modelización econométrica e índices de precios hedónicos, que tienen sus orígenes en los trabajos de Griliches (1961), Cowling y Cubbin (1972), más recientemente Banerjee, Gelfand, Knight y Sirmans (2004), Deltas y Zacharias (2004), Benkard y Bajari (2005) y las referencias dadas en ellos, como mejoras del método sintético clásico, el cual está basado en la proporcionalidad del valor de mercado con respecto al índice de calidad; sin embargo, es conocida la debilidad de tales técnicas en ausencia de datos.

No obstante, los métodos sintéticos clásicos tienen la ventaja de su sencillez para su aplicación por los profesionales de la tasación, cuyos orígenes, para algunos autores, se remontan al antiguo Egipto, donde se valoraban las cosechas a partir del caudal del río Nilo con el fin de establecer los impuestos de cada agricultor (véase Caballer (2004)); estos métodos permiten disponer al tasador de una fórmula para el valor de mercado a partir de los valores del índice de calidad del bien, ver Ballester y Caballer (1982).

En este contexto, el método de valoración de las dos funciones de distribución (MVDFD) también ha sido utilizado para encontrar el valor de mercado de un bien como mejora de las técnicas clásicas y como una alternativa a las metodologías que requieren gran cantidad de datos. Este MVDFD fue introducido por Ballester (1971) y (1973) como método de valoración de las dos distribuciones beta, y ampliado por Caballer (1975) y Romero (1977); asimismo la utilidad práctica de esta metodología cuando se dispone de pequeñas cantidades de datos puede verse en Alonso y Lozano (1985) y Lozano (1996).

En particular, la función de distribución beta ha sido calificada como un modelo

rudo en ausencia de datos para los problemas de valoración de riesgo e incertidumbre, ver Law y Kelton (1982), tales como las técnicas de revisión y evaluación de proyectos (PERT) y la valoración de un bien a partir de un índice de calidad. Así, Berny (1989) propone una distribución más complicada que el modelo beta, aunque sus parámetros son más intuitivos, y Williams (1992) y Johnson (1997) sugieren el uso de una distribución triangular como un modelo más simple que la distribución beta y que sólo requiere de tres parámetros, que pueden interpretarse como los valores pesimista, optimista y más probable.

En este sentido, el MVDFD permite valorar un bien bajo incertidumbre, cuando el tasador sólo dispone de los valores pesimista, optimista y más probable, los cuales pueden ser suministrados por un experto. Además, se reduce al método sintético clásico cuando ambas distribuciones son uniformes, tanto la del valor de mercado como la del índice de calidad.

En los últimos años, algunos autores han puesto más atención al estudio y generalización de los modelos de probabilidad imprescindibles en la teoría de valoración y en la metodología PERT (entre otros, véase Williams (1992), Callejón, Pérez y Ramos (1996), Johnson (1997), Johnson y Kotz (1999), García, Cruz y Rosado (2000), Palacios, Callejón y Herrerías (2000), Herrerías, García, Cruz y Herrerías (2001), Herrerías (2002), Herrerías, Palacios y Herrerías (2002), van Dorp y Kotz (2002a), (2002b) y (2003), Nadarajah (2002) y (2005), García y García (2003), Herrerías, García y Cruz (2003) y Oruç y Bairamov (2005)); así como en el análisis y desarrollo del MVDFD, ver entre otros García, Cruz y Andújar (1999), García, Trinidad y Gómez (1999), Cruz, García y García (2002), García, Cruz y García (2002), García, Cruz y Rosado (2002), Herrerías (2002), García y García (2003) y García, Herrerías y García (2003).

Además, esta metodología valorativa ha sido aplicada en diversas situaciones reales, tales como bienes urbanos (inmuebles), agua de riego, árboles, empresas, acciones, ... véase Romero (1989), Caballer (1994) y (1998), Cañas, Domingo y Martínez (1994), Caballer y Moya (1997), Guadalajara (1996), Caballer y Guadalajara (1998) y Balles-tero y Rodríguez (1999).

En particular, el MVDFD ha sido extendido a la valoración, cuando se considera mayor información del bien mediante más de un índice de calidad, a través del uso de distribuciones bivariantes y multivariantes para modelizar los distintos índices de cali-dad que afectan simultáneamente al valor de mercado del bien, en donde destacamos, entre otros, los trabajos de García, Cruz y Rosado (2002), Herrerías (2002) y García y García (2003). Desafortunadamente, el MVDFD produce pérdidas con respecto a las valoraciones obtenidas a partir de cada componente del índice de calidad multidimen-sional, y para corregir o ajustar la valoración del bien resulta usual considerar modelos de probabilidad ponderando las distintas componentes del índice de calidad, técnicas habituales para reducir pérdidas en análisis de riesgo.

Otro de los objetivos de esta Memoria consiste en analizar un nuevo método de valoración basado en las funciones de supervivencia, ampliar el abanico de los modelos de probabilidad ponderados usados en valoración en dos direcciones, una a través de las funciones de supervivencia y otra mediante una nueva técnica para generar los pesos de dichas ponderaciones; así como proponer el uso de los estadísticos extremos en los métodos de valoración y de sus propiedades de logconcavidad.

Para llevar a cabo los objetivos planteados de esta Memoria, a continuación comen-tamos brevemente los contenidos de los diferentes capítulos.

En el Capítulo 1, incluimos los modelos de probabilidad utilizados en esta Memoria. En este sentido, definimos algunos modelos de probabilidad univariantes de interés en el campo de la valoración y de la metodología PERT. También vemos algunos modelos probabilísticos bivariantes usuales en valoración, así como las expresiones de sus estadísticos extremos.

Además, damos diferentes extensiones bivariantes del conocido modelo exponencial y los estadísticos mínimo y máximo asociados a dichos modelos. Asimismo, introducimos algunas nociones básicas sobre el comportamiento estocástico de una variable aleatoria, como la clasificación del envejecimiento a través de sus propiedades de log-concavidad que, para concluir este capítulo previo, aplicamos a los modelos de probabilidad univariantes mencionados.

Algunas propiedades de este capítulo están recogidas en los siguientes trabajos: Callejón, Franco, Herrerías y Vivo (2005b), Franco, Callejón, Herrerías y Vivo (2005c) y Franco, Herrerías, Vivo y Callejón (2005b).

Posteriormente, en el Capítulo 2 estudiamos las mixturas generalizadas de distribuciones exponenciales, así como las propiedades de logconcavidad de las mismas. En este sentido, vemos la caracterización de las mixturas generalizadas de dos o tres distribuciones exponenciales dadas por Bartholomew (1969) y Baggs y Nagaraja (1996), y la clasificación de la logconcavidad de la función de supervivencia de dichas mixturas de Baggs y Nagaraja (1996).

Asimismo, profundizamos en estas propiedades analizando la logconcavidad de la función de densidad de las mixturas generalizadas de dos o tres distribuciones exponenciales, así como su aplicación en la clasificación de los estadísticos extremos de diversos

modelos exponenciales bivariantes introducidos en el Capítulo 1.

Los resultados de este capítulo han dado lugar a los siguientes trabajos: Vivo (2000), Franco y Vivo (2002) y (2004b) y Vivo y Franco (2001) y (2004).

A lo largo del Capítulo 3, completamos el estudio de las mixturas generalizadas de distribuciones exponenciales, explorando el caso de combinaciones lineales no convexas de cuatro exponenciales.

Así, obtenemos la caracterización de tales mixturas generalizadas a través de condiciones sobre los pesos y parámetros de las distribuciones exponenciales que las componen. Además, estudiamos la clasificación de la logconcauidad de la función de supervivencia de una mixtura generalizada de cuatro exponenciales y su aplicación a los estadísticos extremos de algunos modelos exponenciales bivariantes, lo que completa la clasificación en un caso propuesto en Baggs (1994) y Baggs y Nagaraja (1996).

Los resultados de este capítulo han dado lugar a los siguientes trabajos: Franco y Vivo (2004a) y (2005a).

En el Capítulo 4, abordamos el estudio de algunas extensiones en la línea de los problemas estudiados en los capítulos precedentes.

Por un lado, estudiamos las mixturas generalizadas de distribuciones gamma y exponenciales, que surgen en las distribuciones marginales y en los estadísticos extremos de algunos modelos exponenciales bivariantes. Así, caracterizamos las mixturas generalizadas de una distribución gamma y una o dos distribuciones exponenciales a través de los coeficientes de la mixtura y los parámetros de sus componentes. También clasificamos la logconcauidad de la función de supervivencia del estadístico máximo del modelo exponencial bivalente de Friday y Patil (1977), el cual es una mixtura generali-

zada de distribuciones gamma y exponenciales para algunos valores de sus parámetros, completando otro de los casos propuestos en Baggs y Nagaraja (1996).

Por otro lado, analizamos la extensión de las mixturas generalizadas a través de distribuciones Weibull. En este caso, vemos algunos de los modelos Weibull bivariantes definidos como extensiones de los modelos exponenciales bivariantes por Hanagal (1996), (2004) y (2005), observando que sus estadísticos ordenados mínimo y máximo son predominantemente mixturas generalizadas de distribuciones Weibull. Así, obtenemos la caracterización de las mixturas generalizadas de dos o tres distribuciones Weibull, damos la clasificación de la logconcauidad de la función de supervivencia para mixturas generalizadas de dos Weibull, así como su aplicación en los estadísticos extremos de algunos modelos Weibull bivariantes.

Para finalizar este capítulo, incluimos las clasificaciones de la logconcauidad de los estadísticos mínimo y máximo de algunos modelos de probabilidad bivariantes usuales en valoración dados en el Capítulo 1, así como de un modelo exponencial bivalente de Gumbel (1960), cuyos estadísticos mínimo y máximo no se expresan como mixturas generalizadas.

Los resultados de este capítulo han dado lugar a los siguientes trabajos: Franco y Vivo (2005b) y Vivo y Franco (2005a) y (2005b), y algunas de las propiedades obtenidas están recogidas en los siguientes trabajos: Callejón, Franco, Herrerías y Vivo (2005b), Franco, Callejón, Herrerías y Vivo (2005c), Franco, Herrerías, Vivo y Callejón (2005b).

En el último capítulo de esta Memoria, introducimos y estudiamos el método de valoración de las dos funciones de supervivencia (MVDFS) correspondientes a los dos modelos de probabilidad del valor de mercado y del índice de calidad. Esta nueva técnica

establece un punto de vista diferente en la teoría de valoración, que nos permite corregir las pérdidas producidas por el MVDFD con respecto a las valoraciones obtenidas a partir de cada componente de un índice de calidad multidimensional, y por tanto podría ayudar a valorar un bien a partir de un índice de calidad bajo incertidumbre, más aún cuando la dimensión se reduce mediante componentes de calidad inobservadas o desconocidas.

En este sentido, analizamos el comportamiento del MVDFS en ambiente de incertidumbre a través de un índice de calidad unidimensional y bidimensional, y en general, multidimensional; comparando los resultados que produce el MVDFS con los del MVDFD. Además, estudiamos el comportamiento del MVDFS frente a los procedimientos de ponderación utilizados para ajustar las valoraciones del MVDFD.

También, ampliamos el surtido de modelos de probabilidad ponderados mediante el uso de las funciones de supervivencia marginales, y determinamos el comportamiento de ambos métodos de valoración frente a estos procedimientos de ponderación alternativos. Asimismo, incluimos las diferentes técnicas de generación de los pesos de dichos modelos de probabilidad ponderados, tanto en el caso de dependencia como de independencia entre las componentes del índice de calidad, y analizamos las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas. En esta línea, abordamos el estudio de una alternativa para generar estos modelos de probabilidad ponderados a través de una nueva técnica de generación de sus correspondientes pesos, basada en el promedio de los valores modales de las distribuciones marginales, la cual corrige las críticas de la técnica conocida por método de las modas.

Posteriormente, analizamos el uso de los estadísticos ordenados extremos, mínimo

y máximo, en ambos métodos de valoración, MVDFD y MVDFS, como estadísticos agregados que permiten reducir la dimensionalidad del índice de calidad de un bien. Estos estadísticos constituyen una nueva herramienta en la metodología valorativa, que resuelve algunas dificultades de ambos métodos de valoración cuando se dispone de mayor información a través de más de un índice de calidad. En esta dirección, estudiamos las valoraciones y acotaciones que proporcionan estos estadísticos extremos con respecto a los anteriores métodos de valoración a partir del modelo de probabilidad bivariante del índice de calidad. Además, exploramos la utilidad de las propiedades de logconcauidad, de los estadísticos mínimo y máximo del índice de calidad, en el proceso de asignación del modelo de probabilidad para el valor de mercado, o bien como análisis de la aplicación de los métodos de valoración.

Para finalizar este capítulo, damos la aplicación de las diferentes secciones que lo componen, en dos casos prácticos de valoración bien conocidos.

Los resultados de este capítulo han dado lugar a los siguientes trabajos: Callejón, Franco, Herrerías y Vivo (2005a) y (2005b), Franco, Callejón, Herrerías y Vivo (2005a), (2005b) y (2005c), Franco, Herrerías, Vivo y Callejón (2005a) y (2005b), Franco y Vivo (2005c).

Por último, incluimos un resumen de las diversas conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo de esta Memoria.

Capítulo 1

Modelos de probabilidad de interés económico

1.1. Introducción

En este capítulo se introducen los modelos de probabilidad univariantes y bivariantes necesarios para el desarrollo de esta Memoria, así como algunas características y propiedades de dichos modelos que serán utilizadas en capítulos posteriores.

En primer lugar, a partir de una variable aleatoria X con función de distribución $F(x)$, denotamos por $S(x)$ a su función de supervivencia o fiabilidad definida por $S(x) = 1 - F(x)$, también llamada función de distribución decumulativa por Yaari (1987) en el campo de la teoría dual de elección bajo riesgo, y en el caso de una variable aleatoria absolutamente continua, representamos por $f(x)$ a su función de densidad. Nótese que también se utilizará la notación $F_X(x)$, $S_X(x)$ y $f_X(x)$.

En este sentido, en la siguiente sección, definimos algunos modelos de probabilidad univariantes usuales en teoría de valoración y la metodología PERT, tales como los modelos rectangular, triangular, trapezoidal, triangular generalizada, trapezoidal generalizada, beta y sus versiones beta PERT y beta Caballer (ver entre otros, Herrerías (2002) y García y García (2003)), para las que estudiaremos sus propiedades de log-concavidad en la última sección de este capítulo; modelos y propiedades que serán de interés en las aplicaciones del Capítulo 5.

Por otra parte, sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, cuyas componentes no son necesariamente independientes ni idénticamente distribuidas, con funciones de distribución $F_i(x)$, funciones de densidad $f_i(x)$ y funciones de supervivencia $S_i(x)$, $i = 1, 2$.

Si denotamos por $F(x_1, x_2)$ a su función de distribución conjunta dada por

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

y $S(x_1, x_2)$ a su función de supervivencia

$$S(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$$

se establece de forma sencilla la relación entre estas funciones a través de sus funciones de distribución marginales

$$S(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) - F_1(x_1) - F_2(x_2) + 1 \quad (1.1.1)$$

o bien

$$F(x_1, x_2) = S(x_1, x_2) - S_1(x_1) - S_2(x_2) + 1$$

es decir, la función de supervivencia bivalente está determinada por la función de distribución conjunta y sus marginales.

Asimismo, representamos por $T_1 = \text{mín}(X_1, X_2)$ y $T_2 = \text{máx}(X_1, X_2)$ a los estadísticos ordenados extremos, mínimo y máximo, a partir de un modelo bivalente aleatorio (X_1, X_2) , y sus funciones de distribución, supervivencia y densidad las denotamos por $F_{(i)}(x)$, $S_{(i)}(x)$ y $f_{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, respectivamente.

Obsérvese que, a partir de un modelo bivalente, las funciones de supervivencia de los estadísticos ordenados extremos están definidas por

$$S_{(1)}(x) = P(X_1 > x, X_2 > x) = S(x, x) \quad (1.1.2)$$

y

$$S_{(2)}(x) = S_1(x) + S_2(x) - S_{(1)}(x) \quad (1.1.3)$$

o equivalentemente,

$$F_{(2)}(x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) = F(x, x) \quad (1.1.4)$$

y

$$F_{(1)}(x) = F_1(x) + F_2(x) - F_{(2)}(x) \quad (1.1.5)$$

Asimismo, si existen sus funciones de densidad, están definidas por

$$f_{(i)}(x) = -\frac{dS_{(i)}(x)}{dx}$$

de donde se deduce que

$$f_{(2)}(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_{(1)}(x). \quad (1.1.6)$$

ver Baggs y Nagaraja (1996) y Nagaraja y Baggs (1996), entre otros.

En particular, en la Sección 1.3 vamos a ver algunos modelos de probabilidad bivalentes de utilidad en la teoría de valoración, como el cúbico, rectangular-triangular

y piramidal (véase Herrerías (2002)), así como las distribuciones de sus estadísticos mínimo y máximo, que utilizaremos al final de los Capítulos 4 y 5.

Asimismo, en la Sección 1.4 damos las definiciones de diferentes extensiones bivariantes del modelo exponencial, como las propuestas por Gumbel (1960), Marshall y Olkin (1967), Friday y Patil (1977) y Raftery (1984). Las extensiones bivariantes más comunes del modelo exponencial se encuentran recopiladas en Hutchinson y Lai (1990), Baggs (1994) y Kotz, Balakrishnan y Johnson (2000). También, veremos las expresiones de las distribuciones de sus respectivos estadísticos ordenados, que serán imprescindibles para el desarrollo de los Capítulos 2, 3 y 4.

Finalmente, vemos los conceptos de logconcauidad de la función de supervivencia y de la función de densidad, y sus relaciones con las clases de envejecimiento *IFR* (*DFR*) e *ILR* (*DLR*), respectivamente, véase por ejemplo Barlow y Proschan (1981) y Ross (1996), los cuales serán utilizados en todos los capítulos de esta Memoria.

1.2. Modelos de probabilidad univariantes usuales en valoración

En esta sección definimos algunos modelos de distribuciones univariantes clásicas utilizadas en la metodología valorativa, a través de su función de densidad y, en los casos que es posible, veremos su función de supervivencia.

Obsérvese que en la práctica valorativa resulta común la utilización de variables estandarizadas, sin pérdida de generalidad, así como de modelos de probabilidad con soportes acotados, tanto en el caso univariante como bivariante. Por ello, utilizaremos

las versiones estandarizadas de los modelos que damos a continuación y en la siguiente sección.

Definición 1.1 *Sea X una variable aleatoria con soporte en $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, se dice que sigue un modelo rectangular, si su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A partir de esta función de densidad del modelo rectangular, también conocido como modelo uniforme $(0, 1)$, se obtiene su función de supervivencia, dada por

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Definición 1.2 *Sea X una variable aleatoria con soporte en $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, se dice que sigue un modelo triangular con parámetro $m \in (0, 1)$, si su función de densidad está dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{m} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{2(1-x)}{1-m} & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A partir de esta función de densidad, se obtiene que la función de supervivencia del

modelo triangular está determinada por

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{m} & \text{si } 0 \leq x < m \\ \frac{(1-x)^2}{1-m} & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Definición 1.3 Sea X una variable aleatoria con soporte en $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, se dice que sigue un modelo univariante trapezoidal con parámetros (m, M) , tales que $0 < m \leq M < 1$, si su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(1+M-m)m} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{2}{1+M-m} & \text{si } m \leq x < M \\ \frac{2(1-x)}{(1+M-m)(1-M)} & \text{si } M \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, la función de supervivencia de un modelo trapezoidal viene dada por

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{(1+M-m)m} & \text{si } 0 \leq x < m \\ 1 - \frac{2x-m}{1+M-m} = \frac{1+M-2x}{1+M-m} & \text{si } m \leq x < M \\ \frac{(1-x)^2}{(1+M-m)(1-M)} & \text{si } M \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Definición 1.4 Sea X una variable aleatoria con soporte en $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, se dice que sigue un modelo triangular generalizado con parámetros (m, n_1, n_2) , tales que $m \in$

$(0, 1)$, $n_1 > 0$ y $n_2 > 0$, si su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n_1 n_2}{n_1(1-m) + n_2 m} \left(\frac{x}{m}\right)^{n_1-1} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{n_1 n_2}{n_1(1-m) + n_2 m} \left(\frac{1-x}{1-m}\right)^{n_2-1} & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que esta distribución es un caso particular del modelo trapezoidal generalizado de van Dorp y Kotz (2003). Además, para $n_1 = n_2$ se reduce al modelo TPS (two-sided power) de van Dorp y Kotz (2002a) y (2002b), el cual incluye a la distribución triangular cuando $n_1 = n_2 = 2$, y a la distribución rectangular o uniforme cuando $n_1 = n_2 = 1$. También ha sido llamado modelo TSP generalizado en Nadarajah (2002) y (2005).

Para este modelo triangular generalizado, se tiene que su función de supervivencia se expresa como

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{n_2 m}{n_1(1-m) + n_2 m} \left(\frac{x}{m}\right)^{n_1} & \text{si } 0 \leq x < m \\ \frac{n_1(1-m)}{n_1(1-m) + n_2 m} \left(\frac{1-x}{1-m}\right)^{n_2} & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Definición 1.5 Sea X una variable aleatoria con soporte en $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, se dice que sigue un modelo trapezoidal generalizado con parámetros (m, M, n_1, n_2, α) , tales que

$0 < m \leq M < 1$, $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ y $\alpha > 0$, si su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha n_1 n_2}{A} \left(\frac{x}{m}\right)^{n_1-1} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{2n_1 n_2}{A} \left(1 + (\alpha - 1)\frac{M-x}{M-m}\right) & \text{si } m \leq x < M \\ \frac{2n_1 n_2}{A} \left(\frac{1-x}{1-M}\right)^{n_2-1} & \text{si } M \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $A = 2\alpha n_2 m + (\alpha + 1)(M - m)n_1 n_2 + 2(1 - M)n_1$.

Nótese que la expresión de esta función de densidad está modificada en los dos tramos laterales con respecto a la expresión dada por van Dorp y Kotz (2003). Asimismo, la función de supervivencia de este modelo trapezoidal generalizado puede escribirse como

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{2\alpha n_2 m}{A} \left(\frac{x}{m}\right)^{n_1} & \text{si } 0 \leq x < m \\ 1 - \frac{2\alpha n_2 m + 2(x-m)n_1 n_2 \left(1 + \frac{\alpha-1}{2} \frac{2M-m-x}{M-m}\right)}{A} & \text{si } m \leq x < M \\ \frac{2(1-M)n_1}{A} \left(\frac{1-x}{1-M}\right)^{n_2} & \text{si } M \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Definición 1.6 Sea X una variable aleatoria con soporte en $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, se dice que sigue un modelo beta de parámetros (p, q) , tales que $p > 1$ y $q > 1$, si su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\beta(p, q)} & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En particular, incluimos dos subfamilias de la distribución beta $\beta(p, q, 0, 1)$ con un interés especial en las metodologías PERT y valorativa.

Definición 1.7 Sea X una variable aleatoria con modelo beta de parámetros (p, q) , se dice que sigue un modelo beta PERT, si sus parámetros son

$$p = 3 + \sqrt{2} \quad y \quad q = 3 - \sqrt{2}, \quad \text{si } m > \frac{1}{2}$$

$$p = 3 - \sqrt{2} \quad y \quad q = 3 + \sqrt{2}, \quad \text{si } m < \frac{1}{2}$$

Definición 1.8 Sea X una variable aleatoria con modelo beta de parámetros (p, q) , se dice que sigue un modelo beta Caballer, si sus parámetros tienen la forma

$$p = h \pm \sqrt{2} \quad y \quad q = h \mp \sqrt{2}, \quad \text{con } h > 1 + \sqrt{2}.$$

1.3. Modelos de probabilidad bivariantes usuales en valoración

En esta sección incluimos tres modelos de probabilidad bivariantes utilizados en el campo de la valoración y llamados modelos de forma geométrica, así como los estadísticos ordenados mínimo y máximo asociados a dichos modelos, los cuales son una muestra sencilla de las diferentes extensiones bivariantes que podrían considerarse a partir de los modelos univariantes de la sección anterior.

Definición 1.9 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo cúbico, si su función de densidad viene dada por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Este modelo cúbico también es conocido como modelo bivalente uniforme $(0, 1) \times (0, 1)$, siendo su función de supervivencia

$$S(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < 0, x_2 < 0 \\ (1 - x_1)(1 - x_2) & \text{si } 0 \leq x_1 < 1, 0 \leq x_2 < 1 \\ 1 - x_1 & \text{si } 0 \leq x_1 < 1, 1 \leq x_2 \\ 1 - x_2 & \text{si } 1 \leq x_1, 0 \leq x_2 < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x_1, 1 \leq x_2 \end{cases}$$

Obsérvese que se trata de un modelo de probabilidad bivalente de componentes independientes y con idénticas distribuciones rectangulares o uniformes.

Además, a partir de la función de supervivencia de este modelo, de (1.1.2) y (1.1.3), se obtienen las siguientes funciones de supervivencia de estos estadísticos mínimo y máximo

$$S_{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ (1 - x)^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (1.3.1)$$

y

$$S_{(2)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Definición 1.10 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo rectangular-triangular con parámetro $m \in (0, 1)$, si su función de densidad

viene dada por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2\frac{x_2}{m} & \text{si } 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < m \\ 2\frac{1-x_2}{1-m} & \text{si } 0 < x_1 < 1, m \leq x_2 < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

A partir de esta función de densidad, se obtiene la siguiente función de supervivencia del modelo rectangular-triangular

$$S(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < 0, x_2 < 0 \\ (1 - x_1) \left(1 - \frac{x_2^2}{m}\right) & \text{si } 0 \leq x_1 < 1, 0 \leq x_2 < m \\ (1 - x_1) \frac{(1-x_2)^2}{1-m} & \text{si } 0 \leq x_1 < 1, m \leq x_2 < 1 \\ 1 - x_1 & \text{si } 0 \leq x_1 < 1, 1 \leq x_2 \\ 1 - \frac{x_2^2}{m} & \text{si } 1 \leq x_1, 0 \leq x_2 < m \\ \frac{(1-x_2)^2}{1-m} & \text{si } 1 \leq x_1, m \leq x_2 < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x_1, 1 \leq x_2 \end{cases}$$

Obsérvese que al igual que el modelo cúbico, este modelo de probabilidad bivalente tiene componentes marginales independientes, pero en este caso, con distribuciones rectangular y triangular de parámetro m , respectivamente.

Asimismo, utilizando de (1.1.2) y (1.1.3), se obtienen las funciones de supervivencia de sus estadísticos extremos

$$S_{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{m} (1-x)(m-x^2) & \text{si } 0 \leq x < m \\ \frac{1}{1-m} (1-x)^3 & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (1.3.3)$$

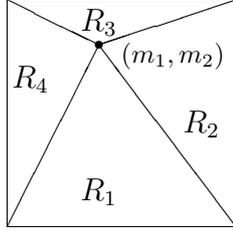
y

$$S_{(2)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{m} x^3 & \text{si } 0 \leq x < m \\ 1 - x \left(1 - \frac{1}{1-m} (1-x)^2\right) & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Definición 1.11 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo piramidal de parámetros (m_1, m_2) , tales que $m_1, m_2 \in (0, 1)$, si su función de densidad viene dada por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{m_2} x_2 & \text{si } (x_1, x_2) \in R_1 \\ \frac{3}{1-m_1} (1-x_1) & \text{si } (x_1, x_2) \in R_2 \\ \frac{3}{1-m_2} (1-x_2) & \text{si } (x_1, x_2) \in R_3 \\ \frac{3}{m_1} x_1 & \text{si } (x_1, x_2) \in R_4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde las regiones R_i están definidas por los siguientes triángulos del cuadrado unidad



$$R_1 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{m_1}{m_2}x_2 \leq x_1 \leq 1 - \frac{(1-m_1)}{m_2}x_2, 0 < x_2 \leq m_2 \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (x_1, x_2) : m_1 \leq x_1 < 1, \frac{m_2(1-x_1)}{1-m_1} \leq x_2 \leq 1 - \frac{(1-m_2)(1-x_1)}{1-m_1} \right\}$$

$$R_3 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{m_1(1-x_2)}{1-m_2} \leq x_1 \leq 1 - \frac{(1-m_1)(1-x_2)}{1-m_2}, m_2 \leq x_2 < 1 \right\}$$

$$R_4 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 \leq m_1, \frac{m_2}{m_1}x_1 \leq x_2 \leq 1 - \frac{1-m_2}{m_1}x_1 \right\}$$

A partir de esta función de densidad, su función de distribución $F(x_1, x_2)$ está definida por los siguientes casos

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \text{ ó } x_2 \leq 0 \\ \frac{3x_1x_2^2}{2m_2} - \frac{m_1x_1^3}{2m_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \in R_1 \\ \frac{m_2(1-x_1)^3}{2(1-m_1)^2} - \frac{x_2^3}{2m_2^2} + \frac{3x_2^2}{2m_2} - \frac{3x_2(1-x_1)^2}{2(1-m_1)} & \text{si } (x_1, x_2) \in R_2, x_2 < m_2 \\ 1 + \frac{(1-x_2)^3}{2(1-m_2)^2} + \frac{m_2(1-x_1)^3}{2(1-m_1)^2} - \frac{3(1-x_2)^2}{2(1-m_2)} - \frac{3y(1-x_1)^2}{2(1-m_1)} & \text{si } (x_1, x_2) \in R_2, m_2 \leq x_2 < 1 \\ \frac{m_1(1-x_2)^3}{2(1-m_2)^2} - \frac{x_1^3}{2m_1^2} + \frac{3x_1^2}{2m_1} - \frac{3x(1-x_2)^2}{2(1-m_2)} & \text{si } (x_1, x_2) \in R_3, x_1 < m_1 \\ 1 + \frac{(1-x_1)^3}{2(1-m_1)^2} + \frac{m_1(1-x_2)^3}{2(1-m_2)^2} - \frac{3(1-x_1)^2}{2(1-m_1)} - \frac{3x(1-x_2)^2}{2(1-m_2)} & \text{si } (x_1, x_2) \in R_3, m_1 \leq x_1 < 1 \\ \frac{3x_1^2x_2}{2m_1} - \frac{m_2^3x_1}{2m_1^2} & \text{si } (x_1, x_2) \in R_4 \\ \frac{3x_1^2}{2m_1} - \frac{x_1^3}{2m_1^2} & \text{si } 0 \leq x_1 < m_1, 1 \leq x_2 \\ 1 + \frac{(1-x_1)^3}{2(1-m_1)^2} - \frac{3(1-x_1)^2}{2(1-m_1)} & \text{si } m_1 \leq x_1 < 1, 1 \leq x_2 \\ \frac{3x_2^2}{2m_2} - \frac{x_2^3}{2m_2^2} & \text{si } 0 \leq x_2 < m_2, 1 \leq x_1 \\ 1 + \frac{(1-x_2)^3}{2(1-m_2)^2} - \frac{3(1-x_2)^2}{2(1-m_2)} & \text{si } m_2 \leq x_2 < 1, 1 \leq x_1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x_1, 1 \leq x_2 \end{cases}$$

Además, teniendo en cuenta que el corte de la diagonal con los triángulos R_1 y R_2 viene dado por

$$x = \frac{m_2}{1 + m_2 - m_1}$$

y el corte de la diagonal con R_3 y R_4 viene dado por

$$x = \frac{m_1}{1 + m_1 - m_2}$$

a partir de (1.1.4) y (1.1.5) y usando la notación $m = \min(m_1, m_2)$ y $M = \max(m_1, m_2)$, determinamos las funciones de distribución de sus estadísticos extremos

$$F_{(1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2(3m-x)}{2m^2} + \frac{x^2(3M-x)}{2M^2} - \frac{x^3}{2M^2}(3M-m) & \text{si } 0 \leq x < m \\ 1 + \frac{x^2(3M-x)}{2M^2} - \frac{2+x-3m(1-x)^2}{2(1-m)^2} - \frac{x^3(3M-m)}{2M^2} & \text{si } m \leq x < \frac{M}{1+M-m} \\ 1 + \frac{x^2(3M-x)}{2M^2} - \frac{2+x-3m(1-x)^2}{2(1-m)^2} - \frac{M(1-x)^3}{2(1-m)^2} \\ \quad + \frac{x^3}{2M^2} - \frac{3x^2}{2M} + \frac{3x(1-x)^2}{2(1-m)} & \text{si } \frac{M}{1+M-m} \leq x < M \\ 1 - \frac{2+x-3M(1-x)^2}{2(1-M)^2} - \frac{2+x-3m(1-x)^2}{2(1-m)^2} - \frac{(1-x)^3}{2(1-M)^2} \\ \quad + \frac{M(1-x)^3}{2(1-m)^2} + \frac{3(1-x)^2}{2(1-M)} + \frac{3x(1-x)^2}{2(1-m)} & \text{si } M \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (1.3.5)$$

y

$$F_{(2)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3(3M-m)}{2M^2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{M}{1+M-m} \\ \frac{M(1-x)^3}{2(1-m)^2} - \frac{x^3}{2M^2} + \frac{3x^2}{2M} - \frac{3x(1-x)^2}{2(1-m)} & \text{si } \frac{M}{1+M-m} \leq x < M \\ 1 + \frac{(1-x)^3}{2(1-M)^2} + \frac{M(1-x)^3}{2(1-m)^2} - \frac{3(1-x)^2}{2(1-M)} - \frac{3x(1-x)^2}{2(1-m)} & \text{si } M \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (1.3.6)$$

o equivalentemente, sus correspondientes funciones de supervivencia

$$S_{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2(3m-x)}{2m^2} - \frac{x^2(3M-x)}{2M^2} + \frac{x^3}{2M^2}(3M-m) & \text{si } 0 \leq x < m \\ \frac{2+x-3m(1-x)^2}{2(1-m)^2} + \frac{x^3(3M-m)}{2M^2} - \frac{x^2(3M-x)}{2M^2} & \text{si } m \leq x < \frac{M}{1+M-m} \\ \frac{2+x-3m(1-x)^2}{2(1-m)^2} + \frac{M(1-x)^3}{2(1-m)^2} - \frac{x^2(3M-x)}{2M^2} \\ - \frac{x^3}{2M^2} - \frac{3x(1-x)^2}{2(1-m)} + \frac{3x^2}{2M} & \text{si } \frac{M}{1+M-m} \leq x < M \\ \frac{2+x-3M(1-x)^2}{2(1-M)^2} + \frac{2+x-3m(1-x)^2}{2(1-m)^2} + \frac{(1-x)^3}{2(1-M)^2} \\ - \frac{M(1-x)^3}{2(1-m)^2} - \frac{3(1-x)^2}{2(1-M)} - \frac{3x(1-x)^2}{2(1-m)} & \text{si } M \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

y

$$S_{(2)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{x^3(3M-m)}{2M^2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{M}{1+M-m} \\ 1 - \frac{M(1-x)^3}{2(1-m)^2} - \frac{3x^2}{2M} + \frac{x^3}{2M^2} + \frac{3x(1-x)^2}{2(1-m)} & \text{si } \frac{M}{1+M-m} \leq x < M \\ \frac{3(1-x)^2}{2(1-M)} + \frac{3x(1-x)^2}{2(1-m)} - \frac{(1-x)^3}{2(1-M)^2} - \frac{M(1-x)^3}{2(1-m)^2} & \text{si } M \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

1.4. Modelos exponenciales bivariantes

Veamos ahora algunas de las extensiones bivariantes más conocidas del modelo de probabilidad exponencial, así como las funciones de densidad de sus estadísticos extremos.

Comenzaremos con los modelos exponenciales bivariantes propuestos por Gumbel

(1960), con la característica común de que sus distribuciones marginales son exponenciales.

Definición 1.12 *Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo exponencial bivalente de Gumbel I (GBVE-I), si su función de supervivencia viene dada por*

$$S(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}(1 + \alpha(1 - e^{-x_1})(1 - e^{-x_2})) \quad \text{para todo } x_1, x_2 > 0$$

siendo $|\alpha| \leq 1$.

Obsérvese que para $\alpha = 0$, este modelo GBVE-I corresponde a dos componentes exponenciales independientes e idénticamente distribuidas.

Para este modelo GBVE-I se obtiene que sus estadísticos mínimo y máximo, T_1 y T_2 , tienen funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = 2(1 + \alpha)e^{-2x} - 6\alpha e^{-3x} + 4\alpha e^{-4x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = 2e^{-x} - 2(1 + \alpha)e^{-2x} + 6\alpha e^{-3x} - 4\alpha e^{-4x}$$

en donde observamos que ambas funciones de densidad son mixturas generalizadas de exponenciales.

Definición 1.13 *Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo exponencial bivalente de Gumbel II (GBVE-II), si su función de supervivencia está definida por*

$$S(x_1, x_2) = \exp \left(- \left[\left(\frac{x_1}{\theta_1} \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{x_2}{\theta_2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^{\delta} \right) \quad \text{para todo } x_1, x_2 > 0$$

siendo $\theta_1, \theta_2 > 0$ y $0 < \delta \leq 1$.

Nótese que cuando $\delta = 1$, se obtiene el modelo bivalente con marginales exponenciales e independientes.

Los estadísticos mínimo y máximo asociados a este modelo GBVE-II tienen funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} + \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_2}} - \lambda e^{-\lambda x}$$

siendo

$$\lambda = \left[\left(\frac{1}{\theta_1} \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{\theta_2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^{\delta}$$

las cuales corresponden a un modelo exponencial y una mixtura generalizada de exponenciales, respectivamente.

Definición 1.14 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo exponencial bivalente de Gumbel III (GBVE-III), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \exp(-x_1 - x_2 - \theta x_1 x_2) \quad \text{para todo } x_1, x_2 > 0$$

siendo $0 \leq \theta \leq 1$.

Nótese que para $\theta = 0$, se obtiene el modelo bivalente con marginales exponenciales independientes e idénticamente distribuidas.

Obsérvese que aunque este tercer modelo, introducido por Gumbel (1960) junto con los dos anteriores, también tiene distribuciones marginales exponenciales, sus correspondientes estadísticos mínimo y máximo no corresponden a modelos exponenciales ni

a mixturas generalizadas de los mismos, como se comprueba en las expresiones de sus funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = 2(1 + \theta x)e^{-2x - \theta x^2}$$

y

$$f_{(2)}(x) = 2e^{-x} - 2(1 + \theta x)e^{-2x - \theta x^2}.$$

A continuación presentamos algunos modelos exponenciales bivariantes que nos conducirán a la extensión de Friday y Patil (1977), entre los que destacaremos los estadísticos del modelo de Marshall y Olkin (1967).

Definición 1.15 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo exponencial bivalente de Freund (FBVE), si su función de densidad conjunta viene dada por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_4 e^{-(\nu - \alpha_4)x_1 - \alpha_4 x_2} & \text{si } 0 < x_1 < x_2 \\ \alpha_2 \alpha_3 e^{-\alpha_3 x_1 - (\nu - \alpha_3)x_2} & \text{si } 0 < x_2 < x_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo los parámetros $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$ y $\alpha_4 > 0$, y donde $\nu = \alpha_1 + \alpha_2$.

Definición 1.16 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo exponencial bivalente de Marshall y Olkin (MOBVE), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \exp(-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_{12} \max(x_1, x_2)) \quad \text{para todo } x_1, x_2 > 0$$

siendo sus parámetros $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_{12} > 0$.

Obsérvese que en este caso, el modelo MOBVE es una estructura de dependencia pura, en el sentido de que no incluye la posibilidad de independencia entre sus marginales como particularización de sus parámetros.

Además, las funciones de densidad de sus estadísticos mínimo y máximo son

$$f_{(1)}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \lambda e^{-\lambda x} - (\lambda_1 + \lambda_{12}) e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x}$$

donde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$, por lo que tienen distribuciones exponencial y mixtura generalizada de exponenciales, respectivamente.

Asimismo, Esary y Marshall (1974) proponen una ligera modificación del modelo MOBVE dada por

$$S(x_1, x_2) = \exp(-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \max(\lambda_3 x_1, \lambda_4 x_2)) \quad \text{para todo } x_1, x_2 > 0$$

donde $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ y $\lambda_4 > 0$.

No obstante, esta modificación supone una simple reparametrización y cambio de escala del propio modelo exponencial bivalente de Marshall y Olkin.

Por otro lado, Block y Basu (1974) proponen otra extensión del modelo MOBVE, a través de una mixtura de dicho modelo con una parte singular. Del mismo modo, Friday y Patil (1977) definen un modelo exponencial bivalente extendido, como una mixtura del modelo de Freund (1961) y una parte singular, los cuales incluyen como casos especiales a los modelos de Marshall y Olkin (1967) y Block y Basu (1974), mediante una transformación y restricción en sus parámetros.

Definición 1.17 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo exponencial bivariante de Friday y Patil (FPBVE), si su función de supervivencia está definida por

$$S(x_1, x_2) = \alpha_0 S_F(x_1, x_2) + (1 - \alpha_0) e^{-\nu \max(x_1, x_2)} \quad \text{para todo } x_1 > 0, x_2 > 0$$

donde $0 < \alpha_0 \leq 1$ y $S_F(x_1, x_2)$ es la función de supervivencia del modelo FBVE.

Obviamente, en el caso especial $\alpha_0 = 1$, coincide con el modelo FBVE, y para $\nu = \alpha_3$ ó $\nu = \alpha_4$, sus distribuciones marginales son mixturas de gamma y exponenciales (ver Friday y Patil (1977)), así que Baggs (1994) y Baggs y Nagaraja (1996) estudian este modelo únicamente bajo la restricción $\nu \neq \alpha_3, \alpha_4$. Veamos la expresión de la función de supervivencia y de sus estadísticos ordenados para este caso particular del modelo de FPBVE, aunque utilizaremos la misma notación para ambos.

Definición 1.18 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo exponencial bivariante de Friday y Patil, si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \begin{cases} \phi_1 e^{-(v-\alpha_4)x_1 - \alpha_4 x_2} + (1 - \phi_1) e^{-v x_2} & \text{si } 0 < x_1 < x_2 \\ \phi_2 e^{-(v-\alpha_3)x_2 - \alpha_3 x_1} + (1 - \phi_2) e^{-v x_1} & \text{si } 0 < x_2 < x_1 \end{cases}$$

donde $\alpha_i > 0$ para $i = 0, \dots, 4$, $v = \alpha_1 + \alpha_2$, $\phi_1 = \frac{\alpha_0 \alpha_1}{v - \alpha_4}$ y $\phi_2 = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{v - \alpha_3}$, siendo $v \neq \alpha_3, \alpha_4$.

Los estadísticos ordenados T_1 y T_2 obtenidos del modelo FPBVE de la Definición 1.18, tienen funciones de densidad dadas por

$$f_{(1)}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \phi_1 \alpha_4 e^{-\alpha_4 x} + \phi_2 \alpha_3 e^{-\alpha_3 x} + (1 - \phi_1 - \phi_2) \nu e^{-\nu x}$$

las cuales son exponencial y mixtura generalizada de exponenciales, respectivamente.

Obsérvese que en la forma general del modelo FPBVE, pueden obtenerse los estadísticos ordenados sin la restricción $\nu \neq \alpha_3, \alpha_4$, en cuyo caso, el estadístico mínimo también tiene una distribución exponencial. Sin embargo, el estadístico máximo no es una mixtura generalizada de funciones de densidad exponenciales (véase Baggs y Nagaraja (1996)), siendo su expresión dependiente de los valores de α_3, α_4 y ν ,

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} \phi_1 \alpha_4 e^{-\alpha_4 x} + \phi_2 \alpha_3 e^{-\alpha_3 x} + (1 - \phi_1 - \phi_2) \nu e^{-\nu x} & \text{si } \nu \neq \alpha_3, \alpha_4 \\ \phi_1 \alpha_4 e^{-\alpha_4 x} + ((1 - \phi_1) \nu - \alpha_0 \alpha_2) e^{-\nu x} + \alpha_0 \alpha_2 \nu x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_3 \neq \alpha_4 \\ \phi_2 \alpha_3 e^{-\alpha_3 x} + ((1 - \phi_2) \nu - \alpha_0 \alpha_1) e^{-\nu x} + \alpha_0 \alpha_1 \nu x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_4 \neq \alpha_3 \\ (1 - \alpha_0) \nu e^{-\nu x} + \alpha_0 \nu^2 x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_3 = \alpha_4 \end{cases}$$

Para finalizar esta sección, damos el modelo exponencial bivalente de Raftery (1984), viendo en primer lugar la versión completamente parametrizada.

Definición 1.19 *Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que tiene un modelo exponencial bivalente de Raftery (RBVE), si su función de supervivencia viene dada por*

$$S(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^1 p_{ij} S_{ij}(x_1, x_2) \quad \text{para todo } x_1 > 0, x_2 > 0$$

siendo

$$\begin{aligned}
S_{00}(x_1, x_2) &= e^{-\lambda\left(\frac{1}{1-\pi_1}x_1 + \frac{1}{1-\pi_2}x_2\right)} \\
S_{01}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\pi_2}e^{-\lambda\left(\frac{1}{1-\pi_1}x_1 + x_2\right)} - \frac{1-\pi_2}{\pi_2}e^{-\lambda\left(\frac{1}{1-\pi_1}x_1 + \frac{1}{1-\pi_2}x_2\right)} \\
S_{10}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\pi_1}e^{-\lambda\left(x_1 + \frac{1}{1-\pi_2}x_2\right)} - \frac{1-\pi_1}{\pi_1}e^{-\lambda\left(\frac{1}{1-\pi_1}x_1 + \frac{1}{1-\pi_2}x_2\right)} \\
S_{11}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\pi_{(2)}}e^{-\lambda x_{(2)}} - \frac{(1-\pi_{(2)})^2}{\pi_{(2)}(1-\pi_1\pi_2)}e^{-\frac{\lambda}{1-\pi_{(2)}}(x_{(2)}-\pi_{(2)}x_{(1)})} \\
&\quad - \frac{(1-\pi_1)(1-\pi_2)}{1-\pi_1\pi_2}e^{-\lambda\left(\frac{1}{1-\pi_1}x_1 + \frac{1}{1-\pi_2}x_2\right)}
\end{aligned}$$

en donde $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$, $x_{(2)} = \max(x_1, x_2)$, $\pi_{(2)} = \max(\pi_1, \pi_2)$, $\pi_i = P(I_i = 1)$ para $i = 1, 2$, $p_{ij} = P(I_1 = j, I_2 = k)$ para $j, k = 0, 1$ e $\{I_1, I_2\}$ son variables aleatorias indicadores e independientes de las variables aleatorias exponenciales de las marginales con parámetro $\lambda > 0$.

No obstante, el gran número de parámetros, todos entre 0 y 1, que contiene este modelo bivalente de Raftery ha limitado su aplicabilidad, a pesar de la amplia gama de estructuras dependientes que incluye. Por ello, el propio Raftery (1984) propone tres versiones más restrictivas como modelos exponenciales bivariantes: (i) $\pi_1 = \pi_2 = p_{11} = \pi$, (ii) $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ y $p_{11} = 0$ si $\pi \leq 0.5$ y $p_{11} = 2\pi - 1$ en otro caso, y (iii) $\pi_1 = p_{11} = \gamma$.

Definición 1.20 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que tiene un modelo exponencial bivalente de Raftery I (RBVE-I), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \frac{1-\pi}{1+\pi}e^{-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1+x_2)} + e^{-\lambda x_{(2)}} \left(1 - \frac{1-\pi}{1+\pi}e^{-\frac{\lambda\pi}{1-\pi}(x_{(2)}-x_{(1)})}\right)$$

para todo $x_1 > 0, x_2 > 0$, donde $\lambda > 0$ y $0 < \pi < 1$, y siendo $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$ y $x_{(2)} = \max(x_1, x_2)$.

A partir de la función de supervivencia conjunta de la Definición 1.20, para este modelo RBVE-I, se tiene que las funciones de densidad de sus estadísticos ordenados son

$$f_{(1)}(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+\pi}e^{-\lambda x} + \frac{2\lambda}{1+\pi}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \frac{2\lambda}{1+\pi}e^{-\lambda x} - \frac{2\lambda}{1+\pi}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x}$$

es decir, son mixturas y mixturas generalizadas de exponenciales, respectivamente.

Definición 1.21 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que tiene un modelo exponencial bivalente de Raftery II (RBVE-II), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-\lambda(\frac{1}{1-\pi}x_1+x_2)} + e^{-\lambda(x_1+\frac{1}{1-\pi}x_2)} - e^{-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1+x_2)} & \text{si } 0 < \pi \leq 0.5 \\ \frac{1-\pi}{\pi}e^{-\lambda(\frac{1}{1-\pi}x_1+x_2)} + \frac{1-\pi}{\pi}e^{-\lambda(x_1+\frac{1}{1-\pi}x_2)} \\ + \frac{2\pi-1}{\pi}e^{-\lambda x_{(2)}} \left(1 - \frac{1-\pi}{1+\pi}e^{-\frac{\lambda\pi}{1-\pi}(x_{(2)}-x_{(1)})}\right) \\ + \left(\frac{2(2\pi-1)}{\pi(1+\pi)} - 1\right)e^{-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1+x_2)} & \text{si } 0.5 < \pi < 1 \end{cases}$$

para todo $x_1 > 0, x_2 > 0$, donde $\lambda > 0$ y $0 < \pi < 1$, y siendo $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$ y $x_{(2)} = \max(x_1, x_2)$.

Asimismo, para este modelo RBVE-II, se obtienen las siguientes funciones de densidad de los estadísticos ordenados

$$f_{(1)}(x) = \begin{cases} 2\lambda\frac{2-\pi}{1-\pi}e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x} - \frac{2\lambda}{1-\pi}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x} & \text{si } 0 < \pi \leq 0.5 \\ 2\lambda\frac{2\pi-1}{1+\pi}e^{-\lambda x} + 2\lambda\frac{2-\pi}{\pi}e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x} - 2\lambda\frac{2-\pi}{\pi(1+\pi)}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x} & \text{si } 0.5 < \pi < 1 \end{cases}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda x} - 2\lambda \frac{2-\pi}{1-\pi} e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x} + \frac{2\lambda}{1-\pi} e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x} & \text{si } 0 < \pi \leq 0.5 \\ 2\lambda \frac{2-\pi}{1+\pi} e^{-\lambda x} - 2\lambda \frac{2-\pi}{\pi} e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x} + \lambda \frac{2-\pi}{\pi(1+\pi)} e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x} & \text{si } 0.5 < \pi < 1 \end{cases}$$

Obsérvese que en este caso, ambos estadísticos extremos son mixturas generalizadas de exponenciales.

Definición 1.22 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que tiene un modelo exponencial bivalente de Raftery III (RBVE-III), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \frac{\gamma(1-\pi_2)^2}{\pi_2(1-\gamma\pi_2)} e^{-\lambda(\frac{1}{1-\gamma}x_1 + \frac{1}{1-\pi_2}x_2)} + \frac{\pi_2 - \gamma}{\pi_2} e^{-\lambda(\frac{1}{1-\gamma}x_1 + x_2)} \\ + \frac{\gamma}{\pi_2} e^{-\lambda x_{(2)}} \left(1 - \frac{(1-\pi_2)^2}{1-\gamma\pi_2} e^{-\frac{\lambda\pi_2}{1-\pi_2}(x_{(2)}-x_{(1)})} \right)$$

para todo $x_1 > 0, x_2 > 0$, donde $\lambda > 0, 0 < \pi_2 < 1$ y $0 < \gamma < 1$ tales que $\gamma \leq \pi_2$, y siendo $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$ y $x_{(2)} = \max(x_1, x_2)$.

Las funciones de densidad de los estadísticos mínimo y máximo del modelo RBVE-III vienen dadas por

$$f_{(1)}(x) = \lambda\gamma \frac{2-\pi_2-\gamma}{1-\gamma\pi_2} e^{-\lambda x} + \lambda \left(1 - \frac{\gamma}{\pi_2} \right) \left(1 + \frac{1}{1-\gamma} \right) e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\gamma})x} \\ + \lambda\gamma \frac{1-\pi_2}{\pi_2(1-\gamma\pi_2)} \left(\frac{2-\gamma-\pi_2}{1-\gamma} \right) e^{-\lambda(\frac{1}{1-\pi_2} + \frac{1}{1-\gamma})x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \lambda \left(1 + \frac{(1-\gamma)^2}{1-\gamma\pi_2} \right) e^{-\lambda x} - \lambda \left(1 - \frac{\gamma}{\pi_2} \right) \left(1 + \frac{1}{1-\gamma} \right) e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\gamma})x} \\ - \lambda\gamma \frac{1-\pi_2}{\pi_2(1-\gamma\pi_2)} \left(\frac{2-\gamma-\pi_2}{1-\gamma} \right) e^{-\lambda(\frac{1}{1-\pi_2} + \frac{1}{1-\gamma})x}$$

que como en la versión anterior, son mixturas generalizadas de exponenciales.

1.5. Definiciones y propiedades de logconcauidad

Sea X una variable aleatoria no negativa con función de supervivencia $S(x)$, diremos que X tiene función de supervivencia logcóncava (logconvexa) si $\log S(x)$ es cóncava (convexa) en su soporte; también se dice que X tiene la propiedad de supervivencia logcóncava (logconvexa) en su soporte.

En el caso de una variable aleatoria absolutamente continua, esta característica también es conocida por función de razón de azar o tasa de fallo creciente (decreciente), en donde la función de razón de azar o tasa de fallo es menos la primera derivada del logaritmo de la función de supervivencia

$$r(x) = -\frac{d \log S(x)}{dx} = \frac{f(x)}{S(x)}$$

la cual representa la probabilidad de muerte o fallo en cada instante; es decir, la logconcauidad de la función de supervivencia está determinada por la monotonía de la tasa de fallo. Así, la propiedad de supervivencia logcóncava también es conocida por clase de envejecimiento IFR (tasa de fallo creciente) y la supervivencia logconvexa por clase de envejecimiento DFR (tasa de fallo decreciente).

Veamos ahora un resultado previo que utilizaremos en el estudio del comportamiento estocástico y envejecimiento de una variable a través de la logconcauidad de la función de supervivencia (véase entre otros Barlow y Proschan (1981) y Baggs (1994)).

Lema 1.1 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de supervivencia $S(x)$ y función de densidad $f(x)$. Si*

$$f'(x) \cdot S(x) + f(x)^2 \geq 0$$

para todo x , entonces X tiene función de supervivencia logcóncava, es decir, X es IFR.

Análogamente, si la desigualdad es en sentido contrario,

$$f'(x) \cdot S(x) + f(x)^2 \leq 0$$

entonces la función de supervivencia es logconvexa, es decir, X es DFR.

Demostración. Obviamente, la logconcavidad de la función de supervivencia $S(x)$ está determinada por el signo de $(\log S(x))''$, o equivalentemente, por el signo de su numerador, es decir,

$$S''(x) \cdot S(x) - S'(x)^2 = - (f'(x)S(x) + f(x)^2)$$

y por consiguiente, se deducen ambos casos del enunciado. \square

Por otro lado, se dice que X tiene función de densidad logcóncava (logconvexa) si $\log f(x)$ es cóncava (convexa) en su soporte. Esta característica también es conocida por tasa de verosimilitud creciente (decreciente), en donde la tasa de verosimilitud es menos la derivada del logaritmo de la función de densidad

$$l(x) = -\frac{d \log f(x)}{dx} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

es decir, la logconcavidad de la función de densidad está determinada por la monotonía de la tasa de verosimilitud. Así, la propiedad de densidad logcóncava también es conocida por clase de envejecimiento ILR (tasa de verosimilitud creciente) o por densidad de tipo PF_2 , y la densidad logconvexa por clase de envejecimiento DLR (tasa de verosimilitud decreciente), véase entre otros Ross (1996).

Otro resultado técnico que será de utilidad para comprobar la logconcavidad de la función de densidad es el siguiente.

Lema 1.2 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad $f(x)$. Si*

$$f''(x) \cdot f(x) \leq f'(x)^2$$

para todo x , entonces X tiene función de densidad logcóncava.

Análogamente, si la desigualdad es en sentido contrario, entonces X tiene densidad logconvexa.

Demostración. Evidentemente, la logconcavidad de $f(x)$ está determinada por la monotonía de la tasa de verosimilitud, la cual viene dada por el signo del numerador de su derivada, es decir, $f''(x) \cdot f(x) - f'(x)^2$, y por tanto, si se mantiene la desigualdad del enunciado, la tasa de verosimilitud es creciente, es decir, $f(x)$ es logcóncava. \square

Entre estas propiedades de logconcavidad de las funciones de densidad y supervivencia, se mantienen las siguientes implicaciones, ver por ejemplo Ross (1996) y Franco, Ruiz y Ruiz (2003).

Proposición 1.3 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua. Si la función de densidad es logcóncava en su soporte entonces la función de supervivencia es logcóncava en el soporte.*

Análogamente, si X tiene densidad logconvexa con soporte no acotado superiormente, su función de supervivencia también es logconvexa en el soporte.

Asimismo, se tiene la siguiente preservación de la logconvexidad de las funciones de supervivencias mediante mixturas, véase Barlow y Proschan (1981) y (1996).

Proposición 1.4 *La mezcla de funciones de supervivencia logconvexas tiene función de supervivencia logconvexa.*

Para concluir estos conceptos sobre el comportamiento estocástico y envejecimiento que utilizaremos a lo largo de esta Memoria, damos el siguiente lema técnico.

Lema 1.5 *Sea $g(x)$ una función real continua y derivable a trozos en su soporte. Si $g(x)$ es cóncava a trozos y $g'(x-) \geq g'(x+)$, entonces es cóncava en su soporte.*

Análogamente, si $g(x)$ es convexa a trozos y $g'(x-) \leq g'(x+)$, entonces es convexa en su soporte.

Demostración. Obviamente, la concavidad de $g(x)$ está determinada por la monotonía de su derivada. De este modo, si $g(x)$ es cóncava a trozos, $g'(x)$ es decreciente a trozos, y teniendo en cuenta que la derivada por la izquierda de $g(x)$ es mayor o igual que su derivada por la derecha, $g'(x-) \geq g'(x+)$, se obtiene que $g'(x)$ es decreciente, es decir, $g(x)$ es cóncava en su soporte. \square

1.6. Aplicación a modelos usuales en valoración

En esta sección establecemos las propiedades de logconcavidad de los modelos de probabilidad univariantes presentados en este capítulo, que serán de interés en la aplicación de la logconcavidad de los estadísticos extremos en valoración del último capítulo.

Proposición 1.6 *Las funciones de supervivencia y de densidad de un modelo rectangular son logcóncavas en su soporte.*

Demostración. A partir de las funciones de supervivencia y de densidad de un modelo rectangular dado en la Definición 1.1, tenemos que

$$\frac{f(x)}{S(x)} = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } x \in (0, 1)$$

y por tanto, $S(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$.

Además, para la función de densidad

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \quad \text{si } x \in (0, 1)$$

es decir, $f(x)$ es logcóncava y logconvexa en $(0, 1)$. □

Proposición 1.7 *Las funciones de supervivencia y de densidad de un modelo triangular son logcóncavas en su soporte.*

Demostración. A partir de la función de supervivencia del modelo triangular, tenemos que la tasa de fallo es

$$r(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \begin{cases} \frac{2x}{m-x^2} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{2}{1-x} & \text{si } m \leq x < 1 \end{cases}$$

y por los Lemas 1.1 y 1.5, $S(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$.

Por otro lado, la derivada de su función de densidad es

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{m} & \text{si } 0 < x < m \\ -\frac{2}{1-m} & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de donde

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < m \\ -\frac{1}{1-x} & \text{si } m \leq x < 1 \end{cases}$$

y por el Lema 1.5, $f(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$. \square

Proposición 1.8 *Las funciones de supervivencia y de densidad de un modelo trapezoidal son logcóncavas en su soporte.*

Demostración. A través de la función de supervivencia del modelo trapezoidal, tenemos que

$$\frac{f(x)}{S(x)} = \begin{cases} \frac{2x}{(1+M-m)m-x^2} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{2}{1+M-2x} & \text{si } m \leq x < M \\ \frac{2}{1-x} & \text{si } M \leq x < 1 \end{cases}$$

de donde se deduce, por el Lema 1.5, que $S(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$.

Por otro lado, la tasa de verosimilitud de este modelo está determinada por el cociente

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < m \\ 0 & \text{si } m \leq x < M \\ -\frac{1}{1-x} & \text{si } M \leq x < 1 \end{cases}$$

y por tanto, como en los casos anteriores, $f(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$. \square

Proposición 1.9 *La función de supervivencia de un modelo triangular generalizado es logcóncava en su soporte si $n_1 \geq 1$.*

Demostración. Si consideramos la función de supervivencia de este modelo, se obtiene que

$$\frac{f(x)}{S(x)} = \begin{cases} \frac{n_1 n_2 x^{n_1-1}}{(n_1(1-m)+n_2m)m^{n_1-1}} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{n_2}{1-x} & \text{si } m \leq x < 1 \end{cases}$$

Por un lado, si $0 < x < m$ entonces

$$\left(\frac{f(x)}{S(x)}\right)' = \frac{n_1 n_2 x^{n_1-2} ((n_1-1)(n_1(1-m)+n_2m)m^{n_1-1} + n_2 x^{n_1} m)}{((n_1(1-m)+n_2m)m^{n_1-1})^2}$$

de donde obtenemos que la tasa de fallo $r(x)$ es creciente en $(0, m)$ cuando $n_1 \geq 1$, y consecuentemente, la función de supervivencia es logcóncava en $(0, m)$ cuando $n_1 \geq 1$.

Por otro lado, si $m \leq x < 1$, también tenemos que $S(x)$ es logcóncava.

Por tanto, del Lema 1.5, la función de supervivencia $S(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$ si $n_1 \geq 1$. \square

Proposición 1.10 *La función de densidad de un modelo triangular generalizado es logcóncava en su soporte si $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$.*

Demostración. A partir de la Definición 1.4 del modelo triangular generalizado, tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{n_1 n_2 (n_1-1)}{n_1(1-m)+n_2m} \left(\frac{x}{m}\right)^{n_1-2} \frac{1}{m} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{n_1 n_2 (n_2-1)}{n_1(1-m)+n_2m} \left(\frac{1-x}{1-m}\right)^{n_2-2} \frac{1}{1-m} & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{n_1-1}{x} & \text{si } 0 < x < m \\ -\frac{n_2-1}{1-x} & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que $f'(x) = 0$ en $0 < x < m$ si $n_1 = 1$, y $f'(x) = 0$ en $m \leq x < 1$ si $n_2 = 1$.

De modo que si $n_1 = 1$ la función $f(x)$ es logcóncava y logconvexa en $(0, m)$, si $n_1 > 1$ entonces $f(x)$ es logcóncava en $(0, m)$, pero si $n_1 < 1$ entonces $f(x)$ es logconvexa en $(0, m)$.

Además, cuando $m \leq x < 1$ tenemos que $f(x)$ es logcóncava y logconvexa para $n_2 = 1$, logcóncava para $n_2 > 1$ y logconvexa para $n_2 < 1$.

Por consiguiente, del Lema 1.5, tenemos que $f(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$ si $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$. \square

Proposición 1.11 *La función de supervivencia de un modelo trapezoidal generalizado es logcóncava en su soporte si $n_1 \geq 1$ y $\alpha \leq 1 + n_2 \frac{M-n}{1-M}$.*

Demostración. De la Definición 1.5, tenemos que

$$\frac{f(x)}{S(x)} = \begin{cases} \frac{2\alpha n_1 n_2 \left(\frac{x}{m}\right)^{n_1-1}}{A - 2\alpha n_2 m \left(\frac{x}{m}\right)^{n_1}} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{2n_1 n_2 \left((\alpha-1) \frac{M-x}{M-m} + 1\right)}{A - 2\alpha n_2 m - 2(x-m)n_1 n_2 \left(1 + \frac{\alpha-1}{2} \frac{2M-m-x}{M-m}\right)} & \text{si } m \leq x < M \\ \frac{n_2}{1-x} & \text{si } M \leq x < 1 \end{cases}$$

siendo $A = 2\alpha n_2 m + (\alpha + 1)(M - m)n_1 n_2 + 2(1 - M)n_1$, de donde se deduce que en $(0, m)$ la función de supervivencia es logcóncava para $n_1 \geq 1$ y logconvexa para $n_1 < 1$,

y en $[M, 1)$ la función de supervivencia también es logcóncava. Además, en $[m, M)$ la tasa de fallo se puede expresar como

$$r(x) = \frac{2(\alpha - 1)(M - x) + 2(M - m)}{(\alpha - 1)(M - x)^2 + 2(M - m)(M - x) + 2\frac{(1-M)(M-m)}{n_2}}$$

donde se observa que el numerador de su derivada es no negativo si $\alpha \leq 1 + n_2\frac{M-n}{1-M}$, es decir, la función de supervivencia también es logcóncava en este tramo intermedio cuando $\alpha \leq 1 + n_2\frac{M-n}{1-M}$. Por lo que del Lema 1.5, obtenemos que $S(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$ si $n_1 \geq 1$ y $\alpha \leq 1 + n_2\frac{M-n}{1-M}$. \square

Proposición 1.12 *La función de densidad de un modelo trapezoidal generalizado es logcóncava en su soporte cuando $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ y $\frac{m}{m+(n_1-1)(M-m)} \leq \alpha \leq 1 + (n_2 - 1)\frac{M-m}{1-M}$.*

Demostración. A partir de la derivada de la función de densidad de la Definición 1.5

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha n_1 n_2}{A} \frac{n_1-1}{m} \left(\frac{x}{m}\right)^{n_1-2} & \text{si } 0 < x < m \\ -\frac{2n_1 n_2}{A} \frac{\alpha-1}{M-m} & \text{si } m \leq x < M \\ \frac{2n_1 n_2}{A} \frac{n_2-1}{1-M} \left(\frac{1-x}{1-M}\right)^{n_2-2} & \text{si } M \leq x < 1 \end{cases}$$

tenemos que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{n_1-1}{x} & \text{si } 0 < x < m \\ -\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)(M-x)+M-m} & \text{si } m \leq x < M \\ -\frac{n_2-1}{1-x} & \text{si } M \leq x < 1 \end{cases}$$

utilizando un razonamiento similar al modelo triangular generalizado, obtenemos que $\log f(x)$ es cóncava en los dos tramos laterales cuando $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$.

Además, en el tramo intermedio, $\log f(x)$ es cóncava para todo $\alpha > 0$. Por consiguiente, del Lema 1.5, tenemos que $f(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$ si $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ y $\alpha \in \left[\frac{m}{m+(n_1-1)(M-m)}, 1 + (n_2 - 1) \frac{M-m}{1-M} \right]$. \square

Proposición 1.13 *La función de densidad de un modelo beta es logcóncava en su soporte.*

Demostración. A través de la función de densidad dada en la Definición 1.6 para un modelo beta, tenemos que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{p-1}{x} - \frac{q-1}{1-x} \quad \text{para } 0 < x < 1$$

y por tanto, $f(x)$ es logcóncava en $(0, 1)$. \square

Corolario 1.14 *La función de densidad de un modelo beta PERT es logcóncava en su soporte.*

Corolario 1.15 *La función de densidad de un modelo beta Caballer es logcóncava en su soporte.*

Capítulo 2

Mixturas generalizadas de exponenciales. Logconcavidad de estadísticos extremos

2.1. Introducción

Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional. Si consideramos que las componentes X_1 y X_2 son independientes e idénticamente distribuidas según un modelo exponencial, entonces su estadístico ordenado mínimo T_1 también está exponencialmente distribuido, y por tanto, su función de supervivencia es logcóncava y logconvexa, así como su función de densidad, es decir, sus tasas de fallo y verosimilitud son constantes.

Asimismo, el estadístico ordenado máximo T_2 pertenece a la familia de variables

aleatorias con función de supervivencia logconvexa, así como su función de densidad. Sin embargo, esto no es cierto para todo modelo exponencial bivalente, por ejemplo, ver Baggs y Nagaraja (1996).

En este contexto, cabe destacar que los estadísticos ordenados mínimo y máximo de los modelos exponenciales bivalentes más comunes, tienen predominantemente como distribución una mixtura generalizada de exponenciales, es decir, una combinación lineal no convexa de distribuciones exponenciales.

Por tanto, el estudio de propiedades de estas mixturas generalizadas de exponenciales resulta de gran interés para determinar las propiedades de logconcavidad de los estadísticos mínimo y máximo, formados por dos componentes cuya distribución conjunta corresponde a un modelo exponencial bivalente, y en particular, a los modelos GBVE, MOBVE, FPBVE y RBVE dados en la Sección 1.4.

De este modo, en la siguiente sección, damos la definición general de mixtura generalizada de distribuciones exponenciales, así como las caracterizaciones en el caso de dos y tres exponenciales de Bartholomew (1969) y Baggs y Nagaraja (1996). Posteriormente, analizamos las propiedades de logconcavidad de dichas mixturas generalizadas, obteniendo como consecuencia los resultados de Baggs y Nagaraja (1996).

Para finalizar este capítulo, aplicamos los resultados de clasificación de la logconcavidad de la función de densidad de los estadísticos ordenados mínimo y máximo de los modelos exponenciales bivalentes citados anteriormente, obteniéndose como consecuencia las clasificaciones de sus funciones de supervivencia.

2.2. Mixturas generalizadas de exponenciales

En primer lugar, vemos el concepto de mixtura generalizada de exponenciales junto con algunas propiedades básicas.

Definición 2.1 *Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X es una mixtura generalizada de distribuciones exponenciales, si su función de densidad es de la forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$$

donde $f_i(x) = b_i e^{-b_i x}$ para todo $x > 0$, con $b_i > 0$ y $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tal que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los parámetros de las exponenciales que forman esta mixtura generalizada, están ordenados: $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$.

En esta dirección, diversos autores han estudiado las mixturas generalizadas de exponenciales, obteniendo condiciones sobre los coeficientes de la combinación y los parámetros de las exponenciales, para que dicha combinación sea una función de distribución, así como algunas propiedades de logconcauidad a partir de dichos coeficientes y parámetros.

En particular, Stetuel (1967) obtiene las condiciones necesarias para que $f(x)$ sea función de densidad: (i) $a_1 > 0$ y (ii) $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0$.

Asimismo, Bartholomew (1969) obtiene que las condiciones suficientes para estas mixturas generalizadas son $\sum_{i=1}^r a_i b_i \geq 0$ para $r = 1, 2, \dots, n$; siendo en el caso $n = 2$, las condiciones necesarias y suficientes para que $f(x)$ sea una función de densidad,

problema también estudiado por Botta, Harris y Marchall (1987), Harris, Marchall y Botta (1992), Baggs (1994) y Baggs y Nagaraja (1996).

En este sentido, enunciamos a continuación las caracterizaciones de las mixturas generalizadas de dos y tres distribuciones exponenciales de Bartholomew (1969) y Baggs y Nagaraja (1996).

Proposición 2.1 *Sea $f(x) = a_1 b_1 e^{-b_1 x} + a_2 b_2 e^{-b_2 x}$ una mixtura generalizada de dos distribuciones exponenciales de parámetros $0 < b_1 < b_2 < \infty$, donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 + a_2 = 1$ y $a_1 > 0$. Entonces, $f(x)$ es función de densidad si y sólo si verifica que $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq 0$.*

Proposición 2.2 *Sea $f(x) = a_1 b_1 e^{-b_1 x} + a_2 b_2 e^{-b_2 x} + a_3 b_3 e^{-b_3 x}$ una mixtura generalizada de tres distribuciones exponenciales de parámetros $0 < b_1 < b_2 < b_3 < \infty$, siendo $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ y $a_1 > 0$.*

1. *Si $a_2, a_3 > 0$, entonces $f(x)$ es función de densidad.*
2. *Si $a_2 \in \mathbb{R}$ y $a_3 < 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si se verifica:*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \geq 0 \tag{2.2.1}$$

3. *Si $a_2 < 0$ y $a_3 > 0$. Entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si se verifica alguno de los siguientes casos:*

a) $m \leq 1$ y (2.2.1)

b) $m > 1$ y $\log(m_1) \geq (b_3 - b_1)(b_2 - b_3)^{-1} \log(m)$

donde

$$m = \frac{-a_3 b_3 (b_3 - b_1)}{a_2 b_2 (b_2 - b_1)} \quad y \quad m_1 = \frac{a_1 b_1 (b_2 - b_1)}{a_3 b_3 (b_3 - b_2)}.$$

2.3. Logconcauidad de mixturas generalizadas de exponenciales

En esta sección estudiamos la logconcauidad según los coeficientes y parámetros de las exponenciales de una mixtura generalizada de dos o tres distribuciones exponenciales, para lo que utilizaremos el Lema 1.2.

Obsérvese que Baggs y Nagaraja (1996) estudian la logconcauidad de la función de supervivencia de estas mixturas generalizadas de dos o tres exponenciales.

2.3.1. Mixturas generalizadas de dos exponenciales

Teorema 2.3 *Sea X una mixtura generalizada de dos distribuciones exponenciales con función de densidad $f(x)$ y parámetros $b_1 < b_2$. Entonces, $f(x)$ es logcóncava cuando $a_2 < 0$ y $f(x)$ es logconvexa cuando $a_2 > 0$.*

Demostración. Dado que $f(x) = a_1 b_1 e^{-b_1 x} + a_2 b_2 e^{-b_2 x}$, se tiene que la primera y segunda derivadas de esta función de densidad vienen dadas por

$$f'(x) = -a_1 b_1^2 e^{-b_1 x} - a_2 b_2^2 e^{-b_2 x}$$

y

$$f''(x) = a_1 b_1^3 e^{-b_1 x} + a_2 b_2^3 e^{-b_2 x}$$

Así, del Lema 1.2, $f(x)$ es logcóncava si

$$\left(\sum_{i=1}^2 a_i b_i^3 e^{-b_i x} \right) \left(\sum_{i=1}^2 a_i b_i e^{-b_i x} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^2 a_i b_i^2 e^{-b_i x} \right)^2 \quad \text{para todo } x > 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} & a_1^2 b_1^4 e^{-2b_1 x} + a_1 b_1^3 a_2 b_2 e^{-(b_1+b_2)x} + a_2 b_2^3 a_1 b_1 e^{-(b_1+b_2)x} + a_2^2 b_2^4 e^{-2b_2 x} \\ & \leq a_1^2 b_1^4 e^{-2b_1 x} + a_2^2 b_2^4 e^{-2b_2 x} + 2a_1 b_1^2 a_2 b_2^2 e^{-(b_1+b_2)x} \end{aligned}$$

donde simplificando esta desigualdad, tenemos que

$$e^{-(b_1+b_2)x} a_1 b_1 a_2 b_2 (b_1 - b_2)^2 \leq 0,$$

y por tanto, obtenemos que $f(x)$ es logcóncava cuando $a_2 < 0$.

De manera análoga, se prueba que $f(x)$ es logconvexa cuando $a_2 > 0$. □

A partir de las implicaciones que relacionan la logconcavidad de la función de densidad y de la función de supervivencia de una variable aleatoria de la Proposición 1.3 y el Teorema 2.3, se obtiene como corolario el Teorema 1 de Baggs y Nagaraja (1996).

Corolario 2.4 *Sea X una mixtura generalizada de dos distribuciones exponenciales con función de supervivencia $S(x)$ y parámetros $b_1 < b_2$. Entonces, $S(x)$ es logcóncava cuando $a_2 < 0$ y $S(x)$ es logconvexa cuando $a_2 > 0$.*

2.3.2. Mixturas generalizadas de tres exponenciales

Veamos ahora la clasificación de la logconcavidad de la función de densidad de una mixtura generalizada de tres distribuciones exponenciales.

Teorema 2.5 *Sea X una mixtura generalizada de tres distribuciones exponenciales, con función de densidad $f(x) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i e^{-b_i x}$ para $x > 0$ tal que $0 < b_1 < b_2 < b_3 < \infty$, $a_1 > 0$ y $a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, y sea $s = a_1 a_2 b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 + a_1 a_3 b_1 b_3 (b_1 - b_3)^2 + a_2 a_3 b_2 b_3 (b_2 - b_3)^2$.*

1. *Si $a_2 > 0, a_3 > 0$, entonces $f(x)$ es logconvexa.*
2. *Si $a_2 > 0, a_3 < 0$, entonces $f(x)$ es logconvexa si y sólo si $s \geq 0$. Además, $f(x)$ no puede ser logcóncava.*
3. *Si $a_2 < 0, a_3 < 0$, entonces $f(x)$ es logcóncava si y sólo si $s \leq 0$. Además, $f(x)$ no puede ser logconvexa.*
4. *Si $a_2 < 0, a_3 > 0$, entonces $f(x)$ no puede ser logconvexa. Además, $f(x)$ es logcóncava si y sólo si $s \leq 0$ y*

$$\begin{cases} \tau \leq 0 \\ \text{ó} \\ g(\tau) \leq 0 \end{cases}$$

donde

$$\tau = \frac{1}{b_3 - b_1} \log \frac{a_3 b_3 (b_3 - b_2)}{a_1 b_1 (b_2 - b_1)}$$

y

$$\begin{aligned} g(x) &= a_1 a_2 b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 e^{-(b_1+b_2)x} + a_1 a_3 b_1 b_3 (b_1 - b_3)^2 e^{-(b_1+b_3)x} \\ &\quad + a_2 a_3 b_2 b_3 (b_2 - b_3)^2 e^{-(b_2+b_3)x}. \end{aligned}$$

Demostración. De manera similar al razonamiento seguido en la prueba del Teorema 2.3, a partir del Lema 1.2, la logconcauidad de $f(x)$ viene dada por la desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i^3 e^{-b_i x} \right) \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i e^{-b_i x} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i^2 e^{-b_i x} \right)^2 \quad \text{para todo } x > 0,$$

desarrollando los productos de esta expresión y agrupando los términos adecuadamente, la desigualdad anterior puede escribirse como

$$g(x) \leq 0 \quad \text{para todo } x > 0. \quad (2.3.1)$$

Así pues, por el Lema 1.2, es suficiente que se verifique (2.3.1) para que $f(x)$ sea logcóncava. Análogamente, $f(x)$ es logconvexa si la desigualdad es en sentido contrario.

De manera que estudiaremos el signo de $g(x)$, distinguiendo los distintos casos del signo de los coeficientes de la combinación de exponenciales.

Si $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$, todos los términos de $g(x)$ son positivos, es decir, $g(x) > 0$. Por lo tanto, $f(x)$ es logconvexa.

En otro caso, observamos que

$$s = g(0) = a_1 a_2 b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 + a_1 a_3 b_1 b_3 (b_1 - b_3)^2 + a_2 a_3 b_2 b_3 (b_2 - b_3)^2.$$

En el caso (2), $a_1, a_2 > 0$ y $a_3 < 0$, consideramos la siguiente función

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{(b_1+b_2)x} g(x) \\ &= a_1 a_2 b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 + a_1 a_3 b_1 b_3 (b_1 - b_3)^2 e^{(b_2-b_3)x} + a_2 a_3 b_2 b_3 (b_2 - b_3)^2 e^{(b_1-b_3)x} \end{aligned}$$

que tiene igual signo que $g(x)$, siendo $h(0) = s$. Teniendo en cuenta que $h(x)$ es creciente en x y su límite es positivo, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = a_1 a_2 b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 > 0$, obtenemos que

- si $s \geq 0$ entonces $h(x) > 0$ para todo $x > 0$, es decir, $g(x) > 0$ para todo $x > 0$, y por tanto, la función $f(x)$ es logconvexa.

- si $s < 0$ entonces $h(x)$ cambia de signo, o lo que es lo mismo $g(x)$ cambia de signo, por lo que $f(x)$ no mantiene su logconcavidad.

Por otro lado, en el caso (3), $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ y $a_3 < 0$, tenemos que la siguiente función

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{(b_2+b_3)x} g(x) \\ &= a_1 a_2 b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 e^{(b_3-b_1)x} + a_1 a_3 b_1 b_3 (b_1 - b_3)^2 e^{(b_2-b_1)x} + a_2 a_3 b_2 b_3 (b_2 - b_3)^2 \end{aligned}$$

tiene el mismo signo que la función $g(x)$. Además, $h(x)$ es decreciente en x , $h(0) = s$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$. Por lo que,

- si $s \leq 0$ entonces $h(x) < 0$ para todo $x > 0$, así $g(0) < 0$ para todo $x > 0$, y por tanto, $f(x)$ es logcóncava.

- si $s > 0$ entonces la función $h(x)$ cambia de signo, o equivalentemente $g(x)$ cambia de signo, por lo que $f(x)$ no mantiene su logconcauidad.

Finalmente, para probar el caso (4), $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ y $a_2 < 0$, tomamos la función

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{(b_1+b_3)x} g(x) \\ &= a_1 a_2 b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 e^{(b_3-b_2)x} + a_1 a_3 b_1 b_3 (b_1 - b_3)^2 + a_2 a_3 b_2 b_3 (b_2 - b_3)^2 e^{-(b_2-b_1)x} \end{aligned}$$

siendo las funciones $g(x)$ y $h(x)$ de igual signo. Además, $h(0) = s$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$, es decir, existe x_0 tal que $h(x) < 0$ para todo $x \geq x_0$. Entonces, $g(x) < 0$ para $x \geq x_0$, y por tanto, la función de densidad $f(x)$ no puede ser logconvexa.

Asimismo, dado que $h(0) = s$, será suficiente que $s \leq 0$ y $h(x)$ sea decreciente, pues en tal caso, $h(x) < 0$ para todo $x > 0$, y por consiguiente, $f(x)$ será logcóncava.

Veamos ahora cuando se cumple que $f(x)$ es logcóncava. Para ello, es suficiente que $h(x) < 0$ para todo $x > 0$, así $g(x) < 0$ para todo $x > 0$. Y teniendo en cuenta que $h(0) = s$, necesitamos $s \leq 0$.

Por tanto, si $h(x)$ es decreciente en x ó máx $h(x) < 0$, entonces $f(x)$ es logcóncava.

Primero, calculamos la derivada de $h(x)$ dada por

$$\begin{aligned} h'(x) &= a_1 a_2 b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 (b_3 - b_2) e^{(b_3 - b_2)x} - a_2 a_3 b_2 b_3 (b_2 - b_3)^2 (b_2 - b_1) e^{-(b_2 - b_1)x} \\ &= a_2 b_2 (b_2 - b_1) (b_3 - b_2) (a_1 b_1 (b_2 - b_1) e^{(b_3 - b_2)x} - a_3 b_3 (b_3 - b_2) e^{-(b_2 - b_1)x}) \end{aligned}$$

la cual es negativa si y sólo si

$$a_1 b_1 (b_2 - b_1) e^{(b_3 - b_2)x} - a_3 b_3 (b_3 - b_2) e^{-(b_2 - b_1)x} > 0$$

es decir,

$$\frac{a_1 b_1 (b_2 - b_1)}{a_3 b_3 (b_3 - b_2)} > e^{-(b_3 - b_1)x}$$

o equivalentemente

$$\tau = \frac{1}{b_3 - b_1} \log \frac{a_3 b_3 (b_3 - b_2)}{a_1 b_1 (b_2 - b_1)} < x$$

donde τ es la solución de la primera derivada igualada a cero.

Por lo que, si $\tau \leq 0$, $h(x)$ es decreciente en $x > 0$, y si $\tau > 0$ entonces $h(\tau) = \text{máx } h(x)$. Así que, $g(x)$ es negativo si y sólo si se verifica que $s \leq 0$ y $\tau \leq 0$, o bien $\tau > 0$ y $g(\tau) \leq 0$, pues $g(\tau) \leq 0$ equivale a $h(\tau) \leq 0$.

Observar que cuando $\tau > 0$, $g(\tau) \leq 0$ implica que $g(0) = s \leq 0$. Por lo tanto, $f(x)$ es logcóncava cuando $s \leq 0$ y $\tau \leq 0$ ó $g(\tau) \leq 0$. \square

A partir de las implicaciones sobre la logconcauidad de la función de densidad y la función de supervivencia de la Proposición 1.3 y el Teorema 2.5, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.6 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.5, siendo $S(x)$ la función de supervivencia de X , se verifica:*

1. Si $a_i > 0$ para $i = 2, 3$, entonces $S(x)$ es logconvexa.
2. Si $a_2 > 0, a_3 < 0$, entonces $S(x)$ es logconvexa cuando $s \geq 0$. Además, $S(x)$ no puede ser logcóncava.
3. Si $a_2 < 0, a_3 < 0$, entonces $S(x)$ es logcóncava cuando $s \leq 0$. Además, $S(x)$ no puede ser logconvexa.
4. Si $a_2 < 0, a_3 > 0$, entonces $S(x)$ no puede ser logconvexa. Además, $S(x)$ es logcóncava cuando $s \leq 0$ y $\tau \leq 0$ ó $g(\tau) \leq 0$, donde τ y $g(x)$ vienen dadas por el Teorema 2.5.

Observación 2.1 *El primer apartado del Corolario 2.6 corresponde a una mixtura de exponenciales, y teniendo en cuenta la Proposición 1.4, una combinación lineal convexa de distribuciones cuyas funciones de supervivencia son logconvexas tiene función de supervivencia logconvexa, también se obtiene este caso.*

Observación 2.2 *En (2) del Corolario 2.6, $s \geq 0$ implica $\tilde{s} = a_1 a_2 (b_1 - b_2)^2 + a_1 a_3 (b_1 - b_3)^2 + a_2 a_3 (b_2 - b_3)^2 \geq 0$, sin embargo, el recíproco no es cierto. Asimismo, en (3) del Corolario 2.6, si $s \leq 0 \Rightarrow \tilde{s} \leq 0$. Así pues, (2) y (3) del Corolario 2.6 implican (ii) y (iii), respectivamente, del Teorema 3 de Baggs y Nagaraja (1996).*

2.4. Aplicación a los estadísticos extremos

En este apartado, veremos la aplicación de las clasificaciones de la logconcauidad de mixturas generalizadas de exponenciales de la sección anterior, a los estadísticos orde-

nados mínimo y máximo correspondientes a algunos modelos exponenciales bivariantes dados en la Sección 1.4.

2.4.1. Modelo exponencial bivalente de Gumbel I

Los estadísticos mínimo y máximo del modelo GBVE-I dado en la Definición 1.12, tienen funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = 2(1 + \alpha)e^{-2x} - 6\alpha e^{-3x} + 4\alpha e^{-4x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = 2e^{-x} - 2(1 + \alpha)e^{-2x} + 6\alpha e^{-3x} - 4\alpha e^{-4x}.$$

En primer lugar, si $\alpha = 0$, estos estadísticos extremos proceden de dos componentes exponencialmente distribuidas e independientes con media 1. Así, su estadístico mínimo tiene una distribución exponencial, por lo tanto su función de densidad es logconvexa y logcóncava. Del mismo modo, el estadístico ordenado máximo es una mixtura generalizada de dos exponenciales con $a_1 = 2 > 0$ y $a_2 = -1 < 0$, teniendo en cuenta el Teorema 2.3, se tiene que su función de densidad es logcóncava.

En el caso $0 < \alpha \leq 1$, el mínimo es una mixtura generalizada de tres exponenciales cuyos coeficientes $a_1 = 1 + \alpha > 0$, $a_2 = -2\alpha < 0$ y $a_3 = \alpha > 0$ verifican las condiciones de (4) del Teorema 2.5, de modo que la función de densidad del estadístico mínimo no puede ser logconvexa. Además, tampoco puede ser logcóncava, ya que $s = 4\alpha(5 - \alpha) > 0$.

Asimismo, en el caso $-1 < \alpha < 0$, T_1 es una mixtura generalizada de tres exponenciales cuyos coeficientes $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ y $a_3 < 0$ satisfacen las condiciones de (2) del

Teorema 2.5, y por consiguiente, la función de densidad del mínimo no es logconvexa ni logcóncava, pues $s < 0$ en este caso.

Sin embargo, para $\alpha = -1$, el estadístico mínimo es una mixtura generalizada de dos exponenciales con coeficientes $a_1 = 2$ y $a_2 = -1$. Así, del Teorema 2.3, se tiene que su función de densidad es logcóncava.

Por otro lado, en los casos $0 < \alpha \leq 1$ y $-1 < \alpha < 0$, el estadístico ordenado máximo es una mixtura generalizada de cuatro exponenciales, y no podemos aplicar los resultados de clasificación anteriores.

Sin embargo, para $\alpha = -1$, T_2 es una mixtura generalizada de tres exponenciales cuyos coeficientes son $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ y $a_3 = 1$. Así, de (4) del Teorema 2.5, se obtiene que este estadístico máximo tiene función de densidad logcóncava, puesto que $s = 0$ y $\tau = 0$.

2.4.2. Modelo exponencial bivalente de Gumbel II

A partir de las funciones de densidad del mínimo y máximo del modelo GBVE-II, que recordamos a continuación

$$f_{(1)}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} + \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_2}} - \lambda e^{-\lambda x}$$

siendo

$$\lambda = \left[\left(\frac{1}{\theta_1} \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{\theta_2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^{\delta}$$

observamos que el estadístico ordenado mínimo tiene una distribución exponencial, es decir, su función de densidad es logconvexa y logcóncava.

Sin embargo, en el caso del máximo, si $\theta_1 = \theta_2$, T_2 es una mixtura generalizada de dos exponenciales con coeficientes $a_1 = 2$ y $a_2 = -1$, y por tanto, del Teorema 2.3 se deduce que la función de densidad del máximo es logcóncava.

No obstante, cuando $\theta_1 \neq \theta_2$, se trata de una mixtura generalizada de tres exponenciales con coeficientes $a_1 = a_2 = 1 > 0$ y $a_3 = -1 < 0$, por lo que de (2) del Teorema 2.5, la función de densidad del máximo no es logcóncava. Además,

$$s = \left(\frac{1}{\theta_1} - \lambda\right) \left(\frac{1}{\theta_2} - \lambda\right) \left(\frac{1}{\theta_1} \left(\frac{1}{\theta_1} - \lambda\right) + \frac{1}{\theta_2} \left(\frac{1}{\theta_2} - \lambda\right) - \frac{2}{\theta_1 \theta_2}\right) < 0$$

y consecuentemente, para dicho estadístico su función de densidad tampoco puede ser logconvexa.

2.4.3. Modelo exponencial bivalente de Marshall y Olkin

En este caso, de la Definición 1.16, hemos obtenido las funciones de densidad de sus estadísticos extremos

$$f_{(1)}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = (\lambda_1 + \lambda_{12}) e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x} + (\lambda_2 + \lambda_{12}) e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x} - \lambda e^{-\lambda x}$$

donde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$.

Por tanto, el mínimo tiene como distribución una exponencial, por lo que su función de densidad es logconvexa y logcóncava.

En el caso $\lambda_1 = \lambda_2$, el estadístico máximo es una mixtura generalizada de dos exponenciales, con $a_1 = 2$ y $a_2 = -1$. Así, del Teorema 2.3, T_2 tiene densidad logcóncava.

Por otro lado, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, el máximo de este modelo MOBVE es una mixtura generalizada de tres exponenciales, tal que sus coeficientes corresponden al caso (2) del Teorema 2.5, dado que $a_1 = a_2 = 1 > 0$ y $a_3 = -1 < 0$, sin embargo

$$s = -2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12}) - (\lambda_1 + \lambda_{12})\lambda_1\lambda_2^2 - (\lambda_2 + \lambda_{12})\lambda_1^2\lambda_2 < 0$$

por lo que T_2 no tiene función de densidad logconvexa ni logcóncava.

2.4.4. Modelo exponencial bivalente de Friday y Patil

Teniendo en cuenta el modelo FPBVE dado en la Definición 1.18 y las funciones de densidad de sus estadísticos T_1 y T_2 ,

$$f_{(1)}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \phi_1\alpha_4 e^{-\alpha_4 x} + \phi_2\alpha_3 e^{-\alpha_3 x} + (1 - \phi_1 - \phi_2)v e^{-vx}$$

observamos que el estadístico mínimo está exponencialmente distribuido, por lo que su función de densidad tiene las propiedades de logconvexidad y logconcauidad.

Del mismo modo, el estadístico máximo es una mixtura generalizada de tres exponenciales, y considerando v , α_3 y α_4 como los b_i en el Teorema 2.5, se puede expresar s como

$$s = \frac{\alpha_0}{(v - \alpha_3)(v - \alpha_4)} (\alpha_1\alpha_4(v - \alpha_4)B + \alpha_2\alpha_3(v - \alpha_3)C)$$

siendo

$$B = (v - \alpha_3)((1 - \alpha_0)(v - \alpha_4)v - \alpha_0(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3))$$

y

$$C = (v - \alpha_4) ((1 - \alpha_0)(v - \alpha_3)v - \alpha_0(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)).$$

En primer lugar, cuando $v = b_3$, los coeficientes $a_i > 0$ para $i = 1, 2$ y $(a_1, a_2) \in \{(\phi_1, \phi_2), (\phi_2, \phi_1)\}$. Así pues, si

$$A = (v - \alpha_3)(v - \alpha_4) - \alpha_0\alpha_1(v - \alpha_3) - \alpha_0\alpha_2(v - \alpha_4) > 0$$

entonces $a_3 = 1 - \phi_1 - \phi_2 > 0$, es decir, todos los coeficientes a_i son positivos, y por el caso (1) del Teorema 2.5, el máximo tiene función de densidad logconvexa.

Sin embargo, cuando $A < 0$, por (2) del Teorema 2.5, la función de densidad de este estadístico no puede ser logcóncava. Además, si

$$B < 0, \quad \text{para } \alpha_3 \geq \alpha_4$$

ó

$$C < 0, \quad \text{para } \alpha_3 \leq \alpha_4$$

se verifica que $s < 0$. Por lo tanto, no es logconvexa.

Por otro lado, cuando $v = b_1$, los coeficientes $a_i < 0$ para $i = 2, 3$ siendo $(a_2, a_3) \in \{(\phi_1, \phi_2), (\phi_2, \phi_1)\}$. En este caso, si

$$B \geq 0, \quad \text{para } \alpha_3 \leq \alpha_4$$

ó

$$C \geq 0, \quad \text{para } \alpha_3 \geq \alpha_4$$

se verifica que $s \leq 0$. A partir de (3) del Teorema 2.5, tenemos que la función de densidad del máximo es logcóncava.

Finalmente, cuando $v = b_2$, los coeficientes $a_1 > 0$ y $a_3 < 0$ con $(a_1, a_3) = \{(\phi_1, \phi_2), (\phi_2, \phi_1)\}$. Además, si $\alpha_3 \leq \alpha_4$, $A < 0$ y $C > 0$, entonces $s < 0$. Por lo tanto, de (2) del Teorema 2.5, la función de densidad del máximo no es logcóncava ni logconvexa.

Asimismo, si $\alpha_3 \leq \alpha_4$, $A > 0$ y $B \leq 0$, tenemos que $s \leq 0$. Entonces, de (3) del Teorema 2.5, es logcóncava su función de densidad.

Análogamente, si $\alpha_3 \geq \alpha_4$, $A < 0$ y $B > 0$, entonces $s < 0$. Por tanto, por (2) del Teorema 2.5, la función de densidad del máximo no es logcóncava ni logconvexa.

Además, si $\alpha_3 \geq \alpha_4$, $A > 0$ y $C \leq 0$, entonces $s \leq 0$. Por lo que, por la condición (3) del Teorema 2.5, el máximo tiene función de densidad logcóncava.

2.4.5. Modelo exponencial bivalente de Raftery I

A partir de las funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+\pi}e^{-\lambda x} + \frac{2\lambda}{1+\pi}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \frac{2\lambda}{1+\pi}e^{-\lambda x} - \frac{2\lambda}{1+\pi}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x}$$

de los estadísticos ordenados del modelo RBVE-I, dadas en la Sección 1.4, tenemos que ambos estadísticos mínimo y máximo son mixturas generalizadas de dos distribuciones exponenciales.

Por consiguiente, del Teorema 2.3, tenemos que el mínimo tiene función de densidad logconvexa y el máximo logcóncava, puesto que $a_2 = \frac{1-\pi}{1+\pi} > 0$ y $a_2 = -\frac{1-\pi}{1+\pi} < 0$, respectivamente.

2.4.6. Modelo exponencial bivalente de Raftery II

En el caso del modelo RBVE-II, hemos visto que sus estadísticos ordenados tienen las siguientes funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = \begin{cases} 2\lambda \frac{2-\pi}{1-\pi} e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x} - \frac{2\lambda}{1-\pi} e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x} & \text{si } 0 < \pi \leq 0.5 \\ 2\lambda \frac{2\pi-1}{1+\pi} e^{-\lambda x} + 2\lambda \frac{2-\pi}{\pi} e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x} - 2\lambda \frac{2-\pi}{\pi(1+\pi)} e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x} & \text{si } 0.5 < \pi < 1 \end{cases}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda x} - 2\lambda \frac{2-\pi}{1-\pi} e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x} + \frac{2\lambda}{1-\pi} e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x} & \text{si } 0 < \pi \leq 0.5 \\ 2\lambda \frac{2-\pi}{1+\pi} e^{-\lambda x} - 2\lambda \frac{2-\pi}{\pi} e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x} + \lambda \frac{2-\pi}{\pi(1+\pi)} e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x} & \text{si } 0.5 < \pi < 1 \end{cases}$$

Obsérvese que el parámetro π puede ser extendido a $\pi = 0$, en este caso, X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas a una exponencial, y consecuentemente, T_1 sigue una distribución exponencial y T_2 una mixtura generalizada de dos exponenciales. Notar que los parámetros de las exponenciales no tienen sentido en el caso extremo $\pi = 1$. Por lo que, podemos considerar $0 \leq \pi$ en las funciones de densidad dadas para este modelo.

Así, cuando $\pi = 0$, el mínimo tiene función de densidad logconvexa y logcóncava, por ser exponencial; mientras que la función de densidad del máximo sólo es logcóncava por el Teorema 2.3.

En primer lugar, para el modelo RBVE-II con $0 < \pi \leq 0.5$, el mínimo es una mixtura generalizada de dos exponenciales con $a_1 = 2 > 0$ y $a_2 = -1 < 0$, y del Teorema 2.3, se tiene la logconcavidad de su función de densidad.

Sin embargo, cuando $0.5 < \pi < 1$, este estadístico mínimo tiene como distribución una mixtura generalizada de tres exponenciales con $a_1 = 2\frac{2\pi-1}{1+\pi} > 0$, $a_2 = 2\frac{1-\pi}{\pi} > 0$ y

$a_3 = -\frac{(2-\pi)(1-\pi)}{\pi(1+\pi)} < 0$, tal que

$$s = -\frac{4\lambda^4(2-\pi)}{(1-\pi)^2} < 0$$

por tanto, considerando (2) del Teorema 2.5, su función de densidad no es logconvexa ni logcóncava.

Por otro lado, el máximo de este modelo RBVE-II sigue una mixtura generalizada de tres exponenciales en ambos casos, $0 < \pi \leq 0.5$ y $0.5 < \pi < 1$.

En el primer caso, $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -2 < 0$ y $a_3 = 1 > 0$, y usando (4) del Teorema 2.5,

$$s = -\frac{4\lambda^4}{(1-\pi)^4} (4\pi^2 - 4\pi + 1) \leq 0$$

y

$$\tau = \frac{1-\pi}{\lambda(1+\pi)} \log \frac{\pi}{(1+\pi)(1-\pi)} \leq 0$$

por lo que, la función de densidad del máximo es logcóncava.

En el segundo caso, los coeficientes de la mixtura generalizada son $a_1 = 2\frac{2-\pi}{1+\pi} > 0$, $a_2 = -2\frac{1-\pi}{\pi} < 0$ y $a_3 = \frac{(1-\pi)(2-\pi)}{2\pi(1-\pi)} > 0$, siendo

$$s = -\frac{2\lambda^4(2-\pi)^2}{\pi(1+\pi)(1-\pi)^2} \leq 0$$

y

$$\tau = \frac{1-\pi}{\lambda(1+\pi)} \log \frac{1}{2(1+\pi)} \leq 0$$

es decir, la función de densidad del máximo también es logcóncava por (4) del Teorema 2.5.

2.4.7. Modelo exponencial bivalente de Raftery III

En el último caso de los modelos de Raftery, los estadísticos mínimo y máximo tienen funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = \gamma \frac{2 - \pi_2 - \gamma}{1 - \gamma \pi_2} \lambda e^{-\lambda x} + \left(1 - \frac{\gamma}{\pi_2}\right) \lambda \left(1 + \frac{1}{1 - \gamma}\right) e^{-\lambda(1 + \frac{1}{1 - \gamma})x} \\ + \gamma \frac{1 - \pi_2}{\pi_2(1 - \gamma \pi_2)} \lambda \left(\frac{2 - \gamma - \pi_2}{1 - \gamma}\right) e^{-\lambda(\frac{1}{1 - \pi_2} + \frac{1}{1 - \gamma})x}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \left(1 + \frac{(1 - \gamma)^2}{1 - \gamma \pi_2}\right) \lambda e^{-\lambda x} + \left(1 - \frac{\gamma}{\pi_2}\right) \lambda \left(1 + \frac{1}{1 - \gamma}\right) e^{-\lambda(1 + \frac{1}{1 - \gamma})x} \\ + \gamma \frac{1 - \pi_2}{\pi_2(1 - \gamma \pi_2)} \lambda \left(\frac{2 - \gamma - \pi_2}{1 - \gamma}\right) e^{-\lambda(\frac{1}{1 - \pi_2} + \frac{1}{1 - \gamma})x}$$

De donde se observa que el estadístico mínimo del modelo RBVE-III sigue una mixtura convexa de tres exponenciales, con $a_1 = \gamma \frac{2 - \pi_1 - \gamma}{1 - \gamma \pi_1} > 0$, $a_2 = \frac{\pi_1 - \gamma}{\pi_1} > 0$ y $a_3 = \gamma \frac{(1 - \pi_1)^2}{\pi_1(1 - \gamma \pi_1)} > 0$, y teniendo en cuenta (1) del Teorema 2.5, la función de densidad de este estadístico es logconvexa.

Asimismo, el estadístico máximo es una mixtura generalizada de tres exponenciales cuyos coeficientes, $a_1 = \frac{1 - \gamma \pi_1 + (1 - \gamma)^2}{1 - \gamma \pi_1} > 0$, $a_2 = -\frac{\pi_1 - \gamma}{\pi_1} < 0$ y $a_3 = -\gamma \frac{(1 - \pi_1)^2}{\pi_1(1 - \gamma \pi_1)} < 0$, satisfacen (3) del Teorema 2.5, y dado que

$$s = -\frac{4\lambda^4}{(1 - \gamma)^2} < 0$$

se deduce que el máximo de este modelo tiene función de densidad logcóncava.

Capítulo 3

Mixturas generalizadas de cuatro exponenciales. Logconcavidad de estadísticos extremos

3.1. Introducción

En este capítulo ampliamos el estudio de las mixturas generalizadas de distribuciones exponenciales analizadas en el capítulo anterior, abordando la situación de cuatro exponenciales.

Obsérvese que los estadísticos ordenados de algunos modelos exponenciales bivariantes de la Sección 1.4, como el estadístico máximo del modelo GBVE-I cuando su parámetro $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$, y los estadísticos mínimo y máximo del modelo RBVE (la versión completamente parametrizada de Raftery (1984)), son mixturas generalizadas

de cuatro distribuciones exponenciales.

En este sentido, caracterizamos las mixturas de cuatro exponenciales en la siguiente sección, dando las condiciones sobre los coeficientes y parámetros de las componentes de la mixtura generalizada, para que sea realmente un modelo de probabilidad. Esto supone una ampliación del estudio de estas mixturas generalizadas, continuando en la dirección de los resultados de Bartholomew (1969) y Baggs y Nagaraja (1996).

Asimismo, analizamos la logconcauidad de estas mixturas generalizadas de cuatro distribuciones exponenciales, obteniendo la clasificación de dicha logconcauidad a través de condiciones sobre sus coeficientes y parámetros.

Finalmente, aplicamos estos resultados de clasificación de la función de supervivencia a los estadísticos ordenados de los modelos GBVE-I y RBVE, resolviéndose un caso propuesto en Baggs y Nagaraja (1996).

3.2. Caracterización de mixturas generalizadas de cuatro exponenciales

En esta sección ampliamos las caracterizaciones de las mixturas generalizadas de dos y tres exponenciales de Bartholomew (1969) y Baggs y Nagaraja (1996), respectivamente, al caso de cuatro distribuciones exponenciales.

Para ello, en el siguiente resultado discutimos la mixtura arbitraria de cuatro distribuciones exponenciales

$$f(x) = a_1 b_1 e^{-b_1 x} + a_2 b_2 e^{-b_2 x} + a_3 b_3 e^{-b_3 x} + a_4 b_4 e^{-b_4 x}, \quad x > 0 \quad (3.2.1)$$

donde $0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < \infty$, y $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ y $a_1 > 0$.

Teorema 3.1 *Sea $f(x)$ dada por (3.2.1) una mixtura generalizada de cuatro distribuciones exponenciales.*

1. Si $a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad.
2. Si $a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 < 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \geq 0 \quad (3.2.2)$$

3. Si $a_2 < 0, a_3 < 0, a_4 < 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si (3.2.2)
4. Si $a_2 > 0, a_3 < 0, a_4 < 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $m_1 \geq 0$ ó $\{m_1 < 0 \text{ y } (3.2.2)\}$, con

$$m_1 = a_2 b_2 (b_2 - b_1) + a_3 b_3 (b_3 - b_1) + a_4 b_4 (b_4 - b_1) \quad (3.2.3)$$

5. Si $a_2 < 0, a_3 > 0, a_4 > 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $\{m_1 \leq 0 \text{ y } (3.2.2)\}$ ó $\{m_1 > 0 \text{ y } m_2 \geq 0\}$, donde

$$m_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tau^{(b_2 - b_1)/(b_3 - b_2)} + a_3 b_3 \tau^{(b_3 - b_1)/(b_3 - b_2)} + a_4 b_4 \tau^{(b_4 - b_1)/(b_3 - b_2)} \quad (3.2.4)$$

y τ es la única solución en $(0, 1)$ de

$$a_2 b_2 (b_2 - b_1) + a_3 b_3 (b_3 - b_1) \tau + a_4 b_4 (b_4 - b_1) \tau^{(b_4 - b_2)/(b_3 - b_2)} = 0. \quad (3.2.5)$$

6. Si $a_2 < 0, a_3 < 0, a_4 > 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $\{m_1 \leq 0 \text{ y } (3.2.2)\}$ ó $\{m_1 > 0 \text{ y } m_2 \geq 0\}$

7. Si $a_2 > 0$, $a_3 < 0$, $a_4 > 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $\{m_3 \geq 0$ y (3.2.2) $\}$ ó $\{m_3 > 0$ y $m_4 \geq 0\}$, donde

$$m_3 = a_1 b_1 (b_4 - b_1) + a_2 b_2 (b_4 - b_2) + a_3 b_3 (b_4 - b_3) \quad (3.2.6)$$

y

$$m_4 = a_1 b_1 \tau^{(b_4 - b_1)/(b_3 - b_2)} + a_2 b_2 \tau^{(b_4 - b_2)/(b_3 - b_2)} + a_3 b_3 \tau^{(b_4 - b_3)/(b_3 - b_2)} + a_4 b_4 \quad (3.2.7)$$

siendo τ la única solución en $(1, \infty)$ de

$$a_1 b_1 (b_4 - b_1) \tau^{(b_3 - b_1)/(b_3 - b_2)} + a_2 b_2 (b_4 - b_2) \tau + a_3 b_3 (b_4 - b_3) = 0. \quad (3.2.8)$$

8. Si $a_2 < 0$, $a_3 > 0$, $a_4 < 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:

- a) $m_5 \leq 1$ y además $\{m_1 \leq 0$ y (3.2.2) $\}$ ó $\{m_1 > 0$ y $m_2 \geq 0\}$
- b) $m_5 > 1$ y además $\{m_6 \geq 1$ y (3.2.2) $\}$ ó $\{m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$ y $m_6 < 1\}$
- c) $m_5 > 1$, $m_6 < 1$, $m_1 < 0$, $m_2 \geq 0$ y (3.2.2), siendo τ en (3.2.4) la única solución de (3.2.5) tal que $\tau > m_5^{(b_4 - b_3)/(b_4 - b_2)}$

donde

$$m_5 = \frac{a_4 b_4 (b_4 - b_1) (b_4 - b_3)}{a_2 b_2 (b_2 - b_1) (b_3 - b_2)} \quad (3.2.9)$$

y

$$m_6 = -\frac{a_2 b_2 (b_2 - b_1) (b_4 - b_2)}{a_3 b_3 (b_3 - b_1) (b_4 - b_3)} m_5^{(b_3 - b_2)/(b_4 - b_2)} \quad (3.2.10)$$

Nótese que cuando la condición (3.2.2) no es enunciada explícitamente, (3.2.2) es implicada por las otras condiciones.

Demostración. Si todos los a_i son positivos, (3.2.1) es una mixtura convexa de funciones de densidad exponenciales, así $f(x)$ es una función de densidad, lo que prueba (1).

Veamos ahora (2). La condición $f(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ es equivalente a $g_0(x) \geq 0$ para todo $x > 0$, donde $g_0(x) = e^{b_4 x} f(x)$ está dada por

$$g_0(x) = a_1 b_1 e^{(b_4 - b_1)x} + a_2 b_2 e^{(b_4 - b_2)x} + a_3 b_3 e^{(b_4 - b_3)x} + a_4 b_4$$

y puesto que $g_0(x)$ es no decreciente en $x > 0$, una condición equivalente es (3.2.2).

Análogamente, en el caso (3), el signo de $f(x)$ es el mismo que $g_1(x) = e^{b_1 x} f(x)$, es decir,

$$g_1(x) = a_1 b_1 + a_2 b_2 e^{-(b_2 - b_1)x} + a_3 b_3 e^{-(b_3 - b_1)x} + a_4 b_4 e^{-(b_4 - b_1)x}$$

que es no decreciente en $x > 0$. Por lo que, $f(x) \geq 0$ si y sólo si (3.2.2).

Para probar el caso (4), observar que la primera derivada de $g_1(x)$ tiene el mismo signo que la función $h_1(x) = e^{(b_2 - b_1)x} g_1'(x)$ dada por

$$h_1(x) = -a_2 b_2 (b_2 - b_1) - a_3 b_3 (b_3 - b_1) e^{-(b_3 - b_2)x} - a_4 b_4 (b_4 - b_1) e^{-(b_4 - b_2)x}$$

siendo no creciente en $x > 0$ y $h_1(x)$ converge a $-a_2 b_2 (b_2 - b_1) < 0$ cuando tomamos límite en el infinito.

Así, cuando $m_1 \geq 0$, entonces $h_1(x) \leq 0$, o equivalentemente, la función $g_1(x)$ es no creciente en $x > 0$, y como $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = a_1 b_1 > 0$, tenemos que $f(x)$ es no negativa.

Asimismo, cuando $m_1 < 0$, entonces $h_1(x)$ cambia su signo de positivo a negativo, y por consiguiente, la función $g_1(x)$ alcanza su máximo en el punto x_1 , donde x_1 es la única solución de $h_1(x) = 0$. Por lo que, cuando $m_1 < 0$, la función $f(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ si y sólo si (3.2.2).

Por otra parte, en el caso (5), la función $h_1(x)$ es no decreciente en $x > 0$. Por tanto, si $m_1 \leq 0$, entonces $h_1(x) \geq 0$, es decir, $g_1(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si (3.2.2).

En el otro caso, cuando $m_1 > 0$, entonces $h_1(x)$ cambia su signo de negativo a positivo, y por consiguiente, la función $g_1(x)$ alcanza su mínimo en x_1 , donde x_1 es la única solución de $h_1(x) = 0$. Así, teniendo en cuenta que $g_1(x_1) \geq 0$ es equivalente a $m_2 \geq 0$, obtenemos que $f(x)$ es una función no negativa si y sólo si $m_2 \geq 0$ cuando $m_1 > 0$.

Para comprobar el apartado (6), la primera derivada de $g_1(x)$ tiene el mismo signo que la función $h_2(x) = e^{(b_4-b_1)x} g_1'(x)$, es decir,

$$h_2(x) = -a_2 b_2 (b_2 - b_1) e^{(b_4-b_2)x} - a_3 b_3 (b_3 - b_1) e^{(b_4-b_3)x} - a_4 b_4 (b_4 - b_1)$$

siendo $h_2(x)$ no decreciente en $x > 0$.

Por lo que, cuando $m_1 \leq 0$, entonces $h_2(x) \geq 0$, o equivalentemente la función $g_1(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y por tanto, $f(x) \geq 0$ si y sólo si (3.2.2).

En caso contrario, si $m_1 > 0$, entonces la función $h_2(x)$ cambia de signo de negativo a positivo, y por consiguiente, $g_1(x)$ alcanza su mínimo en x_1 , donde x_1 es la única solución de $h_2(x) = 0$. Teniendo en cuenta que $g_1(x_1) \geq 0$ equivale a $m_2 \geq 0$, obtenemos que $f(x)$ es una función no negativa si y sólo si $m_2 \geq 0$ cuando $m_1 > 0$.

De forma similar a (5), en el caso (7), la primera derivada de $g_0(x)$ tiene igual signo que la función $h_3(x) = e^{-(b_4-b_3)x} g_0'(x)$ expresada por

$$h_3(x) = a_1 b_1 (b_4 - b_1) e^{(b_3-b_1)x} + a_2 b_2 (b_4 - b_2) e^{(b_3-b_2)x} + a_3 b_3 (b_4 - b_3)$$

siendo $h_3(x)$ no decreciente en $x > 0$.

Por tanto, cuando $m_3 \geq 0$, se tiene que $h_3(x) \geq 0$, es decir, la función $g_0(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y por consiguiente, $f(x) \geq 0$ si y sólo si (3.2.2).

En cambio, si $m_3 < 0$, entonces la función $h_3(x)$ cambia de signo de negativo a positivo, y consecuentemente, $g_0(x)$ alcanza su mínimo en x_0 , donde x_0 es la única solución de $h_3(x) = 0$. Teniendo en cuenta que $g_0(x_0) \geq 0$ es equivalente a la condición $m_4 \geq 0$, obtenemos que $f(x)$ es no negativa si y sólo si $m_4 \geq 0$ cuando $m_3 < 0$.

En el último caso (8), consideramos la función $h_4(x) = e^{(b_3-b_1)x}g_1'(x)$, que puede escribirse como

$$h_4(x) = -a_2b_2(b_2 - b_1)e^{(b_3-b_2)x} - a_3b_3(b_3 - b_1) - a_4b_4(b_4 - b_1)e^{-(b_4-b_3)x}$$

la cual tiene el mismo signo que la primera derivada de $g_1(x)$, donde $h_4(x)$ es convexa en $x > 0$ y su límite es infinito cuando x tiende a ∞ .

Por un lado, si $m_5 \leq 1$, tenemos que $h_4(x)$ es no decreciente en $x > 0$, por tanto $g_1(x)$ es no decreciente en $x > 0$ cuando $m_1 \leq 0$, y por consiguiente, $f(x) \geq 0$ si y sólo si (3.2.2).

Asimismo, si $m_5 \leq 1$ y $m_1 > 0$, entonces $h_4(x)$ cambia de signo negativo a positivo, y así $g_1(x)$ alcanza su mínimo en x_4 , donde x_4 es la única solución de $h_4(x) = 0$; teniendo en cuenta que la desigualdad $g_1(x_4) \geq 0$ es equivalente a $m_2 \geq 0$, obtenemos que $f(x)$ es no negativa si y sólo si $m_2 \geq 0$.

Por otro lado, si $m_5 > 1$, se tiene que la función $h_4(t)$ decrece primero y después crece, es decir, $h_4(x)$ tiene un único mínimo en $x_5 = (\log m_5)/(b_4 - b_2)$, y además $h_4(x_5) \geq 0$ es equivalente a $m_6 \geq 1$. Por tanto, $g_1(x)$ es no decreciente en $x > 0$ cuando $m_5 > 1$ y $m_6 \geq 1$, y por consiguiente, $f(x)$ es no negativa si y sólo si (3.2.2).

Finalmente, si $m_6 < 1$, tenemos que $h_4(x)$ cambia de signo negativo a positivo cuando $m_1 \geq 0$, y sin embargo, $h_4(x)$ es primero positiva, después negativa y por último positiva cuando $m_1 < 0$.

Por lo que, cuando $m_1 \geq 0$, la función $g_1(x)$ decrece al principio y después es creciente, es decir, $f(x) \geq 0$ si y sólo si $m_2 \geq 0$.

Además, cuando $m_1 < 0$, tenemos que la función $g_1(x)$ crece al principio, después decrece y por último crece otra vez, es decir, $g_1(x)$ alcanza su único mínimo en $x_4 > x_5$, y por consiguiente, $f(x)$ es no negativa si y sólo si (3.2.2) y $m_2 \geq 0$, donde τ en (3.2.4) es la única solución de (3.2.5) tal que $\tau > m_5^{(b_4-b_3)/(b_4-b_2)}$. \square

3.3. Logconcavidad de mixturas generalizadas de cuatro exponenciales

La logconcavidad de la función de supervivencia para mixturas generalizadas de dos o tres distribuciones exponenciales ha sido estudiada en el Capítulo 2. Sin embargo, cuando el estadístico mínimo o máximo de un modelo exponencial bivalente es una mixtura generalizada de cuatro exponenciales, su logconcavidad aún no está clasificada.

Por ello, en el siguiente resultado estudiamos la logconcavidad de la función de supervivencia de las mixturas generalizadas de cuatro distribuciones exponenciales.

Teorema 3.2 *Sea X una mixtura generalizada de cuatro exponenciales con parámetros $0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < \infty$, y $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 > 0$ y $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$.*

1. Si $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$, entonces X tiene función de supervivencia logconvexa.
2. Si $a_2 > 0$, $a_3 < 0$, $a_4 < 0$, entonces X no puede tener función de supervivencia logcóncava. Además, X tiene función de supervivencia logconvexa si y sólo si $d_1 \geq 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0, d_3 \geq 0\}$, donde

$$\begin{aligned}
 d_1 = & a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 + a_1 a_3 (b_3 - b_1)^2 + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 \\
 & + a_2 a_4 (b_4 - b_2)^2 + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}
 d_2 = & a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) + a_1 a_3 (b_3 - b_1)^2 (b_4 - b_3 + b_2 - b_1) \\
 & + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_3) \\
 & + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2 (b_2 - b_3)
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}
 d_3 = & a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 \tau_1^{-1} + a_1 a_3 (b_3 - b_1)^2 \tau_1^{-\frac{b_4 - b_3 + b_2 - b_1}{b_4 - b_1}} + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 \tau_1^{-\frac{b_2 - b_1}{b_4 - b_1}} \\
 & + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 \tau_1^{-\frac{b_4 - b_3}{b_4 - b_1}} + a_2 a_4 (b_4 - b_2)^2 + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2 \tau_1^{\frac{b_3 - b_2}{b_4 - b_1}}
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

y τ_1 es la única solución en $(0, 1)$ de

$$\begin{aligned}
 & a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) \tau_1^{-\frac{b_3 - b_2}{b_4 - b_1}} + a_1 a_3 (b_3 - b_1)^2 (b_4 - b_3 + b_2 - b_1) \\
 & + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) \tau_1^{\frac{b_4 - b_3}{b_4 - b_1}} + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_3) \tau_1^{\frac{b_2 - b_1}{b_4 - b_1}} \\
 & + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2 (b_2 - b_3) \tau_1 = 0
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

3. Si $a_2 < 0$, $a_3 < 0$, $a_4 > 0$, entonces X tiene función de supervivencia logcóncava si y sólo si $d_1 \leq 0$ y además $d_2 \leq 0$ ó $\{d_2 > 0, d_3 \leq 0\}$. En cualquier caso, su función de supervivencia no puede ser logconvexa.

4. Si $a_2 < 0$, $a_3 > 0$, $a_4 < 0$, entonces X no puede tener función de supervivencia logconvexa. Además, X tiene función de supervivencia logcóncava si y sólo si $d_1 \leq 0$ y se verifica una de las siguientes condiciones:

- a) $d_4 \leq 0$, $d_5 \leq 0$ y además $d_2 \leq 0$ ó $\{d_2 > 0$ y $d_3 \leq 0\}$
- b) $d_4 > 0$, $d_5 \leq 0$ y además $d_6 \leq 0$ ó $\{d_3 \leq 0$ y $d_6 > 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8)
- c) $d_5 > 0$, $d_7 \leq 0$ y además $d_2 \leq 0$ ó $\{d_2 > 0$ y $d_3 \leq 0\}$
- d) $d_4 \geq 0$, $d_5 > 0$ y además $d_6 \leq 0$ ó $\{d_3 \leq 0$ y $d_6 > 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8)
- e) $d_2 \leq 0$, $d_4 < 0$, $d_5 > 0$, $d_7 > 0$ y además $d_6 \leq 0$ ó $\{d_3 \leq 0$ y $d_6 > 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ siendo $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ en (3.3.7) la única solución de (3.3.8)
- f) $d_2 > 0$, $d_4 < 0$, $d_5 > 0$, $d_7 > 0$ y $d_3 \leq 0$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$, con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8)

donde

$$\begin{aligned}
 d_4 = & a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) (b_3 - b_2) + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) (b_3 - b_4) \\
 & + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_3) (b_1 - b_2) + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2 (b_2 - b_3) (b_1 - b_4)
 \end{aligned}
 \tag{3.3.5}$$

$$\begin{aligned}
 d_5 &= a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) (b_3 - b_2) (b_4 + b_3 - b_2 - b_1) \\
 &\quad + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) (b_3 - b_4) (b_3 - b_1) \\
 &\quad + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_3) (b_1 - b_2) (b_4 - b_2)
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

$$\begin{aligned}
 d_6 &= a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) \tau_2^{-\frac{b_4 - b_3}{b_4 + b_3 - b_2 - b_1}} + a_1 a_3 (b_3 - b_1)^2 (b_4 - b_3 + b_2 - b_1) \\
 &\quad + a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) \tau_2^{\frac{b_3 - b_2}{b_4 + b_3 - b_2 - b_1}} + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_3) \tau_2^{-\frac{b_2 - b_1}{b_4 + b_3 - b_2 - b_1}} \\
 &\quad + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2 (b_2 - b_3) \tau_2^{-\frac{b_4 - b_1}{b_4 + b_3 - b_2 - b_1}}
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

y τ_2 es la única solución en $(1, \infty)$ de

$$\begin{aligned}
 &a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) (b_3 - b_2) \tau_2 + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2 (b_2 - b_3) (b_1 - b_4) \\
 &\quad + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) (b_3 - b_4) \tau_2^{\frac{b_3 - b_1}{b_4 + b_3 - b_2 - b_1}} \\
 &\quad + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_3) (b_1 - b_2) \tau_2^{\frac{b_4 - b_2}{b_4 + b_3 - b_2 - b_1}} = 0
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$\begin{aligned}
 d_7 &= +a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) (b_3 - b_2) \tau_3^{-\frac{b_4 + b_3 - b_2 - b_1}{b_4 - b_2}} \\
 &\quad + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) (b_3 - b_4) \tau_3^{-\frac{b_3 - b_1}{b_4 - b_2}} \\
 &\quad + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_3) (b_1 - b_2) \tau_3^{-1} \\
 &\quad + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2 (b_3 - b_2) (b_4 - b_1)
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

y τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de

$$\begin{aligned}
 &a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) (b_3 - b_2) (b_4 + b_3 - b_2 - b_1) \\
 &\quad + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) (b_3 - b_4) (b_3 - b_1) \tau_3 \\
 &\quad + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_3) (b_1 - b_2) (b_4 - b_2) \tau_3^{\frac{b_3 - b_1}{b_4 - b_2}} = 0
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

5. Si $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 < 0$, entonces X no puede tener función de supervivencia logcóncava. Además, X tiene función de supervivencia logconvexa si y sólo si $d_1 \geq 0$ y se verifica una de las siguientes condiciones:

- a) $d_5 \geq 0$, $d_8 > 0$, $d_9 \geq 0$ y además $\{d_2 \geq 0 \text{ y } d_4 \geq 0\}$ ó $\{d_2 < 0, d_3 \geq 0 \text{ y } d_4 \geq 0\}$ ó $\{d_4 < 0 \text{ y } d_6 \geq 0\}$ ó $\{d_3 \geq 0, d_4 < 0 \text{ y } d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8)
- b) $d_5 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 \geq 0$ y además $\{d_2 \geq 0 \text{ y } d_7 \geq 0\}$ ó $\{d_2 < 0, d_3 \geq 0 \text{ y } d_7 \geq 0\}$ ó $\{d_4 \leq 0 \text{ y } d_6 \geq 0\}$ ó $\{d_3 \geq 0, d_4 \leq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$
- c) $d_2 \geq 0$, $d_4 > 0$, $d_5 < 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 \geq 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, τ_2 es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de (3.3.10)
- d) $d_2 < 0$, $d_4 > 0$, $d_5 < 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 \geq 0$ y $d_3 \geq 0$ para τ_1 la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8)
- e) $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} \geq 0$ y además $\{d_2 \geq 0 \text{ y } d_4 \geq 0\}$ ó $\{d_2 < 0, d_3 \geq 0 \text{ y } d_4 \geq 0\}$ ó $\{d_4 < 0 \text{ y } d_6 \geq 0\}$ ó $\{d_3 \geq 0, d_4 < 0 \text{ y } d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$
- f) $d_5 \leq 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$ y además $\{d_2 \geq 0 \text{ y } d_7 \geq 0\}$ ó $\{d_2 < 0, d_3 \geq 0 \text{ y } d_7 \geq 0\}$ ó $\{d_4 \leq 0 \text{ y } d_6 \geq 0\}$ ó $\{d_3 \geq 0, d_4 \leq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$

- g) $d_2 \geq 0$, $d_4 > 0$, $d_5 \leq 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0$ y $d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, τ_2 es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de (3.3.10)
- h) $d_2 < 0$, $d_4 > 0$, $d_5 \leq 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$ y $d_3 \geq 0$ para τ_1 la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8)
- i) $d_4 \geq 0$, $d_5 > 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} < 0$ y además $\{d_2 \geq 0$ y $d_7 \geq 0\}$ ó $\{d_2 < 0$, $d_3 \geq 0$ y $d_7 \geq 0\}$ ó $\{d_2 \geq 0$, $d_6 \geq 0$ y $d_7 < 0\}$ ó $\{d_2 \geq 0$, $d_3 \geq 0$, $d_6 < 0$ y $d_7 < 0\}$, donde τ_1 es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, τ_2 es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y τ_3 es la única solución de (3.3.10) tal que $\tau_3 < (-a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 / (a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2))^{-(b_4-b_2)/(b_4-b_3-b_2+b_1)}$
- j) $d_2 < 0$, $d_4 \geq 0$, $d_5 > 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} < 0$ y $d_3 \geq 0$ para τ_1 la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8)
- k) $d_4 < 0$, $d_5 > 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} < 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0$ y $d_6 < 0\}$, donde τ_1 es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, con $\tau_2 \in \left(1, \tau_3'^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}\right) \cup \left(\tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}, \infty\right)$ la única solución de (3.3.8) y $\tau_3' > \tau_3$ las dos únicas soluciones de (3.3.10)
- l) $d_4 < 0$, $d_5 > 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} < 0$, $d_6 \leq 0$ para τ_2' , y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_6 < 0$ y $d_3 \geq 0\}$ para τ_2 , donde τ_1 es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, τ_2 es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$, τ_2' es la única solución de (3.3.8) tal que

- $\tau'_2 < \tau'_3$ $^{-\frac{(b_4+b_3-b_2-b_1)}{(b_4-b_2)}}$ y $\tau'_3 > \tau_3$ las dos únicas soluciones de (3.3.10)
- m) $d_3 \geq 0$, $d_4 < 0$, $d_5 > 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} < 0$ y $d_6 \leq 0$ para τ''_2 , donde τ_1 es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2$ $^{-\frac{(b_4-b_1)}{(b_4+b_3-b_2-b_1)}}$, τ_2 es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3$ $^{-\frac{(b_4+b_3-b_2-b_1)}{(b_4-b_2)}}$, τ''_2 es la única solución de (3.3.8) en $\left(\tau'_3$ $^{-\frac{(b_4+b_3-b_2-b_1)}{(b_4-b_2)}}$, τ_3 $^{-\frac{(b_4+b_3-b_2-b_1)}{(b_4-b_2)}}$) y $\tau'_3 > \tau_3$ las dos únicas soluciones de (3.3.10)
- n) $d_4 < 0$, $d_5 > 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} < 0$, $d_6 < 0$ para τ'_2 , $d_6 > 0$ para τ''_2 y $d_3 \geq 0$, donde τ_1 es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2$ $^{-\frac{(b_4-b_1)}{(b_4+b_3-b_2-b_1)}}$) \cup $\left(\tau''_2$ $^{-\frac{(b_4-b_1)}{(b_4+b_3-b_2-b_1)}}$, τ'_2 $^{-\frac{(b_4-b_1)}{(b_4+b_3-b_2-b_1)}}$), $\tau'_2 < \tau''_2 < \tau_2$ las tres únicas soluciones de (3.3.8) y $\tau'_3 > \tau_3$ las dos únicas soluciones de (3.3.10)
- ñ) $d_8 \leq 0$, $d_9 \leq 0$ y además $\{d_2 \geq 0$ y $d_4 \geq 0\}$ ó $\{d_2 < 0$, $d_4 \geq 0$ y $d_3 \geq 0\}$ ó $\{d_4 < 0$ y $d_6 \geq 0\}$ ó $\{d_3 \geq 0$, $d_4 < 0$ y $d_6 < 0\}$, donde τ_1 es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2$ $^{-\frac{(b_4-b_1)}{(b_4+b_3-b_2-b_1)}}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8)
- o) $d_5 \geq 0$, $d_8 \leq 0$, $d_9 > 0$ y además $\{d_2 \geq 0$ y $d_4 \geq 0\}$ ó $\{d_2 < 0$, $d_3 \geq 0$ y $d_4 \geq 0\}$ ó $\{d_4 < 0$ y $d_6 \geq 0\}$ ó $\{d_3 \geq 0$, $d_4 < 0$ y $d_6 < 0\}$, donde τ_1 es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2$ $^{-\frac{(b_4-b_1)}{(b_4+b_3-b_2-b_1)}}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8)
- p) $d_5 < 0$, $d_8 \leq 0$, $d_9 > 0$ y además $\{d_2 \geq 0$ y $d_7 \geq 0\}$ ó $\{d_2 < 0$, $d_3 \geq 0$ y $d_7 \geq 0\}$ ó $\{d_4 \leq 0$ y $d_6 \geq 0\}$ ó $\{d_3 \geq 0$, $d_4 \leq 0$ y $d_6 < 0\}$, donde τ_1 es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2$ $^{-\frac{(b_4-b_1)}{(b_4+b_3-b_2-b_1)}}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8)

q) $d_2 \geq 0$, $d_4 > 0$, $d_5 < 0$, $d_7 < 0$, $d_8 \leq 0$, $d_9 > 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0$ y $d_6 < 0\}$ donde τ_1 es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, τ_2 es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de (3.3.10)

r) $d_2 < 0$, $d_4 > 0$, $d_5 < 0$, $d_7 < 0$, $d_8 \leq 0$, $d_9 > 0$ y $d_3 \geq 0$ para τ_1 la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8)

donde

$$d_8 = b_4 - b_3 - b_2 + b_1$$

$$d_9 = a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2$$

$$\begin{aligned} d_{10} = & a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) (b_3 - b_2) (b_4 + b_3 - b_2 - b_1) - (b_2 - b_1) (b_4 - b_3) \\ & \cdot \left(a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_3 - b_1) \left(-\frac{a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2}{a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2} \right)^{-\frac{b_4 - b_2}{b_4 - b_3 - b_2 + b_1}} \right. \\ & \left. + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 (b_4 - b_2) \left(-\frac{a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2}{a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2} \right)^{-\frac{b_3 - b_1}{b_4 - b_3 - b_2 + b_1}} \right) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

6. Si $a_2 > 0$, $a_3 < 0$, $a_4 > 0$, entonces X no puede tener función de supervivencia logcóncava. Además, X tiene función de supervivencia logconvexa si y sólo si $d_1 \geq 0$ y se verifica una de las condiciones de (5), cambiando únicamente el sentido de las desigualdades de d_8 .

7. Si $a_2 < 0$, $a_3 < 0$, $a_4 < 0$, entonces X no puede tener función de supervivencia logconvexa. Además, X tiene función de supervivencia logcóncava si y sólo si $d_1 \leq 0$ y se verifica una de las condiciones de (5), cambiando el sentido de las desigualdades de todos los d_i .

8. Si $a_2 < 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$, entonces X no puede tener función de supervivencia logconvexa. Además, X tiene función de supervivencia logcóncava si y sólo si $d_1 \leq 0$ y se verifica una de las condiciones de (6), cambiando el sentido de las desigualdades de todos los d_i .

Demostración. A partir de la función de densidad (3.2.1) de X , la logconcavidad de su función de supervivencia está determinada por el signo de la segunda derivada de su logaritmo, donde

$$S(x) = a_1 e^{-b_1 x} + a_2 e^{-b_2 x} + a_3 e^{-b_3 x} + a_4 e^{-b_4 x}, \quad x > 0$$

es decir, por el signo de la función

$$\begin{aligned} g(x) = & a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 e^{-(b_1+b_2)x} + a_1 a_3 (b_3 - b_1)^2 e^{-(b_1+b_3)x} \\ & + a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 e^{-(b_1+b_4)x} + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 e^{-(b_2+b_3)x} \\ & + a_2 a_4 (b_4 - b_2)^2 e^{-(b_2+b_4)x} + a_3 a_4 (b_4 - b_3)^2 e^{-(b_3+b_4)x} \end{aligned}$$

que está estrechamente relacionado a los pesos a_i y los parámetros b_i , y por consiguiente, la logconcavidad de la función de supervivencia depende de estos coeficientes.

Por lo que, X tiene función de supervivencia logconvexa (logcóncava) si y sólo si la función $g(x)$ es no negativa (no positiva). De modo que X no tiene una de estas dos propiedades cuando $g(x)$ cambia de signo. Notar que $g(0) = d_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

En el primer caso, (1), todos los términos de la función $g(x)$ son positivos, por tanto X tiene función de supervivencia logconvexa. Notar que este caso también se deduce de la Proposición 1.4.

Veamos ahora (2). Para ello, el signo de la función $g(x)$ es el mismo que el de

$h(x) = e^{(b_2+b_4)x}g(x)$ dada por

$$\begin{aligned} h(x) = & a_1a_2(b_2 - b_1)^2e^{(b_4-b_1)x} + a_1a_3(b_3 - b_1)^2e^{(b_4-b_3+b_2-b_1)x} + a_2a_4(b_4 - b_2)^2 \\ & + a_1a_4(b_4 - b_1)^2e^{(b_2-b_1)x} + a_2a_3(b_3 - b_2)^2e^{(b_4-b_3)x} + a_3a_4(b_4 - b_3)^2e^{(b_2-b_3)x} \end{aligned}$$

siendo $h(0) = d_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$, es decir, existe un x_0 tal que $h(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$, o equivalentemente, $g(x) > 0$ para $x \geq x_0$, y así, X no puede tener función de supervivencia logcóncava.

Además, cuando $d_1 < 0$, la función $h(x)$ cambia de signo, y en tal caso, $g(x)$ cambia de signo, es decir, la función de supervivencia no mantiene su logconcauidad.

Cuando $d_1 \geq 0$, la primera derivada de $h(x)$ tiene el mismo signo que la función $k(x) = e^{(b_1-b_2+b_3-b_4)x}h'(x)$ dada por

$$\begin{aligned} k(x) = & a_1a_2(b_2 - b_1)^2(b_4 - b_1)e^{(b_3-b_2)x} + a_1a_3(b_3 - b_1)^2(b_4 - b_3 + b_2 - b_1) \\ & + a_1a_4(b_4 - b_1)^2(b_2 - b_1)e^{(b_3-b_4)x} + a_2a_3(b_3 - b_2)^2(b_4 - b_3)e^{(b_1-b_2)x} \\ & + a_3a_4(b_4 - b_3)^2(b_2 - b_3)e^{(b_1-b_4)x} \end{aligned}$$

en donde todos los términos son no decrecientes, por lo que $k(x)$ es no decreciente en $x > 0$. Así que, cuando $k(0) = d_2 \geq 0$, la función $k(x)$ es no negativa, y consecuentemente, $h(x)$ es no decreciente en $x > 0$. Por tanto, cuando $d_2 \geq 0$ tenemos que $g(x)$ es no negativa, es decir, X tiene función de supervivencia logconvexa.

Sin embargo, si $d_2 < 0$, entonces $k(x)$ cambia de signo negativo a positivo. En tal caso, $h(x)$ decrece y después crece. Por tanto, $h(x)$ alcanza su mínimo en la única solución de $k(x) = 0$, y por consiguiente, si $\min h(x) \geq 0$ entonces $g(x)$ es no negativa; en caso contrario la función $g(x)$ cambia de signo. Teniendo en cuenta que $\min h(x) \geq$

0 equivale a la condición $d_3 \geq 0$, obtenemos que X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_2 < 0$ y $d_3 \geq 0$.

Análogamente a (2), en el caso (3), ambas funciones $g(x)$ y $h(x)$ tienen el mismo signo. Ahora, se cumple que $h(0) = d_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$, de donde se deduce que existe un x_0 tal que $h(x) < 0$ para todo $x \geq x_0$, o equivalentemente, $g(x) < 0$ para $x \geq x_0$, es decir, X no puede tener función de supervivencia logconvexa.

Además, cuando $d_1 > 0$, la función $h(x)$ cambia su signo, y en tal caso, $g(x)$ también cambia su signo, es decir, $S(x)$ no mantiene el mismo tipo de logconcauidad.

Cuando $d_1 \leq 0$, la primera derivada de $h(x)$ tiene el mismo signo que $k(x)$, siendo además una suma de términos no crecientes, así que $k(x)$ es no creciente en $x > 0$.

De este modo, cuando $k(0) = d_2 \leq 0$, tenemos que $k(x)$ es no positiva, y por consiguiente, $h(x)$ es una función no creciente en $x > 0$. Por tanto, cuando $d_2 \leq 0$ tenemos que la función $g(x)$ es no positiva, es decir, X tiene función de supervivencia logcóncava.

No obstante, si $d_2 > 0$, entonces $k(x)$ cambia de signo positivo a negativo. En tal caso, la función $h(x)$ crece primero y después decrece. Por lo que, $h(x)$ alcanza su máximo en la única solución de $k(x) = 0$, y consecuentemente, si $\max h(x) \leq 0$ entonces $g(x)$ es no positiva; en caso contrario, $g(x)$ cambia de su signo. Teniendo en cuenta que la condición $\max h(x) \leq 0$ es equivalente a $d_3 \leq 0$, obtenemos que X tiene función de supervivencia logcóncava cuando $d_2 > 0$ y $d_3 \leq 0$.

En el caso (4), se tiene que el signo de $h(x)$ es el mismo que el de la función $g(x)$, donde se verifica que $h(0) = d_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$, por lo que existe un x_0 tal que $h(x) < 0$ para todo $x \geq x_0$, o equivalentemente, $g(x) < 0$ para $x \geq x_0$, es decir, X no

puede tener función de supervivencia logconvexa.

Además, cuando $d_1 > 0$, la función $h(x)$ cambia su signo, y en tal caso, $g(x)$ cambia de signo; consecuentemente $S(x)$ cambia de logconcauidad.

Por otro lado, cuando $d_1 \leq 0$, la primera derivada de $h(x)$ tiene el mismo signo que $k(x)$, donde $k(0) = d_2$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = -\infty$. De esta manera, estudiamos los signos de $k(x)$, usando que la primera derivada de $k(x)$ tiene igual signo que la función $m(x) = e^{(b_4-b_1)x}k'(x)$ dada por

$$\begin{aligned} m(x) &= a_3a_4(b_4 - b_3)^2(b_3 - b_2)(b_4 - b_1) + a_1a_4(b_4 - b_1)^2(b_2 - b_1)(b_3 - b_4)e^{(b_3-b_1)x} \\ &\quad + a_1a_2(b_2 - b_1)^2(b_4 - b_1)(b_3 - b_2)e^{(b_4+b_3-b_2-b_1)x} \\ &\quad + a_2a_3(b_3 - b_2)^2(b_4 - b_3)(b_1 - b_2)e^{(b_4-b_2)x} \end{aligned}$$

donde $m(0) = d_4$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = -\infty$.

Asimismo, la primera derivada de $m(x)$ tiene el mismo signo que la función $n(x) = e^{(b_1+b_2-b_3-b_4)x}m'(x)$ dada por

$$\begin{aligned} n(x) &= a_1a_2(b_2 - b_1)^2(b_4 - b_1)(b_3 - b_2)(b_4 + b_3 - b_2 - b_1) \\ &\quad + a_1a_4(b_4 - b_1)^2(b_2 - b_1)(b_3 - b_4)(b_3 - b_1)e^{(b_2-b_4)x} \\ &\quad + a_2a_3(b_3 - b_2)^2(b_4 - b_3)(b_1 - b_2)(b_4 - b_2)e^{(b_1-b_3)x} \end{aligned}$$

donde $n(0) = d_5$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} n(x) = a_1a_2(b_2 - b_1)^2(b_4 - b_1)(b_3 - b_2)(b_4 + b_3 - b_2 - b_1) < 0$, que es una suma de términos no crecientes, por lo que $n(x)$ también es no creciente en $x > 0$.

Si $d_5 \leq 0$, entonces $n(x)$ es una función no positiva, o equivalentemente, $m(x)$ es una función no creciente en $x > 0$. Por lo que, cuando $d_4 \leq 0$, la función $m(x)$ es no

positiva, es decir, $k(x)$ es no creciente en $x > 0$, y usando un desarrollo análogo a (3), tenemos que X tiene función de supervivencia logcóncava cuando $d_4 \leq 0$, $d_5 \leq 0$ y además $d_2 \leq 0$ ó $\{d_2 > 0 \text{ y } d_3 \leq 0\}$.

Por contra, cuando $d_4 > 0$, la función $m(x)$ cambia de signo positivo a negativo. En este caso, la función $k(x)$ crece al principio y después decrece, es decir, $k(x)$ alcanza su máximo en la única solución de $m(x) = 0$, además si $\text{máx } k(x) \leq 0$ entonces la función $h(x)$ es no creciente en $x > 0$, y teniendo en cuenta que $d_1 \leq 0$ y $\text{máx } k(x) \leq 0$ equivale a la condición $d_6 \leq 0$, tenemos que $h(x)$ es una función no positiva, y por consiguiente, X tiene función de supervivencia logcóncava cuando $d_4 > 0$, $d_5 \leq 0$ y $d_6 \leq 0$.

Asimismo, cuando $d_6 > 0$, la función $k(x)$ cambia de signo, y por tanto, $h(x)$ crece primero y después decrece para $d_2 \geq 0$ o bien $h(x)$ decrece primero, después crece y por último vuelve a ser decreciente para $d_2 < 0$.

En cualquier caso, tenemos que X tiene función de supervivencia logcóncava cuando $d_3 \leq 0$, $d_4 > 0$, $d_5 \leq 0$ y $d_6 > 0$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$.

Por otro lado, si $d_5 > 0$ entonces la función $n(x)$ cambia de signo positivo a negativo, o equivalentemente, $m(x)$ es creciente al principio y decreciente después, es decir, $m(x)$ alcanza su máximo en la única solución de $n(x) = 0$.

Teniendo en cuenta que $\text{máx } m(x) = d_7$, cuando $d_7 \leq 0$, tenemos que $m(x)$ es no positiva, es decir, la función $k(x)$ es no creciente en $x > 0$, y utilizando un desarrollo análogo a (3), se deduce que X tiene función de supervivencia logcóncava cuando $d_5 > 0$, $d_7 \leq 0$ y además $d_2 \leq 0$ ó $\{d_2 > 0 \text{ y } d_3 \leq 0\}$.

En otro caso, la función $m(x)$ cambia de signo, es decir, $k(x)$ cambia de monotonía

según los signos de $m(x)$. Por lo que, $k(x)$ primero es creciente y después decreciente para $d_4 \geq 0$, o bien $k(x)$ decrece al principio, después es creciente y finalmente decreciente otra vez para $d_4 < 0$ y $d_7 > 0$.

Así, utilizando el razonamiento anterior para $d_4 \geq 0$, tenemos que X tiene función de supervivencia logcóncava cuando $d_4 \geq 0$, $d_5 > 0$ y además $d_6 \leq 0$ ó $\{d_3 \leq 0$ y $d_6 > 0\}$, cuando τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$.

Además, cuando $d_4 < 0$ y $d_7 > 0$, la función $k(x)$ es no positiva si y sólo si $d_2 \leq 0$ y $d_6 \leq 0$ donde τ_2 en (3.3.7) es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$, es decir, $h(x)$ es una función no creciente en $x > 0$, y teniendo en cuenta que $d_1 \leq 0$, obtenemos que $h(x)$ es una función no positiva, y por consiguiente, X tiene función de supervivencia logcóncava cuando $d_2 \leq 0$, $d_4 < 0$, $d_5 > 0$, $d_6 \leq 0$ y $d_7 > 0$, siendo $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$.

Asimismo, la función $k(x)$ cambia de signo, es decir, $h(x)$ cambia de monotonía según el signo de d_2 . De aquí, la función $h(x)$ es primero decreciente, después creciente y por último decreciente para $d_2 \leq 0$ y $d_6 > 0$, donde τ_2 es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$, y consecuentemente, tenemos que X tiene función de supervivencia logcóncava añadiendo que $d_3 \leq 0$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$.

Finalmente, si $d_2 > 0$, se obtiene que la función $k(x)$ cambia su signo una o tres veces, es decir, la función $h(x)$ es una o dos veces creciente y después decreciente, dependiendo del número de soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$, con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8).

Por tanto, tenemos que X tiene función de supervivencia logcóncava cuando $d_3 \leq 0$

donde $\tau_1 \in \left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4).

Para probar el caso (5), las funciones $g(x)$ y $h(x)$ tienen el mismo signo, siendo $h(0) = d_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$, por lo que existe un x_0 tal que $h(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$, o equivalentemente, $g(x) > 0$ para $x \geq x_0$, es decir, X no puede tener función de supervivencia logcóncava.

Además, cuando $d_1 < 0$, la función $h(x)$ cambia de signo, en tal caso $g(x)$ también cambia de signo, y por consiguiente $S(x)$ no mantiene su logconcauidad.

Cuando $d_1 \geq 0$, la primera derivada de la función $h(x)$ tiene igual signo que la función $k(x)$, siendo $k(0) = d_2$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = \infty$. Así, estudiamos los signos de $k(x)$, utilizando que la primera derivada de $k(x)$ tiene el mismo signo que la función $m(x)$, para la que $m(0) = d_4$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = \infty$.

Teniendo en cuenta que la primera derivada de $m(x)$ tiene el mismo signo que la función $n(x)$, siendo $n(0) = d_5$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} n(x) = a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 (b_4 - b_1) (b_3 - b_2) (b_4 + b_3 - b_2 - b_1) > 0$, y donde el signo de su primera derivada es el mismo que la función $u(x) = e^{(b_4-b_2)x} n'(x)$ dada por

$$u(x) = (b_4 - b_3)(b_2 - b_1)(b_3 - b_1)(b_4 - b_2) \left(a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 + a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2 e^{(b_4-b_3-b_2+b_1)x} \right)$$

siendo su límite dependiente de d_8 . De modo que, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$ para $d_8 > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) (b_4 - b_3) (b_3 - b_1) (b_4 - b_2) < 0$ para $d_8 < 0$, y $u(x)$ es constante para $d_8 = 0$, siendo $\text{signo}(u(0)) = \text{signo}(d_9)$.

En primer lugar, para $d_8 > 0$, la función $u(x)$ es no decreciente en $x > 0$, así que es no negativa para $d_9 \geq 0$, es decir, la función $n(x)$ también es no decreciente en $x > 0$,

y cuando $d_5 \geq 0$, se tiene que $n(x)$ es no negativa, o equivalentemente, la función $m(x)$ es no decreciente en $x > 0$.

Además, cuando $d_4 \geq 0$, esta función $m(x)$ es no negativa, es decir, la función $k(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y mediante un razonamiento análogo a (2), tenemos que X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_4 \geq 0$, $d_5 \geq 0$, $d_8 > 0$, $d_9 \geq 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$.

Sin embargo, cuando $d_4 < 0$, la función $m(x)$ cambia su signo de negativo a positivo. En tal caso, la función $k(x)$ decrece y después crece, es decir, $k(x)$ alcanza su mínimo en la única solución de $m(x) = 0$, además, si $\min k(x) \geq 0$ entonces la función $h(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y teniendo en cuenta que $d_1 \geq 0$ y $\min k(x) \geq 0$ es equivalente a la condición $d_6 \geq 0$, tenemos que $h(x)$ es no negativa, y consecuentemente, X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_4 < 0$, $d_5 \geq 0$, $d_6 \geq 0$, $d_8 > 0$ y $d_9 \geq 0$.

Asimismo, cuando $d_6 < 0$, la función $k(x)$ cambia su signo, y por tanto $h(x)$ decrece al principio y después crece para $d_2 \leq 0$ o bien $h(x)$ crece primero, después decrece y por último vuelve a ser creciente para $d_2 > 0$.

En cualquier caso, tenemos que X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_3 \geq 0$, $d_4 < 0$, $d_5 \geq 0$, $d_6 < 0$, $d_8 > 0$ y $d_9 \geq 0$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8).

Por otro lado, si $d_5 < 0$ entonces la función $n(x)$ cambia de signo negativo a positivo, o equivalentemente, la función $m(x)$ pasa de ser decreciente a creciente, es decir, $m(x)$ alcanza su mínimo en la única solución de $n(x) = 0$.

Teniendo en cuenta que $\min m(x) = d_7$, obtenemos que $m(x)$ es no negativa para $d_7 \geq 0$, por lo que $k(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y en este caso, X tiene función

de supervivencia logconvexa cuando $d_5 < 0$, $d_7 \geq 0$, $d_8 > 0$, $d_9 \geq 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$.

En caso contrario, la función $k(x)$ cambia una o dos veces de monotonía según el signo de la función $m(x)$. Por lo que, $k(x)$ decrece y después crece para $d_4 \leq 0$, o $k(x)$ crece primero, después decrece y finalmente crece otra vez para $d_4 > 0$ y $d_7 < 0$.

Utilizando el desarrollo anterior para $d_4 \leq 0$, tenemos que X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_4 \leq 0$, $d_5 < 0$, $d_8 > 0$ y $d_9 \geq 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0, d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$.

Para $d_4 > 0$ y $d_7 < 0$, la función $k(x)$ cambia dos veces su monotonía. De modo que $k(x)$ es no negativa cuando $d_2 \geq 0$ y $d_6 \geq 0$, donde τ_2 en (3.3.7) es la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de (3.3.10), es decir, la función $h(x)$ es no decreciente en $x > 0$.

Teniendo en cuenta que $d_1 \geq 0$, obtenemos que la función $h(x)$ es no negativa, y por consiguiente, X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_2 \geq 0$, $d_4 > 0$, $d_5 < 0$, $d_6 \geq 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$ y $d_9 \geq 0$.

Además, si $d_2 \geq 0$ y $d_6 < 0$ con τ_2 la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$, entonces la función $h(x)$ pasa de creciente a decreciente y otra vez a creciente, y consecuentemente, obtenemos que X tiene función de supervivencia logconvexa añadiendo la condición $d_3 \geq 0$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$.

Sin embargo, si $d_2 < 0$, entonces la función $k(x)$ cambia de signo una vez o tres veces, es decir, la función $h(x)$ pasa de decreciente a creciente una o dos ve-

ces, dependiendo del número de soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$, siendo $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8). Por tanto, se deduce que X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_3 \geq 0$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$.

En el caso de que $d_9 < 0$ cuando $d_8 > 0$, la función $u(x)$ cambia su signo de negativo a positivo, es decir, la función $n(x)$ pasa de ser decreciente a creciente, y es no negativa cuando $d_{10} \geq 0$, o equivalentemente, la función $m(x)$ es no decreciente.

Teniendo en cuenta el razonamiento anterior, para $d_4 \geq 0$, la función $k(x)$ es no decreciente, y por consiguiente, tenemos que X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_4 \geq 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} \geq 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$; y para $d_4 < 0$, la función $k(x)$ pasa de decreciente a creciente, por lo que X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_4 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} \geq 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$.

No obstante, si $d_5 \leq 0$ cuando $d_8 > 0$ y $d_9 < 0$, la función $n(x)$ cambia de signo negativo a positivo, es decir, la función $m(x)$ pasa de ser decreciente a creciente, y por tanto $m(x)$ es no negativa para $d_7 \geq 0$, $m(x)$ cambia una vez su signo para $d_4 \leq 0$, y $m(x)$ cambia su signo dos veces para $d_4 > 0$ y $d_7 < 0$. En tal caso, la función $k(x)$ es no decreciente para $d_7 \geq 0$, pasa de decreciente a creciente para $d_4 \leq 0$, y crece después decrece y por último es creciente para $d_4 > 0$ y $d_7 < 0$.

Por lo que, llegamos a que X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_5 \leq 0$, $d_7 \geq 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$.

Asimismo, X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_4 \leq 0$, $d_5 \leq 0$, $d_8 > 0$ y $d_9 < 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0$ y $d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$.

En el caso $d_4 > 0$ y $d_7 < 0$ cuando $d_5 \leq 0$, también tenemos que X tiene función de supervivencia logconvexa bajo las siguientes condiciones: cuando $d_2 \geq 0$, $d_4 > 0$, $d_5 \leq 0$, $d_6 \geq 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$ y $d_9 < 0$ siendo τ_2 en (3.3.7) la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de (3.3.10); cuando $d_2 \geq 0$, $d_3 \geq 0$, $d_4 > 0$, $d_5 \leq 0$, $d_6 < 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, y además, cuando $d_2 < 0$, $d_3 \geq 0$, $d_4 > 0$, $d_5 \leq 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ siendo $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8).

Sin embargo, para $d_5 > 0$ y $d_{10} < 0$, la función $n(x)$ cambia dos veces de signo, es decir, la función $m(x)$ crece al principio, después decrece y finalmente vuelve a crecer. Por lo que, la monotonía de la función $k(x)$ puede cambiar tres veces dependiendo del signo de $m(x)$.

Así, la función $k(x)$ es decreciente cuando $d_4 \geq 0$ y $d_7 \geq 0$, donde τ_3 en (3.3.9) es la única solución de (3.3.10) tal que $\tau_3 < \left(-\frac{a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2}{a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2}\right)^{-\frac{b_4 - b_2}{b_4 - b_3 - b_2 + b_1}}$, y por consiguiente, X tiene función de supervivencia logconvexa cuando $d_4 \geq 0$, $d_5 > 0$, $d_7 \geq 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$, $d_{10} < 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0$ y $d_3 \geq 0\}$.

Asimismo, para $d_4 \geq 0$, $d_5 > 0$, $d_7 < 0$, $d_8 > 0$, $d_9 < 0$ y $d_{10} < 0$, con $\tau_3 < \left(-\frac{a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2}{a_2 a_3 (b_3 - b_2)^2}\right)^{-\frac{b_4 - b_2}{b_4 - b_3 - b_2 + b_1}}$, obtenemos que $k(x)$ pasa de creciente a decreciente y otra vez a creciente.

Consecuentemente, también se tiene que la función de supervivencia de X es logconvexa añadiendo $\{d_2 \geq 0$ y $d_6 \geq 0\}$ con τ_2 en (3.3.7) la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y donde τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de (3.3.10), ó $\{d_2 \geq 0, d_3 \geq 0$ y $d_6 < 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, ó $\{d_2 < 0$ y $d_3 \geq 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8).

Finalmente, para $d_4 < 0$, la función $k(x)$ cambia una o tres veces de monotonía dependiendo del número de soluciones de la ecuación (3.3.8) en $\left(1, \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}\right) \cup \left(\tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}, \infty\right)$ con $\tau_3 < \tau_3'$ las dos únicas soluciones de (3.3.10), dado que la función $k(x)$ pasa de decreciente a creciente una vez o dos veces.

Por lo que, obtenemos que X tiene función de supervivencia logconvexa añadiendo las condiciones $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0$ y $d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ con τ_2 la única solución de (3.3.8) en $\left(1, \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}\right) \cup \left(\tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}, \infty\right)$.

Además, si en $\left(1, \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}\right) \cup \left(\tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}, \infty\right)$ la ecuación (3.3.8) tiene dos soluciones, la función $k(x)$ decrece, después crece, otra vez decrece y por último crece. En tal caso, si $d_6 \leq 0$ para τ_2' en (3.3.7) la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2' < \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_6 < 0$ y $d_3 \geq 0\}$ para τ_2 en (3.3.7) la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y siendo τ_1 en (3.3.3) la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, entonces la función $h(x)$ es no negativa, es decir, X tiene función de supervivencia logconvexa.

También $S(x)$ es logconvexa cuando $d_6 \leq 0$ para τ_2'' la única solución de (3.3.8)

en $\left(\tau_3'^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}, \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}\right)$ y $d_3 \geq 0$ con τ_1 en (3.3.3) la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$.

Asimismo, se mantiene la logconvexidad de $S(x)$ cuando $d_6 < 0$ para τ_2' , $d_6 > 0$ para τ_2'' y $d_3 \geq 0$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2''^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, \tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right)$.

Por otro lado, para $d_8 \leq 0$ y $d_9 \leq 0$, obtenemos que la función $n(x)$ es no creciente en $x > 0$, y así $k(x)$ es no creciente en $x > 0$ cuando $d_5 > 0$ y $d_4 \geq 0$, y $k(x)$ pasa de decreciente a creciente cuando $d_5 > 0$ y $d_4 < 0$.

Nótese que el caso $d_5 \leq 0$ no tiene sentido aquí, ya que la función $n(x)$ es no creciente en $x > 0$ y su límite es positivo.

Por tanto, X también tiene función de supervivencia logconvexa para $d_4 \geq 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$, así como para $d_4 < 0$ añadiendo las condiciones $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$, donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8).

En el último caso, $d_8 \leq 0$ y $d_9 > 0$, la función $n(x)$ pasa de ser creciente a decreciente, y por consiguiente, si $d_5 \geq 0$ y $d_4 \geq 0$ entonces la función $k(x)$ es no decreciente en $x > 0$; y si $d_5 \geq 0$ y $d_4 < 0$ entonces la función $k(x)$ es decreciente y después creciente. Además, si $d_5 < 0$ y $d_7 \geq 0$ entonces la función $k(x)$ es no decreciente; si $d_5 < 0$ y $d_4 \leq 0$ entonces $k(x)$ cambia de decreciente a creciente; y para $d_5 < 0$, $d_4 > 0$ y $d_7 < 0$ entonces $k(x)$ crece al principio, después decrece y por último crece otra vez.

Teniendo en cuenta los razonamientos anteriores dependiendo de la monotonía de la función $k(x)$, obtenemos que la función de supervivencia es logconvexa añadiendo $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$ cuando $k(x)$ es no decreciente.

Además, cuando $k(x)$ cambia una vez de monotonía, la función de supervivencia es logconvexa añadiendo $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8).

Asimismo, si $k(x)$ cambia dos veces de monotonía, X tiene función de supervivencia logconvexa cuando añadimos $\{d_2 \geq 0 \text{ y } d_6 \geq 0\}$ con τ_2 en (3.3.7) la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de (3.3.10), ó $\{d_2 \geq 0, d_3 \geq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$, ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8).

Para comprobar (6), usando un desarrollo análogo a (5), obtenemos que X no puede tener función de supervivencia logcóncava.

Además, cuando $d_1 < 0$, la función $h(x)$ cambia de signo, y en tal caso, $g(x)$ también cambia de signo, es decir, $S(x)$ no mantiene su logconcauidad.

Por lo que, la función de supervivencia de X puede ser logconvexa únicamente si $d_1 \geq 0$.

Del mismo modo, en este caso la función $u(x)$ es no creciente en $x > 0$ y su límite es $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = -\infty$ para $d_8 > 0$. Si $d_8 < 0$ entonces $u(x)$ es no decreciente en $x > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = a_1 a_4 (b_4 - b_1)^2 (b_2 - b_1) (b_4 - b_3) (b_3 - b_1) (b_4 - b_2) > 0$. Pero para $d_8 = 0$, $u(x)$ es una función constante, siendo $\text{signo}(u(0)) = \text{signo}(d_9)$.

En primer lugar, para $d_8 \geq 0$ y $d_9 \leq 0$, la función $n(x)$ es no creciente en $x > 0$, y por consiguiente, $d_5 \leq 0$ no tiene sentido, pues $\lim_{x \rightarrow \infty} n(x) > 0$.

Para $d_5 > 0$, la función $m(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y a partir de la prueba del caso (5), la función de supervivencia es logconvexa cuando añadimos $d_4 \geq 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$, así como para $d_4 < 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8).

Para $d_8 \geq 0$ y $d_9 > 0$, la función $n(x)$ pasa de creciente a decreciente, y a partir de la comprobación del caso (5), la función de supervivencia es logconvexa cuando $d_5 \geq 0$ y se mantienen las condiciones correspondientes a $d_4 \geq 0$ ó $d_4 < 0$; así como para $d_5 < 0$, $d_7 \geq 0$ y además $d_2 \geq 0$ ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$; para $d_5 < 0$, $d_4 \leq 0$ y además $d_6 \geq 0$ ó $\{d_3 \geq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$ y τ_2 es la única solución de (3.3.8), y para $d_5 < 0$, $d_4 > 0$, $d_7 < 0$ y además $\{d_2 \geq 0 \text{ y } d_6 \geq 0\}$ con τ_2 en (3.3.7) la única solución de (3.3.8) tal que $\tau_2 > \tau_3^{-(b_4+b_3-b_2-b_1)/(b_4-b_2)}$ y τ_3 es la única solución en $(0, 1)$ de (3.3.10); ó $\{d_2 \geq 0, d_3 \geq 0 \text{ y } d_6 < 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}$; ó $\{d_2 < 0 \text{ y } d_3 \geq 0\}$ donde τ_1 en (3.3.3) es la única o las dos únicas soluciones de (3.3.4) en $\left(0, \tau_2^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}\right) \cup \left(\tau_2'^{-(b_4-b_1)/(b_4+b_3-b_2-b_1)}, 1\right)$ con $\tau_2' < \tau_2$ las dos únicas soluciones de (3.3.8).

Por otro lado, para $d_8 < 0$ y $d_9 \geq 0$, la función $n(x)$ es no creciente en $x > 0$, y consecuentemente, si $d_5 \geq 0$ entonces la función $m(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y $m(x)$ pasa de decreciente a creciente cuando $d_5 < 0$. Así, la función de supervivencia es logconvexa bajo las mismas condiciones que el caso anterior $d_8 > 0$ y $d_9 \geq 0$ de la demostración de (5).

Finalmente, para $d_8 < 0$ y $d_9 < 0$, la función $n(x)$ pasa de ser decreciente a creciente.

Por tanto, la función $m(x)$ es no decreciente para $d_{10} \geq 0$; $m(x)$ pasa de decreciente a creciente para $d_5 \leq 0$, y $m(x)$ crece al principio, después decrece y por último crece para $d_5 > 0$ y $d_{10} < 0$. Por lo que, usando la demostración de (5) para $d_8 > 0$ y $d_9 < 0$, deducimos que X tiene función de supervivencia logconvexa bajo las condiciones dadas en dicho caso.

Para demostrar el caso (7), de manera similar a (3), el signo de $h(x)$ es el mismo que el de la función $g(x)$, en donde se cumple que $h(0) = d_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$, es decir, existe un x_0 tal que $h(x) < 0$ para todo $x \geq x_0$, o equivalentemente, la función $g(x) < 0$ para $x \geq x_0$, es decir, X no puede tener función de supervivencia logconvexa.

Además, cuando $d_1 > 0$, la función $h(x)$ cambia su signo, y en tal caso, la función $g(x)$ también cambia de signo, es decir, $S(x)$ cambia de logconcauidad.

Así, para $d_1 \leq 0$, la prueba de este caso sigue con un desarrollo simétrico al caso (5), y la logconcauidad de la función de supervivencia se obtiene cambiando el sentido de todas las desigualdades de los d_i de dicho caso (5).

Para concluir la demostración vemos el caso (8). Análogamente al caso (7), la función de supervivencia no puede ser logconvexa en este caso, y tampoco podría ser logcóncava cuando $d_1 > 0$.

Además, cuando $d_1 \leq 0$, se deduce que X tiene función de supervivencia logcóncava bajo las condiciones simétricas a las obtenidas en el caso (6), cambiando el sentido de todas las desigualdades de los d_i de dicho caso (6). □

3.4. Aplicación a los extremos de modelos exponenciales bivariantes

En esta sección, discutimos la logconcauidad de los estadísticos ordenados extremos, mínimo y máximo, de los modelos GBVE-I y RBVE, a través de los resultados de logconcauidad de la sección anterior, ya que estos estadísticos extremos son mixturas generalizadas de cuatro distribuciones exponenciales.

3.4.1. Estadístico máximo del modelo exponencial bivalente de Gumbel I

Gumbel (1960) introdujo tres modelos exponenciales bivariantes con marginales exponenciales, siendo en uno de ellos el estadístico máximo una mixtura generalizada de cuatro distribuciones exponenciales.

En concreto, el estadístico máximo de dicho modelo GBVE-I, tiene función de densidad

$$f_{(2)}(x) = 2e^{-x} - 2(1 + \alpha)e^{-2x} + 6\alpha e^{-3x} - 4\alpha e^{-4x}, \quad \text{para todo } x > 0 \text{ y } |\alpha| \leq 1$$

y para los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = -1$, T_2 es una mixtura generalizada de dos y tres distribuciones exponenciales, respectivamente. Por lo que su logconcauidad en estos dos casos ha sido obtenida en la Sección 2.4.

Sin embargo, en los casos $0 < \alpha \leq 1$ y $-1 < \alpha < 0$, este estadístico T_2 es una mixtura generalizada de cuatro distribuciones exponenciales con pesos $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -(1 + \alpha)$, $a_3 = 2\alpha$ y $a_4 = -\alpha$. Además, $d_1 = -2(1 + \alpha)$, $d_2 = -6(1 - \alpha)$,

$$d_4 = -6 + 14\alpha - 4\alpha^2 \text{ y } d_5 = 4(-6 + 4\alpha + \alpha^2).$$

Así, para $0 < \alpha \leq 1$, obtenemos que $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ y $a_4 < 0$, y de (4) del Teorema 3.2, se tiene que el estadístico máximo no puede tener función de supervivencia logconvexa.

En particular, cuando $0 < \alpha \leq 0.5$ se verifica que $d_1 < 0$, $d_2 \leq 0$ y $d_5 < 0$, pero $d_4 \leq 0$, y por (4.a), la función de supervivencia del estadístico máximo es logcóncava.

Sin embargo, si $0.5 < \alpha \leq 1$, entonces $d_4 > 0$; y teniendo en cuenta que $d_6 = 32\alpha + 6(1 + \alpha)(3\alpha/(1 + \alpha))^{1/2} - 2\alpha(10 + \alpha)(3\alpha/(1 + \alpha))^{-1/2} + 2\alpha^2(3\alpha/(1 + \alpha))^{-3/2}$ tiene el mismo signo que $24(3\alpha/(1 + \alpha))^{1/2} - (28 + \alpha)$, obtenemos que existe un único $\alpha_0 \in (0.5, 1)$ para el que $d_6 = 0$. De manera que, $d_6 \leq 0$ cuando $0.5 < \alpha \leq \alpha_0 \simeq 0.940611$; pero $d_6 > 0$ cuando $\alpha_0 < \alpha \leq 1$.

En este último caso,

$$d_3 = \frac{2}{\tau_1} \left(-\alpha^2 \tau_1^{2/3} \left(\tau_1^{1/3} - 1 \right)^2 + \alpha \left(2\tau_1 - 10\tau_1^{2/3} + 8\tau_1^{1/3} - 1 \right) - 1 \right)$$

es negativo para todo $\tau_1 \in (0, 1)$, y por consiguiente, $d_3 < 0$ para la única solución de (3.3.4) tal que $\tau_1 < ((1 + \alpha)/(3\alpha))^{3/2}$. Por tanto, a partir de (4.b) y $0.5 < \alpha \leq 1$, el estadístico máximo también tiene función de supervivencia logcóncava.

En cualquiera de los casos, el estadístico máximo T_2 del modelo GBVE-I tiene función de supervivencia logcóncava cuando $0 < \alpha \leq 1$.

Finalmente, para $-1 < \alpha < 0$, obtenemos que $a_2 < 0$, $a_3 < 0$ y $a_4 > 0$, y a partir de (3) del Teorema 3.2, el estadístico máximo no puede tener función de supervivencia logconvexa.

Además, $d_1 < 0$ y $d_2 < 0$, y por tanto, el estadístico máximo tiene función de

supervivencia logcóncava cuando $-1 < \alpha < 0$.

3.4.2. Estadísticos mínimo y máximo del modelo exponencial bivalente de Raftery

En la Sección 1.4 introducimos el modelo RBVE, en su versión general completamente parametrizada. Sin embargo, el propio Raftery (1984) propone tres modelos más restrictivos para facilitar su aplicabilidad, dados en las Definiciones 1.20, 1.21 y 1.22, estudiados en Baggs (1994), Baggs y Nagaraja (1996) y Nagaraja y Baggs (1996), los cuales hemos utilizado en el Capítulo 2.

No obstante, si analizamos la versión general del modelo RBVE de la Definición 1.19, sus estadísticos ordenados mínimo y máximo tienen funciones de supervivencia

$$S_{(1)}(x) = p_{11} \frac{2 - \pi_1 - \pi_2}{1 - \pi_1 \pi_2} e^{-\lambda x} + \left(1 - \frac{p_{11}}{\pi_1}\right) e^{-\lambda \left(1 + \frac{1}{1 - \pi_2}\right) x} + \left(1 - \frac{p_{11}}{\pi_2}\right) e^{-\lambda \left(1 + \frac{1}{1 - \pi_1}\right) x} \\ + \left(p_{11} \frac{\pi_1 + \pi_2 - 2\pi_1 \pi_2}{\pi_1 \pi_2 (1 - \pi_1 \pi_2)} - 1\right) e^{-\lambda \left(\frac{1}{1 - \pi_1} + \frac{1}{1 - \pi_2}\right) x}$$

y

$$S_{(2)}(x) = \left(2 - p_{11} \frac{2 - \pi_1 - \pi_2}{1 - \pi_1 \pi_2}\right) e^{-\lambda x} + \left(\frac{p_{11}}{\pi_1} - 1\right) e^{-\lambda \left(1 + \frac{1}{1 - \pi_2}\right) x} \\ + \left(\frac{p_{11}}{\pi_2} - 1\right) e^{-\lambda \left(1 + \frac{1}{1 - \pi_1}\right) x} + \left(1 - p_{11} \frac{\pi_1 + \pi_2 - 2\pi_1 \pi_2}{\pi_1 \pi_2 (1 - \pi_1 \pi_2)}\right) e^{-\lambda \left(\frac{1}{1 - \pi_1} + \frac{1}{1 - \pi_2}\right) x}$$

donde $\lambda > 0$, $0 < \pi_1 < 1$, $0 < \pi_2 < 1$, $0 < p_{11}$, $\pi_1 > p_{11}$, $\pi_2 > p_{11}$ y $1 - \pi_1 - \pi_2 + p_{11} \geq 0$, que como se observa son mixturas generalizadas de cuatro distribuciones exponenciales. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\pi_1 > \pi_2$, puesto que ambos parámetros son intercambiables en estas expresiones, y el caso de igualdad $\pi_1 = \pi_2$ se reduce a una mixtura generalizada de tres exponenciales.

En particular, el estadístico mínimo del modelo RBVE es una mixtura generalizada de cuatro distribuciones exponenciales con coeficientes

$$a_1 = p_{11} \frac{2 - \pi_1 - \pi_2}{1 - \pi_1 \pi_2}, a_2 = 1 - \frac{p_{11}}{\pi_1}, a_3 = 1 - \frac{p_{11}}{\pi_2}, a_4 = \frac{p_{11}}{\alpha} - 1$$

siendo $\alpha = \frac{\pi_1 + \pi_2 - 2\pi_1 \pi_2}{\pi_1 \pi_2 (1 - \pi_1 \pi_2)} \in (\pi_1 \pi_2, \pi_2)$. De donde se tiene que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ y $a_3 > 0$. Además, si $p_{11} > \alpha$, también $a_4 > 0$, y por (1) del Teorema 3.2, el estadístico mínimo tiene función de supervivencia logconvexa.

Sin embargo, para $p_{11} < \alpha$, tenemos que $a_4 < 0$, por lo que de (5) del Teorema 3.2, T_1 no puede tener función de supervivencia logcóncava. Además, cuando $p_{11} < \pi_1 \pi_2$, se tiene que

$$d_1 = \frac{2\lambda^2 (p_{11} - \pi_1 \pi_2)}{(1 - \pi_1)(1 - \pi_2)} < 0$$

y por consiguiente, la función de supervivencia tampoco es logconvexa.

Asimismo, el estadístico máximo del modelo RBVE es una mixtura generalizada de cuatro distribuciones exponenciales con coeficientes

$$a_1 = 2 - p_{11} \frac{2 - \pi_1 - \pi_2}{1 - \pi_1 \pi_2}, a_2 = \frac{p_{11}}{\pi_1} - 1, a_3 = \frac{p_{11}}{\pi_2} - 1, a_4 = 1 - \frac{p_{11}}{\alpha}$$

siendo $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ y $a_3 < 0$.

Por un lado, si $p_{11} > \alpha$, tenemos que $a_4 < 0$, y a partir de (7) del Teorema 3.2, la función de supervivencia de T_2 no puede ser logconvexa.

No obstante, para $p_{11} < \alpha$, se tiene que $a_4 > 0$, y utilizando (3) del Teorema 3.2, se verifica que

$$d_1 = \frac{2\lambda^2 (-1 + \pi_1 + \pi_2 - p_{11})}{(1 - \pi_1)(1 - \pi_2)} < 0$$

y

$$d_2 = \frac{-\lambda^3}{(1 - \pi_1)^2 (1 - \pi_2)^2} \cdot (2 + \pi_1^2 \pi_2 - 2\pi_2^2 + p_{11} (3\pi_2 - 2) + \pi_1 (-2 + p_{11} - 2p_{11}\pi_2 + \pi_2^2))$$

siendo $d_2 < 0$, y por tanto, la función de supervivencia del estadístico máximo es logcóncava.

Capítulo 4

Extensiones de mixturas generalizadas. Propiedades de estadísticos extremos

4.1. Introducción

En este capítulo abordamos la extensión de algunos problemas analizados en los capítulos anteriores, estudiando mixturas generalizadas de distribuciones gamma y exponenciales o bien mixturas generalizadas de distribuciones Weibull. También incluimos en este capítulo la clasificación de la logconcauidad en modelos de probabilidad bivariantes particulares que no son mixturas generalizadas de distribuciones.

En primer lugar, observamos que los estadísticos ordenados del modelo FPBVE estudiados en el Capítulo 2, corresponden a la restricción de sus parámetros $\nu \neq \alpha_3, \alpha_4$

utilizada en Baggs (1994) y Baggs y Nagaraja (1996), aunque en estos trabajos se incluye la expresión de sus funciones de densidad sin dicha restricción, sólo estudian la logconcauidad en el caso mencionado, puesto que en los restantes casos, dichos estadísticos son mixturas generalizadas de gamma y exponenciales.

Por este motivo, en la siguiente sección caracterizamos las mixturas generalizadas de distribuciones gamma y exponenciales que incluyen los modelos de probabilidad del estadístico máximo del modelo FPBVE, así como la clasificación de la logconcauidad de este estadístico.

Por otro lado, es bien conocido que una extensión natural del modelo exponencial es el modelo Weibull. En este sentido, en la Sección 4.3 damos algunas versiones de modelos Weibull bivariantes, introducidos por Hanagal (1996), (2004) y (2005) a partir de los modelos exponenciales bivariantes.

Los estadísticos extremos de estos modelos son predominantemente mixturas de distribuciones Weibull, por lo que estudiamos la caracterización de estas mixturas extendiendo los resultados de Bartholomew (1969) y Baggs y Nagaraja (1996) dados en la Sección 2.2, así como la clasificación de la logconcauidad de las mismas y su aplicación a los estadísticos extremos de dichos modelos Weibull bivariantes.

Además, en la última sección de este capítulo, obtenemos la clasificación de la logconcauidad en modelos bivariantes particulares que no son mixturas generalizadas, como los estadísticos ordenados del modelo GBVE-III y de los modelos de probabilidad bivariantes usuales en valoración dados en la Sección 1.3, los cuales serán utilizados en la Sección 5.4 para analizar el comportamiento estocástico del modelo de probabilidad de un índice de calidad bidimensional.

4.2. Mixturas generalizadas de gamma y exponenciales

A partir del modelo FPBVE dado en la Definición 1.17, sin restricciones sobre sus parámetros, se obtiene que el estadístico mínimo tiene función de densidad

$$f_{(1)}(x) = \nu e^{-\nu x}$$

es decir, T_1 es exponencial con parámetro ν , y así, su función de supervivencia es logcóncava y logconvexa, es decir, la razón de azar o tasa de fallo es constante.

No obstante, la distribución del estadístico máximo T_2 del modelo FPBVE toma cuatro formas distintas dependiendo de los valores de α_3 , α_4 y ν , tal como expresamos a continuación, para todo $x > 0$,

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} \phi_1 \alpha_4 e^{-\alpha_4 x} + \phi_2 \alpha_3 e^{-\alpha_3 x} + (1 - \phi_1 - \phi_2) \nu e^{-\nu x} & \text{si } \nu \neq \alpha_3, \alpha_4 \\ \phi_1 \alpha_4 e^{-\alpha_4 x} + ((1 - \phi_1) \nu - \alpha_0 \alpha_2) e^{-\nu x} + \alpha_0 \alpha_2 \nu x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_3 \neq \alpha_4 \\ \phi_2 \alpha_3 e^{-\alpha_3 x} + ((1 - \phi_2) \nu - \alpha_0 \alpha_1) e^{-\nu x} + \alpha_0 \alpha_1 \nu x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_4 \neq \alpha_3 \\ (1 - \alpha_0) \nu e^{-\nu x} + \alpha_0 \nu^2 x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_3 = \alpha_4 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

donde $\phi_1 = \alpha_0 \alpha_1 / (\nu - \alpha_4)$ y $\phi_2 = \alpha_0 \alpha_2 / (\nu - \alpha_3)$, véase Baggs y Nagaraja (1996).

Obsérvese que $f_{(2)}(x)$ es una mixtura generalizada de tres distribuciones exponenciales sólo cuando $\nu \neq \alpha_3, \alpha_4$, y su logconcavidad ha sido clasificada en el Capítulo 2.

Sin embargo, cuando $\nu = \alpha_3 = \alpha_4$, T_2 es una mixtura de una distribución gamma(2) y una distribución exponencial, donde por distribución gamma(2) denotamos a una

distribución gamma con parámetros $(2, \beta)$.

Además, en los restantes casos, $\nu = \alpha_3 \neq \alpha_4$ ó $\nu = \alpha_4 \neq \alpha_3$, el estadístico máximo T_2 es una mixtura generalizada de una distribución gamma(2) y dos distribuciones exponenciales.

Por ello, en el siguiente apartado, establecemos las condiciones basadas en los pesos y parámetros de las mixturas generalizadas de una distribución gamma(2) y distribuciones exponenciales para que sean modelos de probabilidad, y posteriormente, analizaremos la logconcavidad de la función de supervivencia del estadístico máximo del modelo FPBVE.

4.2.1. Caracterización de mixturas generalizadas de gamma y exponenciales

En este apartado, examinamos las condiciones sobre los pesos y parámetros de las mixturas generalizadas de una distribución gamma y una o dos distribuciones exponenciales, para que la mixtura generalizada sea un modelo de probabilidad, tal como Bartholomew (1969) y Baggs y Nagaraja (1996) muestran para las mixturas generalizadas de dos o tres distribuciones exponenciales, respectivamente.

Además, estas mixturas generalizadas hacen más flexibles los procedimientos de estimación de los pesos en aquellos problemas que se modelizan mediante mixturas.

Mixturas generalizadas de gamma y exponencial

En primer lugar, damos la definición de una mixtura generalizada de una distribución gamma y una distribución exponencial, y después establecemos las condiciones necesarias y suficientes para que sea un verdadero modelo de probabilidad.

Definición 4.1 *Sea X una variable aleatoria con soporte $(0, \infty)$. Se dice que X es una mixtura generalizada de una distribución gamma(2) y una exponencial si su función de densidad está dada por*

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \quad \text{para todo } x > 0 \quad (4.2.2)$$

donde $f_1(x) = b_1 e^{-b_1 x}$ y $f_2(x) = b_2^2 x e^{-b_2 x}$ son las funciones de densidad de una exponencial de parámetro b_1 y una gamma de parámetros $(2, b_2)$, respectivamente, y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 + a_2 = 1$.

Nótese que la función de densidad (4.2.2) se puede expresar como

$$f(x) = a_1 b_1 e^{-b_1 x} + a_2 b_2^2 x e^{-b_2 x} \quad \text{para todo } x > 0 \quad (4.2.3)$$

donde $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 + a_2 = 1$.

Teorema 4.1 *Sea $f(x)$ una mixtura generalizada de una distribución gamma y una distribución exponencial definida por (4.2.3). Entonces, $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $a_1 > 0$ y se verifica una de las siguientes condiciones*

1. $a_2 > 0$.

2. $a_2 < 0$, $b_1 < b_2$ y

$$\log \frac{-a_2 b_2^2}{a_1 b_1 (b_2 - b_1)} \leq 1. \quad (4.2.4)$$

Demostración. En primer lugar, teniendo en cuenta que ambas funciones, $f_1(x) = b_1 e^{-b_1 x}$ y $f_2(x) = b_2^2 x e^{-b_2 x}$, son funciones de densidad, es obvio que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = a_1 + a_2 = 1$$

por lo que es suficiente probar que $f(x)$ es positiva para todo $x > 0$, para que sea una función de densidad.

Para ello, analizamos los pesos y parámetros de las funciones de densidad de la gamma y de la exponencial, tal que la mixtura generalizada (4.2.3) sea una verdadera función de densidad.

En este contexto, observamos que ambos coeficientes a_1 y a_2 no pueden ser negativos, ya que $f(x)$ sería negativa. Entonces, sólo uno de los a_i podría ser negativo. Además, $f(0) = a_1 b_1$ debe ser positivo, y por tanto, $a_1 \geq 0$, puesto que $b_1 > 0$; es decir, únicamente podrá ser negativo el coeficiente a_2 .

Veamos ahora la no negatividad de la función $f(x)$ según el signo del coeficiente a_2 .

Cuando ambos a_i son positivos, $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$, entonces $f(x)$ es una combinación lineal convexa de funciones de densidad, y por consiguiente, $f(x)$ es una función de densidad.

En el caso contrario, cuando $a_2 < 0$, discutimos las condiciones según la ordenación de los parámetros b_1 y b_2 .

Si $b_1 \geq b_2$, tomamos la función $g(x) = e^{b_2x}f(x)$, la cual tiene el mismo signo que $f(x)$, por tanto, es suficiente que

$$g(x) = a_1b_1e^{(b_2-b_1)x} + a_2b_2^2x \geq 0 \quad \text{para todo } x > 0.$$

Teniendo en cuenta que $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $b_2 - b_1 \leq 0$, ambos términos de la función $g(x)$, $a_1b_1e^{(b_2-b_1)x}$ y $a_2b_2^2x$, son no crecientes, y de aquí se deduce que $g(x)$ es no creciente en $x > 0$.

Además, $g(0) = a_1b_1 > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, es decir, la función $g(x)$ cambia de signo positivo a negativo, y consecuentemente, $f(x)$ no puede ser una función de densidad para $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ y $b_1 \geq b_2$.

Por otro lado, si $b_1 < b_2$, obtenemos que la función $g(x) = e^{b_1x}f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x)$. Por lo que analizamos el signo de

$$g(x) = a_1b_1 + a_2b_2^2xe^{-(b_2-b_1)x} \quad \text{para todo } x > 0$$

en donde $g(0) = a_1b_1 > 0$, y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-(b_2-b_1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b_2-b_1} e^{-(b_2-b_1)x} \right) = 0$$

obtenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a_1b_1 > 0$.

En este sentido, estudiamos el comportamiento de la función $g(x)$ mediante su primera derivada

$$\begin{aligned} g'(x) &= a_2b_2^2e^{-(b_2-b_1)x} - a_2b_2^2x(b_2-b_1)e^{-(b_2-b_1)x} \\ &= -a_2b_2^2(b_2-b_1)e^{-(b_2-b_1)x} \left(x - \frac{1}{b_2-b_1} \right) \end{aligned}$$

por lo que, $g'(x) < 0$ para $x < (b_2-b_1)^{-1}$ y $g'(x) > 0$ para $x > (b_2-b_1)^{-1}$, es decir, la función $g(x)$ alcanza su mínimo en $x_0 = (b_2-b_1)^{-1}$. Por tanto, es suficiente probar

que el signo de $g(x_0)$ es no negativo, para que $g(x)$ sea no negativa, y por consiguiente, $f(x)$ una función de densidad.

Para determinar este signo, tenemos que

$$g(x_0) = a_1 b_1 + a_2 b_2^2 (b_2 - b_1)^{-1} e^{-1} \geq 0$$

si y sólo si (4.2.4), y por tanto, bajo estas condiciones, la función $f(x)$ es una función de densidad. \square

Obsérvese que aunque la función de densidad del estadístico máximo a partir de una distribución poblacional es siempre una verdadera función de densidad, se podría comprobar que el estadístico máximo del modelo FPBVE cuando $\nu = \alpha_3 = \alpha_4$ satisface este Teorema 4.1.

Mixturas generalizadas de gamma y dos exponenciales

Veamos ahora las condiciones basadas en los pesos y parámetros de una mixtura generalizada de una distribución gamma y dos distribuciones exponenciales, para que sea un modelo de probabilidad.

Definición 4.2 *Sea X una variable aleatoria con soporte $(0, \infty)$. Se dice que X es una mixtura generalizada de una distribución gamma(2) y dos exponenciales si su función de densidad está dada por*

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) \quad \text{para todo } x > 0 \quad (4.2.5)$$

donde $f_1(x) = b_1 e^{-b_1 x}$, $f_2(x) = b_2 e^{-b_2 x}$ y $f_3(x) = b_3^2 x e^{-b_3 x}$ son las funciones de densidad de dos exponenciales de parámetros b_1 y b_2 , y una gamma de parámetros $(2, b_3)$, respectivamente, y $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Nótese que la función de densidad (4.2.5) se expresa como

$$f(x) = a_1 b_1 e^{-b_1 x} + a_2 b_2 e^{-b_2 x} + a_3 b_3^2 x e^{-b_3 x} \quad \text{para todo } x > 0 \quad (4.2.6)$$

donde $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$ y $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Además, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que los parámetros de las dos distribuciones exponenciales están ordenados, $b_1 < b_2$.

Teorema 4.2 *Sea $f(x)$ una mixtura generalizada de una distribución gamma y dos distribuciones exponenciales definida por (4.2.6) con $b_1 < b_2$.*

1. *Si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ y $a_3 > 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad.*
2. *Si $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ y $a_3 > 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $c_1 \geq 0$, donde*

$$c_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (4.2.7)$$

3. *Si $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ y $a_3 < 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $c_1 \geq 0$ y se verifica una de las siguientes condiciones:*

- a) *Cuando $b_1 < b_2 \leq b_3$ y además $c_2 \geq 0$ ó $\{c_2 < 0 \text{ y } c_3 \geq 0\}$, con*

$$c_2 = a_3 b_3^2 - a_2 b_2 (b_2 - b_1) \quad (4.2.8)$$

y

$$c_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2 e^{-(b_2 - b_1)\tau} + a_3 b_3^2 \tau e^{-(b_3 - b_1)\tau} \quad (4.2.9)$$

donde τ es la única solución de

$$a_2 b_2 (b_2 - b_1) e^{(b_3 - b_2)\tau} + a_3 b_3^2 ((b_3 - b_1)\tau - 1) = 0. \quad (4.2.10)$$

- b) Cuando $b_1 < b_3 < b_2$ y además $\{c_4 \leq 1 \text{ y } c_2 \geq 0 \text{ ó } \{c_2 < 0 \text{ y } c_3 \geq 0\}\}$
 $\text{ó } \{c_4 > 1 \text{ y } \{c_2 \geq 0 \text{ y } c_5 \leq 1\} \text{ ó } \{c_3 \geq 0 \text{ y } c_5 > 1\}\}$, con

$$c_4 = \frac{a_2 b_2 (b_2 - b_1) (b_2 - b_3)}{a_3 b_3^2 (b_3 - b_1)} \quad (4.2.11)$$

$$c_5 = \frac{b_2 - b_3}{b_3 - b_1} - \log c_4 \quad (4.2.12)$$

y τ en (4.2.9) es la única solución de (4.2.10) tal que $\tau > \frac{1}{b_2 - b_3} \log c_4$.

4. Si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ y $a_3 < 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:

- a) Cuando $b_1 < b_3 < b_2$ y $c_3 \geq 0$, donde τ en (4.2.9) es la única solución de (4.2.10).

- b) Cuando $b_1 < b_2 \leq b_3$ y además $c_6 \geq 0$ ó $\{c_6 < 0 \text{ y } c_7 \geq 0\}$, con

$$c_6 = a_1 b_1 (b_2 - b_1) + a_3 b_3^2 \quad (4.2.13)$$

y

$$c_7 = a_1 b_1 e^{(b_2 - b_1)\tau} + a_2 b_2 + a_3 b_3^2 \tau e^{-(b_3 - b_2)\tau} \quad (4.2.14)$$

donde τ es la única solución de

$$a_1 b_1 (b_2 - b_1) e^{(b_3 - b_1)\tau} + a_3 b_3^2 (1 - (b_3 - b_2)\tau) = 0. \quad (4.2.15)$$

5. Si $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ y $a_3 > 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $c_1 \geq 0$, $b_3 < b_1$ y además $c_2 \geq 0$ ó $\{c_2 < 0 \text{ y } c_3 \geq 0\}$, donde τ en (4.2.9) es la única solución de (4.2.10).

Demostración. Al igual que en la demostración del Teorema 4.1, es inmediato que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

y por tanto, es suficiente probar que la función $f(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ para que sea una verdadera función de densidad.

Veamos las condiciones de los pesos a_i y los parámetros b_i tales que la función $f(x)$ es no negativa.

Obviamente, todos los coeficientes a_i no pueden ser negativos, ya que en tal caso la función $f(x)$ sería negativa.

Análogamente, los dos coeficientes de las componentes exponenciales a_1 y a_2 no pueden ser negativos, puesto que $f(0) = a_1b_1 + a_2b_2 = c_1$ debe ser positivo. Por lo que, cuando dos coeficientes de la mixtura son negativos, el otro peso que es positivo corresponde a uno de las dos distribuciones exponenciales de la mixtura generalizada.

Además, el coeficiente a_2 no puede ser el único peso positivo, pues en este caso, la función $g_0(x) = e^{b_3x} f(x)/x$ para todo $x > 0$, dada por

$$g_0(x) = a_1b_1 \frac{e^{(b_3-b_1)x}}{x} + a_2b_2 \frac{e^{(b_3-b_2)x}}{x} + a_3b_3^2$$

tiene el mismo signo que $f(x)$. De modo que, dependiendo de la posición del parámetro b_3 con respecto a los parámetros de las distribuciones exponenciales, $b_1 < b_2$, tenemos los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_0(x) = a_3b_3^2 < 0 \quad \text{cuando } b_3 \leq b_1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_0(x) = -\infty \quad \text{cuando } b_1 < b_3 \leq b_2$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_0(x) = -\infty \quad \text{cuando } b_2 < b_3,$$

es decir, en los tres casos la función $f(x)$ sería negativa cuando $x \rightarrow \infty$, y por tanto no podría ser una función de densidad. Consecuentemente, cuando sólo uno de los pesos

es positivo, dicho peso debe ser a_1 , el correspondiente a la componente exponencial con menor parámetro.

Veamos ahora el signo de la función $f(x)$ dependiendo de los signos de los coeficientes a_i en los casos restantes.

En el caso (1), todos los a_i son positivos, entonces la función $f(x)$ es una combinación lineal convexa de funciones de densidad, y por tanto, también es función de densidad.

Para probar el caso (2), $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ y $a_3 > 0$, estudiamos la no negatividad de la función $f(x)$ para las distintas ordenaciones de los parámetros b_i , teniendo en cuenta que c_1 debe ser positivo.

En primer lugar, asumiendo que $b_3 \leq b_1$ y tomando la función $g_1(x) = e^{b_1 x} f(x)$ dada por

$$g_1(x) = a_1 b_1 + a_2 b_2 e^{-(b_2 - b_1)x} + a_3 b_3^2 x e^{(b_1 - b_3)x}$$

que tiene igual signo que $f(x)$, se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = \infty$. Además, obtenemos que su derivada

$$g_1'(x) = e^{(b_1 - b_3)x} (-a_2 b_2 (b_2 - b_1) e^{-(b_2 - b_3)x} + a_3 b_3^2 (1 + (b_1 - b_3)x))$$

es no negativa en $x > 0$, ya que $a_2 < 0$ y $b_1 < b_2$. Por lo que, esta función $g_1(x)$ es no decreciente en $x > 0$, y como se cumple que $g_1(0) = f(0) = c_1 \geq 0$, tenemos que la función $f(x)$ de la mixtura generalizada es una función de densidad.

En segundo lugar, cuando $b_1 < b_3 \leq b_2$, la función $g_1(x)$ verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = a_1 b_1 > 0$, y su derivada tiene el mismo signo que $h_1(x) = e^{-(b_1 - b_3)x} g_1'(x)$, que podemos

expresar como

$$h_1(x) = -a_2b_2(b_2 - b_1)e^{-(b_2-b_3)x} + a_3b_3^2(1 + (b_1 - b_3)x)$$

siendo $h_1(0) = -a_2b_2(b_2 - b_1) + a_3b_3^2 = c_2 > 0$, puesto que $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ y $b_1 < b_2$; y también verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} h_1(x) = -\infty$.

Además, la derivada de $h_1(x)$ puede escribirse como

$$h_1'(x) = a_2b_2(b_2 - b_1)(b_2 - b_3)e^{-(b_2-b_3)x} + a_3b_3^2(b_1 - b_3) < 0$$

por tanto, la función $h_1(x)$ es no creciente en $x > 0$, es decir, $h_1(x)$ cambia de signo positivo a negativo. Así que la función $g_1(x)$ pasa de ser creciente a decreciente, y teniendo en cuenta que $g_1(0) = c_1 \geq 0$ y su límite es no negativo cuando $x \rightarrow \infty$, tenemos que $g_1(x) \geq 0$ para todo $x > 0$, y por tanto, $f(x)$ es una función de densidad.

En tercer lugar, para $b_2 < b_3$, consideramos la función $g_2(x) = e^{b_3x}f(x)$ dada por

$$g_2(x) = a_1b_1e^{(b_3-b_1)x} + a_2b_2e^{(b_3-b_2)x} + a_3b_3^2x$$

la cual tiene el mismo signo que la función $f(x)$, siendo además, $g_2(0) = f(0) = c_1 \geq 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g_2(x) = \infty$. De modo que la primera derivada de $g_2(x)$ puede expresarse como

$$g_2'(x) = e^{(b_3-b_1)x}h_2(x) + a_3b_3^2$$

donde $h_2(x)$ esta dada por

$$h_2(x) = a_1b_1(b_3 - b_1) + a_2b_2(b_3 - b_2)e^{-(b_2-b_1)x}$$

y para esta función tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} h_2(x) = a_1b_1(b_3 - b_1) > 0$.

Además, a partir de las desigualdades $c_1 = a_1b_1 + a_2b_2 \geq 0$ y $b_1 < b_2 < b_3$, se verifica que

$$a_1b_1 \geq -a_2b_2 > -a_2b_2 \frac{b_3 - b_2}{b_3 - b_1} > 0$$

lo que implica la siguiente desigualdad

$$a_1 b_1 (b_3 - b_1) > -a_2 b_2 (b_3 - b_2) > 0$$

y de aquí, $h_2(0) = a_1 b_1 (b_3 - b_1) + a_2 b_2 (b_3 - b_2) > 0$.

Así, teniendo en cuenta que la función $h_2(x)$ es no decreciente en $x > 0$, se deduce que es no negativa. Por tanto, usando $a_3 b_3^2 > 0$, tenemos la monotonía de $g_2(x)$, y por tanto, $g_2(x) \geq 0$ para todo $x > 0$, es decir, la función $f(x)$ es una función de densidad.

Veamos ahora el caso (3), $a_1 > 0, a_2 < 0$ y $a_3 < 0$, teniendo en cuenta que es necesario que $c_1 \geq 0$. Para ello, analizamos el signo de la función $g_1(x)$ del caso anterior, según la posición del parámetro b_3 con respecto a los parámetros $b_1 < b_2$ de las distribuciones exponenciales.

Cuando $b_3 \leq b_1$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = -\infty$, y por tanto la función $f(x)$ no puede ser una función de densidad.

Para $b_3 > b_1$, obtenemos que $g_1(0) = c_1 \geq 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = a_1 b_1 > c_1$. Además, su primera derivada $g_1'(x) = e^{-(b_3 - b_1)x} h_1(x)$ tiene el mismo signo que la función $h_1(x)$, siendo $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1'(x) = 0$ y $h_1(0) = g_1'(0) = c_2$.

Por lo que, para determinar la monotonía de la función $g_1(x)$, es decir, el signo de $h_1(x)$, estudiamos el comportamiento de $h_1(x)$ en ambos casos: $b_3 \geq b_2$ y $b_1 < b_3 < b_2$.

En este sentido, el límite de la función $h_1(x)$ es infinito cuando $x \rightarrow \infty$ y su derivada $h_1'(x)$ es positiva cuando $b_3 \geq b_2$, por lo que $h_1(x)$ es creciente en $x > 0$, y en particular, $h_1(x) \geq h_1(0) = c_2$.

Consecuentemente, si $c_2 \geq 0$ entonces la función $h_1(x)$ es positiva y la función $g_1(x)$ es creciente en $x > 0$, y por tanto, $f(x)$ es una función de densidad.

Asimismo, si $c_2 < 0$ entonces la función $h_1(x)$ cambia de signo negativo a positivo, es decir, la función $g_1(x)$ alcanza su mínimo en τ , donde τ es la única solución de $h_1(x) = 0$. Teniendo en cuenta que $g_1(\tau) \geq 0$ es equivalente a la condición $c_3 \geq 0$, obtenemos que $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $c_3 \geq 0$ cuando $c_2 < 0$.

No obstante, $f(x)$ no puede ser una función de densidad cuando $c_3 < 0$, ya que la función $g_1(x)$ cambia de signo en este caso.

Por otro lado, cuando $b_1 < b_3 < b_2$, se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} h_1(x) = \infty$ y $h'_1(x)$ es creciente. Por tanto, si $h'_1(0) \geq 0$ se tiene que $h'_1(x) \geq 0$, lo que implica que la función $h_1(x)$ es creciente, y utilizando la equivalencia entre $h'_1(0) \geq 0$ y $c_4 \leq 1$, a través del desarrollo anterior, tenemos que $f(x)$ es una función de densidad cuando $c_2 \geq 0$ ó $\{c_2 < 0 \text{ y } c_3 \geq 0\}$.

Además, cuando $c_4 > 1$, se tiene que la derivada de $h_1(x)$, cambia de signo negativo a positivo, es decir, $h_1(x)$ decrece y después crece, y por tanto, $h_1(x)$ alcanza su mínimo en

$$\tau_0 = \frac{1}{b_2 - b_3} \log \frac{a_2 b_2 (b_2 - b_1) (b_2 - b_3)}{a_3 b_3^2 (b_3 - b_1)}.$$

Asimismo, teniendo en cuenta que la desigualdad $h_1(\tau_0) \geq 0$ es equivalente a la condición $c_5 \leq 1$, obtenemos que $h_1(x)$ es positiva cuando $c_5 \leq 1$ o bien $h_1(x)$ es primero positiva, después negativa, y por último positiva cuando $c_5 > 1$.

Por un lado, la función $g_1(x)$ es creciente cuando $c_4 > 1$ y $c_5 \leq 1$, y así, añadiendo $c_2 \geq 0$, deducimos que $f(x)$ es una función de densidad.

Además, la función $g_1(x)$ pasa de ser creciente a decreciente y vuelve a cambiar a creciente cuando $c_4 > 1$ y $c_5 > 1$, o equivalentemente, $g_1(x)$ alcanza su mínimo en τ , donde τ es la única solución de $h_1(x) = 0$ tal que $\tau > \tau_0$, y por consiguiente, añadiendo

$c_3 \geq 0$, se tiene que $f(x)$ es una función de densidad.

En el caso (4), $a_1 > 0, a_2 > 0$ y $a_3 < 0$, se comprueba fácilmente que $c_1 > 0$. De manera que analizamos cuando $f(x)$ es positiva para las diferentes situaciones del parámetro b_3 .

Para $b_3 \leq b_1$, obtenemos que el límite de la función $g_1(x) = e^{b_1 x} f(x)$ es menos infinito cuando $x \rightarrow \infty$, y por tanto, $f(x)$ no puede ser una función de densidad cuando $b_3 \leq b_1$.

Ahora discutiremos el signo de la función $g_1(x)$ cuando $b_1 < b_3$. Así, para $b_3 > b_1$, tenemos que $g_1(0) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = c_1 > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = a_1 b_1 > 0$. Además, el límite de su derivada depende de la localización de b_3 con respecto a b_2 .

De modo que cuando $b_1 < b_3 < b_2$, consideramos la función $h_1(x) = e^{(b_3 - b_1)x} g_1'(x)$ que tiene igual signo que $g_1(x)$, en donde se verifica que $h_1(0) = -a_2 b_2 (b_2 - b_1) + a_3 b_3^2 < 0$ y $h_1(x)$ converge a infinito cuando $x \rightarrow \infty$. Además, su primera derivada $h_1'(x) > 0$ para todo $x > 0$, es decir, $h_1(x)$ es creciente en $x > 0$, y por consiguiente, la función $g_1(x)$ pasa de ser decreciente a creciente, o equivalentemente, $g_1(x)$ alcanza su mínimo en τ , donde τ es la única solución de $h_1(x) = 0$. Por tanto, $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $c_3 \geq 0$.

Por otro lado, cuando $b_3 \geq b_2$, consideramos la función $g_3(x) = e^{b_2 x} f(x)$ dada por

$$g_3(x) = a_1 b_1 e^{(b_2 - b_1)x} + a_2 b_2 + a_3 b_3^2 x e^{-(b_3 - b_2)x}$$

la cual tiene el mismo signo que $f(x)$, y además verifica que $g_3(0) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = c_1 > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g_3(x) = \infty$. Asimismo, la primera derivada de $g_3(x)$ tiene igual signo que la

función $h_3(x) = e^{(b_3-b_2)x}g_3'(x)$, dada por

$$h_3(x) = a_1b_1(b_2 - b_1)e^{(b_3-b_1)x} + a_3b_3^2(1 - (b_3 - b_2)x)$$

siendo $h_3(0) = a_1b_1(b_2 - b_1) + a_3b_3^2 = c_6$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h_3(x) = \infty$, puesto que $b_3 \geq b_2$.

Además, esta función $h_3(x)$ es creciente en $x > 0$, ya que

$$h_3'(x) = a_1b_1(b_2 - b_1)(b_3 - b_1)e^{(b_3-b_1)x} - a_3b_3^2(b_3 - b_2) \geq 0$$

Por tanto, si $c_6 \geq 0$, entonces la función $h_3(x) \geq 0$ para todo $x > 0$, es decir, $g_3(x)$ es creciente en $x > 0$, y teniendo en cuenta que $c_1 \geq 0$, tenemos que $f(x)$ es una función de densidad.

En caso contrario, si $c_6 < 0$, entonces $h_3(x)$ cambia de signo negativo a positivo, y de aquí, $g_3(x)$ pasa de ser decreciente a creciente, es decir, $g_3(x)$ alcanza su mínimo en τ , donde τ es la única solución de $h_3(x) = 0$. Teniendo en cuenta que la desigualdad $g_3(\tau) \geq 0$ equivale a la condición $c_7 \geq 0$, obtenemos que $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $c_7 \geq 0$ cuando $c_6 < 0$. Sin embargo, $f(x)$ no puede ser una función de densidad cuando $c_7 < 0$, pues en tal caso $g_3(x)$ cambia de signo.

Finalmente, estudiamos el caso (5), $a_1 < 0, a_2 > 0$ y $a_3 > 0$, que corresponde a la única posibilidad de que a_1 sea negativo y donde también es necesaria la condición $c_1 \geq 0$ para que $f(x)$ pueda ser función de densidad.

Tomando otra vez la función $g_1(x) = e^{b_1x}f(x)$, tenemos que ambas funciones, $f(x)$ y $g_1(x)$, tienen igual signo. Sin embargo, su límite depende de la posición de b_3 con respecto a b_1 .

En particular, para $b_3 > b_1$, obtenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = a_1b_1 < 0$, y por tanto, $f(x)$ no puede ser una función de densidad.

Para $b_3 \leq b_1$, se puede comprobar que $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = \infty$ y $g_1(0) = c_1 \geq 0$. Asimismo, su derivada tiene el mismo signo que la función $h_4(x) = e^{(b_2-b_1)x} g_1'(x)$ dada por

$$h_4(x) = -a_2 b_2 (b_2 - b_1) + a_3 b_3^2 e^{(b_2-b_3)x} (1 + (b_1 - b_3)x)$$

en donde $h_4(0) = -a_2 b_2 (b_2 - b_1) + a_3 b_3^2 = c_2$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h_4(x) = \infty$. Además, su derivada es

$$h_4'(x) = a_3 b_3^2 e^{(b_2-b_3)x} ((b_2 - b_3) (1 + (b_3 - b_1)x) + (b_1 - b_3)) \geq 0$$

o equivalentemente, la función $h_4(x)$ es creciente en $x > 0$. De modo que, cuando $c_2 \geq 0$, tenemos que $h_4(x)$ es positiva, es decir, la función $g_1(x)$ es creciente en $x > 0$, y por consiguiente, $f(x)$ es una función de densidad.

Por otro lado, cuando $c_2 < 0$, obtenemos que $g_1(x)$ pasa de ser decreciente a creciente, es decir, $g_1(x)$ alcanza su mínimo en τ , donde τ es la única solución de $h_4(x) = 0$. Así, teniendo en cuenta que $h_4(x) = 0$ es equivalente a $h_1(x) = 0$, y que la desigualdad $g_1(\tau) \geq 0$ equivale a la condición $c_3 \geq 0$ donde τ en (4.2.9) es la única solución de (4.2.10), obtenemos que $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si $c_3 \geq 0$ cuando $c_2 < 0$. No obstante, $f(x)$ no puede ser una función de densidad cuando $c_3 < 0$, puesto que en tal caso $g_1(x)$ cambia de signo. \square

Obsérvese que en ambos casos, $\nu = \alpha_3 \neq \alpha_4$ y $\nu = \alpha_4 \neq \alpha_3$, mediante (1) ó (2) del Teorema 4.1, puede comprobarse sencillamente la función de densidad del estadístico máximo del modelo FPBVE.

4.2.2. Logconcauidad del estadístico máximo del modelo exponencial bivalente de Friday y Patil

En este apartado analizamos la logconcauidad de la función de supervivencia del estadístico máximo del modelo FPBVE, tal como vimos en la Sección 1.5, esto es equivalente a estudiar la monotonía de la razón de azar o tasa de fallo.

Para ello, necesitamos la función de supervivencia del estadístico máximo del modelo FPBVE. Teniendo en cuenta que su distribución está determinada a través de (4.2.1), para cada valor del parámetro ν , obtenemos que su función de supervivencia es

$$S_{(2)}(x) = \begin{cases} \phi_1 e^{-\alpha_4 x} + \phi_2 e^{-\alpha_3 x} - (1 - \phi_1 - \phi_2) e^{-\nu x} & \text{si } \nu \neq \alpha_3, \alpha_4 \\ \phi_1 e^{-\alpha_4 x} + (1 - \phi_1) e^{-\nu x} + \alpha_0 \alpha_2 x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_3 \neq \alpha_4 \\ \phi_2 e^{-\alpha_3 x} + (1 - \phi_2) e^{-\nu x} + \alpha_0 \alpha_1 x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_4 \neq \alpha_3 \\ e^{-\nu x} + \alpha_0 \nu x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_3 = \alpha_4 \end{cases} \quad (4.2.16)$$

así como la primera derivada de $f_{(2)}(x)$, que coincide con menos la segunda derivada de $S_{(2)}(x)$,

$$f'_{(2)}(x) = \begin{cases} -\phi_1 \alpha_4^2 e^{-\alpha_4 x} - \phi_2 \alpha_3^2 e^{-\alpha_3 x} - (1 - \phi_1 - \phi_2) \nu^2 e^{-\nu x} & \text{si } \nu \neq \alpha_3, \alpha_4 \\ -\phi_1 \alpha_4^2 e^{-\alpha_4 x} - ((1 - \phi_1) \nu^2 - 2\alpha_0 \alpha_2 \nu) e^{-\nu x} - \alpha_0 \alpha_2 \nu^2 x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_3 \neq \alpha_4 \\ -\phi_2 \alpha_3^2 e^{-\alpha_3 x} - ((1 - \phi_2) \nu^2 - 2\alpha_0 \alpha_1 \nu) e^{-\nu x} - \alpha_0 \alpha_1 \nu^2 x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_4 \neq \alpha_3 \\ -(1 - 2\alpha_0) \nu^2 e^{-\nu x} - \alpha_0 \nu^3 x e^{-\nu x} & \text{si } \nu = \alpha_3 = \alpha_4 \end{cases} \quad (4.2.17)$$

donde todos los parámetros α_i son positivos y $\alpha_0 \leq 1$, siendo $\nu = \alpha_1 + \alpha_2$, $\phi_1 = \alpha_0 \alpha_1 / (\nu - \alpha_4)$ y $\phi_2 = \alpha_0 \alpha_2 / (\nu - \alpha_3)$. Además, al comienzo de esta sección, destacamos

que sólo en el caso $\nu \neq \alpha_3, \alpha_4$, el estadístico máximo es una mixtura generalizada de tres distribuciones exponenciales, y sus propiedades de logconcauidad o fiabilidad pueden verse en la Sección 2.4.

Sin embargo, en los últimos tres casos, la función $f_{(2)}(x)$ es una mixtura generalizada de una distribución gamma(2) y una o dos distribuciones exponenciales. Por lo que, estudiamos aquí sus propiedades según los valores de α_3, α_4 y ν .

Proposición 4.3 *Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional según un modelo FPBVE con $\nu = \alpha_3 \neq \alpha_4$. Entonces, su estadístico máximo tiene función de supervivencia logcóncava para $\nu < \alpha_4$, y logconvexa para $\nu \geq \alpha_4 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2 / \alpha_0\alpha_1$. En otro caso, cambia su logconcauidad.*

Demostración. Para clasificar la logconcauidad del estadístico máximo T_2 de este modelo FPBVE, a partir del Lema 1.1, y las expresiones (4.2.1), (4.2.16) y (4.2.17), calculamos

$$\begin{aligned} g(x) &= f'_{(2)}(x) \cdot S_{(2)}(x) + (f_{(2)}(x))^2 \\ &= (-\phi_1\alpha_4^2 e^{-\alpha_4 x} - ((1 - \phi_1)\nu^2 - 2\alpha_0\alpha_2\nu) e^{-\nu x} - \alpha_0\alpha_2\nu^2 x e^{-\nu x}) \\ &\quad \cdot (\phi_1 e^{-\alpha_4 x} + (1 - \phi_1) e^{-\nu x} + \alpha_0\alpha_2 x e^{-\nu x}) \\ &\quad + (\phi_1\alpha_4 e^{-\alpha_4 x} + ((1 - \phi_1)\nu - \alpha_0\alpha_2) e^{-\nu x} + \alpha_0\alpha_2\nu x e^{-\nu x})^2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f'_{(2)}(x) \cdot S_{(2)}(x) &= -\phi_1^2\alpha_4^2 e^{-2\alpha_4 x} - \phi_1 \left((1 - \phi_1) (\alpha_4^2 + \nu^2) - 2\alpha_0\alpha_2\nu \right) e^{-(\alpha_4 + \nu)x} \\ &\quad - \phi_1\alpha_0\alpha_2 (\alpha_4^2 + \nu^2) x e^{-(\alpha_4 + \nu)x} - \left((1 - \phi_1)^2\nu^2 - 2(1 - \phi_1)\alpha_0\alpha_2\nu \right) e^{-2\nu x} \\ &\quad - 2 \left((1 - \phi_1)\nu - \alpha_0\alpha_2 \right) \alpha_0\alpha_2\nu x e^{-2\nu x} - \alpha_0^2\alpha_2^2\nu^2 x^2 e^{-2\nu x} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (f_{(2)}(x))^2 &= \phi_1^2 \alpha_4^2 e^{-2\alpha_4 x} + 2\phi_1 \alpha_4 ((1 - \phi_1)\nu - \alpha_0 \alpha_2) e^{-(\alpha_4 + \nu)x} \\ &\quad + 2\phi_1 \alpha_4 \alpha_0 \alpha_2 \nu x e^{-(\alpha_4 + \nu)x} + ((1 - \phi_1)\nu - \alpha_0 \alpha_2)^2 e^{-2\nu x} \\ &\quad + 2((1 - \phi_1)\nu - \alpha_0 \alpha_2) \alpha_0 \alpha_2 \nu x e^{-2\nu x} + \alpha_0^2 \alpha_2^2 \nu^2 x^2 e^{-2\nu x} \end{aligned}$$

por lo que, $g(x)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha_0^2 \alpha_2^2 e^{-2\nu x} - \phi_1 \alpha_0 \alpha_2 (\nu - \alpha_4)^2 x e^{-(\alpha_4 + \nu)x} \\ &\quad - \phi_1 ((1 - \phi_1)(\nu - \alpha_4)^2 - 2\alpha_0 \alpha_2 (\nu - \alpha_4)) e^{-(\alpha_4 + \nu)x} \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha_0^2 \alpha_2^2 e^{-2\nu x} - \phi_1 ((1 - \phi_1)(\nu - \alpha_4)^2 - 2\alpha_0 \alpha_2 (\nu - \alpha_4)) e^{-(\alpha_4 + \nu)x} \\ &\quad - \phi_1 \alpha_0 \alpha_2 (\nu - \alpha_4)^2 x e^{-(\alpha_4 + \nu)x} \end{aligned}$$

Para discutir el signo de la función $g(x)$, es decir, la logconcauidad de $S_{(2)}(x)$, observar que esta función $g(x)$ tiene el mismo signo que $h(x) = e^{2\nu x} g(x)$, dada por

$$\begin{aligned} h(x) &= \alpha_0^2 \alpha_2^2 - \phi_1 \alpha_0 \alpha_2 (\nu - \alpha_4)^2 \left(\frac{(1 - \phi_1)(\nu - \alpha_4) - 2\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_0 \alpha_2 (\nu - \alpha_4)} + x \right) e^{(\nu - \alpha_4)x} \\ &= \alpha_0^2 \alpha_2^2 - \alpha_0 \alpha_1 (\nu - \alpha_4 - \alpha_0 \alpha_1 - 2\alpha_0 \alpha_2) e^{(\nu - \alpha_4)x} - \phi_1 \alpha_0 \alpha_2 (\nu - \alpha_4)^2 x e^{(\nu - \alpha_4)x} \end{aligned}$$

donde

$$h(0) = \alpha_0^2 \alpha_2^2 - \phi_1 (\nu - \alpha_4) ((1 - \phi_1)(\nu - \alpha_4) - 2\alpha_0 \alpha_2)$$

y teniendo en cuenta que $\phi_1 (\nu - \alpha_4) = \alpha_0 \alpha_1$, se puede reescribir como

$$h(0) = \alpha_0 \alpha_1 \left(\alpha_4 + \frac{(\alpha_0 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_1)^2}{\alpha_0 \alpha_1} - \nu \right)$$

Por tanto, el signo de $h(0)$ depende de la posición del parámetro ν con respecto a $\alpha_4 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2 / \alpha_0\alpha_1$, tal que $h(0) > 0$ cuando $\nu < \alpha_4 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2 / \alpha_0\alpha_1$, y $h(0) < 0$ cuando $\nu > \alpha_4 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2 / \alpha_0\alpha_1$. Además, la derivada de $h(x)$ está dada por

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\phi_1\alpha_0\alpha_2(\nu - \alpha_4)^3 \left(\frac{(1 - \phi_1)(\nu - \alpha_4) - 2\alpha_0\alpha_2}{\alpha_0\alpha_2(\nu - \alpha_4)} + x \right) e^{(\nu - \alpha_4)x} \\ &\quad - \phi_1\alpha_0\alpha_2(\nu - \alpha_4)^2 e^{(\nu - \alpha_4)x} \\ &= -\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2(\nu - \alpha_4)^2 \left(\frac{\nu - \alpha_4 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2}{\alpha_0\alpha_2(\nu - \alpha_4)} + x \right) e^{(\nu - \alpha_4)x} \end{aligned}$$

En este sentido, si $\nu > \alpha_4$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(1 - \phi_1)(\nu - \alpha_4) - 2\alpha_0\alpha_2}{\alpha_0\alpha_2(\nu - \alpha_4)} + x \right) e^{(\nu - \alpha_4)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{(\nu - \alpha_4)x} = \infty$$

y por tanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$.

Además, cuando $\nu < \alpha_4 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2 / \alpha_0\alpha_1$, tenemos que $h(0) > 0$, y por consiguiente, $h(x)$ cambia de signo, es decir, $g(x)$ cambia de signo, de modo que la función de supervivencia de T_2 cambia su logconcauidad.

Sin embargo, cuando $\nu \geq \alpha_4 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2 / \alpha_0\alpha_1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \nu - \alpha_4 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2 &\geq \frac{(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2}{\alpha_0\alpha_1} - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2 \\ &= \frac{\alpha_0^2\alpha_2^2}{\alpha_0\alpha_1} + \alpha_0\alpha_2 > 0 \end{aligned}$$

por lo que, $h'(x) < 0$, es decir, $h(x)$ es decreciente en $x > 0$. Entonces, $h(x) \leq h(0) \leq 0$, o equivalentemente, $g(x)$ es negativa en $x > 0$, es decir, la función de supervivencia de T_2 es logconvexa.

Por otro lado, si $\nu < \alpha_4$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \alpha_0^2\alpha_2^2 > 0$. En particular, $\nu < \alpha_4 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2 / \alpha_0\alpha_1$, por lo que $h(0) > 0$. Asimismo, teniendo en cuenta que

$\nu < \alpha_4 < \alpha_4 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1$, obtenemos que

$$\frac{\nu - \alpha_4 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2}{\alpha_0\alpha_2(\nu - \alpha_4)} > 0$$

y por consiguiente, $h'(x) < 0$ para todo $x > 0$, es decir, $h(x)$ es decreciente en $x > 0$.

Así que $h(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \alpha_0^2\alpha_2^2 > 0$, lo que implica que $h(x) \geq 0$, es decir, $g(x)$ es positiva en $x > 0$, o equivalentemente, T_2 tiene supervivencia logcóncava. \square

Proposición 4.4 *Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional según un modelo FPBVE con $\nu = \alpha_4 \neq \alpha_3$. Entonces, su estadístico máximo tiene función de supervivencia logcóncava para $\nu < \alpha_3$, y logconvexa para $\nu \geq \alpha_3 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1)^2 / \alpha_0\alpha_1$. En otro caso, cambia su logconcavidad.*

Demostración. Este caso se comprueba de forma totalmente análoga al caso $\nu = \alpha_3 \neq \alpha_4$, cambiando en el razonamiento los parámetros $(\alpha_2, \alpha_4, \phi_1)$ por los parámetros $(\alpha_1, \alpha_3, \phi_2)$. \square

Proposición 4.5 *Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional según un modelo FPBVE con $\nu = \alpha_3 = \alpha_4$. Entonces, su estadístico máximo tiene función de supervivencia logcóncava.*

Demostración. A partir del Lema 1.1, y de las expresiones (4.2.1), (4.2.16) y (4.2.17), tenemos que

$$\begin{aligned} g(x) &= f'_{(2)}(x) \cdot S_{(2)}(x) + (f_{(2)}(x))^2 \\ &= \left(-(1 - 2\alpha_0)\nu^2 e^{-\nu x} - \alpha_0\nu^3 x e^{-\nu x} \right) \left(e^{-\nu x} + \alpha_0\nu x e^{-\nu x} \right) \\ &\quad + \left((1 - \alpha_0)\nu e^{-\nu x} + \alpha_0\nu^2 x e^{-\nu x} \right)^2 \\ &= \alpha_0^2\nu^2 e^{-2\nu x} \end{aligned}$$

siendo esta función no negativa para todo x , en particular para $x > 0$, y por consiguiente, la función de supervivencia de T_2 es logcóncava o su tasa de fallo es creciente.

□

Obsérvese que sólo en este último resultado, se podría aplicar el Caso 4 de Gupta y Warren (2001), puesto que se trata de una mixtura (mixtura no generalizada), y nuestra clasificación coincide con la de ellos.

4.3. Extensiones a modelos Weibull bivariantes

En esta sección, vemos algunas extensiones bivariantes más conocidas del modelo de probabilidad Weibull, en el sentido de Hanagal (1996), (2004) y (2005), a través de la transformación $X_i = Y_i^{1/c}$ con $c > 0$ para $i = 1, 2$, siendo (Y_1, Y_2) uno de los modelos exponenciales bivariantes de la Sección 1.4.

Obsérvese que los estadísticos ordenados mínimo y máximo de estos modelos Weibull bivariantes, son predominantemente mixturas generalizadas de distribuciones Weibull, lo que motiva el estudio de la caracterización de dichas mixturas generalizadas de distribuciones Weibull.

En este sentido, damos las condiciones basadas en los coeficientes y parámetros de las mixturas generalizadas de dos y tres Weibull, para que sean verdaderos modelos de probabilidad; resultados que extienden las caracterizaciones de Bartholomew (1969) y Baggs y Nagaraja (1996), y flexibilizan la aplicación de las mixturas y la estimación de sus pesos en las situaciones modelizadas mediante mixturas.

Para finalizar esta sección, estudiamos la logconcavidad de la función de super-

vivencia de las mixturas generalizadas de dos distribuciones Weibull, aplicando los resultados en la clasificación de los estadísticos extremos de algunos modelos Weibull bivariantes.

4.3.1. Modelos Weibull bivariantes

Veamos ahora algunos modelos Weibull bivariantes, así como sus estadísticos extremos.

Definición 4.3 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo Weibull bivalente tipo Gumbel I (GBVW-I), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = e^{-(x_1^c + x_2^c)} (1 + \alpha (1 - e^{-x_1^c}) (1 - e^{-x_2^c})) \quad \text{para todo } x_1, x_2 > 0$$

siendo $|\alpha| \leq 1$ y $c > 0$.

Obsérvese que para $\alpha = 0$, este modelo GBVW-I corresponde a dos componentes independientes e idénticamente distribuidas con distribuciones Weibull.

Asimismo, los estadísticos mínimo y máximo de este modelo GBVW-I tienen funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = cx^{c-1} (2(1 + \alpha)e^{-2x^c} - 6\alpha e^{-3x^c} + 4\alpha e^{-4x^c})$$

y

$$f_{(2)}(x) = cx^{c-1} (2e^{-x^c} - 2(1 + \alpha)e^{-2x^c} + 6\alpha e^{-3x^c} - 4\alpha e^{-4x^c})$$

en donde se observa que son mixturas generalizadas de Weibull.

Definición 4.4 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo Weibull bivalente tipo Gumbel II (GBVW-II), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \exp \left(- \left[\left(\frac{x_1^c}{\theta_1} \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{x_2^c}{\theta_2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^\delta \right) \quad \text{para todo } x_1, x_2 > 0$$

siendo $\theta_1, \theta_2 > 0$, $0 < \delta \leq 1$ y $c > 0$.

Nótese que si $\delta = 1$, se obtiene el modelo Weibull bivalente con marginales Weibull e independientes.

Además, las funciones de densidad de sus estadísticos ordenados T_1 y T_2 son

$$f_{(1)}(x) = \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c}$$

y

$$f_{(2)}(x) = c x^{c-1} \left(\frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x^c}{\theta_1}} + \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x^c}{\theta_2}} - \lambda e^{-\lambda x^c} \right)$$

siendo

$$\lambda = \left[\left(\frac{1}{\theta_1} \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{\theta_2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^\delta$$

las cuales corresponden a un modelo Weibull y una mixtura generalizada de Weibull, respectivamente.

Definición 4.5 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo Weibull bivalente tipo Marshall y Olkin (MOBVW), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \exp(-\lambda_1 x_1^c - \lambda_2 x_2^c - \lambda_{12} \max(x_1^c, x_2^c)) \quad \text{para todo } x_1, x_2 > 0$$

donde $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_{12} > 0$ y $c > 0$.

Para este modelo MOB VW, se obtienen las siguientes funciones de densidad de T_1 y T_2

$$f_{(1)}(x) = \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c}$$

y

$$f_{(2)}(x) = c x^{c-1} \left((\lambda_1 + \lambda_{12}) e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x^c} + (\lambda_2 + \lambda_{12}) e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x^c} - \lambda e^{-\lambda x^c} \right)$$

donde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$, es decir, T_1 y T_2 tienen distribuciones Weibull y mixtura generalizada de Weibull, respectivamente.

Definición 4.6 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo Weibull bivariante tipo Friday y Patil (FPBVW), si su función de supervivencia está definida por

$$S(x_1, x_2) = \begin{cases} \phi_1 e^{-(v-\alpha_4)x_1^c - \alpha_4 x_2^c} + (1 - \phi_1) e^{-v x_2^c} & \text{si } 0 < x_1 < x_2 \\ \phi_2 e^{-(v-\alpha_3)x_2^c - \alpha_3 x_1^c} + (1 - \phi_2) e^{-v x_1^c} & \text{si } 0 < x_2 < x_1 \end{cases}$$

donde $v = \alpha_1 + \alpha_2$, $\phi_1 = \frac{\alpha_0 \alpha_1}{v - \alpha_4}$, $\phi_2 = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{v - \alpha_3}$, $\alpha_i > 0$ para $i = 0, \dots, 4$, y $c > 0$, siendo $v \neq \alpha_3, \alpha_4$.

A partir de este modelo FPBVW, sus estadísticos mínimo y máximo tiene funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c}$$

y

$$f_{(2)}(x) = c x^{c-1} \left(\phi_1 \alpha_4 e^{-\alpha_4 x^c} + \phi_2 \alpha_3 e^{-\alpha_3 x^c} + (1 - \phi_1 - \phi_2) v e^{-v x^c} \right)$$

las cuales son Weibull y mixtura generalizada de Weibull, respectivamente.

Definición 4.7 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que sigue un modelo Weibull bivalente tipo Raftery (RBVW) con parámetros $\lambda > 0$, π_1 , π_2 , p_{11} y $c > 0$ si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^1 p_{ij} S_{ij}(x_1, x_2)$$

siendo

$$\begin{aligned} S_{00}(x_1, x_2) &= e^{-\frac{\lambda x_1^c}{1-\pi_1}} e^{-\frac{\lambda x_2^c}{1-\pi_2}} \\ S_{01}(x_1, x_2) &= e^{-\frac{\lambda x_1^c}{1-\pi_1}} \frac{e^{-\lambda x_2^c}}{\pi_2} - \frac{1-\pi_2}{\pi_2} e^{-\frac{\lambda x_1^c}{1-\pi_1}} e^{-\frac{\lambda x_2^c}{1-\pi_2}} \\ S_{10}(x_1, x_2) &= e^{-\frac{\lambda x_2^c}{1-\pi_2}} \frac{e^{-\lambda x_1^c}}{\pi_1} - \frac{1-\pi_1}{\pi_1} e^{-\frac{\lambda x_1^c}{1-\pi_1}} e^{-\frac{\lambda x_2^c}{1-\pi_2}} \\ S_{11}(x_1, x_2) &= \frac{e^{-\lambda x_{(2)}^c}}{\pi_{(2)}} - \frac{(1-\pi_{(2)})^2}{\pi_{(2)}(1-\pi_1\pi_2)} e^{-\frac{\lambda}{1-\pi_{(2)}}(x_{(2)}^c - \pi_{(2)}x_{(1)}^c)} \\ &\quad - \frac{(1-\pi_1)(1-\pi_2)}{1-\pi_1\pi_2} e^{-\frac{\lambda x_1^c}{1-\pi_1}} e^{-\frac{\lambda x_2^c}{1-\pi_2}} \end{aligned}$$

donde $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$, $x_{(2)} = \max(x_1, x_2)$, $\pi_i = P(I_i = 1)$ para $i = 1, 2$, $p_{ij} = P(I_1 = i, I_2 = j)$ para $i, j = 0, 1$ e $\{I_1, I_2\}$ son variables aleatorias indicadores independientes de las variables aleatorias Weibull de las marginales con parámetros $\lambda > 0$ y $c > 0$.

No obstante, al igual que en los modelos exponenciales bivariantes de Raftery, utilizaremos sus tres versiones reducidas (i) $\pi_1 = \pi_2 = p_{11} = \pi$, (ii) $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ y $p_{11} = 0$ si $\pi \leq 0.5$ y $p_{11} = 2\pi - 1$ en otro caso, y (iii) $\pi_1 = p_{11} = \gamma$, como modelos Weibull bivariantes tipo Raftery, para dar las distribuciones de sus estadísticos ordenados mínimo y máximo.

Definición 4.8 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que tiene un modelo Weibull bivalente tipo Raftery I (RBVW-I), si su función de supervivencia

viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \frac{1 - \pi}{1 + \pi} e^{-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1^c + x_2^c)} + e^{-\lambda x_{(2)}^c} \left(1 - \frac{1 - \pi}{1 + \pi} e^{-\frac{\lambda\pi}{1-\pi}(x_{(2)}^c - x_{(1)}^c)} \right)$$

para todo $x_1 > 0, x_2 > 0$, donde $c > 0, \lambda > 0$ y $0 < \pi < 1$, y siendo $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$ y $x_{(2)} = \max(x_1, x_2)$.

A partir de la función de supervivencia conjunta de la Definición 4.8, para este modelo RBVW-I, se tiene que las funciones de densidad de sus estadísticos ordenados son

$$f_{(1)}(x) = 2 \frac{\lambda c}{1 + \pi} x^{c-1} \left(\pi e^{-\lambda x^c} + e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi} x^c} \right)$$

y

$$f_{(2)}(x) = 2 \frac{\lambda c}{1 + \pi} x^{c-1} \left(e^{-\lambda x^c} - e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi} x^c} \right)$$

es decir, son mixturas y mixturas generalizadas de Weibull, respectivamente.

Definición 4.9 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que tiene un modelo Weibull bivalente tipo Raftery II (RBVW-II), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-\lambda(\frac{1}{1-\pi}x_1^c + x_2^c)} + e^{-\lambda(x_1^c + \frac{1}{1-\pi}x_2^c)} - e^{-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1^c + x_2^c)} & \text{si } 0 < \pi \leq 0.5 \\ \frac{1-\pi}{\pi} e^{-\lambda(\frac{1}{1-\pi}x_1^c + x_2^c)} + \frac{1-\pi}{\pi} e^{-\lambda(x_1^c + \frac{1}{1-\pi}x_2^c)} \\ + \frac{2\pi-1}{\pi} e^{-\lambda x_{(2)}^c} \left(1 - \frac{1-\pi}{1+\pi} e^{-\frac{\lambda\pi}{1-\pi}(x_{(2)}^c - x_{(1)}^c)} \right) \\ + \left(\frac{2(2\pi-1)}{\pi(1+\pi)} - 1 \right) e^{-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1^c + x_2^c)} & \text{si } 0.5 < \pi < 1 \end{cases}$$

para todo $x_1 > 0, x_2 > 0$, donde $c > 0, \lambda > 0$ y $0 < \pi < 1$, y siendo $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$ y $x_{(2)} = \max(x_1, x_2)$.

Asimismo, para este modelo RBVW-II, se obtienen las siguientes funciones de densidad de los estadísticos ordenados

$$f_{(1)}(x) = \begin{cases} 2\frac{\lambda c}{1-\pi}x^{c-1} \left((2-\pi)e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x^c} - e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x^c} \right) & \text{si } 0 < \pi \leq 0.5 \\ 2\lambda cx^{c-1} \left(\frac{2\pi-1}{1+\pi}e^{-\lambda x^c} + \frac{2-\pi}{\pi}e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x^c} - \frac{2-\pi}{\pi(1+\pi)}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x^c} \right) & \text{si } 0.5 < \pi < 1 \end{cases}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} 2\lambda cx^{c-1} \left(e^{-\lambda x^c} - \frac{2-\pi}{1-\pi}e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x^c} + \frac{1}{1-\pi}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x^c} \right) & \text{si } 0 < \pi \leq 0.5 \\ 2\lambda cx^{c-1} \left(\frac{2-\pi}{1+\pi}e^{-\lambda x^c} - \frac{2-\pi}{\pi}e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\pi})x^c} + \frac{2-\pi}{2\pi(1+\pi)}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x^c} \right) & \text{si } 0.5 < \pi < 1 \end{cases}$$

Obsérvese que en este caso, ambos estadísticos extremos son mixturas generalizadas de Weibull.

Definición 4.10 Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional, se dice que tiene un modelo Weibull bivalente tipo Raftery III (RBVW-III), si su función de supervivencia viene dada por

$$S(x_1, x_2) = \frac{\gamma(1-\pi_2)^2}{\pi_2(1-\gamma\pi_2)}e^{-\lambda(\frac{1}{1-\gamma}x_1^c + \frac{1}{1-\pi_2}x_2^c)} + \frac{\pi_2-\gamma}{\pi_2}e^{-\lambda(\frac{1}{1-\gamma}x_1^c + x_2^c)} \\ + \frac{\gamma}{\pi_2}e^{-\lambda x_2^c} \left(1 - \frac{(1-\pi_2)^2}{1-\gamma\pi_2}e^{-\frac{\lambda\pi_2}{1-\pi_2}(x_2^c - x_1^c)} \right)$$

para todo $x_1 > 0, x_2 > 0$, donde $c > 0, \lambda > 0, 0 < \pi_2 < 1$ y $0 < \gamma < 1$ tales que $\gamma \leq \pi_2$, y siendo $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$ y $x_{(2)} = \max(x_1, x_2)$.

Las funciones de densidad de los estadísticos mínimo y máximo de este modelo RBVW-III son

$$f_{(1)}(x) = \lambda cx^{c-1} \left(\frac{\gamma(2-\pi_2-\gamma)}{1-\gamma\pi_2}e^{-\lambda x^c} + \frac{(\pi_2-\gamma)(2-\gamma)}{\pi_2(1-\gamma)}e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\gamma})x^c} \right. \\ \left. + \frac{\gamma(1-\pi_2)(2-\gamma-\pi_2)}{\pi_2(1-\gamma\pi_2)(1-\gamma)}e^{-\lambda(\frac{1}{1-\pi_2}+\frac{1}{1-\gamma})x^c} \right)$$

y

$$f_{(2)}(x) = \lambda c x^{c-1} \left(\left(1 + \frac{(1-\gamma)^2}{1-\gamma\pi_2} \right) e^{-\lambda x^c} - \frac{(\pi_2 - \gamma)(2-\gamma)}{\pi_2(1-\gamma)} e^{-\lambda(1+\frac{1}{1-\gamma})x^c} - \frac{\gamma(1-\pi_2)(2-\gamma-\pi_2)}{\pi_2(1-\gamma\pi_2)(1-\gamma)} e^{-\lambda(\frac{1}{1-\pi_2}+\frac{1}{1-\gamma})x^c} \right)$$

que como en las versiones anteriores, son mixturas generalizadas de tres distribuciones Weibull.

Además, cuando se mantiene la igualdad entre sus parámetros $\gamma = \pi_2$, este modelo RBVW-III se reduce al modelo RBVW-I, y por tanto, sólo en tal caso los estadísticos mínimo y máximo son mixturas generalizadas de dos distribuciones Weibull.

4.3.2. Caracterización de mixturas generalizadas de Weibull

En primer lugar, veamos el concepto de mixtura generalizada de distribuciones Weibull, y posteriormente la caracterización, en el caso de dos y tres Weibull, en función de los pesos y parámetros de las componentes de estas mixturas generalizadas.

Definición 4.11 *Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X es una mixtura generalizada de distribuciones Weibull, si su función de densidad es de la forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$$

donde cada $f_i(x) = c b_i x^{c-1} e^{-b_i x^c}$ para todo $x > 0$, con $b_i > 0$, $c > 0$ y $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tales que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Evidentemente, esta definición de mixtura generalizada se podría establecer a través de su función de distribución

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i e^{-b_i x^c}$$

o de su función de supervivencia

$$S(x) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-b_i x^c}$$

Además, se suponen que todos los b_i son distintos, $i = 1, 2, \dots, n$, puesto que en caso contrario, se reduce el número de componentes de la mixtura generalizada de distribuciones Weibull hasta la cantidad de b_i distintos. Por ejemplo, en el caso de dos distribuciones Weibull idénticamente distribuidas, $b_1 = b_2 = b$, su mixtura generalizada es en realidad una distribución Weibull

$$S(x) = a_1 e^{-bx^c} + a_2 e^{-bx^c} = (a_1 + a_2) e^{-bx^c} = e^{-bx^c}$$

con la misma distribución que sus componentes.

Por consiguiente, sin pérdida de generalidad, asumimos que los parámetros de las Weibull que forman esta mixtura generalizada están ordenados: $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$.

Al igual que en las mixturas generalizadas de exponenciales, las condiciones necesarias $a_1 > 0$ y $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0$ de Stetuel (1967), siguen siendo condiciones necesarias para las mixturas generalizadas de Weibull.

Proposición 4.6 *Sea $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ una mixtura generalizada de distribuciones Weibull con parámetros $c > 0$, $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$ y $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tales que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Si $f(x)$ es una función de densidad entonces $a_1 > 0$ y $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0$.*

Demostración. En primer lugar, observar que por ser cada componente $f_i(x) = cb_i x^{c-1} e^{-b_i x^c}$ una función de densidad, es inmediato que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

por lo que la propiedad de ser una función de densidad se reduce únicamente a la positividad de la función $f(x)$, es decir, una mixtura generalizada de distribuciones Weibull es una función de densidad si y sólo si es siempre positiva.

Así, para que sea $f(x) \geq 0$ es necesario que $f(0) \geq 0$, es decir, $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0$.

Para comprobar que $a_1 > 0$ es condición necesaria, consideremos el caso contrario. Si $a_1 < 0$, la función $f(x)$ puede expresarse como

$$f(x) = cx^{c-1} e^{-b_n x^c} (a_1 b_1 e^{(b_n - b_1)x^c} + a_2 b_2 e^{(b_n - b_2)x^c} + \dots + a_n b_n)$$

siendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_1 b_1 e^{(b_n - b_1)x^c} + a_2 b_2 e^{(b_n - b_2)x^c} + \dots + a_n b_n) = -\infty$$

por lo que existe un x_0 tal que $a_1 b_1 e^{(b_n - b_1)x^c} + a_2 b_2 e^{(b_n - b_2)x^c} + \dots + a_n b_n < 0$ para todo $x > x_0$, y por tanto, $f(x) < 0$ para todo $x > x_0$, lo que contradice que $f(x)$ sea función de densidad.

Por consiguiente, es necesario que $a_1 > 0$.

Obsérvese que no se tiene en cuenta $a_1 = 0$, puesto que a_1 representa el coeficiente de la componente Weibull con menor parámetro b_i de la mixtura generalizada. \square

Además, cuando utilizamos dos o tres Weibull, en los siguientes apartados, mostramos las condiciones basadas en los pesos y parámetros para que la mixtura generalizada sea un modelo de probabilidad, condiciones equivalentes a las de Bartholomew (1969)

y Baggs y Nagaraja (1996) para los pesos y parámetros en el caso de mixturas generalizadas de dos y de tres exponenciales.

Mixturas generalizadas de dos Weibull

Teorema 4.7 *Sea $f(x) = cx^{c-1} (a_1 b_1 e^{-b_1 x^c} + a_2 b_2 e^{-b_2 x^c})$ una mixtura generalizada de dos distribuciones Weibull de parámetros $0 < b_1 < b_2 < \infty$, $c > 0$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 + a_2 = 1$ y $a_1 > 0$. Entonces, $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

1. $a_2 > 0$.
2. $a_2 < 0$ y $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq 0$.

Demostración. Obviamente, en el caso $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$, se trata de una mixtura de funciones de densidad Weibull, mixtura convexa, por lo que $f(x)$ es función de densidad.

Asimismo, cuando $a_1 > 0$ y $a_2 < 0$, la función $f(x)$ puede expresarse como

$$f(x) = cx^{c-1} e^{-b_2 x^c} (a_1 b_1 e^{(b_2-b_1)x^c} + a_2 b_2)$$

por lo que la condición $f(x) \geq 0$ es equivalente a

$$a_1 b_1 e^{(b_2-b_1)x^c} + a_2 b_2 \geq 0 \quad \text{para todo } x > 0$$

pues $c > 0$. Además, como $b_1 < b_2$, tenemos que $e^{(b_2-b_1)x^c}$ es creciente, y por consiguiente

$$a_1 b_1 e^{(b_2-b_1)x^c} + a_2 b_2 \geq a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Por tanto, si $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq 0$ tenemos que $f(x) \geq 0$, es decir, es una función de densidad.

Sin embargo, si $a_1b_1 + a_2b_2 < 0$ entonces la función $f(x)$ cambia de signo, es decir, no puede ser función de densidad. \square

Mixturas generalizadas de tres Weibull

Teorema 4.8 *Sea $f(x) = cx^{c-1} (a_1b_1e^{-b_1x^c} + a_2b_2e^{-b_2x^c} + a_3b_3e^{-b_3x^c})$ una mixtura generalizada de tres distribuciones Weibull de parámetros $0 < b_1 < b_2 < b_3 < \infty$, $c > 0$ y $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ y $a_1 > 0$.*

1. *Si $a_2, a_3 > 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad.*
2. *Si $a_2 \in \mathbb{R}$ y $a_3 < 0$, entonces $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq 0 \tag{4.3.1}$$

3. *Si $a_2 < 0$ y $a_3 > 0$. Entonces, $f(x)$ es una función de densidad si y sólo si se verifica uno de los siguientes casos:*

- a) $m \leq 1$ y (4.3.1)
- b) $m > 1$ y $\log(m_1) \geq (b_3 - b_1)(b_2 - b_3)^{-1} \log(m)$

donde

$$m = \frac{-a_3b_3(b_3 - b_1)}{a_2b_2(b_2 - b_1)} \quad y \quad m_1 = \frac{a_1b_1(b_2 - b_1)}{a_3b_3(b_3 - b_2)}.$$

Demostración. En primer lugar, si todos los coeficientes a_i son positivos, $f(x)$ es una mixtura convexa de funciones de densidad Weibull, por lo que se trata de una función de densidad.

En el caso (2), cuando $a_3 < 0$, estudiamos la no negatividad de $f(x)$ según el signo de a_2 .

Si $a_2 > 0$, la función $f(x)$ puede expresarse como $f(x) = cx^{c-1}e^{-b_3x^c}g_1(x)$, donde

$$g_1(x) = a_1b_1e^{(b_3-b_1)x^c} + a_2b_2e^{(b_3-b_2)x^c} + a_3b_3$$

teniendo $f(x)$ y $g_1(x)$ igual signo, y donde

$$g_1(0) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Además, $g_1(x)$ es creciente para $x > 0$, por lo que si $g_1(0) \geq 0$, es decir, (4.3.1), se tiene que $g_1(x) \geq 0$, y por consiguiente, $f(x)$ es una función de densidad.

Obsérvese que en el caso contrario, si $g_1(0) < 0$ entonces $g_1(x)$ cambia de signo, y por tanto $f(x)$, es decir, $f(x)$ no puede ser función de densidad.

Asimismo, si $a_2 < 0$, la función $f(x)$ tiene el mismo signo que la función $g_2(x)$, dada por

$$g_2(x) = a_1b_1 + a_2b_2e^{-(b_2-b_1)x^c} + a_3b_3e^{-(b_3-b_1)x^c}$$

puesto que $f(x) = cx^{c-1}e^{-b_1x^c}g_2(x)$. Además, $g_2(x)$ verifica que $g_2(0) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ y es creciente. Por tanto, si $g_2(0) \geq 0$, o equivalentemente (4.3.1), entonces $g_2(x) \geq 0$, y consecuentemente, $f(x)$ es una función de densidad.

En caso contrario, cuando no se cumple (4.3.1), $g_2(0) < 0$, la función $g_2(x)$ cambia de signo, y por tanto, $f(x)$ no puede ser función de densidad.

Finalmente, para probar (3), $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ y $a_3 > 0$, observamos que la función $f(x)$ tiene el mismo signo que $g_2(x)$, siendo su derivada

$$\begin{aligned} g_2'(x) &= -(b_2 - b_1)cx^{c-1}a_2b_2e^{-(b_2-b_1)x^c} - (b_3 - b_1)cx^{c-1}a_3b_3e^{-(b_3-b_1)x^c} \\ &= -cx^{c-1} \left((b_2 - b_1)a_2b_2e^{-(b_2-b_1)x^c} + (b_3 - b_1)a_3b_3e^{-(b_3-b_1)x^c} \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el signo de los sumandos entre paréntesis extendidos a toda la recta real, se deduce que existe un x_0 tal que $g_2'(x) \geq 0$ si $x \geq x_0$ y $g_2'(x) < 0$ si $x < x_0$, siendo x_0 el único punto en donde se cruzan ambos términos exponenciales

$$x_0 = \left(\frac{1}{b_3 - b_2} \log \frac{(b_3 - b_1)a_3b_3}{-(b_2 - b_1)a_2b_2} \right)^{1/c} = \left(\frac{1}{b_3 - b_2} \log m \right)^{1/c}$$

con $m = \frac{a_3b_3(b_3-b_1)}{-a_2b_2(b_2-b_1)}$.

De este modo, si $m \leq 1$, entonces la función $g_2(x)$ es creciente para todo $x > 0$, y por tanto $g_2(x) \geq g_2(0)$. En tal caso, bajo la condición (4.3.1), la función $f(x)$ es una función de densidad, y si no se cumple (4.3.1), entonces $f(x)$ cambia su signo.

Asimismo, si $m > 1$ tenemos que la función $g_2(x)$ pasa de ser decreciente a creciente en la semirecta positiva, por lo que alcanza su mínimo en $x_0 > 0$, es decir, $g_2(x) \geq g_2(x_0)$. De forma que $f(x)$ cambia de signo cuando $g_2(x_0) < 0$, y es función de densidad cuando $g_2(x_0) \geq 0$.

Además, $g_2(x_0)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} g_2(x_0) &= a_1b_1 + a_2b_2e^{-(b_2-b_1)x_0^c} + a_3b_3e^{-(b_3-b_1)x_0^c} \\ &= a_1b_1 + e^{-(b_3-b_1)x_0^c} (a_2b_2e^{-(b_2-b_3)x_0^c} + a_3b_3) \end{aligned}$$

por lo que, sustituyendo el valor de x_0 , la condición $g_2(x_0) \geq 0$ es equivalente a

$$-a_1b_1 \leq m^{-\frac{b_3-b_1}{b_3-b_2}} (a_2b_2m + a_3b_3) = a_3b_3m^{-\frac{b_3-b_1}{b_3-b_2}} \left(\frac{(b_3 - b_1)}{-(b_2 - b_1)} + 1 \right)$$

es decir,

$$m_1 = \frac{a_1 b_1 (b_2 - b_1)}{a_3 b_3 (b_3 - b_2)} \geq m^{-\frac{b_3 - b_1}{b_3 - b_2}}$$

y tomando logaritmos, se tiene que $g_2(x_0) \geq 0$ equivale a

$$\log(m_1) \geq -\frac{b_3 - b_1}{b_3 - b_2} \log(m).$$

Obsérvese que cuando $a_2 < 0$ y $a_3 > 0$, las condiciones $m > 1$ y $\log(m_1) \geq (b_3 - b_1)(b_2 - b_3)^{-1} \log(m)$ implican (4.3.1). \square

4.3.3. Logconcauidad de mixturas generalizadas de Weibull

En este apartado estudiamos la logconcauidad según los coeficientes y parámetros de las componentes Weibull de la mixtura generalizada de dos distribuciones Weibull, para lo que utilizaremos el Lema 1.1, lo que supone una extensión del Teorema 1 de Baggs y Nagaraja (1996).

Teorema 4.9 *Sea X una mixtura generalizada de dos distribuciones Weibull con función de supervivencia $S(x)$ y parámetros $b_2 > b_1 > 0$ y $c > 0$.*

1. *Si $a_2 > 0$, entonces $S(x)$ es logconvexa si y sólo si $c \leq 1$. Además, $S(x)$ es logcóncava si y sólo si se verifica que $c > 1$ y una de las siguientes condiciones:*
 - a) $c \geq 1 + \frac{a_1 a_2 (b_2 - b_1)}{a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2}$ y $a_2 < a_1 (b_1 / b_2)^{1/2}$
 - b) $w \geq 0$
2. *Si $a_2 < 0$, entonces $S(x)$ es logcóncava si y sólo si $c \geq 1$. Además, $S(x)$ es logconvexa si y sólo si se verifica que $c < 1$ y una de las siguientes condiciones:*

$$\text{a) } c \leq 1 + \frac{a_1 a_2 (b_2 - b_1)}{a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2}$$

$$\text{b) } w \geq 0$$

donde

$$w = a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 \tau^2 + a_1 a_2 (b_1 + b_2) \tau - \frac{a_1 a_2 (b_2 - b_1) c}{c - 1} \tau \log \tau \quad (4.3.2)$$

siendo

$$\tau = \frac{a_2 (b_2 - b_1)}{2a_1 b_1 (c - 1)} \left(1 + \left(1 + 4b_1 b_2 \left(\frac{c - 1}{b_2 - b_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right) > 1 \quad (4.3.3)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la función de supervivencia de una mixtura generalizada de dos Weibull

$$S(x) = a_1 e^{-b_1 x^c} + a_2 e^{-b_2 x^c}$$

y sus dos primeras derivadas

$$S'(x) = -f(x) = -c x^{c-1} (a_1 b_1 e^{-b_1 x^c} + a_2 b_2 e^{-b_2 x^c})$$

y

$$S''(x) = -c x^{c-2} ((c - 1) (a_1 b_1 e^{-b_1 x^c} + a_2 b_2 e^{-b_2 x^c}) + c x^c (a_1 b_1^2 e^{-b_1 x^c} + a_2 b_2^2 e^{-b_2 x^c}))$$

a partir del Lema 1.1, la logconcauidad de $S(x)$ está determinada por el signo de

$$S''(x)S(x) - S'(x)^2 = -c x^{c-2} e^{-(b_1+b_2)x^c} g(x)$$

donde $g(x)$ está definida por

$$\begin{aligned} g(x) &= (c - 1) a_1^2 b_1 e^{(b_2 - b_1)x^c} + (c - 1) a_2^2 b_2 e^{-(b_2 - b_1)x^c} \\ &\quad + (c - 1) a_1 a_2 (b_1 + b_2) - c x^c a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 \end{aligned}$$

es decir, si $g(x) \geq 0$ entonces $S(x)$ es logcóncava y si $g(x) \leq 0$ entonces $S(x)$ es logconvexa. En otro caso, $S(x)$ cambia de logconcavidad cuando $g(x)$ cambia de signo.

Además, del Teorema 4.7, para que dicha mixtura generalizada sea un modelo de probabilidad, se necesita que $a_2 > 0$ o bien $a_2 < 0$ y $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq 0$, es decir, cuando $a_2 < 0$ se reduce a los valores entre $\left[-\frac{a_1 b_1}{b_2}, 0\right)$. Por lo que, el análisis de la logconcavidad de $S(x)$ sólo tiene sentido para $a_2 > 0$ y $0 > a_2 \geq -\frac{a_1 b_1}{b_2}$.

Para explorar el signo de $g(x)$ en ambas regiones de a_2 , tenemos en cuenta que

$$g(0) = (c - 1) (a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2 + a_1 a_2 (b_1 + b_2))$$

cuyo signo depende de c , al igual que el $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Además, consideramos los casos $0 < c < 1$ y $c > 1$, ya que para $c = 1$, la función $g(x)$ se reduce a $g(x) = -x a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2$ y por tanto

$$S''(x)S(x) - S'(x)^2 = a_1 a_2 (b_2 - b_1)^2 e^{-(b_1 + b_2)x}$$

es positiva o negativa según el signo de a_2 , es decir, $S(x)$ es logconvexa si $a_2 > 0$ y logcóncava si $a_2 < 0$.

En primer lugar, si $a_2 > 0$, entonces X es una mixtura de distribuciones Weibull, y teniendo en cuenta que una distribución Weibull con función de supervivencia $S_W(x) = e^{bx^c}$ es logcóncava si $c \geq 1$ y logconvexa si $c \leq 1$, pues su tasa de fallo es $r_W(x) = cbx^{c-1}$. De la Proposición 1.4 sobre mixturas de distribuciones logconvexas, tenemos que $S(x)$ es logconvexa cuando $c \leq 1$. Además, para $c \leq 1$ la función de supervivencia no puede ser logcóncava, puesto que en este caso $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$.

Sin embargo, para $a_2 > 0$ cuando $c > 1$, tenemos que $g(0) > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, es decir, $S(x)$ no puede ser logconvexa.

Veamos ahora bajo que condiciones $g(x)$ mantiene su signo positivo. Para ello, calculamos su derivada dada por

$$g'(x) = c(b_2 - b_1)x^{c-1}h(x)$$

donde

$$h(x) = (c-1)a_1^2b_1e^{(b_2-b_1)x^c} - (c-1)a_2^2b_2e^{-(b_2-b_1)x^c} - a_1a_2(b_2 - b_1)$$

siendo ambas funciones, $h(x)$ y $g'(x)$, del mismo signo. Además, $h(x)$ es creciente, pues $c > 1$ y $b_1 < b_2$, por lo que

$$h(x) \geq h(0) = (c-1)(a_1^2b_1 - a_2^2b_2) - a_1a_2(b_2 - b_1)$$

y teniendo en cuenta la posición de a_2 respecto del valor $a_1(b_1/b_2)^{1/2}$, si $a_2 < a_1(b_1/b_2)^{1/2}$ entonces $h(0) \geq 0$ si y sólo si $c \geq 1 + \frac{a_1a_2(b_2-b_1)}{a_1^2b_1 - a_2^2b_2}$. No obstante, en cualquier otro caso, se mantiene que $h(0) < 0$.

Así, para $a_2 \in \left(0, a_1(b_1/b_2)^{1/2}\right)$ y $c \geq 1 + \frac{a_1a_2(b_2-b_1)}{a_1^2b_1 - a_2^2b_2}$ la función $h(x)$ es siempre positiva, o equivalentemente, $g'(x)$ es positiva, es decir, $g(x)$ es creciente, y por tanto, $g(x) \geq g(0) > 0$, de donde se obtiene que la función de supervivencia $S(x)$ es logcóncava.

En caso contrario, la función $h(x)$ cambia su signo de negativo a positivo, es decir, $g(x)$ pasa de ser decreciente a creciente, y por tanto, alcanza su mínimo en x_0 la única solución de $h(x_0) = 0$ con $x_0 > 0$. Además, teniendo en cuenta que la única solución de $h(x_0) = 0$ es $x_0 = \left(\frac{1}{b_2-b_1} \log \tau\right)^{1/c}$ donde $\tau > 1$ está dada por (4.3.3), $g(x_0) \geq 0$ es equivalente a la condición $w \geq 0$.

De forma que, si $w \geq 0$ entonces $g(x)$ es positiva, y por consiguiente, $S(x)$ es logcóncava. Sin embargo, cuando $w < 0$, la función $g(x)$ cambia de signo, es decir, la

función de supervivencia no puede ser logcóncava.

Para probar (2), $a_2 \in \left[-\frac{a_1 b_1}{b_2}, 0\right)$, cuando $c \geq 1$, observamos que $g(0) \geq 0$, puesto que si consideramos $g(0)$ como un polinomio de grado dos en a_2 es estrictamente creciente y positivo en dicho intervalo $\left[-\frac{a_1 b_1}{b_2}, 0\right)$. Además, en este caso $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, por lo que la función de supervivencia no puede ser logconvexa.

Por un lado, la derivada de $g(x)$ tiene igual signo que $h(x)$, y como en el caso anterior, $h(x)$ es creciente.

Asimismo, teniendo en cuenta que $0 < b_1 < b_2$ y $a_1 + a_2 = 1$, es fácil ver que

$$0 < a_1 b_1 = a_1 b_1 (a_1 + a_2) = a_1^2 b_1 + a_1 a_2 b_1$$

multiplicando ahora en la desigualdad $-\frac{a_1 b_1}{b_2} \leq a_2$ por $-a_2 b_2 > 0$, se tiene que $a_1 b_1 a_2 \leq -a_2^2 b_2$, de donde resulta

$$0 < a_1^2 b_1 + a_1 a_2 b_1 \leq a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2$$

y por consiguiente, $h(0) > 0$. Así, $h(x) \geq 0$ y por tanto $g(x)$ creciente, siendo $g(0) \geq 0$, es decir, la función $S(x)$ es logcóncava.

Finalmente, cuando $0 < c < 1$, observamos que $g(0) \leq 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, por lo que la función de supervivencia no puede ser logcóncava. Además, la derivada de $g(x)$ y $h(x)$ tiene el mismo signo, siendo en este caso $h(x)$ decreciente, y por tanto, $h(x) \leq h(0) = (c - 1)(a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2) - a_1 a_2 (b_2 - b_1)$.

Así, para $c \leq 1 + \frac{a_1 a_2 (b_2 - b_1)}{a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2} < 1$, tenemos que $h(0) \leq 0$, y por tanto la función $h(x)$ es siempre negativa, o equivalentemente, $g(x)$ es decreciente, y por tanto, $g(x) \leq g(0) \leq 0$, de donde se obtiene que la función de supervivencia $S(x)$ es logconvexa.

En caso contrario, la función $h(x)$ cambia su signo de positivo a negativo, es decir, $g(x)$ pasa de ser creciente a decreciente, y por tanto, alcanza su máximo en x_0 la única solución de $h(x_0) = 0$ con $x_0 > 0$. Además, teniendo en cuenta que $g(x_0) \leq 0$ es equivalente a la condición $w \geq 0$, donde $\tau > 1$ en (4.3.2) está dada por (4.3.3).

Si $w \geq 0$ entonces $g(x)$ es negativa, y por consiguiente, $S(x)$ es logconvexa. Sin embargo, cuando $w < 0$ la función $g(x)$ cambia de signo, y la función de supervivencia no puede ser logcóncava. \square

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos como corolario el Teorema 1 de Baggs y Nagaraja (1996) sobre logconcavidad de la mixtura generalizada de dos distribuciones exponenciales, que también obtuvimos en el Corolario 2.4, así como una extensión de la clasificación de la logconcavidad de los estadísticos mínimo y máximo de dos componentes exponenciales independientes e idénticamente distribuidas al caso de dos componentes Weibull.

Corolario 4.10 *Bajo las condiciones del Teorema 4.9. Si $c = 1$, entonces $S(x)$ es logconvexa (logcóncava) si y sólo si $a_2 > 0$ ($a_2 < 0$).*

Corolario 4.11 *Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional formada por dos componentes independientes y con idéntica distribución Weibull de parámetros $b > 0$ y $c > 0$, siendo sus funciones de supervivencia $S_i(x) = e^{-bx^c}$ para todo $x > 0$, $i = 1, 2$. Sean T_1 y T_2 sus estadísticos ordenados mínimo y máximo, respectivamente. Entonces,*

1. T_1 tiene función de supervivencia logconvexa para $c \leq 1$ y logcóncava para $c \geq 1$.
2. T_2 tiene función de supervivencia logcóncava si y sólo si $c \geq 1$. Además, T_2 tiene función de supervivencia logconvexa si y sólo si se verifica que $c < 1$ y $w_1 \geq 0$,

donde

$$w_1 = 1 + 2\tau^2 - 3\tau - \frac{c}{1-c}\tau \log \tau$$

$$\text{siendo } \tau = \frac{1+(1+8(1-c)^2)^{1/2}}{4(1-c)}.$$

Demostración. A partir de la función de supervivencia de la variable (X_1, X_2) , bajo independencia e idéntica distribución, dada por

$$S(x_1, x_2) = S_1(x_1)S_2(x_2) = e^{-b(x_1^c + x_2^c)}$$

y utilizando (1.1.2) y (1.1.3), se obtiene la función de supervivencia de sus estadísticos mínimo y máximo

$$S_{(1)}(x) = e^{-2bx^c}$$

y

$$S_{(2)}(x) = 2e^{-bx^c} - e^{-2bx^c}$$

Por tanto, el estadístico mínimo tiene distribución Weibull de parámetros $2b > 0$ y $c > 0$, por lo que su supervivencia es logconvexa para $c \leq 1$ y logcóncava para $c \geq 1$.

Asimismo, el estadístico máximo es una mixtura generalizada de dos Weibull con pesos $a_1 = 2$ y $a_2 = -1$, y parámetros $b_1 = b$ y $b_2 = 2b$, por lo que aplicando (2) del Teorema 4.9, tenemos que $S_{(2)}(x)$ es logcóncava si y sólo si $c \geq 1$. Además, teniendo en cuenta que $w \geq 0$ en este caso es equivalente a $w_1 \geq 0$, $S_{(2)}(x)$ es logconvexa si y sólo si $c < 1$ y $w_1 \geq 0$, siendo en τ la única solución de $2\tau^2 - \frac{1}{1-c}\tau - 1 = 0$ con $\tau > 1$. \square

4.3.4. Aplicación a los estadísticos extremos

En este apartado, vemos la aplicación de la clasificación de la logconcavidad de mixturas generalizadas de dos distribuciones Weibull del apartado anterior, a los es-

tadísticos ordenados mínimo y máximo de algunos modelos Weibull bivariantes dados al inicio de esta sección.

Modelo Weibull bivalente tipo Gumbel I

A partir del modelo GBVW-I dado en la Definición 4.3, observamos que para $\alpha = 0$, este modelo corresponde a dos componentes independientes e idénticamente distribuidas con distribuciones Weibull. Así, por el Corolario 4.11, obtenemos la clasificación de la logconcauidad de la funciones de supervivencia de sus estadísticos mínimo y máximo.

En otro caso, los estadísticos T_1 y T_2 son mixturas generalizadas de más de dos distribuciones Weibull, con funciones de supervivencia

$$S_{(1)}(x) = (1 + \alpha)e^{-x^c} - 2\alpha e^{-3x^c} + \alpha e^{-4x^c}$$

y

$$S_{(2)}(x) = 2e^{-x^c} - (1 + \alpha)e^{-2x^c} + 2\alpha e^{-3x^c} - \alpha e^{-4x^c}$$

excepto en el caso $\alpha = -1$, en donde sólo el estadístico mínimo corresponde a una mixtura generalizada de dos distribuciones Weibull.

Así, para $\alpha = -1$, la función de supervivencia del estadístico T_1 se reduce a

$$S_{(1)}(x) = 2e^{-3x^c} - e^{-4x^c} \quad \text{para todo } x > 0$$

es decir, $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -1 < 0$, $b_1 = 3$ y $b_2 = 4$, y utilizando (2) del Teorema 4.9, se tiene que T_1 tiene supervivencia logcóncava únicamente para $c \geq 1$. Asimismo, la función de supervivencia del estadístico mínimo es logconvexa para $c \leq 3/4$. Sin embargo, para $c \in (3/4, 1)$, su logconvexidad depende del valor de c , siendo $S_{(1)}(x)$

logconvexa cuando

$$2 + 6\tau^2 - 7\tau - \frac{c}{1-c}\tau \log \tau \geq 0, \quad \text{con } \tau = \frac{1 + (1 + 48(1-c)^2)^{1/2}}{12(1-c)}$$

Modelo Weibull bivalente tipo Gumbel II

Para este modelo GBVW-II dado en la Definición 4.4, se obtiene que T_1 y T_2 , tienen funciones de supervivencia

$$S_{(1)}(x) = e^{-\lambda x^c}$$

y

$$S_{(2)}(x) = e^{-\frac{x^c}{\theta_1}} + e^{-\frac{x^c}{\theta_2}} - e^{-\lambda x^c}$$

siendo $\lambda = \left[\left(\frac{1}{\theta_1} \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{\theta_2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^{\delta}$.

Por consiguiente, el estadístico ordenado mínimo del modelo GBVW-II tiene una distribución Weibull, es decir, su función de supervivencia es logconvexa para $c \leq 1$ y logcóncava para $c \geq 1$.

Además, si $\theta_1 = \theta_2$, el estadístico máximo es una mixtura generalizada de dos distribuciones Weibull, con coeficientes $a_1 = 2$ y $a_2 = -1$, y por tanto, de (2) del Teorema 4.9, se tiene que T_2 tiene supervivencia logcóncava únicamente para $c \geq 1$. Asimismo, la función de supervivencia del estadístico máximo es logconvexa para $c \leq 3 \frac{2^\delta - 1 - 1}{2^\delta - 1 - 2}$, y en otro caso, la logconvexidad de T_2 se mantiene cuando

$$(1-c)(2^\delta - 2\tau)(2\tau - 1) + 2c(2^\delta - 1)\tau \log \tau \leq 0$$

siendo

$$\tau = \frac{(2^\delta - 1)}{4(1-c)} \left(1 + \left(1 + 2^{2+\delta} \left(\frac{1-c}{2^\delta - 1} \right)^2 \right)^{1/2} \right)$$

Modelo Weibull bivalente tipo Marshall y Olkin

En este caso, de la Definición 4.5, los estadísticos mínimo y máximo del modelo MOBWW tienen funciones de supervivencia

$$S_{(1)}(x) = e^{-\lambda x^c}$$

y

$$S_{(2)}(x) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x^c} + e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x^c} - e^{-\lambda x^c}$$

donde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$.

Por tanto, el mínimo tiene como distribución una Weibull, por lo que su función de supervivencia es logconvexa para $c \leq 1$ y logcóncava para $c \geq 1$.

Por otro lado, para $\lambda_1 = \lambda_2$ el estadístico T_2 es una mixtura generalizada de dos distribuciones Weibull, siendo sus coeficientes $a_1 = 2$ y $a_2 = -1$, y por tanto, de (2) del Teorema 4.9, obtenemos que el máximo tiene supervivencia logcóncava únicamente para $c \geq 1$. Asimismo, $S_{(2)}(x)$ es logconvexa si $c \leq 1 - \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 + 3\lambda_{12}}$, y en otro caso, T_2 tiene supervivencia logconvexa si

$$(1 - c)(1 - 2\tau)(2(\lambda_1 + \lambda_{12})\tau - \lambda) + 2c\lambda_1\tau \log \tau \leq 0$$

siendo

$$\tau = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 + \lambda_{12})(1 - c)} \left(1 + \left(1 + 4\lambda(\lambda_1 + \lambda_{12}) \left(\frac{1 - c}{\lambda_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right)$$

Modelo Weibull bivalente tipo Friday y Patil

Los estadísticos ordenados T_1 y T_2 obtenidos del modelo FPBVW de la Definición 4.6, tienen funciones de supervivencia

$$S_{(1)}(x) = e^{-\lambda x^c}$$

y

$$S_{(2)}(x) = \phi_1 e^{-\alpha_4 x^c} + \phi_2 e^{-\alpha_3 x^c} + (1 - \phi_1 - \phi_2) \nu e^{-\nu x^c}$$

con $\nu \neq \alpha_3, \alpha_4$.

Así, el estadístico mínimo de este modelo tiene distribución Weibull, por lo que su función de supervivencia es logconvexa para $c \leq 1$ y logcóncava para $c \geq 1$.

Por otro lado, para $\alpha_3 = \alpha_4$, el estadístico máximo es una mixtura generalizada de dos distribuciones Weibull, y su función de supervivencia se reduce a

$$S_{(2)}(x) = (\phi_1 + \phi_2) e^{-\alpha_3 x^c} + (1 - \phi_1 - \phi_2) \nu e^{-\nu x^c}$$

donde $\phi_1 = \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\nu - \alpha_3}$, $\phi_2 = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\nu - \alpha_3}$ y $\nu = \alpha_1 + \alpha_2$; de donde resulta $\phi_1 + \phi_2 = \frac{\alpha_0 \nu}{\nu - \alpha_3}$, por lo que para aplicar el Teorema 4.9 tenemos que discutir la posición de ν con respecto a α_3 .

En primer lugar, si $\nu < \alpha_3$, se tiene que $a_1 = \frac{(1-\alpha_0)\nu-\alpha_3}{\nu-\alpha_3} > 0$ y $a_2 = \phi_1 + \phi_2 < 0$, siendo $b_1 = \nu$ y $b_2 = \alpha_3$. Por lo que de (2) del Teorema 4.9, se deduce que el estadístico T_2 tiene supervivencia logcóncava únicamente para $c \geq 1$. Asimismo, $S_{(2)}(x)$ es logconvexa si $c \leq \frac{(1-\alpha_0)(\alpha_3-\nu(2\alpha_0-1))}{\alpha_3-\nu(1-\alpha_0)^2}$, y en otro caso, T_2 tiene supervivencia logconvexa

si $w_1 \geq 0$, donde

$$w_1 = (1-c)^2 \nu (\alpha_0^2 \alpha_3 \nu - \alpha_0 (\alpha_3 + \nu) (\alpha_3 - \nu (1 - \alpha_0))) \tau + (\alpha_3 - \nu (1 - \alpha_0))^2 \tau^2 - \frac{c \alpha_0 (\alpha_3 - \nu) (\alpha_3 - \nu (1 - \alpha_0))}{1-c} \tau \log \tau$$

siendo

$$\tau = \frac{\alpha_0 (\alpha_3 - \nu)}{2 (\alpha_3 - \nu (1 - \alpha_0)) (1-c)} \left(1 + \left(1 + 4 \alpha_3 \nu \left(\frac{1-c}{\alpha_3 - \nu} \right)^2 \right)^{1/2} \right)$$

Por otro lado, si $\nu > \alpha_3$, se tiene que $a_1 = \frac{\alpha_0 \nu}{\nu - \alpha_3} > 0$ y $a_2 = \frac{(1-\alpha_0)\nu - \alpha_3}{\nu - \alpha_3}$, siendo $b_1 = \alpha_3$ y $b_2 = \nu$. Por lo que, el signo de a_2 es negativo si $\nu < \frac{\alpha_3}{1-\alpha_0}$ y es positivo para $\nu > \frac{\alpha_3}{1-\alpha_0}$.

Por tanto, cuando $\nu < \frac{\alpha_3}{1-\alpha_0}$, de (2) del Teorema 4.9, se deduce que el estadístico T_2 tiene supervivencia logcóncava únicamente para $c \geq 1$. Asimismo, $S_{(2)}(x)$ es logconvexa si $c \leq \frac{(1-\alpha_0)(\alpha_3 - \nu(2\alpha_0 - 1))}{\alpha_3 - \nu(1-\alpha_0)^2}$, y en otro caso, T_2 tiene supervivencia logconvexa si $w_2 \geq 0$, donde

$$w_2 = \alpha_0^2 \alpha_3 \nu \tau^2 - \alpha_0 (\alpha_3 + \nu) (\alpha_3 - \nu (1 - \alpha_0)) \tau + (\alpha_3 - \nu (1 - \alpha_0))^2 - \frac{c \alpha_0 (\nu - \alpha_3) (\alpha_3 - \nu (1 - \alpha_0))}{1-c} \tau \log \tau$$

siendo

$$\tau = \frac{(\nu - \alpha_3) (\alpha_3 - \nu (1 - \alpha_0))}{2 \alpha_0 \alpha_3 \nu (1-c)} \left(1 + \left(1 + 4 \alpha_3 \nu \left(\frac{1-c}{\nu - \alpha_3} \right)^2 \right)^{1/2} \right)$$

Asimismo, cuando $\frac{\alpha_3}{1-\alpha_0} < \nu < \frac{\alpha_3}{(1-\alpha_0)^2}$, se tiene que $a_2 > 0$, y de (1) del Teorema 4.9, se deduce que el estadístico T_2 tiene supervivencia logconvexa únicamente para $c \leq 1$. Asimismo, $S_{(2)}(x)$ es logcóncava si $c \geq \frac{(1-\alpha_0)(\alpha_3 - \nu(2\alpha_0 - 1))}{\alpha_3 - \nu(1-\alpha_0)^2}$, y en otro caso, T_2 tiene supervivencia logcóncava si $w_2 \geq 0$.

Sin embargo, cuando $\nu \geq \frac{\alpha_3}{(1-\alpha_0)^2}$, se tiene que $a_2 > 0$ y $\frac{(1-\alpha_0)(\alpha_3-\nu(2\alpha_0-1))}{\alpha_3-\nu(1-\alpha_0)^2} < 1$, por lo que de (1) del Teorema 4.9, se deduce que el estadístico T_2 tiene supervivencia logconvexa para $c \leq 1$ y logcóncava para $c > 1$.

Modelo Weibull bivalente tipo Raftery I

A partir de las funciones de supervivencia de los estadísticos ordenados del modelo RBVW-I dado en la Definición 4.8,

$$S_{(1)}(x) = \frac{2\pi}{1+\pi}e^{-\lambda x^c} + \frac{1-\pi}{1+\pi}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x^c}$$

y

$$S_{(2)}(x) = \frac{2}{1+\pi}e^{-\lambda x^c} - \frac{1-\pi}{1+\pi}e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi}x^c}$$

observamos que ambos son mezclas generalizadas de dos distribuciones Weibull.

En particular, el estadístico mínimo tiene coeficientes $a_1 = \frac{2\pi}{1+\pi} > 0$ y $a_2 = \frac{1-\pi}{1+\pi}$, por lo que de (1) del Teorema 4.9, se deduce que el estadístico T_1 tiene función de supervivencia logconvexa para $c \leq 1$, y $S_{(1)}(x)$ es logcóncava para $c > 1$ cuando $\pi < \frac{1}{2}$. Sin embargo, cuando $\pi \in [0.5, 1)$, el estadístico mínimo tiene supervivencia logcóncava para $c \geq \frac{1-3\pi}{1-2\pi}$, y en caso contrario, si se verifica $w_1 \geq 0$, donde

$$w_1 = (c-1) \left(1 + \pi^2 \tau (2\tau - 1) + \pi (3\tau - 1) - c\pi (1 + \pi) \tau \log \tau \right)$$

siendo

$$\tau = \frac{1 + \pi + \left((3 - \pi)^2 - 16c(1 - \pi) + 8c^2(1 - \pi) \right)^{1/2}}{4(c - 1)\pi}$$

Asimismo, el estadístico máximo es una mezcla generalizada de coeficientes $a_1 = \frac{2}{1+\pi} > 0$ y $a_2 = -\frac{1-\pi}{1+\pi} < 0$, y utilizando (2) del Teorema 4.9, se tiene que $S_{(2)}(x)$ es

logcóncava para $c \geq 1$. Además, $S_{(2)}(x)$ es logconvexa si se verifica $w_2 \geq 0$, donde

$$w_2 = (1 - c)(\tau - 1)(2\tau - 1 + \pi) - c(1 + \pi)\tau \log \tau$$

siendo

$$\tau = \frac{1 + \pi + ((3 - \pi)^2 - 16c(1 - \pi) + 8c^2(1 - \pi))^{1/2}}{4(1 - c)}$$

Modelo Weibull bivalente tipo Raftery II

De la Definición 4.9 del modelo RBVW-II, se observa que los estadísticos mínimo y máximo son mixturas generalizadas de distribuciones Weibull, pero sólo el estadístico mínimo es mixtura generalizada de dos Weibull cuando $\pi \leq 0.5$, siendo en tal caso su función de supervivencia

$$S_{(1)}(x) = 2e^{-\lambda \frac{2-\pi}{1-\pi} x^c} - e^{-\frac{2\lambda}{1-\pi} x^c}$$

es decir, $a_1 = 2 > 0$ y $a_2 = -1 < 0$. Por tanto, de (2) del Teorema 4.9, se tiene que el estadístico mínimo tiene función de supervivencia logcóncava para $c \geq 1$. Además, T_1 tiene supervivencia logconvexa cuando $c \leq \frac{3(1-\pi)}{3-2\pi}$, y en otro caso si $w_1 \geq 0$, donde

$$w_1 = (1 - c)(2\tau - 1)((2 - \pi)\tau - 1) - c\pi\tau \log \tau$$

siendo

$$\tau = \frac{\pi + ((4 - \pi)^2 - 16c(2 - \pi) + 8c^2(2 - \pi))^{1/2}}{4(1 - c)(2 - \pi)}$$

4.4. Propiedades de logconcauidad de otros modelos de probabilidad bivariantes

Para completar el estudio de la logconcauidad de los estadísticos ordenados correspondientes a los modelos de probabilidad bivariantes dados en el Capítulo 1, en esta sección analizamos la clasificación de los estadísticos mínimo y máximo del modelo GBVE-III, los cuales no son mixturas generalizadas de exponenciales, ni de gamma y exponenciales, ni de Weibull. Así como la logconcauidad de los estadísticos extremos de los modelos cúbico, rectangular-triangular y piramidal, como muestra de las distribuciones bivariantes usuales en la metodología valorativa.

4.4.1. Modelo exponencial bivalente de Gumbel III

A partir de las funciones de supervivencia de los estadísticos mínimo y máximo del modelo GBVE-III, dadas en la Sección 1.4,

$$S_{(1)}(x) = e^{-2x - \theta x^2} \quad \text{para todo } x > 0$$

y

$$S_{(2)}(x) = 2e^{-x} - e^{-2x - \theta x^2} \quad \text{para todo } x > 0$$

siendo $0 \leq \theta \leq 1$, se observa que únicamente en el caso $\theta = 0$, se corresponden con los modelos exponencial y mixtura generalizada de dos distribuciones exponenciales, respectivamente.

En tal caso, X_1 y X_2 son mutuamente independientes, el estadístico mínimo está exponencialmente distribuido, por lo que su función de supervivencia es logcóncava y log-

convexa. Asimismo, el estadístico máximo tiene función de supervivencia logcóncava por los Corolarios 2.4 ó 4.10, puesto que $a_1 = 2 > 0$ y $a_2 = -1 < 0$.

En caso contrario, $0 < \theta \leq 1$, la tasa de fallo del estadístico mínimo del modelo GBVE-III viene dada por

$$r_{(1)}(x) = 2(1 + \theta x)$$

que es creciente, es decir, T_1 es *IFR* o lo que es lo mismo, su supervivencia es logcóncava.

Por otro lado, para el estadístico máximo

$$r_{(2)}(x) = \frac{2e^{-x} - 2(1 + \theta x)e^{-2x - \theta x^2}}{2e^{-x} - e^{-2x - \theta x^2}} = 1 + \frac{1 + 2\theta x}{1 - 2e^{x + \theta x^2}}$$

de donde se deduce que su derivada es positiva, es decir, T_2 tiene función de supervivencia logcóncava.

Por otra parte, para analizar la logconcavidad de las funciones de densidad de ambos estadísticos extremos de este modelo GBVE-III, cuando $\theta = 0$, la función de densidad del estadístico mínimo es logconvexa y logcóncava, y del Teorema 2.3, el estadístico máximo tiene densidad logcóncava.

Asimismo, cuando $0 < \theta \leq 1$, los logaritmos de las funciones de densidad de estos estadísticos, T_1 y T_2 , son

$$\log f_{(1)}(x) = \log 2 + \log(1 + \theta x) - 2x - \theta x^2$$

y

$$\log f_{(2)}(x) = \log 2 - x + \log\left(1 - (1 + \theta x)e^{-x - \theta x^2}\right)$$

siendo sus derivadas

$$\frac{f'_{(1)}(x)}{f_{(1)}(x)} = \frac{\theta}{1 + \theta x} - 2 - 2\theta x$$

y

$$\frac{f'_{(2)}(x)}{f_{(2)}(x)} = -1 + \frac{1 - \theta + 3\theta x + 2\theta^2 x^2}{e^{x+\theta x^2} - (1 + \theta x)}$$

de donde se obtiene que

$$(\log f_{(1)}(x))'' = \frac{-\theta^2}{(1 + \theta x)^2} - 2\theta$$

y

$$(\log f_{(2)}(x))'' = -\frac{g(x)}{(e^{x+\theta x^2} - (1 + \theta x))^2}$$

donde

$$g(x) = e^{x+\theta x^2} (1 - 4\theta + \theta(5 - 6\theta)x + 8\theta^2 x^2 + 4\theta^3 x^3) + \theta(2 + \theta) + 4\theta^2 x + 2\theta^3 x^2$$

Por tanto, el estadístico mínimo tiene función de densidad logcóncava.

Además, la logconcavidad de $f_{(2)}(x)$ está determinada por el signo de $g(x)$, de forma que T_2 tiene densidad logcóncava si $g(x) \geq 0$ para todo $x > 0$.

Para analizar el signo de esta función $g(x)$, resulta trivial comprobar que si $\theta \leq \frac{1}{4}$, $g(x) \geq 0$, pues todos sus términos son no negativos.

No obstante, para cualquier $\theta \in (0, 1]$, se obtiene que

$$g(0) = (1 - \theta)^2 \geq 0$$

siendo su derivada

$$g'(x) = e^{x+\theta x^2} (1 + \theta - 6\theta^2 + \theta(7 + 2\theta)x + 18\theta^2 x^2 + 20\theta^3 x^3 + 8\theta^4 x^4) + 4\theta^2(1 + \theta x)$$

para la que se verifica que

$$g'(0) = 1 - \theta^2 + \theta(1 - \theta) \geq 0$$

y la segunda derivada de $g(x)$ puede expresarse como

$$g''(x) = 4\theta^3 + e^{x+\theta x^2} (1 + 8\theta - 4\theta^2 + \theta(9 + 40\theta - 12\theta^3)x + 32\theta^2(1 + 2\theta)x^2 + 4\theta^2(9 + 5\theta + 8\theta^2)x^3 + 48\theta^4x^4 + 16\theta^5x^5)$$

cuyos términos son todos positivos cuando $\theta \in (0, 1]$, por lo que $g'(x)$ es creciente siendo $g'(0) \geq 0$, de donde se deduce que la función $g(x)$ es creciente, y teniendo en cuenta que $g(0) \geq 0$, resulta que $g(x)$ es positiva. Por tanto, T_2 tiene densidad logcóncava.

4.4.2. Modelo cúbico

Veamos ahora la logconcauidad de los estadísticos extremos del modelo cúbico dado en la Definición 1.9.

Proposición 4.12 *Los estadísticos extremos mínimo y máximo de un modelo cúbico tienen funciones de supervivencia logcóncavas en su soporte.*

Demostración. A partir de las funciones de supervivencia de los estadísticos mínimo y máximo de este modelo cúbico, dadas en (1.3.1) y (1.3.2), se tienen sus correspondientes funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Además, las tasas de fallo de estos estadísticos extremos son

$$\frac{f_{(1)}(x)}{S_{(1)}(x)} = \frac{2}{1-x}$$

y

$$\frac{f_{(2)}(x)}{S_{(2)}(x)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

ambas crecientes en $(0, 1)$, y utilizando el Lema 1.1, que relaciona la logconcauidad de una función de supervivencia con la monotonía de su tasa de fallo, obtenemos que las funciones de supervivencia $S_{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, son logcóncavas en $(0, 1)$. \square

Proposición 4.13 *Los estadísticos extremos mínimo y máximo de un modelo cúbico tienen funciones de densidad logcóncavas en su soporte.*

Demostración. A partir de las funciones de densidad de los estadísticos de este modelo, dadas en la demostración anterior, se tiene que

$$(\log f_{(1)}(x))' = \frac{f'_{(1)}(x)}{f_{(1)}(x)} = -\frac{1}{1-x}$$

y

$$(\log f_{(2)}(x))' = \frac{f'_{(2)}(x)}{f_{(2)}(x)} = \frac{1}{x}$$

siendo ambas decrecientes en $(0, 1)$, y por tanto las funciones de densidad del mínimo y del máximo son logcóncavas en $(0, 1)$. \square

4.4.3. Modelo rectangular-triangular

Proposición 4.14 *Los estadísticos extremos mínimo y máximo de un modelo de probabilidad rectangular-triangular tienen funciones de supervivencia logcóncavas en su soporte.*

Demostración. A partir de las funciones de supervivencia de los estadísticos mínimo y máximo de este modelo rectangular-triangular de la Definición 1.10, dadas en (1.3.3) y (1.3.4), se tienen sus correspondientes funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{m}(3x - 2) & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{3}{1-m} (1 - x)^2 & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{3}{m}x^2 & \text{si } 0 < x < m \\ 1 - \frac{1}{1-m} (1 - x)(1 - 3x) & \text{si } m \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Además, las tasas de fallo de estos estadísticos extremos son

$$\frac{f_{(1)}(x)}{S_{(1)}(x)} = \begin{cases} \frac{m-x(3x-2)}{(1-x)(m-x^2)} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{3}{1-x} & \text{si } m \leq x < 1 \end{cases}$$

y

$$\frac{f_{(2)}(x)}{S_{(2)}(x)} = \begin{cases} \frac{3x^2}{m-x^3} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{1-m-(1-x)(1-3x)}{1-m-x(1-m-(1-x)^2)} & \text{si } m \leq x < 1 \end{cases}$$

en donde observamos que la tasa de fallo del estadístico mínimo en $(0, m)$ se expresa como

$$r_{(1)}(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{m-x^2}$$

y la tasa de fallo del estadístico máximo en $[m, 1)$ puede escribirse como

$$r_{(2)}(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2x-1}{1-m+x(1-x)}$$

y por tanto, ambas tasas de fallo de los estadísticos mínimo y máximo son crecientes en cada tramo de $(0, 1)$. Así, utilizando el Lema 1.1, que relaciona la logconcavidad

de una función de supervivencia con la monotonía de su tasa de fallo, obtenemos que las funciones de supervivencia $S_{(1)}(x)$ y $S_{(2)}(x)$ son logcóncavas en cada tramo, y del Lema 1.5, obtenemos que estas funciones de supervivencia del mínimo y máximo, respectivamente, del modelo rectangular-triangular son logcóncavas en $(0, 1)$. \square

Proposición 4.15 *Los estadísticos extremos mínimo y máximo de un modelo de probabilidad rectangular-triangular tienen funciones de densidad logcóncavas en su soporte.*

Demostración. A partir de las funciones de densidad de los estadísticos de este modelo, dadas en la demostración anterior, se tiene que

$$(\log f_{(1)}(x))' = \frac{f'_{(1)}(x)}{f_{(1)}(x)} = \begin{cases} -2\frac{3x-1}{m-x(3x-2)} & \text{si } 0 < x < m \\ -\frac{2}{1-x} & \text{si } m \leq x < 1 \end{cases}$$

y

$$(\log f_{(2)}(x))' = \frac{f'_{(2)}(x)}{f_{(2)}(x)} = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{2(2-3x)}{1-m-(1-x)(1-3x)} & \text{si } m \leq x < 1 \end{cases}$$

siendo ambas decrecientes en cada parte del intervalo $(0, 1)$, y por tanto, del Lema 1.5, tenemos que las funciones de densidad del mínimo y del máximo son logcóncavas en $(0, 1)$. \square

4.4.4. Modelo piramidal

En este último apartado, damos la logconcavidad de los estadísticos extremos del modelo piramidal de la Definición 1.11. Para ello, estudiamos primero la logconcavidad de las funciones de densidad de dichos estadísticos, y como consecuencia, tendremos la logconcavidad de sus funciones de supervivencia por la Proposición 1.3.

Proposición 4.16 *Los estadísticos extremos mínimo y máximo de un modelo piramidal tienen funciones de densidad logcóncavas en su soporte.*

Demostración. A partir de las funciones de distribución (1.3.5) y (1.3.6) de los estadísticos mínimo y máximo del modelo piramidal, se obtienen las siguientes funciones de densidad

$$f_{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2m^2M^2} (2mM(M+m) - (M^2 + m^2(3M-m+1))x) & \text{si } 0 < x < m \\ \frac{3}{2(1-m)^2M^2} (2M(mM + (1-m)^2)x + (1-2m)M^2 - (M^2 + (1-m)^2(3M-m+1))x^2) & \text{si } m \leq x < \frac{M}{1+M-m} \\ \frac{3(2-3m+M)(1-x)^2}{2(1-m)^2} & \text{si } \frac{M}{1+M-m} \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y

$$f_{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{3x^2(3M-m)}{2M^2} & \text{si } 0 < x \leq \frac{M}{1+M-m} \\ \frac{3x}{M} - \frac{3M(1-x)^2}{2(1-m)^2} - \frac{3x^2}{2M^2} - \frac{3(1-4x+3x^2)}{2(1-m)} & \text{si } \frac{M}{1+M-m} < x \leq M \\ \frac{3(1-x)}{1-M} - \frac{3(1-x)^2}{2(1-M)^2} - \frac{3M(1-x)^2}{2(1-m)^2} - \frac{3(1-4x+3x^2)}{2(1-m)} & \text{si } M < x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Además, teniendo en cuenta que la logconcavidad de cada $f_{(i)}(x)$ viene determinada por la concavidad de $\log(f_{(i)}(x))$, o equivalentemente por la monotonía de $(\log(f_{(i)}(x)))' = \frac{f'_{(i)}(x)}{f_{(i)}(x)}$, calculamos sus derivadas

$$\left(\frac{f'_{(1)}(x)}{f_{(1)}(x)} \right)' = \begin{cases} -\frac{F^2x^2 + (Fx - 2mM)^2}{(2mM(M+m)x - Fx^2)^2} & \text{si } 0 < x < m \\ -\frac{2H(1-2m)M^2 + x^2H^2 + (G-xH)^2}{((1-2m)M^2 + 2Gx - Hx^2)^2} & \text{si } m \leq x < \frac{M}{1+M-m} \\ -\frac{2}{(1-x)^2} & \text{si } \frac{M}{1+M-m} \leq x < 1 \end{cases}$$

y

$$\left(\frac{f'_{(2)}(x)}{f_{(2)}(x)}\right)' = \begin{cases} -\frac{2}{x^2} & \text{si } 0 < x < \frac{M}{1+M-m} \\ -2\frac{\left((Ax+M(M+1-m))^2 + M^2(M+1-m)(1-m)^2(3M-m)\right)}{\left(Ax^2 - 2M(M+1-m)^2x + M^2(M+1-m)^2\right)^2} & \text{si } \frac{M}{1+M-m} \leq x < M \\ -2\frac{\left((Cx-B)^2 + B^2 + 2CD\right)}{\left(2D+2Bx-Cx^2\right)^2} & \text{si } M \leq x < 1 \end{cases}$$

siendo

$$A = M^3 + (1-m)^2 + 3(1-m)M^2$$

$$B = M(M-m)^2 + 2(1-M)(1-m)$$

$$C = (1-m)^2 + (1-M)^2(M + 3(1-m))$$

$$D = \frac{1}{2} \left[(1-m)^2(1-2M) + (1-M)^2(1-M-m) \right]$$

$$F = M^2 + m^2(3M - m + 1)$$

$$G = M[mM + (1-m)^2]$$

$$H = M^2 + (1-m)^2(3M - m)$$

Por tanto, la logconcavidad de cada $f_{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, en cada uno de los tramos en los que está definida, está determinada por los signos de los numeradores correspondientes de las expresiones anteriores, en donde se observa que todos son negativos.

Por consiguiente, cada $f_{(i)}(x)$ es logcóncava en cada tramo de su soporte, y teniendo en cuenta que cada $\log f_{(i)}(x)$ verifica las condiciones del Lema 1.5, se obtiene que las funciones de densidad de los estadísticos mínimo y máximo son logcóncavas en $(0, 1)$.

□

Corolario 4.17 *Los estadísticos extremos mínimo y máximo de un modelo piramidal tiene funciones de supervivencia logcóncavas en su soporte.*

Demostración. Consecuencia inmediata de las Proposiciones 1.3 y 4.16.

□

Capítulo 5

La función de supervivencia y los estadísticos extremos en los métodos de valoración

5.1. Introducción

En este capítulo estudiamos un método de valoración basado en las funciones de supervivencia correspondientes a los modelos de probabilidad del valor de mercado de un bien y de su índice de calidad; introducimos el uso de las funciones de supervivencia en las técnicas de ponderación usuales en valoración, y una nueva técnica para generar modelos de probabilidad ponderados a partir de las distribuciones marginales del índice de calidad. Asimismo, analizamos los estadísticos extremos del índice de calidad en los métodos de valoración para encontrar el valor de un bien, así como la utilidad de sus propiedades de logconcavidad.

En primer lugar, analizamos este nuevo método de valoración de las dos funciones de supervivencia (MVDFS) en el caso de la valoración en ambiente de incertidumbre a través de un índice unidimensional de calidad del bien, estableciendo su equivalencia con el método de valoración de las dos funciones de distribución (MVDFD).

También, en la siguiente sección, estudiamos la valoración del bien a través de este nuevo método basado en la función de supervivencia correspondiente al modelo de probabilidad del valor de mercado y la función de supervivencia bivalente correspondiente a un índice de calidad bidimensional, así como para la función de supervivencia de un índice de calidad multidimensional; utilizando para ello un desarrollo en la misma dirección que Herrerías (2002) y García y García (2003) en el MVDFD. Además, se comparan las valoraciones obtenidas por ambos métodos.

Asimismo, con objeto de reducir la depreciación que produce el MVDFD respecto de las valoraciones de mercado del bien con cada una de las componentes del índice de calidad, cuando se dispone de más de un índice de calidad, Herrerías (2002) y García y García (2003) estudian técnicas basadas en la ponderación de las funciones de distribución marginales de dichas componentes; estas técnicas serán utilizadas en la Sección 5.3 para analizar el comportamiento del MVDFS.

En esta misma línea, en dicha Sección 5.3, vemos otros procedimientos de ponderación basados en las funciones de supervivencia marginales que nos permiten reducir la apreciación que produce el MVDFS con respecto a los valores de mercado del bien a través de cada una de las componentes del índice de calidad, y también estudiamos el comportamiento del MVDFD en estos casos.

Además, analizamos una nueva técnica de generación de los pesos en dichas pon-

deraciones, lo que amplía aún más el surtido de modelos de probabilidad ponderados que pueden utilizarse para encontrar el valor de mercado de un bien.

Por otro lado, en la Sección 5.4 proponemos el uso de los estadísticos mínimo y máximo en los métodos de valoración para encontrar el valor de mercado de un bien a partir de un índice de calidad bidimensional, puesto que permiten reducir la depreciación producida por el MVDFD con respecto de las valoraciones con cada componente del índice de calidad, así como evitar los inconvenientes que se presentan al usar modelos de probabilidad ponderados.

En este sentido, analizamos las valoraciones proporcionadas mediante los estadísticos mínimo y máximo, estableciendo el comportamiento de dichas valoraciones y sus comparaciones con respecto a las obtenidas mediante el MVDFD a través del modelo de probabilidad bivalente del índice de calidad. Asimismo, estudiamos las valoraciones y acotaciones a través de ambos estadísticos extremos con respecto al MVDFS.

Para finalizar dicha sección, utilizaremos las propiedades de logconcavidad de los estadísticos extremos correspondientes a los modelos de probabilidad bivariantes más usuales en valoración, estudiadas en el capítulo anterior, como un mecanismo de información del comportamiento estocástico del índice de calidad bidimensional.

En la última sección, llevaremos a cabo la aplicación práctica de los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo, a través de dos ejemplos clásicos de valoración de fincas agrícolas.

5.2. Método de valoración de las dos funciones de supervivencia

5.2.1. Índice de calidad unidimensional

En la práctica valorativa de un bien, es usual la suposición de unas condiciones o reglas lógicas de juego en el mercado. En particular, si se desea estudiar el valor de mercado de un bien a través de un índice de calidad del mismo, se asume la siguiente condición: el bien con mayor medición del índice de calidad tendrá mayor valor de mercado, lo que puede enunciarse como:

Sean j y k dos bienes con valores i_j e i_k de su índice de calidad, y valores de mercado v_j y v_k , respectivamente. Si $i_j < i_k$ entonces $v_j < v_k$.

Esta condición también es conocida como principio básico de valoración. Bajo este principio básico, a partir de la función de distribución $F_V(v)$ del valor de mercado V del bien, y la función de distribución $F_I(i)$ del índice de calidad de dicho bien, el MVDFD se basa en la igualdad de ambas funciones de distribución

$$F_V(v) = F_I(i)$$

de donde se obtiene que para un bien con un índice de calidad $I = i$, el valor de mercado correspondiente a dicho bien mediante MVDFD viene dado por el siguiente modelo

$$v_D = \phi_D(i) \tag{5.2.1}$$

donde $\phi_D = F_V^{-1} \circ F_I$.

En este sentido, cabe pensar en otras técnicas valorativas en las cuales prevalezca el principio básico de que a un bien con mayor índice de calidad le corresponde mayor valor de mercado. En particular, a partir de la función de supervivencia $S_V(v)$ del valor de mercado V del bien, y la función de supervivencia $S_I(i)$ del índice de calidad de dicho bien, el MVDFS se basa en la igualdad

$$S_V(v) = S_I(i)$$

de donde se obtiene que para un bien con un índice de calidad $I = i$, el valor de mercado correspondiente a dicho bien mediante MVDFS viene dado por el siguiente modelo

$$v_S = \phi_S(i) \tag{5.2.2}$$

donde $\phi_S = S_V^{-1} \circ S_I$, y las funciones de supervivencia definidas por

$$S_V(v) = 1 - F_V(v) \quad \text{y} \quad S_I(i) = 1 - F_I(i)$$

son decrecientes, por lo que las valoraciones obtenidas a través de este método satisfacen el principio básico de valoración.

Además, en este caso unidimensional, los métodos de valoración de las dos funciones, MVDFD y MVDFS, definidos por (5.2.1) y (5.2.2), respectivamente, son equivalentes, como vemos en el siguiente resultado.

Teorema 5.1 *Sea $I = i$ el valor del índice de calidad del bien, siendo v_D su valor de mercado mediante MVDFD y v_S su valor de mercado mediante MVDFS, entonces*

$$v_D = v_S.$$

Demostración. Es inmediata, a partir de las siguientes equivalencias

$$v_S = S_V^{-1}(S_I(i)) = (1 - F_V)^{-1}(1 - F_I(i)) = F_V^{-1}(F_I(i)) = v_D \tag{5.2.3}$$

□

Consecuentemente, en el caso de un índice de calidad unidimensional, el MVDFS es simplemente un nuevo enfoque o perspectiva del propio MVDFD, lo que motiva el estudio del MVDFS y el análisis de este nuevo enfoque en la metodología valorativa a través de un índice calidad bidimensional y multidimensional.

5.2.2. Índice de calidad multidimensional

En los últimos años, diversos autores (García, Cruz y Rosado (2000) y (2002), Herrerías (2002) y García y García (2003)) han estudiado y aplicado el método de las dos funciones de distribución en este problema, la valoración de mercado de un bien a partir de más de un índice de calidad del mismo, cuya idea principal es la expuesta en el caso unidimensional.

Para analizar el método de valoración de las dos funciones de supervivencia cuando se dispone de más de un índice de calidad del bien que se pretende valorar, es decir, un índice de calidad bidimensional o multidimensional cuyas componentes son los distintos índices disponibles para la valoración del bien, se presupone el principio básico de valoración de que a un bien con mayor índice de calidad (bidimensional o multidimensional) le corresponde mayor valor de mercado, en donde se entenderá que un índice de calidad es mayor que otro si así lo son cada una de sus componentes.

En este contexto, vemos el caso de un índice de calidad bidimensional, y posteriormente extenderemos los resultados al caso multidimensional.

Índice de calidad de dos componentes

En este caso, el principio básico de valoración se puede establecer como sigue:

Sean j y k dos bienes, con (i_{1j}, i_{2j}) e (i_{1k}, i_{2k}) sus valores del índice de calidad, siendo v_j y v_k sus valores de mercado. Si $(i_{1j}, i_{2j}) < (i_{1k}, i_{2k})$ entonces $v_j < v_k$.

A partir de la función de distribución $F_V(v)$ del valor de mercado V del bien, y la función de distribución $F_I(i_1, i_2)$ del índice de calidad bidimensional de dicho bien, el MVDFD se basa en la igualdad de ambas

$$F_V(v) = F_I(i_1, i_2)$$

de donde se obtiene que para un bien con un índice de calidad $I = (i_1, i_2)$, el valor de mercado correspondiente a dicho bien mediante MVDFD está definido por el siguiente modelo

$$v_D = \phi_D(i_1, i_2) \tag{5.2.4}$$

donde $\phi_D = F_V^{-1} \circ F_I$.

Obsérvese que en este caso bidimensional, la función de distribución bivalente del índice de calidad $F_I(i_1, i_2)$ queda determinada por las funciones de distribución marginales de sus componentes y la relación existente entre ambas (estructura de dependencia), entre otros véase Herrerías (2002). Teniendo en cuenta que para toda función de distribución bivalente se verifica

$$F_I(i_1, i_2) \leq F_1(i_1) \quad \text{y} \quad F_I(i_1, i_2) \leq F_2(i_2)$$

siendo $F_1(i_1)$ y $F_2(i_2)$ las funciones de distribución marginales de las dos componentes del índice de calidad, o equivalentemente

$$F_I(i_1, i_2) \leq \inf\{F_1(i_1), F_2(i_2)\}. \quad (5.2.5)$$

Si se utiliza el MVDFD para obtener valores de mercado del bien a través de cada una de las componentes del índice de calidad, denotando por

$$v_{1D} = F_V^{-1}(F_1(i_1)) \quad \text{y} \quad v_{2D} = F_V^{-1}(F_2(i_2))$$

y por la monotonía de $F_V(v)$, se obtiene la siguiente desigualdad

$$v_D \leq \inf\{v_{1D}, v_{2D}\} \quad (5.2.6)$$

es decir, el MVDFD proporciona un valor de mercado del bien inferior a las valoraciones que se obtendrían individualmente con cada componente del índice de calidad del bien, lo que puede interpretarse como una depreciación en el valor de mercado del bien al considerar una mayor información mediante dos índices de calidad de dicho bien.

En Herrerías (2002) y García y García (2003) se estudian algunas modificaciones en la dirección de reducir la depreciación en el mercado que sufre el bien cuando se dispone de más de una componente del índice de calidad a través del MVDFD, procedimientos de modelos de probabilidad ponderados que también analizaremos a través del MVDFS en la Sección 5.3.

En este contexto, la utilización de un método de valoración alternativo al MVDFD, en el cual prevalezca el principio básico de valoración y que en caso de un índice de calidad unidimensional resulta ser el mismo MVDFD, adquiere mayor relevancia si además nos permite evitar la depreciación del bien en el mercado cuando se dispone de más de un índice de calidad (depreciación observada en (5.2.6)).

A partir de la función de supervivencia $S_V(v)$ del valor de mercado V del bien, y la función de supervivencia $S_I(i_1, i_2)$ del índice de calidad bidimensional de dicho bien, el método de valoración de las dos funciones de supervivencia se basa en la igualdad de ambas

$$S_V(v) = S_I(i_1, i_2)$$

de donde se obtiene que para un bien con un índice de calidad $I = (i_1, i_2)$, el valor de mercado correspondiente a dicho bien mediante MVDFS está determinado por el modelo

$$v_S = \phi_S(i_1, i_2) \tag{5.2.7}$$

donde $\phi_S = S_V^{-1} \circ S_I$, y dado que la función de supervivencia bivalente definida por

$$S_I(i_1, i_2) = P(I > (i_1, i_2))$$

es decreciente, las valoraciones obtenidas a través de este método satisfacen el principio básico de valoración.

Teniendo en cuenta que para toda función de supervivencia bivalente se verifican las siguientes desigualdades

$$S_I(i_1, i_2) \leq S_1(i_1) \quad \text{y} \quad S_I(i_1, i_2) \leq S_2(i_2)$$

y por consiguiente

$$S_I(i_1, i_2) \leq \inf\{S_1(i_1), S_2(i_2)\} \tag{5.2.8}$$

en el siguiente resultado se establece que el MVDFS proporciona un valor de mercado del bien superior a las valoraciones que se obtendrían individualmente con cada componente de su índice de calidad, lo que puede interpretarse como una apreciación en el valor de mercado del bien al considerar una mayor información mediante más de un índice de calidad de dicho bien.

Teorema 5.2 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_S su valor de mercado mediante MVDFS y v_{1S} y v_{2S} sus valores de mercado para cada componente del índice, entonces*

$$v_S \geq \sup\{v_{1S}, v_{2S}\}. \quad (5.2.9)$$

Demostración. Inmediata a partir de (5.2.8), utilizando la notación

$$v_{1S} = S_V^{-1}(S_1(i_1)) \quad \text{y} \quad v_{2S} = S_V^{-1}(S_2(i_2))$$

y la monotonía decreciente de $S_V(v)$, consecuentemente de su inversa. \square

Cabe destacar que esta metodología de valoración alternativa, que podría calificarse de dual del MVDFD, constituye una nueva perspectiva para afrontar la valoración de mercado de un bien cuando se dispone de más de un índice de calidad, que no es equivalente al MVDFD cuando aumenta la dimensión del índice de calidad del bien.

Además, el MVDFS proporciona un valor de mercado del bien superior al del MVDFD, es decir, este MVDFS evita la depreciación observada con el MVDFD; más aún, cuando se dispone de mayor información mediante dos características de calidad del bien, se produce una apreciación del bien en el mercado.

Teorema 5.3 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_D su valor de mercado mediante MVDFD y v_S su valor de mercado mediante MVDFS, entonces*

$$v_D \leq v_S. \quad (5.2.10)$$

Demostración. A partir de la equivalencia entre los dos métodos dada en el Teorema 5.1 para cada una de las componentes del índice de calidad, tenemos que

$$v_{1S} = v_{1D} \quad \text{y} \quad v_{2S} = v_{2D}$$

por lo que las denotaremos v_1 y v_2 , respectivamente. De donde, por (5.2.6) y (5.2.9), se deduce la siguiente cadena de desigualdades entre los valores de mercado del bien

$$v_S \geq \sup\{v_1, v_2\} \geq \inf\{v_1, v_2\} \geq v_D.$$

□

Índice de calidad de múltiples componentes

Análogamente, se extienden los resultados del apartado bidimensional al caso de un índice de calidad multidimensional $I = (I_1, \dots, I_n)$ con $n \geq 2$, para el valor de mercado del bien. En este caso, el principio básico de valoración se establece como sigue:

Sean j y k dos bienes con índices de calidad (i_{1j}, \dots, i_{nj}) e (i_{1k}, \dots, i_{nk}) , siendo v_j y v_k sus valores de mercado, respectivamente. Si $(i_{1j}, \dots, i_{nj}) < (i_{1k}, \dots, i_{nk})$ entonces $v_j < v_k$.

Así, a través del MVDFD, para un índice de calidad $I = (i_1, \dots, i_n)$ se obtiene la valoración mediante el modelo

$$v_D = \phi_D(i_1, \dots, i_n)$$

donde $\phi_D = F_V^{-1} \circ F_I$, a partir de la función de distribución $F_V(v)$ del valor de mercado V del bien y la función de distribución $F_I(i_1, \dots, i_n)$ multivariante del índice de calidad de dicho bien, y teniendo en cuenta la acotación de una función de distribución multivariante por las funciones de distribución marginales de sus componentes

$$F_I(i_1, \dots, i_n) \leq \inf\{F_1(i_1), \dots, F_n(i_n)\} \tag{5.2.11}$$

siendo $F_j(i_j)$ la función de distribución marginal de la componente j del índice de calidad, $j = 1, \dots, n$, resulta la acotación

$$v_D \leq \inf\{v_1, \dots, v_n\} \quad (5.2.12)$$

donde cada $v_j = F_V^{-1}(F_j(i_j))$ es el valor de mercado mediante el MVDFD a través de cada componente individual del índice de calidad (ver entre otros Herrerías (2002)).

Al igual que en el caso de índice de calidad bidimensional, resulta de interés la utilización del MVDFS, que satisface el principio básico de valoración y nos permite evitar la depreciación del bien en el mercado cuando se dispone de más de un índice de calidad.

En este sentido, de forma totalmente análoga al caso bidimensional, a través del MVDFS determinado por la igualdad entre la función de supervivencia $S_V(v)$ del valor de mercado V del bien y la función de supervivencia multivariante $S_I(i_1, \dots, i_n)$ de su índice de calidad, se obtiene el siguiente modelo

$$v_S = \phi_S(i_1, \dots, i_n) \quad (5.2.13)$$

con $\phi_S = S_V^{-1} \circ S_I$, y teniendo en cuenta la acotación

$$S_I(i_1, \dots, i_n) \leq \inf\{S_1(i_1), \dots, S_n(i_n)\} \quad (5.2.14)$$

siendo $S_j(i_j)$ la función de supervivencia marginal de la componente j del índice de calidad, $j = 1, \dots, n$, y la notación $v_j = S_V^{-1}(S_j(i_j))$ el valor de mercado por el MVDFS mediante cada componente individual del índice de calidad, obtenemos que el MVDFS proporciona una apreciación del valor de mercado del bien con respecto a las valoraciones que se obtendrían individualmente con cada componente de su índice de calidad.

Teorema 5.4 *Sea $I = (i_1, \dots, i_n)$ el valor del índice de calidad n dimensional del bien, siendo v_S su valor de mercado mediante MVDFS, y v_1, \dots, v_n sus valores de mercado para cada componente del índice, entonces*

$$v_S \geq \sup\{v_1, \dots, v_n\}. \quad (5.2.15)$$

Asimismo obtenemos la siguiente comparación entre las valoraciones proporcionadas por ambos métodos en el caso multidimensional, que establece la reducción de la depreciación producida por el MVDFD cuando utilizamos el MVDFS.

Teorema 5.5 *Sea $I = (i_1, \dots, i_n)$ el valor del índice de calidad n dimensional del bien, siendo v_D su valor de mercado mediante MVDFD y v_S su valor de mercado mediante MVDFS, entonces*

$$v_D \leq v_S.$$

Por consiguiente, la extensión al caso multidimensional del MVDFS satisface el principio básico de valoración, como hemos observado anteriormente coincide con el MVDFD en el caso unidimensional, y produce una apreciación del bien en el mercado cuando se dispone de mayor información mediante más de un índice de calidad del bien, evitando la depreciación sufrida por el MVDFD en esta situación.

5.3. Comportamiento mediante procedimientos de ponderación

En la sección anterior, mencionamos los trabajos de Herrerías (2002) y García y García (2003) sobre el MVDFD para la valoración de mercado de un bien a partir de

más de un índice de calidad del mismo, en la dirección de reducir la depreciación que sufre dicho bien cuando aumenta la información disponible del mismo a través de la dimensión del índice de calidad.

En líneas generales, para reducir dicha depreciación con respecto a las valoraciones que se obtienen separadamente con cada índice individual de calidad (es decir, con respecto a las valoraciones a través de cada una de las componentes del índice de calidad multidimensional), es frecuente el uso de una función de distribución multivariante ponderada, tanto en el caso de independencia como de dependencia entre los distintos índices de calidad disponibles, a partir de las funciones de distribución marginales; técnica usual en la práctica valorativa de un bien cuando unos índices de calidad tienen mayor peso que otros.

En esta sección vamos a analizar el comportamiento del MVDFS mediante el procedimiento de ponderación de las marginales. En primer lugar, a través de la ponderación de las funciones de distribución marginales, utilizado por Herrerías (2002) y García y García (2003) para el MVDFD, estudiaremos el comportamiento del MVDFS, comparando los resultados con los obtenidos a través del MVDFD por dichos autores.

Posteriormente, utilizando un desarrollo paralelo al de Herrerías (2002) y García y García (2003), estudiamos el comportamiento de ambas técnicas valorativas a través de la ponderación de las funciones de supervivencia marginales, lo que supone un punto de vista alternativo para generar modelos de probabilidad ponderados.

Finalmente, incluimos las distintas técnicas de cálculo y estimación de los pesos de dichos modelos ponderados, y damos una nueva técnica para la obtención de los pesos, lo que permite generar otros modelos de probabilidad ponderados utilizados

para corregir y ajustar las valoraciones.

Para este estudio, nos vamos a centrar, sin pérdida de generalidad, en el caso bidimensional, teniendo en cuenta que el caso multidimensional se obtiene mediante un simple cambio en la notación.

5.3.1. Ponderación de las funciones de distribución marginales

Utilizando el procedimiento de Herrerías (2002) para la ponderación de las funciones de distribución marginales de cada una de las componentes del índice de calidad bidimensional, distinguiremos entre los casos de independencia y dependencia, y en cada caso veremos el comportamiento de ambos métodos de valoración.

Índice de calidad de dos componentes independientes

En primer lugar, si las dos componentes del índice de calidad son independientes, la función de distribución bivalente del índice de calidad del bien se expresa a partir de las funciones de distribución marginales como

$$F_I(i_1, i_2) = F_1(i_1) \cdot F_2(i_2) \leq \inf\{F_1(i_1), F_2(i_2)\}$$

siendo la ponderación utilizada para reducir la depreciación del valor de mercado del bien

$$F_{WD}(i_1, i_2) = F_1^\alpha(i_1) \cdot F_2^{1-\alpha}(i_2) \quad (5.3.1)$$

con $0 < \alpha < 1$ que representa el peso asociado a la primera componente del índice de calidad, y los mecanismos para su determinación se tratarán en el Apartado 5.3.3, por

lo que se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\inf\{F_1(i_1), F_2(i_2)\} \leq F_{WD}(i_1, i_2) \leq \sup\{F_1(i_1), F_2(i_2)\} \quad (5.3.2)$$

de este modo, llamando v_{DWD} al valor de mercado del bien por el MVDFD correspondiente al modelo de probabilidad ponderado con función de distribución $F_{WD}(i_1, i_2)$ dada en (5.3.1) del índice de calidad bidimensional, se obtiene la siguiente acotación

$$\inf\{v_1, v_2\} \leq v_{DWD} \leq \sup\{v_1, v_2\} \quad (5.3.3)$$

es decir, el valor de mercado del bien v_{DWD} está acotado por las valoraciones obtenidas individualmente con cada componente del índice de calidad del bien mediante el MVDFD. Así, uniendo las desigualdades (5.2.6) y (5.3.3)

$$v_D \leq \inf\{v_1, v_2\} \leq v_{DWD}$$

donde se observa que, con este procedimiento de ponderación, ha sido reducida la depreciación en el valor de mercado del bien cuando se dispone de un índice de calidad bidimensional del mismo (ver por ejemplo Herrerías (2002)).

Por otra parte, aplicando el MVDFS para la función de supervivencia bivalente $S_{WD}(i_1, i_2)$ asociada al modelo ponderado (5.3.1), del Teorema 5.3, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 5.6 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes independientes, siendo v_{DWD} y v_{SWD} sus valores de mercado a través del MVDFD y MVDFS, respectivamente, mediante el modelo de probabilidad ponderado (5.3.1), entonces*

$$v_{DWD} \leq v_{SWD}.$$

Consecuentemente, en el caso de un índice de calidad bidimensional con componentes independientes, a partir del modelo de probabilidad ponderado que reduce la depreciación del bien en el MVDFD, el MVDFS proporciona un valor superior de mercado de dicho bien.

Además, a partir de este modelo de probabilidad ponderado de las funciones de distribución marginales que reduce la depreciación del bien en el MVDFD, el MVDFS proporciona una mayor apreciación en el valor de mercado del bien, como se enuncia en el siguiente resultado.

Teorema 5.7 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes independientes, siendo v_S su valor de mercado a través del MVDFS y v_{SWD} su valor de mercado a través del MVDFS mediante el modelo de probabilidad ponderado (5.3.1), entonces*

$$v_S \leq v_{SWD}. \quad (5.3.4)$$

Demostración. Teniendo en cuenta que la función de supervivencia asociada a la función de distribución $F_{WD}(i_1, i_2)$ del modelo (5.3.1), viene dada por

$$S_{WD}(i_1, i_2) = (1 - F_1^\alpha(i_1)) \cdot (1 - F_2^{1-\alpha}(i_2)) \quad (5.3.5)$$

donde $0 < \alpha < 1$, se verifica que

$$S_{WD}(i_1, i_2) \leq S_I(i_1, i_2)$$

y por consiguiente, a través del MVDFS obtenemos (5.3.4). \square

Asimismo, del Teorema 5.7, se tiene la siguiente comparación entre las valoraciones obtenidas a través de las distribuciones marginales del índice de calidad y el valor producido por el MVDFS mediante el modelo ponderado.

Corolario 5.8 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes independientes, siendo v_1 y v_2 sus valoraciones para cada componente del índice de calidad, y v_{SWD} su valor de mercado a través del MVDFS mediante el modelo de probabilidad ponderado (5.3.1), entonces*

$$\sup\{v_1, v_2\} \leq v_{SWD}.$$

Finalmente, comparamos el valor de mercado del bien a través del MVDFS para un índice de calidad bidimensional con componentes independientes, con las valoraciones a través del modelo de probabilidad ponderado de sus funciones de distribución marginales.

Teorema 5.9 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes independientes, siendo v_S su valor de mercado a través del MVDFS, y v_{DWD} y v_{SWD} sus valores de mercado a través del MVDFD y MVDFS, respectivamente, mediante el modelo de probabilidad ponderado (5.3.1), entonces*

$$v_{DWD} \leq v_S \leq v_{SWD}.$$

Demostración. A partir de (5.2.3) para los valores de mercado del bien con cada una de las componentes del índice de calidad, la siguiente cadena de desigualdades es inmediata

$$v_D \leq \inf\{v_1, v_2\} \leq v_{DWD} \leq \sup\{v_1, v_2\} \leq v_S \leq v_{SWD}$$

uniendo (5.2.6), (5.2.9), (5.3.3) y (5.3.4). \square

En este último resultado, se observa que para un índice de calidad bidimensional con componentes independientes, el valor proporcionado por el MVDFS está acotado por los

valores de mercado obtenidos por ambos métodos a partir del modelo de probabilidad ponderado que reduce la depreciación del bien en el MVDFD.

Índice de calidad de dos componentes dependientes

En el caso de dependencia entre las dos componentes del índice de calidad, la ponderación utilizada para reducir la depreciación del valor de mercado del bien es

$$F_{WD}(i_1, i_2) = pF_1(i_1) + (1 - p)F_2(i_2) \quad (5.3.6)$$

siendo $0 < p < 1$ que representa el peso asociado a la primera componente del índice de calidad, y los mecanismos para determinar el parámetro de la ponderación p se verán en el Apartado 5.3.3.

Para este modelo de probabilidad ponderado se satisface las mismas desigualdades que en el caso independiente dadas en (5.3.2)

$$\inf\{F_1(i_1), F_2(i_2)\} \leq F_{WD}(i_1, i_2) \leq \sup\{F_1(i_1), F_2(i_2)\}$$

Por tanto, si se aplica el MVDFD a partir del modelo ponderado (5.3.6), se obtiene la siguiente acotación

$$v_D \leq \inf\{v_1, v_2\} \leq v_{DWD} \leq \sup\{v_1, v_2\} \quad (5.3.7)$$

al igual que en el caso de independencia, donde v_{DWD} es el valor de mercado por el MVDFD a través de la función ponderada $F_{WD}(i_1, i_2)$ dada en (5.3.6) para el índice de calidad bidimensional. Como se observa en (5.3.7), se reduce la depreciación en el valor de mercado del bien cuando se dispone de un índice de calidad bidimensional (ver por ejemplo Herrerías (2002)).

No obstante, cabe señalar que el modelo ponderado de las componentes del índice de calidad en (5.3.6) no es un modelo de probabilidad bivalente, esto es, la función ponderada $F_{WD}(i_1, i_2)$ no es una función de distribución bivalente (ver Herrerías (2002)). Por ejemplo, es fácil comprobar que las marginales correspondientes a esta función

$$F_{WD1}(i_1) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{WD}(i_1, x) = pF_1(i_1) + (1 - p)$$

y

$$F_{WD2}(i_2) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{WD}(x, i_2) = p + (1 - p)F_2(i_2)$$

no convergen a cero, sino que convergen a uno menos su peso en el modelo ponderado

$$\lim_{i_1 \rightarrow -\infty} F_{WD1}(i_1) = 1 - p$$

y

$$\lim_{i_2 \rightarrow -\infty} F_{WD2}(i_2) = p$$

A pesar de ello, al igual que se estudia la valoración con el MVDFD en esta situación, si analizamos el comportamiento del MVDFS necesitamos de la supuesta función de supervivencia asociada al modelo bivalente ponderado (5.3.6) de las componentes del índice de calidad, que denotamos por $S_{WD}(i_1, i_2)$, sabiendo que no se corresponde realmente con una función de supervivencia bivalente.

Utilizando la expresión (1.1.1) de la función de supervivencia de un modelo bivalente a través de la función de distribución conjunta y sus correspondientes marginales, en este caso $F_{WD}(i_1, i_2)$ dada por (5.3.6), se obtiene que

$$S_{WD}(i_1, i_2) = 0 \tag{5.3.8}$$

es decir, la supuesta función de supervivencia asociada al modelo ponderado (5.3.6) es constante e igual a cero para cualesquiera que sean los valores (i_1, i_2) del índice de calidad del bien.

Así, en el siguiente resultado obtenemos que, bajo dependencia a partir del modelo de probabilidad ponderado que reduce la depreciación del bien en el MVDFD, el MVDFS alcanza el mayor valor posible de mercado del bien.

Teorema 5.10 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes dependientes, y v_{SWD} su valor de mercado a través del MVDFS mediante el modelo ponderado (5.3.6). Para cualquier valor (i_1, i_2) del índice de calidad de un bien, se verifica*

$$v_{SWD} = \sup(V). \quad (5.3.9)$$

Demostración. Teniendo en cuenta (5.3.8) y que la función de supervivencia $S_V(v)$ del valor de mercado V del bien alcanzará el cero en el extremo superior del soporte de su modelo de distribución, utilizando el MVDFS obtenemos que $v_{SWD} = \sup(V)$. \square

Además, de (5.3.7) y (5.3.9), se deduce la siguiente cadena de desigualdades

$$v_D \leq \inf\{v_1, v_2\} \leq v_{DWD} \leq \sup\{v_1, v_2\} \leq v_S \leq v_{SWD} = \sup(V)$$

donde se observa que, a partir del modelo de probabilidad original del índice de calidad bidimensional, el MVDFS proporciona un valor de mercado del bien cuyo supremo se alcanzaría con el modelo ponderado que reduce la depreciación del bien en el MVDFD, lo que puede interpretarse como la máxima apreciación en el valor de mercado del bien que podría producir el MVDFS al considerar una ponderación en las componentes del índice de calidad de dicho bien.

5.3.2. Ponderación de las funciones de supervivencia marginales

En este apartado utilizaremos el procedimiento de ponderación de las funciones de supervivencia marginales, a través de un razonamiento similar al apartado anterior, distinguiendo entre los casos de independencia y dependencia de las componentes del índice de calidad bidimensional, y en cada caso estudiamos el comportamiento tanto del MVDFS como del MVDFD, y la comparación entre ambos a partir de este tipo de ponderaciones.

Índice de calidad de dos componentes independientes

En el caso de independencia entre las dos componentes del índice de calidad del bien, la función de supervivencia bivalente viene dada por

$$S_I(i_1, i_2) = S_1(i_1) \cdot S_2(i_2) \leq \inf\{S_1(i_1), S_2(i_2)\}$$

En este sentido, consideramos la siguiente ponderación de las funciones de supervivencia marginales

$$S_{WS}(i_1, i_2) = S_1^\alpha(i_1) \cdot S_2^{1-\alpha}(i_2) \quad (5.3.10)$$

siendo $0 < \alpha < 1$ el peso asociado a la primera componente del índice de calidad, donde este parámetro de ponderación α se puede determinar por las mismas técnicas usadas en la ponderación de las funciones de distribución marginales, que veremos en el Apartado 5.3.3.

Además, a partir del modelo de probabilidad ponderado de las funciones de supervivencia marginales, vemos a continuación que la valoración a través del MVDFS

está acotada por las valoraciones que se obtienen con cada una de las componentes del índice de calidad.

Teorema 5.11 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes independientes, siendo v_{SWS} su valor de mercado a través del MVDFS mediante el modelo de probabilidad ponderado (5.3.10), y v_1 y v_2 sus valoraciones para cada componente del índice de calidad, entonces*

$$\inf\{v_1, v_2\} \leq v_{SWS} \leq \sup\{v_1, v_2\}. \quad (5.3.11)$$

Demostración. Observar que (5.3.10) define una función de supervivencia bivalente tal que satisface las siguientes desigualdades

$$\inf\{S_1(i_1), S_2(i_2)\} \leq S_{WS}(i_1, i_2) \leq \sup\{S_1(i_1), S_2(i_2)\} \quad (5.3.12)$$

cuya comprobación se realiza con el mismo razonamiento que el utilizado en Herrerías (2002) para (5.3.2), de donde se obtiene la acotación (5.3.11) del valor de mercado al utilizar el MVDFS. \square

Asimismo, este procedimiento de ponderación de las funciones de supervivencia marginales reduce la apreciación del bien en el MVDFS con respecto a la del modelo de distribución original del índice de calidad del mismo, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 5.12 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes independientes, siendo v_S su valor de mercado a través del MVDFS y v_{SWS} su valor de mercado a través del MVDFS mediante el modelo de probabilidad ponderado (5.3.10), entonces*

$$v_{SWS} \leq v_S.$$

Demostración. De (5.2.9) y (5.3.11) resulta inmediato que

$$v_{SWS} \leq \sup\{v_1, v_2\} \leq v_S$$

□

Por otro lado, para aplicar el MVDFD a partir del modelo de probabilidad ponderado (5.3.10), obtenemos su correspondiente función de distribución bivalente, que viene dada por

$$F_{WS}(i_1, i_2) = (1 - (1 - F_1(i_1))^\alpha) \cdot (1 - (1 - F_2(i_2))^{1-\alpha}) \quad (5.3.13)$$

donde $0 < \alpha < 1$, por lo que se verifica que

$$F_{WS}(i_1, i_2) \leq F_I(i_1, i_2)$$

y por consiguiente, a través del MVDFD para obtener valores de mercado del bien a partir de cada una de estas funciones de distribución, se tiene la siguiente desigualdad

$$v_{DWS} \leq v_D \quad (5.3.14)$$

es decir, a partir del modelo de probabilidad ponderado que reduce la apreciación del bien en el MVDFS, el MVDFD proporciona un valor de mercado del bien inferior al que se obtendría con el modelo de distribución original del índice de calidad del mismo, lo que puede interpretarse como una mayor depreciación en el valor de mercado del bien al considerar una ponderación en las funciones de supervivencia marginales de las componentes del índice de calidad de dicho bien.

Además, las valoraciones obtenidas a través de esta ponderación acotan al valor producido por el MVDFD para el modelo de probabilidad bivalente original, como vemos en el siguiente resultado.

Teorema 5.13 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes independientes, siendo v_D su valor de mercado a través del MVDFD y v_{DWS} y v_{SWS} sus valores de mercado a través del MVDFD y MVDFS, respectivamente, mediante la función de supervivencia ponderada (5.3.10), entonces*

$$v_{DWS} \leq v_D \leq v_{SWS}.$$

Demostración. A partir de (5.2.3) para los valores de mercado del bien con cada una de las componentes del índice de calidad, de (5.2.6), (5.2.9), (5.3.11) y (5.3.14), resulta inmediata la siguiente cadena de desigualdades

$$v_{DWS} \leq v_D \leq \inf\{v_1, v_2\} \leq v_{SWS} \leq \sup\{v_1, v_2\} \leq v_S$$

□

Índice de calidad de dos componentes dependientes

En el caso dependencia entre las dos componentes del índice de calidad, para reducir la apreciación del valor de mercado del bien, consideramos la siguiente ponderación de las funciones de supervivencia marginales

$$S_{WS}(i_1, i_2) = pS_1(i_1) + (1 - p)S_2(i_2) \tag{5.3.15}$$

siendo $0 < p < 1$ el peso asociado a la primera componente del índice de calidad, donde el parámetro de ponderación p se puede determinar por las mismas técnicas usadas en el caso de ponderación de las funciones de distribución marginales, que veremos en el Apartado 5.3.3.

Obsérvese que la función bivalente ponderada (5.3.15) satisface las desigualdades (5.3.12) al igual que en el caso independiente, con un razonamiento igual al utilizado por Herrerías (2002) a partir de (5.3.6).

Sin embargo, cabe destacar que este procedimiento de ponderación de las funciones de supervivencia marginales de las componentes del índice de calidad produce una función $S_{WS}(i_1, i_2)$ dada en (5.3.15) que no es realmente un modelo de probabilidad bivalente, al igual que ocurre con el modelo ponderado (5.3.6) que reduce la depreciación del valor mediante el MVDFD. Por ejemplo, es fácil comprobar que las supervivencias marginales correspondientes a esta función

$$S_{WS1}(i_1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} S_{WS}(i_1, x) = pS_1(i_1) + (1 - p)$$

y

$$S_{WS2}(i_2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} S_{WS}(x, i_2) = p + (1 - p)S_2(i_2)$$

no convergen a cero, sino que convergen a uno menos su peso en el modelo ponderado

$$\lim_{i_1 \rightarrow \infty} S_{WS1}(i_1) = 1 - p$$

y

$$\lim_{i_2 \rightarrow \infty} S_{WS2}(i_2) = p.$$

En cualquier caso, al igual que se estudian las valoraciones a través de ambos métodos mediante el modelo ponderado de las funciones de distribución marginales bajo dependencia, estudiaremos el comportamiento de ambos métodos mediante este modelo ponderado de las funciones de supervivencia marginales bajo dependencia, sabiendo que no se corresponde realmente con un modelo de probabilidad bivalente.

Obteniéndose los resultados que mostramos a continuación, cuyas demostraciones son similares al caso de independencia.

Teorema 5.14 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes dependientes, siendo v_1 y v_2 sus valores de mercado a través de cada componente del índice de calidad y v_{SWS} su valor de mercado a través del MVDFS mediante el modelo ponderado (5.3.15), entonces*

$$\inf\{v_1, v_2\} \leq v_{SWS} \leq \sup\{v_1, v_2\}. \quad (5.3.16)$$

Obsérvese que en el resultado anterior se obtiene la misma cadena de desigualdades que en el caso independiente, donde v_{SWS} es el valor de mercado por el MVDFS a través de la función ponderada $S_{WS}(i_1, i_2)$ dada en (5.3.15) para el índice de calidad bidimensional. Además, a partir del Teorema 5.14, en el siguiente resultado se establece que este procedimiento de ponderación reduce la apreciación en el valor de mercado del bien cuando se dispone de un índice de calidad bidimensional del mismo.

Teorema 5.15 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes dependientes, siendo v_S su valor de mercado a través del MVDFS y v_{SWS} su valor de mercado a través del MVDFS mediante el modelo ponderado (5.3.15), entonces*

$$v_{SWS} \leq v_S.$$

Asimismo, uniendo estos dos últimos resultados, obtenemos que el valor a través del MVDFS mediante la ponderación, está acotado por las valoraciones obtenidas a partir del modelo de probabilidad bivalente original del índice de calidad.

Corolario 5.16 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes dependientes, siendo v_D y v_S sus valores de mercado a través del MVDFD y MVDFS, respectivamente, y v_{SWS} su valoración a través del MVDFS mediante el modelo ponderado (5.3.15), entonces*

$$v_D \leq v_{SWS} \leq v_S.$$

Por último, para analizar el comportamiento del MVDFD en este caso, aunque hemos observado que el modelo ponderado (5.3.15) no es realmente un modelo de probabilidad bivalente, necesitamos la supuesta función de distribución asociada a este modelo bivalente ponderado, $F_{WS}(i_1, i_2)$, sabiendo a priori que no se corresponde con una función de distribución bivalente, al igual que ocurre con el modelo ponderado que se utiliza en (5.3.6).

Para ello utilizando la expresión (1.1.1) que determina la función de distribución a través de la función de supervivencia conjunta y sus correspondientes supervivencias marginales, en este caso a través de $S_{WS}(i_1, i_2)$ dada por (5.3.15), se deduce que

$$F_{WS}(i_1, i_2) = 0 \tag{5.3.17}$$

es decir, la supuesta función de distribución asociada al modelo ponderado (5.3.15) es constante e igual a cero para cualesquiera que sean los valores (i_1, i_2) del índice de calidad del bien.

Teorema 5.17 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien con componentes dependientes, y v_{DWS} su valor de mercado a través del MVDFD mediante el modelo ponderado (5.3.15). Para cualquier valor (i_1, i_2) del índice de calidad de un*

bien, se verifica

$$v_{DWS} = \inf(V).$$

Demostración. Teniendo en cuenta (5.3.17) y que la función de distribución $F_V(v)$ del valor de mercado V del bien alcanzará el cero en el extremo inferior del soporte de su modelo de distribución, utilizando el MVDFD obtenemos que $v_{DWS} = \inf(V)$. \square

Además, de (5.3.16) y (5.3.17), se deduce que

$$\inf(V) = v_{DWS} \leq v_D \leq \inf\{v_1, v_2\} \leq v_{SWS} \leq \sup\{v_1, v_2\} \leq v_S$$

donde se observa que, a partir del modelo de probabilidad original del índice de calidad bidimensional, el MVDFD proporciona un valor de mercado del bien cuyo ínfimo se alcanzaría con el modelo ponderado que reduce la apreciación del bien en el MVDFS, lo que puede interpretarse como la máxima depreciación en el valor de mercado del bien que podría producir el MVDFD al considerar una ponderación en las componentes del índice de calidad de dicho bien.

Observación 5.1 *Tanto en caso de independencia como de dependencia en un índice de calidad bidimensional, hemos obtenido que el valor proporcionado por el MVDFD para el modelo ponderado que reduce la depreciación está acotado por las valoraciones obtenidas con cada componente del índice de calidad, al igual que el valor proporcionado por el MVDFS para el modelo ponderado que reduce la apreciación. Sin embargo, no podemos comparar ambos valores, puesto que provienen de modelos ponderados diferentes sobre el mismo índice de calidad bidimensional.*

Observación 5.2 *Los resultados del comportamiento de ambos métodos de valoración tratados en este apartado, se mantienen en el caso multidimensional, tanto en*

la ponderación de las funciones de distribución marginales de un índice de calidad n dimensional, como en la ponderación de sus funciones de supervivencia marginales.

5.3.3. Métodos de generación de modelos de probabilidad ponderados en valoración

En el apartado anterior hemos estudiado el comportamiento del MVDFS mediante los procedimientos de ponderación utilizados para corregir la depreciación que produce el MVDFD, así como la extensión de estas técnicas de ponderación usuales a través de las funciones de supervivencia marginales del índice de calidad y el comportamiento de ambos, MVDFD y MVDFS, mediante estas últimas.

En cualquier tipo de ponderación, distribuciones o supervivencias marginales, tanto en el caso de independencia como de dependencia, surge la necesidad de determinar los pesos de la ponderación, es decir, los parámetros α y p en los modelos de probabilidad ponderados. Herrerías (2002) y García y García (2003) analizan tres técnicas principales para la generación de los pesos, y por consiguiente, para la generación del modelo de distribución ponderado: subjetivas (suministrada por un experto), modas (relación entre los valores modales) y econométricas (ajuste lineal entre los modelos).

En este contexto, Herrerías (2002) comenta que bajo independencia de las componentes del índice de calidad pueden utilizarse los tres procedimientos, con las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos; sin embargo, bajo dependencia entre las componentes del índice, estos procedimientos de generación de los pesos se reducen al subjetivo y econométrico.

No obstante, no hemos encontrado ningún motivo particular por el que descartar el

método de las modas bajo dependencia, excepto los mismos inconvenientes y críticas de esta técnica en el caso de independencia.

Por un lado, en el método subjetivo, el experto (perito o tasador) suministra la información sobre los pesos de los índices, donde cabe señalar los inconvenientes de la subjetividad del mismo, comentada en Herrerías (2002).

Veamos ahora las ideas generales y algunos comentarios sobre estos procedimientos de ponderación, así como una nueva técnica que permite generar modelos de probabilidad ponderados a partir de las componentes del índice de calidad y utilizando únicamente la información proporcionada por dicho índice.

Método econométrico

La generación de los pesos de la ponderación del método econométrico se basa en la estimación de los modelos

$$\log F_V(v_t) = \alpha \log F_1(i_{1t}) + \beta \log F_2(i_{2t}) + u_t$$

en el caso de independencia, y

$$F_V(v_t) = pF_1(i_{1t}) + qF_2(i_{2t}) + u_t$$

en el caso de dependencia, mediante mínimos cuadrados restringidos, puesto que $\alpha + \beta = 1$ y $p + q = 1$, respectivamente.

De forma similar, podríamos generar los modelos de probabilidad ponderados mediante el ajuste lineal de las correspondientes funciones de supervivencia, es decir,

$$\log S_V(v_t) = \alpha \log S_1(i_{1t}) + \beta \log S_2(i_{2t}) + u_t$$

en el caso de independencia, y

$$S_V(v_t) = pS_1(i_{1t}) + qS_2(i_{2t}) + u_t$$

en el caso de dependencia. Al igual que en el caso anterior, utilizando la estimación de mínimos cuadrados restringidos, puesto que $\alpha + \beta = 1$ y $p + q = 1$, respectivamente.

No obstante, la principal ventaja de los métodos de valoración de las dos funciones (MVDFD y MVDFS), frente a otras metodologías valorativas, consiste en la escasa información en la práctica, lo que reduce la utilidad de los modelos de regresión en tal situación, y por consiguiente, en la estimación de los pesos en los modelos anteriores que buscan el mejor ajuste entre las distribuciones o supervivencias, para mejorar las valoraciones. Además, pueden provocar la acumulación de los posibles errores de la estimación de los pesos con los propios del ajuste de los modelos de probabilidad tanto del valor de mercado del bien como de su índice de calidad.

Método de las modas

El método de las modas para generar los pesos de la ponderación, se basa en la igualdad de los valores modales entre las funciones de distribución del valor de mercado y del modelo ponderado de los índices de calidad

$$F_V(m) = F_{WD}(m_1, m_2)$$

que en el caso de independencia entre los índices de calidad se reduce a

$$F_V(m) = F_1^\alpha(m_1)F_2^{1-\alpha}(m_2)$$

No obstante, en el MVDFD no se impone la proporcionalidad entre el índice de calidad y el valor de mercado, como sucede en el método de valoración sintético clásico,

excepto en los valores extremos de sus soportes, por lo que al índice modal no tiene por que corresponderle la valoración modal, véase Ballestero y Rodríguez (1999) y Herrerías (2002).

Además, si resolvemos la ecuación de los valores modales, se tiene que

$$\frac{F_V(m)}{F_2(m_2)} = \left(\frac{F_1(m_1)}{F_2(m_2)} \right)^\alpha$$

de donde se deduce que si $F_1(m_1) = F_2(m_2)$, la ecuación tiene sentido únicamente cuando $F_V(m) = F_1(m_1) = F_2(m_2)$. Este hecho supone un inconveniente para esta técnica, puesto que se impone una fuerte restricción sobre el valor modal de mercado.

En el caso $F_1(m_1) \neq F_2(m_2)$, entonces

$$\alpha = \frac{\log F_V(m) - \log F_2(m_2)}{\log F_1(m_1) - \log F_2(m_2)}$$

en donde se puede observar que dicho peso podría ser negativo o mayor que uno, por ejemplo:

- si $F_V(m) < F_2(m_2) < F_1(m_1)$, entonces $\alpha < 0$
- si $F_V(m) < F_1(m_1) < F_2(m_2)$, entonces $\alpha > 1$

De forma que se observa otro inconveniente del método de las modas, puesto que para generar pesos factibles, es necesario imponer la siguiente restricción sobre el valor modal de la distribución del valor de mercado

$$F_V(m) \in [F_i(m_i), F_j(m_j)] \tag{5.3.18}$$

con $i \neq j \in \{1, 2\}$ tales que $F_i(m_i) < F_j(m_j)$.

Por otra parte, bajo dependencia de los índices de calidad, la técnica de las modas viene dada por

$$F_V(m) = pF_1(m_1) + (1 - p)F_2(m_2)$$

o equivalentemente,

$$F_V(m) - F_2(m_2) = p(F_1(m_1) - F_2(m_2))$$

de donde se deduce que si $F_1(m_1) = F_2(m_2)$, la ecuación tiene sentido únicamente cuando $F_V(m) = F_1(m_1) = F_2(m_2)$, al igual que en el caso de independencia.

En el caso $F_1(m_1) \neq F_2(m_2)$, entonces

$$p = \frac{F_V(m) - F_2(m_2)}{F_1(m_1) - F_2(m_2)}$$

podría ser negativo o mayor que uno, como en los ejemplos del caso de independencia, por lo que es necesario imponer la misma restricción (5.3.18) sobre el valor modal de la distribución del valor de mercado.

Obsérvese que los inconvenientes y críticas encontradas para esta técnica, bajo dependencia de las componentes del índice de calidad, son las mismas que en el caso de independencia.

Análogamente, si planteamos la técnica de las modas a través de las funciones de supervivencia para generar los pesos de la ponderación

$$S_V(m) = S_{WS}(m_1, m_2)$$

en el caso de independencia entre los índices de calidad se reduce a

$$S_V(m) = S_1^\alpha(m_1)S_2^{1-\alpha}(m_2)$$

de donde resulta que

$$\frac{S_V(m)}{S_2(m_2)} = \left(\frac{S_1(m_1)}{S_2(m_2)} \right)^\alpha$$

y al igual que en la ponderación de las funciones de distribución marginales, cuando $S_1(m_1) = S_2(m_2)$ o equivalentemente $F_1(m_1) = F_2(m_2)$, la ecuación tiene sentido únicamente para $F_V(m) = F_1(m_1) = F_2(m_2)$, obteniéndose la misma crítica para esta técnica, puesto que se impone una fuerte restricción sobre el valor modal de mercado.

Por otro lado, si $S_1(m_1) \neq S_2(m_2)$, es decir, $F_1(m_1) \neq F_2(m_2)$, entonces

$$\alpha = \frac{\log S_V(m) - \log S_2(m_2)}{\log S_1(m_1) - \log S_2(m_2)}$$

el cual podría ser negativo o mayor que uno, en un sentido dual a los casos de la ponderación de las distribuciones marginales, por ejemplo:

- si $S_V(m) > S_2(m_2) > S_1(m_1)$, es decir, $F_V(m) < F_2(m_2) < F_1(m_1)$, entonces $\alpha > 1$
- si $S_V(m) > S_1(m_1) > S_2(m_2)$, es decir, $F_V(m) < F_1(m_1) < F_2(m_2)$, entonces $\alpha < 0$

Es decir, se obtiene la misma crítica del método de las modas, puesto que para generar pesos factibles, es necesario imponer la restricción (5.3.18) sobre el valor modal de la distribución del valor de mercado.

Asimismo, en el caso de componentes dependientes del índice de calidad, la técnica de las modas, mediante las funciones de supervivencia, viene dada por

$$S_V(m) = pS_1(m_1) + (1 - p)S_2(m_2)$$

es decir,

$$S_V(m) - S_2(m_2) = p(S_1(m_1) - S_2(m_2))$$

o equivalentemente,

$$F_2(m_2) - F_V(m) = p(F_2(m_2) - F_1(m_1))$$

obteniéndose la misma ecuación para el peso que al ponderar las distribuciones marginales.

Por tanto, los inconvenientes encontrados para esta técnica al ponderar las supervivencias marginales bajo dependencia de las componentes del índice de calidad, son los mismos que al ponderar las distribuciones marginales, y en ambos casos coinciden con las críticas en el caso de independencia.

Método de la media modal

Con el objeto de evitar los inconvenientes de la subjetividad, de los métodos econométricos en ausencia de datos y de la no proporcionalidad de las modas, se puede plantear un método basado en los valores modales de los índices de calidad, que nos permita generar modelos de probabilidad ponderados mediante las funciones de distribución marginales, los cuales reducen la depreciación del MVDFD, o modelos de probabilidad ponderados mediante las funciones de supervivencia marginales que reducen la apreciación del MVDFS, puesto que para cualquier ponderación con $0 < \alpha < 1$ (bajo independencia) y $0 < p < 1$ (bajo dependencia), el correspondiente modelo ponderado se encuentra acotado por los modelos de probabilidad marginales.

Por ejemplo, para la ponderación de las funciones de distribución marginales, para

todo (i_1, i_2)

$$\inf\{F_1(i_1), F_2(i_2)\} \leq F_{WD}(i_1, i_2) \leq \sup\{F_1(i_1), F_2(i_2)\}$$

y en particular, para el índice de calidad modal (m_1, m_2)

$$\inf\{F_1(m_1), F_2(m_2)\} \leq F_{WD}(m_1, m_2) \leq \sup\{F_1(m_1), F_2(m_2)\}$$

es decir, el valor modal de la función de distribución ponderada se encuentra entre los valores modales de las funciones de distribución marginales (en términos de las funciones de densidad, el máximo valor de la densidad ponderada se sitúa entre los máximos valores de las densidades marginales).

En este sentido, con el objetivo de corregir las valoraciones mediante un modelo de probabilidad ponderado, proponemos utilizar aquella ponderación de los pesos (α ó p) que minimizan en algún sentido la distancia entre estos tres valores modales, es decir, aquellos pesos para los que el valor modal de la función de distribución ponderada es la media de los dos valores modales de las funciones de distribución marginales

$$F_{WD}(m_1, m_2) = \frac{F_1(m_1) + F_2(m_2)}{2}$$

Nótese que esta técnica de la media modal proporciona un modelo ponderado para los índices de calidad usando únicamente la información disponible sobre dichos índices, por lo que no está afectado por la elección del modelo de distribución que se le asigne al valor de mercado.

Así, en el caso de independencia, el método de la media modal viene determinado por

$$F_1^\alpha(m_1)F_2^{1-\alpha}(m_2) = \frac{F_1(m_1) + F_2(m_2)}{2}$$

es decir,

$$\left(\frac{F_1(m_1)}{F_2(m_2)}\right)^\alpha = \frac{F_1(m_1) + F_2(m_2)}{2F_2(m_2)}$$

de donde se obtiene que si $F_1(m_1) = F_2(m_2)$ entonces α puede tomar cualquier valor en $(0, 1)$, y si $F_1(m_1) \neq F_2(m_2)$ entonces

$$\alpha = \frac{\log\left(\frac{F_1(m_1) + F_2(m_2)}{2}\right) - \log F_2(m_2)}{\log F_1(m_1) - \log F_2(m_2)} \in (0, 1).$$

Además, si aplicamos esta técnica en caso de dependencia entre los índices de calidad,

$$pF_1(m_1) + (1 - p)F_2(m_2) = \frac{F_1(m_1) + F_2(m_2)}{2}$$

es decir,

$$p(F_1(m_1) - F_2(m_2)) = \frac{F_1(m_1) - F_2(m_2)}{2}$$

de donde se obtiene que si $F_1(m_1) = F_2(m_2)$ entonces p puede tomar cualquier valor en $(0, 1)$, y si $F_1(m_1) \neq F_2(m_2)$ entonces $p = \frac{1}{2}$.

Obsérvese que bajo dependencia, el método de la media modal proporciona el mismo peso a cada uno de los índices de calidad, lo que nos indica la coherencia de esta técnica, puesto que la propia estructura de dependencia entre las componentes del índice incluye el predominio e importancia de una sobre la otra, y por tanto resultaría contraproducente asociarles pesos distintos en el modelo ponderado.

Análogamente, para la ponderación de las funciones de supervivencia marginales, y en particular, para el índice de calidad modal (m_1, m_2) , se verifica que

$$\inf\{S_1(m_1), S_2(m_2)\} \leq S_{WS}(m_1, m_2) \leq \sup\{S_1(m_1), S_2(m_2)\}$$

es decir, el valor modal de la función de supervivencia ponderada se encuentra entre los valores modales de las funciones de supervivencia marginales.

Por lo que, proponemos utilizar aquella ponderación con los pesos (α ó p) que minimizan en algún sentido la distancia entre estos tres valores modales, es decir, aquellos pesos para los que el valor modal de la función de supervivencia ponderada es la media de los dos valores modales de las funciones de supervivencia marginales

$$S_{WS}(m_1, m_2) = \frac{S_1(m_1) + S_2(m_2)}{2}$$

De modo que en el caso de independencia, el método de la media modal está determinado por

$$\left(\frac{S_1(m_1)}{S_2(m_2)} \right)^\alpha = \frac{S_1(m_1) + S_2(m_2)}{2S_2(m_2)}$$

de donde se obtiene que si $S_1(m_1) = S_2(m_2)$ o equivalentemente $F_1(m_1) = F_2(m_2)$, entonces α puede tomar cualquier valor en $(0, 1)$, y si $S_1(m_1) \neq S_2(m_2)$ entonces

$$\alpha = \frac{\log \left(1 - \frac{F_1(m_1) + F_2(m_2)}{2} \right) - \log (1 - F_2(m_2))}{\log (1 - F_1(m_1)) - \log (1 - F_2(m_2))} \in (0, 1)$$

Asimismo, bajo dependencia entre los índices de calidad, se establece la relación

$$pS_1(m_1) + (1 - p)S_2(m_2) = \frac{S_1(m_1) + S_2(m_2)}{2}$$

es decir,

$$p(S_1(m_1) - S_2(m_2)) = \frac{S_1(m_1) - S_2(m_2)}{2}$$

o equivalentemente,

$$p(F_1(m_1) - F_2(m_2)) = \frac{F_1(m_1) - F_2(m_2)}{2}$$

de donde se obtiene que si $F_1(m_1) = F_2(m_2)$ entonces p puede tomar cualquier valor en $(0, 1)$, y si $F_1(m_1) \neq F_2(m_2)$ entonces $p = \frac{1}{2}$.

Obsérvese que, al igual que en el caso de ponderación de las funciones de distribución marginales bajo dependencia, el método de la media modal proporciona el mismo peso a cada uno de los índices de calidad, ya que la propia estructura de dependencia entre ellos incluye el predominio e importancia de uno sobre el otro.

5.4. Estadísticos extremos en los métodos de valoración

En las dos secciones anteriores hemos estudiado los métodos de valoración de las dos funciones, introduciendo un nuevo método para encontrar el valor de mercado de un bien, así como el comportamiento de estas metodologías a través de las técnicas de ponderación utilizadas para reducir la depreciación (apreciación) producidas por estos métodos de valoración en un ambiente de incertidumbre, junto con algunos inconvenientes de los mismos.

Por ejemplo, las distintas técnicas de ponderación, son procedimientos para obtener valores de mercado del bien acotados por las valoraciones con cada una de las componentes del índice de calidad. No obstante, estos modelos ponderados, constituyen desviaciones del verdadero modelo de probabilidad bivalente del índice de calidad, a partir del cual su valor de mercado real puede ser tanto superior como inferior. Más aún, los modelos ponderados considerados bajo dependencia entre las componentes del índice de calidad no son verdaderos modelos de probabilidad bivariantes.

En este sentido, resulta de utilidad disponer de otros mecanismos que nos permitan abordar la reducción de la depreciación (apreciación) de estos métodos en el caso de

más de un índice de calidad.

Por ello, en esta sección nos proponemos utilizar los estadísticos extremos, mínimo y máximo, del índice de calidad bidimensional, como estadísticos agregados que reducen la dimensionalidad del índice de calidad, para obtener valores de mercado mediante los métodos de valoración de las dos funciones, a través de sus modelos de probabilidad univariantes, que reducen la depreciación (apreciación) en el mercado del bien, o considerarse como simples acotaciones para las anteriores valoraciones basadas en la variable bidimensional del índice de calidad.

Además, la reducción de la dimensionalidad a través de los estadísticos extremos, permite ampliar el principio básico de valoración a todo el conjunto de posibles valores para sus índices, utilizando como ordenación de los pares de índices la correspondiente a sus medidas agregadas mediante los estadísticos extremos; dado que el principio básico de valoración para un índice de calidad bidimensional no establece la ordenación entre los valores de mercado de dos bienes con índices (i_{1j}, i_{2j}) e (i_{1k}, i_{2k}) tales que $i_{1j} < i_{1k}$ e $i_{2j} > i_{2k}$.

Obviamente, si uno de los estadísticos extremos del índice de calidad de un bien es mayor, los métodos de valoración de las dos funciones le asocian un mayor valor de mercado. Así, a partir de los estadísticos extremos del índice de calidad bidimensional, para cualesquiera que sean sus índices de calidad, se puede asegurar previamente la ordenación entre los valores de mercado correspondientes a dichos bienes.

5.4.1. Estadístico máximo en el método de valoración de las dos funciones de distribución

En este apartado nos centraremos en el estadístico máximo como medida de agregación del índice de calidad bidimensional que combina las distintas componentes en una medida de información univariante. De este modo, analizaremos el comportamiento de las valoraciones obtenidas a partir del estadístico extremo máximo con respecto a las del MVDFD, teniendo en cuenta la siguiente notación.

Dado un valor $(I_1, I_2) = (i_1, i_2)$ del índice de calidad bidimensional de un bien, se representa por i_m e i_M la mínima y máxima componente de este punto (i_1, i_2) , respectivamente.

En este contexto, a partir de la función de distribución $F_{(2)}(i)$ del estadístico máximo dada en (1.1.4), las valoraciones mediante el MVDFD están determinadas por el siguiente modelo

$$v_{(2)m} = \phi_{(2)}(i_m)$$

y

$$v_{(2)M} = \phi_{(2)}(i_M)$$

donde $\phi_{(2)} = F_V^{-1} \circ F_{(2)}$, para las que se verifica trivialmente la desigualdad

$$v_{(2)m} \leq v_{(2)M}.$$

Además, estas valoraciones no tienen por que coincidir con los valores de mercado mínimo y máximo del bien, simplemente son valoraciones de dicho bien con índice de calidad (i_1, i_2) correspondientes al estadístico máximo de su modelo de probabilidad bivalente $F_I(i_1, i_2)$.

Estas valoraciones correspondientes al estadístico máximo mediante los métodos de valoración de las dos funciones nos proporcionan la acotación de la valoración de dicho bien mediante MVDFD correspondiente al modelo de probabilidad bivalente del índice de calidad, es decir, las dos cotas obtenidas a través del estadístico ordenado máximo pueden interpretarse como un aumento y una reducción, respectivamente, de la depreciación en el mercado sufrida por el bien mediante el MVDFD cuando se dispone de más de un índice de calidad del mismo.

Teorema 5.18 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_D su valor de mercado a través del MVDFD y $v_{(2)m}$ y $v_{(2)M}$ sus valores de mercado a través del estadístico ordenado máximo en cada una de las dos componentes del índice, entonces*

$$v_{(2)m} \leq v_D \leq v_{(2)M}.$$

Demostración. A partir de la función de distribución del máximo (1.1.4), y los valores (i_1, i_2) de los dos índices de calidad de un bien, es inmediato que

$$F_{(2)}(i_m) = F_I(i_m, i_m) \leq F_I(i_1, i_2) \leq F_I(i_M, i_M) = F_{(2)}(i_M)$$

siendo $(i_1, i_2) = (i_m, i_M)$ cuando $i_1 \leq i_2$, e $(i_1, i_2) = (i_M, i_m)$ cuando $i_1 \geq i_2$. De donde se deduce el enunciado. \square

Además, se obtienen las siguientes desigualdades entre los valores de mercado del bien correspondientes al estadístico máximo y las valoraciones del mismo obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad bidimensional.

Teorema 5.19 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_1 y v_2 sus valores de mercado a través del MVDFD para las componentes I_1 e*

I_2 , respectivamente. Sean $v_{(2)m}$ y $v_{(2)M}$ los valores de mercado a través del estadístico ordenado máximo en cada una de las dos componentes del índice, entonces

$$v_{(2)m} \leq \inf\{v_1, v_2\} \quad y \quad v_{(2)M} \leq \sup\{v_1, v_2\}.$$

Demostración. Evidentemente, de la función de distribución del máximo (1.1.4), y los valores (i_1, i_2) de los dos índices de calidad de un bien, se tiene que

$$F_{(2)}(i_m) = F_I(i_m, i_m) \leq F_I(i_1, i_2) \leq \inf\{F_1(i_1), F_2(i_2)\}$$

siendo $(i_1, i_2) = (i_m, i_m)$ cuando $i_1 \leq i_2$, e $(i_1, i_2) = (i_M, i_m)$ cuando $i_1 \geq i_2$; de donde resulta que $v_{(2)m} \leq \inf\{v_1, v_2\}$.

Asimismo, para la distribución del máximo en el mayor valor de las componentes del índice

$$F_{(2)}(i_M) = F_I(i_M, i_M) \leq \inf\{F_1(i_M), F_2(i_M)\}$$

por tanto, $F_{(2)}(i_M) \leq F_1(i_1)$ cuando $i_1 = i_M$ y $F_{(2)}(i_M) \leq F_2(i_2)$ cuando $i_2 = i_M$, es decir

$$F_{(2)}(i_M) \leq \sup\{F_1(i_1), F_2(i_2)\}$$

y por consiguiente, $v_{(2)M} \leq \sup\{v_1, v_2\}$. □

Consecuentemente, el estadístico máximo de un índice de calidad bidimensional proporciona en su menor componente una mayor depreciación del valor de mercado, y en su mayor componente produce una valoración que no supera a la mayor de las obtenidas individualmente con las distribuciones univariantes de cada una de las componentes de dicho índice mediante el MVDFD.

A partir de estos resultados, surge la siguiente cuestión: la reducción de la depreciación del bien en el mercado al utilizar el estadístico máximo en lugar del índice

de calidad bidimensional mediante el MVDFD llega a incluirse entre las valoraciones obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad, es decir,

$$¿ \inf\{v_1, v_2\} \leq v_{(2)M} ?$$

En general, no se puede asegurar esta acotación, por lo que la valoración máxima producida por el estadístico máximo no siempre está entre los valores de mercado obtenidos por cada componente del índice de calidad, como se prueba en el siguiente resultado.

Teorema 5.20 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_1 y v_2 sus valores de mercado a través del MVDFD para las componentes I_1 e I_2 , respectivamente, y $v_{(2)M}$ el valor de mercado a través del estadístico ordenado máximo en la mayor componente del índice. Entonces,*

$$\inf\{v_1, v_2\} \leq v_{(2)M} \leq \sup\{v_1, v_2\}$$

si se verifica que $F_I(i_1, i_1) \geq F_2(i_2)$ cuando $i_1 \geq i_2$ ó $F_I(i_2, i_2) \geq F_1(i_1)$ cuando $i_1 \leq i_2$.

5.4.2. Estadístico mínimo en el método de valoración de las dos funciones de distribución

En este apartado utilizaremos el estadístico mínimo como medida de agregación del índice de calidad bidimensional que combina las distintas componentes en una medida de agregación univariante y estudiaremos el comportamiento de las valoraciones a través de este estadístico con respecto a las del MVDFD.

Para ello, a partir de la función de distribución $F_{(1)}(i)$ del estadístico mínimo dada en (1.1.5), las valoraciones mediante el MVDFD están definidas a través del siguiente modelo

$$v_{(1)m} = \phi_{(1)}(i_m)$$

y

$$v_{(1)M} = \phi_{(1)}(i_M)$$

donde $\phi_{(1)} = F_V^{-1} \circ F_{(1)}$, para las que se cumple la siguiente desigualdad

$$v_{(1)m} \leq v_{(1)M}.$$

Al igual que el estadístico máximo, el mínimo proporciona valoraciones del bien con índice de calidad (i_1, i_2) , y éstas no tienen por que coincidir con los valores extremos del mercado de dicho bien.

Asimismo, a partir del estadístico mínimo se obtienen valores de mercado del bien mediante los métodos de valoración de las dos funciones mayores que la valoración del mismo mediante el MVDFD utilizando el modelo de probabilidad bivalente del índice de calidad, los que pueden interpretarse como reducciones de la depreciación en el mercado sufrida por el bien mediante el MVDFD cuando se dispone de más de un índice de calidad del mismo, es decir, ambos valores de mercado obtenidos mediante el estadístico ordenado mínimo reducen la depreciación del MVDFD en el caso bidimensional.

Teorema 5.21 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_D su valor de mercado a través del MVDFD y $v_{(1)m}$ y $v_{(1)M}$ sus valores de mercado a través del estadístico ordenado mínimo en cada una de las dos componentes del índice, entonces*

$$v_D \leq v_{(1)m} \leq v_{(1)M}.$$

Demostración. A partir de la función de supervivencia del mínimo (1.1.5), y los valores (i_1, i_2) de los dos índices de calidad de un bien, es inmediato que

$$S_{(1)}(i_m) = S_I(i_m, i_m) \geq S_I(i_1, i_2) \geq S_I(i_M, i_M) = S_{(1)}(i_M)$$

siendo $(i_1, i_2) = (i_m, i_M)$ cuando $i_1 \leq i_2$, e $(i_1, i_2) = (i_M, i_m)$ cuando $i_1 \geq i_2$, o equivalentemente,

$$F_{(1)}(i_m) \leq 1 - S_I(i_1, i_2) \leq F_{(1)}(i_M)$$

y utilizando (1.1.1), tenemos que

$$F_I(i_1, i_2) \leq 1 - S_I(i_1, i_2) \leq F_{(1)}(i_M)$$

por lo que, $v_D \leq v_{(1)M}$.

Para la otra desigualdad, tenemos que comprobar si $F_I(i_1, i_2) \leq F_{(1)}(i_m)$. Para ello, es suficiente ver que la distribución del mínimo dada en (1.1.5) puede expresarse como

$$\begin{aligned} F_{(1)}(i_m) &= (F_1(i_m) - F_I(i_m, i_M)) + (F_2(i_m) - F_I(i_M, i_m)) \\ &\quad + (F_I(i_m, i_M) - F_I(i_m, i_m)) + (F_I(i_M, i_m) - F_I(i_m, i_m)) \\ &\quad + F_I(i_m, i_m) \end{aligned}$$

donde cada sumando es no negativo, y la distribución bivalente del índice de calidad puede escribirse como

$$F_I(i_1, i_2) = \begin{cases} (F_I(i_m, i_M) - F_I(i_m, i_m)) + F_I(i_m, i_m) & \text{si } (i_1, i_2) = (i_m, i_M) \\ (F_I(i_M, i_m) - F_I(i_m, i_m)) + F_I(i_m, i_m) & \text{si } (i_1, i_2) = (i_M, i_m) \end{cases}$$

y por tanto, $v_D \leq v_{(1)m}$. □

Además, se obtienen las siguientes desigualdades entre los valores de mercado del bien correspondientes al estadístico mínimo y las valoraciones del mismo obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad bidimensional.

Teorema 5.22 Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_1 y v_2 sus valores de mercado a través del MVDFD para las componentes I_1 e I_2 , respectivamente. Sean $v_{(1)m}$ y $v_{(1)M}$ los valores de mercado a través del estadístico ordenado mínimo en cada una de las dos componentes del índice, entonces

$$v_{(1)m} \geq \inf\{v_1, v_2\} \quad y \quad v_{(1)M} \geq \sup\{v_1, v_2\}.$$

Demostración. Evidentemente, de la función de distribución del mínimo (1.1.5) y los valores (i_1, i_2) de los dos índices de calidad de un bien, se tiene que

$$F_{(1)}(i_M) = F_1(i_M) + F_2(i_M) - F_I(i_M, i_M) \geq \sup\{F_1(i_M), F_2(i_M)\}$$

siendo $(i_1, i_2) = (i_m, i_M)$ cuando $i_1 \leq i_2$, e $(i_1, i_2) = (i_M, i_m)$ cuando $i_1 \geq i_2$; y por consiguiente,

$$F_{(1)}(i_M) \geq \sup\{F_1(i_1), F_2(i_2)\}$$

de donde resulta que $v_{(1)M} \geq \sup\{v_1, v_2\}$.

Asimismo, para la distribución del mínimo en el menor valor de las componentes del índice

$$F_{(1)}(i_m) = F_1(i_m) + F_2(i_m) - F_I(i_m, i_m) \geq \sup\{F_1(i_m), F_2(i_m)\}$$

de donde se obtiene que

$$F_{(1)}(i_m) \geq \inf\{F_1(i_1), F_2(i_2)\}$$

y por tanto, $v_{(1)m} \geq \inf\{v_1, v_2\}$. □

Este último resultado muestra que el mayor valor a través del estadístico mínimo es superior a la mejor de las valoraciones obtenidas individualmente con las distribuciones

marginales del índice de calidad, es decir, una apreciación del bien en el mercado. Además, el menor valor a través del estadístico mínimo es superior a la peor de las valoraciones obtenidas con cada componente.

De forma análoga al estadístico máximo, las anteriores desigualdades de los valores de mercado basados en el estadístico ordenado mínimo del índice de calidad bidimensional, conducen a la siguiente cuestión: la menor valoración del bien en el mercado al utilizar el estadístico mínimo en lugar del índice de calidad bidimensional mediante el MVDFD llega a incluirse entre las valoraciones obtenidas a través de cada una de las componentes del índice de calidad, es decir,

$$¿ v_{(1)m} \leq \sup\{v_1, v_2\} ?$$

En general, no se puede asegurar esta acotación, por lo que la valoración mínima producida por el estadístico mínimo no siempre está entre los valores de mercado obtenidos para cada componente del índice de calidad, como se comprueba en el siguiente resultado.

Teorema 5.23 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_1 y v_2 sus valores de mercado a través del MVDFD para las componentes I_1 e I_2 , respectivamente, y $v_{(1)m}$ el valor de mercado a través del estadístico ordenado mínimo en la menor componente del índice. Entonces,*

$$\inf\{v_1, v_2\} \leq v_{(1)m} \leq \sup\{v_1, v_2\}$$

si se verifica que $S_I(i_1, i_1) \geq S_2(i_2)$ cuando $i_1 \leq i_2$ ó $S_I(i_2, i_2) \geq S_1(i_1)$ cuando $i_1 \geq i_2$.

Por otro lado, combinando el Teorema 5.20 correspondiente al estadístico máximo y el Teorema 5.23 de las valoraciones con el estadístico mínimo, tenemos que no siempre

se verifica que $\inf\{v_1, v_2\} \leq v_{(2)M}$ y que $v_{(1)m} \leq \sup\{v_1, v_2\}$. Por tanto, cuando no se cumplen las condiciones de uno de los Teoremas 5.20 y 5.23, se verifica que

$$v_{(2)M} \leq v_{(1)m}$$

en este caso, la valoración máxima que proporciona el estadístico máximo es inferior al menor valor de mercado que produce el mínimo estadístico.

No obstante, no podemos asegurar dicha desigualdad para cualquier par de índices de calidad del bien a valorar, es decir, el menor valor de mercado a partir del estadístico mínimo puede ser inferior al mayor valor de mercado a través del máximo, en cuyo caso, ambos se encuentran acotados por las valoraciones obtenidas individualmente con cada una de las componentes del índice de calidad, resultado que se establece a continuación.

Teorema 5.24 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo $v_{(1)m}$ su menor valor de mercado mediante el estadístico ordenado mínimo y $v_{(2)M}$ su mayor valor de mercado mediante el estadístico ordenado máximo. Entonces,*

$$v_{(1)m} \leq v_{(2)M}$$

si se verifica que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_1(i_1) - F_I(i_2, i_2) + F_I(i_2, i_1) - F_I(i_1, i_1) & \text{si } i_1 \leq i_2 \\ \leq \inf\{F(i_2, i_1) - F_I(i_1, i_1), F_2(i_2) - F_I(i_2, i_2) + F_I(i_2, i_1) - F_2(i_1)\} & \\ F_2(i_2) - F_I(i_1, i_1) + F_I(i_2, i_1) - F_I(i_2, i_2) & \text{si } i_1 \geq i_2 \\ \leq \inf\{F_I(i_2, i_1) - F_I(i_2, i_2), F_1(i_1) - F_I(i_1, i_1) + F_I(i_2, i_1) - F_1(i_2)\} & \end{array} \right.$$

5.4.3. Estadísticos mínimo y máximo en el método de valoración de las dos funciones de supervivencia

En este apartado, analizamos los valores de mercado del bien correspondientes a los estadísticos extremos, mínimo y máximo, mediante los métodos de valoración de las dos funciones, los cuales proporcionan acotaciones para la valoración de dicho bien mediante el MVDFS en el modelo de probabilidad bivalente del índice de calidad.

En primer lugar, las valoraciones obtenidas por el estadístico mínimo constituyen cotas inferiores y superiores del valor de mercado a través del MVDFS, lo que puede interpretarse como una reducción y un aumento, respectivamente, de la apreciación en el mercado sufrida por el bien mediante el MVDFS cuando se dispone de más de un índice de calidad del mismo.

Teorema 5.25 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_S su valor de mercado a través del MVDFS y $v_{(1)m}$ y $v_{(1)M}$ sus valores de mercado a través del estadístico ordenado mínimo en cada una de las dos componentes del índice, entonces*

$$v_{(1)m} \leq v_S \leq v_{(1)M}.$$

Demostración. A partir de la función de supervivencia del mínimo (1.1.2), y los valores (i_1, i_2) de los dos índices de calidad de un bien, es inmediato que

$$S_{(1)}(i_m) = S_I(i_m, i_m) \geq S_I(i_1, i_2) \geq S_I(i_M, i_M) = S_{(1)}(i_M)$$

siendo $(i_1, i_2) = (i_m, i_M)$ cuando $i_1 \leq i_2$, e $(i_1, i_2) = (i_M, i_m)$ cuando $i_1 \geq i_2$; y por la monotonía decreciente de la inversa de la función de supervivencia, se deduce la cadena de desigualdades entre las valoraciones. □

Asimismo, a partir del estadístico máximo se obtienen valores de mercado del bien, mediante los métodos de valoración de las dos funciones, inferiores a la valoración del mismo mediante el MVDFS utilizando el modelo de probabilidad bivalente del índice de calidad, lo que puede interpretarse como reducciones de la apreciación en el mercado sufrida por el bien mediante el MVDFS cuando se dispone de más de un índice de calidad del mismo, es decir, ambos valores de mercado obtenidos mediante el estadístico ordenado máximo reducen la apreciación del MVDFS en el caso bidimensional.

Teorema 5.26 *Sea $I = (i_1, i_2)$ el valor del índice de calidad bidimensional del bien, siendo v_S su valor de mercado a través del MVDFS y $v_{(2)m}$ y $v_{(2)M}$ sus valores de mercado a través del estadístico ordenado máximo en cada una de las dos componentes del índice, entonces*

$$v_{(2)m} \leq v_{(2)M} \leq v_S.$$

Demostración. Inmediata a partir del Teorema 5.19 y la acotación del valor de mercado mediante el MVDFS por sus valoraciones con cada una de las componentes del índice de calidad bidimensional, $v_S \geq \sup\{v_1, v_2\}$ del Teorema 5.2. \square

5.4.4. Logconcauidad de estadísticos extremos en valoración

Para finalizar esta sección dedicada al uso de los estadísticos extremos en la valoración de un bien, vemos la utilidad de las propiedades de logconcauidad de dichos extremos, dadas en la Sección 4.4, como una herramienta en el proceso de decisión de la idoneidad o adecuación en la aplicación de los métodos de valoración o bien en el proceso de selección y asignación de un modelo de probabilidad para el valor de mercado.

En este sentido, el MVDFD requiere un comportamiento estocástico similar entre el valor de mercado y el índice de calidad en el caso unidimensional, como por ejemplo tener el mismo tipo de simetría o asimetría (véase García y García (2003)). No obstante, para comparar el comportamiento estocástico de la variable aleatoria unidimensional del valor de mercado con el correspondiente a la variable aleatoria bidimensional del índice de calidad necesitamos alguna otra característica adicional a la sencilla medida de asimetría, como las propiedades estocásticas de logconcauidad de sus estadísticos extremos, mínimo y máximo.

En primer lugar, la logconcauidad de los estadísticos extremos podemos considerarla como un primer paso o prueba de idoneidad a posteriori de la aplicación de los métodos de valoración de las dos funciones (MVDFD y MVDFS), comprobando si la logconcauidad de la variable del valor de mercado es del mismo tipo que la de uno de los estadísticos extremos del índice de calidad, o de ambos estadísticos.

Por otro lado, la logconcauidad de los estadísticos extremos del índice de calidad también proporciona restricciones en la familia de modelos de probabilidad asociables al valor de mercado, reduciendo dicha familia a una subfamilia de distribuciones con el mismo tipo de logconcauidad que dichos estadísticos extremos, así como para la asignación de un modelo concreto en esta subfamilia.

En particular, los modelos de probabilidad bivariantes más comunes en la metodología valorativa, como los dados en la Sección 1.3, están basados en las distribuciones univariantes usuales en el análisis PERT y las distribuciones con forma geométrica dadas en la Sección 1.2.

Además, los estadísticos extremos, mínimo y máximo, de estos modelos de proba-

bilidad bivariantes tienen funciones de supervivencia y de densidad logcóncavas en sus soportes, como por ejemplo los contenidos en la Sección 4.4. Por consiguiente, si el índice de calidad bidimensional se ajusta a uno de estos modelos de probabilidad, se debería utilizar para el valor de mercado una distribución con esta misma característica o propiedad, es decir, con funciones de supervivencia y de densidad logcóncavas en el soporte.

Ejemplo 5.1 *Para aplicar los métodos de valoración de las dos funciones (MVDFD y MVDFS) a partir de un índice de calidad con un modelo piramidal dado en la Definición 1.11, utilizando un modelo triangular generalizado dado en la Definición 1.4 para el valor de mercado, deberíamos analizar sus propiedades de logconcauidad.*

Así, teniendo en cuenta la Proposición 4.16 y el Corolario 4.17, los estadísticos mínimo y máximo del índice de calidad piramidal tienen funciones de supervivencia y de densidad logcóncavas en sus soportes. Además, de las Proposiciones 1.9 y 1.10, para que el valor de mercado mantenga las mismas propiedades de logconcauidad, es decir, sus funciones de supervivencia y de densidad sean logcóncavas, deberíamos reducir la asignación de un modelo triangular generalizado mediante las restricciones $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$, es decir, seleccionar para el valor de mercado un modelo de la subfamilia de triangulares generalizadas con parámetros (m, n_1, n_2) tales que $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$.

5.5. Aplicaciones prácticas

En esta sección, llevamos a cabo la aplicación práctica de los resultados desarrollados a lo largo de este capítulo.

En primer lugar, aplicamos la nueva metodología valorativa de las dos funciones de supervivencia, como una alternativa al MVDFD, obteniendo en dos casos prácticos las valoraciones a través de ambos métodos, donde se aprecian algunas de las desigualdades establecidas en la Sección 5.2.

Asimismo, también se comprueba, mediante uno de los ejemplos prácticos, las comparaciones entre las valoraciones de ambos métodos en los procedimientos de ponderación, estudiados en la Sección 5.3, tanto en presencia de dependencia como de independencia entre las componentes del índice de calidad.

Finalmente, veremos la utilidad de las propiedades de logconcavidad de los estadísticos extremos de la sección anterior, para reducir la familia de distribuciones asignables al valor de mercado, así como las valoraciones que se obtienen utilizando los estadísticos mínimo y máximo en ambos métodos de valoración, mostrando en la práctica algunas desigualdades de la Sección 5.4.

5.5.1. Método de valoración de las dos funciones de supervivencia

En este apartado, utilizamos el caso práctico nº 2 de Guadalajara (1996), en el que se valora una finca dedicada al cultivo de uva de mesa en la comarca del Vinalopó Medio de la provincia de Alicante. Los índices de calidad considerados para explicar el valor de mercado ($\text{€}/\text{m}^2$) son la producción bruta de uva (kg/m^2) y el porcentaje de contenido de arena en la tierra de la finca.

En la Tabla 5.1 se recogen los datos correspondientes a los valores mínimo, máximo y moda para cada variable, siendo el objetivo la valoración de una finca de 12010.3833m^2

(2.5 jornales) con una producción bruta de $2.0399kg/m^2$ y un contenido de arena del 32 % en su tierra.

	Mínimo	Máximo	Moda
$V = \text{Valor de mercado } (\text{€}/m^2)$	0.8132	1.5012	1.0634
$I_1 = \text{Producción bruta } (kg/m^2)$	1.5611	2.6019	1.8734
$I_2 = \text{Contenido de arena } (\%)$	15	50	25

Tabla 5.1: Valoración de una finca de uva de mesa

Herrerías (2002) obtiene la valoración de esta finca en seis casos diferentes, correspondientes a las distribuciones utilizadas tanto para el valor de mercado como para el índice de calidad bidimensional.

En nuestro caso, para la aplicación y comparación práctica entre ambos métodos de valoración, nos centraremos en los casos 1 y 4 de Herrerías (2002) en los que asume que el índice de calidad bidimensional formado por la producción bruta de uva y el contenido de arena en la tierra siguen un modelo de distribución piramidal, y el valor de mercado se distribuye según un modelo triangular y trapezoidal, respectivamente, en donde la distribución trapezoidal utilizada, cuando sólo se disponen de estos datos (pesimista, optimista y más probable), es la versión trapezoidal CPR de Callejón, Pérez y Ramos (1996).

En la Tabla 5.2 se presentan las valoraciones mediante ambos métodos correspondientes a dichos casos (multiplicadas por los $12010.3833m^2$ que tiene la finca), los cuales reflejan las desigualdades entre los dos métodos y constituyen una muestra de los diferentes modelos que podrían considerarse tanto en el valor de mercado como en el índice de calidad bidimensional.

V	v_D	$\inf\{v_1, v_2\}$	$\sup\{v_1, v_2\}$	v_S
Triangular	12587.1	13539.2	13747.4	15033.8
Trapezoidal	12773.2	13785.0	13983.3	15198.9

Tabla 5.2: Índice de calidad piramidal

Como menciona Herrerías (2002), es lógico pensar que la producción bruta de uva esté correlada con el contenido de arena en la tierra, aunque esta correlación no debe ser elevada. En cualquier caso, si se asume la independencia entre ambos índices de calidad, como ejemplo para aplicar los métodos de valoración bajo independencia, y ambos según un modelo triangular, se obtienen los siguientes valores de mercado de la Tabla 5.3.

V	v_D	$\inf\{v_1, v_2\}$	$\sup\{v_1, v_2\}$	v_S
Triangular	12787.3	13775.7	14018.9	15441.2
Trapezoidal	12994.2	14010.0	14239.9	15583.8

Tabla 5.3: Índice de calidad de componentes independientes y triangulares

No obstante, para mostrar una exposición más clara del comportamiento entre estas valoraciones, utilizando ambos métodos, MVDFD y MVDFS, a partir de un índice de calidad bidimensional, y dar una mejor comparación con respecto a las valoraciones obtenidas mediante cada componente de dicho índice, realizamos dos gráficas correspondientes al modelo de distribución triangular para el valor de mercado de esta finca agrícola, para ambos modelos de probabilidad bivariantes de su índice de calidad (piramidal o formado por componentes independientes y triangulares).

La Figura 5.1 representa las valoraciones cuando el índice de calidad tiene un mo-

delo piramidal y la Figura 5.2 muestra las valoraciones cuando el índice de calidad tiene componentes independientes y con distribuciones triangulares, en donde se puede apreciar las desigualdades de los Teoremas 5.2 y 5.3.

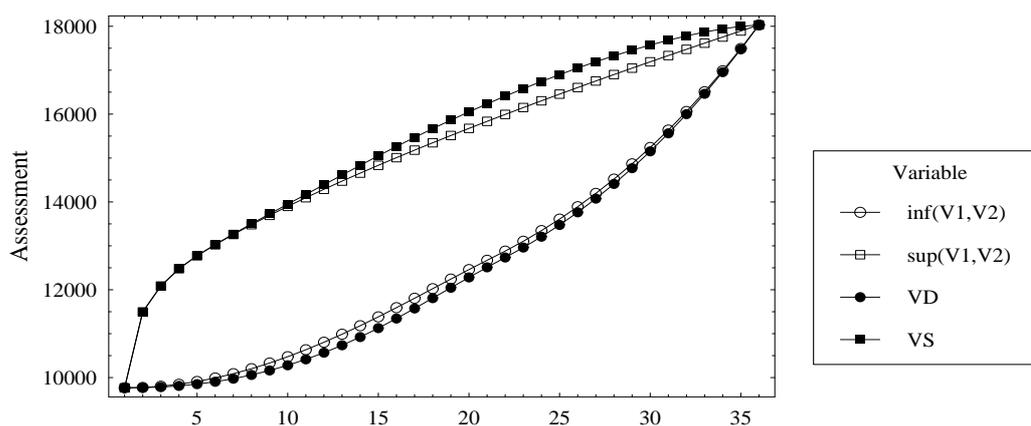


Figura 5.1: Valoraciones a partir de índice de calidad piramidal

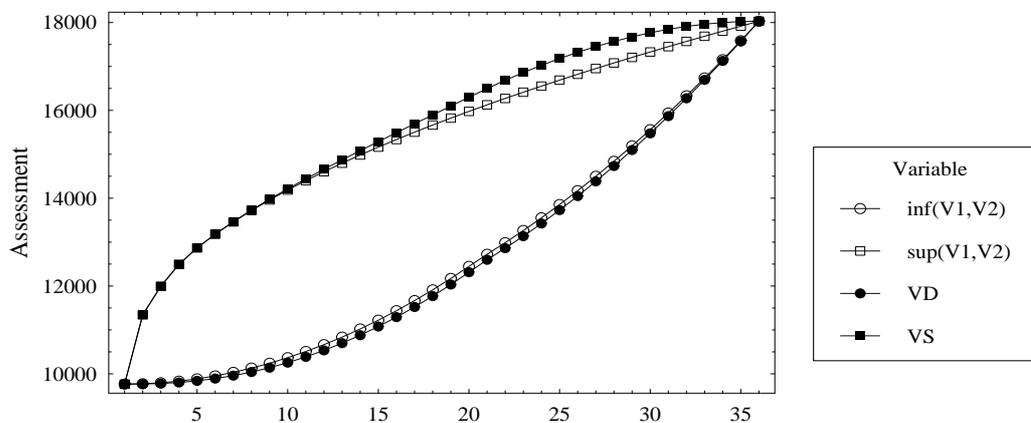


Figura 5.2: Valoraciones a partir de componentes independientes y triangulares

Nótese que, para ambas componentes, se ha considerado un recorrido simultáneamente desde los ínfimos a los supremos de sus soportes, para realizar estas gráficas en el plano y hacer más fácil su interpretación.

5.5.2. Valoración mediante los procedimientos de ponderación

En este apartado consideramos el ejemplo de las transacciones de fincas agrícolas en las comarcas Tierras de Campos y Centro de la provincia de Valladolid relativas al periodo 1977-1982 dado en Alonso y Lozano (1985) y García y García (2003). Los índices de calidad considerados para explicar el valor de mercado (€) son los ingresos por hectárea (€/Ha) y la inversa de la distancia a Valladolid (1/km).

En la Tabla 5.4 se recogen los datos correspondientes a los valores mínimo, máximo y moda para cada variable, siendo el objetivo el valor de mercado para una finca cuyos ingresos por hectárea son 194.31€ y se encuentra a una distancia de 24km de Valladolid.

	Mínimo	Máximo	Moda
V =Valor de mercado (€)	1502.53	3005.06	1953.29
I_1 =Ingresos por hectárea (€/Ha)	120.20	300.51	195.33
I_2 =Inversa de la distancia (1/km)	1/70	1/10	1/50

Tabla 5.4: Transacciones de fincas agrícolas

En este caso, García y García (2003) asumen la independencia entre ambas componentes del índice de calidad bidimensional, y obtienen la valoración de esta finca correspondiente a las distribuciones triangulares tanto para el valor de mercado como para cada una de las componentes del índice de calidad bidimensional, utilizando un modelo ponderado de las funciones de distribución de los índices para reducir la depreciación del MVDFD con respecto a los valores obtenidos individualmente con cada uno de los índices de calidad, siendo los pesos otorgados por un experto del 75 % a los

ingresos por hectárea y del 25 % al inverso de la distancia.

Para la comparación práctica entre ambos métodos de valoración, exponemos en la Tabla 5.5 los valores de mercado mediante los dos métodos bajo la suposición de independencia entre las dos componentes del índice de calidad bidimensional, tanto en el caso triangular como trapezoidal CPR para el valor de mercado.

V	v_D	$\inf\{v_1, v_2\}$	$\sup\{v_1, v_2\}$	v_S
Triangular	1874.45	2035.71	2119.5	2322.21
Trapezoidal	1909.94	2093.39	2182.06	2372.86

Tabla 5.5: Índice de calidad de componentes independientes y triangulares

Asimismo, la Tabla 5.6 muestra las valoraciones a través del modelo ponderado de las distribuciones de ambos indicadores de calidad de la finca con las ponderaciones obtenidas a partir del modelo triangular para el valor de mercado (al igual que García y García (2003)), donde los pesos de los métodos de ponderación marcados con (S) son los obtenidos mediante estas técnicas de ponderación a través de las funciones de supervivencia correspondientes.

Obsérvese que ha sido utilizada la misma ponderación cuando el modelo del valor de mercado es trapezoidal, para que se reflejen las diferencias entre ambas distribuciones del valor de mercado bajo el mismo modelo del índice de calidad.

Además, a través de la ponderación de las funciones de supervivencia marginales y utilizando los mismos pesos tanto en el caso triangular como trapezoidal para la distribución del valor de mercado, obtenemos las valoraciones de la Tabla 5.7 mediante ambas metodologías valorativas, siendo los pesos de las ponderaciones marcadas con (S) los correspondientes al uso de las funciones de supervivencia en dichas técnicas.

Método ponderación	α	V	v_{DWD}	v_{SWD}
Subjetivo	0.75	Triangular	2054.33	2655.11
Subjetivo	0.75	Trapezoidal	2113.79	2681.07
Econométrico	0.615456	Triangular	2064.94	2609.91
Econométrico	0.615456	Trapezoidal	2125.23	2639.22
Modas	0.82074	Triangular	2048.92	2695.77
Modas	0.82074	Trapezoidal	2107.90	2718.71
Media modal	0.702754	Triangular	2058.01	2635.08
Media modal	0.702754	Trapezoidal	2117.77	2662.52
Econométrico (S)	0.671763	Triangular	2060.45	2624.5
Econométrico (S)	0.671763	Trapezoidal	2120.40	2652.73
Modas (S)	0.612085	Triangular	2065.21	2609.22
Modas (S)	0.612085	Trapezoidal	2125.52	2638.58
Media modal (S)	0.441782	Triangular	2079.29	2598.49
Media modal (S)	0.441782	Trapezoidal	2140.51	2628.65

Tabla 5.6: Modelo ponderado de las funciones de distribución marginales

De forma análoga al apartado anterior, presentamos dos gráficas sobre el comportamiento de ambos métodos, MVDFD y MVDFS, a través de los modelos ponderados, en los cuales el valor de mercado de la finca agrícola sigue un modelo de distribución triangular y el índice de calidad está formado por componentes independientes y distribuciones triangulares.

Así, la Figura 5.3 describe las valoraciones a partir de la ponderación de las funciones de distribución marginales, en donde se puede observar las relaciones de los Corolarios

Método ponderación	α	V	v_{DWS}	v_{SWS}
Subjetivo	0.75	Triangular	1689.98	2057.37
Subjetivo	0.75	Trapezoidal	1707.88	2117.09
Econométrico	0.615456	Triangular	1711.83	2068.83
Econométrico	0.615456	Trapezoidal	1731.8	2129.40
Modas	0.82074	Triangular	1669.16	2051.29
Modas	0.82074	Trapezoidal	1685.07	2110.49
Media modal	0.702754	Triangular	1699.95	2061.41
Media modal	0.702754	Trapezoidal	1718.79	2121.44
Econométrico (S)	0.671763	Triangular	1705.06	2064.05
Econométrico (S)	0.671763	Trapezoidal	1724.39	2124.28
Modas (S)	0.612085	Triangular	1712.13	2069.12
Modas (S)	0.612085	Trapezoidal	1732.14	2129.70
Media modal (S)	0.441782	Triangular	1714.64	2083.42
Media modal (S)	0.441782	Trapezoidal	1734.89	2144.86

Tabla 5.7: Modelo ponderado de las funciones de supervivencia marginales

5.6 y 5.8.

Asimismo, la Figura 5.4 representa las valoraciones a partir de la ponderación de las funciones de supervivencia marginales, y en ella se muestra las desigualdades del Teorema 5.11.

Finalmente, aunque se supone independencia entre ambas componentes del índice de calidad, como ejemplo del comportamiento de ambos métodos a través de los modelos ponderados bajo dependencia, las Figuras 5.5 y 5.6 representan las valoraciones de

propiedades agrícolas cuando el valor de mercado es triangular y el índice de calidad sigue un modelo piramidal, utilizando ambos modelos ponderados (5.3.6) y (5.3.15), respectivamente.

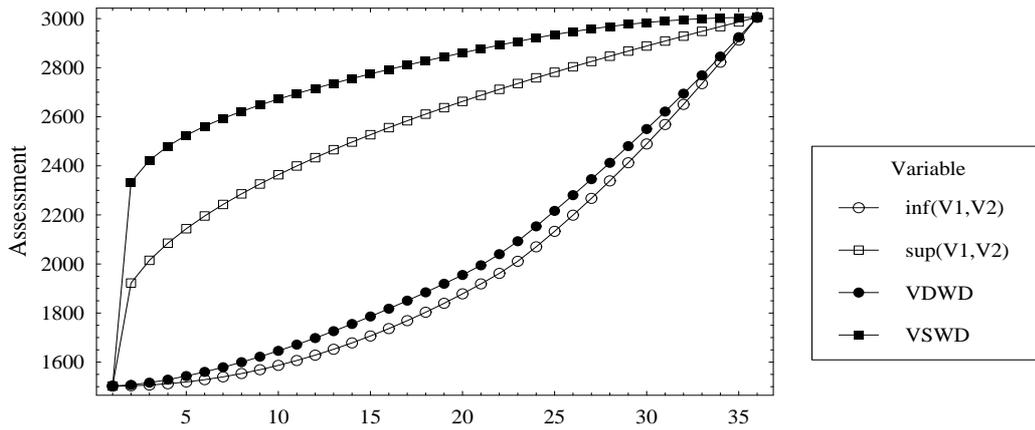


Figura 5.3: Valoraciones a partir de ponderación de las distribuciones marginales

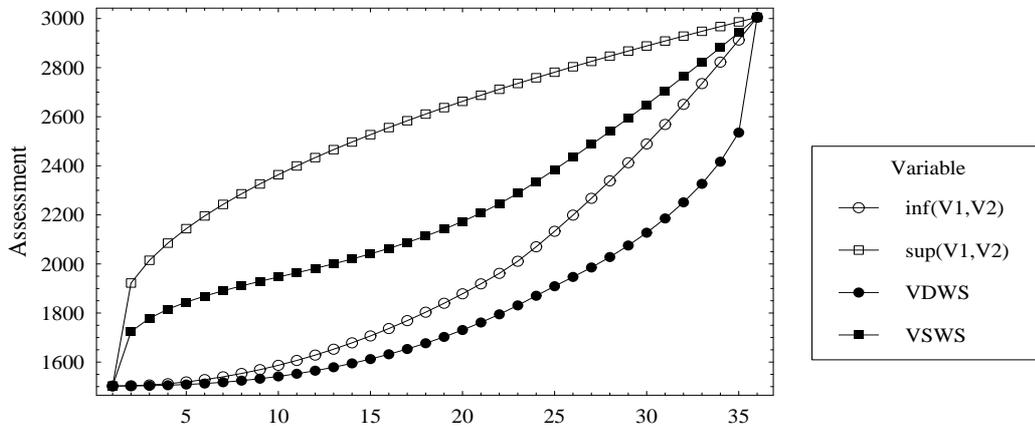


Figura 5.4: Valoraciones a partir de ponderación de supervivencias marginales

Así, en la Figura 5.5 se comprueba el Teorema 5.10 y la Figura 5.6 muestra las desigualdades de los Teoremas 5.14 y 5.17.

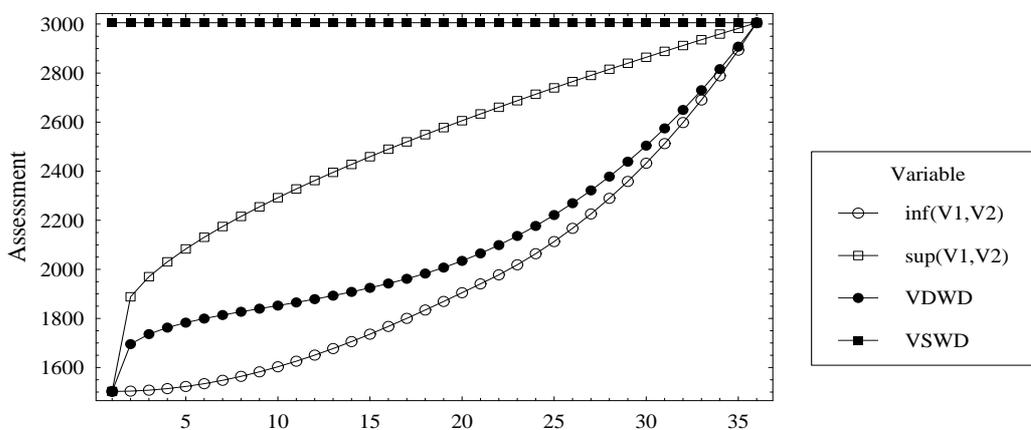


Figura 5.5: Ponderación de distribuciones marginales del modelo piramidal

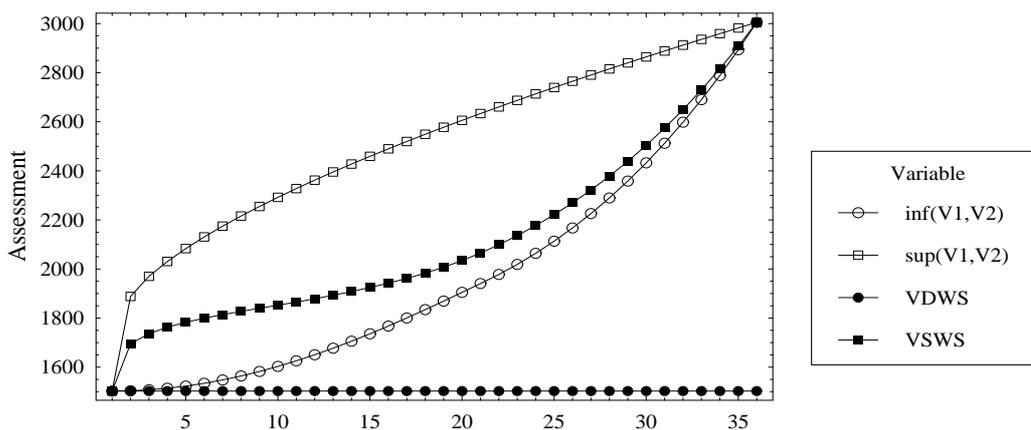


Figura 5.6: Ponderación de supervivencias marginales del modelo piramidal

5.5.3. Valoración mediante los estadísticos extremos

Para concluir esta sección, presentamos las valoraciones correspondientes al caso práctico n° 2 de Guadalajara (1996) utilizado en el Apartado 5.5.1, con los métodos de las dos funciones a través de los estadísticos mínimo y máximo.

Para ello, nos vamos a centrar en la aplicación de estos estadísticos en los métodos de valoración de las dos funciones a través de un modelo de probabilidad del valor de mercado en la familia triangular generalizada, suponiendo que el índice de calidad formado por la producción bruta de uva y el contenido de arena en la tierra siguen un modelo de distribución piramidal, como en Herrerías (2002).

Con el objetivo de utilizar un modelo de probabilidad triangular generalizado de parámetros (m, n_1, n_2) para el valor de mercado de un bien, a partir de un modelo piramidal correspondiente al índice de calidad, del Ejemplo 5.1, reducimos la asignación de un modelo triangular generalizado mediante las restricciones de los parámetros $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$, para que dicho modelo de probabilidad tenga el mismo tipo de logconcauidad que los estadísticos mínimo y máximo del índice de calidad piramidal.

Así, la Tabla 5.8 contiene las valoraciones para un conjunto de valores distintos de los parámetros del modelo triangular generalizado, n_1 y n_2 , con recorridos mayores o iguales a uno, y están multiplicadas por los $12010.3833m^2$ de la finca que se pretende valorar. En todos los casos se observa que ambos estadísticos permiten obtener valoraciones reduciendo las pérdidas obtenidas mediante el MVDFD con respecto a la valoración para cada componente del índice de calidad, así como las restantes desigualdades de la Sección 5.4.

Asimismo, como se menciona en el Apartado 5.5.1, la correlación entre la producción bruta de uva y el contenido de arena en la tierra, no debe ser elevada. En cualquier caso, si asumimos independencia entre ambas componentes del índice de calidad utilizadas para la valoración de la finca, las dos según un modelo triangular, y el valor de mercado con distribución triangular generalizada, a partir de la logconcauidad de los estadísticos

extremos del índice de calidad, también deberíamos restringir, la asignación de un modelo triangular generalizado para el valor de mercado, a los parámetros $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$.

De este modo, en la Tabla 5.9 damos las valoraciones de la propiedad agrícola para diferentes valores de los parámetros n_1 y n_2 ; donde en todos los casos se puede comprobar las comparaciones establecidas en las secciones anteriores.

No obstante, para exponer de forma más clara el comportamiento entre estas valoraciones, utilizando los estadísticos extremos en los métodos de valoración, y comparar mejor las valoraciones con respecto a las obtenidas a través de ambos métodos a partir del índice de calidad bidimensional, presentamos algunos gráficos correspondientes al modelo triangular generalizado para el valor de mercado de esta finca y para ambos modelos de distribuciones bivariantes del índice de calidad (piramidal o componentes independientes y triangulares), tomando los distintos parámetros n_1 y n_2 en una pequeña muestra de valores.

Nótese que, al igual que en las gráficas anteriores, ambas componentes del índice de calidad han sido tomadas simultáneamente desde los ínfimos a los supremos de sus soportes, para facilitar la interpretación de estos gráficos en el plano.

La Figura 5.7 muestra las desigualdades entre las valoraciones mediante el estadístico máximo y las obtenidas a través del MVDFD, dadas en el Teorema 5.18, en donde puede observarse las acotaciones de las valoraciones del MVDFD a partir de un índice de calidad bidimensional, las cuales son peor y mejor, respectivamente, a las producidas por el MVDFD cuando el tasador dispone de más de un índice de calidad.

Asimismo, la Figura 5.8 representa las valoraciones mediante el MVDFS y las ob-

tenidas a través del estadístico mínimo, en donde se comprueba las acotaciones del Teorema 5.25 a partir de un índice de calidad bidimensional, las cuales son peor y mejor, respectivamente, a las proporcionadas mediante el MVDFS cuando más de un índice de calidad está a disposición del tasador.

Finalmente, la Figura 5.9 muestra las diferentes valoraciones utilizando los estadísticos mínimo y máximo en los métodos de valoración, en donde se reflejan algunas comparaciones con respecto a las valoraciones obtenidas a través de cada componente de un índice de calidad bidimensional dadas en los Teoremas 5.19 y 5.22, así como las desigualdades de los Teoremas 5.20, 5.23 y 5.24, las cuales dependen de los valores (i_1, i_2) de la producción bruta de uva y del contenido de arena en la tierra, es decir, la menor valoración a través del estadístico mínimo puede ser inferior a la mayor valoración a través del estadístico máximo, y también según el valor particular (i_1, i_2) puede ser superior a la mejor de las valoraciones obtenidas a través de las distribuciones marginales.

n_1	n_2	$v_{(2)m}$	v_D	$v_{(2)M}$	$\inf\{v_1, v_2\}$	$\sup\{v_1, v_2\}$	$v_{(1)m}$	v_S	$v_{(1)M}$
1	1	12249.6	12413.7	12594.7	14194.6	14541.9	16190.4	16322.7	16440.6
1	1.5	11723	11852.3	11994.9	13267.2	13559.3	15111.7	15253.4	15382.7
1	2	11459.7	11571.6	11695	12785.8	13028.9	14398.1	14531.2	14654.1
1	2.5	11301.7	11403.1	11515	12504	12718.8	13918.4	14039.3	14151.9
1	3	11196.4	11290.9	11395.1	12316.2	12516.2	13584.5	13693.8	13795.9
1.5	1	12950.3	13094.5	13253.6	14659.5	14964.7	16413.4	16529.7	16633.3
1.5	1.5	12412.7	12528.1	12652.6	13769.2	14030.5	15419.3	15546	15661.7
1.5	2	12124.1	12226.9	12337.8	13274.8	13495.2	14736.8	14857.4	14968.9
1.5	2.5	11942.2	12037	12139.4	12974.8	13163.2	14262.1	14373	14476.1
1.5	3	11816.5	11905.9	12002.3	12781.2	12944.6	13921.4	14022.3	14116.8
2	1	13300.7	13434.9	13583	14892	15176.1	16524.9	16633.2	16729.6
2	1.5	12774	12874	12985.4	14031.6	14276.8	15580	15699	15807.5
2	2	12498.3	12587.1	12681.9	13539.2	13747.4	14919.9	15033.8	15139.1
2	2.5	12318.5	12401.5	12490.1	13231.1	13409.9	14453.1	14558.3	14656.3
2	3	12191.3	12270.2	12354.4	13025.7	13181.5	14112.7	14209	14299.1
2.5	1	13510.9	13639.2	13780.7	15031.4	15303	16591.8	16695.3	16787.4
2.5	1.5	12986.5	13082.4	13189.3	14193.2	14428.4	15679	15793.2	15897.4
2.5	2	12720.3	12797.1	12882.1	13705.6	13906	15035.1	15144.8	15246.2
2.5	2.5	12550.9	12623.1	12699.7	13395.3	13567.9	14575.5	14677.1	14771.7
2.5	3	12428.8	12497.9	12571.1	13184.7	13335.6	14237.2	14330.4	14417.6
3	1	13651	13775.3	13912.5	15124.4	15387.6	16636.4	16736.6	16825.9
3	1.5	13130.6	13223.8	13327.6	14302.8	14531.4	15746.2	15857.1	15958.3
3	2	12861.8	12935.7	13018.5	13820.2	14015.3	15114.5	15221.3	15320
3	2.5	12701.5	12764.7	12833.3	13509.7	13678.1	14660.8	14759.9	14852.2
3	3	12586.6	12647.4	12711.6	13296.7	13444.2	14324.9	14416	14501.2

Tabla 5.8: Índice de calidad piramidal

n_1	n_2	$v_{(2)m}$	v_D	$v_{(2)M}$	$\inf\{v_1, v_2\}$	$\sup\{v_1, v_2\}$	$v_{(1)m}$	v_S	$v_{(1)M}$
1	1	12620	12802.7	13004	14587.9	14970.3	16625	16755.4	16873.8
1	1.5	12014.8	12158.8	12317.4	13598.7	13933.3	15591.6	15745	15888.7
1	2	11712.2	11836.8	11974.1	13062	13346.1	14855.9	15006.9	15150.7
1	2.5	11530.6	11643.6	11768.1	12747.2	12990.3	14338.5	14479.6	14615.4
1	3	11409.6	11514.8	11630.7	12542.7	12762.8	13966.4	14096.3	14222.1
1.5	1	13275.8	13436.4	13613.3	15005.2	15341.2	16795.3	16909.9	17014
1.5	1.5	12669.7	12792.5	12927.8	14065.8	14365.1	15848.6	15985.8	16114.4
1.5	2	12353.1	12462.4	12580.2	13525.2	13782.8	15151.9	15288.8	15419.2
1.5	2.5	12153.5	12254.3	12363.1	13188.9	13411.7	14647.1	14776.5	14900.9
1.5	3	12015.6	12110.7	12213.2	12967.1	13162	14274.3	14394.4	14510.6
2	1	13603.7	13753.2	13917.9	15213.8	15526.6	16880.4	16987.2	17084
2	1.5	13001	13114.9	13241.9	14309.8	14590.7	15982.9	16111.7	16232.4
2	2	12694.9	12787.3	12889.2	13775.7	14018.9	15311.9	15441.2	15564.3
2	2.5	12502.3	12588.5	12680.6	13434.4	13645.8	14818.6	14941.4	15059.5
2	3	12365.9	12447.8	12535.3	13203	13388.7	14449.3	14563.7	14674.5
2.5	1	13800.4	13943.3	14100.7	15339	15637.9	16931.5	17033.5	17126.1
2.5	1.5	13204.3	13313.6	13435.4	14460.2	14729.7	16065.6	16189.2	16305
2.5	2	12894.1	12981.6	13079.7	13933.3	14167.6	15412.6	15537.1	15655.7
2.5	2.5	12710.2	12784.2	12866	13591.6	13795.8	14928.5	15047.1	15161.1
2.5	3	12581.1	12651.8	12726.9	13356.3	13536.2	14563	14673.9	14781.1
3	1	13931.6	14070	14222.5	15422.4	15712.1	16965.6	17064.4	17154.1
3	1.5	13342.2	13448.3	13566.7	14562.2	14824	16121.8	16241.8	16354.3
3	2	13030.2	13115.3	13210.9	14041.9	14269.9	15482	15603.2	15718.6
3	2.5	12843	12913.8	12993.5	13701.2	13900.4	15005.1	15120.7	15232
3	3	12720.3	12782.2	12850.4	13464.4	13640.1	14643.2	14751.5	14856.3

Tabla 5.9: Índice de calidad de componentes independientes y triangulares

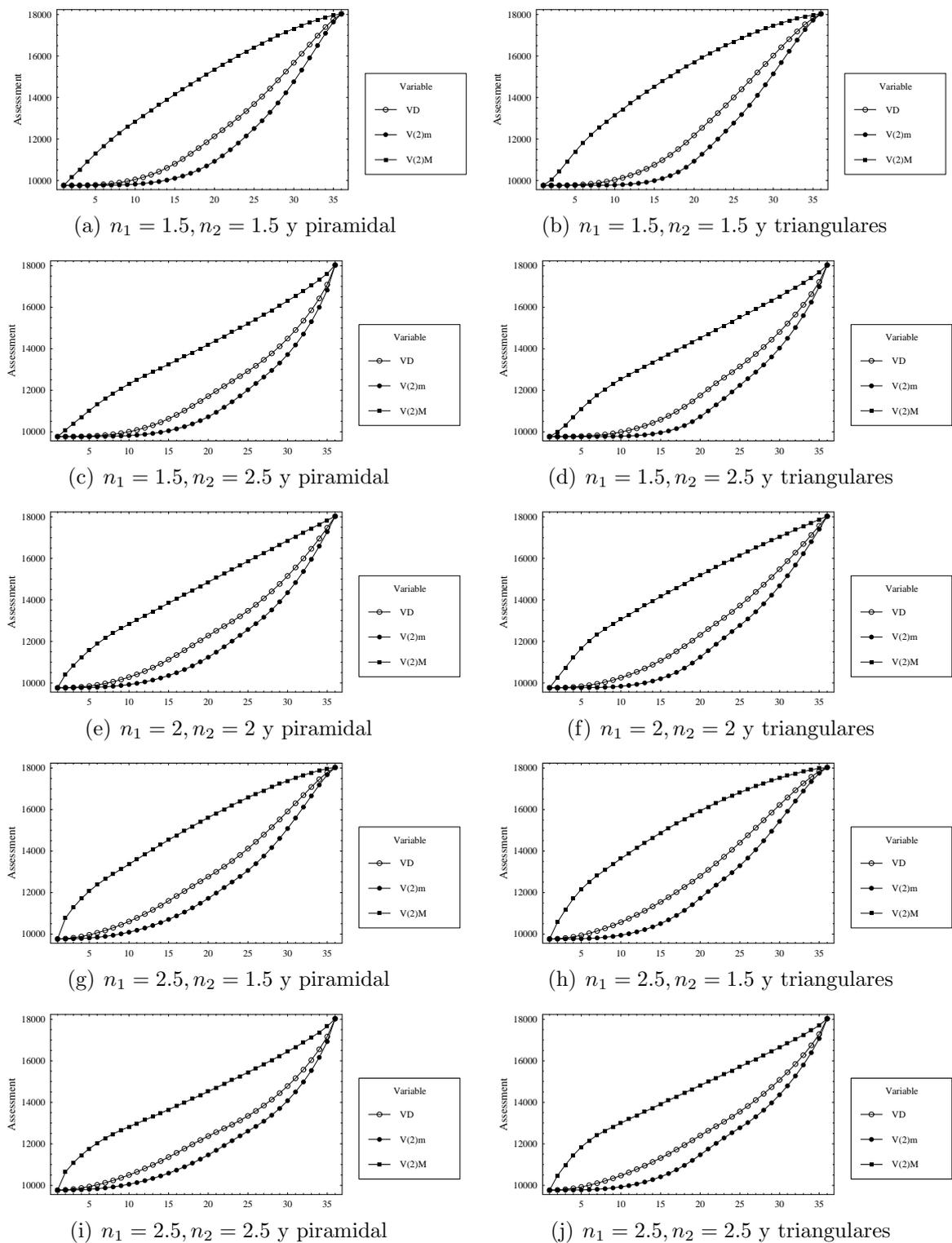
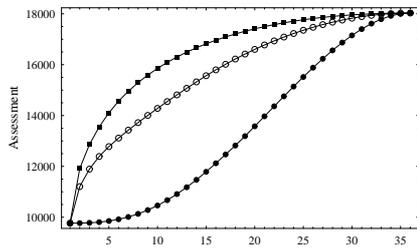
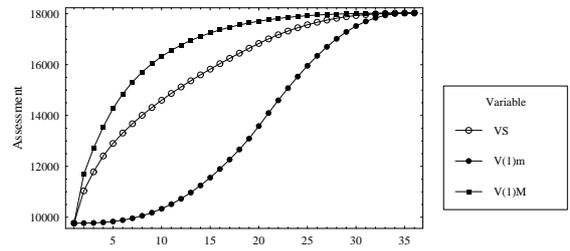


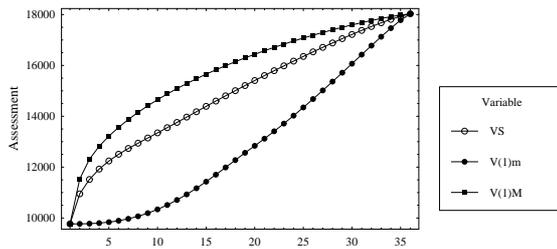
Figura 5.7: Valoraciones a través del estadístico máximo



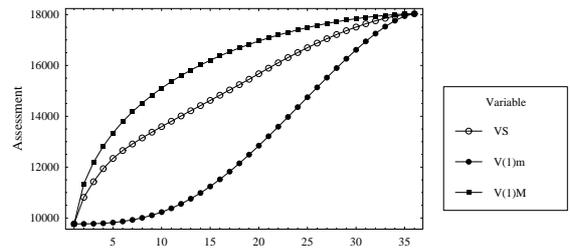
(a) $n_1 = 1.5, n_2 = 1.5$ y piramidal



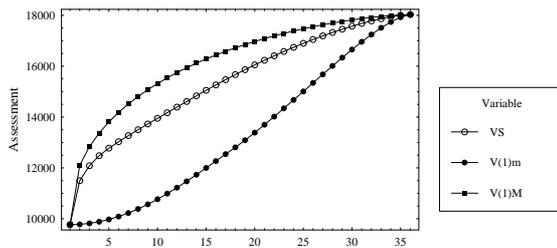
(b) $n_1 = 1.5, n_2 = 1.5$ y triangulares



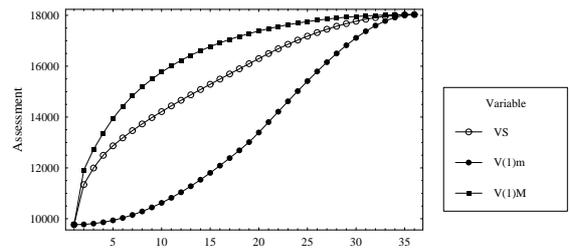
(c) $n_1 = 1.5, n_2 = 2.5$ y piramidal



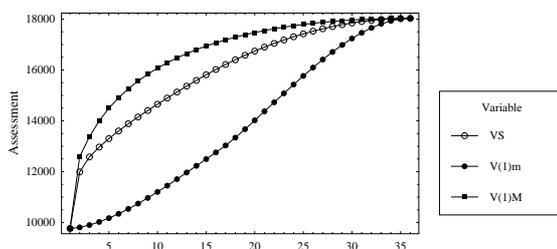
(d) $n_1 = 1.5, n_2 = 2.5$ y triangulares



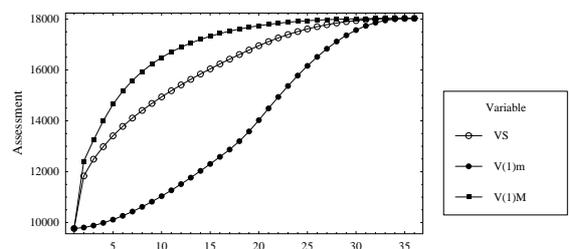
(e) $n_1 = 2, n_2 = 2$ y piramidal



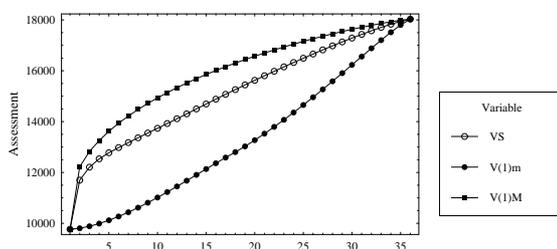
(f) $n_1 = 2, n_2 = 2$ y triangulares



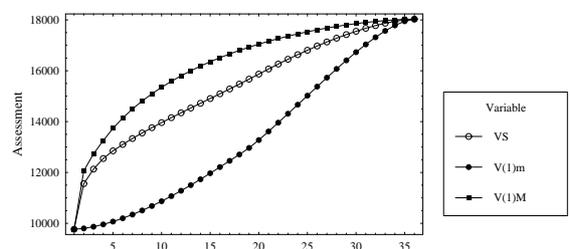
(g) $n_1 = 2.5, n_2 = 1.5$ y piramidal



(h) $n_1 = 2.5, n_2 = 1.5$ y triangulares

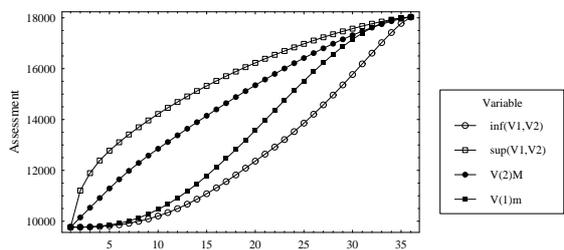


(i) $n_1 = 2.5, n_2 = 2.5$ y piramidal

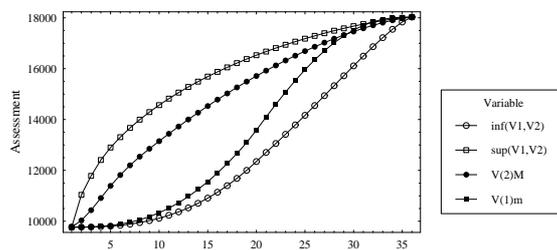


(j) $n_1 = 2.5, n_2 = 2.5$ y triangulares

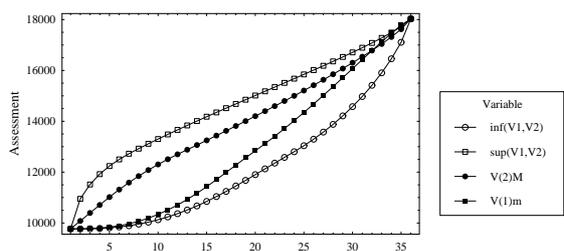
Figura 5.8: Valoraciones a través del estadístico mínimo



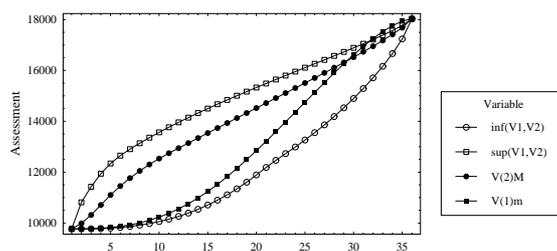
(a) $n_1 = 1.5, n_2 = 1.5$ y piramidal



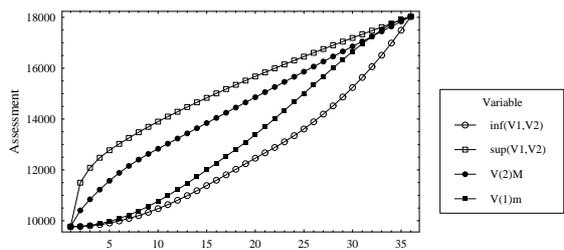
(b) $n_1 = 1.5, n_2 = 1.5$ y triangulares



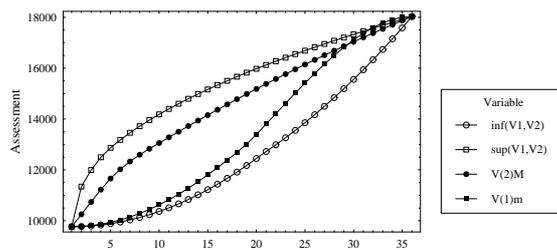
(c) $n_1 = 1.5, n_2 = 2.5$ y piramidal



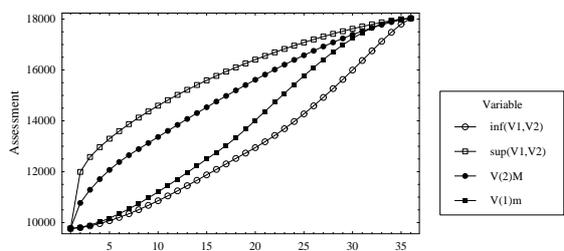
(d) $n_1 = 1.5, n_2 = 2.5$ y triangulares



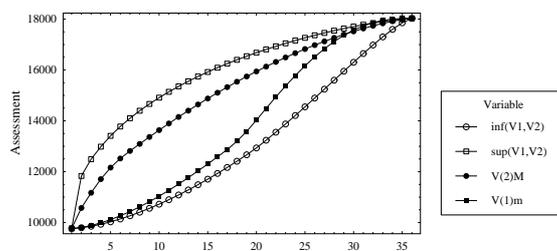
(e) $n_1 = 2, n_2 = 2$ y piramidal



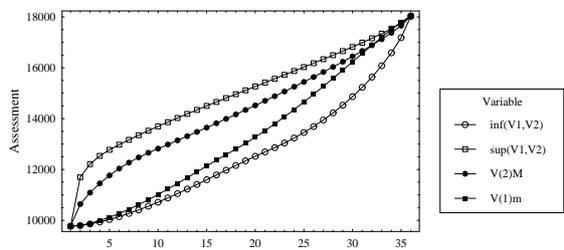
(f) $n_1 = 2, n_2 = 2$ y triangulares



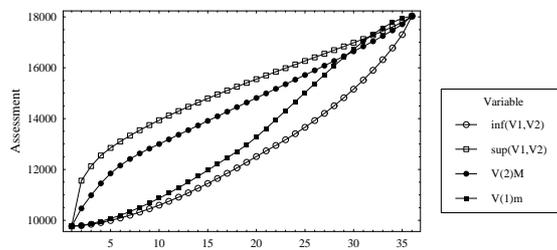
(g) $n_1 = 2.5, n_2 = 1.5$ y piramidal



(h) $n_1 = 2.5, n_2 = 1.5$ y triangulares



(i) $n_1 = 2.5, n_2 = 2.5$ y piramidal



(j) $n_1 = 2.5, n_2 = 2.5$ y triangulares

Figura 5.9: Valoraciones a través de ambos estadísticos y marginales

Conclusiones

Para finalizar esta Memoria, resumimos a continuación las diversas conclusiones que se han obtenido a lo largo de los capítulos que engloba el presente trabajo.

En primer lugar, se ha observado que los modelos de probabilidad univariantes usuales en las metodologías PERT y valorativa, tienen funciones de supervivencia y de densidad logcóncavas en sus soportes, como son el rectangular, triangular, trapezoidal, triangular generalizado, trapezoidal generalizado, beta PERT y beta Caballer.

Por otro lado, la mixtura generalizada de dos distribuciones exponenciales tiene función de densidad logcóncava o logconvexa según el signo del peso de la componente exponencial con mayor parámetro. También se ha establecido la clasificación de la logconcavidad de la función de densidad de las mixturas generalizadas de tres distribuciones exponenciales a partir de ciertas condiciones basadas en sus pesos y parámetros. Como consecuencia, se ha obtenido la logconcavidad de los estadísticos mínimo y máximo de diversos modelos exponenciales bivariantes, como los de Gumbel, Marshall y Olkin, Friday y Patil y Raftery.

En esta dirección, se ha establecido la caracterización de las mixturas generalizadas de cuatro distribuciones exponenciales mediante condiciones entre sus coeficientes y los

parámetros de las componentes de dichas mixturas. Además, se ha obtenido la clasificación de la logconcauidad de la función de supervivencia de estas mixturas generalizadas de cuatro exponenciales.

En particular, el estadístico máximo del modelo exponencial bivalente de Gumbel I es una mixtura generalizada de cuatro exponenciales, obteniéndose que su función de supervivencia es logcóncava. Asimismo, los estadísticos mínimo y máximo del modelo exponencial bivalente de Raftery (en su versión general) son mixturas generalizadas de cuatro exponenciales, y la logconcauidad de sus funciones de supervivencia también ha sido discutida a través de condiciones de sus parámetros.

Por otra parte, el estadístico máximo del modelo exponencial bivalente de Friday y Patil, sin restricción sobre sus parámetros, es una mixtura generalizada de gamma y exponenciales. Por ello, se ha obtenido la caracterización de las mixturas generalizadas de una distribución gamma y una o dos distribuciones exponenciales según los coeficientes y parámetros de dicha mixtura.

Además, se ha clasificado la logconcauidad de la función de supervivencia de dicho estadístico máximo en sus dos formas de esta versión general de Friday y Patil. Por ejemplo en su forma más sencilla, es una mixtura de una gamma y una exponencial, siendo su función de supervivencia logcóncava.

También se ha extendido la caracterización de las mixturas generalizadas al caso de distribuciones Weibull, estableciéndose las condiciones necesarias y suficientes para que una mixtura generalizada de dos o tres distribuciones Weibull sea un modelo de probabilidad. En este caso, se ha obtenido la clasificación de la logconcauidad de la función de supervivencia de una mixtura generalizada de dos distribuciones Weibull.

En particular, los estadísticos mínimo y máximo de los modelos Weibull bivariantes, en la dirección dada por Hanagal, son predominantemente mixturas generalizadas de distribuciones Weibull, y como consecuencia de la clasificación de la función de supervivencia de las mixturas generalizadas de dos Weibull, se ha establecido la logconcauidad en algunos casos de los estadísticos mínimo y máximo de estos modelos Weibull bivariantes, como tipo Gumbel, tipo Marshall y Olkin, tipo Friday y Patil y tipo Raftery.

Por otro lado, los estadísticos mínimo y máximo de algunos modelos de probabilidad bivariantes no se corresponden con mixturas generalizadas, como son el modelo exponencial bivalente de Gumbel III y modelos bivariantes usuales en valoración (por ejemplo, cúbico, rectangular-triangular y piramidal). Para los estadísticos extremos de estos modelos también se ha obtenido sus propiedades de logconcauidad, siendo en todos ellos las funciones de supervivencia logcóncavas en sus soportes.

En el campo de la teoría de valoración, se ha propuesto el nuevo método de valoración de las dos funciones de supervivencia, correspondientes al valor de mercado e índice de calidad de un bien, estableciéndose su equivalencia en el caso de un índice de calidad unidimensional con el conocido método de valoración de las dos funciones de distribución.

No obstante, en el caso de un índice de calidad bidimensional o multidimensional, el método de valoración de las dos funciones de supervivencia proporciona un valor de mercado del bien superior al del método de valoración de las dos funciones de distribución, por lo que reduce la depreciación experimentada por este último. Además, el nuevo método propuesto proporciona una apreciación del bien con respecto a las

valoraciones que se obtendrían al considerar individualmente cada componente del índice de calidad.

En este contexto, se ha determinado el comportamiento del método de valoración de las dos funciones de supervivencia a través de los procedimientos de ponderación utilizados para corregir y ajustar el valor de mercado. En general, el método de valoración de las dos funciones de supervivencia aumenta la apreciación del bien, llegando a alcanzar el máximo valor posible del mismo cuando las componentes del índice de calidad son dependientes.

Asimismo, se ha ampliado el abanico de modelos ponderados utilizados para dicho fin, considerándose las ponderaciones de las funciones de supervivencia marginales, modelos para los cuales se ha establecido el comportamiento de los valores producidos por ambos métodos de valoración, de las dos funciones de supervivencia y de las dos funciones de distribución. En general, el valor producido por el método de valoración de las dos funciones de supervivencia está acotado por las valoraciones obtenidas para cada componente del índice de calidad. Además, el método de valoración de las dos funciones de distribución aumenta la depreciación del bien, llegando a alcanzar el mínimo valor posible del mismo cuando las componentes del índice de calidad son dependientes.

Además, se ha propuesto y analizado un nuevo mecanismo de generación de dichos modelos ponderados, a través de la determinación de los pesos correspondientes a las componentes del índice de calidad, llamado el método de la media modal, basado en la información proporcionada por el propio índice de calidad para generar los pesos del modelo ponderado para dicho índice, evitándose la proporcionalidad requerida por el conocido método de las modas.

En otra dirección, se ha propuesto el uso de los estadísticos extremos, mínimo y máximo, en los métodos de valoración, con el objetivo de encontrar el valor de mercado del bien a partir de un índice de calidad bidimensional. Los valores producidos a través de ambos estadísticos han sido analizados, estableciéndose su comportamiento y comparación con los valores obtenidos por los dos métodos de valoración a partir del modelo de probabilidad bivariante del índice de calidad.

En general, cabe destacar que el estadístico máximo permite acotar el valor suministrado por el método de las dos funciones de distribución, y por tanto, reducir la depreciación experimentada por el mismo. El estadístico máximo proporciona cotas inferiores para el valor obtenido mediante el método de valoración de las dos funciones de supervivencia, es decir, reduce la apreciación del mismo. Además, el mayor valor a través del estadístico máximo no supera a la mejor de las valoraciones de las dos componentes del índice de calidad.

Asimismo, el estadístico mínimo permite acotar el valor producido por el método de valoración de las dos funciones de supervivencia, es decir, reducir la apreciación del mismo. El estadístico mínimo proporciona cotas superiores para el valor suministrado por el método de valoración de las dos funciones de distribución, es decir, reduce la depreciación experimentada por dicho método. Además, el menor valor producido mediante el estadístico mínimo es mayor que la peor de las valoraciones de las dos componentes del índice de calidad.

Finalmente, se ha propuesto la utilización de las propiedades de logconcauidad de los estadísticos extremos en el proceso de selección de un modelo de probabilidad para el valor de mercado, o como una primera prueba de idoneidad de la aplicación de los

métodos de valoración, a través de la comparación del tipo de logconcauidad del valor de mercado y de los estadísticos extremos del índice de calidad.

Referencias

1. Albrecher, H. y Teugels, J.L. (2004). Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *EURANDOM Research Report 2004-011*.
2. Alonso, R. y Lozano, J. (1985). El método de las dos funciones de distribución: Una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarcas Centro y Tierra de Campos (Valladolid). *Anales del INIA: Economía*, **9**, 295-325.
3. Ambagaspitiya, R.S. (1999). On the distributions of two classes of correlated aggregate claims. *Insurance: Mathematics y Economics*, **24**, 301-308.
4. An, M.Y. (1995). Log-concave probability distributions: theory and statistical testing. *Technical Report, Economic Dept. Duke University, Durham. NC 27708-0097*.
5. An, M.Y. (1998). Logconcavity versus logconvexity: A complete characterization. *Journal of Economic Theory*, **80**, 350-369.
6. Baggs, G.E. (1994). *Properties of Order Statistics from Bivariate Exponential Distributions*. PhD Dissertation, The Ohio State University, Ohio.
7. Baggs, G.E. y Nagaraja, H.N. (1996). Reliability properties of order statistics

- from bivariate exponential distributions. *Communications in Statistics - Stochastic Models*, **12**, 611-631.
8. Bagnoli, M. y Bergstrom, T. (2005). Log-concave probability and its applications. *Economic Theory*, **26**, 445-469.
 9. Ballesteros, E. (1971). Sobre valoración sintética de tierras y un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria. *Revista de Economía Política*, **57**, 225-238.
 10. Ballesteros, E. (1973). Nota sobre un nuevo método rápido de valoración. *Revista de Estudios Agrosociales*, **85**, 75-78.
 11. Ballesteros, E. y Caballer, V. (1982). Il método delle due beta. Un procedimento rapido nella stima dei beni fondari. *Genio Rurale*, **45**, 33-36.
 12. Ballesteros, E. y Rodríguez, J.A. (1999). *El precio de los inmuebles urbanos*. CIE Inversiones, Ed. DOSSAT 2000, Madrid.
 13. Banerjee, A., Gelfand, A.E., Knight, J.R. y Sirmans, C.F. (2004). Spatial modeling of house prices using normalized distance-weighted sums. *Journal of Business and Economic Statistics*, **22**, 206-213.
 14. Barlow, R.E. y Proschan, F. (1981). *Statistical theory of reliability and life testing: Probability models*. Ed. Silver Spring, Maryland.
 15. Barlow, R.E. y Proschan, F. (1996). *Mathematical theory of reliability*. Ed. SIAM, Philadelphia.

16. Baron, D.P. y Besanko, D. (1999). Informational alliances. *Review of Economic Studies*, **66**, 743-768.
17. Bartholomew, D.J. (1969). Sufficient conditions for a mixture of exponentials to be a probability density function. *The Annals of Mathematical Statistics*, **40**, 2183-2188.
18. Benkard, C.L. y Bajari, P. (2005). Hedonic price indexes with unobserved product characteristics, and application to personal computers. *Journal of Business and Economic Statistics*, **23**, 61-75.
19. Berny, J. (1989). A new distribution function for risk analysis. *Journal of the Operational Research Society*, **40**, 1121-1127.
20. Biais, B., Martimort, D. y Rochet, J.C. (2000). Competing mechanisms in a common value environment. *Econometrica*, **68**, 799-837.
21. Blackorby, C. y Schworm, W. (1984). The structure of economies with aggregate measures of capital: A complete characterization. *Review of Economic Studies*, **51**, 633-650.
22. Block, H.W. y Basu, A.P. (1974). A continuous bivariate exponential extension. *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 1031-1037.
23. Botta, R.F., Harris, C.M. y Marchal, W.G. (1987). Characterizations of generalized hyperexponential distribution functions. *Communications in Statistics - Stochastic Models*, **3**, 115-148.
24. Caballer, V. (1975). *Concepto y métodos de valoración agraria*. Ed. Mundi-Prensa, Madrid.

25. Caballer, V. (1994). *Métodos de valoración de empresas*. Ed. Pirámide, Madrid.
26. Caballer, V. (1998). *Valoración agraria. Teoría y práctica*. Ed. Mundi-Prensa, Madrid.
27. Caballer, V. (2004). Valoración y tasación. Aspectos científicos y profesionales. En *Novedades en la Teoría General de Valoración. Aplicaciones*, R. Herrerías (ed.), Universidad de Granada, 51-64.
28. Caballer, V. y Guadalajara, N. (1998). *Valoración económica del agua de riego*. Ed. Mundi-Prensa, Madrid.
29. Caballer, V. y Moya, I. (1997). *La valoración de las empresas españolas*. Ed. Pirámide, Madrid.
30. Cai, J. y Li, H. (2005). Multivariate risk model of phase type. *Insurance: Mathematics y Economics*, **36**, 137-152.
31. Callejón, J., Franco, M., Herrerías, R. y Vivo, J.M. (2005a). El método de valoración de las dos funciones de supervivencia como metodología alternativa al de las dos funciones de distribución. En *XIX Reunión ASEPELT-ESPAÑA*, Badajoz.
32. Callejón, J., Franco, M., Herrerías, R. y Vivo, J.M. (2005b). Estadísticos extremos en los métodos de valoración de las dos funciones de distribución y de las dos funciones de supervivencia. En *XIX Reunión de ASEPELT-ESPAÑA*, Badajoz.
33. Callejón, J., Pérez, E. y Ramos, A. (1996). La distribución trapezoidal como modelo probabilístico para la metodología PERT. En *X Reunión de ASEPELT-ESPAÑA*, Albacete. Recogido en *Programación, Selección y Control de Proyectos*

- en ambiente de incertidumbre*, R. Herrerías (ed.), Universidad de Granada, 2001, 167-177.
34. Cañas, J.A., Domingo, J. y Martínez, J.A. (1994). Valoración de tierras en las campiñas y la Subética de la provincia de Córdoba por el método de las funciones de distribución. *Investigación Agraria. Serie Economía*, **9**, 447-467.
 35. Caplin, A. y Nalebuff, B. (1991a). Aggregation and social choice: a mean voter theorem. *Econometrica*, **59**, 1-25.
 36. Caplin, A. y Nalebuff, B. (1991b). Aggregation and imperfect competition: on the existence of equilibrium. *Econometrica*, **59**, 25-60.
 37. Chakraborty, I. (1999). Bundling decisions for selling multiple objects. *Economic Theory*, **13**, 723-733.
 38. Chan, W.S., Yang, H. y Zhang, L. (2003). Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model. *Insurance: Mathematics y Economics*, **32**, 345-358.
 39. Cowling, K. y Cubbin, J. (1972). Hedonic price indexes for United Kingdom cars. *Economics Journal*, **82**, 963-968.
 40. Cruz, S., García, C.B. y García, J. (2002). Statistical test for the method of the two distribution functions. An application in finance. En *VI Congreso de Matemática Financiera y Actuarial and 5th Italian-Spanish Conference in Financial Mathematics*, Valencia.
 41. Deltas, G. y Zacharias, E. (2004). Sampling frequency and the comparison between matched-model and hedonic regression price indexes. *Journal of Business and Economic Statistics*, **22**, 206-213.

42. Denuit, M., Genest, C. y Marceau, E. (1999). Stochastic bounds on sum of dependent risks. *Insurance: Mathematics y Economics*, **25**, 85-104.
43. Dhaene, J. y Goovaerts, M.J. (1997). On the dependency of risks in the individual life model. *Insurance: Mathematics y Economics*, **19**, 243-253.
44. Esary, J.D. y Marshall, A.W. (1974). Multivariate distributions with exponential minimums. *Annals of Statistics*, **2**, 84-98.
45. Finkelstein, M. y Esaulova, V. (2005). On the weak IFR aging of bivariate lifetime distributions. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **21**, 265-272.
46. Franco, M., Callejón, J., Herrerías, R. y Vivo, J.M. (2005a). Procedimiento para reducir la depreciación del valor de mercado del método de valoración de las dos funciones de distribución: Funciones de supervivencia y máximo. En *VI Seminario de ASEPELT sobre Análisis, Selección, Valoración, Control y Eficiencia de Proyectos*, Murcia.
47. Franco, M., Callejón, J., Herrerías, R. y Vivo, J.M. (2005b). The survival functions as tools in asset pricing. Sometido para su publicación en revista internacional.
48. Franco, M., Callejón, J., Herrerías, R. y Vivo, J.M. (2005c). Extreme statistics to assess under uncertainty from a bivariate quality index. Sometido para su publicación en revista internacional.
49. Franco, M., Herrerías, R., Vivo, J.M. y Callejón, J. (2005a). Valuation method of the two survival functions as a proxy methodology in risk analysis. En *CIM-*

- MA2005: International Mediterranean Congress of Mathematics Almería 2005*, Almería.
50. Franco, M., Herrerías, R., Vivo, J.M. y Callejón, J. (2005b). Extreme statistics in the valuation methods based on two probability models. En *CIMMA2005: International Mediterranean Congress of Mathematics Almería 2005*, Almería.
 51. Franco, M., Ruiz, M.C. y Ruiz, J.M. (2003). A note of the ILR and DLR classes under formation of coherent systems. *Statistical Papers*, **44**, 279-288.
 52. Franco, M. y Vivo, J.M. (2002). Reliability properties of series and parallel systems from bivariate exponential models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **31**, 2349-2360.
 53. Franco, M. y Vivo, J.M. (2004a). On hazard rate of the extreme order statistics from bivariate exponential models of Gumbel. En *3rd International Symposium on Extreme Value Analysis: Theory and Practice*, Aveiro.
 54. Franco, M. y Vivo, J.M. (2004b). Properties of minimum and maximum from bivariate exponential distributions. En *6th World Congress of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability and 67th Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics*, Barcelona.
 55. Franco, M. y Vivo, J.M. (2005a). On log-concavity of the extremes from Gumbel bivariate exponential distributions. Sometido para su publicación en revista internacional.
 56. Franco, M. y Vivo, J.M. (2005b). Generalized mixtures of gamma and exponentials and reliability properties of the maximum from Friday and Patil bivariate

- exponential model. Sometido para su publicación en revista internacional.
57. Franco, M. y Vivo, J.M. (2005c). An alternative of the classical tools to calculate the weights and a new technique to generate weighted probability models in valuation theory. En *V Seminario de ASEPELT sobre Modelos de Generación de Distribuciones. Propiedades y Aplicaciones*, Granada.
 58. Freund, J.E. (1961). A bivariate extension of the exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **56**, 971-977.
 59. Friday, D.S. y Patil, G.P. (1977). A bivariate exponential model with applications to reliability and computer generation of random variables. En *Theory and Applications of Reliability*, Tsokos, C.P. y Shimi, I. (eds.), Ed. Academic Press, New York, Vol. **1**, 527-549.
 60. García, J., Cruz, S. y Andújar, A.S. (1999). Il metodo delle due funzioni di distribuzione: Il modello triangolare. Una revisione. *Genio Rurale*, **11**, 3-8.
 61. García, J., Cruz, S. y García, L.B. (2002). Generalización del método de las dos funciones de distribución (MDFD) a familias beta determinadas con los tres valores habituales. En *III Reunión Científica ASEPELT: Análisis, Selección, Control de Proyectos y Valoración*, Murcia, 89-113.
 62. García, J., Cruz, S. y Rosado, Y. (2000). Las familias de distribución multivariantes en la teoría general de valoración. En *XIV Reunión ASEPELT-ESPAÑA*, Oviedo.
 63. García, J., Cruz, S. y Rosado, Y. (2002). Extensión multi-índice del método beta en valoración agraria. *Economía Agraria y Recursos Naturales*, **2**, 3-26.

64. García, J. y García, L.B. (2003). *Teoría General de Valoración. Método de las dos funciones de distribución*. Ed. Fundación Unicaja, Málaga.
65. García, J., Herrerías, R. y García, L.B. (2003). Valoración agraria: Contrastes estadísticos para índices y distribuciones en el método de las dos funciones de distribución. *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros*, **199**, 93-118.
66. García, J., Trinidad, J.E. y Gómez, J. (1999). El método de las dos funciones de distribución: la versión trapezoidal. *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros*, **185**, 57-80.
67. Griliches, Z. (1961). Hedonic price indexes for automobiles: An econometric analysis of quality change. En *The price Statistics of the Federal Government*, National Bureau of Economic Research, New York.
68. Guadalajara, N. (1996). *Valoración Agraria. Casos Prácticos*. Ed. Mundi-Prensa, Madrid.
69. Gumbel, E.J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, **55**, 698-707.
70. Gupta, P.L. y Gupta, R.C. (2000). The monotonicity of the probability of the beta distribution. *Applied Mathematics Letters*, **13**, 5-9.
71. Gupta, P.L. y Gupta, R.C. (2001). Failure rate of the minimum and maximum of a multivariate normal distribution. *Metrika*, **53**, 39-49.
72. Gupta, R.C. y Warren, R. (2001). Determination of change points of non-monotonic failure rates. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **30**, 1903-1920.

73. Gupta, R.C. (2005). Reliability functions of bivariate distributions with second kind of beta conditionals. *Statistics*, **39**, 43-52.
74. Hanagal, D.D. (1996). A multivariate Weibull distribution. *Economic Quality Control*, **11**, 193-200.
75. Hanagal, D.D. (2004). Parametric bivariate regression analysis based on censored samples: a Weibull model. *Economic Quality Control*, **19**, 1-8.
76. Hanagal, D.D. (2005). A bivariate Weibull regression model. *Economic Quality Control*, **20**, 1-8.
77. Harris, C.M., Marchal, W.G. y Botta, R.F. (1992). A note on generalized hyperexponential distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **8**, 179-191.
78. Herrerías, J.M. (2002). *Avances en la Teoría General de Valoración en Ambiente de Incertidumbre*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
79. Herrerías, R., García, J. y Cruz, S. (2003). A note on the reasonableness of PERT hypotheses. *Operations Research Letters*, **31**, 60-62.
80. Herrerías, R., García, J., Cruz, S. y Herrerías, J.M. (2001). Il modello probabilistico trapezoidale nel metodo delle due distribuzioni della teoria generale de valutazioni. *Genio Rurale. Rivista di Scienze Ambientali*, **LXIV**, 3-9.
81. Herrerías, R., Palacios, F. y Herrerías, J.M. (2002). Relaciones entre las familias de distribuciones beta de varianza constante, mesocúrticas y de tipo Caballer. En *I Congreso Internacional de Valoración y Tasación*, Valencia, 73-80.

82. Hutchison, T.P. y Lai, C.D. (1990). *Continuous Bivariate Distributions, Emphasizing Applications*. Ed. Rumsby Scientific Publishing, Australia.
83. Johnson, D. (1997). The triangular distribution as a proxy for the beta distribution in risk analysis. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. D*, **46**, 387-398.
84. Johnson, N.L. and Kotz, S. (1999). Non-smooth sailing or triangular distributions revisited after some 50 years. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. D*, **48**, 179-187.
85. Kaufmann, A., Grouchko, D. y Croun, R. (1977). *Mathematical Models for the Study of the Reliability of Systems*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 124. Ed. Academic Press, London.
86. Kotz, S., Balakrishnan, N. y Johnson, N.L. (2000). *Continuous multivariate distributions*. Ed. Wiley, New York.
87. Law, A.M. and Kelton, W.D. (1982). *Simulation modelling and analysis*. Ed. McGraw-Hill, New York.
88. Lozano, J.J. (1996). *Tasación urbana: una metodología para informes de tasación masiva*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
89. Lynch, J.D. (1999). On conditions for mixture of increasing failure rate distributions to have an increasing failure rate. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **13**, 33-36.
90. Marshall, A.W. y Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 30-40.

91. Milgrom, P.R. y Weber, R.J. (1982). A theory of auctions y competitive bidding. *Econometrica*, **50**, 1089-1122.
92. Miravete, E.J. (2001). On preservation of increasing hazard rate under convolution. *CARESS Working Paper 01-05*, University of Pennsylvania.
93. Miravete, E.J. (2002). Preserving log-concavity under convolution: Comment. *Econometrica*, **70**, 1253-1254.
94. Müller, A. (1997). Stop-loss order for portfolios of dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, **21**, 219-223.
95. Nagaraja, H.N. y Baggs, G.E. (1996). Order statistics of bivariate exponential random variables. En *Statistical Theory y Applications*, Nagaraja, H.N., Sen, P.K. y Morrison, D.F. (eds.), Ed. Springer-Verlag, New York, 129-141.
96. Nadarajah, S. (2002). Comment on van Dorp, J.R. and Kotz, S. (2002). The standard two-sided power distribution and its properties: with applications in financial engineering. (*The American Statistician*, **56**, 90-99). *The American Statistician*, **56**, 340-341.
97. Nadarajah, S. (2005). On the two-sided power distribution. *Metrika*, **61**, 309-321.
98. Oruç, O.E. y Bairamov, I. (2005). On the general class of two-sided power distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **34**, 1009-1017.
99. Palacios, F., Callejón, J. y Herrerías, J.M. (2000). Fundamentos probabilísticos del método de valoración de las dos distribuciones. *Anales de Economía Aplicada*. En *XIV Reunión ASEPELT-ESPAÑA*, Oviedo.

100. Raftery, A. E. (1984). A continuous multivariate exponential distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **13**, 947-965.
101. Romero, C. (1977). Valoración por el método de las dos distribuciones beta: una extensión. *Revista de Economía Política*, **75**, 47-62.
102. Romero, C. (1989). *Introducción a la financiación empresarial y al análisis bursátil*. Ed. Alianza, Madrid.
103. Ross, S. (1996). *Stochastic Processes*. (2nd ed.). Ed. Wiley, New York.
104. Stetuel, F.W. (1967). Note on the infinite divisibility of exponential mixtures. *The Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 1303-1305.
105. van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2002a). The standard two sided power distribution and its properties: with applications in financial engineering. *The American Statistician*, **56**, 90-99.
106. van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2002b). A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. D*, **51**, 63-79.
107. van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2003). Generalized trapezoidal distributions. *Metrika*, **58**, 85-97.
108. Vivo, J.M. (2000). Propiedades de fiabilidad de estadísticos ordenados para distribuciones exponenciales bivariantes. En *3^{er} Congreso Nacional de Estudiantes de Estadística*, Torrevieja.

109. Vivo, J.M. y Franco, M. (2001). Algunos sistemas de modelos biexponenciales. En *XXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Úbeda.
110. Vivo, J.M. y Franco, M. (2004). Classification of generalized hyperexponential distributions. Application to the minimum and maximum from particular models. En *3rd International Symposium on Extreme Value Analysis: Theory and Practice*, Aveiro.
111. Vivo, J.M. y Franco, M. (2005a). Generalized mixtures of Weibull distributions and reliability properties of the extreme statistics from bivariate Weibull models. Sometido para su publicación en revista internacional.
112. Vivo, J.M. y Franco, M. (2005b). On log-concavity of the maximum statistic from Friday and Patil bivariate exponential model. En *CIMMA2005: International Mediterranean Congress of Mathematics Almería 2005*, Almería.
113. Williams, T.M. (1992). Practical use of distributions in network analysis. *Journal of the Operational Research Society*, **43**, 265-270.
114. Yaari, M.E. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, **55**, 95-115.

