En mi opinion, sin embargo, el realismo semantico y el realismo metafisico van indisolublemente unidos, al menos en lo que se refiere a teorías matemáticas . Esta es la conclusión que, desde mi punto de vista, se desprende del articulo de Benacerraf, "Mathematical Truth". En él el autor aisla el problema fundamental que tiene que resolver el realista semántico cuando se enfrenta a teorías abstractas, i. e., a teorias que hablan de numeros, conceptos, proposiciones, propiedades etc. :¿cuál es el mecanismo que hace las veces de evidencia empírica en los contextos que, como los citados, no tratan de objetos espacio-temporales? En este caso no parece que haya más remedio que postular alguna facultad intelectual especial, la intuición o algo parecido que capte inmediatamente la realidad de la que habla la teoría. Benacerraf[276] sostiene que el realismo soluciona el problema del carácter de la verdad pero plantea el problema epistemológico de nuestro acceso a ella. Podría parecer que el postular una facultad suprasensible que solucione el problema del acceso a la realidad o, desde otro punto de vista, el problema de la confirmación de nuestros enunciados le da la razón a Horwich puesto que se mantiene el realismo pero se traspasa el hiato aparentemente insalvable entre la realidad y el conocimiento. A mi modo de ver, esta opinión es errónea teniendo en cuenta que la facultad especial que suele postularse, intuición o evidencia intelectuales, se introduce completamente ad hoc y, por el momento, no hay ninguna teoría que la explique y justifique satisfactoriamente. Cuando se echa mano de estrategias como la indicada lo único que se está haciendo es subrayando la discontinuidad que existe para un realista entre el conocimiento y el mundo, y no solucionando el problema.

En adelante llamaré al realismo semántico simplemente realismo, sin más calificativos. Esto es, entenderé por realismo la postura, opuesta al reduccionismo verificacionista, que sostiene que los enunciados deben tomarse en su sentido literal y que tienen un valor de verdad independientemente de que seamos capaces de car con él, y aun en el caso de que sepamos que su descubrimiento es imposible. Como ya he indicado, en mi opinión, el realismo implica también la tesis de que no podemos estar absolutamente seguros del valor de verdad de nuestros enunciados porque no tenemos modo alguno de comprobar cómo es la realidad "en sí".

9.3 El realismo de Cantor

El problema que aqueja a las posturas realistas acerca de los objetos matemáticos, a saber, la dificultad para encontrar la facultad que permita acceder con garantías a esa realidad abstracta, afecta también a la teoría de la existencia que Cantor mantiene. Desde sus primeras publicaciones Cantor se decanta por una posición realista respecto de los números enteros ,los racionales y, desde 1883, de todos los objetos abstractos bien definidos. Para el autor alemán la realidad de la que la matemática pretende dar cuenta existe y se enfrenta a nosotros de la misma manera que lo hace la realidad de la que tratan las ciencias empíricas. Cantor expresa este punto de vista en varias ocasiones pero una discusión explícita de la concepción de la existencia que mantiene sólo se encuentra en Grundlagen. En esta obra[278] Cantor distingue dos maneras en las que pueden existir los objetos abstractos, en general, y los números transfinitos en particular. La primera de ellas, a la que llama existencia inmanente, es la que tienen aquellos objetos para los cuales tenemos una definición precisa por medio de la cual pueden diferenciarse claramente de otros objetos del mismo tipo. En mi opinión, el que un objeto tenga existencia inmanente se opone a que sea una pura fantasía subjetiva o una invención injustificada. Cantor se expresa de la siguiente manera:

> "Podemos considerar hasta aquí reales (wirklich) a los números enteros, cuando ocupan un lugar completamente determinado en nuestro entendimiento sobre la base de la definición, [cuando] se diferencian óptimamente de todos los demás componentes de nuestro pensar, [cuando] están con ellos en determinadas relaciones y por consiguiente modifican el estado de nuestro espíritu de una forma determinada."[278]

Es decir, un objetc existe inmanentemente si está bien definido y pertence a un sistema trabado en el cual se diferencia del resto de los objetos y pueden determinarse con claridad las relaciones que mantiene con ellos. Por la forma en la que Cantor se expresa diciendo, por ejemplo, que los números están en cierto sentido "en nuestro entendimiento" o que "modifican el estado de nuestro espíritu" podría pensarse que Cantor es psicologista. Ph. Jourdain, entre otros, mantiene esta postura[280], que en mi opinión es injustificada. Cantor considera a lo largo de toda su vida que los números preexisten a nuestro conocimiento, que se descubren, por lo que no hay razón para tachar su posición de psicologismo.

La segunda forma de entender la existencia de los objetos abstractos es para Cantor la siguiente: un objeto, un número por ejemplo, existe si es un correlato objetos o conjuntos de objetos que existen en el mundo físico. Así los ordinales indican el orden que tienen entre si los elementos de un conjunto, los números cardinales el tamaño de los conjuntos etc. A este tipo de realidad que pueden adquirir los objetos la llama <u>existencia transsubjetiva o transiente</u>. En este sentido afirma que las clases numéricas (I), (II), etc. son representantes de tamaños que de hecho ocurren en la naturaleza puesto que Cantor cree, aunque no lo dice en este lugar, que hay $\aleph_0$ átomos materiales en el universo y que los átomos de éter forma un conjunto de cardinalidad $\aleph_1$.

De acuerdo con lo dicho, los números pueden existir de dos maneras, o mejor, decir que un objeto existe o es real tiene dos sentidos: puede significar que está definido con claridad y que se han determinado sus relaciones con los demás objetos de su dominio, con lo cual adquiere existencia inmanente. Puede significar, por otra parte, que el objeto tiene una contrapartida en el mundo natural que en el caso de los números no es más que la existencia de conjuntos sobre la base de los cuales puedan abstraerse los cardinales y ordinales. En este sentido para Cantor, igual que para Frege, un número existe si hay un conjunto del que es el número.

Hasta aquí podría dudarse de que Cantor sostenga un punto de vista realista de las matemáticas ya que podría ocurrir que unos objetos tuvieran existencia transiente y otros únicamente existencia inmanente de manera que estos últimos no tuvieran referentes externos y la verdad de las afirmaciones que hacen referencia a ellos fuera definida en términos de coherencia interna del sistema o algo por el estilo. Sin embargo, Cantor rechaza esta posibilidad afirmando que todo lo que tiene existencia inmanente tiene existencia transiente, esto es, que no hay objetos que sólo tengan el primer tipo de existencia. Dicho de otro modo, para Cantor todo objeto que cumpla las condiciones que le garantizan la existencia inmanente es además un reflejo de objetos, propiedades o relaciones que ocurren fuera de nosotros. En palabras de Cantor:

> "no me cabe ninguna duda de que ambos tipos de realidad siempre se encuentran juntos, en el sentido de que un concepto señalado como existente desde el primer punto de vista tiene también siempre una realidad transiente en ciertos respectos, incluso en un número infinito de ellos." (8)

La íntima relación en que se encuentran ambos tipos de existencia ofrece al matemático la ventaja de que no tiene que justificar la existencia del referente de los objetos que introduce en la teoría ni la objetividad de los conceptos que define, ni tiene tampoco que arrostrar el problema epistemológico derivado del realismo que señalaba Benacerraf. El punto de vista de Cantor aúna aparentemente las ventajas del realismo y de la concepción epistémica de la verdad, esto es, por un lado una definición sencilla e intuitiva de qué significa que un enunciado sea verdadero y por otro un método para determinar sin lugar a dudas el valor de verdad de los enunciados. El nexo de unión entre los dos tipos de existencia lo proporciona un postulado muy difícil de justificar, lo que Cantor llama la unidad del todo:

Cantor sostiene que el fundamento último por el que la existencia inmanente y la transiente de un objeto van indisolublemente unidas consiste en el hecho de que el universo forma una totalidad de la que también nosotros, los seres humanos, formamos parte. Cantor no lo justifica en absoluto ni vuelve a hacer referencia a él -- ni a los dos tipos de existencia que estamos considerando -- en ningun otro escrito. Lo único que sobre el postulado dice Cantor es:

> "Esta conexión de ambas realidades tiene su fundamento propio en la unidad del todo, al que nosotros mismos pertenecemos."[281]

Y en una nota al texto indica que la teoría del conocimiento y de la verdad a la que él se adhiere tiene como predecesores a Platón, Spinoza y Leibniz[282]. Esta teoría del conocimiento puede resumirse diciendo que todo lo que es cognoscible existe y viveversa, todo lo que existe puede ser conocido.

Sin el recurso al postulado de la unidad del todo no hay manera de conjugar el procedimiento por el que se le adscribe existencia inmanente a un objeto, que más bien parece apoyar una concepción epistémica de la verdad, con el realismo que se desprende de otros textos cantorianos y que recorre toda su obra. La postura realista va habitualmente unida a una concepción de la verdad como correspondencia, y el significado que tiene la verdad de un enunciado, o la existencia de referente para un término no guarda relación alguna con la forma en que llegamos a suponer que derminadas afirmaciones son verdaderas o las razones que tenemos para sustentarlas. La concepción epistémica de la verdad es opuesta a la concepción de la verdad como correspondencia, a menos que, como Cantor hace, se suponga que la relación entre conocimiento y realidad es tan íntima que no podríamos conocer nada que no fuera verdero en el sentido más fuerte, en el sentido del ajuste total a la realidad tal como es. Quizá Horwich diría que el postulado de la unidad del todo permite a Cantor ser un realista semántico sin ser realista metafísico. Por mi parte me inclino más bien a pensar que el postulado pretende ocultar precisamente el problema epistemológico del realismo matemático, pero en ningún caso lo elimina.

La posición de Cantor en Grundlagen es bastante confusa, hasta tal punto de que si se pasa por alto el postulado las explicaciones cantorianas podrían dar también la falsa impresión de que Cantor está próximo a lo que podríamos llamar "convencionalismo" o "formalismo" matematico, esto es, a la teoria de la verdad como coherencia interna de un sistema, pero sin que el sistema conceptual que se acepte en un momento determinado como verdadero tenga un estatuto privilegiado en sus relaciones con "la estructura del mundo real" que no pueda tener otro sistema igualmente bien trabado. De esta opinión es Ph. Jourdain[284] que justifica la adscripcion de Cantor a las filas formalistas sobre la base de una nota de Grundlagen que dice así:

> "El procedimiento de la correcta formación de los conceptos es en mi opinión en todas partes el mismo; se toma un objeto sin propiedades, que al principio no es nada más que un nombra o un signo A, y se le dan ordenadamente distintos, incluso un número infinito de predicados inteligibles, cuyo significado se conoce por medio de ideas ya disponibles y que no pueden contradecirse entre si; así se determinarán las relaciones de A con los conceptos ya disponibles y particularmente con los afines; si se finaliza con esto completamente, entonces están presentes [...] todas las

condiciones para el despertar del concepto A y está listo para existir."[285]

Es cierto que este texto aislado da la impresión de que se está manteniendo una posición antirrealista puesto que no hay referencia alguna a las relaciones del concepto A con nada externo al sistema en el que se ha introducido. Hay resonancias de formalismo ingenuo que considera que en las teorías se introducen signos vacíos que poco a poco van llenándose de significado, pero en la teoría de la existencia de Cantor cuando el proceso de definición de las nuevas nociones finaliza y se han determinado las relaciones del objeto nuevo con los demás éste pasa a ser real, tanto como cualquiera de los utilizados para definirlo. Cantor se está refiriendo en este caso a las condiciones que un objeto debe satisfacer para conseguir la existencia inmanente, y al final de la nota añade:"constatar su significado transiente es cosa de la Metafísica"[286]. Teniendo en cuenta el sentido que tienen en Grundlagenlas expresiones "existencia inmanente" y "existencia transiente" no hay razón para sostener que éste sea un trabajo formalista, a pesar de la manera, quizá poco afortunada, en la que se expresa Cantor al comienzo del texto citado. Lo que tiene que comprobar la metafísica, tal como la entiende Cantor, es que el concepto A es objetivo, es decir su función consiste en señalar las cualidades o relaciones que poseen algunos objetos extramentales para cuyo tratamiento teórico se ha introducido el concepto A, por que la existencia de tales cualidades o relaciones está garantizada por la unidad del todo.

En mi opinión no hay rasgos formalistas en la posición cantoriana de la existencia de 1883. Su postura es realista como resulta claro de los textos con los que comienza la obra y en los que se refiere a la existencia de los números enteros infinitos y que ya hemos visto. Con la distinción entre los dos tipos de realidad, transiente e inmanente, señala a pesar suyo la caracteristica definitoria del realismo metafisico que se intenta ocultar, a mi entender sin tener clara conciencia de ello, mediante el postulado de la unidad del todo. Y este postulado indica además que Cantor está influido también por una concepción neoplatónica de la existencia que trataremos más adelante.

De todos modos, Cantor se expresa claramente como un realista cuando justifica la objetividad de su teoria de números transfinitos y explica cómo llegó a ella. Pero, curiosamente, cuando trata el tema de la existencia explicitamente, cosa que hace sólo en el §8 de <u>Grundlagen</u>, utiliza categorías que no ha utilizado antes y no volverá a utilizar -- la distinición entre existencia inmanente y transiente y el postulado de la unidad del todo -- y en ciertas expresiones parece conceptualista respecto de las potencias y los ordinales.

9.4 <u>Realismo y libertad</u>

También en <u>Grundlagen</u> y tras la introducción del postulado de la unidad del todo subraya Cantor a modo de conclusion que la esencia de las matematicas radica en su libertad. Esta afirmacion junto con las precisiones sobre la existencia inmanente vuelven de nuevo a sacar a la luz la cuestion de si Cantor era o no formalista. Tanto Dauben[287] como Grattan-Guinness[288] señalan que para Cantor la existencia se reduce a ausencia de contradicción y que la caracterización de las matematicas como absolutamente libres avala la interpretación de que el matemático alemán era formalista.

Sin embargo, y en primer lugar, es falso que para Cantor la existencia matemática se redujera a no-contradicción. Cantor exige que se puedan determinar completamente las relaciones que el candidato a existente mantiene con el resto de las entidades del dominio en el que se ha introducido, y este rasgo de su posición queda mejor caracterizado llamándolo "coherencia" que "consistencia". En segundo lugar, la libertad de las matemáticas declarada por Cantor, y el formalismo que estos autores ven en su concepción de la existencia matemática encajan mal con algunos textos muy explícitos de nuestro autor: por ejemplo, en el mismo Grundlagen Cantor confiesa haberse visto compelido a aceptar la existencia de los números y la corrección de su teoía de números transfinitos casi contra su voluntad (fast wider meinen Willen)[289]. No puede haber forma de expresar el proceso de formación de la teoría de manera mas contradictoria con la libertad de la que hablará posteriormente. En Mitteilungen, al denunciar la confusion frecuente entre el infinito actual y potencial, escribe:

"en particular veo aquí la razón por la que no se han descubierto (entdeckt hat) antes los numeros transfinitos"[290]

y utiliza el verbo "descubrir". Dauben hace referencia a una carta inédita en la que Cantor denomina a la teoría de conjuntos "terra incognita"[291], que sugiere que considera al matemático más como explorador que como inventor. Fraenkel recoge otra carta a Mittag-Leffler en la que se dice:

"en lo que concierne al resto (aparte del estilo y la economía de expresión) no es mérito mío, en relación al contenido de mi trabajo he sido simplemente informador y notario."[292]

¿Qué quiere decir entonces el autor cuando declara que las matemáticas son libres?. En mi opinión la libertad de la que aquí se habla no tiene nada que ver con la arbitrariedad ni con la pura invención. Lo que Cantor está aquí defendiendo es el estatuto independiente de la investigación matemática, no sujeto a la censura ni filosófica ni religiosa. Propongo que se entienda la libertad de la matemática, que subraya el autor, en el sentido de autonomía. Las matemáticas no tienen que justificar la existencia de los objetos que maneja ni la objetividad de sus conceptos, tarea que corresponde a la metafísica, y los únicos argumentos que deben tenerse en cuenta a la hora de calibrar una teoría son los estrictamente matemáticos. Esta autonomía no constituye un peligro para el desarrollo de la ciencia; más bien ocurre lo contrario: si se constriñen las matemáticas desde posiciones que le son ajenas se corre el riesgo de acabar con la fecundidad y el progreso matemático. Por otra parte, la liberalidad en cuanto a la introducción de nuevos objetos y conceptos no puede ser perjudicial puesto que, como se dice en Grundlagen[293], las matemáticas llevan incorporados sus propios mecanismos de corrección y así si una noción se manifiesta como vacía o redundante será rechazada y no existirá en ninguno de los dos sentidos.

La justificación de la autonomía de las matemáticas es otra de las ventajas del postulado de la unidad del todo. Mediante él se garantiza la existencia transiente de los objetos matemáticos y se descarga al matemático de la tarea de probar tal existencia. Con el postulado Cantor se está defendiendo de antemano de la acusación de que sus números son meros signos sin significado real, acusación que Kronecker ya había dirigido contra los irracionales, y la autonomía de su ciencia le permite a su vez hacer caso omiso de las críticas que se dirijan a su teoría de conjuntos desde la filosofía o la teología.

9.5 El principio de Plenitud

Hay un sentido en el cual no es erróneo afirmar que en la concepción de *Grundlagen* la ausencia de contradicción es condición suficiente de la existencia, pero lejos de justificar este sentido el calificativo de formalista subraya más bien ciertas resonancias neoplatónicas que aparecen en esta obra y en obras posteriores:

En *Grundlagen* los ecos neoplatónicos se dejan ver en la conexión entre la existencia inmanente y la transiente. Como sabemos todo lo que tiene un tipo de existencia tienen también el otro, es decir, todo lo que está bien definido y es coherente con el sistema en el que se introduce existe y es real. La idea neoplatónica que subyace podría formularse diciendo que existe todo lo que es compatible con la coherencia del sistema, existe todo lo que puede existir. Posteriormente se encuentran fuertes vestigios de neoplatonismo en la justificación teológica de los números transfinitos que pretende llevar a cabo Cantor en una carta al cardenal Franzelin en la que sostiene que si Dios es perfecto tiene que tener en su mano la posibilidad de crear infinitos objetos, esto es, de crear el infinito concreto en el mundo. Y si Dios es bondadoso tiene que haber creado todo lo posible. El texto de la carta dice así:

"Una prueba parte del concepto de Dios y concluye en primer lugar la posibilidad de la creación de un

Transfinitum ordinatum de la absoluta perfección de la esencia de Dios, acto seguido [se concluye] la necesidad de la efectiva creación consiguiente de un transfinitum de su absoluta bondad y magnificencia."[294]

No es un argumento muy afortunado para calmar las reticencias teológicas de algunos pensadores de su epoca, ya que deducir la necesaria existencia de los entes creados constituye una opinión peligrosamente próxima a la herejía panteísta que, como el cardenal Franzelin le hace saber[295], atenta contra la doctrina de la absoluta libertad divina.

Tanto la necesaria conexión de los dos tipos de existencia que Cantor distingue como la legitimidad de deducir la necesidad de la existencia de los objetos sobre la base de su mera posibilidad en virtud de la esencia bondadosa del creador, como ocurre en la carta citada, son formulaciones claras de lo que A. Lovejoy ha llamado el Principio de Plenitud, un principio neoplatónico que ha recorrido toda la historia de la filosofía occidental[296].

Hallett tambien ha señalado este rasgo de la ontología de Cantor, aunque sin relacionarlo con el principio de Lovejoy. Dice Hallett:

"La coherencia de puede considerarse como un tipo de condición mínima que las matemáticas deben respetar pero de acuerdo con las doctrinas de Cantor esta condición mínima es un principio de exdistencia máxima: existen tantas cosas como son posibles."[297]

El correctivo que el autor menciona en <u>Grundlagen</u> según el cual las nociones inútiles no cobran existencia inmanente[illegible], puede chocar con la tesis de que existe todo lo posible, ya que, dependiendo de cómo se interprete, restringe el alcance del Principio de Plenitud. Propongo que se entienda en este caso "inutilidad" en el sentido de "redundancia", que es la única menera de seguir manteniendo la completud de lo existente. En cualquier caso, sostengo que Cantor utilizó las doctrinas de Spinoza y Leibniz como una justificación externa de su propia teoría en un intento de reforzar su posición con el testimonio de filósofos respetados. El problema con el que se encontró, sin embargo, fue que si mediante argumentos tomados de estos racionalistas se podía demostrar la <u>objetividad</u> de sus números más allá de su consideración como puras imágenes fantásticas, era muy difícil conciliar estos argumentos con la ortodoxia católica, como Cantor pretendió hacia el final de su vida. Así, la filosofía de Leibniz y Spinoza, junto con la idea que define el Principio de Plenitud, no actuó como motor de la formación de la teoría de números transfinitos, sino que el autor echó mano de ella <u>a posteriori</u>. En este sentido el principio de la unidad del todo tiene apariencia de ser <u>ad hoc</u> o quizá mejor <u>post hoc</u>. El dato en el que me apoyo es negativo: Cantor no volvió a hacer referencia al principio ni a la distinción entre existencia inmanente y transiente, introduce estas ideas en el §8 de <u>Grundlagen</u> y ya no aparecen más en su obra publicada. El argumento de la necesidad de la existencia de sus números sólo se encuentra en la carta citada a Franzelin y esto es todo lo que tenemos para reconstruir el grado de compromiso que mantuvo el autor con el principio de plenitud.

Del principio platónico-racionalista de plenitud se sigue que entre los seres creados existe una gradación continua, que el universo esta completo y que desde toda la eternidad existen todas las variedades posibles de los entes con todas sus matizaciones infinitas[289]. De esta importante consecuencia del citado principio nada dice Cantor. Podría argüirse que no tiene porqué hacerlo puesto que no corresponde al matemático sino al metafísico el llevar a cabo las investigaciones sobre existencia en la naturaleza creada. Sin embargo, cuando Cantor asume esta tarea, bien que siempre de pasada y sin profundizar, como cuando trata sobre el número de átomos corpóreos, de átomos de éter o de puntos del espacio real, se echa de menos alguna referencia a la completud de la "cadena del ser", en terminología de Lovejoy, en el caso de que el autor hubiera sostenido seriamente el principio al que estoy haciendo referencia. Por otra parte, el principio de plenitud hace depender la existencia de los entes de la existencia de Dios. Abordaremos la discusión de este punto en el próximo capítulo.

De acuerdo con lo que hemos visto hasta el momento hay razones para evitar el término "formalismo" cuando se habla de la concepción cantoriana de la existencia a partir de 1883, a pesar de que la conexión entre existencia inmanente y transiente junto con la afirmación de que las matemáticas son libres pueda llevar en algún momento a la interpretación de que para Cantor todo lo que se requiere para que un objeto exista es que su introducción en un sistema no lleve a contradicción. Cantor cree que la realidad **es** como dice su teoría, en caso contrario no tendría sentido que hablara del descubrimiento de sus números ni que rechazara las definiciones de continuidad de Bolzano y Dedekind diciendo que eran falsas, y no más bien poco útiles o simplemente que el concepto que ellas caracterizaban era distinto del que ofrecía su propia definición, etc. Nada hay en esta concepción que justifique la calificación de formalista, que luego se ha unido al nombre de Hilbert. La teoría de Hilbert depende de dos descubrimientos que no hicieron mella en el pensamiento de Cantor: por un lado, la aparición de las contradicciones en la teoría de conjuntos y, por otro, el desarrollo de las geometrías no euclidianas. El primero de los dos descubrimientos le llevó a la investigación de un método que garantizara desde el principio la consistencia de los axiomas y postulados de una teoría. El segundo de ellos hizo que asimilara una concepción de los axiomas de una teoría como enunciados que no hacen referencia a la estructura del mundo real, y que **qua** axiomas son verdaderos por el hecho de no ser contradictorios en sí mismos y como conjunto. En palabras de Hilbert:

> Si los axiomas arbitrariamente dados no se contradicen unos con otros con todas sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Este es para mi el criterio de verdad y existencia."[300]

El punto de vista de Hilbert provocó, como es sabido, la reacción de Frege, quien mantenía una posición absolutamente contraria a la de Hilbert en este asunto. Frege consideraba que si los axiomas eran verdaderos entonces no eran contradictorios, pero el hecho de su no-contradicción no aseguraba la existencia de conjuntos de objetos de los que fueran verdaderos[39]. En Fundamentos de la Aritmética[30] Frege incluye los números transfinitos de Cantor entre las creaciones formalistas que aún tienen que justificar su consistencia y la existencia de sus objetos. En mi opinión, esto ocurre porque Frege pasa por alto el principio de la unidad del todo que garantiza la objetividad de los conceptos y la existencia de los objetos. Si Cantor hubiera participado en la disputa Frege-Hilbert acerca del estatuto de los axiomas y de los números, no hay duda de que hubiera militado en las filas de Frege mejor que en las de Hilbert. No quiero decir con esto que los puntos de vista de Frege y Cantor coincidan absolutamente. En la obra de Frege no aparece el rasgo neoplatónico del principio de plenitud ;en el caso de los conceptos, Frege exige que se muestre que hay objetos que caen bajo ellos. Pero Frege, como Cantor, creía en una especie de intuición intelectual que apoyaba la verdad de los principios de una teoría, requería que éstos fueran evidentes en algún sentido y rechazaba la idea de que los axiomas y los conceptos pudieran crearse o aceptarse como pura convención. Frege comparó al matemático con el geógrafo y en este sentido está muy cerca de Cantor. Este último no trató nunca el tema de los axiomas y nunca señaló ninguno explícitamente, excepto el axioma de la "aritmética extendida", como lo llamó, que aparece en una carta de 1899 y que consiste en la suposición de que los conjuntos a los que corresponden alef como números cardinales son consistentes[303]. Pero sí utilizó supuestos que no pudo probar, como HC o la existencia de conjuntos infinitos en acto, que de hecho funcionaban como axiomas y que él consideraba que expresaban la naturaleza de la realidad, que tenían un valor de verdad objetivo, que son independientes de nuestro conocimiento de ellos y que no se inventan sino que se descubren. No hay muchos puntos de contacto con una posición formalista como la de Hilbert.

9.6 El platonismo de Cantor

Llamaré **platonismo** a la concepción de la existencia que sostiene que los objetos abstractos existen como tales en algún lugar de la misma manera que los objetos físicos existen en el mundo. A esta tesis a veces se le une la idea de que los objetos físicos tienen un grado de realidad inferior que los objetos "extramundanos", los cuales constituyen el paradigma de lo auténticamente real.

Hasta ahora he defendido que Cantor era un realista, pero el realismo respecto de los números significa no que cada uno de los números se encuentre existiendo como un objeto en un mundo no físico, sino más bien que los enunciados acerca de números son objetivos, pretenden expresar cómo es la realidad, que prexisten a nuestro conocimiento de ellos etc. Así como las tesis realistas recorren prácticamente la obra de Cantor, las ideas platónicas sólo aparecen claramente en dos cartas del año

1895 y, con menos claridad, parecen desprenderse de una de las conclusiones de su Habilitationsschrift de 1869[304]. En esta última obra afirma que los números enteros son como los cuerpos celestes y recoge esta idea en una carta a Hermite de 1895 en la que radicaliza aún más la posición:

> "Permítame en este sentido hacer notar que a mí me parece más fuerte la realidad y la absoluta regularidad de los números enteros que la del mundo de los sentidos. Y el que que ocurra así tiene un único fundamento, muy simple, a saber este: que los números enteros tanto separados como en su totalidad actualmente infinita existen con el grado de realidad más alto como ideas eternas en el intelecto divino."[305]

Y en la misma fecha escribe al Padre Jeiler refiriéndose a la variedad de modos que puede adquirir el infinito en abstracto, i.e. , los números cardinales y ordinales:

> "Todos estos modos especiales del transfinito existen desde la eternidad como ideas en el intelecto divino."[306]

Si Platón instituyó un mundo supranatural en el que existían las ideas con la más absoluta realidad, en los textos de Cantor citados el mundo platónico es sustituido por la mente de Dios: los números existen en el intelecto del creador desde siempre. A este tipo de platonismo se le llama a veces _platonismo agustiniano_.

Como se desprende de lo dicho, las ideas platónicas no son muy importantes en la concepción cantoriana de la existencia, al contrario que las tesis realistas.

CAPÍTULO III:

EL DESCUBRIMIENTO DE LAS CONTRADICCIONES Y LA SEGUNDA TEORÍA DE CANTOR

0. Introducción

El objetivo del Capítulo III y último del presente trabajo consiste básicamente en la discusión de los motivos que llevaron a Cantor a abandonar la teoría sostenida en Grundlagen y Beiträge y de las modificaciones que hizo de la primera teoría. He llamado a la reunión de dichas modificaciones La segunda teoría, aunque no es una teoría propiamente dicha ya que Cantor nunca ofreció un desarrollo sistemático de sus nuevas ideas. El rasgo más sobresaliente de la segunda teoría es que en ella se distingue entre conjuntos y multiplicidades inconsistentes. La distinción entre ambos tipos de colecciones depende del número de elementos de los que consten, por lo que la segunda teoría puede considerarse justificadamente como una teoría de la limitación del tamaño. En el §1 de este capítulo se exponen y explican las caracterizaciones que Cantor introdujo tanto de lo que consideraba conjuntos como de los agregados no dignos de tal mención. La razón por la cual nuestro autor abandonó la concepción ingenua de los conjuntos estriba en el descubrimiento de contradicciones que él mismo realizó. Hay sólidos indicios históricos de que Cantor se encontró con dos contradicciones en su teoría, la del ordinal máximo y la del máximo cardinal, alrededor de 1896. De la primera trata el §2. En 1897 se publicó la contradicción del ordinal máximo, gracias al matemático italiano C. Burali-Forti, quien la descubrió independientemente. El trabajo de Burali-Forti se estudia en el punto 2.1. De la contradicción del número cardinal máximo trata el §3. Las dos contradicciones señaladas dependen de la aceptaación de los números infinitos de Cantor, sin embargo las dificultades de la primera teoría no afectaban sólo al tratamiento de los números muy grandes, sino que podían reproducirse en niveles de la teoría que parecían hasta el momento menos sospechosos, como lo demostró la llamada paradoja de Russell. El matemático inglés encontró la contradicción que lleva su nombre intentando demostrar que el teorema de Cantor es falso. No consiguió esto último, y a cambio dió con la contradicción lógica más famosa de todos los tiempos y la que más difusión tuvo tanto entre matemáticos como entre filósofos. La contradicción de Russell se estudia en el §4 y en el punto 4.1 se relaciona esta contradicción con las teorías de Frege y se recogen las críticas de Russell a las soluciones del tipo de las de Cantor. En el §5 se pretende trazar una distinción neta entre el infinito cuantitativo cantoriano y el infinito cualitativo o Absoluto que a veces se aplica a la divinidad; en este contexto se exponen en el punto 5.1 las tesis de M. Hallett, quien en la obra Cantorian set theory defiende la opinión de que Cantor mantuvo desde siempre una teoría de la limitación del tamaño en la que, al comienzo, el Absoluto asumía el papel regulador.En el punto 5.2 expongo mis ideas contra Hallett y sostengo la opinión de que la primera teoría encerraba una concepción ingenua de los conjuntos y no es una teoría de la limitación del tamaño. En el último punto explico el lugar que las ideas religiosas tuvieron en el desarrollo del pensamiento de Cantor, que si bien no fue tan importante, en mi opinión, como Hallett pretende, si fue lo suficientemente destacado como para que no se le pase por alto. Los textos cantorianos relevantes para el conocimiento de la segunda teoriason, fundamentalmente, las cartas a Dedekind de 1899 y las cartas a Jourdain entre 1901 y 1906.

1. Conjuntos y multiplicidades inconsistentes.

La modificación que Cantor introdujo en sus tesis tras el descubrimiento de las contradicciones consiste en la distinción entre conjuntos y multiplicidades de objetos que originan contradicciones si se les considera como conjuntos. Los conjuntos son reuniones consistentes de objetos mientras que a las colecciones del segundo tipo las llama multiplicidades inconsistentes. Cantor no profundizó en la caracterización de las colecciones así distinguidas y la definición que dio tanto de los conjuntos como de las multiplicidades inconsistentes es circular. En su correspondencia con Dedekind de 1899 puede leerse:

> "Esto es, una multiplicidad puede estar constituida de tal forma que la suposición del 'estar-juntos' de todos sus elementos lleve a una contradicción de tal manera que sea imposible considerar la multiplicidad como una unidad, como 'un objeto concluido'. A tales

multiplicidades las llamo <u>multiplicidades inconsistentes</u> o <u>absolutamente infinitas</u>." [307]

A las multiplicidades que no dan lugar a contradicciones si se las considera como unidades las llama <u>conjuntos</u>. Así la característica que diferencia a los conjuntos de las multiplicidades inconsistentes es que aquellos se comportan consistentemente aunque se los considere como un solo objeto. Dicho de una manera algo brusca, las multiplicidades inconsistentes son las que encierran contradicción si se les aplica le teoria de Cantor. Las que no provocan sorpresas desagradables de este tipo son consistentes y sólo a estas últimas se las llama conjuntos. De este modo la teoría queda aparentemente salvada.

La rectificación de Cantor entra dentro de lo que Russell llamó teorías de la <u>limitación del tamaño</u> ya que las colecciones problemáticas son todas "muy grandes"en relación al tamaño del universo, aunque la ambigüedad de la expresión entrecomillada no pueda precisarse pos el momento. Cantor señala como ejemplo de multiplicidad inconsistente la "unión de todo lo pensable"[308], que es, como sabemos, el caso que Dedekind utilizó para mostrar que había sistemas infinitos[309].

En <u>Beitrage</u> no hay indicios de que el autor esté exponiendo una teoría de la limitación de tamaño como la que aparece en su correspondencia, con lo que no hay base para suponer que en 1895-7 dispusiera ya de este esbozo de solución, o por lo menos si lo intuíano lo consideró suficientemente madurado como para incluirlo en su última obra conjuntista. Dado que tampoco en la correspondencia hay una teoría sólida y suficientemente desarrollada de la limitación de tamaño la distinción cantoriana entre conjuntos y multiplicidades inconsistentes parece más bien una estrategia <u>ad hoc</u> para salir del paso, estrategia que el autor ni siquiera publicó.

El problema más evidente con el que se enfrenta la solución cantoriana a las contradicciones consiste en que no se puede decidir a priori qué colecciones son consistentes y cuáles no, sino que sólo una vez que hemos topado con las dificultades determinamos que las colecciones responsables de ellas deben ser rechazadas. Y no hay ninguna razón especial por la que intuitivamente se comprenda por qué colecciones de un tamaño adecuado se dejan caracterizar por la teoría mientras que otras más abarcantes quedan fuera del alcance de ésta so pena de contradicción. No parece que Cantor fuera consciente de esta dificultad en su segunda teoría, dificultad que, por otra parte, es común a todas las soluciones del tipo de la limitación de tamaño. Como veremos a continuación, Russell adoptó por algún tiempo una estrategia como la limitación de tamaño contra las contradicciones, pero, a diferencia de Cantor, la ausencia de evidencia intrínseca de la solución aceptada le preocupó enormemente.

Cantor no expuso nunca las contradicciones del ordinal y cardinal máximos como problemas de su primera teoría sino que aparecen, formando parte de la segunda teoría, en las pruebas por reducción al absurdo de que no existen ni el conjunto de todos los ordinales ni el de todos los alef. Esto es, se utilizan las contradicciones para mostrar lo acertado de la segunda teoría, no para atacar a la primera.

Aunque de conformidad con la hipótesis expresada al principio de este capitulo las contradicciones fueron descubiertas por Cantor en 1896, los textos más antiguos que se conservan en las que se las alude son de 1899.

2. La primera paradoja de Cantor

Meschkowski llama primera paradoja de Cantor[310] a la contradicción que se deduce en la teoría de conjuntos cantoriana al suponer la existencia del mayor número ordinal transfinito. La primera versión de esta paradoja que conocemos aparece en una carta de Cantor a Dedekind de 1899[311] y se encuentra también prácticamente sin variación en una carta del autor a Jourdain de 1903[312]. En ambos documentos se utiliza la contradicción para demostrar la tesis de que la totalidad de los ordinales no forma un conjunto. La argumentación se desarrolla de siguiente manera:

Si los números ordinales constituyen una multiplicidad consistente, a tal multiplicidad le correspondería un tipo ordinal. La razon estriba en que los números ordinales son comparables y ademas en que, según las tesis de Cantor, en toda colección de ordinales hay uno que es el menor, o dicho de otro modo, la razón es que el conjunto de los números ordinales está bien ordenado con lo que, mediante el procedimiento de la abstracción, se le asigna un número ordinal.

Simbolicemos por Ω al conjunto de todos los ordinales. A partir de ω_0, el segundo ordinal transfinito, el conjunto Ω tiene la propiedad de que cada número perteneciente a él es el ordinal de la serie de los ordinales que le anteceden, de manera que los ordinales de esta serie son todos menores que él y no existe un número mayor que todos los de la serie pero menor que él. Así el ordinal del conjunto Ω seguirá inmediatamente a <u>todos</u> los elementos de Ω, pero, por definición, en Ω están todos los ordinales existentes. Luego el ordinal de Ω será al mismo tiempo mayor que todos los elementos de Ω e idéntico a alguno de ellos.

La conclusión que Cantor extrae de esta argumentación es que la totalidad de los números es una multipliocidad inconsistente, es decir, <u>no</u> es un conjunto.

La contradicción del ordinal máximo afecta también a la primera teoría puesto que en su deducción no se han utilizado afirmaciones o principios que no pertenezcan a ella. Lo único que se necesita para deducir la paradoja es la afirmación de que loa ordinales forman un conjunto bien ordenado y que, de ω_0 en adelante, cada uno de ellos indica la ordenación del segmento de ordinales que le precede. Y esto ya aparece en <u>Grundlagen</u> y <u>Beiträge</u>.

2.1 La paradoja de Burali-Forti

La contradiccion anteriormente expuesta se conoce habitualmente como la paradoja de Burali-Forti. El logico italiano C. Burali-Forti la descubrió independientemente de Cantor y la publicó en 1897. Fue la primera contradicción de la teoría de conjuntos que se dió a conocer a la comunidad científica.

La intención de Burtali-Forti, como él explicitamente reconoce[1], es mostrar que los números ordinales transfinitos no forman una serie, ni siquiera un orden parcial puesto que no cumplen la propiedad de ser comparables. El objetivo contra el que Burali-Forti dirige, pues, la fuerza de la contradicción es la llamada ley de tricotomía aplicada a ordinales transfinitos que afirma que si **a** y **b** son dos de tales números uno de los tres enunciados siguientes

$$a = b \quad , \quad b < a \quad , \quad a < b$$

ha de ser verdadero.

La argumentación discurre de la siguiente manera:

En primer lugar, se define lo que se entenderá por <u>orden de los elementos de una clase</u>. Si A es una clase, se dice que R <u>es un orden para los elementos de A</u>, si

i) R es una correspondencia entre elementos de A y clases de elementos de A,

ii) R es transitiva,

iii) R es antisimétrica,

iv) si **a** y **b** son elementos de A, entonces siempre sucede que o bien a = b, o bien a tiene la realción R con b o bien b está en la relación R con a.

La expresión "(A,R)" significará en adelante que la clase A está ordenada de la forma indicada por la relación R.

Con cada clase ordenada asocia Burali-Forti un objeto abstracto, su *tipo ordinal*, que comparte cada una con aquellas clases similares a ella y sólo con éstas, entendiendo por similitud lo mismo que hemos venido entendiendo a lo largo de este trabajo.

Una clase ordenada (A,R) estará *perfectamente ordenada* si:

i) tiene un primer elemento

ii) todo elemento tiene un sucesor inmediato, excepto el último, si lo hay

iii) todo elemento **x** de A es tal que o bien no tiene predecesor inmediato, o bien tiene un predecesor **z** que no tiene predecesor inmediato y hay un número finito de elementos de A entre **z** y **x**.

A los tipos ordinales de clases perfectamente ordenadas los llama Burali-Forti *numeros ordinales*. La clase de los números ordinales se simboliza por N_o.

La definición dde las relaciones de "mayor" y "menor" entre ordinales es como la de Cantor. Si entendemos por "$\epsilon > a$" la clase de los ordinales mayores que **a**, "$(N_o, \epsilon >)$" sera la clase de todos los ordinales ordenados mediante la relación "ser mayor que".

De la definición anterior se sigue que las clases de un solo miembro están perfectamente ordenadas, por lo que

(1) $$1 \in N_o$$

donde "1" es el tipo ordinal de las clases de un solo miembro. También se sigue que

(2) si $a \in N_o$ y $b \in N_o$, entonces $a+b \in N_o$

definiéndose la suma "a+b" como en la teoría de Cantor.

Burali-Forti prueba también que si se asume que

(A) Si <u>a</u> y <u>b</u> son tipos ordinales entonces

$$a = b \quad \text{ó} \quad a < b \quad \text{ó} \quad b < a,$$

entonces se sigue que $(N_o, \epsilon >)$ es una clase perfectamente ordenada. Tendrá, por consiguiente, un número ordinal Ω. Y cualquier tipo ordinal será menor que Ω o idéntico a él. Esto es, si "Clpo" significa "la clase de las clases perfectamente ordenadas", tenemos que de (A) se deduce:

(3) $$(N_o, \epsilon >) \in \text{Clpo}$$

(4) $$\Omega \in N_o$$

(5) si $a \in N_o$, entonces $a < \Omega$

(6) si $a \in N_o$, entonces $a < a+1$

Así, si se sustituye en (6) "a" por "Ω", y en (5) "a" por "Ω+1", se obtienen los enunciados

(6') si $\Omega \in N_o$, entonces $\Omega < \Omega+1$

(5') si $\Omega+1 \in N_o$, entonces $\Omega+1 < \Omega$

Como tanto Ω como su siguiente, $\Omega+1$, son números, se deducen los dos enunciados contradictorios

$$\Omega < \Omega+1 \quad \text{y} \quad \Omega+1 < \Omega$$

Luego, concluye Burali-Forti, la proposición (A) -- la ley de tricotomía -- es falsa, es decir, hay al menos dos tipos ordinales que no son comparables.

Burali-Forti malentiende la definición de Cantor de clase bien ordenada y rectifica su error en una breve nota de 1897. Sin embargo, esta confusión no resta fuerza a su descubrimiento ya que en él se utilizan clases perfectamente ordenadas y toda clase bien ordenada en el sentido de Cantor está perfectamente ordenada.

La diferencia entre las posiciones de Cantor y Burali-Forti estriba en que el primero está convencido de que todo conjunto puede ordenarse bien y también toda colección, aunque no sea un conjunto, con lo que la proposición (A) es verdadera para Cantor. Como de la proposición (A) se sigue la contradicción del ordinal máximo, Cantor se ve obligado a restringir la noción de conjunto para que abarque sólo multiplicidades inocuas. Esto es, Cantor sostiene que toda multiplicidad bien definida es un conjunto y puede ordenarse bien. Como todo conjunto bien ordenado tiene un número ordinal, toda multiplicidad bien definida tiene un número ordinal. De ahí se llega a la contradicción que acabamos de considerar, por lo que no pueden seguir manteniéndose todas estas tesis a la vez. La opción de Cantor es rechazar la primera: que toda multiplicidad es un conjunto, con lo que el argumento que lleva a la contradicción se detiene en este punto. Burali-Forti, por el contrario, rechaza la hipótesis de que todo ordinal es comparable; en concreto no lo son Ω y $\Omega+1$, así la contradicción tampoco se presenta y no tiene que plantearse restricción alguna a la formación de conjuntos.

3. La segunda paradoja de Cantor

Lo que aquí denominaré, siguiendo a Meschkowski[315], segunda paradoja de Cantor, es la contradicción que se obtiene al suponer que existe un número cardinal mayor que todos los demás. Generalmente se llama a esta contradicción Paradoja de Cantor, por ser él su descubridor, aunque no fue publicada hasta 1932. El documento más antiguo que tenemos en el que aparece es una carta de Cantor a Dedekind de 1899. También en la carta a Jourdain de 1903 citada anteriormente[316] se menciona el hecho de que la sucesión de los alef no forma un conjunto, aunque se expone la contradicción derivada de suponer lo contrario.

En la carta a Dedekind mencionada[317] demuestra Cantor que el sistema S de todas las clases de conjuntos equivalentes no forma un conjunto. La demostración se lleva a cabo por reducción al absurdo utilizando la contradicción del cardinal máximo. La argumentación es la siguiente:

Agrupemos los conjuntos equivalentes, y sólo estos, en clases de equivalencia, de manera que a cada clase pertenezcan los conjuntos de la misma cardinalidad y conjuntos de cardinalidad distinta pertenezcan a clases distintas. Si K(a) es la clase de todos los conjuntos de cardinalidad a, llamemos S a la totalidad de los K(x), donde x es cualquier cardinal finito o transfinito. Supongamos que S es un conjunto. Elijamos de cada miembro de S, esto es, de cada clase de equivalencia K(a) un representante de la clase, M(a). El conjunto M formado por los representantes tendrá la misma cardinalidad que S puesto que se puede hacer corresponder a cada miembro de S uno de M y viceversa. M es una colección cada uno de cuyos miembros tendrá una cardinalidad distinta, y ademas para cada número cardinal x habrá en M un conjunto de tal cardinalidad. Si S es un conjunto también lo será M, puesto que Cantor afirma[31] que dos conjuntos equivalentes son ambos conjuntos o ambos inconsistentes. Del conjunto M se puede formar el conjunto UM, resultado de la unión de los elementos de M. UM tendrá un número cardinal determinado como conjunto que es. Llamemos al cardinal de UM, m_0. Mediante el teorema de Cantor, que el autor introduce en esta cartaa Dedekind[32], y que afirma que

$$a < 2^a$$

para cualquier número cardinal a, se deduce que el enunciado

$$m_0 < 2^{m_0}$$

ha de ser verdadero. Puesto que, según la hipótesis, en M hay un representante de cada número cardinal, también lo habrá de 2^{m_0}. Esto es, algún elemento de M tendrá la cardinalidad 2^{m_0}. Pero UM tiene m_0 elementos, con lo que aparece la contradicción.

Para deducir la paradoja de Cantor se necesita del Axioma de Elección, que sirve para elegir un miembro de cada clase de equivalencia, la operación de la unión entre conjuntos, la tesis de que la unión de conjuntos es un conjunto y el teorema de Cantor, todos ellos ingredientes de la primera teoría.

Haciendo una ligera modificación a la argumentación anterior se llega a la conclusión de que la totalidad de los alef no forma un conjunto. Para ello hay que asumir, cosa que venimos haciendo a lo largo de este trabajo, que los alef son conjuntos. La conclusión aludida aparece si sustituimos M por Π, la totalidad de los alef.

4. La paradoja de Russell

La paradoja de Russell, la más conocida de las paradojas lógicas, afecta a cualquier teoría de conjuntos que encierre una concepción ingenua de éstos y, por tanto, también aparece en la primera teoría de Cantor. No obstante, la conexión entre la paradoja de Russell y las tesis del matemático alemán es más fuerte. Como es sabido, Russell dirigió la fuerza de su contradicción contra la teoría de Frege, pero la descubrió considerando el teorema de Cantor, según confesión propia[320]. Una formulación simple de la paradoja de Russell es la siguiente:

Si todo predicado define una clase como su extensión, al predicado "no pertenecerse a sí misma" le corresponderá la clase C detodas las clases que no se pertenecen a sí mismas. Pero, ¿se pertenece tal clase a sí misma? Si se contesta afirmativamente, C no se pertenecerá a sí misma puesto que debe satisfacer el predicado definitorio de la clase de la que es miembro. Si se contesta negativamente, pertenecerá a C, con lo que no se pertenecerá a sí misma. En cualquiera de las dos opciones se encuentra una contradicción.

Russell la descubrió en la primavera de 1901[321]. En 1902 se la comunicó epistolarmente a Frege, haciendo responsable de ella a la tesis fregeana de que las funciones pueden ser consideradas como expresiones susceptibles de ocupar el lugar de variables en las funciones proposicionales, esto es, que las funciones pueden ser consideradas como individuos:

> "Usted afirma que también una función puede actuar como el elemento indeterminado. Creí esto anteriormente, pero ahora este punto de vista me parece dudoso a causa de la contradicción siguiente. Sea ω el predicado: ser un predicado que no puede ser predicado de sí mismo. ¿Puede ω predicarse de sí mismo? De cada respuesta se sigue su contraria."[322]

La contradicción aparece publicada por primera vez en 1903, en <u>Los Principios de la Matemática</u>, obra en la que se ofrecen tres versiones de la misma[323], una con el predicado mencionado en la carta a Frege, otra con el concepto-clase "concepto-clase que no es término de su propia extensión" y una tercera con la clase de las clases que no son miembros de sí mismas. La primera reacción de Russell fue rechazar la existencia de las entidades implicadas: en el primer caso negar la existencia de tal predicado, en el segundo rechazar que la expresión entrecomillada designe un concepto-clase, y en el tercero aceptar únicamente la realidad de la clase "como pluralidad"[324]. En la época en que escribió Los Principios de la Matemática Russell distinguía entre clases como unidad y como pluralidad. Las clases como unidad forman un todo, pueden tratarse como si fueran un objeto simple y, por tanto, ser miembros de otras clases. Las clases como pluralidad son colecciones de elementos pero considerados como multiplicidad. En palabras de Russell:

> "En una clase como pluralidad, los términos componentes, aunque tienen cierto tipo de unidad, tienen menos de la que se requiere para que formen un todo. En realidad, tienen tanta unidad como para que sean justamente una pluralidad y no la suficiente como para impedirles que sigan siendo una pluralidad."[325]

Uno de los efectos de la contradicción en la teoría de Russell es que no todas las clases como pluralidad pueden ser desde algún punto de vista clases como unidad. Entre otras, la clase de las clases que no se pertenecen a sí mismas no es una clase como unidad. La concepción de las clases como pluralidad no era demasiado útil, amén de ser poco clara y complicada de precisar, por lo que Russell no tardó en abandonarla y acogerse a la tesis de que no hay tales entidades como "clases como pluralidad". En una carta a Jourdain de 1906 escribe:

> "Usted verá que en mi libro sugiero que ciertas funciones no determinan una clase como uno. Esto es prácticamente la misma doctrina que [decir que] no

determinan una clase, porque una <u>clase como pluralidad</u> no es una entidad."[26]

Tras el descubrimiento de las contradicciones no se veía más salida que eliminar <u>a posteriori</u> las nociones responsables. Russell y Cantor adoptaron la misma estrategia, negar la existencia de los conjuntos que provocaban dificultades, pero mientras que el segundo no se planteó problemas acerca de la solución encontrada, el primero no se conformó con la distinción entre multiplicidades aceptables e inaceptables por el criterio del tamaño y dedicó los años siguientes a buscar un método satisfactorio para eliminar el problema sin tener que renunciar a las matemáticas de Cantor ni a la lógica de Frege, aunque encontrar una solución que se ajustara a sus propios requerimientos no iba a ser fácil, y posiblemente nunca encontró ninguna que le convenciera completamente. No era difícil imaginar estrategias que mantuvieran alejadas las paradojas conocidas. Algo más complicada se presentaba la tarea de reconstruir las matemáticas y la lógica sin contrariar la estrategia aceptada, pero resultó imposible adornar las soluciones con el aire de evidencia y simplicidad que Russell hubiera deseado. El matemático británico exigía que las modificaciones que se introdujeran no fueran puramente técnicas, sino que pudieran defenderse por algo más que por haber devuelto la consistencia a la teoría de conjuntos. Debían apelar las dificultades que su teoría y el teorema que lleva su nombre plantearon al matemático británico, se mantuvo en el convencimiento de la distinción entre conjuntos y multiplicidades inconsistentes terminarían con los problemas encontrados por Russell[30].

4.1 Cantor, Frege y el descubrimiento de la contradicción de Russell

Russell entró en contacto con las tesis de Cantor gracias a un encargo de recensión de una obra de Hannequin hecho por la revista Mind en 1896. En la obra de Hannequin se incluía un resumen de los resultados cantorianos, que a Russell le parecieron insostenibles[31]. La incoherencia que encontraba en las ideas cantorianas se expone en Los Principios de la Matemática, en donde el filósofo británico afirma que hay conjuntos para los que el teorema de Cantor no puede ser verdadero, entre los que se cita el conjunto de todos los términos, el de todas las proposiciones, el de todas las clases y el de todas las cosas[32]. Parecía evidente que no podía existir un conjunto mayor que el de todas las cosas sin excepción, y era lógico pensar que éste debía tener el número cardinal máximo. En un primer momento supuso que Cantor se había equivocado en la prueba de su teorema, y así en "Las matemáticas y los metafísicos" escribe:

"a lo que puede llamarse 'sentido común lógico', esto es, que había de parecer, al final, precisamente lo que uno debía haber esperado siempre."[327]

Por no ajustarse a sus deseos de naturalidad descalifica algunas propuestas como las realizadas por Quine:

"El prof. Quine, por ejemplo, ha expuesto sistemas que admiro grandemente en méritos de su habilidad, pero que no puedo estimar satisfactorios porque parecen estar creados _ad hoc_, y no ser los que ni aún el lógico mas inteligente hubiese podido pensar si no hubiese sabido de las contradicciones."[328]

Evidentemente, la segunda teoría de Cantor también participaba del artificio y falta de evidencia que tanto desagradaban a Russell. La solución que éste deseaba era una que le hiciera olvidar que alguna vez hubo contradicciones en los fundamentos de la matemática. Ni la distinción cantoriana entre conjuntos y multiplicidades inconsistentes, que Russell conocía, ni, desde luego, su teoría de las clases como unidad y como multiplicidad se adecuaban a esta exigencia. En relación a la solución de Cantor, Jourdain recoge en su correspondencia las dificultades que los matemáticos de Cambridge, entre los que se encontraban Hardy, Russell y Whitehead, tenían para entender la caracterización cantoriana de los conjuntos consistentes[329]. Por su parte, Cantor, que tambien conocía la obra de Russell _Los Principios de la Matemática_ y, por tanto, estaba al corriente de las dificultades que su teoría y el teorema que lleva su nombre plantearon al matemático británico, se mantuvo en el convencimiento de la distinción entre conjuntos y multiplicidades inconsistentes terminarían con los problemas encontrados por Russell[230].

4.1 Cantor, Frege y el descubrimiento de la contradicción de Russell

Russell entró en contacto con las tesis de Cantor gracias a un encargo de recensión de una obra de Hannequin hecho por la revista Mind en 1896. En la obra de Hannequin se incluía un resumen de los resultados cantorianos, que a Russell le parecieron insostenibles[231]. La incoherencia que encontraba en las ideas cantorianas se expone en Los Principios de la Matemática, en donde el filósofo británico afirma que hay conjuntos para los que el teorema de Cantor no puede ser verdadero, entre los que se cita el conjunto de todos los términos, el de todas las proposiciones, el de todas las clases y el de todas las cosas[232]. Parecía evidente que no podía existir un conjunto mayor que el de todas las cosas sin excepción, y era lógico pensar que éste debía tener el número cardinal máximo. En un primer momento supuso que Cantor se había equivocado en la prueba de su teorema, y así en "Las matemáticas y los metafísicos" escribe:

> "Hay un número maximo de todos los números infinitos, que es el numero de todas las cosas, de toda clase y todo tipo. Es evidente que no puede haber un numero mayor que éste, pues si se ha tomado todo, no queda nada por añadir. Cantor tiene una prueba en la que no hay número máximo, y si esta prueba fuese valida las contradicciones del infinito reaparecerían en forma sublimada. Mas en este punto el maestro se hace culpable de una falacia muy sutil que espero explicar en un trabajo futuro."[333]

Sin embargo, tras investigar cuidadosamente la argumentación cantoriana, no sólo no descubrió el error que esperaba sino que se encontró con la contradicción del cardinal máximo, conocida ya por Cantor pero no por Russell. Casi inmediatamente después se topó con la paradoja que lleva su nombre y que le dejó conmocionado a causa de la simplicidad de los conceptos que aparecían en ella. En <u>La evolución de mi pensamiento filosófico</u> puede leerse:

> "Resultaba que, de premisas que todos los lógicos, no importa de qué escuela, habian aceptado siempre, desde los tiempos de Aristóteles, podían deducirse contradicciones, demostrandose con ello que <u>algo</u> estaba fuera de lugar, pero sin hacer indicación de cómo podian enderezarse las cosas. Fue el descubrimiento de una de tales contradicciones lo que puso fin, en la primavera de 1901, a la luna de miel lógica que habia venido

disfrutando. Comunique la desgracia a Whitehead, que no pudo consolarme citando 'nunca de nuevo una mañana alegre y confiada'."[334]

La diferencia entre las contradiccionnes de Cantor, la del ordinal y cardinal maximos, por un lado, y la de Russell por otro estriba en que las primeras aparecen en partes muy desarrolladas de la teoría de números transfinitos y, por tanto, muy lejos de la base de las matemáticas y la lógica. Cabía la esperanza de que alguna medida puramente técnica pudiera acabar con ellas, o bien que fueran fruto de algún error de cálculo. La contradicción de Russell, por el contrario, está dirigida contra los fundamentos mismos de la disciplina, y las nociones implicadas tienen una apariencia de lo más inocente. El mismo Russell reconoce que no se interesó seriamente por la contradicción del ordinal máximo hasta 1905, puesto que hasta esa fecha consideró que una contradicción tan complicada sólo podría resolverse después de que la suya hubiera sido neutralizada[335].

Como sabemos, tanto Cantor como Russell reaccionaron negando que los conjuntos peligrosos existieran como tales; aunque en otro sentido, como multiplicidades absolutamente infinitas o como clases como pluralidad, se siguieran admitiendo. Era necesario, por tanto, adoptar criterios precisos acerca de que conjuntos se permitían y cuáles no. Las contradicciones encontradas mostraron que los criterios mantenidos hasta la fecha eran en exceso liberales, y que debían ser recortados aunque no se sabía muy bien cómo. El mecanismo utilizado por Russell para introducir frases procedía de Frege y aparece en Grundgesetze der Arithmetik[336] señalado como la ley V. Esta ley afirma que dos funciones son idénticas cuando lo son sus recorridos. Frege lo explica al comienzo de esta obra de la siguiente manera:

> "Utilizo las palabras
> 'la función $\Phi(\xi)$ tiene el mismo recorrido que la función $\Psi(\xi)$'
> en general como equivalentes a las palabras
> 'las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ tienen para los mismos argumentos siempre los mismos valores'.[337]

La ley V supone que puede pasarse sin más de funciones a recorridos, de intensiones a extensiones, de predicados a las clases de objetos que los satisfacen. De este modo la ley equivale a un principio de abstracción indiscriminado, que puede formularse así: "Toda propiedad P define una clase, a saber, la clase de todo aquello que cumple la propiedad P." No obstante, predicados como "ser una clase que no se pertenece a sí misma", "ser un número cardinal" o "ser un número ordinal" no determinan clases --no determinan conjuntos, en la terminología de Cantor, o clases como unidad en la de Russell-- y suponer lo contrario desemboca en las contradicciones de Russell, Cantor y de Burali-Forti, respectivamente. Frege quedó consternado por la contradicción encontrada por Russell, no sólo por considerar que sus Grundgesetze eran ya inútiles y sus últimos años de trabajo habían resultado estériles, sino sobre todo por no vislumbrar un camino por el que escapar al desastre. Esto era lo mas terrible de las contradicciones: cerraban una dirección sin abrir otra a cambio. En la respuesta a la carta de Russell ya citada escribe Frege:

"Todo esto es de lo más serio puesto que, con la pérdida de mi ley V, parecen desvanecerse no solo los fundamentos de mi aritmética, sino también la única fundamentación posible de la aritmética."[338]

Y en el Nachwort al segundo tomo de Grundgesetze:

"Y todavía ahora no comprendo cómo podría fundamentarse científicamente la aritmética, cómo podrían concebirse y tenerse en cuenta los números como objetos lógicos, si no se permite --al menos condicionadamente-- pasar de un concepto a su extensión."[339]

De todas formas, la teoría de conjuntos y la lógica no terminaron sus días durante la crisis de principios de siglo. Los pensadores mas capaces de la época dedicaron sus esfuerzos a encontrar una salida a los problemas, y se desarrollaron varias soluciones distintas. Russell sugirió tres de ellas, la limitación de tamaño: no aceptar la existencia de clases demasiado grandes, la teoría del zig-zag: no aceptar la existencia de clases cuya propiedad definitoria sea muy complicada, y la mas conocida, la teoría de los tipos, que propone una estratificación y ramificación de la realidad.

Zermelo inauguró la vía de la fundamentación axiomática de la teoría de conjuntos, Hilbert intentó construir una teoría que asegurara la consistencia de los axiomas, y por último, el intuicionista estricto Brouwer y el más moderado Poincaré propusieron una solución basada en la evidencia intrínseca de cada uno de los pasos del cálculo. El descubrimiento de las contradicciones no resultó, sin embargo, un acontecimiento desgraciado, excepto quizás para sus protagonistas. Lo que se perdió en inocencia se ganó en profundidad y conciencia de la naturaleza del pensamiento formal y sus resultados. No desarrollaré las vías de solución mencionadas, cuyo estudio cae fuera del alcance del presente trabajo.

5. La limitación del tamaño de los conjuntos y la concepción del Absoluto

De acuerdo con lo sostenido a lo largo de este trabajo, la teoría de conjuntos cantoriana pertenece al estadio ingenuo del desarrollo conjuntista que puede caracterizarse por incluir una aproximación extremadamente liberal a la noción de conjunto. En una teoría del estadio ingenuo cualquier colección definida de objetos es un conjunto, sin mayores exigencias acerca del estatuto de tales objetos, el tamaño de la colección o el método de su definición. Sólo tras la aparición de contradicciones en el sistema, Cantor se dió cuenta que no toda reunión de objetos era un candidato lícito a conjunto, y que, en concreto, la totalidad de los ordinales no puede considerarse como un conjunto si se pretende que la teoría sea consistente. Las colecciones que originaron las paradojas que Cantor encontró tenían la peculiaridad de ser extremadamente abarcantes, contenían en sí todo lo que podían contener. En uno de los casos, no existía ningún ordinal por enorme que fuera que no perteneciera a la colección considerada; en el otro la exuberante multiplicidad de los cardinales era considerada de manera unificada. Ante esta situación, pareció evidente que una forma simple e inmediata de terminar con ambas contradicciones era estipular un tamaño máximo para las colecciones permitidas. De ahí que la primera respuesta al problema consistiera en un esbozo de teoría de la limitación del tamaño de los conjuntos: se aceptaban conjuntos tan grandes como fuera posible manteniendo la consistencia. La historia que he esbozado indica que la limitación del tamaño fue una estrategia impuesta por las contradicciones a una teoría que había nacido y se había desarrollado con un punto de vista ingenuo de los conjuntos.

No obstante, y como ya he indicado en capítulos anteriores, no todos los comentaristas de Cantor comparten la interpretación aquí expuesta.

5.1 Michael Hallett: la teoría de conjuntos cantoriana y la limitación de tamaño

En la obra Cantorian set theory and limitation of size desarrolla M. Hallett la tesis de que el sistema conjuntista de Cantor no sólo tiene el mérito de constituir la primera teoría de conjuntos de la historia sino que ademas ha inspirado las modernas teorías de conjuntos basadas en la idea de la limitación de tamaño, utilizando ella misma el mecanismo de tal limitación desde su origen, como metodo para recortar la peligrosa potencia de una concepción ingenua de los conjuntos.

Hallett sintetiza la doctrina cantoriana del infinito en tres principios. El primero de ellos, al que denomina Principio del Infinito Actual, consiste en la afirmación de que todo infinito potencial supone un infinito actual que constituye el dominio sobre el que varían los valores del primero[340].

En la obra de Cantor, la expresión más clara de este principio se encuentra en Mitteilungen, en un texto que ya conocemos[341] y que afirma que toda magnitud variable debe tener un dominio de variacion que no puede ser el mismo variable, ya que en ese caso no habría base sólida sobre la que considerar este tipo de magnitudes. Esto es, para que una función pueda tomar sucesivamente valores distintos se requiere que tales valores estén disponibles en un conjunto determinado. Una magnitud que pueda aumentar indefinidamente mas allá de cualquier límite establecido necesita de la existencia de un conjunto previo de valores que le proporcionen un ámbito sobre el que variar. Como sabemos, la idea de que el infinito potencial exige la existencia de conjuntos infitos en acto se encuentra ya en Aristóteles y tal razonamiento justifica el rechazo del filósofo griego del infinito potencial por adición.

El segundo principio a traves del cual Hallett caracteriza la concepción cantoriana del infinito es el llamado Principio del Finitismo, que afirma que el infinito debe ser tratado de modo similar a lo finito en la medida de lo posible[342]. Este principio significa en la obra cantoriana que los límites de lo matematizable se amplían hasta abarcar campos que tradicionalmente habían quedado fuera. Implica en cierto sentido la domesticación del concepto de Infinitud, reverenciado habitualmente como atributo de la divinidad. Aunque la metáfora este algo gastada, podría decirse que el principio del finitismo constituye la piedra de toque de la revolución llevada a cabo por la obra de Cantor en matemáticas, revolución que tiene puntos de contacto con la copernicana. Al igual que la revolución de Copérnico y Galileo permitió el tratamiento unificado de dos ámbitos anteriormente considerados como opuestos -- el mundo sublunar y el mundo supralunar --, así la teoría cantoriana supone la unificación metodológica en el tratamiento de lo finito y lo infinito matemáticos.

El tercer principio señalado por Hallett es el Principio del Absoluto, que dice que el Absoluto no puede caracterizarse matemáticamente[343]. Del tercer principio se sigue que la teoría desarrollada por Cantor no se plica a este tipo de infinitud que el Cantor relaciona con Dios. El pretender un tratamiento matemático del Absoluto desemboca en los argumentos tradicionales contra el infinito actual, muchos de los cuales descansan en la confusión del Absoluto con el Transfinito, el infinito matemático cantoriano.

Hallett sostiene la tesis de que este Absoluto, que se mantiene fuera de consideración matemática, es en realidad una especie de límite superior del Transfinito. Las jerarquías de los números ordinales y la de los alef no tienen fin, crecen siempre, de acuerdo con los principios de formación de ordinales y la definición de los alef sobre las clases numéricas. Según el _Principio del Infinito Actual_, definen un dominio más abarcante que sería el Absoluto. La existencia de las contradicciones del ordinal y el cardinal máximos muestran la justeza del _Principio del Absoluto_: el dominio de la jerarquía completa de los números da lugar a contradicciones si se lo pretende caracterizar matemáticamente[344]. En opinión de Hallett las contradicciones de la teoría de conjuntos no afectan al sistema cantoriano puesto que la concepción del Absoluto del autor inmuniza a su teoría contra ellas. Es decir, la teoría cantoriana es una teoría de la limitaciçon del tamaño desde el principio, aunque evolucionó desde un estadio que podríamos llamar _teológico_, en el que al final de los números transfinitos se encontraba Dios, a un estadio _matemático_ provocado por el estilo de las contradicciones descubiertas. Para Hallett, el primitivo concepto del Absoluto se convierte en las multiplicidades absolutamente infinitas conforme la teoría se va perfeccionando. En palabras de Hallett:

> "De hecho, la doctrina cantoriana del Absoluto niega explícitamente que toda colección pueda ser un conjunto. Y uno puede argüir al menos que la colección universal y la colección de todos los ordinales no pueden ser conjuntos cantorianos, y esto incluso antes de que hubiera ninguna sugerencia de que eran contradictorias."[345]

Y también:

> "Mientras que en su forma original esta doctrina [del Absoluto] ayuda a dar una cierta configuración al universo matemático, y, por ejemplo, indica que colecciones 'muy extensas' no pueden tomarse como conjuntos [...], es mas bien imprecisa. Enfrentado a la necesidad de la prueba del teorema de los alef como también a evitar lo que se conoció como la paradoja de Burali-Forti, Cantor transformó la doctrina en una teoría de las 'colecciones absolutas' e intentó así darle un uso matemático preciso."[346]

Hallett se apoya en los textos de Cantor, aunque no son muy numerosos los que pueden considerarse favorables a su interpretación. Fundamentalmente son dos, que transcribiré a continuación pese a su extensión a causa de su importancia. El primero de ellos forma parte de una nota a Grundlagen y dice lo siguiente:

"... fijo conceptualmente de una vez por todas los distintos niveles del infinito propio a través de las clases numéricas (I), (II), (III), etc. y sólo ahora considero como tarea investigar las relaciones de los números suprafinitos no sólo matemáticamente sino también justificando y continuando en todas partes donde aparezcan en la naturaleza. No me cabe ninguna duda de que de esta manera podemos continuar siempre, sin llegar nunca a un límite insuperable, pero tampoco a una comprensión siquiera aproximada del Absoluto. El Absoluto puede sólo reconocerse pero nunca conocerse, ni siquiera a proximadamente. Puesto que de igual manera que dentro de la primera clase numérica (I) cada número finito por grande que sea siempre tiene ante sí la misma cardinalidad de números finitos mayores que él, así a cada número suprafinito de cada una de las clases numéricas superiores (II) o (III) etc. por grande que sea le sigue una multiplicidad de números y clases numéricas que no desmerece en cardinalidad lo más mínimo en relación al conjunto absolutamente infinito de números que comienza con 1. Esto es muy parececido a lo que Albrecht von Haller dice de la eternidad: 'Yo los tomo (los números muy grandes) y tú (la eternidad) descansas completa ante mí'. Por tanto, la serie absolutamente infinita de los números me parece, en cierto sentido, un símbolo apropiado del Absoluto."[347]

Hallett considera que del texto se desprende una identificación entre el Absoluto y la jerarquía de las clases de números. El Absoluto recogería en sí el desarrollo completo de los números transfinitos ; de esta manera no puede ser identificado con ninguno de los números infinitos particulares. Recordemos que Cantor había definido la diferencia entre Transfinito y Absoluto mediante la capacidad de aumento del primero y la incapacidad del segundo. En realidad, no sería del todo correcto afirmar que los números transfinitos pueden aumentar y disminuir, cada número está perfectamente determinado en sí mismo y no es variable, sino que posee un tamaño fijo, pero la serie de los números transfinitos sí es siempre aumentable: dado cualquier número transfinito siempre se puede señalar uno mayor, y en rigor un número infinito de ellos, aunque en este caso el término "infinito" no tenga la precisión adecuada.

Dentro de la tremenda magnitud de lo Transfinito hay grados. Se puede hablar de la clase numérica (I) y de la (II) y afirmar que la segunda es mayor que la primera. Sin embargo, no se encuentra tal graduación en el Absoluto, y aquí descansa la verdadera diferencia entre ellos. El Absoluto no es susceptible de determinación cuantitativa, matemática, porque, según Hallett, contiene a todo número, abarca el dominio completo de lo matematizable y recoge en sí todo lo que puede haber. De esta manera no puede aumentar porque no queda nada que él no posea. El texto citado muestra, en opinión de Hallett, el primer contacto del Absoluto con las matemáticas de Cantor, contacto que ya no se volverá a perder en la obra del autor. En palabras de Hallett:

"Por supuesto, en este primer estadio no estaban desarrollados en absoluto los detalles de la sucesión de las clases numéricas. Pero el programa, la visión del transfinito, está claro -- el transfinito es lo que quiera que sea representable en esta escala de números. [...] Pero con esto aparece la primera idea del estatuto matemático del Absoluto. [...] Cantor toma el Absoluto como simbolizado por el todo de esta sucesión"[348]

y más adelante

"todo lo matematizable (o numerable) está ya <u>en</u> el dominio de lo finito y lo transfinito, y el Absoluto es simplemente lo que abarca a todo esto."[349]

Otro de los textos cantorianos que Hallett utiliza pertenece a <u>Mitteilungen</u> y dice lo siguiente:

"El <u>transfinito</u> con su plenitud de formaciones y de formas señala necesariamente a un Absoluto, un 'verdadero infinito' que no es susceptible de aumento o disminución en cuanto a magnitud, que por tanto debe considerarse como un máximo absoluto."[350]

Hay aún otro texto que Hallett trae en defensa de su interpretación pero que no pertenece a Cantor sino a Kowaleski, amigo y discípulo de Cantor. Escribe Kowalewski:

> "... estas potencias, los alef cantorianos, eran para Cantor algo sagrado, en un cierto sentido los pasos que conducían al trono de lo infinito, al trono de Dios."[58]

La interpretación de M. Hallett tiene la ventaja de que proporciona una fuerte unidad y coherencia a todo el pensamiento del autor. No cabe duda dde que Cantor era un hombre profundamente religioso, y de que estuvo preocupado por demostrar la inocuidad de sus ideas para el dogma católico. Mantuvo correspondencia con teólogos renombrados de su tiempo acerca de sus teorías matemáticas y sobre temas filosóficos e incluso de historia del cristianismo. Si se acepta la tesis de Hallett, entonces las preocupaciones teológicas y matematicas de Cantor se convierten en preocupaciones del mismo tipo, y tanto Dios como los números transfinitos encuentran su lugar en la misma teoría: la teoría de conjuntos.

Tiene aún otra ventaja: al convertir la teoría cantoriana en una teoría de la limitación del tamaño, evita las contradicciones y la inmuniza contra la acusación de ingenuidad. Si Dios se simboliza por la sucesión infinita de los alef, y de acuerdo con el tercer principio que Hallett enuncia, Dios -- o elAbsoluto -- no puede caracterizarse matemáticamente, entonces la serie de los alef -- Dios -- no es un conjunto, con lo que no hay lugar para la contradicción del cardinal máximo. De la misma manera se evita la paradoja de Burali-Forti.

No obstante, en mi opinión, no hay base suficiente en los textos cantorianos para considerar que el punto de vista de Hallett sea incuestionable. Las razones por las que no me parece verosimil la interpretación de Hallett las expondré a continuación.

5.2 La primera teoria cantoriana como teoria ingenua de conjuntos

No cabe ninguna duda de que Cantor es el creador de la teoría de conjuntos moderna, mérito que comparte con Dedekind, y de la teoría de números transfinitos. Pero no sólo fue uno de los primeros pensadores en intentar una fundamentación conjuntista del número y de las matemáticas, sino que también introdujo una buena cantidad de ideas e intuiciones que prefiguraron lo que serían las teorías axiomáticas del siglo XX. Entre ellas destaca la tesis de la buena ordenación, equivalente, como se sabe, al Axioma de Elección. El Principio del Infinito Actual, señalado por Hallett, que supone la existencia de conjuntos infinitos puede interpretarse como antecesor del Axioma de Infinitud. La distinción entre conjuntos y multiplicidades inconsistentes constituye la prehistoria de las teorías de la limitación de tamaño y de la separación entre conjuntos y clases últimas. En 1899 se advierten también en la teoría cantoriana ciertos rasgos que recuerdan a la caracterización axiomática de los conjuntos. En una carta a Dedekind de esta fecha dice el autor:

> "Dos conjuntos equivalentes son o ambos 'conjuntos', o ambos inconsistentes.
>
> Todo subconjunto de un conjunto es un conjunto.
>
> Todo conjunto de conjuntos, si se descomponen los últimos en sus elementos, es también un conjunto."352

Hallett señala que la primera afirmación de este texto es una forma del Axioma de Reemplazo[353]. Y, desde luego, la segunda proposición puede considerarse como una especie de Axioma de Separación y la tercera como una formulación del Axioma del conjunto-unión. Con todo esto quiero ilustrar la inteligencia y la capacidad creadora de Cantor y la potencia de su teoría de conjuntos. Sin embargo, aunque el matemático alemán hiciera mucho en favor de la fundamentación conjuntista del número, no lo hizo todo, y una mirada retrospectiva no debe confundirnos acerca de sus logros reales, a pesar de que la ambigüedad de alguno de sus textos invite a proyectar en ellos nuestros conocimientos actuales. En concreto, en la teoría de conjuntos cantoriana hay dos etapas: la primera discurre antes del descubrimiento de las contradicciones, o mejor dicho, antes de que Cantor tomara conciencia del significado de las contradicciones, ya que la segunda parte de Beiträge se dió a la publicación después de que el autor las hubiera descubierto, y la segunda a partir de esta toma de conciencia. A la primera etapa pertenece la totalidad de la obra matemática que Cantor publicó, y a la segunda algunas partes de su correspondencia.

Los argumentos que utiliza M. Hallett para afirmar la homogeneidad de las tesis de Cantor me parecen poco sólidos. El texto de *Grundlagen* ya citado es, en primer lugar, una nota. Y en mi opinión una nota tiene menos fuerza que el texto al que hace observaciones. *Grundlagen* es una obra tan filosófica como matemática y hubiera sido un buen sitio para que el autor expusiera las relaciones entre el Absoluto y el Transfinito con todo detalle. Si Cantor pensaba que el Absoluto constituía una especie de límite superior en la jerarquía de los números y de las clases numéricas no encuentro razón por la que se pudiera negar a explicarlo y discutirlo en *Grundlagen*. En segundo lugar, en la nota a la que estoy haciendo referencia se pone en ralación una serie "absolutamente infinita" con el Absoluto, de la siguiente manera:

> "Por tanto, la serie absolutamente infinita de los números, me parece, en cierto sentido, un símbolo apropiado del Absoluto."[354]

En mi opinión, la expresión "absolutamente infinita" que aquí se utiliza no tiene el mismo significado que tal expresión cuando aparece en 1899 en la correspondencia con Dedekind, y que se aplica a multiplicidades inconsistentes. Lo que aquí está intentando Cantor es expresar un grado máximo de infinitud: la serie de los números finitos es infinita, pero la sucesión de los números transfinitos y sus clases numéricas es, por decirlo de alguna manera, infinitamente más amplia, infinitamente infinita, o con la expresión cantoriana, "absolutamente infinita", pero no hay aquí ninguna referencia al carácter de inconsistencia que en 1899 se asocia con la sucesión completa de los numeros. Y no es extraño que así sea, ya que según todos los datos disponibles de esta época (1883) Cantor no conocía las contradicciones que se seguían de su primera teoría. Además, la comparación que hace Cantor en el texto entre la jerarquía de los números y el Absoluto está expresada en términos muy débiles, tanto que, desde luego, no permiten deducir sin lugar a dudas una estrecha relación entre ambos tipos de infinitud. Cantor utiliza la palabra "símbolo" que además matiza con la expresión "en cierto sentido", y desgraciadamente no puede saberse que entendía el autor por "simbolizar". Una interpretación que me parece más simple que la de Hallett y más acorde con el estilo cantoriano de 1883 es la siguiente:

El Absoluto sigue siendo el tipo de infinitud apropiado para la Divinidad. El Transfinito cantoriano es un infinito matemático completamente diferente del Absoluto, pero compatible con él. Cantor intenta mostrar que el Transfinito no constituye peligro alguno para la concepción cristiana de la Infinitud, y lejos de suplantar a Dios el Transfinito, con toda su riqueza, muestra la magnificiencia del Absoluto. Esto último puede ponerse en relación con el texto de Mitteilungen citado por Hallett[355], que aunque Hallett no lo expone completamente, sigue así:

"Este último [el Absoluto] sobrepasa en cierta forma la capacidad humana y elude la determinación matemática; por el contrario el Transfinito no sólo llena el extenso dominio de posibilidad en el entendimiento de Dios, sino que ofrece un campo rico, siempre creciente de investigación ideal y, en mi opinión, también en el mundo de lo creado hasta un cierto grado y en diversas relaciones con la realidad y alcanza la existencia para manifestar la excelencia del creador con más fuerza [...] de lo que habría podido ocurrir a través de un simpl 'mundo finito'."[356]

El domino de lo transfinito abarca todo lo que es posible. De acuerdo con las definiciones cantorianas cada uno de los números transfinitos es un número posible, en el sentido de que no encierra nada indeterminado o contradictorio y, según la concepción de la existencia expuesta en Grundlagen, también es real. No hay más números que los transfinitos cantorianos, y por tanto completan la esfera de lo posible incluso para Dios. Su existencia en el mundo creado contribuye, además, a mostrar el poder y la grandeza del creador. La inmensidad de los números y de los seres creados no hace más que indicar la inmensidad eminente de Dios, que abarca a los primeros con su entendimiento y crea y sostiene a los segundos. Considero que la expresión del texto citado por Hallett

"El Transfinito con su plenitud de formaciones y de formas señala necesariamente a un Absoluto"[357] debe interpretarse no en el sentido del Principio del Infinito Actual, sino en el sentido ya expuesto de mostrar la existencia de un ser infinito tan poderoso y magnifico como para pensar y crear la jerarquia de los numeros infinitos. Y la referencia que aparece en el mismo texto al "maximo absoluto" se entiende entonces como una indicacion de que la infinitud del Absoluto es insuperable, o en la teminologia escolastica, eminente.

En apoyo de esta tesis viene la creencia cantoriana a partir de los años 90 de que los numeros transfinitos existen en la mente de Dios. La idea aparece en San Agustín, aunque Cantor afirma en una carta de 1895 a Charles Hermite que llegó a ella de manera independiente[358]. Si los numeros están en la mente de Dios, entonces puede entenderse que la jerarquia de transfinitos apunta a Dios en el sentido en el que la existencia y calidad del contenido indica la existencia y calidad del continente. El Absoluto no es el ámbito en el que se mueve tal jerarquia sino la mente capaz de contenerla, comprenderla y contemplarla en cada uno de sus detalles, lo que evidentemente no puede conseguir el entendimiento humano.

M. Hallett comenta también este rasgo agustiniano de la filosofia de Cantor[359], aunque en relación a la concepcion extensional de los conjuntos que mantiene el autor. Un tratamiento extensional de los conjuntos implica que no pueden definirse mas que conjuntos finitos. Y las caracterizaciones que ofrece Cantor de los conjuntos en su obra parecen indicar que se inclina por adoptar un punto de vista extensional. Según Hallett[360], el Principio del Finitismo que nos invita a considerar el ambito de lo infinito de la forma mas parecida posible al de lo finito hace que la consideración extensional se amplíe hasta abarcar conjuntos infinitos. Y en este punto es donde se utiliza la tesis de S. Agustín: los números se encuentran en el intelecto de Dios, y él los considera en su totalidad, de modo que aunque su conjunto sea inconcebible para nosotros porque es infinito, es aprehendido por Dios, para quien es finito. En palabras de Hallett:

> "Agustín alude a la incompletabilidad (para nosotros) de los números naturales pero continúa enfatizando que Dios puede no sólo captar la serie completa de los números sino que la capta como una forma finita."[36]

Hallett es de la opinión de que la finitud-para-Dios de los conjuntos infinitos no resuelve el problema, planteado en el seno de la teoría cantoriana, de qué multiplicidades forman una unidad y cuáles no. Los conjuntos son colecciones que pueden considerarse como objetos simples. De acuerdo con la idea agustiniana las colecciones infinitas tienen para Dios la unicidad requerida y son, por tanto, candidatos propicios a conjuntos. Así el paso de la "multiplicidad" a la "unidad", la ambigüedad que acompaña a los conjuntos que son a la vez "mucho" y "uno" ese soluciona recurriendo a Dios. Dice Hallett:

> "La conjunteidad (sethood) es una propiedad de una colección que Dios es capaz de percibir. Nuestra capacidad es ahora presumiblemente irrelevante, puesto que Dios puede abarcar indudablemente todo lo que

nosotros podemos y ademas mucho más. De hecho, parece que Dios es introducido para salvar un vacio (entre una colección y su unidad como conjunto) que nosotros mismos no podemos salvar."[362]

Sin embargo, ¿cuál es la razón por la que Dios piensa algunas colecciones como conjuntos y otras no? Si el conjunto de los números finitos es una unidad desde el punto de vista divino, ¿por qué la totalidad de lo que hay no lo es? Luego, el recurso a Dios no contesta a la pregunta de qué colecciones son conjuntos y cuáles no.

Si se rechaza la posición de Hallett la rspuesta a la aporía es simple: hay una forma fácil de decidir qué colecciones son conjuntos pues para Cantor todas lo son. Una vez descubiertas las contradicciones la situación se complica, pero no sólo para Cantor sino también para sus sucesores. En cualquier caso, en la obra matemática que Cantor publicó toda colección es un conjunto y puede considerarse desde este punto de vista como un objeto simple.

Si se asume la interpretación de Hallett la solución es más difícil, y el mismo sugiere[363] que, si el Absoluto se identifica con el universo de las matemáticas, lo único que puede hacerse al respecto es afirmar dogmáticamente que el Absoluto no es determinable matemáticamente, que es la función del Principio del Absoluto, y por tanto que la clase universal y otras igualmente extensas no pueden ser conjuntos. Hallett subraya esta insatisfactoria explicación como un defecto de la teoría cantoriana:

"Cantor no tiene ninguna respuesta fácil a esto. De hecho, la única respuesta sería intentar separar sus asunciones ontológicas de la dependencia del Todopoderoso, y así insistir simplemente (como hace el principio (c) groseramente afirmado) en que existe una rígida distinción de tipo entre el Transfinito y el Absoluto, que el último no es más que la categoría de lo matematizable y no es matematizable él mismo."[364]

Volviendo de nuevo a la interpretación de las relaciones entre el Absoluto y el Transfinto en Cantor, el texto de Kowaleski que Hallett señala en apoyo de sus tesis no tiene por qué expresar más que lo que ya he señalado repetidas veces: la jerarquía infinita de los alef nos ayuda a vislumbrar la excelencia del creador.

Hay aún otro detalle en la obra de Cantor que me inclina a considerarla como una teoría ingenua de conjuntos. Es de nuevo un rasgo negativo: Beiträge es el último trabajo matemático que Cantor quiso publicar. Después de él, y posiblemente a causa de las decepciones que le proporcionaron algunos de sus colegas, no preparó nada sobre su teoría de conjuntos para darlo a conocer a la comunidad. Todo lo más que hizo fue mantener correspondencia con algunos matemáticos famosos, y en ella sí se esboza la distinciçon entre conjuntos y multiplicidades inconsistentes. Teniendo en cuenta que, salvo la definición de cobertura, no hay nada en Beiträge que constituya una novedad, es razonable pensar que Cantor confeccionó esta obra para difundir sus resultados, y el estilo de Beiträge muestra que está escrita para matemáticos y que Cantor evitó cuidadosamente las justificaciones filosóficas características de Grundlagen. Esto es, Beitrage es una sistematización consciente de la teoria de conjuntos de Cantor realizada por él. Si, como piensa Hallett, tal teoria es una teoría de la limitación del tamaño, este hecho debería explicarse en alguna parte. En concreto, el sitio adecuado sería la definicion de conjunto con la que empieza la obra. Para alguien que vaya buscando una teoría de la limitación de tamaño tal definición no puede ser más desalentadora. Dice simplemente

> "Entendemos por conjunto toda reunión M de objetos distintos determinados m de nuestra intuición o nuestro pensamiento [...] en un todo."[365]

No puede haber una definicion más general e irrestricta. En resumen, la interpretación de Hallett aquí discutida no cuenta con apoyo suficiente en los textos de Cantor, que sin embargo sí exponen una concepción ingenua de la teoría de conjuntos.

Esto no significa que las creencias religiosas de Cantor fueran irrelevantes para su trabajo matemático. Nada hay en la biografía de un pensador que pueda catalogarse a priori de irrelevante para su obra. Pero en el caso de Cantor y la religión la relación es especialmente fuerte. A discutirla dedicaré el parágrafo siguiente.

5.3 Las ideas religiosas de Cantor

El objetivo del paragrafo 5.3, el último del presente trabajo, consiste en mostrar cuáles eran las relaciones que Cantor mantuvo con la religión y los teólogos y en qué medida estas relaciones tuvieron una influencia directa sobre el desarrollo concreto de la teoria de números transfinitos. M. Hallett ha sostenido, como hemos visto en los paragrafos precedentes, que las ideas conjuntistas de Cantor dan lugar a una teoría de la limitación del tamaño que las inmuniza de las contradicciones. El límite superior e inabarcable de la teoria es el Absoluto divino que no es matematizable, según el principio del Absoluto, que Hallett le atribuye a Cantor; de este modo, Dios forma parte de la teoria de conjuntos aunque sólo sea proporcionándole un freno que impide que la jerarquía de transfinitos crezca desmesuradamente por arriba.

El punto de vista que defenderé es distinto al de Hallett. En mi opinión, Cantor sostiene, en efecto, que el Absoluto no es matematizable, pero en el sentido de que la matemática no tiene nada que ver con la teologia. En cuestiones religiosas Cantor no muestra el más mínimo síntoma del espiritu innovador que caracteriza su pensamiento matemático. Lo que a él le interesa es dejar claro que no hay puntos de fricción entre las doctrinas de la iglesia católica y su teoría de números transfinitos para evitar que la iglesia pudiera en algún momento vetar sus trabajos.

Esto último no significa, en modo alguno, que las ideas religiosas no tuvieran incidencia ninguna en la vida y la obra del autor; tuvieron una gran importancia en la forma en que Cantor concibió el trabajo, en el enorme sentido del deber y la disciplina que demostró, en la resignación con la que sufrió los fracasos, y en el impulso que le dió su deseo de ofrecer a la Iglesia una doctrina verdadera y profunda de la infinitud; pero desde luego no tuvieron incidencia en las ideas específicas que Cantor vertió en sus escritos.

Cantor tuvo desde el comienzo de su vida una fe profunda que le fue inculcada fundamentalmente por su padre. La historia de la familia de Cantor no se conoce con precisión[366]. Se sabe que su abuelo paterno, Jakob, vivió en Copenhague y que pertenecía a una familia proveniente probablemente de Portugal o España[367]. Parece que su padre, Georg Woldemar Cantor, nació en la capital danesa entre 1809 y 1814 y se trasladó muy joven a San Petersburgo donde fue educado en una misión luterana[368]. Georg Woldemar se casó en Rusia con María Böhm, católica. La pareja tuvo seis hijos que fueron todos educados en la tradición luterana. Sin embargo, y sin que se conozcan las razones, Cantor se consideró en su madurez católico y consagró gran cantidad de tiempo y esfuerzo a conciliar sus ideas matemáticas con las doctrinas de la iglesia de Roma.

Tanto Grattan-Guinness[369] como J. Dauben[370] subrayan que Cantor no era judío, a pesar de que a principios del presente siglo T. S. Bell popularizó la versión de que los problemas entre Cantor y su maestro Kronecker no eran más que disputas entre judíos[371]. Si se entiende por la afirmación de que Cantor no era judio que no profesaba él mismo el judaismo como religión, eso es evidentemente cierto de acuerdo con los datos de su biografía. Sin embargo, parece que sí tenía antepasados judíos por parte de su padre. En una carta a Jourdain de 1908 señala Cantor que el no tiene ningun parentesco con el tal Moritz Cantor, profesor en Heidelberg, y añade:

> "En cualquier caso nosotros somos luteranos, este Cantor sin embargo [es] judio."[372]

En este caso el "nosotros" del que habla Cantor debe referirse a la rama de los Cantor de la que él desciende, convertida al protestantismo, porque él mismo se confiesa católico, como lo prueba el texto de la carta a Hermite de 1894 que transcribo a continuación:

> "Ahora sólo agradezco a Dios, todo sabiduría y todo bondad, que me negara siempre la satisfacción de estos deseos de un puesto bien en la Universidad de Göttingen bien en la de Berlín, porque así me obligó, mediante una penetración más profunda en la teología, a servirle a El y a su Santa Iglesia Católica Romana mejor de lo que hubiera sido capaz con mis capacidades matematicas, probablemente débiles, mediante una ocupacion exclusiva con las matematicas."[373]

El texto mas esclarecedor para entender la influencia de la religion en Cantor es una carta de Georg Woldemar a su hijo conmoti de su confirmación y que, de acuerdo con Dauben[374], Cantor conservó toda su vida. Los párrafos más relevantes de la carta son los siguientes:

> Queridísimo Georg:
>
> A traves de la bondad del Todopoderoso, el Creador del universo y el Padre de todas las criaturas vivas, ojalá tenga este dia una influencia santa sobre toda tu vida futura.¡Ojalá mantengas constante e incansablemante delante de tus ojos las virtuosas resoluciones que sin duda has hecho hoy en silencio como un voto solemne!... El futuro de la _vida_ de uno y el destino individual están ocultos para uno en la oscuridad mas profunda. Y es bueno que sea así [...].
>
> ¡Con qué frecuencia los individuos más prometedores son vencidos tras una débil, tenue resistencia en el primer problema serio que sigue a su entrada en los asuntos prácticos. Rotos sus ánimos [...] en el _mejor_ de los casos no llegan a nada mas que a lo que se llama un genio malogrado! [...]
>
> ¡Pero a ellos _les falta_ este _corazón firme_, del que _todo_ depende! Ahora, mi querido hijo, _creeme_, a tu _más sincero, auténtico y experimentado_ amigo -- este corazón seguro, _que debe vivir en nosotros_ es: un _auténtico_ espíritu religioso."[375]

Cantor siguió los piadosos consejos de su padre, y el sentimiento religioso le sirvió para arrostrar las dificultades

---

y no retroceder ante los problemas con los que se encontró, que fueron muchos. Entre ellos, el más conocido es su enemistad con Kronecker que había sido su maestro en Berlín y uno de los matemáticos más influyentes de su época. Kronecker rechazó siempre las teorías de Cantor acerca del infinito y, aunque nunca escribió nada contra ellas, hacía burlas de las tesis de Cantor con sus alumnos[376], negándole a Cantor la posibilidad de defenderse. El enfrentamiento con Kronecker le produjo muchos disgustos, pero no fueron los únicos. Deseó siempre una plaza en una universidad más influyente que la de Halle, especialmente deseó ir a Berlín, cosa que nunca consiguió. Propuso a Dedekind para un puesto en Halle como profesor ordinario con la idea de que si él no podía ir a una universidad más prestigiosa, al menos traería a matemáticos prestigiosos a Halle, pero Dedekind rechazó el ofrecimiento[377]. Enfrentado con la práctica totalidad de los matemáticos de su época, conservaba sin embargo la amistad de Mittag-Leffler, pero en 1884 éste se negó a publicar su obra Principien en la revista de la que era editor[378]etc.

Los sinsabores que le dieron sus colegas hicieron que dejara de interesarse por el mundo matemático. Tras experimentar las reacciones que la teoría de números transfinitos provocó, Cantor se decepcionó de las matemáticas y los matemáticos. Comenzó a explicar filosofía y a mantener correspondencia con teólogos, que por aquella época estaban preparados para ocupar el hueco que los matemáticos habían dejado en la vida de Cantor. El papa León XIII publicó en 1879 una encíclica, Aeterni Patris, en la que exhortaba a los católicos a profundizar en la ciencia y a tratar de compatibilizar los descubrimientos de la época con las doctrinas de la Iglesia. En este espíritu, algunos teólogos alemanes comenzaron a interesarse por la teoría del infinito cantoriana, y entre ellos destaca Gutberlet[379] que sostuvo que Dios garantizaba la existencia de los números de Cantor.

La relación con los teólogos tuvo el efecto de fortalecer las convicciones religiosas del autor, hasta tal punto que consideró que sus fracasos con los matemáticos habían sido obra de Dios porque Él lo quería a Su servicio. Cantor quiso, además, compensar a la Iglesia por el interés que le había demostrado, en contraste con la actitud del mundo matemático. En 1896 escribió:

> "Por mi parte le será ofrecida a la Filosofía Cristiana por primera vez la verdadera teoría del infinito."[380]

Después de lo dicho, no cabe duda de que la religión no tuvo una influencia superficial en la vida de Cantor y en el desarrollo de su obra, aunque no quiere esto decir que tuviera una repercusión directa en el <u>contenido</u> de esta última. La teoría de los números transfinitos procede de la teoría de las derivadas de puntos y ésta teoría no es sospechosa de contaminación teológica. En <u>Grundlagen</u> se expone y fundamenta su concepción del infinito sin que se recurra a la existencia de Dios, y en cambio Cantor asume un punto de vista platónico y a veces neoplatónico acerca de la existencia de los objetos abstractos que proviene de una tradición de pensamiento en principio independiente del desarrollo del dogma católico y que en los aspectos más fuertes, relacionados con el <u>Principio de</u>

Plenitud, se coloca en oposición a la doctrina de la Iglesia. Tras su desencanto de los matemáticos y su estrecha relación con algunos pensadores católicos, le confiere a Dios protagonismo como sustentador de la realidad de sus números y descubre por su cuenta la tesis agustiniana de que los números existen en la mente de Dios, pero esto no significa que su teoría necesite de Dios para existir o por lo menos no mas que cualquier otra teoría sustentada en una concepción no constructivista de la existencia. Ademas, todas las referencias a la tesis de San Agustin son de 1895 y no hay indicios de que sostuviera esa doctrina antes y después de la fecha. Pero, con todo, el infinito divino sigue estando fuera de la teoría. La infinitud que es propia de Dios es la que se expresa mediante el concepto de Absoluto que, tanto para la tradición filosófica occidental como para el propio Cantor, es indeterminable, no puede conocerse ni expresarse y, por tanto, no es matemáticamente caracterizable. Desde un punto de vista matemático, la obra cantoriana supone un avance extraordinario, un salto cualitativo en la historia de la disciplina, puesto que un ámbito completamente extraño al trabajo matemático se incorpora a él, ampliando con ello enormemente el marco de aplicación de éste. No obstante, desde un punto de vista teológico no hay gran diferencia, y Cantor está interesado en mostrar que no la hay. Se ha conquistado el dominio de lo infinto para la comprensión humana, pero ello no supone un peligro para la concepción católica del Absoluto. Este todavía detenta un tipo peculiar e inalcanzable de infinitud, que sigue siendo un misterio para los hombres. Mas aún, la grandiosidad de la teoría de los números y la riqueza de un mundo que requiere de tal teoría para su comprensión no hacen más que resaltar la potencia y majestad del creador.

En otro sentido, las convicciones religiosas de Cantor le inclinaron a pensar que las ideas por él sustentadas eran verdaderas. Si en momentos de crisis confiaba en Dios, como su padre le había aconsejado, Dios le mostraría el camino. Después de considerar los problemas seriamente y encomendarse al creador estaba convencido de que nada tenía que temer. Cantor había profundizado mucho en su teoría de números, había desmontado los argumentos tradicionales contra el infinito actual y sus ideas no ponían en entredicho las enseñanzas católicas. Ante la oposición de sus colegas tomó la actitud que su padre hubiera considerado acertada: trabajar y confiar, para no ser un genio malogrado.

Tanto Dauben[381] como J. de Lorenzo[382] consideran que la obra de Cantor supuso una auténtica revolución en la historia de las matemáticas. J. de Lorenzo llega a la conclusión de que las matemáticas no se desarrollan de manera lineal y homogénea, sino mediantes revoluciones, una de las cuales es la de Cantor, a las que llama <u>rupturas epistemológicas</u>[383]. Dauben sostiene que en matemáticas las revoluciones son en cierta medida diferentes de lo que Kuhn supuso para las ciencias naturales, ya que en la disciplina formal las nuevas teorías no contradicen a las antiguas sino que sólo las amplían de forma inimaginable desde el punto de vista de la teoría anterior a la revolución[384]. En terminología de Kuhn diríamos que las matemáticas los paradigmas no son inconmensurables, de acuerdo con la idea de Dauben. Eso fue lo que ocurrió con la emergencia de la teoría de conjuntos y números transfinitos cantoriana, que extendio la matematica hasta donde nadie antes había soñado.

Utilizando las ideas de Kuhn podríamos decir que las convicciones religiosa de Cantor le ayudaron a conseguir la tenacidad de la que deben hacer gala los sustentadores de un paradigma naciente[illegible]. La fe en que su teoría era verdadera, porque él confiaba en Dios y Dios no podía engañarle, fue lo que mantuvo a Cantor contra las críticas el tiempo suficiente para que los números transfinitos se dieran a conocer y el punto de vista cantoriano fuera adoptado por otros matematicos que asumieran la tarea de perfeccionar y desarrollar el contenido de la obra de Cantor.

NOTAS AL CAPITULO I

1. Cfr. Grundlagen (1883), p. 186

2. Citado por Ph. E. B. Jourdain: "The development of the theory of transfinite Numbers.", Part 2, p. 299

3. I. Grattan-Guinness: "La aparición del análisis matemático y los progresos en su fundamentación desde 1780 a 1800", p. 144

4. Ph. Jourdain: "The development of the theory of transfinite Numbers", p. 301

5. A. Coffa: "Kant, Bolzano and the emergence of logicism", p. 679 y ss.

6. Ph. Jourdain: op. cit., p. 302

7. De nuevo se plantea la duda de si Cauchy participa de ciertos rasgos comunes a los matemáticos de su época o si se aparta de ellos en cuestiones que nos harían pensar que se halla más cerca de Cantor de lo que parece. En este sentido, mientras que, como hemos visto, Jourdain considera que Cauchy fundamenta geométricamente el cálculo, Grattan-Guinness afirma que Cauchy "consiguió llevar el análisis matemático a una situación de autonomía con respecto a la geometría y al álgebra." (op. cit., p. 146). Sea lo que sea, Cantor se opone a una tradición de pensamiento a la que sí, de acuerdo con Grattan-Guinnes, Cauchy no pertenecía, muchos de sus contemporáneos sí. No es objetivo del presente trabajo investigar la figura histórica de Cauchy.

8. GA, p. 187

9. R. Dedekind: "Continuity and irratinal numbers", p. 12 y ss.

10. N. Bourbaki: Elementos de historia de las matemáticas, p. 165

11. H. Meschkowski: Probleme des Unendlichen, p. 43

12. B. Bolzano: Paradoxien des Unendlichen, p. 73; G. Cantor: ULP III, p. 158

13. Cantor no formula explícitamente lo que él mismo denomina axioma (GA, p. 97), indica únicamente que la corres pondencia entre cada número real y un punto determinado de la recta no puede probarse y que, por tanto, su afirmación es axiomática.

14. La primera vez que aparece esta noción, en ULP II, Cantor la simboliza por $P^{(\infty)}$, pero a partir de este artículo cambia el símbolo "∞" por "ω".

15. I. Grattan Guinness: "The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain", p. 127

16. I. Grattan- Guinness, *loc. cit.*, afirma que tal prueba requiera el Axioma de Elección.

17. J. de Lorenzo: *La matematica y el problema de su historia*p. 130

18. Toda la jerarquía incluida hasta el momento se encuentra en ULP II (1880). Segun Grattan-Guinness, en "Georg Cantor's Influence on Bertrand Russell"p.65, Cantor afirma en la edición original del artículo que disponía de esta serie diez años antes. Este texto, sin embargo, no aparece en la edición de Zermelo de las obras de Cantor.

19. Estas definiciones se encuentran, por ejemplo, en ULP VI, p. 226, la primera, y p. 228, la segunda

20. Cfr., por ejemplo, *Grundlagen*, p. 193

21. H. Meschkowski, en *Probleme des Unendlichen*, p. 55, hace notar que la mayoría de las definiciones actuales de los terminos "coherencia" y "continuidad" no coinciden con las que Cantor introdujo. En Cantor, la definición de continuidad aparece por primera vez en *Grundlagen* (1883)

22. R. Dedekind: "Continuity and irrational Numbers", p. 11

23. R. Dedekind, *op. cit.*, pp. 12-13

24. Cfr. *Grundlagen*, p. 194

25. Cfr. *Paradoxien des Unendlichen*, p. 75 y ss.

26. Bolzano no utiliza esta terminología ni encontramos en su obra ningún parrafo que pueda ser tomado como una definición de la continuidad.

27. Cfr. *Paradoxien des Unendlichen*, n. en p. 148

28. Cfr. BW, p. 12

29. Cfr. *op. cit.*, pp. 14-15

30. Cfr. op. cit., p.16

31. Cfr. op. cit., pp.16-17

32. Cfr. J. Rey Pastor, P. Pi Calleja y C.A. Trejo: Análisis matematico, pp. 266-7

33. Cfr. GA, p.151

34. Cfr. GA, p.142

35. GA, p.150. El texto original dice así: "Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgendwelcher Begriffssphare angehoren, nenne ich wohldefiniert, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es als intern bestimmt angesehen werden muss, sowohl irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nichit, wie auch, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebeseins einander gleich sind oder nicht."

36. M. Hallett: Cantorian Set Theory and limitation of size, por ejemplo pp.45-47 y pp.240-244

37. G. Frege: "La lógica en la matematica", p.104

38. Cfr. Paradoxien des Unendlichen, p. 27

39. Permanece la duda de si Bolzano cambió de opinión al final de su vida. J. Berg, en su monografía Bolzano's Logic, p. 177, recoge una teoría según la cual Bolzano dió el paso que le quedaba hacia la concepción moderna del infinito, y comprendió que la equivalencia era todo lo que hacía falta para construir una teoría del tamaño cardinal. La confesión de este cambio se encontraría en una carta a R. Zimmermann, hoy perdida, escrita el 9 de Marzo de 1848, el último año de su vida. Berg no considera esta opinión suficientemente fundamentada.

40. BW, p.25

41. BW, pp. 27-28

42. BW, pp. 28-37

43. La terminología que usaré no es la del autor. Tampoco coincide con los textos de Cantor el orden en que aparecen la

hipótesis que hay que probar ni la numeración que he dado a estas últimas.

44. BW, p. 34

45. En francés en el original. Meschkowski, en Probleme des Unendlichen, p. 39, afirma que en la biografía de Cantor que se encuentra en la edición de Zermelo de las obras del autor, Zermelo asegura que esta frase aparece en una carta del 20 de Junio de 1877. Meschkowski dice a su vez que tal frase no aparece en la correspondencia por ningún sitio. En primer lugar, quiero indicar una confusión de Meschkowski, posiblemente un simple lapsus: la biografía que se adjunta a la edición de Zermelo no es de éste sino de Fraenkel; en segundo lugar, aunque es cierto que la frase en cuestión no está en la carta citada por Fraenkel, sí aparece en la edición de Noether-Cavailles de la correspondencia Cantor-Dedekind -- que es la que Meschkowski utiliza -- en la página 34, en una carta del 29 de Junio de 1877. Por su parte, J. Pérez de Tudela, en El problema del continuo, p. 69, transcribe esta famosa frase, pero relaciona la sorpresa de Cantor con el descubrimiento de la reflexividad de los conjuntos infinitos. En nota señala que ha tomado la cita de Bourbaki, Elementos de historia de las matemáticas, p. 47,. Bourbaki, sin embargo, la introduce en el contexto apropiado, la correspondencia entre R y R^n.

46. El artículo en el que aparece el procedimiento de la diagonal es EFM (1890-91)

47. G. Stahl, en "El método de la diagonal en la teoría de conjuntos y metamatemática" distingue tres etapas en las pruebas en las que se utiliza el método. Las dos primeras son comunes a todas las pruebas diagonales, pero en la tercera se pueden diferenciar dos variedades. Cantor se ajusta a lo que Stahl considera la primera variedad, que explicaremos más adelante.

48. G. Stahl considera que la tercera etapa de las pruebas diagonales puede adoptar dos formas: en la primera se trata de probar que E_0 es distinto de todos los E_j anteriores. De este tipo es la prueba de Cantor. En la segunda forma habría que demostrar que E_0 coincide con algún E_j. Como ejemplo de esta segunda posibilidad, Stahl cita la demostración de la incompletud de Gödel.

49. El método de la diagonal, hecho famoso por Cantor, fue empleado con anterioridad a él por el matemático francés P. du Bois Reymond, en 1876. Cfr. por ejemplo J. Cavailles: Philosophie mathematique, pp. 63-65. Cita tamben este hecho I.

Grattan-Guinness, en "How Bertrand Russell discovered his paradox", n. en p. 134. No hay razones para suponer que Cantor conociera el trabajo de Du Bois Reymond y ocultara la fuente, por lo que parece que ambos autores llegaron al descubrimiento de este procedimiento de forma independiente.

50. *GA*, p. 448

51. El teorema de Cantor puede también expresarse haciendo referencia a números: si α es el número de elementos de un conjunto A, el número de elementos del conjunto potencia de A, 2^{α}, es siempre mayor que α, independientemente de que α sea finito o transfinito. A pesar del nombre que se la da a este enunciado, Cantor no lo probó. Lo que sí probó en 1874, y luego incluyó en *Grundlagen*, p. 197 y ss., y en *Beitrage*, pp. 332-3, es que en cualquier intervalo de números reales hay mas números que en el conjunto de los números naturales. Este resultado es lo que demuestra el procedimiento de la diagonal de1890. El teorema de Cantor fue formulado por el autor en una carta a Dedekind, *GA* p. 448, a propósito de la contradicción del cardinal máximo. Allí afirma Cantor que el teorema en cuestión puede demostrarse fácilmente, pero él mismo no emprende esta tarea.

También se menciona el teorema en una carta a Jourdain de 1904 -- en I. Grattan-Guinness: "The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain", p. 119, -- en la que Cantor trata de desmontar la contradicción encontrada por Russell, aunque de nuevo sin ofrecer una demostración.

Una prueba simple es la ofrecida por Crossley, en *¿Qué es la lógica matemática*, pp. 169-70, que explicaré a continuación. Pruebas similares pueden encontrarse, por ejemplo, en S. Kleene: *Introducción a la metamatemática*, p. 25, y J. de Lorenzo: *Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos*, p. 116,. Utilizaré los signos "$\leqslant$" y "$\simeq$" en este contexto entre nombres de conjuntos para indicar las relaciones "tener menor o igual número de elementos que" y "ser equivalente á", respectivamente. La relación $<$ se define, en este contexto, como "tener estrictamente menos elementos que", es decir, "$\alpha < \beta$" significa "$\alpha \leqslant \beta$ y $\sim(\alpha \simeq \beta)$". Lo que hay que demostrar es

$$A < P(A).$$

1.- $A \leqslant P(A)$. Se prueba definiendo una aplicación inyectiva de A en P(A), de manera que si x e y son dos elementos distintos de A, sus correlatos en P(A) sean distintos, y ademas todos los elementos de A tengan .. correlato en P(A). La aplicación mencionada es la que asigna a cada elemento de A la clase unitaria de la que es el único miembro.

2.- $\sim(A \simeq P(A))$. Supóngase que $A \simeq P(A)$. Habrá entonces una función f que empareje cada elemento de A con un elemento y sólo uno de P(A) de manera que no sobren ni falten elementos ni en A ni en P(A). Definamos B como el conjunto de aquellos elementos de A a los que f les asigan un subconjunto de A al que no pertenecen, esto es

$$B = \{ x: x \in A . \sim(x \in f(x))\}$$

De acuerdo con la hipótesis, tiene que haber un elemento y de A emparejado con B mediante f, o sea, B = f(y) para algún y de A. ¿Pertenece y a B?.

2.1.- Supongamos que si: $y \in B$, por lo que tiene la propiedad definitoria de B. Así

$$y \in A . \sim(y \in f(y)).$$

Pero f(y) es B, luego $y \in f(y)$, con lo que llegamos a una contradiccion.

2.2.- Supongamos que no: $\sim(y \in B)$. Como B = f(y), $\sim(y \in f(y))$, luego no pertenece al conjunto con el que está emparentado mediante f. Como además $y \in A$, tenemos

$$y \in A . \sim(y \in f(y))$$

con lo que $y \in B$, según la definición de B, lo que contradice la hipótesis.

De 2, 2.1 y 2.2 se deduce $\sim(A \simeq P(A))$. Como en 1. se probó que $A \leqslant P(A)$, tenemos

$$A < P(A)$$

q. e. d.

El teorema de Cantor es una afirmación que parece obvia, sin embargo, existen teorías de conjuntos en las que es falso como en el caso del sistema NF de Quine y, según el filósofo norteamericano, en la simplificación que hicieron Gödel y Tarski de Principia Mathematica -- cfr. W. Quine: "On Cantor's theorem", p. 124 --.

Quine introdujo el curioso sistema NF en 1937 en un artículo titulado "New foundations for mathematical logic". El sistema reduce la exigencia de la estratificación por tipos consecutivos a los lados de la relación de pertenencia, característica de Principia Mathematica, únicamente al principio de abstracción, que en NF queda

"Si ϕ es una fórmula estratificada y no contiene "x", Vx (y) $((y \in x) \leftrightarrow \phi)$ es un teorema."

En NF no puede probarse la existencia de la clase que he llamado nateriormente B, porque la condición definitoria de tal clase no cumple el requisito necesario de la estratificación. Sin embargo, en NF se prueba una version algo modificada del teorema de Cantor que vendría a decir que todo conjunto tiene más subconjuntos que conjuntos unitarios de sus miembros. Pero curiosamente no esta garantizada la existencia de una relación que conecte cada elemento con su clase unitaria, esto es, no puede demostrarse que todo conjunto es equivalente al conjunto de las clases unitarias de sus elementos. En palabras de Quine:

"(a) El principio de Cantor de que las subclases de una clase exceden siempre en número a los miembros es falso. (b) Sin embargo, las subclases de cualquier clase exceden en número a las clases unitarias. (c) No existe ninguna correlación general entre objetos y sus clases unitarias." ("On Cantor's theorem", p. 124)

No obstante, los sistemas como NF no abundan y en general el teorema de Cantor es verdadero en la inmensa mayoría de las teorías de conjuntos.

52. Cfr. C. Burali-Forti: "Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel"

53. G. Peano: "Les définitions mathématiques"

54. B. Russell: Los Principios de la matemática, p. 146

55. Cfr. Burali-Forti, op. cit., pp. 294-95

56. G. Frege: Fundamentos de la Aritmética, pp. 88-91

57. BM, p. 119. De la misma manera se expresa en ULP, I, p. 141 y en Grundlagen en vez de definir lo que entiende por potencia, remite al lector a ULP I.

58. Rezension, p. 441. El texto original dice así: "Ich nenne 'Mächtigkeit eines Inbegriffs oder einer Menge von Elementen' (wobei letztere gleich- oder ungleichartig, einfach oder zusammengesetzt sein können) denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle Mengen, welche der gegebenen Menge äquivalent sind, und nur diese fallen."

Una definición prácticamente idéntica a ésta aparece en Principien, p. 65, obra escrita en 1884, aunque no publicada hasta 1970.

59. Cfr. Principien, pp. 85-86

60. Mitteilungen, p. 380. El texto original es: "jede von ihnen ihnen ist eine wahre Einheit ($\mu o \nu \alpha s$), weil in ihr eine Vielheit und Mannigfaltigkeit von Einsen einheitlich verbunden ist."

61. Beiträge, p. 282. El texto original es: " 'Mächtigkeit' oder 'Kardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird."

62. _Beiträge_, p. 283. El texto original es: "Da aus jedem einzelnen Elemente m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine "Eins" wird, so ist die Kardinalzahl M selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge".

63. M. Hallett, en _Cantorian set theory and limitation of size_, p. 120 y ss., expone tambien la doble posibilidad de interpretación de las definiciones de potencia de Cantor y rechaza asimismo la idea de que las potencias se abstraigan de la clase de equivalencia. Hallett considera que el texto de _Beiträge_ citado en la nota anterior hace insostenible esta última interpretación.

64. Cfr. _Los Principios de la Matemática_, p. 145 y ss.

65. _Principien_, p. 86

66. Cfr. _Los Principios de la Matematica_, p. 149

67. J. de Lorenzo: _La filosofía de la matemática de Poincaré_, pp. 58-60

68. _op. cit._, p. 60

69. Seguiré las indicaciones de H. Bachmann, en _TransfiniteZahlen_, n. en p. 117

70. _Fundamentos de la aritmética_, p. 61 y ss.

71. _op. cit._, p. 62

72. _Nachgelassene Schriften_, pp. 79-80

73. _Fundamentos de la aritmética_, p. 71

74. _Kleine Schriften_, p. 156

75. _Fundamentos de la aritmética_, p. 66

76. _loc. cit._

77. _loc. cit._

NOTAS AL CAPITULO II

78. Cfr. O. Backer: Magnitudes y límites del pensamiento matemático, p.96

79. De Caelo, I, 5-7

80. Physica, III, 4-8

81. Physica, VII, 6

82. Cfr. A. Prevosti Moclús: La teoría del infinito de Aristóteles, p. 40

83. Physica, III, 5

84. Physica, III,4, 204a 2-7

85. Sin embargo esta opción cuenta con ciertos problemas en la filosofía de Aristóteles, como indica Prevosti en La teoría del infinito de Aristóteles, pp. 60-1, puesto que en este contexto la existencia de algo en potencia indica la existencia de algo en acto en el mismo sentido. Esto es, si una cosa es infinita en potencia, tiene que existir así mismo una cosa infinita en acto. De alguna manera, la potencia presupone el acto. Luego, tendríamos que concluir que hay infinitos actuales dado que Aristóteles acepta infinitos potenciales.

Es curioso que Cantor utiliza este último argumento a favor del infinito actual. Para el matemático alemán, todo infinito potencial requiere un infinito actual sobre el que poder variar. Así, no podría aumentar la serie de los números naturales si no hubiera previamente números que añadir. Llamo a este rago de la teoría cantoriana Principio del Infinito Actual.

86. Cfr. Prevosti, op.cit., p. 61

87. Cfr. P. Aubenque: El problema del ser en Aristóteles, p. 434

88. El argumento es muy similar al de Cantor: el infinito potencial por adición supone un infinito actual que le proporcione la materia con la que aumentar.

89. Physica, III, 5, 204b 7-10. El texto dice lo siguiente: "Pero ni siquiera el número en tanto que separado [de los cuerpos] es tampoco infinito. En efecto, el número -- o lo que tiene número -- es susceptible de ser contado. Ahora bien, si lo

que es susceptible de ser contado puede ser contado efectivamente, entonces lo infinito podría ser recorrido."

90. Posteriormente publicada con el título "Ueber die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche"

91. GA. p. 372

92. loc. cit

93. GA, pp. 372-3

94. GA, 282

95. GA, p. 197

96. op. cit., p. 44

97. op. cit., p. 45

98. GA. p. 180

99. L. Couturat: De l'infinie mathematique, Libro III, 2ª Parte

100. El título completo de Grundlagen es "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" ("Fundamentos de una teoría general de conjuntos") y el de Beiträge "Beitrage zur Begründun der transfiniten Mengenlehre" ("Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos"). En ambos aparece la expresión "teoría de conjuntos" con lo que se quiere indicar que es el estudio de los conjuntos el objetivo primordial de estos dos importantes trabajos.

101. GA, n. en p. 204

102. GA, p. 282

103. Cfr. infra, Cap. I, §4.1

104. Beiträge, p. 285

105. La numeración de los teoremas que se ofrecen a continuación no es la misma que tienen en las obras de Cantor en las que se encuentran.

106. No se incluirán aquí todos los teoremas que aparecen en las obras conjuntistas de Cantor. Sólo recogeré aquellos que tengan un interés especial bien por su importancia intrínseca, como el

29 en el que se prueba que dados dos conjuntos bien ordenados o son similares o uno es similar a un segmento del otro, bien porque sean imprescindibles para la prueba de algún teorema central, como el 24, 25, 26, 27 y 28, bien porque aclaren conceptos definidos con anterioridad, como los que tratan de la similitud y de las series fundamentales coherentes. Las pruebas de los teoremas son de Cantor y tampoco se incluyen todas las que el autor introduce en sus obras sino sólo las menos obvias y las más interesantes. He procurado ofrecerlas de la manera más clara y completa posible, pero las estrategias en las que se basan son de Cantor.

Necesariamente, este parágrafo tercero es muy descriptivo. de lo que se trata es de presentar una reconstrucción sistemática de lo que llamo <u>la primera teoría</u>, de manera que uno pueda hacerse una idea correcta de cuales eran las tesis conjuntistas que Cantor incorporó a <u>Grunlagen</u>, <u>Beiträge</u> y otras obras menores.

107. GA, p. 285

108. Las primeras nociones de aritmética cardinal se encuentran en <u>Mitteilungen</u> (1887-8). Posteriormente aparece una exposición más sistemática en <u>Beiträge</u>, en donde se amplia lo expuesto en 1887 con la definición de la exponenciación y del importante concepto de cobertura (<u>Belegung</u>). En ninguna obra aparecen aproximaciones a las nociones de división y sustracción cardinales.

109. En <u>Beträge</u> (GA, pp.288-9) Cantor se apresura a indicar que la definición de exponenciación mediante el concepto de cobertura puede ser muy util para expresar y determinar la potencia del continuo, y esto antes de haber hablado del continuo ni haber introducido aún los números transfinitos. Si se simboliza la potencia del continuo por "c", la siguiente ecuación

(A) $$c = 2^{\aleph_0}$$

expresa que el continuo es equivalente al conjunto de las coberturas de un conjunto de alef-cero miembros con un conjunto de dos elemetos, que es una forma simple y elegante de exponer el contenido de su artículo de 1891 en donde se introduce el procedimiento de la diagonal. Es curioso que la ecuación (A) se encuentre en este lugar, dado que además Cantor no ha utilizado nunca todavía el signo "$\aleph_0$", que se introducirá por peimera vez en <u>Beiträge</u> aunque dos parágrafos después de (A).

110. Dauben, en <u>Georg Cantor: His Mathematics and the Philosophy of Infinite</u>, p. 176, supone que Cantor estaba tan impresionado de poder expresar algebraicamente mediante el concepto de

cobertura resultados que antes sólo podían ser tratados geométricamente que no pudo esperar a definir $\aleph_0$ y expuso la ecuación (A) de la nota anterior tan pronto como tuvo oportunidad. Cantor confiaba en que el descubrimiento del concepto de cobertura provocara un avance significativo hacia la solución del problema del continuo, aunque sus expectativas, como sabemos, no llegaron a cumplirse.

111. Cronológicamente, Cantor trató el tema de los números transfinitos antes de ocuparse de los números finitos. Los números ordinales transfinitos se definieron por primera vez en Grundlagen (1883) y, en mi opinión, en esta obra hay indicios suficientes como para afirmar que ya disponía en esa fecha del concepto de cardinal transfinito que era identificado con el de potencia. Por el contrario, los números finitos sólo aparecen en la primera parte de Beiträge (1895). La razón de este aparente desorden es que Cantor parte en sus investigaciones de los resultados de las matemáticas de su tiempo, por lo que asume en concreto la aritmetica. En Grundlagen lo que pretende es extender el concepto de número más allá del ámbito que le confería la aritmética clásica por lo que no había nacesidad de reproducir esta última. En Beiträge, sin embargo, su propósito es mostrar que los mismo principios que utilizó para tratar los números transfinitos proporcionan, a su vez, la manera más simple y eficaz de fundamentar los números finitos. El objetivo es, pues, más la elegancia de la teoría de los números como un todo que el descubrimiento de rasgos de importancia intrinseca mediante la definición de los números finitos.

112. Cantor define la unión sólo para conjuntos aunque la utiliza también, como en este caso, entre conjuntos y elementos y entre elementos y elementos sin dar una explicación.

113. GA, pp. 289-292

114. Cantor utiliza en esta prueba la inducción completa aunque no la ha introducido previamente. La única vez que indica que ha utilizado la inducción completa en una prueba es en Principien, p. 93, a propósito de los tipos ordinales.

115. La teoría cantoriana de los tipos ordinales aparece publicada por primera vez en Beiträge (GA, p. 246 y ss.) pero el autor disponía ya de ella diez años antes. Esta teoría constituye el tema fundamental de Principien, el artículo que Cantor envió en 1884 a Mittag-Leffler, editor de Acta Mathematica y que este rachazó. El artículo ha sido publicado en 1970 por I. Grattan- Guinness en esta misma revista. Cfr. I.

Grattan-Guinness: "An unpublished paper by Georg Cantor: ...". En cualquier caso todas las nociones importantes que aparecían en Principien están recogidas en Beiträge.

116. Cantor lo simboliza "M ≃ N", yo utilizaré el signo " – " entre letras de conjuntos.

117. GA, p. 299

118. Cantor introduce estos teoremas en Beiträge (GA, p. 308-9) sin prueba, indicando que se siguen fácilmente de las definiciones. Los recojo aquí porque ayudan a entender los importantes conceptos de límite y serie fundamental cuya principal utilidad es la definición precisa del tipo ordinal del continuo, i. e., del conjunto de los números reales, y de los números ordinales transfinitos.

119. Cantor no ofrece ningún párrafo que pueda tomarse como definición en sentido estricto, lo que yo he indicado como definición es una reconstrucción a partir de sus palabras. Zermelo, en sus observaciones a la obra de Cantor (GA, p. 354), hace notar que no es necesario indicar en la condición (i) que M sea perfecto, basta con requerir que sea cerrado, puesto que la exigencia de que sea denso en sí está incluida ya en la condición (ii).

120. En Grundlagen y en otras obras en las que se trata el tema de los conjuntos de puntos, Cantor define las nociones de conjunto denso en sí, cerrado y perfecto y las características del continuo. Pero a pesar de la identidad de la terminología estas nociones referidas a conjuntos de puntos no son las mismas que las que aparecen en Principien y Beiträge referidas a tipos ordinales. Cuando estas nociones se aplican a conjuntos de puntos indican en qué relación se encuentran sus elementos respecto de otros conjuntos más abarcantes en los que los primeros están contenidos. Dicho con palabras de Zermelo, en la teoría de los conjuntos de puntos los conceptos denso en sí, cerrado y perfecto "tienen sólo un significado relativo respecto del continuo que se supone dado, en el cual están empotrados los conjuntos de puntos en cuestión" (GA, p. 353).

Por el contrario, el hecho de que un tipo ordinal sea denso o perfecto etc. no depende de ninguna circunstancia exterior al tipo, sino que es una propiedad interna del tipo ordinal.

Puede ocurrir además que a un conjunto de puntos le corresponde un tipo ordinal que sea, por ejemplo, cerrado sin que el conjunto en cuestión lo sea. Zermelo pone el siguiente ejemplo (GA, p. 354):

Sea M el conjunto de puntos con las coordenadas

$1 - 1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$)

junto con el punto 2 en el intervalo (0,2). El tipo que corresponde a M es $\omega+1$, esto es, es un conjunto similar al de los números enteros finitos al que se le ha añadido un elemento al final. Este tipo es cerrado puesto el 2 es el límite de su única serie fundamental, de tipo ω. Sin embargo M no es un conjunto de puntos cerrado puesto que no contiene todos sus puntos de acumulación, en concreto le falta el punto 1.

121. En la definición de buena ordenación de 1883 aparece ya el término "Menge" (conjunto); Meschkowski, op. cit., p. 70, indica que tal término no aparece en la obra de Cantor hasta 1885.

122. Cantor no da una definición propiamente dicha, sino que explica qué quiere decir con la expresión "conjunto bien ordenado" de una manera poco sistemática. Lo que ofrezco en el texto es una reconstrucción a partir de las tesis de Cantor.

123. GA, p. 312

124. GA, p. 444

125. GA, p. 313

126. GA, p. 319-20

127. El teorema (29) ha sido formulado infra, p. 133

128. Otros teoremas que se prueban en Beiträge, aunque su importancia no alcanza la de (29), son los siguientes:
(A) Si F y G son conjuntos bien ordenados, y F' es un segmento de F, entonces a lo sumo hay un segmento G' de G similar a F'.
(B) Si F' es un segmento de un conjunto bien ordenado F y G' de un conjunto bien ordenado G y F' y G' son similares, entonces a cada segmento F" menor que F' de F le corresponde un segmento similar G" menor que G' de G.
(C) Si F' y F" son segmentos de F y G' y G" segmentos de G similares respectivamente a F' y F", y F' < F", entonces G' < G".
(D) Si F' es un segmento de F que no es similar a ninguno de los segmentos de G, entonces ningún segmento de F mayor que F' será similar a G ni a ninguno de sus segmentos.
(E) Ningún conjunto bien ordenado es similar a una parte de algunos de sus segmentos.
(F) Si A y A' son segmentos diferentes de G, entonces no son similares entre si.

139. GA, p. 203

140. En "Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der Zweiten Cantorschen Zahlenklassen" ofrece W. Ackermann una notacion para simbolizar los numeros de la segunda clase, define "<" entre estos objetos y prueba por recursion transfinita que sus simbolos son autenticos numeros ordinales.

141. GA, p. 334 y ss.

142. GA, pp. 203-4

143. GA, p. 341-2

144. Cfr. GA, p. 347-8

145. En Beitrage (GA, p. 347-51) se prueban algunos teoremas acerca de los numeros ϵ. No los recojo en este lugar porque, en mi opinion, tienen mas un interes anecdotico que un interes real en la teoria de numeros transfinitos.

146. GA, p. 293

147. loc. cit

148. GA, pp. 197-200

149. GA, p. 332-3

150. GA, p. 198

151. Para probar que un conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable se necesita el Axioma de Elección, por lo que a falta de tal Axioma la demostración del teorema es incompleta. Esto es, la ecuación

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

se sigue de la afirmaciçon general

$$\aleph_n \cdot \aleph_n = \aleph_n$$

para todo alef, cuya equivalencia con el Axioma de Elección probó Tarski. Cfr. infra nota 151.

152. GA, p. 332-3

153. Grundlagen, GA, p. 201

154. GA, 209

155. Cfr. por ejemplo GA, p. 296

156. GA, p. 169. El texto original dice así: "Dass es immer mogich ist, jede wohldefinierte Menge in die Form einer wohlgeordneten Menge zu bringen, auf dieses, wie mir scheint, grundlegende und folgenreiche, durch seine Allgemeingultigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz werde ich in einer spateren Abhandlung zuruckkommen."

157. GA, pp. 443-7

158. GA, p.321. En este lugar lo que Cantor prueba es la ley de tricotomía para ordinales transfinitos.

159. El resultado de suponer, como hace Cantor, que el conjunto de todos los ordinales tiene a su vez un número ordinal, se conoce en la ctualidad como la paradoja de Burali-Forti.

160. GA, p. 447

161. GA, p. 451

162. Un fragmento de la carta se encuentra en van Heijenoort: From Frege to Gödel, pp. 139-41

163. Cantor definió la cobertura de A con B para el caso en que los elementos de ambos conjuntos fueran individuos, o al menos fueran del mismo tipo. En el caso de Zermelo la cobertura se realiza entre un conjunto cuyo elementos son individuos y un conjunto cuyos elementos son conjuntos. Es decir, la cobertura aplica elementos m' a conjuntos M', aunque por lo demas sigue siendo el mismo concepto cantoriano.

164. van Heijenoort, op. cit., p. 141

165. loc. cit.

166. Traducido al inglés en van Heijenoort, op. cit. 138-98

167. van Heijenoort, op. cit., p. 186

168. Traducido al inglés en van Heijenoort, op.cit, p. 199 y ss.

169. van Heijenoort, op. cit., p. 204

170. Publicado en Mathematische Annalen 60, pp. 465-70

171. El resultado de Tarski se encuentra en "Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix", Fund. Math. 5, pp. 147-54

172. Foundations of Set Theory, p. 57

173. "About the Axiom of Choice", p. 347

174. Matematicas: la pérdida de la certidumbre, p. 253

175. Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, loc. cit

176. "On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", pp. 158-9

177. op. cit., p. 159

178. Cantor expone sus ideas acerca de la cantidad de partículas del universo en dos ocasiones, la primera en una carta a Mittag-Leffler de 1884, transcrita en Meschkowski, op. cit., pp. 247-8, y la segunda en un artículo de 1885 titulado "Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetige Raum Gn (Zweitte Mitteilungen)". En ambos lugares afirma Cantor que las dos primeras potencias transfinitas corresponden a conjuntos que se encuentran efectivamente en la naturaleza creada. La tesis de Cantor consiste en la afirmación de que los elementos últimos del espacio real son átomos etéreos (Ätheratome), que se encuentran en la naturaleza en una cantidad equivalente a los números reales . Aventura así mismo que los elementos materiales de los que está formado todo cuerpo (Körperatome), y a los que llama mónadas siguiendo a Leibniz, forman una multiplicidad infinita en acto equivalente al conjunto de los números naturales.

179. C. Sagan: Cosmos, p. 219-20

180 M. Hallett, op. cit., p. 7

181. GA, p. 410-11. El texto original dice así: "Damit eine solche veränderliche Grösse in einer mathematischen Betrachtung vertwertbar sei, muss strenggenommen das "Gebiet" ihrer Verändrelichkeit durch eine Definition vorher bekannt sein; dieses "Gebiet" kann aber nicht selbst wieder etwas Veränderliches sein, da sonst jede feste Unterlage der Betrachtung fehlen würde; also ist dieses "Gebiet" eine bestimmte aktualunendliche Wertmenge."

182. op. cit., pp. 13-4

183. Essays on the theory of numbers, p. 64

184. loc. cit.

185. B. Bolzano: PU, p. 14

186. op. cit., p. 107

187. Fundamentos de la Aritmética, p. 97

188. op. cit., p. 92 y p. 95

189. op. cit., p. 92

190. op. cit., p.98

191. op. cit., p. 100

192. op. cit., p. 101

193. La teoria de las relaciones hereditarias la expone Frege en Begriffschrift, p. 55 y ss.

194. Cfr. Fundamentos de la Aritmética, p. 103 y Begriffschrift, p. 60

195. Cfr. Fundamentos de la Aritmética, p. 104 y Begriffschrift, p. 69

196. Fundamentos de la Aritmética, p. 106

197. Begriffschrift, p. 72

198. op. cit., pp. 105-106

199. Esta característica de los números infinitos se prueba en Grundgesetze I, pp. 150-1 y lo contrario para los finitos en pp. 144-5

200. De hecho Claude Imbert en Estudio de los Fundamentos de la Aritmética de Frege, p. 95, afirma que Frege construye un conjunto infinito sin la ayuda de tal Axioma.

201. op. cit., p. 134 y ss.

202. op. cit., p. 135

203. op.cit., p. 370

204. loc. cit.

205. op.cit., pp. 256-8

206. Se encuentra traducido al ingles en van Heijenoort, *op.cit.*, pp. 199-215

207. En van Heijenoort, *op.cit.*, p. 204

208. K. Gödel: "¿Que es el problema del continuo de Cantor?", p. 340

209. GA, p. 132

210. *loc. cit.*

211. GA, p. 192-3

212. Meschkowski, *op. cit.*, p. 242. La carta está reproducida entera, pp. 242-3

213. GA, p. 227

214. Meschkowski, *op. cit.*, p. 243

215. Cfr. J. Dauben: "El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana", p. 260

216. W. Sierpinski: *L'hypothese du continu*, p. 1

217. La proposición (3) la prueba Cantor en *Grundlagen*, GA, p.200

218. W. Sierpinski, *op. cit.*, pp. 6-7

219. GA, p. 172

220. La carta a Goldscheider antes citada está resumida en *Mitteilungen*, GA, pp. 407-9. Cantor dice expresamente que se trata de la misma carta, GA, n. en p. 407, aunque algunos parrafos no coinciden exactamente. No obstante las tesi fundamentales son identicas en ambos lugares.

221. *op. cit.*, p. 253

222. Este axioma aparece en la obra de Aleksandrov y otros: *La matematica*, p. 31

223. Cfr. GA, p. 408

224. GA, 439

225. GA, n. en p. 439

226. M. Hallett, op. cit., p. 7

227. M. Hallett, op. cit., por ejemplo pp. 156-7, 169, suele traducir "Abzahlbarkeit" por "countability" y utiliza la familia de este último término al tratar la numerabilidad. Afirma, sobre esta base, que Cantor utiliza fercuentemente conceptos constructivistas y de ahí extrae la impresión de que, puesto que nosotros los seres humanos no podemos "contar" conjuntos infinitos, Cantor está pensando en Dios, que se convierte así en fundamento y sostén de sus teorías. Sobre este tema volveremos más adelante.

228. especialmente en pp. 149-64

229. loc. cit.

230. op. cit., p. 146

231. loc. cit. . El texto de Hallett dice así: "Ordinal numbers are taken to enumerate or count sets, and there is a strong suggestion that Cantor takes 'counting' here in a more or less literal sense."

232. M. Hallett, op. cit., p. 169

233. M. Hallett, op. cit., pp. 150-1. El trabajo de Cantor que aquí cita Hallett como [1883b] es Grundlagen , en la edición de Zermelo.

234. Cfr. G. Boolos: "The iterativa conception of set"

235. Cfr. Ch. Parsons: "What is the iterative conception of set?"

236. Cfr. H. Wang: "The concept of set"

237. E. Zermelo: "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I". Traducido en van Heijenoort, op. cit., p. 199 y ss.

238. loc. cit

239. En el artículo de Boolos ya citado pueden encontrarse las indicaciones precisas para justificar los axiomas de Zermelo desde el punto de vista de la concepción iterativa.

240. op. cit., p. 541 y ss.

241. GA, n. en p. 204

242. GA, 282

243. H. Wang, op. cit., p. 537 y 541

244. H. Wang, op. cit., p. 539

245. I. Grattan-Guinness: "Towards a biography of Georg Cantor", n. en p. 363

246. A. Fraenkel, GA, p. 470

247. I. Grattan-Guinness: "The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain", p. 119

248. B. Russell: Los Principios de la Matemática, p. 412

249. B. Russell: "On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", p. 152

250. GA, p. 444

251. En la definicion de Beiträge Cantor indica que los elementos de un conjunto son objetos "de nuestra intuición o nuestro pensamiento". No hay aquí ningún intento de restringir el dominio de los objetos que pueden formar un conjunto, puesto que en un texto no publicado de 1913, recogido en Meschkowski, op. cit., p. 114, Cantor dice explicitamente que todo lo que existe puede ser objeto de nuestro pensamiento ("Jedes Seiende kann Gegenstand unsres Denkens sein"). La referencia a la intuición y al pensamiento significa más bien que ni los conjuntos ni sus elementos -- qua elementos del conjunto -- son objetos físicos espacio-temporales, sino que existen al modo de los objetos abstractos.

252. H. Wang, op. cit., n. en p. 539

253. Principien, p. 85

253. Cfr. supra, p. 60 y 61 COMPROBAR

255. GA, p. 380

256. M. Hallett, op. cit., p. xi

257. Principien, p. 84

258. J. Dauben: "El desarrollo de la teoria de conjuntos cantoriana", p. 265

259 "Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre"

260. GA, p. 280

261. GA, p. 387

262. GA, p. 181

263. De esta opinion es H. Bachmann. En su obra Transfinite Zahlen, p. 124, puede leerse: "Die Kardinalzahlen bilden deshalb eine so wichtige Klasse von Machtigkeiten, weil für sie das Gestz der Trichotomie gilt und die Klasse der Kardinalzahlen der Grosse nach wohlgeordnet ist."

264. Cfr. supra, p. 13 COMPROBAR

265. Cfr. GA, p. 93

266. G. Frege: "La lógica en la matemática", p. 86 y ss.

267. Cfr. supra, p. 35 y ss.

268. GA, p. 160. El subrayado es mio.

269. GA, p. 395 y 406.

270. GA, p. 62. El texto original dice así: "Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere."

271. Ph. Jourdain incluye a Grundlagen en la etapa formalista de Cantor, en la introducción a la traducción inglesa de Beiträge, p. 70.

272. GA, p. 166

273. GA, p. 168

274. GA, p. 185

275. Cfr. J. Ferrater: Diccionario de filosofía, la voz "realismo", p. 2794 y ss.

276. P. Horwich: "Three forms of realism"

277. P. Benacerraf: "Mathematical Truth", p. 410 y ss.

278. GA, pp. 181-3

279. GA, p. 181

280. Ph. Jourdain, *loc. cit.*

281. GA, p. 181

282. GA, p. 182

283. GA, pp. 206-7

284. Cfr. la nota 271

285. GA, p. 207, notas 7) y 8)

286. *loc. cit.*

287. J. Dauben: *Geor Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, p.129

288. I. Grattan-Guinness: "Psychology in the Foundations of Logic and Mathematics: the Cases of Boole, Cantor and Brouwer", p. 42

289. GA, p. 175

290. GA, p. 395

291. J. Dauben, *op. cit.*, p. 133

292. GA, p. 480

293. GA, p. 182

294. GA, p. 400

295. *loc. cit.*

296. La denominación de *Principio de Plenitud* ha sido acuñada por Lovejoy en *La gran cadena del ser. Historia de una idea*. En esta obra se investiga la influencia en la filosofía occidental de esta idea no formulada explícitamente hasta ahora y que Lovejoy caracteriza de la siguiente manera:

"Lo denominaré el principio de plenitud, pero utilizaré el término para abarcar un campo de deducciones mayor que el que Platón saca de las mismas premisas; es decir no sólo la tesis de que el universo es un _plenum formarum_, donde el ambito de la diversidad concebible de las _clases_ de seres vivos está exhaustivamente ejemplificado, sino también otras deducciones hechas a partir del supuesto de que ninguna potencialidad genuina puede quedar incompleta, de que la amplitud y la abundancia de la creación deben ser tan grandes como la capacidad de un Origen 'perfecto' e inagotable." (_op. cit._, p. 66

Dicho pricipio constituye uno de los fundamentos de la filosofía de Spinoza. En su _Etica_ puede leerse:

"Todo lo que concebimos que está en la potestad de Dios, es necesariamente." (Parte primera, proposicion xxxv, p. 93)

297. M. Hallett, _op. cit._, p. 19

298. GA, p. 182

299. Lovejoy, _op. cit._, pp. 181-3

300. G. Frege: _Philosophical and Mathematical Correspondence_, pp. 39-40

301. Por ejemplo, Frege, _op. cit._, p. 37; _Fundamentos de la Aritmética_, pp. 115-8. Para un estudio de la polémica Frege-Hilbert, véase M. Resnik: _Frege and the philosophy of mathematics_, pp. 106- 119 y J. Mosterín: "La polémica Frege-Hilbert acerca del método axiomático".

302. _op. cit._, p. 118

303. GA, p. 448

304. Véase la nota 270

305. H. Meschkowski, _op. cit._, p. 262

306. H. Meschkowski, _op. cit._, p. 258

NOTAS AL CAPITULO III

307. GA, p. 443

308. GA, p. 444

309. *Cfr. supra*, capítulo II, § 4.2.1

310. H. Meschkowski: *Probleme des Unendlichen*, p. 144 y ss.

311. GA, p. 444

312. I. Grattan-Guinness: "The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain", pp. 116-7

313. En realidad, Cantor afirma (GA, p. 445) que el primer ordinal que tiene tal propiedad es ω_0+1, el segundo ordinal transfinito.

314. J. van Heijenoort, p. 105

315. H. Meschkowski, *op. cit.*, pp. 144-5

316. Cfr. *supra*, p. 266

317. GA, p. 448

318. GA, p. 444

319. GA, p. 448

320, B. Russell: *La evolución de mi pensamiento filosófico*, p. 77

321. Cfr. B. Russell, *loc. cit.*

322. B. Russel: "Letter to Frege", pp. 124-5

323. *op. cit.*, pp. 136-7

324. *op. cit.*, p. 137

325. *op. cit.*, p. 100

326. I. Grattan-Guinness: "Bertrand Russell on his paradox and the multiplicative axiom. An unpublished letter to Philip Jourdain", p. 106

327. B. Russell: La evolución de mi pensamiento filosófico, p. 81

328. loc. cit.

329. I. Grattan-Guinness: "The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain", p. 119

330. loc. cit.

331. Cfr. I. Grattan-Guinness: "How Bertrand Russell discovered his paradox", pp. 128-9

332. B. Russell: Los Principios de la Matemática, p. 412

333. B. Russell: "Las matemáticas y los metafísicos", pp. 97-8

334. B. Russell: La evolución de mi pensamiento filosófico, pp. 76-7

335. I. Grattan-Guinness: "How Bertrand Russell discovered his paradox", p. 107

336. G. Frege: Grundgesetze der Arithmetik

337. op. cit., p. 7

338. G. Frege: "Letter to Russell", pp. 127-28

339. G. Frege: Grundgesetze der Aritmetik, p. 253

340. Cfr. M. Hallett, op. cit., p. 7

341. Cfr. supra, p. 179

342. Cfr. M. Hallett, loc. cit.

343. loc. cit.

344. La tesis de Hallett que estoy discutiendo se encuentra en op. cit., fundamentalmente en las secciones 1.4 y 4.1

345. op. cit., p. 38

346. _op. cit._, p. 9

347. GA, p. 205. Citado por Hallett, _op. cit._, p. 42

348. _op. cit._, pp. 42-3

349. _op. cit._, p. 43

350. GA, p. 405. Citado por Hallett, _op. cit._, p. 44

351. Citado por Hallett, _loc. cit._

352. GA, p. 444

353. M. Hallett, _op. cit._, p. 168

354. GA, p. 205. Cfr. _supra_

355. Cfr. _supra_, 292

356. GA, pp. 405-6

357. Cfr. _supra_, p. 292

358. H. Meschkowski, _op. cit._, p. 262

359. Cfr. M. Hallett, _op. cit._, p. 24 y ss.

360. _op. cit._, p. 34

361. _op. cit._, p. 35

362. _op. cit._, p. 37

363. _op. cit._, p. 45

364. _loc. cit._

365. Cfr. _supra_, p. 110

366. Informes completos de los datos disponibles sobre la familia y el propio Cantor se encuentran en I. Grattan-Guinness: "Towards a biography of Georg Cantor", y J. Dauben: _Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite_, cap. 12 y "The personal matrix of his mathematics".

368. Cfr.J. Dauben: _Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite_, p. 272

369. *loc. cit.*
370. *op. cit.*, p. 1

371. J. Dauben, *loc. cit.*

372. I. Grattan-Guinness: "The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain", p. 122

373. J. Dauben: "Georg Cantor and Pope Leo XIII: mathematics, theology and the infinite.", p. 106

374. J. Dauben: *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, p. 274

375. J. Dauben, *op. cit.*, pp. 274-5

376. J. Dauben: "El desarrollo de la teoria de conjuntos cantoriana", p. 257

377. I. Grattan-Guinness: "Towards a biography of Georg Cantor", p. 355

378. I. Grattan-Guinness: "An unpublished paper by Georg Cantor: *Principien*...", p. 102

379. J. Dauben: "Georg Cantor and Pope Leo XIII: mathematics, theology and the infinite", pp. 96-7

380. J. Dauben, *op. cit.*, p. 107

381. Cfr. J. Dauben: "Conceptual revolutions and the history of mathematics", pp. 93-4

382. Cfr. J. de Lorenzo: *La matemática y el problema de su historia*, p. 127 y ss.

383. *op. cit.*

384. Cfr. J. Dauben, *loc. cit.*

385. Th. S. Kuhn: *La Estructura de las Revoluciones Cientificas*, Cap. XII

BIBLIOGRAFIA

ACKERMANN, W.: "Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse". *Mathematische Zeitschrift*, 53, 1951

ALEKSANDROV, A.P.; KOLMOGOROV, A.N.; LAURENTIEV, M.A. y otros: *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Alianza, Madrid, 1985⁷

ARISTOTELES: *Du Ciel*, Societe d'edition "Les belles lettres", Paris, 1965

-- : *Physique*, Société d'edition "Les belles lettres", Paris, 1926-31

AUBENQUE, P.: *El problema del ser en Aristóteles*, Taurus, Madrid 1981

BACHMANN, H.: *Transfinite Zahlen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1967²

BARCAN MARCUS, R.: "Classes, collections, and individuals". *American Philosophical Quarterly*, vol. 11, nº 3, 1974

BAR-HILLEL, Y.: *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory* North-Holland , Amsterdam, London, 1970

BARWISE, J. (ed.): *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Amsterdam, 1978²

BECKER, O.: *Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*. Max Niemeyer Verlag, Halle a. d. S., 1927

-- : *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. Karl Alber, Freiburg, München, 1954

-- : *Magnitudes y Límites del pensamiento matemático*. Rialp, Madrid, 1956

BENACERRAF, P.: "Mathematical Truth". En Benacerraf, P. and Putnam, H.: *Philosophy of Mathematics. Selected readings*,

-- : "What numbers could not be". En Benacerraf, P. and Putnam, H.: _Philosophy of Mathematics. Selected readins._

BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (eds.): _Philosophy of Mathematics. Selected readings_, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

BENTHEN, J.F.A.K. van: "Four Paradoxes". _Journal of Philosophical Logic_, vol. 7, 1978

BERG, J.: _Bolzano's Logic_, Almquist & Wiksell, Stockholm, --

BERNAYS, P.: "On platonism in mathematics". En Benacerraf, P. and Putnam, H.: _Philosophy of Mathematics_

BERNSTEIN, F.: "Bemerkung zur Mengenlehre". _Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-phisikalische Klassen_, 1904

-- : "Die Theorie der reellen Zahlen". _Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung_ 14, 1905.

BOLZANO, B.: _Paradoxien des Unendlichen_, C.H. Reclam, Leipzig, 1851

BONEVAC, D.: "Freedom and Truth in Mathematics", _Erkenntnis_, 20, 1983.

BOOLOS, G.: "The iterative conception of set". En Benacerraf, P. y Putnam, H.: _Philosophy of Mathematics_

BOURBAKI, N.: _Elementos de Historia de las Matemáticas_, Alianza, Madrid, 1976

BOWNE G. D.: _The Philosophy of Logic 1880-1908_. Monton, The Hague, 1966

BUNN, R.: "Los desarrollos en la fundamentación de la matemática desde 1870 a 1910". En Grattan-Guinness, I. (comp): _Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos_

BURALI-FORTI, C.: "A question on transfinite numbers". En Heijenoort, J. van: _From Frege to Gödel_

-- : "On well-ordered classes". En Heijenoort, J. van: _From Frege to Gödel_

-- : "Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel". En Congrès International de Philosophie: Biblioteque du Congrès...

CANTOR, G.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts . Edición de E. Zermelo. Georg Olms, Hildesheim, 1966

-- : "De transformatione formarum ternariarum quadraticarum", 1869. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Ueber trigonometrische Reihen", 1871. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der thrigonometrischen Reihen", 1872. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", 1874. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", 1878. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten", 1879. En Gesammelte Abhandlung

-- : "Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" 1879-84. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Bemerkung über trigonometrische Reihen", 1880. En Gesammelte Abhan..ungen

-- : "Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen" 1880. En Gesammelte Abhandlung

-- : "Ueber ein neues und allgemeines Kondensationsprinzip der Singularitäten von Funktionen", 1882. En Gesammelte Abhandlungen

: "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre", 1883. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Die Grundlagen der Arithmetik. Rezension der Schrift von G. Frege 'Die Grundlagen der Arithmetik' ", 1884. En Gesammelte Abhanlungen

-- : "Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume Gn. Zweite Mitteilung", 1885. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Ueber die verschiedenen Standpunkte in bezug aus das aktuelle Unendliche", 1885. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten", 1887-8 En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Bemerkung mit Bezug aus den Aufsatz: Zur Weierstrass-Cantorschen Theorie der Irrational Zahlen", 1889. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre", 1890-1. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", 1895-7. En Gesammelte Abhandlungen

-- : "Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilungen". En Grattan-Guinness, I.: "An unpublished paper by Georg Cantor: ..."

-- : Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Trad. Philip E. B. Jourdain, Dover Publications, New York, 1955

CARNAP, R.: "The logicist foundation of mathematics". En Benacerraf, P. and Putnam, H.: Philosophy of Mathematics

CAVAILLES, J.: Philosophie Mathématique, Hermann, Paris, 1962

COFFA, E.: "Kant, Bolzano and the emergence of Logicism". The Journal of Philosophy, vol. LXXIX, 1982

-- : "Russell and Kant". Synthese, 46, 1981

COHEN, P. J.: Set Theory and the continuum Hypothesis, The Benjamin/cummings Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE (1900, Paris): Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, vol. 3: logique et histoire des sciences, Librairie Armand Colin, Paris, 1901

COUTURAT, L.: De l'infini mathématique, Germer Baillière, Paris, 1896

CROSSLEY, J. N.: ¿Qué es la lógica matemática?, Tecnos, Madrid, 1983

DALEN, D. van y otros: Sets: Naive, Axiomatic and Applied, Pergamon Press, Oxford, New York, 1978

DARBON, A.: La Philosophie des Mathématiques. Etude sur la logistique de Russell, P.U.F., Paris, 1949

DAUBEN, J.W.: Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy the Infinite, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1979

-- : "El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana". En Grattan-Guinness, I. (comp.): Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos

-- : "The invariance of dimension: problems in the early development of set theory and topology". Historia Mathematica, 2, 1975

-- : "Georg Cantor and Pope Leo XIII: mathematics, theology, and the infinite". Journal of the History of Ideas, vol. XXXVIII, nº 1, 1977

-- : "C. S. Peirce's Philosophy of Infinite Sets. A study of Peirce's interest in the infinite related to the birth of American mathematics and contemporary work of Cantor and Dedekind". Mathematics Magazine, vol. 50, nº 3, 1977

-- : "Georg Cantor: The personal matrix of his mathematics". Isis, vol. 69, nº 249, 1978

-- : "Georg Cantor and the origins of transfinite set theory". Scientific American, vol. 248, nº 6, 1983

-- : "Conceptual revolutions and the history of mathematics. Two studies in the growth of knowledge". En Mendelsohn, E. (ed.): Transformation and tradition in the sciences

DEDEKIND, R.: Essays on the theory of numbers, Dover Publication Inc., New York, 1963

-- : "The nature and meaning of numbers". En Essays on the theory of numbers

-- : "Continuity and irrational numbers". En Essays on the theory of numbers

DUMITRIU, A.: History of Logic, Abacus Press, Tunbridge Weels, Kent, 1977

DUMMETT, M.: Truth and other enigmas, Harvard University Press, Cambridge, 1978

-- : The interpretation of Frege's philosophy, Harvard University Press, Cambridge, 1981

-- : "Nominalism". En Dummett, M.: Truth and other enigmas

-- : "Realism". En Dummett, M.: Truth an other enigmas

-- : "Platonism". En Dummett, M.: Truth and other enigmas

ESPINOSA, B. de: Etica demostrada segun el orden geométrico, edición de Vidal Peña, Editora Nacional, Madrid, 1979

FEIBLEMAN, J.: "A Reply to B. Russell's Introduction to the Second Edition of the Principles of Mathematics". En Schilpp, P.A. (ed.): The Philophy of Bertrand Russell

FERRATER MORA, J.: Diccionario de Filosofía, Alianza, Madrid, 1979

FRAENKEL, A.: "Sur l'axiome du choix". L'Ens. Math., 34

-- : "Das Leben Georg Cantors". En Cantor, G. : Gesammelte Abhandlungen

FRAENKEL, A. , BAR-HILLEL, Y., LEVY, A.: Foundations of set theory, North-Holland, Amsterdam-London, 1973

FREGE, G.: Fundamentos de la aritmética. Investigación lógico-matematica sobre el concepto de número. Laia, Barcelona, 1973²

FREGE, G.: Escritos Lógico-semánticos, Tecnos, Madrid, 1974

-- : Estudios sobre semántica, Ariel, Barcelona, 1973²

-- : Grundgestze der Aritmetik, Georg Olms, Hildesheim, 1966

-- : Kleine Schriften, Georg Olms, Hildesheim, 1967

-- : Nachgelassene Schriften, Felix Meiner, Hamburg, 1969

-- : Philosophical and mathematical correspondence, Basil Blackwell, Oxford, 1980

-- : "Aclaraciones sobre sentido y significado". En Frege, G.: Escritos Lógico-semánticos

-- : "Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thougth". En Heijenoort, J. van: From Frege to Gödel

-- : "Erwiderund auf Cantors Rezension der 'Grundlagen der Arithmetik' ". En Frege, G.: Kleine Schriften

-- : "Entwurf zu einer Besprechung von Cantors Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten". En Frege, G.: Nachgelassene Schriften

-- : "Funcion y concepto". En Frege, G. : Escritos lógico-semáticos

-- : "La lógica en la matemática". En Frege, G.: Escritos lógico-semanticos

351

-- : "Le nombre entier". En Frege, G. : Kleine Schriften

-- : "Letter to Russell". En Heijenoort, J. van: From Frege to Godel

-- : "Recension von: Georg Cantor, Zur Lehre von Transfiniten. Gesammelte Abhandlung aus der Zeitschrift fur Philosophie und philosophishe Kritik". En Frege, G.: Kleine Schriften

-- : "Sobre concepto y objeto". En Frege, G.: Escritos lógico-semánticos

-- : "Sobre sentido y significado". En Frege, G.: Escritos lógico-semánticos

GEORGE, R.: "Bolzano's Consequence, Relevance, and Enthymemes" Journal of Philosophical Logic, vol. 12, nº 3, 1983

-- : "Bolzano's concept of consequence". The Journal of Philosophy, vol. LXXXIII, nº 10, 1986

GILLIES, D.A.: Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic, van Gorcum, Assen, 1982

GÖDEL, K.: Obras Completas, Alianza, Madrid, 1981

-- : "La consistencia del Axioma de Elección y la Hipótesis Generalizada del Continuo". En Gödel, K.: Obras Completas

-- : "La consistencia del Axioma de Elección y la Hipótesis Generalizada del Continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos". En Gödel, K.: Obras Completas

-- : "Prueba de la consistencia de la Hipótesis Generalizada del Continuo". En Godel, K.: Obras Completas

-- : "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?" En Obras Completas

-- : "Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines". En Gödel, K.: Obras Completas

GRATTAN-GUINNESS, I.: "An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung". Acta Mathematica, 124, 1970

-- : "The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain". Jahresbericht der Deutsche Mathematiker-Vereinigung 73, 1971

-- : "Towards a biography of G. Cantor". Ann. of Sci., vol. 27, nº 4, 1971

-- : "Bertrand Russell on his paradox and the Multiplicative Axiom. An unpublished letter to Philip Jourdain". Journal of Philosophical Logic, 1, 1972

-- : "The Rediscovery of the Cantor-Dedekind Correspondence". Jber. Deutsch. Math.- Verein., 76, 1974

-- : "The Russell Archives: some new light on Russell's Logicism". Annals of Science, vol. 31, nº 5, 1974

-- : "The Royal Society's financial support of the publication of Whitehead and Russell's Principia Mathematica", Notes and Records of the Royal Society of London, vol. 30, nº1, 1975

-- : "Wiener on the Logics of Russell and Schröder. An Account of his Doctoral Thesis, and of his Discussion of it with Russell". Annals of Science, 32, 1975

-- : "Russell's logical progress: some new light from manuscript sources". Historia Mathematica, 2, 1975

-- : "Hwo bertrand Russell discovered his paradox". Historia Mathematica, 5, 1978

HAACK, S.: "Some preliminares to ontologie". Journal of Philosophical Logic, vol. 5, nº 4, 1976

HAHN, H.: "Crisis de la Intuición". En El Mundo de las Matemáticas, vol. 5. , Grijalbo, Barcelona, 1969

HALLETT, M.: Cantorian set theory and limitation of size, Clarendon Press, Oxford, 1984

HAUSDORFF, F.: "Grundzüge einer Theorie der geordnete Mengen", Math. Annalen, 65, 1908

HAZEN, A.: "Logical objects and the paradox of Burali-Forti", Erkenntnis, 24, 1986

HEIJENOORT, J. van (ed.): From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic. 1879-1931, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1977

HILBERT, D.: "Ueber das Unendliche". Mathematische Annalen, 95, 1926

HINTIKKA, J.: "Russell, Kant, and Coffa", Synthese, 46, 1981

HINTIKKA, J. y REMES, U.: The method of analysis. Its geometrical origin and its general significance, Reidel, Dordrecht, 1974

HOCHBERG, H.: "Peano, Russell, and Logicism". En Klemke, E. D. (ed.): Essays on Bertrand Russell

HORWICH, P.: "Three forms of Realism", Synthese, 51, 1982

JECH, Th. J.: The Axiom of Choice, North-Holland, Amsterdam, 1973

-- : "About the Axiom of Choice". En Barwise, J. (ed.): Handbook of Mathematical Logic

JOURDAIN, Ph. E. B.: "On a proof that every Aggregeta can be well-ordered", Mathematische Annalen, 60, 1905

-- : "The Development of the Theory of Transfinite Numbers. Part 1", Arch. Math. Phys., 10, 1906

-- : Introduccion a Cantor, G.: Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers

KESSLER, G.: "Frege, Mill, and the Foundations of Arithmetic", The Journal of Philosophy, vol. LXXVII, nº 2, 1980

KITCHER, Ph.: The nature of mathematical knowledge, Oxford University Press, New York, 1984

KLEENE, St.: Introduccion a la Metamatematica, Tecnos, Madrid, 1974

KLEMKE, E. D. (ed.): Essays on Bertrand Russell, University of Illinois Press, Urbana, 1970

KLINE, M.: Matemáticas. La pérdida de la certidumbre. Siglo XXI, Madrid, 1985

KUHN, Th. S.: La estructura de las revoluciones científicas F. C. E. , México, 1975

LEAR, J.: 2ethics, Mathematics and Relativism". Mind, vol. XCII, 1983

LEEDS, St.: "Theories of reference and truth". Erkenntnis, 13, 1978

LORENZO, J. de : "Russell ante el inicio de la matemática", Teorema, Diciembre, 1972

-- : Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos, Tecnos, Madrid, 1972

-- : "En torno al hacer matemático y al problema de su historia", Teorema, vol. IV/3, 1974

-- : La filosofía de la matemática de Poincaré, Tecnos, Madrid, 1974

-- : La matemática y el problema de su historia, Tecnos, Madrid, 1977

LOVEJOY, A.: La gran cadena del ser, Icaria , Barcelona, 1983

MENDELSOHN, E. (ed.): Transformation and tradition in the sciences, Cambridge University Press, 1984

MESCHKOWSKI, H.: Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1967

MOORE, G. H.: "The origins of Zermelo's Axiomatization of set theory". Journal of Philosophical Logic, vol. 7, 1978

MOSTERíN, J.: Conceptos y teorías en la ciencia, Alianza, Madrid, 1984

-- : "La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático". En Conceptos y teorías en la ciencia

-- : "Kant como filósofo de la ciencia". Conceptos y teorías en la ciencia

MULLER, G. H.: Sets and Classes, North-Holland, Amsterdam, 1976

NEUMANN, J. von: "Ueber die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre". Math. Annalen, vol. 99, 1920

-- : "Zur Einführung der transfiniten Zahlen", Acta Szeged, vol. 1, 1923

NEWMAN, J. R. (ed.): El Mundo de las Matematicas, Grijalbo, Barcelona, 1979

NOETHER, E. y CAVAILLES, J. (ed.): Briefwechsel Cantor-Dedekind, Hermann, Paris, 1937

PARSONS, Ch. : "What is the iterative conception of set?". En Benacerraf, P. y Putnam, H.: Philosophy of mathematics

PEANO, G.: "Les définitions mathématiques". En Congrés International de Philosophie: Bibliothèque du Congrés

PEREZ DE TUDELA Y VELASCO, J.: El problema del continuo. Una aproximación sistemática al concepto de fundamentación, Edición del autor, Madrid, 1981

POINCARE, H.: "On the nature of mathematical reasoning". En Benacerraf, P. y Putnam, H.: Philosophy of mathematics

POLLOCK, J. L.: "On Logicism". En Klemke, E. D.: Essays on Bertrand Russell

PREVOSTI MONCLÚS, A.: La teoría del infinito de Aristóteles, P. P. U., Barcelona, 1985

PUTNAM, H.: Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers, vol. I, Cambridge University Press, 1975

-- : "The thesis that mathematics is logic". En Mathematics, Matter and Method

-- : "Truth and necessity in mathematics". En Mathematics, Matter and Method

QUINE, W. van O.: Set theory and its logic, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1980

-- : Desde un punto de vista lógico, Orbis, Barcelona, 1984

QUINE, W. van O.: "On Cantor's Theorem". Journal of Symbolic vol. 2, 1937

-- : "On the Theory of Types". Journal of Symbolic Logic, vol. 2, 1937

-- : "Nueva fundamentación de la lógica matemática". En Quine, W.: Desde un punto de vista lógico

-- : "La lógica y la reificación de los universales". En Quine, W.: Desde un punto de vista lógico

-- : "La evolución de la ontología de Russell". En Schoenman, R.: Homenaje a Bertrand Russell

RAMSEY, F. P.: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, Littlefield, Adams and Co., Paterson, N.J., 1960

-- : "Predicative founctions and the axiom of reducibility". En Klemke, E. D.: Essays on Bertrand Russell

REICHENBACH, H.: "Bertrand Russell's Logic". En Schilpp, P.A.: The Philosophy of Bertrand Russell

REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P. y TREJO, C.A.: Análisis matemático, vol. I, Kapelusz, Buenos Aires, 1961⁶

RESNIK, P.: Frege and the philosophy of mathematics, Cornell University Press, Ithaca, 1980

ROBINSON, A. (ed.): Essays on the Foundation of Mathematics Hebrew University, Jerusalem, 1961

RUSSELL, B.: Autobiografía 1872-1914, Aguilar, Madrid, 1968

-- : A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz, Georg Allen & Unwin, London, 1937²

-- : Ensayos filosóficos, Alianza, Madrid, 1985⁴

-- : Essays in Analysis, D. Lackey (ed.), London, 1973

-- : Introduction to mathematical Philosophy, George Allen & Unwin, London, 1919 (repr. 1975)

RUSSELL, B : _La evolución de mi pensamiento filosófico_, Alianza, Madrid, 1976

-- : _Los Principios de la Matematica_, Espasa-Calpe, Madrid, 1977[2]

-- : _Misticismo y Lçogica_, Paidos, Buenso Aires, 1961

-- : _Retratos de memoria y otros ensayos_, Alianza, Madrid, 1976

-- : "Letter to Frege". En Heijenoort, J. van: _From Frege to Godel_

-- : "On some Difficulties in the Theory of transfinite Numbers and Order Types". En Russell, B.: _Essays in Analysis_

-- : "On the Relation of Mathematics to Logic". En Russell, B.: _Essays in Analysis_

-- : "On the Substitutional Theory of Classes and Relations". En Russell, B.: _Essays in Analysis_

-- : "The Axiom of Infinity". En Russell, B.: _Essays in Analysis_

-- : "The Philosophical Implications of Mathematical Logic". En Russell, B.: _Essays in Analysis_

-- : "The Regressive Method of Discovering the Premises of Mathematics". En Russell, B.: _Essays in Analysis_

-- : "The Theory of Logical Types". En Russell, B.: _Essays in Analysis_

RUSSELL, B. y WHITEHEAD, A. : _Principia Mathematica_, Cambridge University Press, Cambridge, 1927[2]

SAINSBURY, R. M.: _Russell_, Routledge & Kegan Paul, London, 1979

SCHILPP, P. A.(ed.): _The Philosophy of Bertrand Russell_, Northwestern University, Eranston and Chicago, 1944

SCHOENMAN, R. (ed.): _Homenaje a Bertrand Russell_, Oikos Tau, Barcelona, 1968

SCOTT, D.: "Existencia y descripcion en lógica formal". En

Schoenman, R.: Homenaje a Bertrand Russell

SIERPINSKI, W.: Hypothèse du Continu, M. Garasinski, Warszawa-Lwów, 1934

-- : "L'hipothèse du généralisée du continu et l'axiome du choix", Fundamenta Mathematicae, vol. 24, 1947

SIMONS, P. M.: "Against the Aggregate Theory of Number", The Journal of Philosophy, vol. LXXIX, nº 3, 1982

SOBER, E.: "Realism and Independence", Nous, vol. XVI, nº 3 1982

SPINOZA: véase ESPINOSA, B. de

STAHL, G.: "El método diagonal en teoría de conjuntos y metamatemática". Teorema, vol. XI/1, 1981

STEINER, M.: "Mathematical Realism". Nous, vol. XVII, Nº 3 1983

STEKLA, H.: Der regressus ad infinitum bei Aristoteles, Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glad, 1970

TAIT, W. W.: "Truth and Proof: the platonism of mathematics". Synthese, 69, 1986

TAKEUTI, G y ZARING, W. M.: Introduction to Axiomatic Set Theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1971

TARSKI, A.: Logic, semantics, metamathematics, Hackett Publishing Co., Indianapolis, Indiana, 1983²

-- : "Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix". Fund. Math., 5, 1924

-- : "The concept of truth in formalized languages". En Tarski, A.: Logic, semantics, metamathematics

VEBLEN, O.: "continuos increasing functions of finite and transfinite ordinals". Trans. Amer. Math. Soc., 9, 1908

WANG, H.: From Mathematics to Philosophy, Routledge & Kegan Paul, London, 1974

-- : "The concept of set". En Benacerraf, P. y Putnam, H.: Philosophy of Mathematics y en Wang, H.: From Mathematics to Philosophy

ZERMELO, E.: "Investigations in the foundations of set theory". En Heijenoort, J. van: Form Frege to Gogel

-- : "A new proof of the possibility of a well-ordering" En Heijenoort, J.: From Frege to Godel

-- : Comentarios del Editor a Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen