UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

APROXIMACIÓN CONSERVATIVA Y TEOREMAS DE KOROVKIN

TESIS DOCTORAL

DANIEL CÁRDENAS MORALES

1998

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
APLICADA

APROXIMACIÓN CONSERVATIVA
Y
TEOREMAS DE KOROVKIN

TESIS DOCTORAL

AUTOR: Daniel Cárdenas Morales

FIRMA:

DIRECTOR: **Francisco Javier Muñoz Delgado**

FIRMA:

GRANADA, 1998

A mis Padres.

A Carmen,
mi preciosa cataplasma.

Prólogo

La presente memoria comprende un trabajo de investigación titulado 'Aproximación Conservativa y Teoremas de Korovkin'. Con ella pretendo optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas y finalizar así los estudios de tercer ciclo realizados en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada bajo la tutoría del profesor doctor Juan S. Soler Vizcaíno.

Ha sido realizada en su totalidad en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén bajo la dirección del profesor doctor Francisco Javier Muñoz Delgado a quien manifiesto mi agradecimiento por su amistad, por la confianza que depositó en mí y, como no, por haber compartido conmigo su conocimiento y esa intuición que le permite ver siempre un poquito más alla.

También quisiera dar las gracias a los profesores de los mencionados departamentos que cooperaron de alguna manera en la realización de este trabajo; entre ellos M. A. Marano Calzolari, R. Ortega Ríos y V. Ramírez González, y manifestar mi gratitud a los profesores M. A. Jiménez Pozo, actualmente en la Universidad de Puebla en México, P. Sablonnière, del INSA de Rennes en Francia, y D. Leviatan, de la Universidad de Tel Aviv en Israel, por sus sugerencias y comentarios y por poner a nuestra disposición una buena cantidad de material bibliográfico muy útil para el desarrollo de nuestras investigaciones.

El texto contiene nuevos resultados que se enmarcan en aquella parcela de la Teoría de Aproximación que fue iniciada por P. P. Korovkin. Está estructurado de tal forma que comienza con una sección que contiene todas las notaciones que se van a usar, además de las indicaciones necesarias para realizar un buen seguimiento; continúa con el trabajo propiamente dicho, que se agrupa en los siguientes capítulos:

Capítulo 1. Introducción

Capítulo 2. Resultados Cualitativos

Capítulo 3. Resultados Cuantitativos

Capítulo 4. Nuevas Líneas de Trabajo

Acaba mostrando una relación de la bibliografía que de una u otra forma se ha utilizado.

Por último doy gracias a mi mujer, Carmen, que tantas veces me levantó de la silla y me hizo perder el tiempo. Debe saber que estoy seguro de que ni lo perdía ni lo sigo perdiendo.

Jaén, noviembre de 1997 *Daniel Cárdenas Morales*

Notación

Como es usual utilizaremos los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ para denotar respectivamente los conjuntos de números naturales y reales. $E(\cdot)$ representa la función parte entera de un número real.

$\mathbb{R}^m$ es el espacio euclídeo usual m-dimensional y si $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, entonces $|x|$ denota su norma euclídea, es decir,

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, denotamos por $\mathbb{R}^X$ el espacio formado por todas las funciones reales con dominio X, es decir,

$$\mathbb{R}^X = \{f : X \to \mathbb{R}\}.$$

$C(X)$ es el subespacio de las funciones continuas definidas en X.

Si $f \in \mathbb{R}^X$ es una función acotada, entonces mediante $\|f\|_X$ expresamos la norma del supremo de f, es decir,

$$\|f\|_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Cuando no haya confusión omitiremos el dominio de la función.

Denotamos por $\mathbb{1}$ la función constantemente igual a 1.

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ representa la función proyección i-ésima, ésto es,

$$p_i(x) = p_i(x_1, \ldots, x_m) = x_i \ \forall x \in \mathbb{R}^m .$$

Denotamos por $\mathbb{P}_k$ el espacio de los polinomios reales de grado a lo sumo k, es decir,

$$\mathbb{P}_k = \langle e_0, e_1, \ldots, e_k \rangle, \text{ siendo } e_i(x) = x^i \ \forall x \in \mathbb{R} .$$

Si $X = [a, b]$ es el intervalo cerrado real de extremos a y b, al escribir $C^k(X) = C^k[a, b]$ nos referimos al espacio de las funciones definidas en $[a, b]$ que poseen derivada de orden k continua.

Decimos que un subconjunto de funciones C es un cono si

$$\alpha \in \mathbb{R}_0^+, \ f \in C \Rightarrow \alpha f \in C.$$

Destacamos ahora ciertos conos de funciones de $C(X) = C[a, b]$ con los que trabajaremos en el texto:

$$H_k^X = \big\{ f \in C(X) : f[x_0, \ldots, x_k] \geq 0 \ \forall x_0, \ldots, x_k \in X \big\} \text{ para } k = 0, 1, \ldots ,$$

donde $f[x_0, \ldots, x_k]$ es la diferencia dividida de orden k de f respecto de los nodos $x_0, \ldots, x_k$.

Con la notación anterior decimos que una función $f \in H_k^X$ es una función k-convexa. En particular, si $k = 0$ estamos ante una función positiva, si $k = 1$ ante una función creciente y si $k = 2$ ante una función convexa. Nótese que estamos considerando las nociones anteriores en sentido no estricto.

Sea $\sigma = \{\sigma_i\}$ una sucesión donde $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$. Sean también h y k dos números enteros verificando que $0 \leq h \leq k$ y $\sigma_h \sigma_k \neq 0$. Se define también el siguiente cono de funciones de $C(X)$:

$$C_{h,k}^X(\sigma) = \big\{ f \in C(X) : \sigma_i f[x_0, \ldots, x_i] \geq 0 \ \forall i \in \{h, \ldots, k\}, \ \forall x_o, \ldots, x_i \in X \big\}.$$

Asociado a σ, h y k se define el siguiente conjunto:

$$\Gamma_\sigma = \big\{ i \in \{h, \ldots, k-2\} : \sigma_i \neq 0, \ \sigma_{i+1} = 0, \ \sigma_i \sigma_{i+2} \neq -1 \big\}.$$

Si $\Gamma_\sigma = \emptyset$, decimos que $C_{h,k}^X(\sigma)$ es un cono de tipo I. En caso contrario decimos que $C_{h,k}^X(\sigma)$ es un cono de tipo II.

Para una función $f \in C(X)$ con $X \subset \mathbb{R}^m$, se define el primer módulo de continuidad con argumento $\delta \geq 0$ mediante

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X, \ |x - y| \leq \delta\}$$

y si $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, se define el segundo módulo de continuidad mediante

$$\omega_2(f, \delta) = \sup\{|f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)| : x, x \pm h \in [a, b], \ 0 \leq h \leq \delta\}.$$

Un operador es una aplicación entre dos espacios funcionales. Un operador L se dice lineal si en su dominio, junto con dos funciones cualesquiera f y g están también las funciones $\alpha f + \beta g \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y además,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g).$$

Normalmente al hacer actuar un operador sobre una función no escribiremos los paréntesis, es decir, $L(f) = Lf$.

Notaremos por I al operador identidad.

Decimos que un operador L es k-convexo para $k = 0, 1, \ldots$ si transforma funciones k-convexas en funciones k-convexas. En particular aparecen los conceptos de operador positivo, operador creciente y operador convexo respectivamente para $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$.

También decimos que un operador L fija un espacio de funciones V si se verifica que $Lf = f \ \forall f \in V$.

Destacamos el operador de Bernstein en una variable $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$, definido para cada $n \in \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \ \forall x \in [0,1],$$

y en dos variables, $B_{n,m} : C\left([0,1]^2\right) \to C\left([0,1]^2\right)$, definido para cada $n, m \in \mathbb{N}$ y cada $(x,y) \in [0,1]^2$ como sigue:

$$B_{n,m}f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{l}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{m}\right)x^k(1-x)^{n-k}y^l(1-y)^{m-l}.$$

Usaremos la notación K_n para referirnos a una sucesión de operadores, suponiendo por tanto, aunque no se exprese, que n varía en el conjunto $\mathbb{N}$. De esta forma también entenderemos que si f es una función en el dominio de esos operadores, entonces $K_n f$ representa una sucesión de funciones. Asímismo, la posible convergencia, puntual o uniforme, de esa sucesión se entenderá que tiene lugar cuando n tiende hacia ∞.

Por último, para facilitar el seguimiento y estudio del texto diremos que cada capítulo de esta memoria se compone de secciones, que notamos con dos números, el primero de los cuales corresponde al capítulo. A su vez éstas pueden contener subsecciones, que notamos con tres números.

Las definiciones, proposiciones, lemas, teoremas, comentarios y ejemplos que aparecen se numeran consecutivamente a lo largo de todo un capítulo (independientemente de las secciones y subsecciones) mediante dos números, el primero de los cuales indica el capítulo. El final de las posibles demostraciones de estos resultados lo marcamos con el símbolo $\square$.

Un tratamiento análogo al anterior se hace para la numeración de aquellas ecuaciones matemáticas que, después de ser establecidas, serán de nuevo utilizadas. Aparecen numeradas a lo largo de cada capítulo mediante dos números, el primero de los cuales hace referencia a aquél.

Todos los trabajos de investigación que se referencian en una misma página aparecen numerados y completamente descritos en el pie, con independencia de que también se recogen al final del texto en la bibliografía.

Índice

Capítulo 1

Introducción

Desde que en 1953 Korovkin estableció su célebre teorema, su simplicidad y al mismo tiempo su poder han despertado el interés de muchos matemáticos. Se trata de un criterio que permite decidir si dada una sucesión de operadores lineales positivos K_n definidos en el espacio $C[a, b]$, se verifica que $K_n f$ converge uniformemente a f en $[a, b]$ para toda función $f \in C[a, b]$. El criterio establece que basta verificar la convergencia uniforme para $f \in \{e_0, e_1, e_2\}$.

Durante los últimos años muchas investigaciones han extendido el resultado para diferentes espacios funcionales y espacios más abstractos, como los retículos de Banach o las álgebras de Banach, estableciendo una teoría que en la actualidad podemos llamar, en palabras de Altomare y Campiti, teoría de aproximación de tipo Korovkin, que además de conectar con la teoría clásica de aproximación, también lo hace con otros campos como el análisis funcional, el análisis armónico, la teoría de la medida, la teoría de probabilidad y las ecuaciones en derivadas parciales.

Esta memoria recoge nuestra aportación a una pequeña parcela de esta extensa rama de la aproximación. Con el propósito de dar una idea general sobre su contenido, diremos que aunque los últimos avances realizados pretenden completar el desarrollo de la teoría siempre en el ambiente de espacios muy generales, nosotros no hemos ido más allá del estudio de operadores que tienen por dominio espacios de funciones definidas en el euclídeo $\mathbb{R}^m$ y, aun así, pensamos que nuestros trabajos están aportando nuevas ideas en el campo de la aproximación de tipo Korovkin.

En 1994 aparece un texto de los citados autores Altomare y Campiti[1] que recoge todas las investigaciones que se han realizado en esta parcela de la aproximación, con sus diferentes enfoques y aplicaciones, incluyendo todo el material documentado ya en monografías previas de Donner[2] y de Keimel y Roth[3].

Nos hemos movido en el ámbito de la aproximación conservativa, cuyo interés en los últimos tiempos ha aumentado y donde el problema consiste en asignar a una función f, que se quiere aproximar mediante un operador K_n, otra que pertenezca a un conjunto más reducido, de tal modo que las propiedades de forma que verifique la primera se mantengan para la función aproximante. Si este operador es lineal y positivo, el teorema de Korovkin y sus primeras extensiones y versiones cuantitativas proporcionan métodos muy simples y agradables para probar la convergencia y estimar el error. Sin embargo, si el proceso no es positivo, el estudio se complica y las extensiones conocidas no proporcionan en la práctica condiciones agradables para probar la convergencia. Ha sido nuestro interés, por tanto, establecer en esta dirección criterios prácticos.

1.1. Antecedentes y Estado del Tema

Profundizamos un poco más en el contenido de esta memoria apoyándonos en una serie de resultados que a la postre quedarán como casos particulares de los logros alcanzados y que constituyen la base inicial sobre la que se ha desarrollado este trabajo de investigación. Clarifican además el estado en que se encuentra el tema que nos ocupa.

Vemos de manera separada los avances cualitativos de esta teoría, que pretenden la búsqueda de criterios que garanticen la convergencia para diferentes

[1] Altomare, F., Campiti, M. *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications,* De Gruyter Studies in Mathematics, 17, Walter de Gruyter, Berlin-New York, (1994)

[2] Donner, K. *Extension of Positive Operators and Korovkin Theorems,* Lecture Notes in Mathematics, 904, Springer-Verlag, Berlin, (1982)

[3] Keimel, K., Roth, W. *Ordered Cones and Approximation,* Lecture Notes in Mathematics, 1517, Springer-Verlag, Berlin, (1992)

procesos de aproximación, y los avances cuantitativos, que persiguen la estimación del error cometido en esos procesos.

1.1.1. Aspectos Cualitativos

Comenzamos recordando el resultado de Korovkin[1] que, a pesar de que tiene un predecesor en un resultado de Bohman[2], es en él donde se consideran por primera vez operadores lineales positivos arbitrarios.

Teorema 1.1. *Sea K_n una sucesión de operadores lineales positivos definidos en el espacio $C[a,b]$ tal que*

$$\|K_n e_j - e_j\| \to 0 \ \forall j \in \{0,1,2\}.$$

Entonces

$$\|K_n f - f\| \to 0 \ \forall f \in C[a,b].$$

En otro lenguaje, se suele decir que las funciones e_0, e_1 y e_2 forman un conjunto de funciones test para $C[a,b]$.

En 1957 un estudiante de Korovkin, Volkov[3], establece un resultado análogo para el caso m-dimensional:

Teorema 1.2. *Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, entonces las $m+2$ funciones $\mathbb{1}, p_1, \ldots, p_m$ y $p_1^2 + \ldots + p_m^2$ forman un conjunto de funciones test para $C(K)$.*

Ya en 1991, Muñoz-Delgado[4], como consecuencia de las investigaciones que realiza sobre operadores polinomiales lineales, prueba las siguientes proposiciones

---

[1] Korovkin, P. P. *On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions (Russian),* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 90, (1953), 961–964

[2] Bohman, H. *On Approximation of Continuous and of Analytic Functions,* Ark. Mat., 2, (1952), 43–56

[3] Volkov, V. I. *On the Convergence of Sequences of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions of Two Variables (Russian),* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 115, (1957), 17–19

[4] Muñoz-Delgado, F. J. *Aproximación Conservativa con Operadores Polinomiales Lineales,* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Spain, (1991)

sobre convergencia que ya empiezan a apuntar en la dirección de la aproximación conservativa:

Proposición 1.1. *Sea $K_n : C^2[a,b] \to C^2[a,b]$ una sucesión de operadores lineales que transforman funciones positivas y convexas en funciones positivas. Supongamos además que*

$$\|K_n e_j - e_j\| \to 0 \; \forall j \in \{0,1,2\}.$$

Entonces

$$\|K_n f - f\| \to 0 \; \forall f \in C^2[a,b].$$

Además, no se puede establecer el mismo resultado si se supone que K_n transforma funciones positivas y cóncavas en funciones positivas.

Proposición 1.2. *Sea $K_n : C^2[a,b] \to C^2[a,b]$ una sucesión de operadores lineales que transforman funciones positivas y cóncavas en funciones cóncavas. Supongamos además que*

$$\|D^2(K_n e_j) - D^2 e_j\| \to 0 \; \forall j \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Entonces

$$\|D^2(K_n f) - D^2 f\| \to 0 \; \forall f \in C^2[a,b].$$

Proposición 1.3. *Sea $K_n : C^1[a,b] \to C^1[a,b]$ una sucesión de operadores lineales que transforman funciones positivas y crecientes en funciones crecientes. Supongamos además que*

$$\|D(K_n e_j) - De_j\| \to 0 \; \forall j \in \{0,1,2,3\}.$$

Entonces

$$\|D(K_n f) - Df\| \to 0 \; \forall f \in C^1[a,b].$$

Como puede adivinarse fácilmente, los resultados que acabamos de mostrar pueden ser generalizados hasta obtener importantes enunciados sobre la convergencia de operadores conservativos. De hecho, así lo hace su autor, para lo cual establece el siguiente resultado general que luego particulariza considerando los conos de funciones de una variable que fueron introducidos en la sección anterior.

Teorema 1.3. *Sea X el cierre de un dominio acotado de $\mathbb{R}^m$ y sea $C_L(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, Lf$ es continua$\}$, donde L es el operador identidad o bien una cierta derivada parcial de f. Sea también $P = \{f \in C_L(X) : Lf \geq 0\}$, C un cono de $C_L(X)$ y V un subespacio de $C_L(X)$ verificando las siguientes propiedades:*

1) *existe una función $p \in V$ tal que $Lp = \mathbb{1}$,*
2) *para todo punto $z \in X$, existe una función $\varphi_z \in V \cap C$ tal que:*
   i) $L\varphi_z(z) = 0 < L\varphi_z(x)\ \forall x \in X \setminus \{z\}$,
   ii) $\forall f \in C_L(X),\ \exists \alpha = \alpha(f) > 0 \ /\ \varphi_z + \epsilon f \in C\ \forall \epsilon \in [0, \alpha]$.

Consideremos por último un subespacio A que contiene a V y una sucesión de operadores lineales $K_n : A \subset C_L(X) \to C_L(X)$ tales que:

a) $K_n(P \cap C \cap A) \subset P$,
b) *LK_nf converge uniformemente a $Lf\ \forall f \in V$.*

En estas condiciones LK_nf converge uniformemente a $Lf\ \forall f \in A$.

El Teorema de Korovkin (Teorema 1.1) y el de Volkov (Teorema 1.2) son casos particulares de este último. Para comprobarlo, basta considerar en el primer caso $X = [a, b]$, $L = I$, $C = C_I(X) = A = C[a, b]$, $V = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$, $p = e_0$ y $\varphi_z(x) = (x - z)^2$, y en el segundo caso, $X = K$, $L = I$, $C = C_I(X) = A = C(K)$, $V = \langle \mathbb{1}, p_1, \ldots, p_m, p_1^2 + \ldots + p_m^2 \rangle$, $p = \mathbb{1}$ y $\varphi_z(x) = (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_m - z_m)^2\ \forall x = (x_1, \ldots, x_m), z = (z_1, \ldots, z_m) \in K$.

El estudio de los enunciados mostrados supone un buen comienzo para adentrarse en la parte de la teoría de aproximación de tipo Korovkin que nos ocupa.

1.1.2. Aspectos Cuantitativos

Aunque en 1959 y 1964 aparecen unos primeros trabajos de Mamedov[1] y de Newman y Shapiro[2] respectivamente, es en 1968 cuando Shisha y Mond[3] ponen en forma cuantitativa el resultado de Korovkin (Teorema 1.1), estimando la velocidad de convergencia de K_nf a f en términos de las velocidades de

---

[1] Mamedov, R. G. *On the Order of the Approximation of Differentiable Functions by Linear Positive Operators,* Doklady, S.S.S.R., 128, (1959), 674–676

[2] Newman, D. J., Shapiro, H. S. *Jackson's Theorem in Higher Dimensions,* On Approximation Theory, Proceedings of the Conference at Oberwolfach, 1963, Birkhaüser, (1964), 208–219

[3] Shisha, O., Mond, B. *The Degree of Convergence of Sequences of Linear Positive Operators,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 60, (1968), 1196–1200

convergencia de K_ne_0 a e_0, K_ne_1 a e_1 y de K_ne_2 a e_2. En concreto establecen el siguiente resultado:

Teorema 1.4. *Sea K_n una sucesión de operadores lineales positivos definidos en un dominio A que contiene las restriccciones de e_0, e_1 y e_2 a un intervalo $[a,b]$ y supongamos que K_ne_0 está acotada para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f \in A$ continua en el intervalo $[a,b]$.*

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|f - K_nf\| \leq \|f\| \cdot \|K_ne_0 - e_0\| + \|K_ne_0 + e_0\|\omega(f, \mu_n),$$

donde

$$\mu_n^2 = \sup_{x\in[a,b]} \{K_n\psi_x(x)\}$$

y

$$\psi_x(t) = (t-x)^2 \ \forall x, t \in [a,b].$$

(Nótese que μ_n^2 es una cantidad no negativa puesto que ψ_x es una función positiva y el operador K_n también es positivo).

Cabe observar que de la expresión de μ_n se deduce que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n^2 \leq \|K_ne_2 - e_2\| + 2c\|K_ne_1 - e_1\| + c^2\|K_ne_0 - e_0\|,$$

donde $c = \max\{|a|, |b|\}$. Para verlo basta tener en cuenta las siguientes igualdades

$$K_n\psi_x(x) = (K_n\psi_x - \psi_x)(x) = K_n(e_2 - 2xe_1 + x^2e_0)(x) - (e_2 - 2xe_1 + x^2e_0)(x)$$

$$= (K_ne_2 - e_2)(x) - 2x(K_ne_1 - e_1)(x) + x^2(k_ne_0 - e_o)(x).$$

Por tanto, si K_ne_i converge uniformemente a e_i en $[a,b]$, entonces μ_n converge a cero y tenemos una estimación de μ_n en términos de $\|K_ne_i - e_i\|$. Se ratifica así que estamos ante una versión cuantitativa del teorema de Korovkin.

Más tarde, en 1971, Censor[1], estudiante de Ziegler, obtuvo la correspondiente versión cuantitativa del resultado de Volkov (Teorema 1.2):

---

[1] CENSOR, E. *Quantitative Results for Positive Linear Approximation Operators*, J. Approx. Th., 4, (1971), 442–450

Teorema 1.5. *Sea K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ y K_n una sucesión de operadores lineales positivos definidos en $C(K)$. Supongamos que $K_n\,\mathbb{1}$ está acotada para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces para $f \in C(K)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|f - K_n f\| \leq \|f\| \cdot \|K_n\,\mathbb{1} - \mathbb{1}\,\| + \|K_n\,\mathbb{1} + \mathbb{1}\,\|\omega(f, \mu_n),$$

donde

$$\mu_n^2 = \sup_{x \in K}\{K_n \psi_x(x)\}$$

y

$$\psi_x(t) = \sum_{i=1}^{m}(t_i - x_i)^2 \;\forall x = (x_1, \ldots, x_m), t = (t_1, \ldots, t_m) \in K.$$

(Nótese que como en el resultado anterior μ_n^2 es una cantidad no negativa por la positividad de la función ψ_x y del operador K_n).

Cabe observar que de la expresión de μ_n se deduce también que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n^2 \leq \left\| K_n\left(\sum_{i=1}^{m} p_i^2\right) - \sum_{i=1}^{m} p_i^2 \right\| + 2c\sum_{i=1}^{m}\|K_n p_i - p_i\| + mc^2\|K_n\,\mathbb{1} - \mathbb{1}\,\|,$$

donde $c \geq |x| \;\forall x \in K$. Por tanto, si $K_n f$ converge uniformemente a f en K para $f \in \{\mathbb{1}, p_1, \ldots, p_m, \sum_{i=1}^m p_i^2\}$, entonces μ_n converge a cero y tenemos una estimación de μ_n en términos de $\|K_n f - f\|$ para $f \in \{\mathbb{1}, p_1, \ldots, p_m, \sum_{i=1}^m p_i^2\}$.

Por otra parte, descubrimos que había algunos resultados que apuntaban en nuestra línea de trabajo. Entre ellos el siguiente de Knoop y Pottinger[1] de 1976 en el que establecen el concepto de operador 'casi convexo':

Definición 1.1. *Sean $X' \subset X \subset \mathbb{R}$ y $L : C(X) \to C(X')$ un operador lineal. Se dice que L es casi convexo de orden $k-1$ si hay un cono $C_{h,k}^X(\sigma)$ con $\sigma_i \in \{0,1\}$ tal que*

$$K_n\left(C_{h,k}^X(\sigma) \cap C(X)\right) \subset C_{k,k}^{X'}(\sigma).$$

---

[1] Knoop, H. B., Pottinger, P. *Ein Satz vom Korovkin-Typ für C^k-Räume,* Math. Z., 148, (1976), 23–32

Como vemos, se trata de operadores que verifican propiedades de forma relacionadas con la conservación de los conos de funciones de una variable con los que vamos a trabajar. Para este tipo de operadores prueban el siguiente resultado cuantitativo a propósito de lo que perseguimos:

Teorema 1.6. *Sea $X = [a,b]$ y X' un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ con $X' \subset X$. Sea $K_n : C^k(X) \to C^k(X')$ una sucesión de operadores lineales. Supongamos que $K_n(\mathbb{P}_{k-1}) \subset \mathbb{P}_{k-1}$ y que K_n es casi convexo de orden $k-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces para $f \in C^k(X)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\left\|D^k f - D^k K_n f\right\| \leq \frac{1}{k!}\left\|D^k f\right\| \left\|D^k e_k - D^k K_n e_k\right\|$$

$$+\frac{1}{k!}\left\|D^k K_n e_k + D^k e_k\right\| \omega(D^k f, \beta_n),$$

donde

$$\beta_n^2 = \sup_{x\in X'}\left\{D^k K_n\left(\frac{2}{(k+2)!}e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!}x e_{k+1} + \frac{1}{k!}x^2 e_k\right)(x)\right\}.$$

(Conviene observar aquí también que β_n^2 es una cantidad no negativa porque la función

$$\frac{2}{(k+2)!}e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!}x e_{k+1} + \frac{1}{k!}x^2 e_k$$

está en el cono $C^X_{h,k}(\sigma)$ y K_n es casi convexo de orden $k-1$.)

También, Gonska[1], afinando una desigualdad que introduce Freud[2], establece un resultado en la línea del de Shisha y Mond (Teorema 1.4) en términos del segundo módulo de continuidad, que luego utiliza para mejorar la estimación anterior de Knoop y Pottinger.

No nos preocuparemos mucho por esta mejora, aunque sí por el resto de los enunciados. Ellos suponen otro gran punto de partida, creemos que de obligado conocimiento, para el seguimiento de nuestras investigaciones.

---

[1] Gonska, H. H. *Quantitative Korovkin type Theorems on Simultaneous Approximation,* Math. Z., 186, (1984), 419–433

[2] Freud, G. *On Approximation by Positive Linear Methods, I, II,* Math. Hungar., 3, (1968), 365–370

1.2. Objetivos Generales

Las proposiciones vistas en la sección anterior ayudan a comprender muy bien el tipo de resultados con los que pretendemos trabajar. Ya mencionamos que aquellas podían ser generalizadas hasta obtener ciertos enunciados sobre aproximación conservativa en C^k. Mostraremos estas extensiones en el Capítulo 2 donde servirán de preámbulo a buena parte de lo que tratamos en este texto.

También allí, además de lo ya comentado, extenderemos el Teorema 1.3 en algunos otros aspectos y mostraremos algunos ejemplos prácticos. Este capítulo contendrá, en pocas palabras, los aspectos cualitativos de nuestra aportación a la teoría de aproximación de tipo Korovkin.

En el Capítulo 3 estudiaremos nuevos resultados cuantitativos. Se reflejan las consecuencias de dirigir nuestras investigaciones hacia el segundo objetivo fundamental que nos habíamos planteado y que había aparecido de manera natural: estimar el error que se comete en los procesos de convergencia que habíamos estado investigando.

Es sobre la pequeña base que forman fundamentalmente los resultados de Shisha y Mond (Teorema 1.4) y de Censor (Teorema 1.5), donde comienza nuestro trabajo ya mencionado de estimación de los errores.

Primero centraremos nuestra atención en enunciados sobre aproximación conservativa en C^k. Para ello, además de los anteriores, haremos uso del trabajo de Knoop y Pottinger (Teorema 1.6), que, a pesar de que como ya veremos funciona bajo hipótesis demasiado restrictivas, representó otro importante foco de avance en nuestras investigaciones. Así se pretende reflejar también en el Capítulo 3, donde además se estudiarán ejemplos concretos de operadores, entre los que cabe destacar los que introdujeron Meyer-König y Zeller.

El trabajo realizado hasta ese momento permitió luego con relativa facilidad, y así lo reflejaremos, estimar la velocidad de convergencia de todos aquellos procesos de aproximación más generales que habíamos estudiado, siempre, por supuesto, en base a las velocidades de convergencia relativas a las funciones test asociadas a cada uno de ellos.

Lejos de que esta memoria suponga un trabajo de investigación acotado, el Capítulo 4 mostrará nuevas vías de estudio que iban apareciendo según se recababa información y se avanzaba en la tarea. Es más, no se trata de objetivos de trabajo a largo plazo, sino de problemas en los que ya estamos inmersos.

Capítulo 2

Resultados Cualitativos

2.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo consiste en probar una extensión del teorema de Korovkin (Teorema 1.1), que establezca un criterio lo suficientemente general como para garantizar la convergencia de una gran cantidad de procesos de aproximación, mediante el uso de operadores definidos en espacios de funciones de varias variables que posean ciertas propiedades de forma.

Ya se había mostrado un resultado con este perfil en el Teorema 1.3, como consecuencia del cual se podían establecer, como ya adelantábamos, una serie de enunciados, a su vez más generales que los mostrados en las Proposiciones 1.1, 1.2 y 1.3, mediante el uso de las conos de funciones de una variable.

En la siguiente sección se desarrollan estos enunciados para poner de manifiesto la mecánica en la utilización de este Teorema 1.3 y de aquellos que se obtienen de éste relativos a la aproximación conservativa en C^k. Veremos que la idea consiste en saber asignar al operador L y al cono de funciones C aquellos valores que hacen que las hipótesis del resultado reproduzcan las propiedades conservativas del operador o sucesión de operadores objeto de nuestro estudio.

Todavía estableceremos un resultado más general en la Sección 2.3. Para ello, entre otras cosas, permitiremos procesos de aproximación a funciones continuas mediante otras que no lo son. Una serie de ejemplos prácticos completan este capítulo cuyo contenido puede leerse en un par de trabajos de Muñoz-Delgado, Ramírez-González y Cárdenas-Morales [1],[2].

2.2. Aproximación Conservativa en $\mathbf{C}^k$

Cuando se presenta el problema de aproximar la derivada k-ésima de una función de una variable real f mediante una sucesión de operadores lineales K_n, si éstos son k-convexos, entonces una extensión inmediata del Teorema de Korovkin proporciona un criterio que garantiza la convergencia uniforme de D^kK_nf a D^kf siempre que esta convergencia tenga lugar para $f \in \{e_k, e_{k+1}, e_{k+2}\}$.

Si se supone que los operadores con los que se trabaja no son k-convexos y, en su lugar, se impone la hipótesis de que posean alguna propiedad de conservación de la forma relacionada directamente con la k-convexidad, puede disponerse de los siguientes criterios, que ya habíamos dejado entrever y que aquí se aderezan con algunos corolarios y comentarios. Los tratamos de manera separada dependiendo del tipo de cono que aparezca en la propiedad de conservación.

2.2.1. Conos Arbitrarios

Teorema 2.1. *Sea $X = [a,b]$, $C^X_{h,k}(\sigma)$ un cono y $K_n : C^k(X) \to C^k(X)$ una sucesión de operadores lineales. Supongamos que*

$$K_n(C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)) \subset C^X_{k,k}(\sigma)$$

y

$$\|D^k(K_ne_j) - D^ke_j\| \to 0 \ \forall j \in \{h, \ldots, k+2\}.$$

Entonces

$$\|D^k(K_nf) - D^kf\| \to 0 \ \forall f \in C^k[0,1].$$

[1] Muñoz-Delgado, F.J., Ramírez-González, V., Cárdenas-Morales, D. *An Extension of Korovkin's Theorem. Convergence for Sequences of Operators Preserving Shape Properties,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, (1996), 421–426

[2] Muñoz-Delgado, F.J., Ramírez-González, V., Cárdenas-Morales, D. *Qualitative Korovkin-type Results on Conservative Approximation,* J. Approx. Th., (aparecerá)

Demostración. Aplicaremos el Teorema 1.3 como sigue. Sea $X = [a, b]$ y $L = \sigma_k D^k$. De esta forma $C_L(X) = C^k(X)$ y $P = C_{k,k}(\sigma)$. Además, sea $A = C_L(X)$, $C = C_L(X)$ si $h = k$ y $C = C^X_{h,k-1}(\sigma)$ en otro caso. Así $P \cap A \cap C = C^X_{h,k}(\sigma)$. También, sea $V =< e_h, \ldots, e_{k+2} >$. Más aún, definimos $p = \frac{1}{k!}\sigma_k e_k$ y para cada $z \in [a, b]$ definimos $\varphi_z \in V$ tal que

$$D^k\varphi_z(x) = \sigma_k(x - z)^2 \ \forall x \in [a, b],$$
$$D^i\varphi_z(a) = \sigma_i(1 + \|D^{i+1}\varphi_z\|) \text{ para } i = k - 1, k - 2, \ldots, h.$$

Vemos que las hipótesis del Teorema 1.3 se verifican. En efecto, si $h \le i \le k - 1$ con $\sigma_i \ne 0$, entonces

$$\sigma_i D^i\varphi_z(x) = \sigma_i D^i\varphi_z(a) + \sigma_i \int_a^x (D^{i+1}\varphi_z)$$

$$\ge \sigma_i D^i\varphi_z(a) - \|D^{i+1}\varphi_z\| \ge 1 \ \forall x \in [a, b].$$

Por consiguiente, $\varphi_z \in C$ y φ_z verifica la hipótesis (2.ii). El resto de las hipótesis se pueden comprobar con facilidad. □

Como consecuencia directa del resultado mostrado se puede probar el siguiente corolario que trata la posible convergencia de las derivadas de orden inferior que allí aparecían.

Corolario 2.1. *Sea $X = [a, b]$, $C^X_{h,k}(\sigma)$ un cono de tipo I y $K_n : C^k(X) \to C^k(X)$ una sucesión de operadores lineales. Supongamos que la sucesión satisface las siguientes propiedades:*

a) $K_n(C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)) \subset C^X_{h,k}(\sigma)$,

b) $\|D^k(K_n e_j) - D^k e_j\| \to 0 \ \forall j \in \{h, \ldots, k + 2\}$,

c) $D^i(K_n e_j)$ *converge puntualmente a* $D^i e_j \ \forall i \in \{h, \ldots, k-1\}, \forall j \in \{h, \ldots, k\}$. *Entonces*

$$\|D^i(K_n f) - D^i f\| \to 0 \ \forall f \in C^k(X) \ \forall i \in \{h, \ldots, k\}.$$

Comentario 2.1. En el Teorema 2.1 y su corolario, la convergencia uniforme de $D^i(K_n e_j)$ hacia $D^i e_j$ $\forall i \in \{h, \ldots, k\}$, $\forall j \in \{h, \ldots, k+1\}$ no es una condición suficiente. Para probarlo se puede construir un operador polinomial lineal que conserva el cono $C^X_{h,k}(\sigma)$ (tipo I) y fija e_j $\forall j \in \{h, \ldots, k+1\}$ [1]. De hecho, sea $K : C^k[0,1] \to \mathbb{P}_{k+1}$ un operador lineal tal que

$$D^k(Kf)(x) = D^k f(0) + (D^k f(1) - D^k f(0))x \ \forall x \in [0,1],$$

y verificando las siguientes propiedades:

i) para $i = h, \ldots, k-1$, siempre que $\sigma_i \neq 0$,

- si $\sigma_{i+1} = 0$, entonces $D^i(Kf)(0) = D^i f(0)$ y $D^i(Kf)(1) = D^i f(1)$,
- si $\sigma_i \sigma_{i+1} \neq 0$, entonces $D^i(Kf)(\alpha_i) = D^i f(\alpha_i)$, con $\alpha_i = \frac{1-\sigma_i\sigma_{i+1}}{2}$,

ii) para $i = h-1, \ldots, 0$, siempre que $h > 0$, $D^i(Kf)(0) = D^i f(0)$.

La sucesión constante de operadores lineales $K_n = K$ $\forall n \in \mathbb{N}$, conserva el cono $C^{[0,1]}_{h,k}(\sigma)$ y fija el espacio $\mathbb{P}_{k+1}$. Sin embargo los operadores son polinomiales.

2.2.2. Conos de Tipo II

Teorema 2.2. *Sea $X = [a,b]$, $C^X_{h,k}(\sigma)$ un cono de tipo II con $r \in \Gamma_\sigma$ y $K_n : C^k(X) \to C^k(X)$ una sucesión de operadores lineales. Supongamos que*

$$K_n(C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)) \subset C^X_{r,r}(\sigma)$$

y

$$\|D^r(K_n e_j) - D^r e_j\| \to 0 \ \forall j \in \{h, \ldots, k\}.$$

Entonces

$$\|D^r(K_n f) - D^r f\| \to 0 \ \forall f \in C^k(X).$$

Demostración. Un argumento de linealidad nos permite considerar sólamente $\sigma_r = 1$ (en ese caso $\sigma_{r+2} = 1$ ó 0). También aplicaremos el Teorema 1.3. Sea $X = [a,b]$ y $L = D^r$. De esta forma $C_L(X) = C^r(X)$ y $P = C^X_{r,r}(\sigma)$. Además, sea $C = C^X_{h,r-1}(\sigma) \cap C^X_{r+1,k}(\sigma)$ y $A = C^k(X)$. Así $P \cap A \cap C = C^X_{h,k}(\sigma)$.

---

[1] Muñoz-Delgado, F. J., Ramírez-González, V., Sablonnière, P. *On Conservative Approximation by Linear Polynomial Operators. An Extension of the Bernstein Operator*, Approx. Theory & its Appl., 11, N.1, (1995), 62–71

También, sea $V = < e_h, \ldots, e_k >$. Más aún, definimos $p = \frac{1}{r!}e_r$ y para cada $z \in [a,b]$ definimos $\varphi_z \in V$ tal que

$$\begin{aligned}
&D^k\varphi_z(x) = \sigma_k \ \forall x \in [a,b],\\
&\text{si } k > r+2,\ D^i\varphi_z(a) = \sigma_i(1 + \|D^{i+1}\varphi_z\|) \text{ para } i = k-1, k-2, \ldots, r+3,\\
&D^{r+2}\varphi_z(a) = 1 + \|D^{r+3}\varphi_z\|,\\
&D^r\varphi_z(z) = D^{r+1}\varphi_z(z) = 0,\\
&\text{si } r > h,\ D^i\varphi_z(a) = \sigma_i(1 + \|D^{i+1}\varphi_z\|) \text{ para } i = r-1, r-2, \ldots, h.
\end{aligned}$$

Se tiene que $\varphi_z \in C$ y que φ_z verifica la hipótesis (2.ii) del Teorema 1.3 dado que $\sigma_i D^i\varphi_z \geq 1$ para $h \leq i \leq k$ siempre que $i \neq r$ y $\sigma_i \neq 0$. El resto de las hipótesis del teorema se pueden comprobar con facilidad. □

Como antes se ha hecho, nos ocupamos ahora de la posible convergencia de las derivadas de orden inferior.

Corolario 2.2. *Sea $X = [a,b]$, $C^X_{h,k}(\sigma)$ un cono de tipo II, $l = \min\{\Gamma_\sigma\}$ y $K_n : C^k(X) \to C^k(X)$ una sucesión de operadores lineales. Supongamos que $h < l$ y que la sucesión verifica las siguientes propiedades:*

a) $K_n(C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)) \subset C^X_{h,k}(\sigma)$,

b) $\|D^l(K_n e_j) - D^l e_j\| \to 0 \ \forall j \in \{h, \ldots, k\}$,

c) $D^i(K_n e_j)$ *converge puntualmente a* $D^i e_j \ \forall i \in \{h, \ldots, l-1\}, \forall j \in \{h, \ldots, k\}$.

Entonces

$$\|D^i(K_n f) - D^i f\| \to 0 \ \forall f \in C^k(X) \ \forall i \in \{h, \ldots, l\}.$$

Comentario 2.2. En el Teorema 2.2 y su corolario, la convergencia uniforme de $D^i(K_n e_j)$ hacia $D^i e_j \ \forall i \in \{h, \ldots, l\}$, $\forall j \in \{h, \ldots, k-1\}$ no es una condición suficiente. Para probar ésto se puede construir una sucesión de operadores polinomiales lineales que conservan $C_{h,k}(\sigma)$ (tipo II) y fijan $e_j \ \forall j \in \{h, \ldots, k-1\}$ [1]. Por ejemplo, si fijamos un número natural N, el operador de Bernstein B_N

---

[1] Ramírez-González, V., Muñoz-Delgado, F. J. *Some Results on Linear Polynomial Operators,* Multivariate Approximations: From CAGD to Wavelets, K. Jetter and F. Utreras eds., World Scientific Publishing Co. Inc., (1993), 269–280

en $[0,1]$, representa una sucesión constante de operadores polinomiales lineales que fijan $\mathbb{P}_1$ y conservan el cono $C_{0,2}^{[0,1]}(\sigma)$ con $\sigma = \{1, 0, 1, ...\}$.

Como puede observarse, la Proposición 1.1 es un caso particular del Teorema 2.2 tomando $h = 0, k = 2$ y $\sigma = \{1, 0, 1, ...\}$. También, las Proposiciones 1.2 y 1.3 son casos particulares del Teorema 2.1 tomando respectivamente, $h = 0, k = 2, \sigma = \{1, 0, -1, ...\}$ y $h = 0, k = 1, \sigma = \{1, 1, ...\}$.

Ya existen algunos trabajos directamente relacionados con los anteriores. Se trata de resultados teóricos muy próximos al análisis funcional que se alejan de nuestros objetivos, aunque parten de hipótesis muy similares sobre la conservación de propiedades de forma. Entre ellos, Altomare y Rasa[1], mediante técnicas de envolventes y de fronteras de Choquet, consideran el caso $\sigma = \{1, \ldots, 1, 0, 0, ...\}$, y Brosowski[2], en el ambiente de espacios vectoriales parcialmente ordenados, trabajan el caso más simple $\sigma = \{1, 1, 0, 0, ...\}$.

2.3. Extensión Cualitativa del Teorema de Korovkin

En esta sección establecemos ya ese resultado que extiende al Teorema 1.3 en ciertos aspectos. Como adelantábamos se permite que el proceso de aproximación se realice mediante funciones aproximantes que no son continuas y además se generaliza el papel que allí jugaba el operador L.

Primero de todo intentamos poner de manifiesto estas dos vías principales de extensión mostrando unos ejemplos sobre sucesiones de operadores. Posponemos el estudio de su posible convergencia hasta la sección siguiente.

Ejemplo 2.1. *Sea X el intervalo unidad m-dimensional de $\mathbb{R}^m$, $X = [0,1]^m$ y sea $K_n : C(X) \to \mathbb{R}^X$ una sucesión de operadores lineales definidos mediante la igualdad*

$$K_n f = \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{n-1} \mathcal{X}_{C_{i_1,\ldots,i_m}} M^f_{i_1,\ldots,i_m} \; \forall f \in C(X),$$

[1] Altomare, F., Rasa, I. *Approximation by Positive Operators in Spaces $C^p([a,b])$*, L'Analyse Numérique et la Théorie de L'approximation, 18, N.1, (1989), 1–11

[2] Brosowski, B. *A Korovkin-type Theorem for Differentiable Functions,* Approximation Theory III, E.W. Cheney ed., Academic Press, (1980), 255–260

donde para un conjunto dado A, $\mathcal{X}_A$ denota su función característica,

$$C_{i_1,\ldots,i_m} = \left[\frac{i_1}{n}, \frac{i_1+1}{n}\right] \times \ldots \times \left[\frac{i_m}{n}, \frac{i_m+1}{n}\right] \ \forall i_1,\ldots,i_m \in \{0,\ldots,n-1\}$$

y

$$M^f_{i_1,\ldots,i_m} = \max\{f(x) : x \in C_{i_1,\ldots,i_m}\} \ \forall i_1,\ldots,i_m \in \{0,\ldots,n-1\}.$$

Entonces $K_n f$ converge uniformemente a f para toda función $f \in C(X)$.

Comentario 2.3. Cabe observar que el resultado de Muñoz-Delgado (Teorema 1.3), que ya generalizaba el de Volkov (Teorema 1.2), no es capaz de probar esta convergencia puesto que las funciones aproximantes que aquí aparecen no son continuas.

Ejemplo 2.2 (Operadores de Euler-Taylor). *Sea N un número natural y sea H_N el subconjunto de $C^{N-1}[0,1]$ formado por las funciones para las que existe una partición del intervalo unidad $[0,1]$, $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$, de tal forma que $f \in C^N[x_i, x_{i+1}]$ $\forall i \in \{0,\ldots,m-1\}$. Sea también $T_n : C^N[0,1] \to H_N$ una sucesión de operadores que actúan sobre una función $f \in C^N[0,1]$ mediante la igualdad siguiente:*

$$T_n f(x) = \begin{cases} f(0) + xDf(0) + \ldots + \frac{1}{N!}x^N D^N f(0), & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \\ \left(\sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{s!}(x - \frac{i}{n})^s D^s T_n f(\frac{i}{n})\right) & \\ + \frac{1}{N!}(x - \frac{i}{n})^N D^N f(\frac{i}{n}) & x \in (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], i = 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Sea $J : H_N \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ el operador lineal definido por

$$Jf(x) = \frac{D^N f_-(x) + D^N f_+(x)}{2} \ \forall f \in H_N,$$

donde $D^N f_-$ y $D^N f_+$ denotan las derivadas laterales izquierda y derecha respectivamente de orden N de f.

Entonces $J(T_n f)$ converge uniformemente a $D^N f$ $\forall f \in C^N[0,1]$.

Comentario 2.4. Nótese que en la convergencia uniforme anterior aparece un operador J que hace las veces del operador L del Teorema 1.3. No se trata de un simple operador derivada.

Enunciamos ya el resultado perseguido:

Teorema 2.3. *Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^X$, A un subespacio de $C(X)$ con $A \subset B$ y $L : B \to \mathbb{R}^X$ un operador lineal verificando que $L(A) \subset C(X)$.*

Sea $P = \{f \in B : Lf \geq 0\}$, sea C un cono de A y sea V un subespacio de A verificando las siguientes propiedades:

v1) *existe una función $u \in V$ tal que $Lu = \mathbb{1}$,*

v2) *para todo punto $z \in X$, existe una función $\varphi_z \in V \cap C$ tal que:*

a) $L\varphi_z(z) = 0 < L\varphi_z(x)\ \forall x \in X - \{z\}$,

b) $\forall f \in A,\ \exists \alpha = \alpha(f) > 0 \ / \ \beta \geq \alpha \Rightarrow \beta\varphi_z + f \in C$.

Sea $K_n : A \to B$ una sucesión de operadores lineales verificando:

k1) $K_n(P \cap C) \subset P\ \forall n \in \mathbb{N}$,

k2) *LK_nf converge uniformemente a Lf para toda función $f \in V$.*

Entonces LK_nf converge uniformemente a Lf para toda función $f \in A$.

Demostración. Sea f una función de A. Debido a la continuidad de Lf y a la compacidad de X, existe una constante $M > 0$ tal que

$$-M < Lf(x) - Lf(y) < M\ \forall x, y \in X. \tag{2.1}$$

Más aún, si fijamos un punto $z \in X$ y un número $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta = \delta(z) > 0$ tal que si $x \in B(z,\delta) = \{x \in X : |z - x| < \delta\}$, entonces

$$-\frac{\epsilon}{3} < Lf(x) - Lf(z) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.2}$$

De acuerdo con la suposición (v2), hay una función φ_z que verifica (a) y (b). Sea M_δ el mínimo valor de la función $L\varphi_z$ en $X \setminus B(z,\delta)$. Usando (2.1) y (2.2), se verifica que

$$-\frac{\epsilon}{3} - L\varphi_z(x)\frac{M\beta}{M_\delta} < Lf(x) - Lf(z) < \frac{\epsilon}{3} + L\varphi_z(x)\frac{M\beta}{M_\delta}\ \forall x \in X, \forall \beta > 1. \tag{2.3}$$

De acuerdo con la suposición (b), tomando un valor de β suficientemente grande, se tiene, usando (v1), que

$$\frac{M\beta}{M_\delta}\varphi_z + \frac{\epsilon}{3}u + f - Lf(z)u \in C$$

y

$$\frac{M\beta}{M_\delta}\varphi_z + \frac{\epsilon}{3}u - f + Lf(z)u \in C.$$

Pero, usando (2.3), estas funciones pertenecen a P también. Entonces, de la suposición (k1), para $n \geq 1$, la imagen por K_n de estas funciones son funciones de P y se sigue que

$$-\frac{\epsilon}{3}L(K_n u)(x) - \frac{M\beta}{M_\delta}L(K_n\varphi_z)(x) \leq L(K_n f)(x) - Lf(z)L(K_n u)(x)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3}L(K_n u)(x) + \frac{M\beta}{M_\delta}L(K_n\varphi_z)(x)\forall x \in X,$$

o equivalentemente

$$L(K_n f)(x) \leq Lf(z)L(K_n u)(x) + \frac{\epsilon}{3}L(K_n u)(x)$$

$$+\frac{M\beta}{M_\delta}L(K_n\varphi_z)(x)\ \forall x \in X \tag{2.4a}$$

y

$$L(K_n f)(x) \geq -\frac{\epsilon}{3}L(K_n u)(x) + Lf(z)L(K_n u)(x)$$

$$-\frac{M\beta}{M_\delta}L(K_n\varphi_z)(x)\ \forall x \in X. \tag{2.4b}$$

Usando la suposición (k2) y (v1), hay un número $N(\epsilon, z)$ tal que si $n \geq N(\epsilon, z)$, entonces

$$-\frac{\frac{\epsilon}{9}}{\frac{\epsilon}{3} + |Lf(z)|} + 1 < L(K_n u)(x) < \frac{\frac{\epsilon}{9}}{\frac{\epsilon}{3} + |Lf(z)|} + 1\ \forall x \in X \tag{2.5}$$

y

$$-\frac{\frac{\epsilon}{9}M_\delta}{M\beta} + L\varphi_z(x) < L(K_n\varphi_z)(x) < \frac{\frac{\epsilon}{9}M_\delta}{M\beta} + L\varphi_z(x)\ \forall x \in X. \tag{2.6}$$

Ahora, usando (2.4a), (2.5) y (2.6), si $n \geq N(\epsilon, z)$, se tiene que

$$L(K_n f)(x) < \frac{|Lf(z)|\frac{\epsilon}{9}}{\frac{\epsilon}{3} + |Lf(z)|} + Lf(z) + \frac{\frac{\epsilon}{3}\frac{\epsilon}{9}}{\frac{\epsilon}{3} + |Lf(z)|} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{M\beta}{M_\delta}\left(L\varphi_z(x) + \frac{\frac{\epsilon}{9}M_\delta}{M\beta}\right)$$

$$= \frac{\epsilon}{9} + Lf(z) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{9} + \frac{M\beta}{M_\delta}L\varphi_z(x)$$

$$= \frac{2\epsilon}{9} + \frac{\epsilon}{3} + Lf(z) + \frac{M\beta}{M_\delta}L\varphi_z(x)\ \forall x \in X, \tag{2.7a}$$

y usando (2.4b), (2.5) y (2.6), tenemos que si $n \geq N(\epsilon, z)$, entonces

$$L(K_n f)(x) > -\frac{\frac{\epsilon}{3}\frac{\epsilon}{9}}{\frac{\epsilon}{3} + |Lf(z)|} - \frac{\epsilon}{3} - \frac{|Lf(z)|\frac{\epsilon}{9}}{\frac{\epsilon}{3} + |Lf(z)|} + Lf(z) - \frac{M\beta}{M_\delta}\left(L\varphi_z(x) + \frac{\frac{\epsilon}{9}M_\delta}{M\beta}\right)$$

$$= -\frac{\epsilon}{9} - \frac{\epsilon}{3} + Lf(z) - \frac{\epsilon}{9} - \frac{M\beta}{M_\delta} L\varphi_z(x)$$

$$= -\frac{2\epsilon}{9} - \frac{\epsilon}{3} + Lf(z) - \frac{M\beta}{M_\delta} L\varphi_z(x) \;\forall x \in X. \qquad (2.7b)$$

Por otra parte, debido a la continuidad de $L\varphi_z$, existe $\delta_z > 0$ con $\delta_z < \delta = \delta(z)$ tal que si $x \in B(z, \delta_z)$, entonces

$$L\varphi_z(x) < \frac{\frac{\epsilon}{9} M_\delta}{M\beta}. \qquad (2.8)$$

Como consecuencia, usando (2.7a), (2.7b) y (2.8), si $x \in B(z, \delta_z)$ y $n \geq N(\epsilon, z)$, se obtiene que

$$|L(K_n f)(x) - Lf(z)| < \frac{2\epsilon}{3}. \qquad (2.9)$$

De este modo, por (2.2) y (2.9), hemos probado que para todo $\epsilon > 0$ y $z \in X$, podemos encontrar un número entero positivo $N(\epsilon, z)$ y $\delta_z > 0$ tal que si $n \geq N(\epsilon, z)$ y $x \in B(z, \delta_z)$ entonces

$$|L(K_n f)(x) - Lf(x)| < \epsilon.$$

La familia de subconjuntos abiertos de X $\{B(z, \delta_z) : z \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existe un subconjunto finito J de X tal que $\{B(z, \delta_z) : z \in J\}$ es un subrecubrimiento finito de X. Ahora, si elegimos $N = \max\{N(\epsilon, z) : z \in J\}$, se sigue fácilmente la convergencia uniforme de la sucesión $L(K_n f)$. En efecto, para cualquier punto $x \in X$ existe $z \in J$ de tal forma que $x \in B(z, \delta_z)$. Por consiguiente si $n > N$, se tiene que $|L(K_n f)(x) - Lf(x)| < \epsilon$. $\square$

2.4. Ejemplos

Demostración del Ejemplo 2.1. Basta aplicar el teorema anterior tomando

$$X = [0, 1]^m,$$
$$A = C = C(X),$$
$$B = \mathbb{R}^X,$$
$$L = I,$$
$$V = \langle \mathbb{1}, p_1, \ldots, p_m, p_1^2 + \ldots + p_m^2 \rangle,$$
$$u = \mathbb{1},$$
$$\varphi_z(x) = (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_m - z_m)^2 \;\forall x, z \in X.$$

De aquí, observando que

$$K_n \, \mathbb{1} = \mathbb{1},$$

$$|K_n p_j(x) - p_j(x)| = \left| \frac{i_j + 1}{n} - x_j \right| \; \forall x \in C_{i_1,\ldots,i_m},$$

lo que implica que

$$|K_n p_j(x) - p_j(x)| \leq \frac{1}{n} \; \forall x \in X$$

y

$$|K_n \left(p_1^2 + \ldots + p_m^2\right)(x) - \left(p_1^2 + \ldots + p_m^2\right)(x)|$$

$$\leq \left| \left(\frac{i_1 + 1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{i_m + 1}{1}\right)^2 - \left(x_1^2 + \ldots + x_m^2\right) \right| \leq \frac{m(2n+1)}{n^2} \; \forall x \in X,$$

se obtiene que

$$\|K_n \, \mathbb{1} - \mathbb{1} \,\|_X \to 0,$$

$$\|K_n p_j - p_j\|_X \to 0 \; \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$

y

$$\left\|K_n \left(p_1^2 + \ldots + p_m^2\right) - \left(p_1^2 + \ldots + p_m^2\right)\right\|_X \to 0,$$

que acaba la demostración del ejemplo. □

Demostración del Ejemplo 2.2. Los operadores de Euler-Taylor no son positivos pero verifican que si

$$f \in C^N[0,1], \; f \geq 0, \; Df \geq 0, \ldots, \; D^{N-1}f \geq 0 \text{ y } D^N f \geq 0,$$

entonces

$$T_n f \geq 0, \; D(T_n f) \geq 0, \ldots, \; D^{N-1}(T_n f) \geq 0 \text{ y } J(T_n f) \geq 0.$$

Por otra parte, el operador J verifica que $J(C^N[0,1]) \subset C[0,1]$.

Ahora, para probar el ejemplo vamos a aplicar el Teorema 2.3 tomando

$A = C^N[0,1]$,

$B = H_N$,

$L = J$,

$C = \{f \in C^N[0,1] : f \geq 0, Df \geq 0, \ldots, D^{N-1}f \geq 0\}$,

$V = < e_0, e_1, ..., e_{N+2} >$,

$u(x) = \dfrac{1}{N!} x^N \; \forall x \in [0,1]$,

$\varphi_z \in V$ con $L\varphi_z(x) = (x-z)^2$, $D^i \varphi_z(0) = 1 + \|D^{i+1}\varphi_z\|$, $i = N-1, \ldots, 0$.

De esta forma obtenemos el resultado usando que

$$T_n e_i = e_i \; \forall i \in \{0, \ldots, N\},$$

$$|J(T_n e_{N+1})(x) - J e_{N+1}(x)| \leq \frac{(N+1)!}{n} \; \forall x \in [0,1]$$

y

$$|J(T_n e_{N+2})(x) - J e_{N+2}(x)| \leq \frac{(N+2)!}{n} \; \forall x \in [0,1].$$

Conviene anotar también que la convergencia uniforme de $D^i(T_n f)$ a $D^i f$ para $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ también se obtiene sin más que observar que $D^i(T_n f)(0) = D^i f(0) \; \forall i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. □

Ejemplo 2.3. *Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ y denotemos por $\triangle$ el operador Laplaciano. Sea $K_n : C^2(X) \to \mathbb{R}^X$ una sucesión de operadores lineales verificando que si $f \in C^2(X)$ con $f \geq 0$ y $\triangle f \geq 0$, se verifica que $K_n f \geq 0$.*

Entonces $K_n f$ converge uniformemente a f para toda función $f \in C^2(X)$ si, y sólo si, la convergencia uniforme tiene lugar para $f \in \{\mathbb{1}, p_1, \ldots, p_m, p_1^2 + \ldots + p_m^2\}$.

Demostración. El resultado también es una consecuencia directa del Teorema 2.3. Para comprobarlo basta considerar

$$\begin{aligned}
&A = C^2[0,1],\\
&B = \mathbb{R}^X,\\
&Lf = f,\\
&C = \{f \in A : \triangle f \geq 0\},\\
&V = < \mathbb{1}, p_1, \ldots, p_m, p_1^2 + \ldots + p_m^2 >,\\
&u(x) = 1 \; \forall x \in X,\\
&\varphi_z(x) = (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_m - z_m)^2 \; \forall x, z \in X.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4. *Sea G el conjunto de las funciones $f \in C[0,1]$ para las que existe una constante $M > 0$ tal que $|f[x_0, x_1, x_2]| \leq M \; \forall x_0, x_1, x_2 \in [0,1]$, y* *sea* $K_n : G \to C[0,1]$ *una sucesión de operadores lineales que actúan sobre una función* $f \in G$ *de la siguiente forma:*

$$K_n f(x) = \begin{cases} f(0) + f\left[0, \frac{1}{n}\right] x + f\left[0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] x^2, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \\ K_n f(\frac{i}{n}) + DK_n f(\frac{i}{n})(x - \frac{i}{n}) & \\ +f\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}\right](x - \frac{i}{n})^2, & x \in (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]\ i = 1, \ldots, n-3 \\ \\ K_n f(\frac{n-2}{n}) + DK_n f(\frac{n-2}{n})(x - \frac{n-2}{n}) & \\ +f\left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1\right](x - \frac{n-2}{n})^2, & x \in (\frac{n-2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Entonces $K_n f$ *converge uniformemente a* f *para toda función* $f \in G$.

Lema 2.1.

1) *Los operadores* K_n *no son positivos.*

2) *Sea* $f \in G$. *Si* $f \geq 0$ *y* $f[x_0, x_1, x_2] \geq 0\ \forall x_0, x_1, x_2 \in [0,1]$, *entonces* $K_n f \geq 0$.

Demostración del Lema 2.1.

1) Se deduce fácilmente considerando la función $f(t) = t(1-t)$, para la que se tiene que $K_n f(x) = x(1-x) - \frac{x}{n}$. En la siguiente figura dibujamos la función f, representada por la línea punteada, y $K_n f$ para $n = 15$.

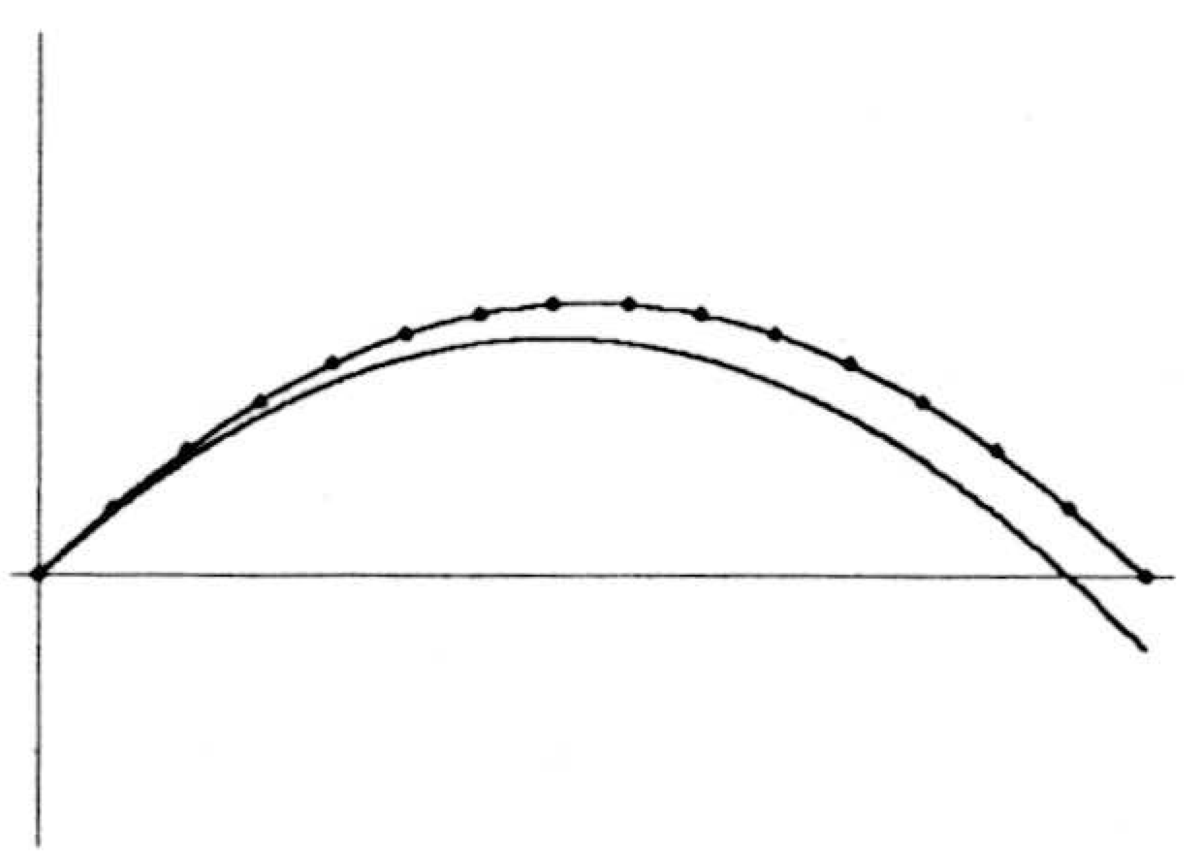

Fig. 1. Gráficas de $f, K_n f$, $n = 15$.

2) Probaremos este enunciado demostrando previamente los dos enunciados siguientes:

a) Si f es una función de G, entonces

$$D(K_nf)\left(\frac{i}{n}\right) = n\left(f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right) \; \forall i \in \{0,1,\dots,n-2\}. \quad (2.10)$$

b) Si además se supone que $f[x_0,x_1,x_2] \geq 0 \; \forall x_0,x_1,x_2 \in [0,1]$, entonces

$$K_nf\Big(\frac{i}{n}\Big) \geq f\Big(\frac{i}{n}\Big) \; \forall i \in \{0,1,\dots,n-2\}. \quad (2.11)$$

Pero antes mostramos la fórmula para las diferencias divididas que vamos a usar aquí:

$$f\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n},\frac{i+2}{n}\right] = \frac{n^2}{2}\left(f\Big(\frac{i+2}{n}\Big) - 2f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) + f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right) \; \forall i \in \{0,\dots,n-2\}. \quad (2.12)$$

Comenzamos probando el apartado a) por inducción. Claramente se tiene que

$$D(K_nf)(0) = n\left(f\Big(\frac{1}{n}\Big) - f(0)\right).$$

Ahora, suponiendo $K_nf(\frac{i}{n}) = n\left(f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})\right)$, tenemos que

$$D(K_nf)\left(\frac{i+1}{n}\right) = D(K_nf)\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$+2\frac{n^2}{2}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right)\left(f\Big(\frac{i+2}{n}\Big) - 2f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) + f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right)$$

$$= n\left(f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{i}{n}\Big) + f\Big(\frac{i+2}{n}\Big) - 2f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) + f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right)$$

$$= n\left(f\Big(\frac{i+2}{n}\Big) - f\Big(\frac{i+1}{n}\Big)\right).$$

También vemos el apartado b) por inducción. Es claro que $K_nf(0) = f(0)$ y si asumimos que $K_nf\Big(\frac{i}{n}\Big) \geq f\Big(\frac{i}{n}\Big)$, tenemos, usando (2.10),

$$K_nf\Big(\frac{i+1}{n}\Big) = K_nf\Big(\frac{i}{n}\Big) + \left(\frac{1}{n}\right)D(K_nf)\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$+\frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(f\Big(\frac{i+2}{n}\Big) - 2f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) + f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right)$$

$$= K_n f\Big(\frac{i}{n}\Big) + \Big(\frac{1}{n}\Big) n \left(f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right)$$

$$+\frac{n^2}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2 \left(f\Big(\frac{i+2}{n}\Big) - 2f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) + f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right)$$

$$= K_n f\Big(\frac{i}{n}\Big) - \frac{1}{2} f\Big(\frac{i}{n}\Big) + \frac{1}{2} f\Big(\frac{i+2}{n}\Big) \geq f\Big(\frac{i}{n}\Big) - \frac{1}{2} f\Big(\frac{i}{n}\Big) + \frac{1}{2} f\Big(\frac{i+2}{n}\Big).$$

Pero $f[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}] \geq 0$ implica que

$$\frac{1}{2}\left(f\Big(\frac{i}{n}\Big) + f\Big(\frac{i+2}{n}\Big)\right) \geq f\Big(\frac{i+1}{n}\Big),$$

lo que prueba que $K_n f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) \geq f\Big(\frac{i+1}{n}\Big)$.

Empezamos ya la demostración del apartado 2) del lema suponiendo primero que $x \in \big[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\big]$ para algún $i = 0, \ldots, n-3$. Entonces, las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) nos dicen que

$$K_n f(x) \geq f\Big(\frac{i}{n}\Big) + n\left(f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right)\Big(x - \frac{i}{n}\Big) + \Big(x - \frac{i}{n}\Big)^2 f\Big[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}\Big].$$

Usando de nuevo la condición de convexidad de f, tenemos que

$$f\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}\right] \geq 0$$

y

$$f\Big(\frac{i}{n}\Big) + n\left(f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{i}{n}\Big)\right)\left(x - \frac{i}{n}\right) \geq f(x).$$

Ésto prueba que $K_n f(x) \geq 0$.

Para completar el apartado c) suponemos ahora que $x \in \big[\frac{n-2}{n}, 1\big]$. En este caso podemos escribir que

$$K_n f(x) = K_n^1 f(x) + K_n^2 f(x),$$

donde

$$K_n^1 f(x) = K_n f\Big(\frac{n-2}{n}\Big) + \left(x - \frac{n-2}{n}\right) DK_n f\Big(\frac{n-2}{n}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\left(x - \frac{n-2}{n}\right)^2 f\left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1\right]$$

y

$$K_n^2 f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{n-2}{n}\right)^2 f\left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Ahora, usando (2.12) y (2.10),

$$K_n^1 f(1) = K_n f\Big(\frac{n-2}{n}\Big) + 2\left(f\Big(\frac{n-1}{n}\Big) - f\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\right)$$

$$+\left(f(1) - 2f\Big(\frac{n-1}{n}\Big) + f\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\right) = K_n f\Big(\frac{n-2}{n}\Big) + f(1) - f\Big(\frac{n-2}{n}\Big).$$

Por otra parte $D^2(K_n^1 f)(x) = f\left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1\right]$. Como consecuencia, si definimos

$$g(x) = B_2 f(x) + K_n f\Big(\frac{n-2}{n}\Big) - f\Big(\frac{n-2}{n}\Big),$$

donde $B_2 : C[\frac{n-2}{n}, 1] \to \mathbb{P}_2$ es el operador clásico de Bernstein en $[\frac{n-2}{n}, 1]$ y si usamos que $g(\frac{n-2}{n}) = K_n^1 f(\frac{n-2}{n})$, $g(1) = K_n^1 f(1)$ y $D^2 g(x) = D^2(K_n^1 f)(x)$, se obtiene que $K_n^1 f(x) = g(x)$. Finalmente $g(x) = K_n^1 f(x) \geq 0$ dada la positividad del operador de Bernstein y la ecuación (2.11) utilizada con $i = n-2$. Además $K_n^2 f(x) \geq 0$ dado que $f[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1] \geq 0$. Ésto prueba que $K_n f(x) = K_n^1 f(x) + K_n^2 f(x) \geq 0$. □

Demostración del Ejemplo 2.4. La demostración de este ejemplo la conseguiremos de nuevo aplicando el Teorema 2.3 con

$$\begin{aligned}
&A = G,\\
&B = C[0,1],\\
&Lf = f,\\
&C = \{f \in A : f[x_0, x_1, x_2] \geq 0 \ \forall x_0, x_1, x_2 \in [0,1]\},\\
&V = < e_0, e_1, e_2 >,\\
&u(x) = 1 \ \forall x \in [0,1],\\
&\varphi_z(x) = (x-z)^2 \ \forall x, z \in [0,1].
\end{aligned}$$

Nótese que ya hemos comprobado la hipótesis (k1) del Teorema 2.3. Además la hipótesis (v2.b) se verifica porque si $f \in G$, entonces sus diferencias divididas de segundo orden están acotadas. Finalmente $K_n e_i$ converge uniformemente a e_i para $i = 0, 1, 2$. No en vano, $K_n e_0 = e_0, K_n e_1 = e_1$ y $K_n e_2(x) = \frac{x}{n} + e_2(x) \ \forall x \in [0,1]$ como fácilmente se puede probar por recurrencia. □

Capítulo 3

Resultados Cuantitativos

3.1. Introducción

Dedicamos este capítulo al establecimiento de resultados que estimen el error de convergencia en todos los procesos que han aparecido en el capítulo previo.

Ya en la introducción decíamos que el punto de partida para lo anterior es la primera versión cuantitativa general del teorema de Korovkin (Teorema 1.1), ésto es, el resultado de Shisha y Mond (Teorema 1.4). Como consecuencia directa suya tenemos la siguiente estimación para sucesiones de operadores lineales que son k-convexos para un cierto $k \in \mathbb{N}$.

Salvo que se diga lo contrario, consideraremos en la mayor parte del capítulo que $X = [a, b]$ y que X' es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ verificando que $X' \subset X$.

Teorema 3.1. *Sea $k \geq 0$ y $K_n : C^k(X) \to C^k(X')$ una sucesión de operadores lineales tales que $K_n(H_k^X \cap C^k(X)) \subset H_k^{X'}$.*

Entonces para $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$,

$$\left|D^k f(x) - D^k K_n f(x)\right| \leq \frac{1}{k!}\left|D^k f(x)\right|\left|D^k e_k(x) - D^k K_n e_k(x)\right|$$

$$+\left(\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x) + \frac{\beta_n^2(x)}{\delta_n^2}\right)\omega(D^k f, \delta_n),$$

donde

$$\beta_n^2(x) = D^k K_n \left(\frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k \right)(x).$$

(Nótese que $\beta_n^2(x)$ es una cantidad positiva dada la hipótesis que verifica el operador K_n y dado que $D^k \left(\frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k \right) \geq 0$).

Demostración. Sea $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$. Si consideramos un punto $t \in X$ tal que $|t - x| > \delta_n$, entonces

$$\left| D^k f(t) - D^k f(x) \right| \leq \omega \left(D^k f, \frac{|t-x| \delta_n}{\delta_n} \right) \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n} \right) \omega(D^k f, \delta_n)$$

$$\leq \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta_n^2} \right) \omega(D^k f, \delta_n).$$

Como evidentemente se tiene que si $|t - x| \leq \delta_n$, entonces

$$\left| D^k f(t) - D^k f(x) \right| \leq \omega(D^k f, \delta_n),$$

se deduce que

$$\left| D^k f(t) - D^k f(x) \right| \leq \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta_n^2} \right) \omega(D^k f, \delta_n) \ \forall t \in X.$$

Si definimos la función

$$g_x = \frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k,$$

entonces de la ecuación anterior se obtiene

$$D^k \left(f - D^k f(x) \frac{1}{k!} e_k + \omega(D^k f, \delta_n) \frac{1}{k!} e_k + \frac{\omega(D^k f, \delta_n)}{\delta_n^2} g_x \right) \geq 0$$

y

$$D^k \left(-f + D^k f(x) \frac{1}{k!} e_k + \omega(D^k f, \delta_n) \frac{1}{k!} e_k + \frac{\omega(D^k f, \delta_n)}{\delta_n^2} g_x \right) \geq 0.$$

Si usamos ahora la hipótesis sobre K_n y la definición de $\beta_n^2(x)$, tenemos que evaluando en el punto x

$$D^k K_n f(x) - D^k f(x) \frac{1}{k!} D^k K_n e_k(x) + \omega(D^k f, \delta_n) \frac{1}{k!} D^k K_n e_k(x)$$

$$+\frac{\omega(D^k f, \delta_n)}{\delta_n^2}\beta_n^2(x) \geq 0$$

y

$$-D^k K_n f(x) + D^k f(x)\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x) + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x)$$
$$+\frac{\omega(D^k f, \delta_n)}{\delta_n^2}\beta_n^2(x) \geq 0,$$

o equivalentemente,

$$\left|D^k K_n f(x) - D^k f(x)\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x)\right| \leq \omega(D^k f, \delta_n)\left(\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x) + \frac{\beta_n^2(x)}{\delta_n^2}\right).$$

Si sumamos la ecuación anterior a esta otra

$$\left|D^k f(x)\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x) - D^k f(x)\right| = \frac{1}{k!}\left|D^k f(x)\right|\left|D^k e_k(x) - D^k K_n e_k(x)\right|$$

la demostración está acabada. □

Como una primera extensión del que acabamos de mostrar, en la introducción ya establecimos lo que podía ser un resultado cuantitativo inicial sobre aproximación conservativa: nos referimos al trabajo de Knoop y Pottinger (Teorema 1.6) para operadores casi convexos.

Sobre la base de estos resultados anteriores trabajaremos, primero para generar versiones cuantitativas sobre aproximación conservativa en C^k, y segundo para estimar la velocidad de convergencia en aquellos procesos más generales de aproximación como los que recoge el Teorema 2.3. A lo anterior, enriquecido con ejemplos, alguno de ellos de destacada importancia, dedicamos las siguientes secciones.

3.2. Aproximación Conservativa en $\mathbf{C^k}$

El objetivo fundamental de esta sección es estimar la velocidad de convergencia de aquellos procesos de aproximación conservativa que hemos estudiado en el espacio C^k.

Primero de todo, en la sección 3.2.1 dirigimos nuestra atención en la dirección de establecer versiones cuantitativas del Teorema 2.1. Más adelante aplicamos el resultado obtenido al estudio de la destacada sucesión de operadores de Meyer-König y Zeller. Dedicamos toda la sección 3.2.2 a este ejemplo.

A continuación escribimos un desarrollo análogo al mostrado tomando ahora como punto de partida el enunciado cualitativo visto en el Teorema 2.2, y establecemos por último refinamientos de todo lo anterior ante la eventual mayor regularidad de las funciones a aproximar.

3.2.1. Conos Arbitrarios

El Teorema 1.6 de Knoop y Pottinger podría representar un primer acercamiento a la estimación de los errores de los procesos de aproximación que se recogen en el Teorema 2.1, aunque todavía lejos de funcionar con sus mismas hipótesis generales.

Iniciamos esta sección viendo que, de hecho, lo que estos autores prueban es consecuencia directa del Teorema 3.1 que se acaba de establecer. A continuación extendemos su resultado eliminando la suposición que se asume sobre los espacios de polinomios, para llegar a la versión cuantitativa que perseguimos.

Empezamos, según lo escrito, con una generalización muy simple del Teorema 1.6, donde permitimos cualquier signo en las derivadas involucradas en las propiedades conservativas de los operadores, y con una proposición, que muestran la mencionada debilidad, en cierto sentido, del resultado de Knoop y Pottinger. Ambos resultados pueden leerse en un trabajo de Muñoz-Delgado y Cárdenas-Morales.[1]

Teorema 3.2. *Sea k un entero positivo y $K_n : C^k(X) \to C^k(X')$ una sucesión de operadores lineales tales que $K_n(\mathbb{P}_{k-1}) \subset \mathbb{P}_{k-1}$. Supongamos que existe un cono $C^X_{h,k}(\sigma)$ tal que*

$$K_n\left(C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)\right) \subset C^{X'}_{k,k}(\sigma).$$

Entonces se obtiene la misma tesis que en el Teorema 3.1, es decir, para $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$,

$$\left|D^k f(x) - D^k K_n f(x)\right| \leq \frac{1}{k!}\left|D^k f(x)\right|\left|D^k e_k(x) - D^k K_n e_k(x)\right|$$

[1] Muñoz-Delgado, F. J., Cárdenas-Morales, D. *Korovkin Type Results for Shape Preserving Operators,* Curves and Surfaces with Applications in CAGD, A. Le Méhauté, C. Rabut and L. L. Schumaker eds., Vanderbilt University Press, Nashville & London, (1997), 303–310

$$+\left(\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x) + \frac{\beta_n^2(x)}{\delta_n^2}\right)\omega(D^k f, \delta_n),$$

donde

$$\beta_n^2(x) = D^k K_n\left(\frac{2}{(k+2)!}e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!}xe_{k+1} + \frac{1}{k!}x^2 e_k\right)(x).$$

Demostración. Es una consecuencia directa de la proposición que mostramos a continuación, que prueba que las hipótesis de este teorema y por consiguiente las del Teorema 1.6 implican que

$$K_n\left(C^X_{k,k}(\sigma) \cap C^k(X)\right) \subset C^{X'}_{k,k}(\sigma). \tag{3.1}$$

De esta manera bastaría entonces tener en cuenta únicamente el Teorema 3.1 para probar ambos resultados. □

Comentario 3.1. Cabría observar, no obstante, que quizá en algún caso práctico podría ser más cómodo, o más fácil, verificar las hipótesis del Teorema 3.2 que las del Teorema 3.1.

Proposition 3.1. *Las hipótesis del Teorema 3.2 implican (3.1).*

Demostración. Sea $f \in C^X_{k,k}(\sigma) \cap C^k(X)$. Si tomamos la función $g \in \mathbb{P}_{k-1}$ verificando

$D^{k-1}g(x) = \sigma_{k-1}\|D^{k-1}f\| \ \forall x \in X,$

$D^i g(a) = \sigma_i((b-a)\|D^{i+1}g\| + \|D^i f\|)$ para $i = k-2, k-3, \ldots, h,$

se tiene que para $i = k-2, k-3, \ldots, h,$

$$\sigma_i D^i(f+g)(x) = \sigma_i D^i f(x) + \sigma_i \int_a^x D^{i+1}g(z)dz$$

$$+\sigma_i^2\left((b-a)\|D^{i+1}g\| + \|D^i f\|\right) \geq 0.$$

Por consiguiente $f + g \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)$. Si ahora usamos la hipótesis conservativa de los operadores K_n, tenemos

$$K_n(f+g) = K_n f + K_n g \in C^{X'}_{k,k}(\sigma) \cap C^k(X'),$$

y dado que $K_n(\mathbb{P}_{k-1}) \subset \mathbb{P}_{k-1}$,

$$0 \leq \sigma_k D^k K_n(f+g) = \sigma_k D^k K_n f,$$

luego $K_n f \in C^{X'}_{k,k}(\sigma)$. □

Vemos ya ese enunciado más general perseguido.

Teorema 3.3. [1],[2] *Sea k un entero positivo y $K_n : C^k(X) \to C^k(X')$ una sucesión de operadores lineales. Supongamos que existe un cono $C^X_{h,k}(\sigma)$ tal que*

$$K_n \left(C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)\right) \subset C^{X'}_{k,k}(\sigma).$$

(por linealidad podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma_k = 1$)

Entonces para $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$,

$$\left|D^k f(x) - D^k K_n f(x)\right| \leq \frac{1}{k!}\left|D^k f(x)\right|\left|D^k e_k(x) - D^k K_n e_k(x)\right|$$

$$+\frac{1}{k!}\omega(D^k f, \delta_n) D^k K_n e_k(x) + N\beta_n^2(x),$$

donde

a) *$\beta_n^2(x) = D^k K_n g_x(x)$, siendo g_x la única función del espacio $\langle e_h, \dots, e_{k+2}\rangle$ que verifica*

$D^k g_x(t) = (t-x)^2 \ \forall t \in X$,

$D^i g_x(a) = \sigma_i \left(1 + (b-a)\left\|D^{i+1} g_x\right\|\right)$ para $i = k-1, k-2, \dots, h$ (siempre que $h < k$).

b)

$$N = \max\left\{\frac{\omega(D^k f, \delta_n)}{\delta_n^2}, \max_{\substack{h \leq i < k \\ \sigma_i \neq 0}} \left\{\|D^i f\| + \frac{c^{k-i}\left(|D^k f(x)| + \omega(D^k f, \delta_n)\right)}{(k-i)!}\right\}\right\}$$

con $c = \max\{|a|, |b|\}$.

Comentario 3.2. Nótese que N depende tanto de n como de f y que la cantidad $D^k K_n g_x(x)$ no es negativa dado que

$$g_x \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)$$

---

[1] Cárdenas-Morales, D., Muñoz-Delgado, F. J. *A Korovkin-Type Result in C^k. An Application to the M_n Operators,* (enviado)

[2] Cárdenas-Morales, D., Muñoz-Delgado, F. J. *Quantitative Korovkin-type Results on Conservative Approximation,* (enviado)

por definición.

Demostración del Teorema 3.3. Sea $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$. Siguiendo la demostración del Teorema 3.1 tenemos que

$$\left|D^k f(t) - D^k f(x)\right| \leq \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta_n^2}\right) \omega(D^k f, \delta_n) \ \forall t \in X.$$

De esta ecuación se deduce que

$$D^k \left(f - D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_k}{k!} + \frac{\omega(D^k f, \delta_n)}{\delta_n^2} g_x\right) \geq 0$$

y

$$D^k \left(-f + D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_k}{k!} + \frac{\omega(D^k f, \delta_n)}{\delta_n^2} g_x\right) \geq 0,$$

y atendiendo a la definición de N, también

$$D^k \left(f - D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_k}{k!} + N g_x\right) \geq 0$$

y

$$D^k \left(-f + D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_k}{k!} + N g_x\right) \geq 0.$$

Además, si $h < k$, entonces para $h \leq i < k$ con $\sigma_i \neq 0$, dado que

$$\sigma_i D^i g_x(t) = \sigma_i \int_a^t D^{i+1} g_x(z) dz + \sigma_i D^i g_x(a)$$

$$= \sigma_i \int_a^t D^{i+1} g_x(z) dz + 1 + (b-a)\left\|D^{i+1} g_x\right\| \geq 1,$$

tenemos que

$$\sigma_i D^i \left(f - D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_k}{k!} + N g_x\right)$$

$$= \sigma_i D^i f - \sigma_i D^k f(x)\frac{e_{k-i}}{(k-i)!} + \sigma_i \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_{k-i}}{(k-i)!} + N \sigma_i D^i g_x$$

$$\geq - \left\|D^i f\right\| - \frac{c^{k-i}}{(k-i)!}\left|D^k f(x)\right| - \frac{c^{k-i}}{(k-i)!}\omega(D^k f, \delta_n) + N \geq 0$$

y

$$\sigma_i D^i \left(-f + D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_k}{k!} + N g_x\right)$$

$$= -\sigma_i D^i f + \sigma_i D^k f(x)\frac{e_{k-i}}{(k-i)!} + \sigma_i \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_{k-i}}{(k-i)!} + N\sigma_i D^i g_x$$

$$\geq - \left\|D^i f\right\| - \frac{c^{k-i}}{(k-i)!}\left|D^k f(x)\right| - \frac{c^{k-i}}{(k-i)!}\omega(D^k f, \delta_n) + N \geq 0.$$

En cualquier caso se verifica que

$$f - D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_k}{k!} + N g_x \in C^X_{h,k} \cap C^k(X)$$

y

$$-f + D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \omega(D^k f, \delta_n)\frac{e_k}{k!} + N g_x \in C^X_{h,k} \cap C^k(X).$$

Usando la hipótesis que se tiene sobre K_n y la definición de $\beta_n^2(x)$ tenemos que evaluando en el punto x,

$$\left|D^k K_n f(x) - \frac{1}{k!}D^k f(x) D^k K_n e_k(x)\right| \leq \omega(D^k f, \delta_n)\frac{D^k K_n e_k(x)}{k!} + N D^k K_n g_x(x)$$

$$= \omega(D^k f, \delta_n)\frac{D^k K_n e_k(x)}{k!} + N\beta_n^2(x). \tag{3.2}$$

De aquí la demostración se concluye como se hizo en el Teorema 3.1. □

Comentario 3.3. Nótese que la estimación que acabamos de establecer es similar a la del Teorema 3.1. El sumando

$$\frac{\beta_n^2(x)}{\delta_n^2}\omega(D^k f, \delta_n)$$

donde $\beta_n^2(x) = D^k K_n g_x(x)$, siendo g_x la única función de $\langle e_k, e_{k+1}, e_{k+2}\rangle$ que verifica $D^k g_x(t) = (t-x)^2 \; \forall x, t \in X$, ha sido reemplazado por

$$\max\left\{\frac{\beta_n^2(x)}{\delta_n^2}\omega(D^k f, \delta_n), \beta_n^2(x) \max_{\substack{h \leq i < k \\ \sigma_i \neq 0}} \left\{\|D^i f\| + \frac{c^{k-i}(|D^k f(x)| + \omega(D^k f, \delta_n))}{(k-i)!}\right\}\right\},$$

donde ahora $\beta_n^2(x)$ es como en a) en el teorema anterior.

Probamos a continuación un corolario del teorema anterior, que también comentamos, poniendo de manifiesto que ya en el Teorema 3.3 estamos prácticamente ante una versión cuantitativa del Teorema 2.1.

Corolario 3.1. [1] *En las mismas condiciones del teorema anterior, con los mismos valores para c y para g_x, si $f \in C^k(X)$, entonces para cada $n \in I\!N$ se verifica que*

$$\left\|D^k f - D^k K_n f\right\| \leq \frac{1}{k!}\left\|D^k f\right\|\left\|D^k e_k - D^k K_n e_k\right\|$$

$$+\frac{1}{k!}\omega(D^k f, \mu_n)\left\|D^k K_n e_k\right\|$$

$$+\max\left\{\omega(D^k f, \mu_n), \mu_n^2 \max_{\substack{h\leq i<k \\ \sigma_i\neq 0}}\left\{\|D^i f\| + \frac{c^{k-i}\left(\|D^k f\| + \omega(D^k f, \mu_n)\right)}{(k-i)!}\right\}\right\},$$

donde

$$\mu_n^2 = \sup_{x\in X}\left\{D^k K_n g_x(x)\right\}.$$

Demostración. En la demostración del Teorema 3.3, de la ecuación (3.2) se deduce que

$$\left|D^k K_n f(x) - \frac{1}{k!}D^k f(x) D^k K_n e_k(x)\right| \leq \omega(D^k f, \delta_n)\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x) + N\mu_n^2.$$

Ahora, si $\mu_n > 0$, tomamos $\delta_n = \mu_n$. Entonces

$$\left|D^k K_n f(x) - \frac{1}{k!}D^k f(x) D^k K_n e_k(x)\right| \leq \frac{1}{k!}\omega(D^k f, \mu_n)\|D^k K_n e_k\|$$

$$+\max\left\{\omega(D^k f, \mu_n), \mu_n^2 \max_{\substack{h\leq i<k \\ \sigma_i\neq 0}}\left\{\|D^i f\| + \frac{c^{k-i}\left(\|D^k f\| + \omega(D^k f, \mu_n)\right)}{(k-i)!}\right\}\right\},$$

que sumado a la ecuación

$$\left|D^k f(x)\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x) - D^k f(x)\right| \leq \frac{1}{k!}\left\|D^k f\right\|\left\|D^k e_k - D^k K_n e_k\right\| \tag{3.3}$$

permite obtener el resultado.

Si $\mu_n = 0$, entonces

$$\left|D^k K_n f(x) - \frac{1}{k!}D^k f(x) D^k K_n e_k(x)\right| \leq \omega(D^k f, \delta_n)\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x).$$

---

[1] Cárdenas-Morales, D., Muñoz-Delgado, F. J. *Quantitative Korovkin-type Results on Conservative Approximation,* (enviado)

Como δ_n es arbitrario para cada $n \in \mathbb{N}$, haciéndolo tender hacia cero, se da la igualdad siguiente:

$$D^k K_n f(x) = \frac{1}{k!} D^k f(x) D^k K_n e_k(x),$$

de donde, usando (3.3), aparece

$$\left| D^k K_n f(x) - D^k f(x) \right| \leq \frac{1}{k!} \left\| D^k f \right\| \left\| D^k e_k - D^k K_n e_k \right\|,$$

que concluye la demostración. □

Comentario 3.4. Se debe observar que por la definición de g_x, tomando $[a, b] = [0, 1]$ para simplificar los cálculos, podemos escribir que

$$g_x = \sum_{j=h}^{k+2} a_j(x) e_j,$$

donde

$$a_{k+2}(x) = \frac{2}{(k+2)!},$$
$$a_{k+1}(x) = -\frac{2}{(k+1)!} x,$$
$$a_k(x) = \frac{1}{k!} x^2,$$

y si $h < k$, de manera recurrente,

$$a_j(x) = \frac{\sigma_j (1 + \|D^{j+1} g_x\|)}{j!} \text{ para } j = k-1, k-2, \dots, h.$$

Como además $D^k g_x(x) = 0$, se tiene que

$$D^k K_n g_x(x) = D^k \left(K_n g_x - g_x \right)(x) = D^k \left(\sum_{j=h}^{k+2} a_j(x) \left(K_n e_j - e_j \right) \right)(x)$$

$$\leq \sum_{j=h}^{k+2} a_j(x) \| D^k K_n e_j - D^k e_j \| \leq \sum_{j=h}^{k+2} \|a_j\| \| D^k K_n e_j - D^k e_j \|.$$

Por tanto, si

$$\|D^k(K_n e_j) - D^k e_j\| \to 0 \text{ para } j = h, \dots, k+2,$$

entonces $\mu_n \to 0$, y evidentemente se tiene que

$$\|D^k(K_n f) - D^k f\| \to 0 \ \forall f \in C^k(X).$$

Además tenemos una estimación de la velocidad de convergencia en base a las velocidades de convergencia de

$$\|D^k(K_n e_j) - D^k e_j\| \text{ para } j = h, \dots, k+2.$$

3.2.2. Los Operadores de Meyer-König y Zeller

En esta sección, como ya se adelantó, se utilizan los resultados cuantitativos obtenidos para estudiar una destacada sucesión de operadores.

En 1960 Meyer-König and Zeller[1] introdujeron para cada $n \in \mathbb{N}$ los operadores $M_n : C[0,1] \to C[0,b]$, $0 < b < 1$, definidos como:

$$M_n f(x) = (1-x)^n \sum_{p=0}^{\infty} f\left(\frac{p}{p+n}\right) \binom{n+p-1}{p} x^p.$$

Más tarde, Cheney y Sharma[2], teniendo en cuenta un caso particular de otra familia de operadores introducidos por ellos, propusieron una ligera modificación de los operadores de Meyer-König y Zeller que hacía que estos fijasen las funciones lineales. Tras ella, quedaron definidos de la siguiente forma:

$$M_n f(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{p=0}^{\infty} f\left(\frac{p}{p+n}\right) \binom{n+p}{p} x^p.$$

Además de conocérseles por el nombre de sus inventores, también se les llama series de potencias de Bernstein dada la analogía existente entre estas series y aquellas que definen a los polinomios de Bernstein. No en vano, estos operadores están formalmente relacionados con la distribución de Pascal en la teoría de probabilidad y con la matriz de Taylor en la teoría de sumabilidad, de forma muy parecida a como los polinomios de Bernstein están conectados con la distribución de Bernouilli y con la matriz de Euler-Knopp en las respectivas teorías. Esta analogía ha hecho que muchas investigaciones se centrasen en el estudio de aquellas propiedades de los operadores de Bernstein que se mantienen para los operadores de Meyer-König y Zeller.

Mostramos a continuación algunos resultados sobre estos operadores que están directamente conectados con lo que nos ocupa.

---

[1] MEYER-KÖNIG, W., ZELLER, K. *Bernsteinsche Potenzreihen,* Studia Math., 19,(1960), 89–94

[2] CHENEY, E. W., SHARMA, A. *Bernstein Power Series,* Canad. J. Math., 16, (1964), 241–252

Por lo que respecta a las propiedades de forma, Lupas[1] prueba que los M_n operadores preservan la i-convexidad para $i = 0, 1, 2$ y aunque no ocurre lo mismo con la 3-convexidad, sí preservan de manera conjunta la 2-convexidad y la 3-convexidad, es decir

$$M_n(C_{i,i}^{[0,1]}(\sigma)) \subset C_{i,i}^{[0,b]}(\sigma) \ \forall i \in \{0,1,2\}$$

y

$$M_n(C_{2,3}^{[0,1]}(\sigma)) \subset C_{2,3}^{[0,b]}(\sigma) \ con \ \sigma_2\sigma_3 = 1.$$

Además, como antes hemos mencionado, fijan los polinomios de grado menor o igual que 1, es decir,

$$M_n(f) = f \ \forall f \in \mathbb{P}_1,$$

y verifican

$$M_n e_2(x) = x^2 + x(1-x)^{n+1} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{p} \frac{x^k}{n+p+1} \leq x^2 + \frac{x(1-x)}{n+1},$$

lo que permite garantizar, usando el teorema de Korovkin, que para cualquier función $f \in C[0,1]$ se tiene que $M_n f$ converge uniformemente en $[0,b]$ a la función f.

Desde un punto de vista cuantitativo se han conseguido varias estimaciones. Lupas y Müller[2] comenzaron probaron que si $f \in C[0,1]$ y $x \in [0,b]$ entonces

$$|M_n f(x) - f(x)| \leq \frac{31}{27}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

y utilizando el segundo módulo de continuidad

$$|M_n f(x) - f(x)| \leq \frac{19}{9}\omega_2\left(f, \frac{1}{E(\sqrt{n})}\right).$$

---

[1] Lupas, A. *Some Properties of the Linear Positive Operators (I)*, Mathematica, Cluj, 9, (1967), 77–83

[2] Lupas, A., Müller, M. W. *Approximation Properties of the M_n-Operators*, Aequationes math., 5, (1970), 19–37

Hubo una mejora posterior de Sikkema[1] , que bajo las mismas condiciones estableció la estimación

$$|M_n f(x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{4}{27}\left(1 - \frac{n^2-5}{4(n^2-1)^2}\right)\right)\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Además, Lupas y Müller[2] también probaron que si $f \in C^1[0,1]$ entonces

$$|M_n f(x) - f(x)| \leq \frac{2(2+3\sqrt{3})}{27\sqrt{n}}\omega\left(Df, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

y que se podía mejorar la velocidad de convergencia si se exigía aún más regularidad a la función que se pretendía aproximar. En concreto establecieron que si $f \in C[0,1]$ y si en un punto $x \in [0,b]$ f posee segunda derivada finita $D^2 f(x)$, entonces

$$|M_n f(x) - f(x)| \leq \frac{x(1-x)^2}{2n} D^2 f(x) + o(n^{-1}).$$

Todavía afinó más Sikkema[1] estableciendo que si además en el punto $x \in [0,b]$ f posee derivada cuarta finita $D^4 f(x)$, entonces

$$|M_n f(x) - f(x)| \leq \frac{x(1-x)^2}{2n} D^2 f(x) + \frac{\frac{1}{2}x(1-x)^2(2x-1)D^2 f(x)}{n^2}$$

$$+\frac{\frac{1}{6}x(1-x)^3(1-5x)D^3 f(x) + \frac{1}{8}x^2(1-x)^4 D^4 f(x)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

donde incluso se puede reemplazar $o(n^{-2})$ por $O(n^{-3})$ si f tiene derivada sexta finita en el punto x.

Por lo que atañe a las derivadas, Knoop y Pottinger[3], haciendo uso del resultado suyo que nosotros ya hemos presentado, y utilizando fuertemente que

[1] Sikkema, P. C. *On the Asymptotic Approximation with Operators of Meyer-König and Zeller,* Indagationes math., 32, (1970), 428–440

[2] Lupas, A., Müller, M. W. *Approximation Properties of the M_n-Operators,* Aequationes math., 5, (1970), 19–37

[3] Knoop, H. B., Pottinger, P. *Ein Satz vom Korovkin-Typ für C^k-Räume,* Math. Z., 148, (1976), 23–32

los operadores preservan la 1-convexidad y la 2-convexidad y que no aumentan el grado de las funciones de $\mathbb{P}_1$, prueban las siguientes estimaciones:

$$|DM_nf(x) - Df(x)| \leq 2\omega\left(Df, \left(\frac{x(1-x)(2-x)}{n-1} + \frac{(1-x)^2}{3(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$|D^2M_nf(x) - D^2f(x)| \leq \frac{2(n+7)}{(n-1)(n-2)}|D^2f(x)|$$

$$+2\frac{n}{n-1}\omega\left(D^2f, \left(\frac{n}{n-1}\left(\frac{x(1-x)(2-x)}{n-2} + \frac{4}{3}\frac{(1-x)^2}{(n-2)(n-3)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Es en este punto cuando podemos profundizar un poco más en el estudio de estos operadores probando estimaciones del tipo anterior para la derivada tercera. Evidentemente el resultado de Knoop y Pottinger no es aplicable para este caso puesto que a pesar de que se tiene la casi convexidad de orden 2, también se tiene

$$M_n(\mathbb{P}_2) \not\subset \mathbb{P}_2.$$

No obstante sí podemos aplicar nuestro resultado del Teorema 3.3 y obtener para $f \in C^3[0,1]$ y $x \in [0,b]$, que

$$\begin{aligned}\left|D^3M_nf(x) - D^3f(x)\right| &\leq \frac{1}{3!}\left|D^3f(x)\right| \cdot \left|D^3M_ne_3(x) - D^3e_3(x)\right| \\ &+\frac{1}{3!}D^3M_ne_3(x)\omega(D^3f, \beta_n(x)) \qquad (3.4)\\ + \max&\left\{\omega(D^3f, \beta_n(x)), \beta_n^2(x)\left(\left\|D^2f\right\| + \left|D^3f(x)\right| + \omega\big(D^3f, \beta_n(x)\big)\right)\right\},\end{aligned}$$

donde

$$\beta_n^2(x) = D^3M_ng_x(x),$$

siendo g_x la única función del espacio $\langle e_2, e_3, e_4, e_5\rangle$ que verifica $D^3g_x(t) = (t-x)^2$ y $D^2g_x(0) = 1 + \left\|D^3g_x\right\|$, es decir,

$$\beta_n^2(x) = D^3M_n\left(\frac{e_5}{60} - x\frac{e_4}{12} + x^2\frac{e_3}{6} + \big(1 + \max\{(1-x)^2, x^2\}\big)\frac{e_2}{2}\right)(x). \qquad (3.5)$$

Ciertamente, basta considerar en aquel teorema $X = [0,1]$, $X' = [0,b]$, $K_n = M_n$, $k = 3$ y hacer $\delta_n = \beta_n(x)$.

Evidentemente buscamos un resultado más explícito que pasa por estimar cada uno de los sumandos que aparecen en la ecuación (3.4) y para ello necesitamos disponer de una cómoda expresión para la derivada tercera de los M_n operadores. Lupas[1] obtuvo la siguiente:

$$D^3 M_n f(x) = (1-x)^{n-2} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{p} 2nx^p$$

$$\cdot \left\{ \frac{p+n}{p+n+3} f\left[\frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3}\right] - \frac{p+n-1}{p+n+2} f\left[\frac{p}{p+n}, \frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}\right] \right\},$$

y también la igualdad

$$\frac{3n}{(p+n)(p+n+3)} f\left[\frac{p}{p+n}, \frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3}\right]$$

$$= f\left[\frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3}\right] - f\left[\frac{p}{p+n}, \frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}\right],$$

que permite obtener esta otra expresión que nos será de más utilidad:

$$D^3 M_n f(x) = (1-x)^{n-2} \sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{6n}{(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$\cdot \left\{ \frac{n(p+n-1)}{p+n} f\left[\frac{p}{p+n}, \frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3}\right] \right. \tag{3.6}$$

$$\left. + f\left[\frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3}\right] \right\}, \qquad (n \geq 3).$$

También haremos uso de algunas igualdades sobre las diferencias divididas, a saber,

$$e_3\left[\frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3}\right] = \frac{3(p+1)}{p+n+1} + \frac{3n}{(p+n+1)(p+n+3)}$$

[1] Lupas, A. *Some Properties of the Linear Positive Operators (I)*, Mathematica, Cluj, 9, (1967), 77–83

$$+\frac{n}{(p+n+1)(p+n+2)(p+n+3)} \tag{3.7}$$

y

$$e_i\left[\frac{p}{p+n},\frac{p+1}{p+n+1},\frac{p+2}{p+n+2},\frac{p+3}{p+n+3}\right]=\begin{cases}0 & \text{para i=2}\\ 1 & \text{para i=3}\\ \frac{4p}{p+n}+\alpha_{n,p} & \text{para i=4}\\ 10\left(\frac{p}{p+n}\right)^2+\beta_{n,p} & \\ +\gamma_{n,p} & \text{para i=5,}\end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha_{n,p}=&\frac{6n}{(p+n)(p+n+3)}+\frac{4n}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}\\&+\frac{2n}{(p+n)(p+n+1)(p+n+2)(p+n+3)},\\ \beta_{n,p}=&\frac{30np}{(p+n)^2(p+n+3)},\\ \gamma_{n,p}=&\frac{20n}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}+\frac{5n^2}{(p+n)^2(p+n+2)^2}\\&+\frac{5pn}{(p+n)^2(p+n+1)(p+n+2)^2}+\frac{5pn}{(p+n)^2(p+n+2)^2(p+n+3)}\\&+\frac{21n^2}{(p+n)^2(p+n+3)^2(p+n+1)(p+n+2)}\\&+\frac{5n^2}{(p+n)^2(p+n+1)(p+n+2)^2(p+n+3)^2}\\&+\frac{4n^2}{(p+n)^2(p+n+1)^2(p+n+2)^2(p+n+3)^2}.\end{aligned}$$

Ya estamos en condiciones de trabajar con cada uno de los sumandos de la ecuación (3.4). La idea que perseguimos para desenvolvernos con cierta comodidad en los cálculos que debemos realizar, es la de mantener en la medida de lo posible la técnica que Knoop y Pottinger usan para trabajar con la derivada segunda, además de utilizar las operaciones que aparecen en DeVore[1] en la sección que dedica a estos operadores.

---

[1] DeVore, R. A. *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators,* Lecture Notes in Mathematics, 293, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1972)

Un buen comienzo será operar con $D^3M_ne_3(x)$. Utilizando (3.6) y (3.7) tenemos que

$$D^3M_ne_3(x) = (1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{6n}{(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$\cdot\left\{\frac{n(p+n-1)}{p+n} + \frac{3(p+1)}{p+n+1} + \frac{3n}{(p+n+1)(p+n+3)}\right.$$

$$\left.+\frac{n}{(p+n+1)(p+n+2)(p+n+3)}\right\}$$

$$= (1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{6n}{(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$\cdot\left\{n+3-\frac{4n(p+n+\frac{3}{2})\Big((p+n+1)(p+n+2)-1\Big)}{(p+n)(p+n+1)(p+n+2)(p+n+3)}\right\}.$$

Separando los sumandos tenemos que para $n \geq 4$

$$D^3M_ne_3(x) = \frac{6n(n+3)}{(n-1)(n-2)}(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p}$$

$$\cdot\left\{\frac{(p+n-1)(p+n-2)}{(p+n+2)(p+n+3)}\right\} - \frac{24n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-4}{p}$$

$$\cdot\left\{\frac{(p+n-1)(p+n-2)(p+n-3)(p+n+\frac{3}{2})\Big((p+n+1)(p+n+2)-1\Big)}{(p+n)(p+n+1)(p+n+2)^2(p+n+3)^2}\right\}. \tag{3.8}$$

Por lo que respecta al primer sumando de (3.8) tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\frac{6n(n+3)}{(n-1)(n-2)}(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p} \frac{(p+n-1)(p+n-2)}{(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$= \frac{6n(n+3)}{(n-1)(n-2)}(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p} \left(1 - \frac{8p+8n+4}{(p+n+2)(p+n+3)}\right)$$

$$= \frac{6n(n+3)}{(n-1)(n-2)} - \frac{24n(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-4}{p}$$

$$\cdot \left\{ \frac{(2p+2n+1)(p+n-3)}{(p+n+2)(p+n+3)} \right\} = \frac{6n(n+3)}{(n-1)(n-2)}$$

$$-\frac{24n(n+3)(1-x)^{n-2}}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-4}{p} \left(2 - \frac{15(p+n+1)}{(p+n+2)(p+n+3)}\right)$$

$$= \frac{6n(n+3)}{(n-1)(n-2)} - \frac{48n(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x)$$

$$+\frac{360n(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-4}{p} \frac{p+n+1}{(p+n+2)(p+n+3)},$$

y para el segundo sumando de la ecuación (3.8) tenemos que su valor absoluto admite la cota superior

$$\frac{24n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x).$$

Con todo ello conseguimos que para $n \geq 4$

$$\frac{1}{3!} D^3 M_n e_3(x) \leq \frac{n(n+3)}{(n-1)(n-2)}, \tag{3.9}$$

y también

$$\frac{1}{3!}\left|D^3 M_n e_3(x) - D^3 e_3(x)\right| \leq \left| \frac{n(n+3)}{(n-1)(n-2)} - 1 - \frac{8n(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x) \right|$$

$$+\left| \frac{60n(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-4}{p} \frac{p+n+1}{(p+n+2)(p+n+3)} \right|$$

$$+\left| \frac{4n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x) \right| \leq \frac{1}{(n-1)(n-2)} \left(\left| 6n - 2 - \frac{8n(n+3)}{n-3}(1-x) \right| \right.$$

$$\left. + \left| \frac{60n(n+3)}{n-3}(1-x)^{n-2} \sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-4}{p} \frac{1}{p+n+3} \right| + \left| \frac{4n^2}{n-3}(1-x) \right| \right)$$

$$\leq \frac{\left| 6n^2 - 20n + 6 - 8n(n+3)(1-x) \right| + 60n(1-x) + 4n^2(1-x)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\leq \frac{\max\left\{6n^2+104n-6, 10n^2+40n+6\right\}}{(n-1)(n-2)(n-3)} \leq \frac{10n(n+9)}{(n-1)(n-2)(n-3)}. \tag{3.10}$$

Con lo visto hasta ahora tenemos estimado el primer sumando de la ecuación (3.4) y parte del segundo. Comenzamos ahora con el cálculo de $\beta_n^2(x)$. Utilizando (3.5), (3.6) y (3.7) podemos obtener directamente la siguiente expresión:

$$\beta_n^2(x) = (1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{6n}{(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$\cdot\left\{\frac{n(p+n-1)}{p+n}\left(\frac{1}{60}\left(10\left(\frac{p}{p+n}\right)^2+\beta_{n,p}+\gamma_{n,p}\right)-\frac{x}{12}\left(\frac{4p}{p+n}+\alpha_{n,p}\right)+\frac{x^2}{6}\right)\right.$$

$$\left.+g_x\left[\frac{p+1}{p+n+1},\frac{p+2}{p+n+2},\frac{p+3}{p+n+3}\right]\right\}$$

$$= (1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{n^2(p+n-1)}{(p+n+2)(p+n+3)(p+n)}\left(\frac{p}{p+n}\right)^2$$

$$+\frac{1}{10}(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{n^2(p+n-1)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}(\beta_{n,p}+\gamma_{n,p})$$

$$-2x(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{n^2(p+n-1)}{(p+n+2)(p+n+3)(p+n)}\left(\frac{p}{p+n}\right)$$

$$-\frac{1}{2}x(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{n^2(p+n-1)}{(p+n+2)(p+n+3)(p+n)}\alpha_{n,p}$$

$$+x^2(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{n^2(p+n-1)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$+(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{6n}{(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$\cdot g_x\left[\frac{p+1}{p+n+1},\frac{p+2}{p+n+2},\frac{p+3}{p+n+3}\right]. \tag{3.11}$$

El primer sumando de la última expresión de $\beta_n^2(x)$ en (3.11) verifica esta cadena de igualdades:

$$(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p} \frac{n^2(p+n-1)}{(p+n+2)(p+n+3)(p+n)}\left(\frac{p}{p+n}\right)^2$$

$$= \frac{x(1-x)^{n-2}n^4}{(n+1)^3(n+3)(n+4)} + (1-x)^{n-2}\sum_{p=2}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p}$$

$$\cdot \frac{n^2(p+n-1)}{(p+n+2)(p+n+3)(p+n)}\Big(\frac{p}{p+n}\Big)^2$$

$$= \frac{x(1-x)^{n-2}n^4}{(n+1)^3(n+3)(n+4)} + x^2(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p+1}{p+2}$$

$$\cdot \frac{n^2(p+n+1)}{(p+n+4)(p+n+5)(p+n+2)}\Big(\frac{p+2}{p+n+2}\Big)^2$$

$$= \frac{x(1-x)^{n-2}n^4}{(n+1)^3(n+3)(n+4)} + \frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p}$$

$$\cdot \frac{(p+n+1)^2(p+n)(p+n-1)(p+n-2)}{(p+1)(p+2)(p+n+4)(p+n+5)(p+n+2)}\Big(\frac{p+2}{p+n+2}\Big)^2$$

$$= \frac{x(1-x)^{n-2}n^4}{(n+1)^3(n+3)(n+4)} + \frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p}$$

$$\cdot \Big(\frac{p+2}{p+1}\Big)\Big(\frac{p+n+1}{p+n+2}\Big)^2\Big(\frac{p+n}{p+n+2}\Big)\Big(\frac{p+n-1}{p+n+4}\Big)\Big(\frac{p+n-2}{p+n+5}\Big)$$

$$= \frac{x(1-x)^{n-2}n^4}{(n+1)^3(n+3)(n+4)} + \frac{x^2n^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$+ \frac{x^2n^2(1-x)^{n-2}}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p} a_{n,p} \quad (n \geq 3), \tag{3.12}$$

donde

$$a_{n,p} = -1 + \Big(\frac{p+2}{p+1}\Big)\Big(\frac{p+n+1}{p+n+2}\Big)^2\Big(\frac{p+n}{p+n+2}\Big)\Big(\frac{p+n-1}{p+n+4}\Big)\Big(\frac{p+n-2}{p+n+5}\Big).$$

Para el tercer sumando de (3.11) tenemos, para $n \geq 3$,

$$-2x(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p}\frac{n^2(p+n-1)}{(p+n+2)(p+n+3)(p+n)}\Big(\frac{p}{p+n}\Big)$$

$$= \frac{-2x(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=1}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p}\frac{(p+n-1)^2(p+n-2)p}{(p+n)^2(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$= \frac{-2x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-2}{p+1}\frac{(p+n)^2(p+n-1)(p+1)}{(p+n+1)^2(p+n+3)(p+n+4)}$$

$$= \frac{-2x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-3}{p}\frac{(p+n)^2(p+n-1)(p+n-2)}{(p+n+1)^2(p+n+3)(p+n+4)}$$

$$= \frac{-2x^2n^2}{(n-1)(n-2)} + \frac{2x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-3}{p}b_{n,p}, \tag{3.13}$$

donde

$$b_{n,p} = 1 - \frac{(p+n)^2(p+n-1)(p+n-2)}{(p+n+1)^2(p+n+3)(p+n+4)},$$

y para el quinto sumando en la última expresión de $\beta_n^2(x)$ en la ecuación (3.11) tenemos que para $n \geq 3$,

$$x^2(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-1}{p}\frac{n^2(p+n-1)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$= \frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-3}{p}\frac{(p+n-1)^2(p+n-2)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$= \frac{x^2n^2}{(n-1)(n-2)} + \frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-3}{p}c_{n,p}, \tag{3.14}$$

donde

$$c_{n,p} = -1 + \frac{(p+n-1)^2(p+n-2)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}.$$

Ahora, teniendo en cuenta (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14) tenemos que para $n \geq 3$

$$\beta_n^2(x) = \frac{x(1-x)^{n-2}n^4}{(n+1)^3(n+3)(n+4)} + \frac{x^2n^2(1-x)^{n-2}}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-3}{p}a_{n,p}$$

$$+\frac{10(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-3}{p}\frac{(p+n-1)^2(p+n-2)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}(\beta_{n,p}+\gamma_{n,p})$$

$$+\frac{2x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p\binom{n+p-3}{p}b_{n,p}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{x(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty}x^p\binom{n+p-3}{p}\frac{(p+n-1)^2(p+n-2)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}\alpha_{n,p}$$

$$+\frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty}x^p\binom{n+p-3}{p}c_{n,p}$$

$$+(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty}x^p\binom{n+p-1}{p}\frac{6n}{(p+n+2)(p+n+3)}$$

$$\cdot g_x\left[\frac{p+1}{p+n+1},\frac{p+2}{p+n+2},\frac{p+3}{p+n+3}\right]. \tag{3.15}$$

Si ahora, de la expresión anterior, extraemos $\beta_{n,1}$ y $\alpha_{n,0}$ y separamos los factores de x y x^2 obtenemos

$$\beta_n^2(x)=\left\{\frac{x(1-x)^{n-2}n^4}{(n+1)^3(n+3)(n+4)}+\frac{x(1-x)^{n-2}n^4}{10(n+1)(n+3)(n+4)}\beta_{n,1}\right.$$

$$\left.-\frac{x(1-x)^{n-2}(n-1)n}{2(n+2)(n+3)}\alpha_{n,0}\right\}$$

$$+\left\{\frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty}x^p\binom{n+p-3}{p}(a_{n,p}+2b_{n,p}+c_{n,p})\right.$$

$$+\frac{1}{10}\frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=2}^{\infty}x^{p-2}\binom{n+p-3}{p}\frac{(p+n-1)^2(p+n-2)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}\beta_{n,p}$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=1}^{\infty}x^{p-1}\binom{n+p-3}{p}\frac{(p+n-1)^2(p+n-2)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}\alpha_{n,p}\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{10}\frac{(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty}x^p\binom{n+p-3}{p}\frac{(p+n-1)^2(p+n-2)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)}\gamma_{n,p}\right\}$$

$$+\left\{(1-x)^{n-2}\sum_{p=0}^{\infty}x^p\binom{n+p-1}{p}\frac{6n}{(p+n+2)(p+n+3)}\right.$$

$$\left.\cdot g_x\left[\frac{p+1}{p+n+1},\frac{p+2}{p+n+2},\frac{p+3}{p+n+3}\right]\right\}$$

$$= \left\{ x(1-x)^{n-2} \left(\frac{n^7 - 7n^6 - 78n^5 - 165n^4 + n^3 + 248n^2 + 144n}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)^2} \right) \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)} \sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p} \left(a_{n,p} + 2b_{n,p} + c_{n,p} \right. \right.$$

$$+ \frac{(p+n-2)(p+n-1)(p+n)(p+n+1)^2}{10(p+1)(p+2)(p+n+2)(p+n+4)(p+n+5)} \beta_{n,p+2}$$

$$\left. \left. - \frac{(p+n-2)(p+n-1)(p+n)^2}{2(p+1)(p+n+1)(p+n+3)(p+n+4)} \alpha_{n,p+1} \right) \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{(1-x)^{n-2}n^2}{10(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-5}{p} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(p+n-3)(p+n-4)(p+n-1)^2(p+n-2)}{(p+n)(p+n+2)(p+n+3)} \gamma_{n,p} \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{(1-x)^{n-2}}{(n-1)(n-2)} \sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p} \frac{6n(p+n-1)(p+n-2)}{(p+n+2)(p+n+3)} \right.$$

$$\left. \cdot g_x \left[\frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3} \right] \right\}. \qquad (3.16)$$

Se puede comprobar fácilmente que una cota superior del primer sumando de $\beta_n^2(x)$ entre llaves en (3.16) es

$$\frac{x(1-x)^2 n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} \quad (n \geq 4).$$

El segundo sumando entre llaves de $\beta_n^2(x)$ está acotado superiormente por

$$\frac{x^2(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)} \sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-3}{p} \frac{1}{p+1}$$

$$= \frac{x(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{p=1}^{\infty} x^p \binom{n+p-4}{p}$$

$$= \frac{x(1-x)n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} - \frac{x(1-x)^{n-2}n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\leq \frac{x(1-x)n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} \quad (n \geq 4).$$

También, dado que $\gamma_{n,p} \leq \frac{25}{(p+n)^2}$, una cota superior del tercer sumando de $\beta_n^2(x)$ entre llaves en (3.16) es

$$\frac{5(1-x)^2n^2}{2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \quad (n \geq 5).$$

Por otra parte,

$$g_x\left[\frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3}\right] \leq \frac{1}{2}\|D^2 g_x\|$$

$$= \frac{1}{2}\left\|D^2\left(\frac{e_5}{60} - x\frac{e_4}{12} + x^2\frac{e_3}{6} + \left(1 + \max\{(1-x)^2, x^2\}\right)\frac{e_2}{2}\right)\right\|$$

y como $D^2 g_x$ es una función positiva y creciente, entonces

$$g_x\left[\frac{p+1}{p+n+1}, \frac{p+2}{p+n+2}, \frac{p+3}{p+n+3}\right] \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - x + x^2 + 1 + \max\left\{(1-x)^2, x^2\right\}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\max\left\{\frac{7}{3} - 3x + 2x^2, \frac{4}{3} - x + 2x^2\right\} \leq \frac{2}{3} + |x - \frac{1}{2}|.$$

Por consiguiente, una cota superior del cuarto sumando de $\beta_n^2(x)$ en (3.16) es

$$\frac{(1-x)^{n-2}}{(n-1)(n-2)}\sum_{p=0}^{\infty} x^p \binom{n+p-1}{p}\frac{6n(p+n-1)(p+n-2)}{(p+n+2)(p+n+3)}\left(\frac{2}{3} + |x - \frac{1}{2}|\right)$$

$$\leq \frac{(4 + |6x-3|)n}{(n-1)(n-2)} \quad (n \geq 3).$$

Como consecuencia acabamos de obtener que para $n \geq 5$

$$\beta_n^2(x) \leq \frac{x(1-x)^2n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{x(1-x)n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$+ \frac{25(1-x)^2n^2}{10(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} + \frac{(4 + |6x-3|)n}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{x(1-x)(2-x)n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{5(1-x)^2n^2}{2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$
$$+\frac{\big(4+|6x-3|\big)n}{(n-1)(n-2)}. \tag{3.17}$$

Estamos ahora en condiciones de resumir todos los cálculos hechos en el siguiente

Teorema 3.4. *Sea $f \in C^3[0,1], n \geq 5$ y $x \in X'$, entonces*

$$\left|D^3M_nf(x) - D^3f(x)\right| \leq \frac{10n(n+9)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\left|D^3f(x)\right|$$
$$+\frac{n(n+3)}{(n-1)(n-2)}\omega(D^3f,\Gamma_n(x))$$
$$+\max\left\{\omega(D^3f,\Gamma_n(x)),\Gamma_n^2(x)\Big(\left\|D^2f\right\| + \left|D^3f(x)\right| + \omega\big(D^3f,\Gamma_n(x)\big)\Big)\right\},$$

donde

$$\Gamma_n^2(x) = \frac{x(1-x)(2-x)n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{\frac{5}{2}(1-x)^2n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$
$$+\frac{\big(4+|6x-3|\big)n}{(n-1)(n-2)}.$$

Demostración. Basta usar la ecuaciones (3.4), (3.9), (3.10) y (3.17). □

Finalizamos este apartado diciendo que desde su aparición han surgido diferentes generalizaciones de los operadores de Meyer-König y Zeller con interesantes aplicaciones en distintos campos. Una lista detallada de estos trabajos puede encontrarse en un trabajo de Stark[1] .

---

[1] Stark, P. C. *A Bibliography of the Bernstein Power Series of Operators of Meyer-König and Zeller and their Generalizations,* Anniversary volume on approximation theory and functional analysis (Oberwolfach, 1983), 303–314

3.2.3. Conos de Tipo II. Ejemplos

Enseguida mostramos resultados del mismo corte que el mostrado en la Sección 3.2.1, relacionados ahora con el Teorema 2.2; recordemos que era aquel segundo teorema cualitativo sobre aproximación en C^k, donde las propiedades conservativas de los operadores estudiados estaban directamente relacionadas con los conos de tipo II.

También recuperaremos una sucesión de operadores que ya comenzamos a estudiar en un ejemplo. A ella le aplicaremos lo obtenido.

Teorema 3.5. [1],[2] *Sea $C^X_{h,k}(\sigma)$ un cono de tipo II con $r \in \Gamma_\sigma$ y $K_n : C^k(X) \to C^r(X')$ una sucesión de operadores lineales tales que*

$$K_n\left(C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)\right) \subset C^{X'}_{r,r}(\sigma)$$

(debido a la linealidad podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma_r = 1$). Entonces para $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$,

$$|D^r f(x) - D^r K_n f(x)| \leq \frac{1}{r!}|D^r f(x)|\,|D^r e_r(x) - D^r K_n e_r(x)|$$

$$+\frac{\omega(D^r f, \delta_n)}{r!} D^r K_n e_r(x) + N\beta_n^2(x).$$

Aquí $\beta_n^2(x) = D^r K_n g_x(x)$, donde g_x es la única función de $\langle e_h, \ldots, e_k\rangle$ verificando

$$D^k g_x(t) = 2\sigma_k \ \forall t \in X,$$
$$D^i g_x(a) = \sigma_i(2 + (b-a)\|D^{i+1} g_x\|) \text{ para } i = k-1, \ldots, r+3 \text{ (si } k > r+3),$$
$$D^{r+2} g_x(a) = 2 + (b-a)\|D^{r+3} g_x\|,$$
$$D^{r+1} g_x(x) = D^r g_x(x) = 0,$$
$$D^i g_x(a) = \sigma_i(2 + (b-a)\|D^{i+1} g_x\|) \text{ para } i = r-1, r-2, \ldots, h \text{ (si } r > h).$$

---

[1] Muñoz-Delgado, F. J., Cárdenas-Morales, D. *Almost Convexity and Quantitative Korovkin Type Results,* Appl. Math. Lett. (aparecerá)

[2] Muñoz-Delgado, F. J., Cárdenas-Morales, D. *Korovkin Type Results for Shape Preserving Operators,* Curves and Surfaces with Applications in CAGD, A. Le Méhauté, C. Rabut and L. L. Schumaker eds., Vanderbilt University Press, Nashville & London, (1997), 303–310

También $N = \max\left\{\frac{\omega(D^r f,\delta_n)}{\delta_n^2}, N_1, N_2\right\}$, *donde*

$$N_1 = \max_{\substack{r+2\le i\le k\\ \sigma_i\neq 0}} \left\{\frac{\|D^i f\|}{2}\right\},$$

$$N_2 = \max_{\substack{h\le i<r\\ \sigma_i\neq 0}} \left\{\frac{\|D^i f\|}{2} + \frac{c^{r-i}\left(|D^r f(x)| + \omega(D^r f,\delta_n)\right)}{4(r-i)!}\right\},$$

y $c = \max\{|a|,|b|\}$.

Comentario 3.5. Obsérvese aquí también que N depende tanto de n como de f y que $D^r K_n g_x(x)$ no es una cantidad negativa porque

$$g_x \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)$$

por definición.

Demostración del Teorema 3.5. Para $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$, se tiene que

$$|D^r f(t) - D^r f(x)| \le \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta_n^2}\right)\omega(D^r f,\delta_n) \quad \forall t \in X.$$

Por otra parte, como

$$D^{r+2}g_x(t) = \int_a^t D^{r+3}g_x(z)dz + D^{r+2}g_x(a)$$

$$= 2 + \|D^{r+3}g_x\| + \int_a^t D^{r+3}g_x(z)dz \ge 2 \quad \forall t \in X$$

y

$$D^r g_x(x) = D^{r+1}g_x(x) = 0,$$

entonces

$$D^r g_x(t) \ge (t-x)^2 \quad \forall t \in X.$$

De esta forma

$$D^r\left(f - D^r f(x)\frac{1}{r!}e_r + \omega(D^r f,\delta_n)\frac{1}{r!}e_r + \frac{\omega(D^r f,\delta_n)}{\delta_n^2}g_x\right) \ge 0$$

y

$$D^r\left(-f + D^r f(x)\frac{1}{r!}e_r + \omega(D^r f, \delta_n)\frac{1}{r!}e_r + \frac{\omega(D^r f, \delta_n)}{\delta_n^2}g_x\right) \geq 0,$$

y usando la definición de N,

$$D^r\left(f - D^r f(x)\frac{1}{r!}e_r + \omega(D^r f, \delta_n)\frac{1}{r!}e_r + Ng_x\right) \geq 0$$

y

$$D^r\left(-f + D^r f(x)\frac{1}{r!}e_r + \omega(D^r f, \delta_n)\frac{1}{r!}e_r + Ng_x\right) \geq 0.$$

Además, para $h \leq i \leq k$ con $i \neq r$ y $\sigma_i \neq 0$, usando que

$$\sigma_i D^i g_x(t) = \sigma_i \int_a^t D^{i+1} g_x(z)dz + \sigma_i D^i g_x(a)$$

$$= \sigma_i \int_a^t D^{i+1} g_x(z)dz + 2 + \|D^{i+1} g_x\| \geq 2,$$

tenemos que para $i > r+1$,

$$\sigma_i D^i\left(f - D^r f(x)\frac{1}{r!}e_r + \omega(D^r f, \delta_n)\frac{1}{r!}e_r + Ng_x\right)$$

$$= \sigma_i D^i f + N\sigma_i D^i g_x \geq 0$$

y

$$\sigma_i D^i\left(-f + D^r f(x)\frac{1}{r!}e_r + \omega(D^r f, \delta_n)\frac{1}{r!}e_r + Ng_x\right)$$

$$= -\sigma_i D^i f + N\sigma_i D^i g_x \geq 0,$$

y para $i < r$,

$$\sigma_i D^i\left(f - D^r f(x)\frac{1}{r!}e_r + \omega(D^r f, \delta_n)\frac{1}{r!}e_r + Ng_x\right)$$

$$= \sigma_i D^i f - \sigma_i \frac{D^r f(x) e_{r-i}}{(r-i)!} + \sigma_i \omega(D^r f, \delta_n)\frac{e_{r-i}}{(r-i)!} + N\sigma_i D^i g_x$$

$$\geq - \left\|D^i f\right\| - \frac{c^{r-i}}{(r-i)!}\left|D^r f(x)\right| - \frac{c^{r-i}}{(r-i)!}\omega(D^r f, \delta_n) + N \geq 0$$

y

$$\sigma_i D^i\left(-f + D^r f(x)\frac{1}{r!}e_r + \omega(D^r f, \delta_n)\frac{1}{r!}e_r + Ng_x\right)$$

$$= -\sigma_i D^i f + \sigma_i \frac{D^r f(x) e_{r-i}}{(r-i)!} + \sigma_i \omega(D^r f, \delta_n) \frac{e_{r-i}}{(r-i)!} + N \frac{\omega(D^r f, \delta_n)}{\delta_n^2} \sigma_i D^i g_x$$

$$\geq - \left\| D^i f \right\| - \frac{c^{r-i}}{(r-i)!} \left| D^r f(x) \right| - \frac{c^{r-i}}{(r-i)!} \omega(D^r f, \delta_n) + N \geq 0.$$

Escrito de otra forma,

$$f - D^r f(x) \frac{1}{r!} e_r + \omega(D^r f, \delta_n) \frac{1}{r!} e_r + N g_x \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)$$

y

$$-f + D^r f(x) \frac{1}{r!} e_r + \omega(D^r f, \delta_n) \frac{1}{r!} e_r + N g_x \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X).$$

Usando la hipótesis sobre K_n y la definición de $\beta_n^2(x)$ se obtiene que evaluando en el punto x,

$$\left| D^r K_n f(x) - D^r f(x) \frac{1}{r!} D^r K_n e_r(x) \right| \leq \omega(D^r f, \delta_n) \frac{D^r K_n e_r(x)}{r!} + N D^r K_n g_x(x)$$

$$= \omega(D^r f, \delta_n) \frac{D^r K_n e_r(x)}{r!} + N \beta_n^2(x). \qquad (3.18)$$

Si sumamos la ecuación anterior a esta otra

$$\left| D^r f(x) \frac{1}{r!} D^r K_n e_r(x) - D^r f(x) \right| = \frac{1}{r!} \left| D^r f(x) \right| \left| D^r e_r(x) - D^r K_n e_r(x) \right|$$

la demostración está acabada. □

Comentario 3.6. Nótese que la estimación que acabamos de establecer es similar a la del Teorema 3.1. El sumando

$$\frac{\beta_n^2(x)}{\delta_n^2} \omega(D^k f, \delta_n)$$

donde $\beta_n^2(x) = D^k K_n g_x(x)$, siendo g_x la única función de $\langle e_k, e_{k+1}, e_{k+2} \rangle$ que verifica $D^k g_x(t) = (t-x)^2 \ \forall x, t \in X$, ha sido reemplazado por

$$\max \left\{ \frac{\beta_n^2(x)}{\delta_n^2} \omega(D^k f, \delta_n), \beta_n^2(x) N_1, \beta_n^2(x) N_2 \right\}$$

donde ahora $\beta_n^2(x)$, N_1 y N_2 son como en el enunciado del teorema anterior.

El comentario del siguiente corolario justifica que en éste estamos ante una versión cuantitativa del Teorema 2.2.

Corolario 3.2. [1] *En las mismas condiciones del teorema anterior, con los mismos valores de c y de g_x, si $f \in C^k(X)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\|D^r f - D^r K_n f\| \leq \frac{1}{r!} \|D^r f\| \|D^r e_r - D^r K_n e_r\|$$

$$+\frac{1}{r!}\omega(D^r f, \mu_n) \|D^r K_n e_r\| + \max\left\{ \omega(D^r f, \mu_n), \mu_n^2 \max_{\substack{r+2\leq i\leq k \\ \sigma_i\neq 0}} \left\{ \frac{\|D^i f\|}{2} \right\},\right.$$

$$\left.\mu_n^2 \max_{\substack{h\leq i<r \\ \sigma_i\neq 0}} \left\{ \frac{\|D^i f\|}{2} + \frac{c^{r-i}\left(\|D^r f\| + \omega(D^r f, \delta_n)\right)}{2(r-i)!} \right\} \right\},$$

donde

$$\mu_n^2 = \sup_{x\in X} \left\{ D^k K_n g_x(x) \right\}.$$

Demostración. En la demostración del Teorema 3.5, de la ecuación (3.18) se deduce que

$$\left| D^r K_n f(x) - D^r f(x) \frac{1}{r!} D^r K_n e_r(x) \right| \leq \omega(D^r f, \delta_n) \frac{D^r K_n e_r(x)}{r!} + N\mu_n^2.$$

Ahora, si $\mu_n > 0$, tomamos $\delta_n = \mu_n$. Entonces

$$\left| D^r K_n f(x) - D^r f(x) \frac{1}{r!} D^r K_n e_r(x) \right| \leq \omega(D^r f, \mu_n) \frac{\|D^r K_n e_r\|}{r!}$$

$$+ \max\left\{ \omega(D^k f, \mu_n), \mu_n^2 \max_{\substack{r+2\leq i\leq k \\ \sigma_i\neq 0}} \left\{ \frac{\|D^i f\|}{2} \right\},\right.$$

$$\left.\mu_n^2 \max_{\substack{h\leq i<r \\ \sigma_i\neq 0}} \left\{ \frac{\|D^i f\|}{2} + \frac{c^{r-i}\left(\|D^r f\| + \omega(D^r f, \mu_n)\right)}{2(r-i)!} \right\} \right\},$$

que sumado a la ecuación

$$\left| D^r f(x) \frac{1}{r!} D^r K_n e_r(x) - D^r f(x) \right| \leq \frac{1}{r!} \|D^r f\| \|D^r e_r - D^r K_n e_r\|$$

permite obtener el resultado.

Si $\mu_n = 0$, entonces para acabar se procede como en la demostración del Corolario 3.1. □

---

[1] CÁRDENAS-MORALES, D., MUÑOZ-DELGADO, F. J. *Quantitative Korovkin-type Results on Conservative Approximation,* (enviado)

Comentario 3.7. Se debe observar aquí también que por la definición de g_x, tomando $[a, b] = [0, 1]$ para simplificar los cálculos, podemos escribir que

$$g_x = \sum_{j=h}^{k} a_j(x) e_j,$$

donde

$$a_k(x) = \frac{\sigma_k}{k!},$$

si $k > r + 3$, de manera recurrente,

$$a_j(x) = \frac{\sigma_j}{j!} \left(1 + \|D^{j+1} g_x\|\right) \text{ para } j = k-1, \ldots, r+3.$$

Además

$$a_{r+2}(x) = \frac{1}{(r+2)!} \left(1 + \|D^{r+3} g_x\|\right),$$

$$a_{r+1}(x) = -\sum_{j=1}^{k-r-1} \binom{r+1+j}{j} a_{r+j+1}(x) x^j,$$

$$a_r(x) = -\sum_{j=1}^{k-r} \binom{r+j}{j} a_{r+j}(x) x^j,$$

y si $r > h$, también por recurrencia,

$$a_j(x) = \frac{\sigma_j}{j!} \left(1 + \|D^{j+1} g_x\|\right) \text{ para } j = r-1, \ldots, h.$$

Como además $D^r g_x(x) = 0$, se tiene que

$$D^r K_n g_x(x) \leq \sum_{j=h}^{k} \|a_j\| \|D^r K_n e_j - D^r e_j\|.$$

Por tanto, si

$$\|D^r(K_n e_j) - D^r e_j\| \to 0 \text{ para } j = h, \ldots, k,$$

entonces $\mu_n \to 0$, y evidentemente se tiene que

$$\|D^r(K_n f) - D^r f\| \to 0 \; \forall f \in C^k(X).$$

Además tenemos una estimación de la velocidad de convergencia en base a las velocidades de convergencia de

$$\|D^r(K_n e_j) - D^r e_j\| \text{ para } j = h, \ldots, k.$$

A continuación, según lo dicho al comienzo de esta sección, aplicamos los resultados obtenidos al estudio del error de convergencia de una sucesión de operadores que ya habíamos introducido.

Ejemplo 3.1. *Consideremos la sucesión de operadores del Ejemplo 2.4 aunque con dominio en $C^2[0,1]$, ésto es, $K_n : C^2[0,1] \to C[0,1]$ actuando sobre una función $f \in C^2[0,1]$ de la siguiente forma:*

$$K_n f(x) = \begin{cases} f(0) + f\left[0, \frac{1}{n}\right] x + f\left[0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] x^2, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \\ K_n f(\frac{i}{n}) + DK_n f(\frac{i}{n})(x - \frac{i}{n}) & \\ +f\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}\right](x - \frac{i}{n})^2, & x \in (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]\ i = 1, \ldots, n-3 \\ \\ K_n f(\frac{n-2}{n}) + DK_n f(\frac{n-2}{n})(x - \frac{n-2}{n}) & \\ +f\left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1\right](x - \frac{n-2}{n})^2, & x \in (\frac{n-2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Entonces para $f \in C^2[0,1]$, $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$

$$|K_n f(x) - f(x)| \leq \omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}}) + \max\left\{\frac{x\|D^2 f\|}{2n}, x\omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}})\right\}.$$

Demostración. Vamos a aplicar el teorema anterior considerando $X = X' = [0,1]$, $h = r = 0$, $k = 2$ y $\sigma = \{1, 0, 1\}$. Ya comprobamos que con los datos anteriores estos operadores verifican que

$$K_n(C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)) \subset C^{X'}_{r,r},$$

luego estamos en las hipótesis del teorema.

Sea ahora $f \in C^2[0,1]$ y $\delta_n > 0$. Entonces

$$|f(x) - K_n f(x)| \leq |f(x)||1 - K_n e_0(x)| + \omega(f, \delta_n) K_n e_0(x) + N\beta_n^2(x),$$

donde en este caso se tiene claramente que

$$\beta_n^2(x) = K_n(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0)(x)$$

y

$$N = \max\left\{\frac{\omega(f,\delta_n)}{\delta_n^2}, \frac{\|D^2 f\|}{2}\right\}.$$

Usando ahora las igualdades

$$K_n e_0 = e_0, \quad K_n e_1 = e_1 \text{ y } K_n e_2 = \frac{1}{n} e_1 + e_2,$$

se puede comprobar fácilmente por inducción que

$$\beta_n^2(x) = \frac{x}{n}.$$

Así, la estimación queda

$$|f(x) - K_n f(x)| \leq \omega(f,\delta_n) + \max\left\{\frac{x\omega(f,\delta_n)}{n\delta_n^2}, \frac{x\|D^2 f\|}{2n}\right\}.$$

Basta tomar $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ para tener el resultado. □

Las siguientes representaciones gráficas ponen de manifiesto que los operadores K_n aproximan bien las funciones en los puntos donde tienen segunda derivada elevada. En las siguientes figuras comparamos para dos casos particulares $K_n f$ (representada con un trazo continuo) con la función original f (línea punteada) y con la función $B_n f$ (trazo discontinuo), donde B_n es el operador de Berstein.

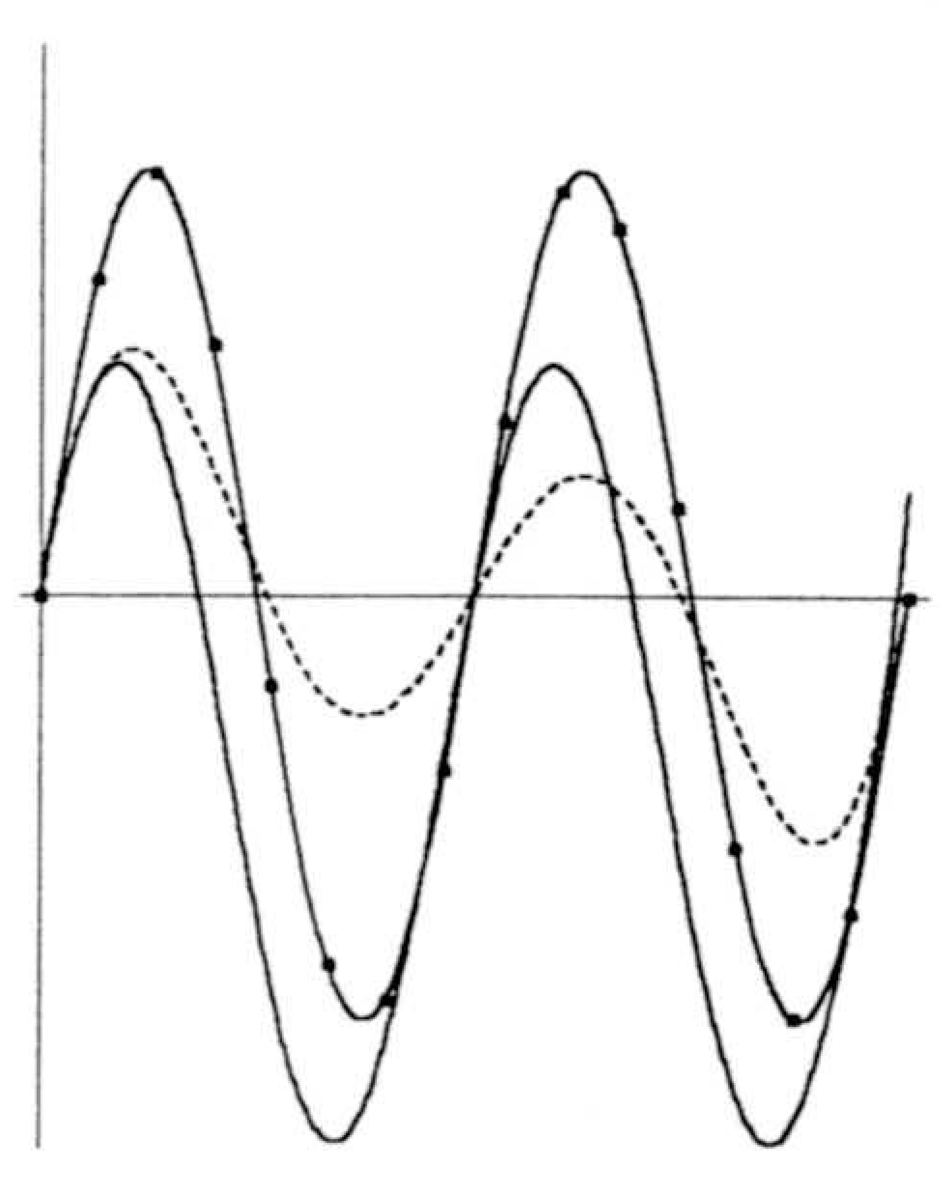

Fig. 2. $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}(4\pi x)$, $n = 15$.

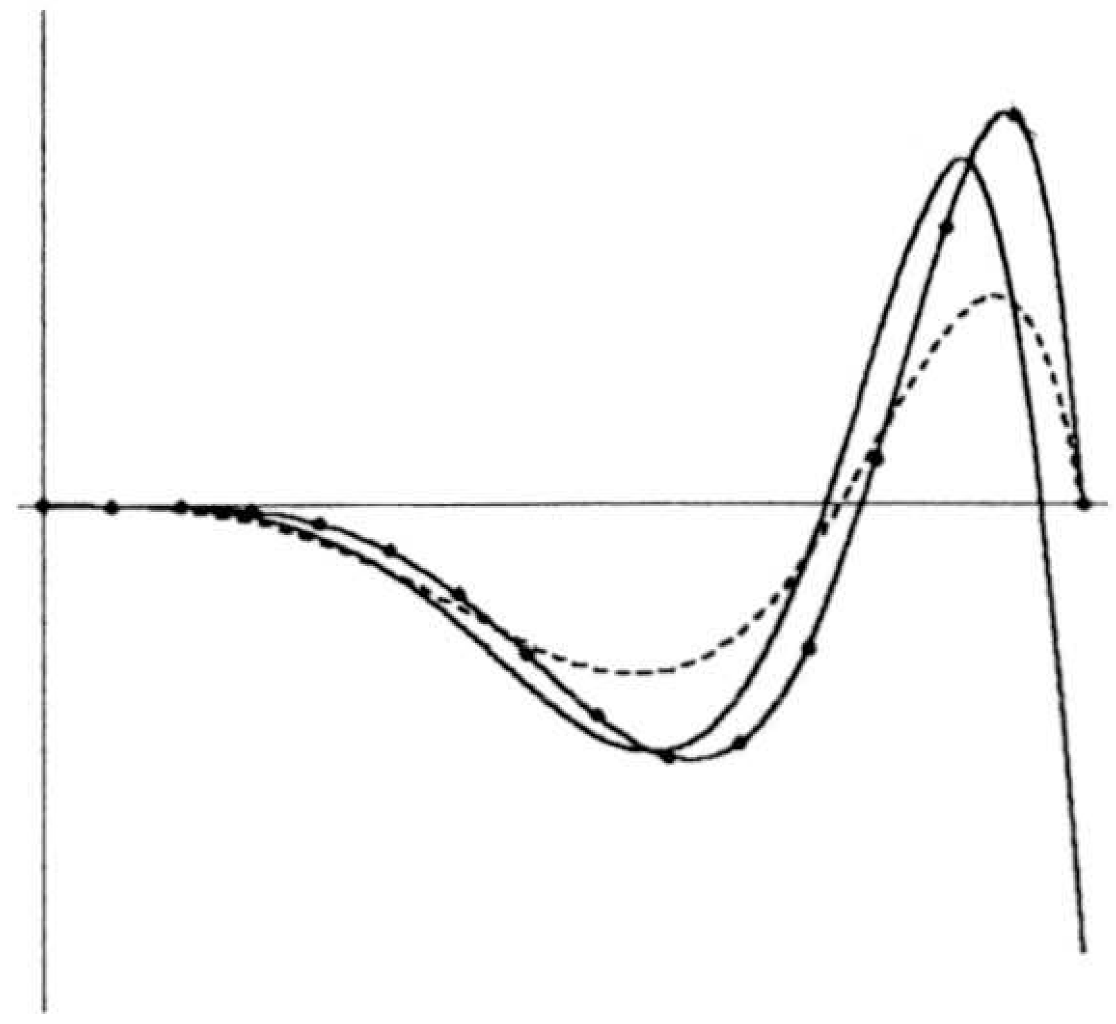

Fig. 3. $f(x) = \frac{25x^5}{1+x}(-x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x - 1)$, $n = 15$.

3.2.4. Refinamientos Relativos a la Clase de las Funciones. Ejemplos

A continuación establecemos refinamientos del Teorema 3.5. La idea es que allí no se aprovechaba toda la regularidad que poseía la función a aproximar. Ciertamente, se estimaba la diferencia $|D^r K_n f - D^r f|$ cuando $K_n(C^X_{h,k}(\sigma)) \subset C^{X'}_{r,r}(\sigma)$, siendo $C^X_{h,k}(\sigma)$ un cono de tipo II con $r \in \Gamma_\sigma$. Dado que $r + 1 < k$, se sabe que la función a aproximar $D^r f$ es más que continua; de hecho, es al menos de clase 2. Aplicaremos estas mejoras al ejemplo ya estudiado.

Después, con la misma idea anterior, mostraremos un resultado para operadores en las mismas hipótesis que las del Teorema 3.3, suponiendo ahora mayor regularidad de la función a aproximar. Aplicaremos el resultado para dar otras estimaciones de la velocidad de convergencia de la derivada de orden tres de los operadores de Meyer-König y Zeller.

Teorema 3.6. [1] *Supongamos las mismas condiciones que en el Teorema 3.5. con el mismo valor de $\beta_n^2(x)$ y de c.*

Entonces para $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$,

i)

$$|D^r f(x) - D^r K_n f(x)| \le \frac{1}{r!} |D^r f(x)| \, |D^r e_r(x) - D^r K_n e_r(x)|$$

[1] Muñoz-Delgado, F. J., Cárdenas-Morales, D. *Quantitative Aspects on Conservative Approximation,* Presentado en: The Fourth International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces.

$$+\frac{\delta_n\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n)+|D^{r+1}f(x)|\right)}{2r!}D^rK_ne_r(x)+N\beta_n^2(x),$$

donde

$$N=\max\left\{\frac{3\omega(D^{r+1}f,\delta_n)+|D^{r+1}f(x)|}{2\delta_n},N_1,N_2\right\},$$

siendo

$$N_1=\max_{\substack{r+2\le i\le k\\ \sigma_i\neq 0}}\left\{\frac{\|D^if\|}{2}\right\},$$

$$N_2=\max_{\substack{h\le i<r\\ \sigma_i\neq 0}}\left\{\frac{\|D^if\|}{2}+\frac{c^{r-i}\left(2|D^rf(x)|+\delta_n\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n)+|D^{r+1}f(x)|\right)\right)}{4(r-i)!}\right\}$$

ii)

$$|D^rf(x)-D^rK_nf(x)|\le\frac{1}{r!}|D^rf(x)|\,|D^re_r(x)-D^rK_ne_r(x)|$$

$$+\frac{\delta_n|D^{r+1}f(x)|}{2r!}D^rK_ne_r(x)+M\beta_n^2(x),$$

donde

$$M=\max\left\{\frac{|D^{r+1}f(x)|+\delta_n\|D^{r+2}f\|}{2\delta_n},M_1,M_2\right\},$$

siendo

$$M_1=\max_{\substack{r+2\le i\le k\\ \sigma_i\neq 0}}\left\{\frac{\|D^if\|}{2}\right\},$$

$$M_2=\max_{\substack{h\le i<r\\ \sigma_i\neq 0}}\left\{\frac{\|D^if\|}{2}+\frac{c^{r-i}\left(2|D^rf(x)|+\delta_n|D^{r+1}f(x)|\right)}{4(r-i)!}\right\}.$$

Demostración. Empezamos recordando que ya se probó en el Teorema 3.5 que

$$D^rg_x(t)\ge(t-x)^2\ \forall x\in X',\ \forall t\in X \tag{3.19}$$

y

$$\sigma_iD^ig_x(t)\ge 2 \text{ para } h\le i\le k \text{ con } i\neq r,\ \sigma_i\neq 0. \tag{3.20}$$

i) Sean $f\in C^k(X)$, $x\in X'$ y $\delta_n>0$. Para cualquier $t\in X$ hay un punto ξ entre x y t tal que

$$D^rf(t)-D^rf(x)=(t-x)\left(D^{r+1}f(\xi)-D^{r+1}f(x)\right)+D^{r+1}f(x)(t-x).$$

Por otra parte,

$$|D^{r+1}f(\xi) - D^{r+1}f(x)| \le \omega(D^{r+1}f, |\xi - x|) \le \omega(D^{r+1}f, |t-x|)$$
$$\le \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n}\right)\omega(D^{r+1}f, \delta_n).$$

Por tanto,

$$|D^r f(t) - D^r f(x)| \le |t-x|\left(1+\frac{|t-x|}{\delta_n}\right)\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)||t-x|$$

$$= |t-x|\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right) + \frac{(t-x)^2}{\delta_n}\omega(D^{r+1}f,\delta_n)$$

$$\le \left(\frac{(t-x)^2}{2\delta_n} + \frac{\delta_n}{2}\right)\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right) + \frac{(t-x)^2}{\delta_n}\omega(D^{r+1}f,\delta_n)$$

$$= (t-x)^2\left(\frac{3\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|}{2\delta_n}\right) + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right),$$

luego, usando (3.19), obtenemos

$$D^r\Bigg(f - D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + \left(\frac{3\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|}{2\delta_n}\right)g_x$$
$$+\frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!}\Bigg) \ge 0$$

y

$$D^r\Bigg(-f + D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + \left(\frac{3\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|}{2\delta_n}\right)g_x$$
$$+\frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!}\Bigg) \ge 0.$$

Por la definición de N, además es cierto que

$$D^r\left(f - D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + g_x N + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!}\right) \ge 0$$

y

$$D^r\left(-f + D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + g_x N + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!}\right) \ge 0.$$

También, usando (3.20), tenemos que para $r+1 < i \leq k$ con $\sigma_i \neq 0$,

$$\sigma_i D^i \left(f - D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + g_x N + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!} \right)$$

$$= \sigma_i D^i f + N\sigma_i D^i g_x \geq 0$$

y

$$\sigma_i D^i \left(-f + D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + g_x N + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!} \right)$$

$$= -\sigma_i D^i f + M\sigma_i D^i g_x \geq 0,$$

y para $h \leq i < r$ con $\sigma_i \neq 0$,

$$\sigma_i D^i \left(f - D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + g_x N + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!} \right)$$

$$= \sigma_i D^i f - \sigma_i \frac{D^r f(x) e_{r-i}}{(r-i)!}$$

$$+\sigma_i \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_{r-i}}{(r-i)!} + N\sigma_i D^i g_x$$

$$\geq -\left\|D^i f\right\| - \frac{c^{r-i}\left|D^r f(x)\right|}{(r-i)!} - \frac{c^{r-i}\delta_n\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)}{2(r-i)!} + 2N \geq 0$$

y

$$\sigma_i D^i \left(-f + D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + g_x N + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!} \right)$$

$$= -\sigma_i D^i f + \sigma_i \frac{D^r f(x) e_{r-i}}{(r-i)!}$$

$$+\sigma_i \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_{r-i}}{(r-i)!} + N\sigma_i D^i g_x$$

$$\geq -\left\|D^i f\right\| - \frac{c^{r-i}\left|D^r f(x)\right|}{(r-i)!} - \frac{c^{r-i}\delta_n\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)}{2(r-i)!} + 2N \geq 0.$$

De otra forma,

$$f - D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f, \delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!}$$

$$+Ng_x \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)$$

y

$$-f + D^r f(x)\frac{e_r}{r!} + \frac{\delta_n}{2}\left(\omega(D^{r+1}f,\delta_n) + |D^{r+1}f(x)|\right)\frac{e_r}{r!}$$
$$+Ng_x \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X).$$

Nuevamente basta usar la hipótesis sobre K_n y la definición de $\beta_n^2(x)$ para acabar la demostración como se ha hecho en los casos anteriores.

ii) Sean $f \in C^k(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$. Para cualquier $t \in X$, usando el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $D^r f$, tenemos

$$D^r f(t) - D^r f(x) \leq D^{r+1} f(x)(t-x) + \|D^{r+2}f\|\frac{(t-x)^2}{2},$$

luego

$$|D^r f(t) - D^r f(x)| \leq |D^{r+1}f(x)|\left(\frac{(t-x)^2}{2\delta_n} + \frac{\delta_n}{2}\right) + \|D^{r+2}f\|\frac{(t-x)^2}{2}.$$

Si ahora usamos de nuevo (3.19) obtenemos

$$D^r\left(f - \frac{D^r f(x)}{r!}e_r + \frac{|D^{r+1}f(x)| + \delta_n\|D^{r+2}f\|}{2\delta_n}g_x + \frac{\delta_n|D^{r+1}f(x)|e_r}{2r!}\right) \geq 0$$

y

$$D^r\left(-f + \frac{D^r f(x)}{r!}e_r + \frac{|D^{r+1}f(x)| + \delta_n\|D^{r+2}f\|}{2\delta_n}g_x + \frac{\delta_n|D^{r+1}f(x)|e_r}{2r!}\right) \geq 0.$$

y usando la definición de M,

$$D^r\left(f - \frac{D^r f(x)}{r!}e_r + Mg_x + \frac{\delta_n|D^{r+1}f(x)|e_r}{2r!}\right) \geq 0$$

y

$$D^r\left(-f + \frac{D^r f(x)}{r!}e_r + Mg_x + \frac{\delta_n|D^{r+1}f(x)|e_r}{2r!}\right) \geq 0.$$

También, usando (3.20), tenemos que para $r+1 < i \leq k$ con $\sigma_i \neq 0$,

$$\sigma_i D^i\left(f - \frac{D^r f(x)}{r!}e_r + Mg_x + \frac{\delta_n|D^{r+1}f(x)|e_r}{2r!}\right)$$

$$= \sigma_i D^i f + M\sigma_i D^i g_x \geq 0$$

y

$$\sigma_i D^i \left(-f + \frac{D^r f(x)}{r!} e_r + M g_x + \frac{\delta_n |D^{r+1} f(x)| e_r}{2r!} \right)$$
$$= -\sigma_i D^i f + M\sigma_i D^i g_x \geq 0,$$

y para $h \leq i < r$ con $\sigma_i \neq 0$,

$$\sigma_i D^i \left(f - \frac{D^r f(x)}{r!} e_r + M g_x + \frac{\delta_n |D^{r+1} f(x)| e_r}{2r!} \right)$$

$$= \sigma_i D^i f - \sigma_i \frac{D^r f(x) e_{r-i}}{(r-i)!} + \sigma_i \frac{\delta_n |D^{r+1} f(x)| e_{r-i}}{2(r-i)!} + M\sigma_i D^i g_x$$

$$\geq -\left\| D^i f \right\| - \frac{c^{r-i} |D^r f(x)|}{(r-i)!} - \frac{c^{r-i} \delta_n |D^{r+1} f(x)|}{2(r-i)!} + 2M \geq 0$$

y

$$\sigma_i D^i \left(-f + \frac{D^r f(x)}{r!} e_r + M g_x + \frac{\delta_n |D^{r+1} f(x)| e_r}{2r!} \right)$$

$$= -\sigma_i D^i f + \sigma_i \frac{D^r f(x) e_{r-i}}{(r-i)!} + \sigma_i \frac{\delta_n |D^{r+1} f(x)| e_{r-i}}{2(r-i)!} + M\sigma_i D^i g_x$$

$$\geq -\left\| D^i f \right\| - \frac{c^{r-i} |D^r f(x)|}{(r-i)!} - \frac{c^{r-i} \delta_n |D^{r+1} f(x)|}{2(r-i)!} + 2M \geq 0.$$

De otra forma,

$$f - \frac{D^r f(x)}{r!} e_r + M g_x + \frac{\delta_n |D^{r+1} f(x)| e_r}{2r!} \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)$$

y

$$-f + \frac{D^r f(x)}{r!} e_r + M g_x + \frac{\delta_n |D^{r+1} f(x)| e_r}{2r!} \in C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X),$$

de donde se obtiene ya la estimación buscada. □

Ejemplo 3.2. *Consideremos nuevamente la sucesión de operadores del Ejemplo 3.1 y sea $f \in C^2[0,1]$ y $x \in [0,1]$.*

Entonces para $n \in \mathbb{N}$

i)

$$|K_n f(x) - f(x)| \leq \frac{\omega(Df, \frac{1}{\sqrt{n}}) + |Df(x)|}{2\sqrt{n}}$$

$$+x \max\left\{ \frac{3\omega(Df, \frac{1}{\sqrt{n}}) + |Df(x)|}{2\sqrt{n}}, \frac{\|D^2 f\|}{2n} \right\},$$

ii)

$$|K_n f(x) - f(x)| \leq \frac{(1+x)|Df(x)|}{2\sqrt{n}} + \frac{x\|D^2 f\|}{2n}.$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 3.6 con $X = X' = [0,1]$, $k = 0$ y $r = 2$.

i) Sea $\delta_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicando el apartado i) del Teorema 3.6,

$$|f(x) - K_n f(x)| \leq |f(x)|\,|1 - K_n e_0(x)| + N\beta_n^2(x)$$

$$+\frac{\delta_n}{2}\left(\omega(Df, \delta_n) + |Df(x)|\right) K_n e_0(x),$$

donde ya sabemos que $\beta_n^2(x) = \frac{x}{n}$, $K_n e_0 = e_0$ y donde

$$N = \max\left\{ \frac{\|D^2 f\|}{2}, \frac{3\omega(Df, \delta_n) + |Df(x)|}{2\delta_n} \right\}.$$

Sustituyendo tenemos

$$|f(x) - K_n f(x)| \leq x \max\left\{ \frac{\|D^2 f\|}{2n}, \frac{3\omega(Df, \delta_n) + |Df(x)|}{2n\delta_n} \right\}$$

$$+\frac{\delta_n}{2}\left(\omega(Df, \delta_n) + |Df(x)|\right).$$

Basta tomar $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ y la prueba de i) está completa.

ii) Sea $\delta_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicando el apartado ii) del Teorema 3.6,

$$|f(x) - K_n f(x)| \leq |f(x)|\,|1 - K_n e_0(x)| + N\beta^2(x) + \frac{\delta_n |Df(x)|}{2} K_n e_0(x),$$

con $\beta_n^2(x) = \frac{x}{n}$, $K_n e_0 = e_0$ y

$$N = \max\left\{ \frac{|Df(x)| + \delta_n \|D^2 f\|}{2\delta_n}, \frac{\|D^2 f\|}{2} \right\}.$$

Sustituyendo,

$$|f(x) - K_n f(x)| \leq \max\left\{ \frac{x|Df(x)|}{2n\delta_n} + \frac{x\|D^2 f\|}{2n}, \frac{x\|D^2 f\|}{2n} \right\} + \frac{\delta_n |Df(x)|}{2}$$

$$= \frac{x|Df(x)|}{2n\delta_n} + \frac{x\|D^2 f\|}{2n} + \frac{\delta_n |Df(x)|}{2}.$$

Tomando otra vez $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ terminamos la demostración. □

Establecemos ahora un resultado análogo al anterior pero en relación a la conservación de conos arbitrarios. Trabajamos ahora con la posible mayor regularidad de la función que queremos aproximar.

Teorema 3.7. [1] *Supongamos las mismas condiciones que en el Teorema 3.3. con el mismo valor de $\beta_n^2(x)$ y de c.*

i) *Para $f \in C^{k+1}(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$,*

$$\left|D^k f(x) - D^k K_n f(x)\right| \leq \frac{1}{k!}\left|D^k f(x)\right|\left|D^k e_k(x) - D^k K_n e_k(x)\right|$$

$$\frac{\delta_n \left(\omega(D^{k+1} f, \delta_n) + |D^{k+1} f(x)|\right)}{2k!} D^k K_n e_k(x) + N\beta_n^2(x),$$

donde

$$N = \max\left\{ \frac{3\omega(D^{k+1} f, \delta_n) + |D^{k+1} f(x)|}{2\delta_n}, \right.$$

$$\left. \max_{\substack{h \leq i < k \\ \sigma_i \neq 0}} \left\{ \|D^i f\| + \frac{c^{k-i}\left(2|D^k f(x)| + \delta_n\left(\omega(D^{k+1} f, \delta_n) + |D^{k+1} f(x)|\right)\right)}{2(k-i)!} \right\} \right\}.$$

ii) *Para $f \in C^{k+2}(X)$, $x \in X'$ y $\delta_n > 0$,*

$$\left|D^k f(x) - D^k K_n f(x)\right| \leq \frac{1}{k!}\left|D^k f(x)\right|\left|D^k e_k(x) - D^k K_n e_k(x)\right|$$

$$+ \frac{\delta_n |D^{k+1} f(x)|}{2k!} D^k K_n e_k(x) + M\beta_n^2(x),$$

donde

$$M = \max\left\{ \frac{|D^{k+1} f(x)| + \delta_n \|D^{k+2} f\|}{2\delta_n}, \right.$$

$$\left. \max_{\substack{h \leq i < k \\ \sigma_i \neq 0}} \left\{ \|D^i f\| + \frac{c^{k-i}\left(2|D^k f(x)| + \delta_n |D^{k+1} f(x)|\right)}{2(k-i)!} \right\} \right\}.$$

[1] Muñoz-Delgado, F. J., Cárdenas-Morales, D. *Quantitative Estimates of Korovkin-type for Shape Preserving Operators,* Presentado en: Guangzhou International Symposium on Computacional Mathematics.

Demostración. Basta seguir el mismo esquema que se utilizó en la demostración del teorema anterior. □

Ejemplo 3.3. *Sea M_n la sucesión de operadores de Meyer-König y Zeller.*

i) *Para $f \in C^4(X)$, $n \geq 5$ y $x \in X'$,*

$$\left|D^3 M_n f(x) - D^3 f(x)\right| \leq \frac{10n(n+9)}{(n-1)(n-2)(n-3)}|D^3 f(x)|$$

$$+\frac{\Gamma_n(x)}{2}\frac{n(n+3)}{(n-1)(n-2)}\omega(D^4 f, \Gamma_n(x)) + \frac{\Gamma_n(x)}{2}\frac{n(n+3)}{(n-1)(n-2)}|D^4 f(x)|$$

$$+\max\left\{\frac{\Gamma_n(x)\left(3\omega(D^4 f, \Gamma_n(x)) + |D^4 f(x)|\right)}{2},\right.$$

$$\left.\Gamma_n^2(x)\Big(\|D^2 f\| + |D^3 f(x)| + \frac{\Gamma_n(x)}{2}\left(\omega(D^4 f, \Gamma_n(x)) + |D^4 f(x)|\right)\Big)\right\}.$$

ii) *Para $f \in C^5(X)$, $n \geq 5$ y $x \in X'$,*

$$\left|D^3 M_n f(x) - D^3 f(x)\right| \leq \frac{10n(n+9)}{(n-1)(n-2)(n-3)}|D^3 f(x)|$$

$$+\frac{\Gamma_n(x)}{2}\frac{n(n+3)}{(n-1)(n-2)}|D^4 f(x)| + \max\left\{\frac{\Gamma_n(x)}{2}\left(|D^4 f(x)| + \Gamma_n(x)\|D^5 f\|\right),\right.$$

$$\left.\Gamma_n^2(x)\left(\|D^2 f\| + |D^3 f(x)| + \frac{\Gamma_n(x)}{2}|D^4 f(x)|\right)\right\},$$

donde

$$\Gamma_n^2(x) = \frac{x(1-x)(2-x)n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{\frac{5}{2}(1-x)^2 n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$+\frac{(4+|6x-3|)n}{(n-1)(n-2)}.$$

Demostración. Podemos aplicar a esta sucesión de operadores el teorema anterior de la misma forma que entonces se utilizó el Teorema 3.3. Así, para $f \in C^4(X)$, $x \in X'$, obtenemos

$$\left|D^3 M_n f(x) - D^3 f(x)\right| \leq \frac{1}{3!}\left|D^3 f(x)\right| \cdot \left|D^3 M_n e_3(x) - D^3 e_3(x)\right|$$

$$+\frac{\beta_n(x)}{2}\frac{D^3M_ne_3(x)}{3!}\omega(D^4f,\beta_n(x))$$

$$+\frac{\beta_n(x)}{2}\frac{D^3M_ne_3(x)}{3!}|D^4f(x)|$$

$$+\max\left\{\frac{\beta_n(x)\left(3\omega(D^4f,\beta_n(x))+|D^4f(x)|\right)}{2},\right.$$

$$\left.\beta_n^2(x)\Big(\|D^2f\|+|D^3f(x)|+\frac{\beta_n(x)}{2}\left(\omega(D^4f,\beta_n(x))+|D^4f(x)|\right)\Big)\right\},$$

y para $f\in C^5(X)$, $n\geq 5$ y $x\in X'$, se tiene

$$\left|D^3M_nf(x)-D^3f(x)\right|\leq\frac{1}{3!}\left|D^3f(x)\right|\cdot\left|D^3M_ne_3(x)-D^3e_3(x)\right|$$

$$+\frac{\beta_n(x)}{2}\frac{D^3M_ne_3(x)}{3!}|D^4f(x)|+\max\left\{\frac{\beta_n(x)}{2}\left(|D^4f(x)|+\beta_n(x)\|D^5f\|\right),\right.$$

$$\left.\beta_n^2(x)\left(\|D^2f\|+|D^3f(x)|+\frac{\beta_n(x)}{2}|D^4f(x)|\right)\right\}.$$

Basta ahora recuperar las siguientes estimaciones que se obtuvieron en la Sección 3.2.2 en las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.17) para, una vez sustituidas en las desigualdades anteriores, acabar la demostración:

$$\frac{1}{3!}D^3M_ne_3(x)\leq\frac{n(n+3)}{(n-1)(n-2)}\ (n\geq 4),$$

$$\frac{1}{3!}\left|D^3M_ne_3(x)-D^3e_3(x)\right|\leq\frac{10n(n+9)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\ (n\geq 4),$$

$$\beta_n^2(x)\leq\frac{x(1-x)(2-x)n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$+\frac{5(1-x)^2n^2}{2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}+\frac{(4+|6x-3|)n}{(n-1)(n-2)}\ (n\geq 5).$$

□

DeVore[1] y Censor[2] ya habían trabajado con refinamientos de estas características a la vista del resultado establecido por Shisha y Mond (Teorema 1.4); utilizaron no obstante técnicas diferentes.

En concreto, DeVore probó un resultado bajo las mismas hipótesis que las del Teorema 1.4 aunque para funciones con derivada continua, para lo que utilizó fuertemente la desigualdad de Cauchy-Schwartz para operadores lineales positivos. En nuestros resultados, desprovistos de la positividad (o mejor dicho de la k-convexidad), ésto no es posible.

Por otra parte, Censor, además de repetir lo que DeVore ya había establecido, añadió una estimación bajo el supuesto añadido en que la función a aproximar tuviera segunda derivada continua. Utilizó para ello la elemental desigualdad $\omega(Df,\delta) \leq \|D^2 f\|\delta$. Dicha estimación, en el caso usual en que $K_n e_0 = e_0$, queda como sigue:

$$\|K_n - f\| \leq \mu_n \|Df\| + 2\mu_n^2 \|D^2 f\|.$$

El método seguido en la demostración del apartado ii) de nuestro Teorema 3.6 podría utilizarse ahora junto con la desigualdad de Cauchy-Schwartz para mejorar ligeramente esta última estimación de DeVore.

---

[1] DeVore, R. A. *Optimal Convergence of Positive Linear Operators,* Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, (1972), 101–119

[2] Censor, E. *Quantitative Results for Positive Linear Approximation Operators,* J. Approx. Th., 4, (1971), 442–450

3.3. Extensión Cuantitativa del Teorema de Korovkin. Ejemplos

Entramos ya en el segundo gran apartado de este capítulo. Como se avanzó, estimamos la velocidad de convergencia en aquellos procesos más generales de aproximación que recoge el Teorema 2.3.

Con una amplia gama de comentarios trataremos de conectar el siguiente resultado con todo lo que se ha ido mostrando a lo largo de las secciones anteriores, además de indicar que las hipótesis bajo las que trabaja extienden una buena cantidad de los resultados sobre aproximación conservativa que aparecen referenciados en esta memoria.

Teorema 3.6. [1] *Sean $X' \subset X$ subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^m$, siendo X convexo. Sea $B \subset \mathbb{R}^{X'}$ ($\mathbb{R}^X \subset \mathbb{R}^{X'}$), sea A un subespacio de $C(X)$ con $A \subset B$ y sea $L : B \to \mathbb{R}^{X'}$ un operador lineal verificando que $L(A) \subset C(X)$.*

Sea $P = \{f \in B : Lf \geq 0\}$ y sea C un cono de A. Asumamos las siguientes hipótesis:

v1) *existe una función $u \in A$ tal que $Lu = \mathbb{1}$.*

v2) *para todo punto $x \in X'$, existe una función $\varphi_x \in C$ tal que:*

(a) $L\varphi_x(x) = 0$,

(b) *existen dos constantes $M, \lambda \in \mathbb{R}$ con $M > 0$ y $\lambda \geq 1$ tal que $L\varphi_x(t) \geq M|t-x|^\lambda$ $\forall t \in X, \forall x \in X'$,*

(c) *para cada $f \in A$, existe una constante $\alpha = \alpha(f) > 0$ tal que si $\alpha' \geq \alpha$, entonces*

$$\alpha'\varphi_x + \beta f + \gamma u \in C \;\forall x \in X',\; \forall \beta \in [-1,1],\; \forall \gamma \in [-\|Lf\|, 3\|Lf\|].$$

Sea $K_n : A \to B$ una sucesión de operadores lineales verificando las siguientes propiedades:

(k1) $K_n(P \cap C) \subset P$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

(k2) *para cada $n \in \mathbb{N}$, $L(K_n u)$ está acotada y*

$$\mu_n^\lambda := \sup_{x \in X'} \{|L(K_n\varphi_x)(x)|\} < \infty.$$

[1] Cárdenas-Morales, D., Muñoz-Delgado, F. J. *Quantitative Korovkin-type Results on Conservative Approximation,* (enviado)

Sea H una constante positiva.

Bajo estas condiciones, para cada $f \in A$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|L(K_nf) - Lf\|_{X'} \leq \omega(Lf, H\mu_n)\|L(K_nu)\|_{X'} + N$$

$$+\|Lf\|_{X'} \cdot \|L(K_nu) - \mathbb{1}\|_{X'}, \tag{3.21}$$

donde

$$N = \max\left\{\mu_n^\lambda \inf\{\Omega\}, \frac{\omega(Lf, H\mu_n)}{MH^\lambda}\right\},$$

siendo

$$\Omega = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha\varphi_t + \beta f + \gamma u\|Lf\| \in C \,\forall\beta \in [-1,1],\, \forall\gamma \in [-1,3],\, \forall t \in X'\right\},$$

que, debido a la hipótesis (v2.c), no es vacío.
Aquí el módulo de continuidad se toma sobre X.
Nótese que si $A = C$, entonces $\inf\{\Omega\} = 0$ y $N = \frac{\omega(Lf, H\mu_n)}{MH^\lambda}$.

Comentario 3.8. Este teorema representa una versión cuantitativa del Teorema 2.3. Se pone de manifiesto viendo que haciendo tender n hacia infinito, si $\|L(K_n\varphi_x) - L\varphi_x\| \to 0 \;\forall x \in X$, entonces $\mu_n \to 0$ y por consiguiente $N \to 0$. Si además $\|L(K_nu) - Lu\| \to 0$, entonces $L(K_nf)$ converge uniformemente a Lf en X' para toda $f \in A$.

Comentario 3.9. La idea de introducir la constante positiva H apareció por primera vez en un resultado de Mond[1] y más tarde en otro trabajo suyo con Vasudevan[2] . Toman ventaja de ella para obtener resultados más generales, y a veces mejores, que el de Shisha y Mond (Teorema 1.4) y el posterior refinamiento de DeVore comentado al final de la Sección 3.2.4.

Entrando un poco más en detalle diremos que estos últimos, como consecuencia de sus resultados, podían conseguir las siguientes estimaciones del operador de Bernstein:

$$\|B_nf - f\| \leq 2\omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}}),$$

[1] Mond, B. *On the Degree of Approximation by Linear Positive Operators,* J. Approx. Th., 18, (1976), 304–306

[2] Mond, B., Vasudevan, R. *On Approximation by Linear Positive Operators,* J. Approx. Th., 30, (1980), 334–336

$$\|B_nf - f\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\omega(Df, \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Sin embargo no son las mejores como se refleja por ejemplo en un trabajo de Popoviviu[1] o en un libro de Lorentz[2] , donde puede leerse

$$\|B_nf - f\| \leq \frac{5}{4}\omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}}),$$

$$\|B_nf - f\| \leq \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega(Df, \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Estas estimaciones sí que se pueden obtener respectivamente de los enunciados de Mond y Vasudevan, que ahora quedan evidentemente como casos particulares de los nuestros.

Demostración del Teorema 3.6 Sean f una función de A, $x \in X'$, $n \in \mathbb{N}$ y δ_n un número positivo. Si $|t-x| > \delta_n$, entonces

$$|(Lf)(t) - (Lf)(x)| \leq \omega(Lf, |t-x|\delta_n\delta_n^{-1}) \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n}\right)\omega(Lf, \delta_n) \tag{3.22}$$

$$\leq \left(1 + \frac{|t-x|^\lambda}{\delta_n^\lambda}\right)\omega(Lf, \delta_n),$$

y, usando la suposición (v2.b),

$$|(Lf)(t) - (Lf)(x)| \leq \left(1 + \frac{(L\varphi_x)(t)}{M\delta_n^\lambda}\right)\omega(Lf, \delta_n).$$

Esta desigualdad también es válida obviamente si $|t-x| \leq \delta_n$. Entonces, usando (v1),

$$\pm\big((Lf)(x)u - f\big) + \omega(Lf, \delta_n)u + \frac{\omega(Lf, \delta_n)}{M\delta_n^\lambda}\varphi_x \in P. \tag{3.23}$$

Por otra parte, si consideramos el conjunto

$$\Omega_{\delta_n,x} = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \begin{array}{l} f - (Lf)(x)u + \omega(Lf, \delta_n)u + \alpha\varphi_t \in C \\ (Lf)(x)u - f + \omega(Lf, \delta_n)u + \alpha\varphi_t \in C \end{array} \forall t \in X'\right\},$$

[1] Popoviciu, T. *Sur L'approximation des Fonctions Convexes d'ordre Supérieur,* Mathematica (Cluj), 10, (1935), 49–54

[2] Lorentz, G. G. *Bernstein Polynomials,* Second Edition, Chelsea Publishing Company, New York, (1986)

que contiene a Ω (obsérvese (v2.c) y que $\pm Lf(x)+\omega(Lf,\delta_n)\in[-\|Lf\|,3\|Lf\|]$), y si llamamos

$$N(\delta_n)=\max\left\{\inf\{\Omega_{\delta_n,x}\},\frac{\omega(Lf,\delta_n)}{M\delta_n^\lambda}\right\},\tag{3.24}$$

tenemos que

$$\pm\big((Lf)(x)u-f\big)+\omega(Lf,\delta_n)u+N(\delta_n)\varphi_x\in P\cap C.\tag{3.25}$$

Entonces la hipótesis (k1) permite obtener que

$$(Lf)(x)L(K_nu)-L(K_nf)+\omega(Lf,\delta_n)L(K_nu)+N(\delta_n)L(K_n\varphi_x)\geq 0$$

y

$$L(K_nf)-(Lf)(x)L(K_nu)+\omega(Lf,\delta_n)L(K_nu)+N(\delta_n)L(K_n\varphi_x)\geq 0.$$

Si evaluamos esas dos funciones en el punto x, se obtiene que

$$|L(K_nf)(x)-(Lf)(x)L(K_nu)(x)|\leq\omega(Lf,\delta_n)L(K_nu)(x)$$

$$+N(\delta_n)L(K_n\varphi_x)(x),\tag{3.26}$$

de donde, teniendo en cuenta la definición de μ_n^λ, es inmediato que

$$|L(K_nf)(x)-(Lf)(x)L(K_nu)(x)|\leq\omega(Lf,\delta_n)L(K_nu)(x)+N(\delta_n)\mu_n^\lambda.\tag{3.27}$$

Ahora, si $\mu_n>0$, tomamos $\delta_n=H\mu_n$. De esta forma, usando (3.24) y el hecho de que

$$\inf\{\Omega_{\delta_n,x}\}\leq\inf\{\Omega\},$$

tenemos

$$\mu_n^\lambda N(H\mu_n)=\max\left\{\mu_n^\lambda\inf\{\Omega_{H\mu_n,x}\},\frac{\omega(Lf,H\mu_n)}{MH^\lambda}\right\}\leq N.$$

Por lo tanto, de (3.27), se deduce que

$$|L(K_nf)(x)-(Lf)(x)L(K_nu)(x)|\leq\omega(Lf,H\mu_n)L(K_nu)(x)+N$$

$$\leq\omega(Lf,H\mu_n)\|L(K_nu)\|_{X'}+N.$$

Como además

$$|(Lf)(x)L(K_nu)(x) - (Lf)(x)| \leq \|Lf\|_{X'} \cdot \|L(K_nu) - \mathbb{1}\|_{X'}, \qquad (3.28)$$

resulta que si se suman estas dos desigualdades se obtiene (3.21).
Si $\mu_n = 0$, entonces la ecuación (3.27) implica que

$$|L(K_nf)(x) - (Lf)(x)L(K_nu)(x)| \leq \omega(Lf, \delta_n)L(K_nu)(x).$$

Si en esta desigualdad se hace tender δ_n hacia cero se tiene la igualdad

$$L(K_nf)(x) = (Lf)(x)L(K_nu)(x),$$

a partir de la cual, usando (3.28),

$$|L(K_nf)(x) - (Lf)(x)| \leq \|Lf\|_{X'} \cdot \|L(K_nu) - \mathbb{1}\|_{X'},$$

lo que también implica (3.21). □

Comentario 3.10. La hipótesis de convexidad de X hace que la ecuación (3.22) sea cierta. Sin embargo, se puede trabajar sin usar esta suposición si se usa el coeficiente de deformación de la convexidad que Jiménez-Pozo[1] introduce y usa para establecer un resultado cuantitativo de tipo Korovkin. Vamos a explicar este uso con algo más de detenimiento.

Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^m$, sean $x, y \in X$ y sea $R(x,y)$ el conjunto de las curvas rectificables de Jordan $\Gamma[x,y]$ que unen x e y. Se dice que X tiene un coeficiente de deformación de la convexidad $\rho = \rho(X)$ si $R(x,y) \neq \emptyset \ \forall x, y \in X$ y

$$\sup_{x,y \in X, x \neq y} \left\{ \inf_{R(x,y)} \left\{ \frac{l(\Gamma[x,y])}{|x-y|} \right\} \right\} = \rho < \infty,$$

donde $l(\Gamma[x,y])$ es la longitud de $\Gamma[x,y]$. Si X es compacto, entonces X es convexo si, y sólo si, $\rho = \rho(X) = 1$.

Si f es una función acotada definida en X con coeficiente de deformación de la convexidad ρ, entonces

$$\omega(f, \alpha\beta) \leq E(\rho\alpha + 1)\omega(f, \beta), \alpha, \beta > 0.$$

---

[1] Jiménez-Pozo, M. A. *Déformation de la Convexité et Théorèmes du Type Korovkin,* C. R. Acad. Sc. Paris, 290, (1980), 213–215

Ahora podemos usar esta desigualdad para volver a escribir la demostración del teorema anterior para un conjunto X no necesariamente convexo y obtener la ecuación (3.21) con

$$N = \max\left\{\mu_n^\lambda \inf\{\Omega\}, \rho\frac{\omega(Lf, H\mu_n)}{MH^\lambda}\right\}.$$

Comentario 3.11. Nótese que de la ecuación (3.26), a la que se llega sin usar la hipótesis (k2), podemos obtener la siguiente estimación puntual para $f \in A$, $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_n > 0$,

$$|L(K_n f)(x) - (Lf)(x)| \leq \omega(Lf, \delta_n)L(K_n u)(x) + N(\delta_n)L(K_n\varphi_x)(x)$$

$$+|Lf(x)| \cdot |L(K_n u)(x) - 1|. \tag{3.29}$$

A continuación ponemos de manifiesto cómo a partir de esta estimación se pueden obtener las que aparecieron en las tesis del Teorema 3.3 y del Teorema 3.5.

Si en el teorema anterior tomamos $X = [a, b]$, X' un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ con $X' \subset X$, L el operador D^k, $A = C^k(X)$, $B = C^k(X')$, $h < k$ y $C = C^X_{h,k-1}(\sigma)$, $u = \frac{e_k}{k!}$, que verifica la hipótesis (v1) y $\varphi_x = g_x$ $\forall x \in X'$, siendo g_x como en el Teorema 3.3, que verifica claramente la hipótesis (v2) con $M = 1$ y $\lambda = 2$, entonces, de la ecuación (3.29), para una sucesión de operadores K_n en las hipótesis de ese teorema (nótese que aquí $P \cap C = C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)$) se obtiene que

$$|D^k(K_n f)|(x) - D^k f(x)| \leq \frac{1}{k!}\omega(D^k f, \delta_n)D^k(K_n e_k)(x)$$

$$+N(\delta_n)D^k(K_n g_x)(x) + |D^k f(x)|\left|\frac{1}{k!}D^k(K_n e_k)(x) - 1\right|, \tag{3.30}$$

donde

$$N(\delta_n) = \max\left\{\inf\{\Omega_{\delta_n,x}\}, \frac{\omega(D^k f, \delta_n)}{\delta_n^2}\right\},$$

con

$$\Omega_{\delta_n,x} = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \pm\Big(f - \frac{(D^k f)(x)e_k}{k!}\Big) + \frac{\omega(D^k f, \delta_n)e_k}{k!}\right.$$

$$+\alpha g_t \in C^X_{h,k-1}(\sigma)\ \forall t \in X' \Big\}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\max_{\substack{h\le i<k\\ \sigma_i\neq 0}} \left\{ \|D^i f\|_X + \frac{|D^k f(x)| + \omega(D^k f,\delta_n)}{(k-i)!} \right\} \in \Omega_{\delta_n,x}$$

y por consiguiente que

$$N(\delta_n) \le \max\left\{ \max_{\substack{h\le i<k\\ \sigma_i\neq 0}} \left\{ \|D^i f\|_X + \frac{|D^k f(x)| + \omega(D^k f,\delta_n)}{(k-i)!} \right\}, \frac{\omega(D^k f,\delta_n)}{\delta_n^2} \right\},$$

de la ecuación (3.30) aparece la estimación obtenida en la tesis del Teorema 3.3.

Por otra parte, si en el teorema tomamos X y X' como antes, L el operador D^r, $A = C^k(X)$, $B = C^r(X')$, si $h = r$, entonces $C = C^X_{r+1,k}(\sigma)$, y $C = C^X_{h,r-1}(\sigma) \cap C^X_{r+1,k}(\sigma)$ en otro caso, $u = \frac{e_r}{r!}$, que verifica la hipótesis (v1) y $\varphi_x = g_x\ \forall x \in X'$, siendo g_x como en el Teorema 3.5, que verifica claramente la hipótesis (v2) con $M = 1$ y $\lambda = 2$, entonces, también de (3.29), para una sucesión de operadores K_n en las hipótesis de ese teorema (nótose que $P \cap C = C^X_{h,k}(\sigma) \cap C^k(X)$) se obtiene que

$$|D^r(K_n f)|(x) - D^r f(x)| \le \frac{1}{r!}\omega(D^r f,\delta_n) D^r(K_n e_r)(x)$$

$$+N(\delta_n) D^r(K_n g_x)(x) + |D^r f(x)| \left| \frac{1}{r!} D^r(K_n e_r)(x) - 1 \right|, \qquad (3.31)$$

donde

$$N(\delta_n) = \max\left\{ \inf\{\Omega_{\delta_n,x}\}, \frac{2\omega(D^r f,\delta_n)}{\delta_n^2} \right\},$$

con

$$\Omega_{\delta_n,x} = \Big\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \pm\Big(f - \frac{(D^r f)(x) e_r}{r!} \Big) + \frac{\omega(D^r f,\delta_n) e_r}{r!}$$

$$+\alpha g_t \in C^X_{h,r-1}(\sigma) \cap C^X_{r+1,k}(\sigma)\ \forall t \in X' \Big\}.$$

Utilizando ahora que

$$\max\left\{ \max_{\substack{r+1\le i\le k\\ \sigma_i\neq 0}} \{\|D^i f\|_X\}, \max_{\substack{h\le i<r\\ \sigma_i\neq 0}} \left\{ \|D^i f\|_X + \frac{|D^r f(x)| + \omega(D^r f,\delta_n)}{(r-i)!} \right\} \right\} \in \Omega_{\delta_n,x}$$

y por tanto que

$$N(\delta_n) \leq \max\left\{ \max_{\substack{r+1<i\leq k \\ \sigma_i\neq 0}} \{\|D^i f\|_X\}, \max_{\substack{h\leq i<r \\ \sigma_i\neq 0}} \left\{\|D^i f\|_X + \frac{|D^r f(x)| + \omega(D^r f, \delta_n)}{(r-i)!}\right\}, \frac{2\omega(D^r f, \delta_n)}{\delta_n^2}\right\},$$

de la ecuación (3.31) aparece la estimación obtenida en la tesis del Teorema 3.5.

Lo anterior supone entonces una prueba de que el último resultado que hemos establecido representa una auténtica extensión de los resultados cuantitativos que hemos establecido en esta memoria.

Comentario 3.12. Volviendo de nuevo al teorema supongamos que existe un conjunto finito de funciones $f_j \in A, j = 1, \ldots, s$ tal que $\varphi_x \in < f_1, \ldots, f_s >$ $\forall x \in X'$. Entonces

$$\varphi_x = \sum_{j=1}^{s} a_j(x) f_j,$$

donde a_j son funciones definidas en X', y usando (v2.a), tenemos que

$$L(K_n\varphi_x)(x) = \sum_{j=1}^{s} a_j(x) \left(L(K_n f_j)(x) - Lf_j(x)\right).$$

Ahora, si para $j = 1, \ldots, s$, a_j está acotada en X' y $L(K_n f_j)$ converge uniformemente en X' hacia Lf_j (ésto implica que $\|L(K_n\varphi_x) - L\varphi_x\|_{X'} \to 0\ \forall x \in X'$), entonces, de la definición de μ_n, se obtiene que

$$\mu_n^{\lambda} \leq \sum_{j=1}^{s} \|a_j\|_{X'} \cdot \|L(K_n f_j) - Lf_j\|_{X'}$$

y

$$\mu_n \to 0.$$

Consecuentemente tenemos una estimación de la velocidad de convergencia de μ_n en términos de las de $\|L(K_n f_j) - Lf_j\|_{X'}, j = 1, \ldots, s$.

Conviene observar que casos particulares de lo que acabamos de ver se mostraron en el Comentario 3.4 y en el Comentario 3.7. Allí se estimaban las velocidades de convergencia de los dos procesos de aproximación conservativa en

C^k en términos de las velocidades de convergencia de las funciones test asociadas a cada uno de ellos.

Seguimos con algunos ejemplos para aplicar este resultado.

Ejemplo 3.4. *Consideremos la sucesión de operadores del Ejemplo 2.1, ésto es,* $K_n : C[0,1]^m \to \mathbb{R}^{[0,1]^m}$ *definidos por:*

$$K_n f = \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{n-1} \mathcal{X}_{C_{i_1,\ldots,i_m}} M^f_{i_1,\ldots,i_m} \ \forall f \in C[0,1]^m,$$

donde

$$C_{i_1,\ldots,i_m} = \left[\frac{i_1}{n}, \frac{i_1+1}{n}\right] \times \ldots \times \left[\frac{i_m}{n}, \frac{i_m+1}{n}\right] \ \forall i_1,\ldots,i_m \in \{0,\ldots,n-1\}$$

y

$$M^f_{i_1,\ldots,i_m} = \max\{f(x) : x \in C_{i_1,\ldots,i_m}\} \ \forall i_1,\ldots,i_m \in \{0,\ldots,n-1\}.$$

Entonces para toda función $f \in C[0,1]^m$ *y* $n \in \mathbb{N}$,

$$\|K_n f - f\| \leq 2\omega\left(f, \frac{\sqrt{m(4n+1)}}{n}\right).$$

Demostración. Vamos a aplicar el teorema anterior tomando

$$\begin{aligned}
&X = X' = [0,1]^m,\\
&A = C = C(X),\\
&B = \mathbb{R}^X,\\
&L = I,\\
&V = \langle \mathbb{1}, p_1, \ldots, p_m, p_1^2 + \ldots + p_m^2 \rangle,\\
&u = \mathbb{1},\\
&\varphi_z(x) = (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_m - z_m)^2 \ \forall x, z \in X,\\
&H = 1.
\end{aligned}$$

Nótese que las hipótesis (v1), (v2) con $M = 1$ y $\lambda = 2$, y (k1) se verifican trivialmente. Además, dado que $A = C$, entonces $\inf\{\Omega\} = 0$. También se verifica la hipótesis (k2). En efecto, recordando que

$$K_n \mathbb{1} = \mathbb{1},$$

$$|K_n p_j(x) - p_j(x)| \leq \frac{1}{n} \ \forall x \in X$$

y que

$$|K_n \left(p_1^2 + \ldots + p_m^2\right)(x) - \left(p_1^2 + \ldots + p_m^2\right)(x)|$$

$$\leq \left| \left(\frac{i_1+1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{i_m+1}{1}\right)^2 - \left(x_1^2 + \ldots + x_m^2\right) \right| \leq \frac{m(2n+1)}{n^2} \ \forall x \in X,$$

se deduce que

$$|K_n \varphi_z(z)| = |K_n \varphi_z(z) - \varphi_z(z)|$$

$$= \left| K_n \left(\sum_{i=0}^{m} p_i^2\right)(z) - \left(\sum_{i=0}^{m} p_i^2\right)(z) - 2\sum_{i=0}^{m} z_i (K_n p_i - p_i)(z) \right|$$

$$\leq \frac{m(2n+1)}{n^2} + \frac{2m}{n} = \frac{m(4n+1)}{n^2}$$

y por tanto que $\mu_n^2 \leq \frac{m(4n+1)}{n^2}$.
Aplicando ahora el teorema tenemos que para $f \in C[0,1]^m$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|K_n f - f\| \leq 2\omega\left(f, \frac{\sqrt{m(4n+1)}}{n}\right). \ \Box$$

Ejemplo 3.5. *Sea la sucesión de operadores de Euler-Taylor del Ejemplo 2.2, ésto es, $T_n : C^N[0,1] \to H_N$, para un cierto $N \in \mathbb{N}$ y H_N como allí se definía, que actuaban sobre una función $f \in C^N[0,1]$ mediante la igualdad siguiente:*

$$T_n f(x) = \begin{cases} f(0) + xDf(0) + \ldots + \frac{1}{N!}x^N D^N f(0), & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \\ \left(\sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{s!}(x - \frac{i}{n})^s D^s T_n f(\frac{i}{n})\right) & \\ + \frac{1}{N!}(x - \frac{i}{n})^N D^N f(\frac{i}{n}) & x \in (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], i = 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Consideremos también el mismo operador lineal $J : H_N \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ que allí se tenía:

$$Jf(x) = \frac{D^N f_-(x) + D^N f_+(x)}{2} \ \forall f \in H_N.$$

Entonces para $f \in C^N[0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|JT_nf - D^N f\| \leq \max\left\{\omega\left(D^N f, \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + \max_{0\leq i\leq N-1}\left\{\frac{4\|D^i f\|}{n} + \frac{12\|D^N f\|}{n(N-i)!}\right\}\right.$$

$$\left., 2\omega\left(D^N f, \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right\}.$$

Demostración. Vamos a aplicar el teorema anterior tomando como ya se hizo:

$X = X' = [0,1], A = C^N[0,1]$,
$B = H_N$,
$L = J$,
$C = \{f \in C^N[0,1] : f \geq 0, Df \geq 0, \ldots, D^{N-1}f \geq 0\}$,
$V =< e_0, e_1, ..., e_{N+2} >$,
$u(x) = \frac{1}{N!}x^N \ \forall x \in [0,1]$,
$\varphi_z \in V$ con $L\varphi_z(x) = (x-z)^2$, $D^i\varphi_z(0) = 1 + \|D^{i+1}\varphi_z\|$, $i = N-1, \ldots, 0$,
$H = 1$.

Obsérvese que las hipótesis (v1) y (v2.a) se verifican con claridad. También se tiene (v2.b) para $M = 1$ y $\lambda = 2$. (v2.c) es consecuencia inmediata de que $D^i\varphi_z(x) > 1 \ \forall x \in [0,1]$, $\forall i \in \{0, \ldots, N-1\}$. Más aún recuérdese que estos operadores verificaban que si

$$f \in C^N[0,1],\ f \geq 0,\ Df \geq 0, \ldots,\ D^{N-1}f \geq 0 \ y \ D^N f \geq 0,$$

entonces

$$T_nf \geq 0,\ D(T_nf) \geq 0, \ldots,\ D^{N-1}(T_nf) \geq 0 \ y \ J(T_nf) \geq 0,$$

y para J se tenía que $J(C^N[0,1]) \subset C[0,1]$. De lo anterior se deduce que también se satisface la hipótesis (k1). Sólo resta comprobar que se da (k2). Para ello, tengamos en cuenta primero que de la definición de φ_z se obtiene que

$$\varphi_z(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 + \|D^{i+1}\varphi_z\|}{j!}x^j + \frac{z^2x^N}{N!} - \frac{2zx^{N+1}}{(N+1)!} + \frac{2x^{N+2}}{(N+2)!},$$

de donde

$$J\varphi_z(x) = z^2 - \frac{2z}{(N+1)!}Je_{N+1}(x) + \frac{2}{(N+2)!}Je_{N+2}(x)$$

y

$$JT_n\varphi_z(x) = z^2 - \frac{2z}{(N+1)!}JT_ne_{N+1}(x) + \frac{2}{(N+2)!}JT_ne_{N+2}(x).$$

Segundo, recordemos que

$$T_ne_i = e_i \ \forall i \in \{0,\ldots,N\},$$

$$|J(T_ne_{N+1})(x) - Je_{N+1}(x)| \leq \frac{(N+1)!}{n} \ \forall x \in [0,1]$$

y que

$$|J(T_ne_{N+2})(x) - Je_{N+2}(x)| \leq \frac{(N+2)!}{n} \ \forall x \in [0,1],$$

y, por último, tengamos en cuenta la igualdad $|JT_n\varphi_z(z)| = |JT_n\varphi_z(z) - J\varphi_z(z)|$. De todo lo anterior se deduce que

$$|JT_n\varphi_z(z)| \leq \frac{2z|JT_ne_{N+1}(z) - Je_{N+1}(z)|}{(N+1)!} + \frac{2|JT_ne_{N+2}(z) - Je_{N+2}(z)|}{(N+2)!}$$

$$\leq \frac{2}{(N+1)!}\frac{(N+1)!}{n} + \frac{2}{(N+2)!}\frac{(N+2)!}{n} = \frac{4}{n},$$

y por consiguiente que $\mu_n^2 \leq \frac{4}{n}$.

Aplicando ahora el teorema tenemos que para $f \in C^N[0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|JT_nf - D^Nf\| \leq \omega\left(D^Nf, \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + \max\left\{\frac{4}{n}\inf\{\Omega\}, \omega\left(D^Nf, \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right\},$$

siendo Ω como en el enunciado del teorema.
Ahora la demostración se concluye simplemente observando que

$$\alpha = \max_{0\leq i\leq N-1}\left\{\|D^if\| + \frac{3}{(N-i)!}\|D^Nf\|\right\} \in \Omega. \ \square$$

En el siguiente ejemplo estudiamos una sucesión de operadores que actúan sobre funciones de dos variables. Aprovechamos para ello la sucesión definida en el Ejemplo 2.4.

Ejemplo 3.6. *Dada una función $f \in C([0,1]^2)$, para cada $j \in \{0,\ldots,n\}$ definimos la función f_j de la siguiente forma:*

$$f_j(x) = f\left(x, \frac{j}{n}\right) \ \forall x \in [0,1].$$

Sea ahora la sucesión de operadores lineales $\bar{K}_n : C^2([0,1]^2) \to C([0,1]^2)$ que definimos de la siguiente forma: para $f \in C([0,1]^2)$ definimos primero $\bar{K}_n f$ en los puntos $(x, \frac{j}{n})$ $\forall x \in [0,1]$, $\forall j \in \{0,\ldots,n\}$ de la siguiente forma:

$$\bar{K}_n f(x) = \begin{cases} f_j(0) + f_j\left[0, \frac{1}{n}\right] x + f_j\left[0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] x^2, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \\ \bar{K}_n f(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) + \frac{\partial \bar{K}_n f}{\partial x}(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})(x - \frac{i}{n}) & \\ + f_j\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}\right](x - \frac{i}{n})^2, & {\scriptstyle x \in (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \atop i=1,\ldots,n-3} \\ \\ \bar{K}_n f(\frac{n-2}{n}) + \frac{\partial \bar{K}_n f}{\partial x}(\frac{n-2}{n}, \frac{j}{n})(x - \frac{n-2}{n}) & \\ + f_j\left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1\right](x - \frac{n-2}{n})^2, & x \in (\frac{n-2}{n}, 1]. \end{cases}$$

En el resto de los puntos del dominio $[0,1]^2$ definimos $\bar{K}_n f$ de la siguiente forma: para $(x,y) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ con $i,j \in \{0,\ldots,n-1\}$

$$\bar{K}_n f(x,y) = (j+1-ny)\bar{K}_n f\left(x, \frac{j}{n}\right) + (ny-j)\bar{K}_n f\left(x, \frac{j+1}{n}\right).$$

Entonces para $f \in C^2([0,1]^2)$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\bar{K}_n f - f\| \leq \omega\left(f, \frac{2}{n}\right) + \max\left\{\frac{1}{n}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|, \omega\left(f, \frac{2}{n}\right)\right\}.$$

Demostración. Vamos a aplicar el teorema anterior tomando

$$X = X' = [0,1]^2,$$

$$A = C^2(X),$$

$$C = \left\{f \in A : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0\right\},$$

$$B = C(X),$$

$$L = I,$$

$$V = \langle \mathbb{1}, p_1, p_2, p_1^2 + p_2^2 \rangle,$$

$$u = \mathbb{1},$$

$$\varphi_z(x) = (x_1 - z_1)^2 + (x_1 - z_1)^2 \ \forall x, z \in X,$$

$$H = 1.$$

Nótese que las hipótesis (v1) y (v2) con $M = 1$ y $\lambda = 2$, se verifican trivialmente. Para comprobar que también se da la hipótesis (k1) basta tener en cuenta que el punto de la gráfica de $\bar{K}_n f$, $(x, y, \bar{K}_n f(x,y))$ para $(x,y) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, está en la recta que une $\left(x, \frac{j}{n}, K_n f_j(x)\right)$ y $\left(x, \frac{j+1}{n}, K_n f_{j+1}(x)\right)$, donde K_n es el operador definido en el Ejemplo 2.4. Además se verifica la hipótesis (k2). En efecto, se tiene que

$$\bar{K}_n \mathbb{1} = \mathbb{1},$$

$$\bar{K}_n p_i = p_i \text{ para } i = 1, 2$$

y

$$\left|\bar{K}_n \left(p_1^2 + p_2^2\right)(x) - \left(p_1^2 + p_2^2\right)(x)\right| = \frac{x_1 + x_2}{n},$$

de donde se deduce que

$$|\bar{K}_n \varphi_z(z)| = |\bar{K}_n \varphi_z(z) - \varphi_z(z)| = \frac{x_1 + x_2}{n}$$

y por tanto que $\mu_n^2 \leq \frac{2}{n}$.
Aplicando ahora el teorema tenemos que para $f \in C^2\left([0,1]^2\right)$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\bar{K}_n f - f\| \leq \omega\left(f, \frac{2}{n}\right) + \max\left\{\frac{2}{n} \inf\{\Omega\}, \omega\left(f, \frac{2}{n}\right)\right\},$$

donde Ω es como en el teorema. De aquí basta observar que

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\| \in \Omega$$

para tener la demostración. □

Las siguientes gráficas comparan en un caso particular el comportamiento de este operador con el de Bernstein en dos variables. En concreto, consideramos la función

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(4\pi(x+y))$$

que dibujamos en primer lugar, y a continuación mostramos $\bar{K}_n f$ y $B_{n,n} f$ para $n = 20$, donde $B_{n,n}$ representa el operador de Bernstein en dos variables.

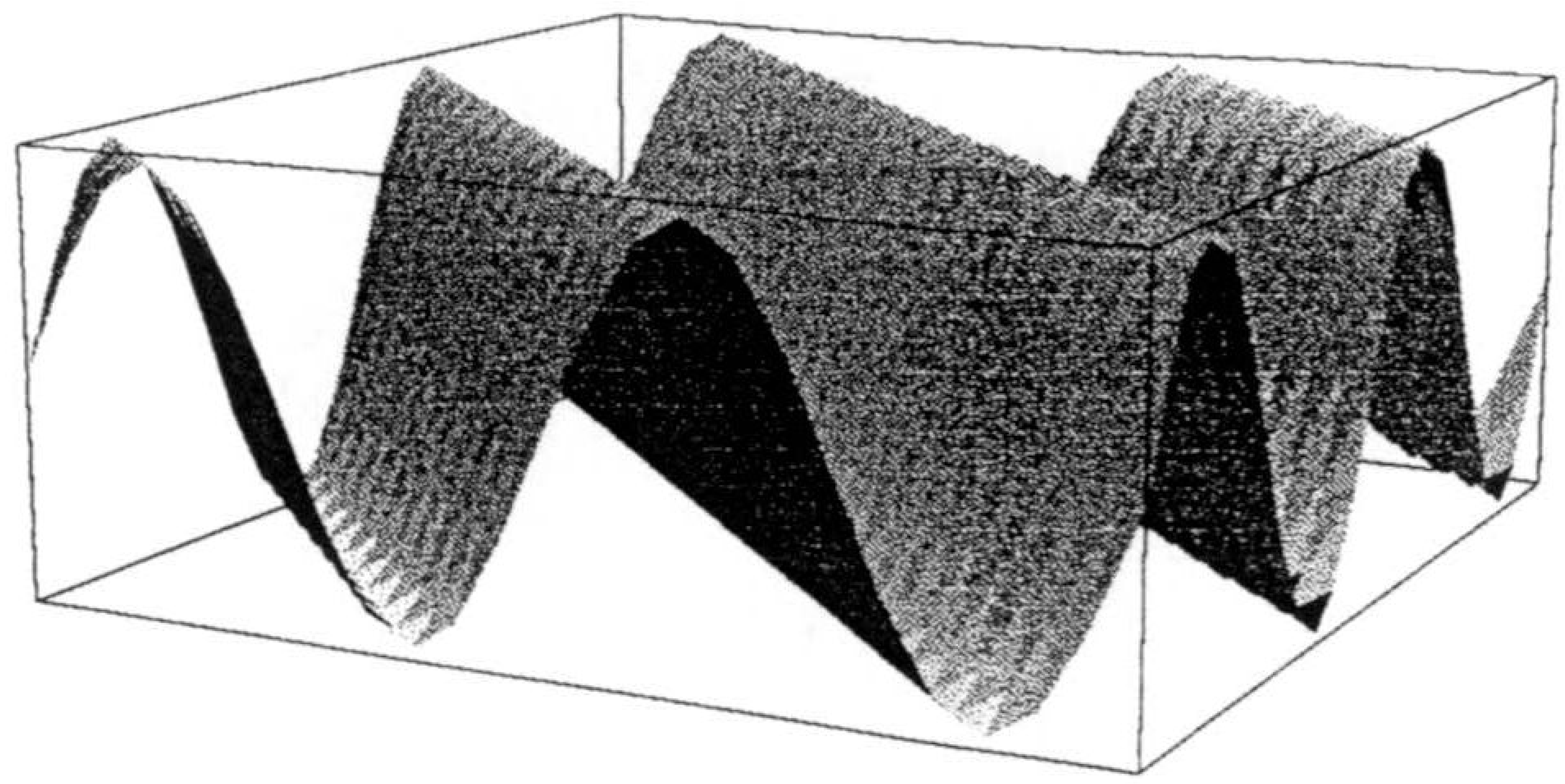

Fig. 4. Gráfica de f.

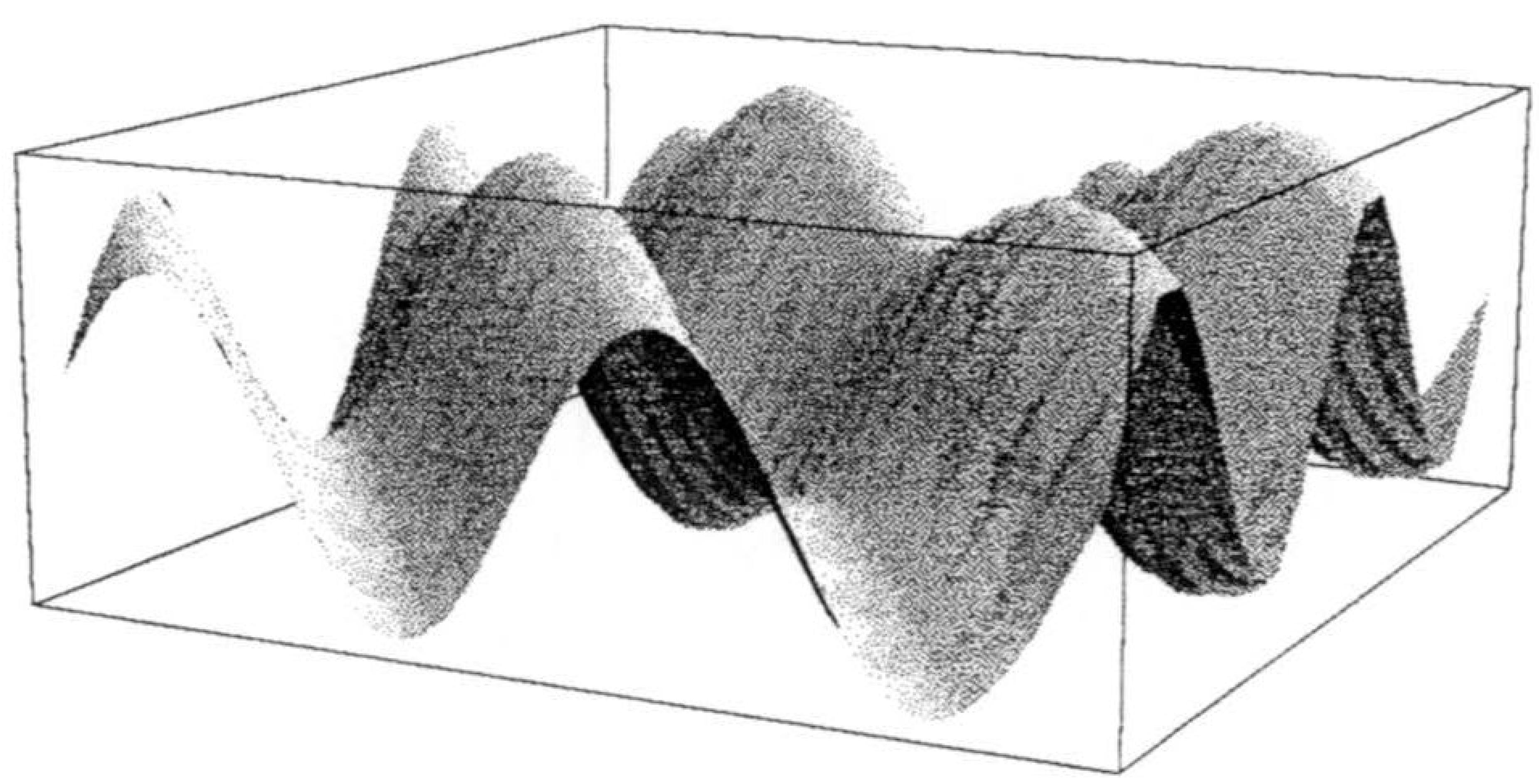

Fig. 5. Gráfica de $\bar{K}_n f$, $n = 20$.

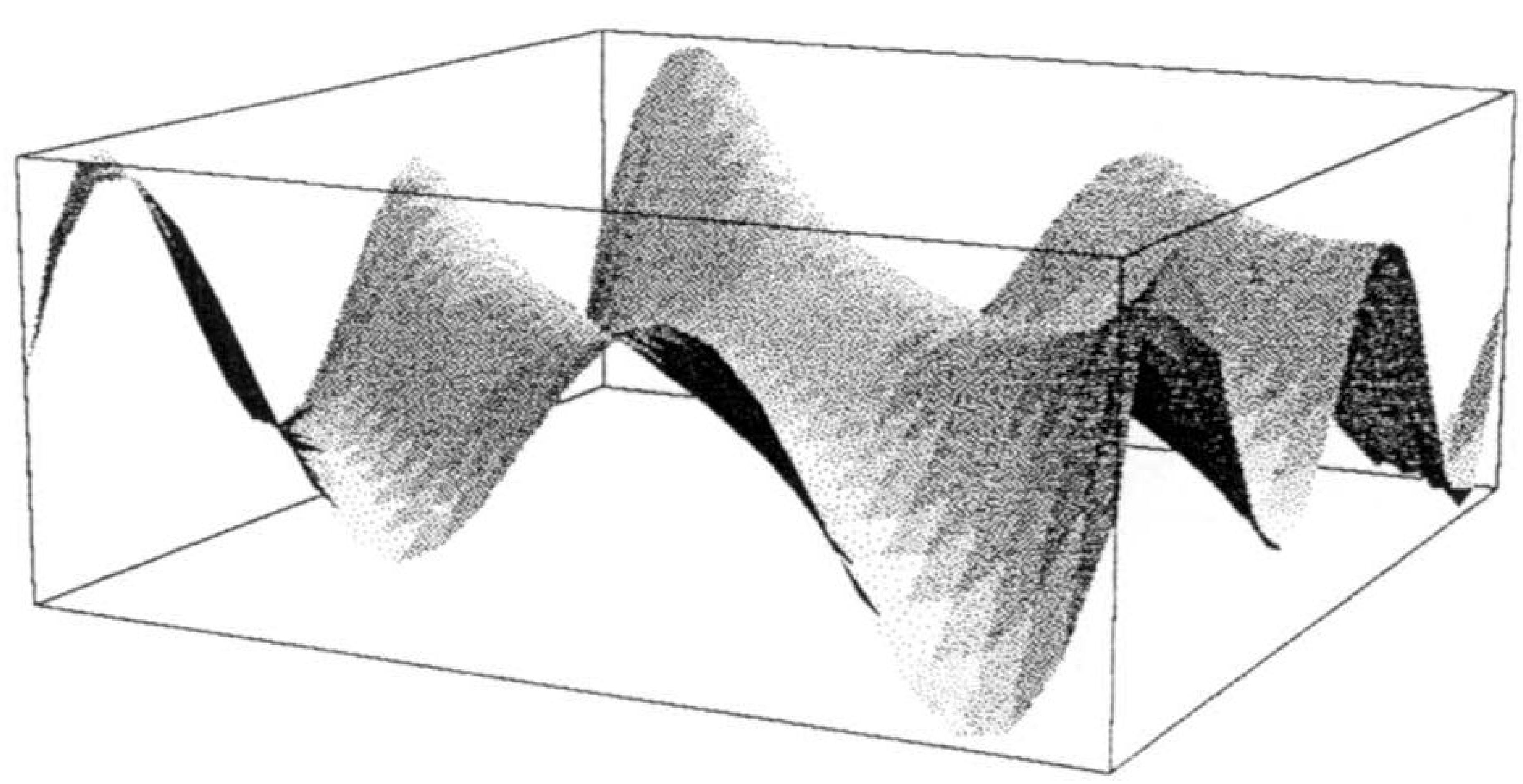

Fig. 6. Gráfica de $B_{n,n} f$, $n = 20$.

Capítulo 4

Nuevas Líneas de Trabajo

El trabajo desarrollado hasta ahora nos ha permitido no sólo completar la presente memoria sino también darnos cuenta de las nuevas vías de investigación que ésta abre. En las siguientes secciones mostramos estos nuevos caminos de estudio, alguno de los cuales ya hemos comenzado a recorrer.

4.1. Optimización de las Estimaciones

Hasta el momento nos hemos concentrado en dar estimaciones del grado de aproximación mediante operadores lineales. Hay tres formas destacadas de medir cómo de precisas son tales estimaciones, a saber, mediante la saturación, la aproximación de clases de funciones y mediante teoremas inversos.

Si $L_n : C[a,b] \to C[c,d]$ es una sucesión de operadores lineales y $\{a_n(x)\}$ una sucesión de funciones positivas que converge uniformemente a cero en $[c,d]$. Se dice que L_n es saturada en $[c,d]$ con orden $\{a_n(x)\}$ si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) $\frac{\|f-L_nf\|}{\|a_n\|}$ converge a cero si, y sólo si, f está en una cierta clase de funciones $T(L_n)$,

b) existe una función $f_0 \in C[a,b]$, $f_0 \notin T(L_n)$, que verifica que $\frac{\|f_0-L_nf_0\|}{\|a_n\|} = O(1)$.

El problema de la saturación es determinar cuando L_n es saturada y, en su caso, averiguar el orden de saturación $\{a_n\}$ y la clase de saturación, ésto es, las funciones que satisfacen el apartado b) anterior.

Por otra parte, si L_n es saturada con orden $\{a_n\}$, se sabe que por mucha suavidad que tenga la función a aproximar no se puede conseguir un error de saturación $o(a_n)$. Sin embargo, la saturación no da información sobre qué funciones se pueden aproximar con un orden que no sea óptimo. La aproximación de clases de funciones y los teoremas inversos permiten medir la eficiencia de la aproximación en los casos no óptimos.

Si A es una clase de funciones de $C[a,b]$, se define el error de aproximación de A mediante L_n como

$$E(A, L_n) = \sup_{f \in A} \|f - L_n f\|.$$

El problema en aproximar clases de funciones es determinar $E(A, L_n)$, que en general resulta ser un problema complicado.

La forma más precisa de medir la bondad de una estimación cuantitativa es mediante el uso de teoremas inversos, que permiten deducir la suavidad de las funciones que se aproximan a partir del grado de aproximación. Por ejemplo, estaríamos ante un teorema inverso para una clase de funciones A si se puede probar que la igualdad $\|f - L_n f\| = O(a_n)$ implica que $f \in A$.

Evidentemente cuestiones como las anteriores tendrían que ser planteadas en los nuevos procesos de aproximación conservativa que aparecen en esta memoria, es decir, queda abierto el problema de determinar cómo de buenas son las estimaciones cuantitativas que hemos establecido. También dentro de este contexto habría que cuestionarse el uso sistemático que hemos hecho del primer módulo de continuidad. DeVore[1] realiza un estudio detallado de las cuestiones anteriores en el ambiente del espacio $C[a,b]$ y siempre para operadores lineales positivos.

[1] DeVore, R. A. *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators,* Lecture Notes in Mathematics, 293, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1972)

4.2. Operadores Definidos en Dominios No Acotados

Existen interesantes sucesiones de operadores lineales positivos cuyos dominios incluyen funciones definidas en conjuntos no acotados. Para estos casos el teorema de Korovkin (Teorema 1.1) no se puede aplicar. No obstante, en su libro[1] se pone de manifiesto que si las funciones están acotadas, la teoría se puede utilizar para algunos casos especiales.

Por otra parte, Sikkema[2] trata en un contexto de alguna manera distinto funciones no acotadas con crecimiento polinomial.

Para tratar funciones no acotadas es importante exigir que las funciones estén en cierto sentido dominadas. Ciertamente, podemos considerar por ejemplo una función $f \in C[0,\infty)$ para la que el siguiente límite existe: $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-x}$, y definir la sucesión de operadores $K_n f = B_n f + f(n)e^{-n}$, donde B_n representa el operador de Bernstein. Se verifica que $K_n f$ converge uniformemente en $[0,1]$ para $f \in \{e_0, e_1, e_2\}$, pero si tomamos $g(x) = e^x$, se tiene que $K_n g$ converge uniformemente a $g + \mathbb{1}$.

Con estas palabras Ditzian[3] introduce la posibilidad de modificar el teorema de Korovkin y los posteriores resultados relativos a la velocidad de convergencia. No en vano, define y establece lo que sigue:

Definición 4.1. *Una sucesión de operadores lineales y positivos K_n es del tipo $\mathcal{K}(T,S,\mu)$ si se verifican las siguientes propiedades:*

a) *el dominio de cada K_n está formado por todas las funciones definidas en T verificando que*
$$|f(t)| \leq M(f)\left(t^2+1\right) \;\; \forall t \in T,$$

b) $\|K_n e_i - e_i\|_S \to 0 \;\forall i \in \{0,1,2\}$,

---

[1] Korovkin, P. P. *Linear Operators and Approximation Theory,* Hindustan Publishing Corp., Delhi, (1960)

[2] Sikkema, P. C. *On some Linear Positive Operators,* Indagationes math., 32, (1970), 327–337

[3] Ditzian, Z. *Convergence of Sequences of Linear Positive Operators: remarks and applications,* J. Approx. Th. 14, (1975), 296–301

c)

$$\sup_{x\in S}\{K_n(\psi_x\mu)(x)\} \leq K \sup_{x\in S}\{K_n\psi_x(x)\} \equiv K\left(\mu_n(S)\right)^2 \equiv K\mu_n^2 = o(1),$$

donde $\psi_x(t) = (t-x)^2$, $T \subset (-\infty,\infty)$ *es cerrado,* $S = T \cap [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, *y* $\mu(t) \geq 1$.

Teorema 4.1. *Sea* K_n *una sucesión de operadores lineales positivos del tipo* $\mathcal{K}(T,S,\mu)$.

a) *Para una función* $f \in C(S_1)$, *siendo* S_1 *un subconjunto cerrado de* S, *se tiene que*

$$\|K_nf - f\|_{S_1} \to 0.$$

b) *Si además* $S_1 = [a,b]$ *y* $S_2 = [a_2,b_2] \subset S_1$, *y si, para algún* $\eta > 0$, *se verifica que* $[a_2-\eta, b_2+\eta] \cap T \cap \{(-\infty,\infty) - S_1\} = \emptyset$, *entonces*

$$\|K_nf - f\|_{S_2} \leq \|f\|_{S_2}\|K_ne_0 - e_0\|_{S_2} + \|K_ne_0 + e_0\|_{S_2}\omega(f,\mu_n) + L\mu_n^2.$$

c) *Si además* $f \in C^1(S_1)$, *entonces*

$$\|K_nf - f\|_{S_2} \leq \|f\|_{S_2}\|K_ne_0 - e_0\|_{S_2} + \|K_n\varphi_x\|_{S_2}\|f'\|_{S_2}$$

$$+\omega(f',\delta)\left(\mu_n^2\delta^{-1} + \mu_n\|K_ne_0\|_{S_2}^{1/2}\right) + L\mu_n^2.$$

Aqui $\varphi_x(t) = t-x$, *el módulo de continuidad se toma sobre* S_1 *y* L *es una constante tal que* $L \leq M(f)M_1K + \|f\|_{S_2}\eta^{-2}$, *donde*

$$M_1 = \sup_{\substack{|t-x|\geq\eta \\ x\in S_2}}\left\{\frac{t^2+1}{(t-x)^2}\right\}.$$

Este enunciado presenta un gran paralelismo con el resultado de Shisha y Mond (Teorema 1.4) y con el refinamiento posterior de DeVore que ya fue comentado al final de la sección 3.2.4. La novedad es que se aplica a operadores que actúan sobre funciones no acotadas.

De manera natural surge la pregunta de si se podrán trasladar los resultados contenidos en esta memoria al ambiente de estos nuevos operadores. Ante ello aparece una respuesta que se materializa en un trabajo de Knoop y Pottinger[1] del mismo corte que aquel otro que establecieron para operadores casi convexos (Teorema 1.6). En concreto publicaron lo que sigue:

Definición 4.2. *Sea $I = [a, \infty)$, sea $\mu \in C(I)$ verificando que $\mu(t) > 0$ $\forall t \in I$ y sea $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 1, \ldots\}$. Además, sea V un subespacio de $C^k(I)$ verificando las siguientes propiedades:*

a) $\mathbb{P}_{k+2} \subset V$,

b) $\mu \cdot \mathbb{P}_2 = \{\mu p : p \in \mathbb{P}_2\} \subset D^k V = \{D^k f : f \in V\}$,

c) *para cada $f \in V$ se tiene que $|D^k f(t)| \leq M(f)\left(1 + t^2\right)\mu(t)$ $\forall t \in I$, con una constante apropiada $M(f) > 0$.*

Para $J = [b, c] \subset I$, un operador lineal $L : V \to C^k(J)$ es del tipo $\mathcal{K}(I, J, V, \mu, k)$ si L es casi convexo de orden $k - 1$.

Teorema 4.2. *Sea k un entero positivo y K_n una sucesión de operadores del tipo $\mathcal{K}(I, J, V, \mu, k)$ verificando que $K_n(\mathbb{P}_{k-1}) \subset \mathbb{P}_{k-1}$. Sea también $J_1 = [b, d]$ un subintervalo de J con $d < c$ y $\eta = c - d$. Si $I_1 = [a, c]$, entonces para toda función $f \in V$, $x \in J_1$, $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_n > 0$ se tiene que*

$$|D^k f(x) - D^k K_n f(x)| \leq \frac{1}{k!}|D^k f(x)||D^k e_k(x) - D^k K_n e_k(x)|$$

$$+ \left(\frac{1}{k!}D^k K_n e_k(x) + \frac{\beta^2_{K_n}(x)}{\delta_n^2}\right)\omega(D^k f, \delta_n) + M(f)M_1 D^k K_n h_x(x)$$

$$+|D^k f(x)|\frac{\beta^2_{K_n}(x)}{\eta^2}.$$

Aquí el módulo de continuidad se toma sobre I_1, ψ_x es como en el teorema anterior, $M_1 = \left\{\frac{t^2+1}{(t-d)^2} : t \geq c\right\}$, h_x y j_x son respectivamente k-integrales de $\mu\psi_x$ y de ψ_x (una función $g \in C^k(I)$ es una k-integral de $f \in C(I)$ si $D^k g = f$). Además $\beta^2_{K_n}(x) = D^k K_n j_x(x)$.

Con todo lo anterior y a la vista de nuestras investigaciones, el problema está servido: ¿ será posible establecer alguna generalización del resultado anterior eliminando la hipótesis que se hace allí sobre los espacios de polinomios y

[1] Knoop, H. B., Pottinger, P. *On Simultaneous Approximation by Certain Linear Positive Operators,* Arch. Math., 48, (1987), 511-520

extendiendo la casi convexidad de los operadores ? (se sugiere por tanto trasladar la línea de trabajo a este otro contexto). Si así fuera, se podría completar por ejemplo el estudio de los conocidos operadores de tipo Bernstein que fueron introducidos por Bleimann, Butzer y Hahn[1] y posteriormente estudiados por Totik[2]. Están definidos para una función $f \in C[0,\infty)$ de la siguiente forma:

$$L_n f(x) = (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n-k+1}\Big)\binom{n}{k} x^k,$$

y tienen dos propiedades agradables desde nuestro punto de vista: $L_n(\mathbb{P}_1) \not\subset \mathbb{P}_1$ y si f es una función decreciente y convexa, entonces $L_n f$ es convexa.

4.3. Operadores 'Casi k-Convexos'

Al comienzo de la Sección 2.2 se dijo que si se pretendía aproximar la derivada k-ésima de una función f mediante una sucesión de operadores K_n, si éstos eran k-convexos, entonces una extensión inmediata del teorema de Korovkin podría proporcionar un criterio que garantizase la convergencia de $D^k K_n f$ a $D^k f$. Aquella sección se dedicaba a eliminar la hipótesis de k-convexidad de los operadores sustituyéndola por ciertas propiedades de conservación de la forma relacionadas también con esa convexidad. Más adelante se ponía en forma cuantitativa lo anterior.

Ahora pretendemos reemplazar aquella suposición de k-convexidad de los operadores por esta otra propiedad más general que podríamos llamar casi k-convexidad: si f es una función verificando $D^k f > 0$, entonces existe una constante $N = N(f)$ tal que $n \geq N$ implica $K_n f \geq 0$.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto esta nueva hipótesis:

Ejemplo 4.1. *Sea $K_n : C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ una sucesión de operadores lineales definidos de la siguiente forma:*

$$K_n f(x) = (K_n f)_i(x) \ \forall x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right], \forall i \in \{0, \ldots, n-1\},$$

[1] Bleimann, G., Butzer, P. L., Hahn, L. *A Bernstein-type Operator Approximating Continuous Functions on the Semi-axis,* Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 42, (1980), 255–262

[2] Totik, V. *Uniform Approximation by Bernstein-type Operators,* Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. , 46, (1984), 87–93

donde $(K_n f)_i \in \mathbb{P}_3$ *y*

$$(K_n f)_i\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i}{n}\right),\ D(K_n f)_i\left(\frac{i}{n}\right) = Df\left(\frac{i}{n}\right),$$

$$(K_n f)_i\left(\frac{i+1}{n}\right) = f\left(\frac{i+1}{n}\right),\ D(K_n f)_i\left(\frac{i+1}{n}\right) = Df\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Se verifica que los operadores no son positivos, ni crecientes, ni convexos, pero

a) *si* $f \in C^1[0,1]$ *verifica que* $f > 0$, *entonces*

$$n \geq \frac{\|Df\|}{3\min\{f(x) : x \in [0,1]\}} \text{ implica que } K_n f \geq 0,$$

b) *si* $f \in C^2[0,1]$ *verifica que* $Df > 0$, *entonces*

$$n \geq \frac{5\|D^2 f\|}{2\min\{Df(x) : x \in [0,1]\}} \text{ implica que } DK_n f \geq 0,$$

c) *si* $f \in C^3[0,1]$ *verifica que* $D^2 f > 0$, *entonces*

$$n \geq \frac{3\|D^3 f\|}{\min\{D^2 f(x) : x \in [0,1]\}} \text{ implica que } D^2 K_n f \geq 0.$$

Demostración. Basta expresar el spline en la base de Bernstein, ésto es, encontrar la función g que hace que $B_n g = K_n f$, y conseguir así condiciones suficientes para la k-convexidad de $K_n f$ a partir de la k-convexidad de los datos de interpolación. □

Establecemos a continuación resultados de tipo Korovkin bajo hipótesis de esta naturaleza.

Teorema 4.3. [1] *Sea k un número entero positivo y sea K_n una sucesión de operadores lineales definidos sobre $C^{k+1}[0,1]$ para la que existe una constante $C \geq 0$ tal que para cualquier función $g \in C^{k+1}[0,1]$ verificando que $D^k g > 0$,*

$$n \geq C\frac{\|D^{k+1} g\|}{\min\{D^k g(x) : x \in [0,1]\}} \text{ implica que } D^k K_n g \geq 0.$$

[1] Muñoz-Delgado, F. J., Cárdenas-Morales, D. *Quantitative Estimates of Korovkin-type for Shape Preserving Operators,* Presentado en: Guangzhou International Symposium on Computacional Mathematics.

Bajo estas condiciones, si $f \in C^{k+1}[0,1]$, *entonces*

$$\|D^k K_n f - D^k f\| \le \frac{1}{k!}\|D^k f\| \, \|D^k K_n e_k - D^k e_k\|$$

$$+\|D^{k+1} f\| \left(\frac{C\|D^k K_n e_k\|}{nk!} + 2\sqrt{\frac{\|D^k K_n e_k\|}{2k!}\left(\frac{\mu_n^2}{2} + \frac{C\|D^k K_n e_k\|}{nk!}\right)}\right) \forall n \in \mathbb{N},$$

donde

$$\mu_n^2 = \sup_{x\in[0,1]} \{|D^k K_n g_x(x)|\}$$

y

$$g_x = \frac{2}{(k+2)!}e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!}x e_{k+1} + \frac{1}{k!}x^2 e_k.$$

Demostración. Sea $x \in [0,1]$, el teorema del valor medio nos permite escribir

$$|D^k f(t) - D^k f(x)| \le \|D^{k+1} f\| \cdot |t-x| \le \|D^{k+1} f\| \left(\frac{(t-x)^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2}\right)$$

$\forall \delta > 0, \forall t \in [0,1]$. Por tanto,

$$\pm D^k f(t) \mp D^k f(x) + \|D^{k+1} f\| \left(\frac{(t-x)^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2}\right) + \epsilon > 0$$

$\forall \delta > 0,\ \forall \epsilon > 0, \forall t \in [0,1]$, o de forma equivalente,

$$D^k \left(\pm f \mp D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \|D^{k+1} f\|\frac{g_x}{2\delta} + \frac{\|D^{k+1} f\|\delta}{2}\frac{e_k}{k!} + \epsilon\frac{e_k}{k!}\right) > 0$$

$\forall \delta > 0,\ \forall \epsilon > 0, \forall t \in [0,1]$. Usando ahora la hipótesis y maximizando y minimizando las funciones

$$f - D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \|D^{k+1} f\|\frac{g_x}{2\delta} + \frac{\|D^{k+1} f\|\delta}{2}\frac{e_k}{k!} + \epsilon\frac{e_k}{k!}$$

y

$$-f + D^k f(x)\frac{e_k}{k!} + \|D^{k+1} f\|\frac{g_x}{2\delta} + \frac{\|D^{k+1} f\|\delta}{2}\frac{e_k}{k!} + \epsilon\frac{e_k}{k!},$$

si $n \ge C\frac{\|D^{k+1} f\|\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}{\epsilon}$, entonces

$$|D^k K_n f(t) - \frac{1}{k!}D^k f(x) D^k K_n e_k(t)| \le \|D^{k+1} f\|\frac{D^k K_n g_x(t)}{2\delta}$$

$$+\frac{\|D^{k+1}f\|\delta}{2k!}D^kK_ne_k(t)+\epsilon\frac{D^kK_ne_k(t)}{k!}\forall\delta>0,\forall\epsilon>0,\forall t\in[0,1].$$

Evaluando en el punto x se obtiene que si $n \geq C\frac{\|D^{k+1}f\|\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}{\epsilon}$, entonces

$$|D^kK_nf(x)-\frac{1}{k!}D^kf(x)D^kK_ne_k(x)|\leq\|D^{k+1}f\|\frac{\mu_n^2}{2\delta}$$

$$+\frac{\|D^{k+1}f\|\delta}{2k!}\|D^kK_ne_k\|+\epsilon\frac{\|D^kK_ne_k\|}{k!}\ \forall\delta>0,\forall\epsilon>0. \tag{4.1}$$

Ahora, si $C=0$, tenemos

$$|D^kK_nf(x)-\frac{1}{k!}D^kf(x)D^kK_ne_k(x)|\leq\|D^{k+1}f\|\frac{\mu_n^2}{2\delta}$$

$$+\frac{\|D^{k+1}f\|\delta}{2k!}\|D^kK_ne_k\|\ \forall\delta>0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Minimizando en la variable δ se obtiene la desigualdad

$$|D^kK_nf(x)-\frac{1}{k!}D^kf(x)D^kK_ne_k(x)|\leq\|D^{k+1}f\|\frac{\mu_n^2}{2\sqrt{\frac{k!\mu_n^2}{\|D^kK_ne_k\|}}}$$

$$+\frac{\|D^{k+1}f\|\sqrt{\frac{k!\mu_n^2}{\|D^kK_ne_k\|}}}{2k!}\|D^kK_ne_k\|=\|D^{k+1}f\|\mu_n\sqrt{\left\|\frac{1}{k!}D^kK_ne_k\right\|}\ n\in\mathbb{N},$$

de la que se puede obtener el resultado sin más que sumarle esta otra:

$$|D^kf(x)-\frac{1}{k!}D^kf(x)D^kK_ne_k(x)|\leq\frac{1}{k!}\|D^kf\|\left\|D^ke_k-D^kK_ne_k\right\|. \tag{4.2}$$

Si por el contrario $C\neq 0$, volviendo a la ecuación (4.1) y tomando $\epsilon=C\frac{\|D^{k+1}f\|\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}{n}$,

$$|D^kK_nf(x)-\frac{1}{k!}D^kf(x)D^kK_ne_k(x)|\leq\|D^{k+1}f\|\left(\frac{\mu_n^2}{2\delta}+\frac{\delta}{2k!}\|D^kK_ne_k\|\right.$$

$$\left.+\frac{\|D^kK_ne_k\|C}{k!n}+\frac{\|D^kK_ne_k\|C}{\delta k!n}\right)=\|D^{k+1}f\|\left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{\mu_n^2}{2}+\frac{\|D^kK_ne_k\|C}{k!n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\delta\|D^kK_ne_k\|}{2k!}+\frac{\|D^kK_ne_k\|C}{k!n}\right)\ \forall\delta>0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Minimizando en δ, como antes se hizo, tenemos

$$|D^k K_n f(x) - \frac{1}{k!} D^k f(x) D^k K_n e_k(x)|$$

$$\leq \|D^{k+1} f\| \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2k!}{\|D^k K_n e_k\|} \left(\frac{\mu_n^2}{2} + \frac{C\|D^k K_n e_k\|}{nk!} \right)}} \left(\frac{\mu_n^2}{2} + \frac{\|D^k K_n e_k\| C}{k! n} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\|D^k K_n e_k\|}{2k!} \sqrt{\frac{2k!}{\|D^k K_n e_k\|} \left(\frac{\mu_n^2}{2} + \frac{C\|D^k K_n e_k\|}{nk!} \right)} + \frac{\|D^k K_n e_k\| C}{k! n} \right)$$

$$= \|D^{k+1} f\| \left(\frac{C\|D^k K_n e_k\|}{nk!} + 2\sqrt{\frac{\|D^k K_n e_k\|}{2k!} \left(\frac{\mu_n^2}{2} + \frac{C\|D^k K_n e_k\|}{nk!} \right)} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde usando nuevamente la ecuación (4.2) se termina la demostración. □

Comentario 4.1. Si en el teorema tomamos $k = 0$ y $C = 0$, aparece la estimación

$$\|K_n f - f\| \leq \|f\| \, \|K_n e_0 - 1\| + \|Df\| \mu_n \|K_n e_0\|^{1/2},$$

que mejora el refinamiento de DeVore del resultado de Shisha y Mond que ya fue comentado al final de la Sección 3.2.4. Por supuesto que aquí los operadores trabajan bajo hipótesis que son más particulares que la positividad que allí se asumía.

Corolario 4.1. *Sea K_n la sucesión del Ejemplo 4.1.*

a) *Si $f \in C^1[0,1]$, entonces*

$$\|K_n f - f\| \leq \|Df\| \left(\frac{1}{3n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3n}} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) *Si $f \in C^2[0,1]$, entonces*

$$\|DK_n f - Df\| \leq \|D^2 f\| \left(\frac{5}{2n} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) *Si* $f \in C^3[0,1]$, *entonces*

$$\|D^2 K_n f - D^2 f\| \leq \|D^3 f\| \left(\frac{3}{n} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{n}}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Basta aplicar el teorema reemplazando C, k respectivamente por $\frac{1}{3}, 0$, por $\frac{5}{2}, 1$ y por $3, 2$, y usar en los cálculos de μ_n que K_n fija el espacio $\mathbb{P}_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$ y que

$$\frac{1}{12} D^2 K_n e_4(x) = -\frac{1}{6n^2} - \frac{i}{n} - \frac{i^2}{n^2} + \frac{x}{n} + \frac{2ix}{n} \ \forall x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right],$$

de donde se puede deducir fácilmente que en el tercer caso $\mu_n^2 \leq \frac{1}{n}$. □

Comentario 4.2. Nótese que las estimaciones que acabamos de establecer no son las mejores posibles. La razón es que estamos utilizando condiciones suficientes para la casi k-convexidad del spline. Sin duda que queremos considerar estos resultados principalmente desde un punto de vista cualitativo.

Por otra parte, la mejor estimación tiene lugar cuando $k = 2$ porque la 2-convexidad de $B_n g$, siendo B_n el operador de Bernstein, es equivalente a la 2-convexidad de los datos de interpolación de la función g.

Lo mostrado lanza al aire las siguientes preguntas que representan problemas a tener en cuenta:

¿podremos conjugar las hipótesis anteriores con otras en las que aparezcan involucrados los signos de más de una derivada?, ¿podrá realizarse esta tarea introduciendo ciertos conos de funciones?, ¿será posible establecer resultados de este tipo para operadores definidos sobre espacios de funciones de varias variables?

4.4. Operadores con Dominios más Generales

Los resultados que han aparecido en esta memoria tratan con operadores que tienen por dominio funciones definidas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$. Sin embargo ya se comentó que la teoría de aproximación de tipo Korovkin ha sido generalizada al ambiente de espacios mucho más abstractos. Por ésto parece lógico plantearse la posibilidad de trasladar la idea que subyace en nuestros resultados a esos otros contextos más generales. Sin embargo nos gustaría conjugar esta posibilidad con el sentido práctico que nos mueve, y plantearnos de esta forma procesos de aproximación para operadores definidos en espacios de funciones; sin abstraer más.

Con esa idea trazamos ahora una ruta de consulta que puede abrir este camino. Comenzaremos con una generalización del teorema de Korovkin que puede leerse en artículos de Bauer[1], Berens y Lorentz[2] y Grossman[3].

Teorema 4.4. *Sea X un espacio compacto Hausdorff y F un subconjunto de de $C(X)$ que separa los puntos de X. Si $L_n : C(X) \to C(X)$ es una sucesión de operadores lineales positivos verificando que $\|L_n f^i - f^i\|$ converge a cero para toda función $f \in F$ y para $i = 0, 1, 2$, entonces $\|L_n f - f\|$ converge a cero para toda función $f \in C(X)$.*

Este resultado fue puesto en forma cuantitativa por Nishishiraho[4], para lo que tuvo que recurrir a nuevas definiciones; entre ellas la del módulo de continuidad.

Es en este contexto donde dejamos abierta la posibilidad de trabajar con operadores que no sean necesariamente positivos, sino que verifiquen alguna propiedad relacionada con determinados conos de funciones. Creemos que esta memoria puede inducir a pensar en una respuesta afirmativa a este problema, al que evidentemente se le pueden unir las cuestiones tratadas en la Sección 4.1[5].

---

[1] Bauer, H. *Theorems of Korovkin Type for Adapted Spaces,* Ann. Inst, Fourier, Grenoble, 23, 4 (1973), 245–260

[2] Berens, H., Lorentz, G. G. *Theorems of Korovkin Type for Positive Linear Operators on Banach Lattices,* Approximation Theory, G. G. Lorentz ed., Academic Press, New York, (1973), 1–30

[3] Grossman, M. W. *Note on a Generalized Bohman-Korovkin Theorem,* J. Math. Anal. Appl., 45, (1974), 43–46

[4] Nishishiraho, T. *The Degree of Convergence of Positive Linear Operators,* Tôhoku Mathematical Journal, 29, N.1, (1976), 81–89

[5] Nishishiraho, T. *Saturation of Positive Linear Operators,* Tôhoku Mathematical Journal, 28, N.2, (1976), 239–243

Todo lo anterior, como ya se dijo y como ahora se ha podido constatar, ocupa ya de hecho nuestro tiempo. Es por ésto que deseamos continuar incorporando nuevos elementos a la teoría de aproximación de tipo Korovkin.

Bibliografía

ALTOMARE, F., CAMPITI, M.

- *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*,
  De Gruyter Studies in Mathematics, 17, Walter de Gruyter, Berlin-New York, (1994)

ALTOMARE, F., RASA, I.

- *Approximation by Positive Operators in Spaces $C^p([a,b])$*,
  L'Analyse Numérique et la Théorie de L'approximation, 18, N.1, (1989), 1–11

BAUER, H.

- *Theorems of Korovkin Type for Adapted Spaces*,
  Ann. Inst, Fourier, Grenoble, 23, 4 (1973), 245–260

BERENS, H., LORENTZ, G. G.

- *Theorems of Korovkin Type for Positive Linear Operators on Banach Lattices*,
  Approximation Theory, G. G. Lorentz ed., Academic Press, New York, (1973), 1–30

BLEIMANN, G., BUTZER, P. L., HAHN, L.

- *A Bernstein-type Operator Approximating Continuous Functions on the Semi-axis*,
  Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 42, (1980), 255–262

BOHMAN, H.

- *On Approximation of Continuous and of Analytic Functions*,
  Ark. Mat., 2, (1952), 43–56

BROSOWSKI, B.

- *A Korovkin-type Theorem for Differentiable Functions*,
  Approximation Theory III, E.W. Cheney ed., Academic Press, (1980), 255–260

CÁRDENAS-MORALES, D., MUÑOZ-DELGADO, F. J.

- *A Korovkin-Type Result in C^k. An Application to the M_n Operators*,
  (enviado)
- *Quantitative Korovkin-type Results on Conservative Approximation*,
  (enviado)

CENSOR, E.

- *Quantitative Results for Positive Linear Approximation Operators*,
  J. Approx. Th., 4, (1971), 442–450

CHENEY, E. W., SHARMA, A.

- *Bernstein Power Series*,
  Canad. J. Math., 16, (1964), 241–252

DEVORE, R. A.

- *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*,
  Lecture Notes in Mathematics, 293, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1972)
- *Optimal Convergence of Positive Linear Operators*,
  Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, (1972), 101–119

DEVORE, R. A., LORENTZ, G. G.

- *Constructive Approximation*,
  A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 303, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1993)

DITZIAN, Z.

- *Convergence of Sequences of Linear Positive Operators: remarks and applications*,
  J. Approx. Th. 14, (1975), 296–301

DONNER, K.

- *Extension of Positive Operators and Korovkin Theorems*,
  Lecture Notes in Mathematics, 904, Springer-Verlag, Berlin, (1982)

ESSER, H.

- *On Pointwise Convergence Estimates for Positive Linear Operators on $C[a,b]$*,
  Indag. math., 38, (1976), 189–194

FREUD, G.

- *On Approximation by Positive Linear Methods, I, II*,
  Studia Sci. Math. Hungar., 3, (1968), 365–370

GONSKA, H. H.

- *Quantitative Korovkin type Theorems on Simultaneous Approximation*,
  Math. Z., 186, (1984), 419–433

GROSSMAN, M. W.

- *Note on a Generalized Bohman-Korovkin Theorem*,
  J. Math. Anal. Appl., 45, (1974), 43–46

JIMÉNEZ-POZO, M. A.

- *Déformation de la Convexité et Théorèmes du Type Korovkin*,
  C. R. Acad. Sc. Paris, 290, (1980), 213–215
- *Quantitative Theorems of Korovkin Type in Bounded Function Spaces*,
  International Conference on Constructive Theory of Functions, Varna, (1981)

KEIMEL, K., ROTH, W.

- *Ordered Cones and Approximation*,
  Lecture Notes in Mathematics, 1517, Springer-Verlag, Berlin, (1992)

KNOOP, H. B., POTTINGER, P.

- *Ein Satz vom Korovkin-Typ für C^k-Räume*,
  Math. Z., 148, (1976), 23–32
- *On Simultaneous Approximation by Certain Linear Positive Operators*,
  Arch. Math., 48, (1987), 511-520

KOROVKIN, P. P.

- *On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions (Russian)*,
  Dokl. Akad. Nauk SSSR, 90, (1953), 961–964
- *Linear Operators and Approximation Theory*,
  Hindustan Publishing Corp., Delhi, (1960)

LORENTZ, G. G.

- *Bernstein Polynomials*,
  Second Edition, Chelsea Publishing Company, New York, (1986)
- *Approximation of Functions*,
  Second Edition, Chelsea Publishing Company, New York, (1986)

LUPAS, A.

- *Some Properties of the Linear Positive Operators (I)*,
  Mathematica, Cluj, 9, (1967), 77–83

LUPAS, A., MÜLLER, M. W.

- *Approximation Properties of the M_n-Operators*,
  Aequationes math., 5, (1970), 19–37

MAMEDOV, R. G.

- *On the Order of the Approximation of Differentiable Functions by Linear Positive Operators*,
  Doklady, S.S.S.R., 128, (1959), 674–676

MEYER-KÖNIG, W., ZELLER, K.

- *Bernsteinsche Potenzreihen*,
  Studia math., 19, (1960), 89–94

MOND, B.

- *On the Degree of Approximation by Linear Positive Operators*,
J. Approx. Th., 18, (1976), 304–306

MOND, B., VASUDEVAN, R.

- *On Approximation by Linear Positive Operators*,
J. Approx. Th., 30, (1980), 334–336

MUÑOZ-DELGADO, F. J.

- *Aproximación Conservativa con Operadores Polinomiales Lineales*,
Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Spain, (1991)

MUÑOZ-DELGADO, F. J., CÁRDENAS-MORALES, D.

- *Almost Convexity and Quantitative Korovkin Type Results*,
Appl. Math. Lett. (aparecerá)
- *Korovkin Type Results for Shape Preserving Operators*,
Curves and Surfaces with Applications in CAGD, A. Le Méhauté, C. Rabut and L. L. Schumaker eds., Vanderbilt University Press, Nashville & London, (1997), 303–310
- *Quantitative Aspects on Conservative Approximation*,
Presentado en: The Fourth International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces
- *Quantitative Estimates of Korovkin-type for Shape Preserving Operators*,
Presentado en: Guangzhou International Symposium on Computacional Mathematics

MUÑOZ-DELGADO, F.J., RAMÍREZ-GONZÁLEZ, V., CÁRDENAS-MORALES, D.

- *An Extension of Korovkin's Theorem. Convergence for Sequences of Operators Preserving Shape Properties*,
C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, (1996), 421–426
- *Korovkin's Theorems for Certain Conservative Operators*,
Complex Methods in Approximation Theory, A. Martínez-Finkelshtein, F. Marcellán and J. J. Moreno-Balcázar eds., Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería, Almería, Spain, (1997), 117–126
- *Qualitative Korovkin-type Results on Conservative Approximation*,
J. Approx. Th., (aparecerá)

MUÑOZ-DELGADO, F. J., RAMÍREZ-GONZÁLEZ, V., SABLONNIÈRE, P.

- *On Conservative Approximation by Linear Polynomial Operators. An Extension of the Bernstein Operator,*
  Approx. Theory & its Appl., 11, N.1, (1995), 62–71

NEWMAN, D. J., SHAPIRO, H. S.

- *Jackson's Theorem in Higher Dimensions,*
  On Approximation Theory, Proceedings of the Conference at Oberwolfach, 1963, Birkhaüser, (1964), 208–219

NISHISHIRAHO, T.

- *Saturation of Positive Linear Operators,*
  Tôhoku Mathematical Journal, 28, N.2, (1976), 239–243
- *The Degree of Convergence of Positive Linear Operators,*
  Tôhoku Mathematical Journal, 29, N.1, (1976), 81–89

POPOVICIU, T.

- *Sur L'approximation des Fonctions Convexes d'ordre Supérieur,*
  Mathematica (Cluj), 10, (1935), 49–54

RAMÍREZ-GONZÁLEZ, V., MUÑOZ-DELGADO, F. J.

- *Some Results on Linear Polynomial Operators,*
  Multivariate Approximations: From CAGD to Wavelets, K. Jetter and F. Utreras eds., World Scientific Publishing Co. Inc., (1993), 269–280

SHISHA, O., MOND, B.

- *The Degree of Convergence of Sequences of Linear Positive Operators,*
  Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 60, (1968), 1196–1200

SIKKEMA, P. C.

- *On some Linear Positive Operators,*
  Indagationes math., 32, (1970), 327–337
- *On the Asymptotic Approximation with Operators of Meyer-König and Zeller,*
  Indagationes math., 32, (1970), 428–440