

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática



COMPRENSIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS
POR ALUMNOS CHILENOS DE EDUCACIÓN
PRIMARIA

Tesis Doctoral
Danilo Díaz Levicoy

Dirigida por:
Dra. Carmen Batanero Bernabeu
Dr. Pedro Arteaga Cezón

Granada, 2018

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Danilo Díaz Levicoy
ISBN: 978-84-9163-997-8
URI: <http://hdl.handle.net/10481/53598>

Reconocimientos:

Esta investigación se ha realizado en el seno del Grupo de Investigación FQM126, Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística, del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, en el marco del Proyecto de investigación EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y financiada por la Beca CONICYT PFCHA 72150306.

AGRADECIMIENTOS

A mis directores, Dra. Batanero y Dr. Pedro Arteaga, por el apoyo, preocupación y dedicación durante todo el desarrollo de esta tesis. Ha sido un privilegio trabajar estos años con ustedes, de quienes he aprendido tanto en el aspecto profesional como personal.

Al grupo de Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada, que desde el principio me hicieron sentir uno más del equipo.

A mi familia, siempre presente pese a la distancia.

A mis amigos, de aquí y de allá.

A Dios.

RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue evaluar la comprensión que, de los gráficos estadísticos incluidos en las directrices curriculares chilenas, alcanzan los estudiantes de 6° y 7° cursos de Educación Primaria en Chile. El interés de este estudio se justifica por la incorporación de este tema desde los primeros cursos de Educación Primaria en la última actualización de las directrices curriculares y por la escasez de investigaciones previas en el contexto chileno.

Para el desarrollo del trabajo, utilizamos, como marco teórico algunos elementos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, que permiten comparar el significado institucional de referencia y el significado personal logrado en una muestra de estudiantes chilenos, analizando sus respuestas a un cuestionario de evaluación previamente construido y basado en el contenido de los libros de texto. Para el desarrollo de esta investigación hemos seguido las siguientes etapas:

En primer lugar, hemos analizado la presencia de los gráficos estadísticos en las directrices curriculares de Educación Primaria en España y Chile, y estudiado la distribución de una serie de variables que han sido relevantes en la investigación previa (tipo de gráfico, actividad pedida, nivel de lectura, complejidad semiótica) en tres series de libros de texto en cada uno de estos países. Esto nos ha servido de base para establecer la definición semántica del cuestionario de evaluación.

En segundo lugar, y utilizando dicha definición semántica, diseñamos y validamos un cuestionario de comprensión de los gráficos estadísticos dirigido a estudiantes chilenos de 6° y 7° cursos de Educación Primaria, cuyos ítems se han seleccionado, a partir de un banco de tareas tomadas de los libros de texto y de investigaciones previas, y revisado por medio de consulta a expertos. Los ítems se han depurado teniendo en cuenta sus comentarios y los de los niños que colaboraron en un estudio piloto.

Finalmente, se evaluó la comprensión de los gráficos estadísticos en una muestra de 745 estudiantes de Educación Primaria en Chile, de los cuales 380 eran de 6° curso y 365 de 7°, pertenecientes a 13 escuelas y colegios públicos o concertados de diferentes ciudades de Chile. Los resultados informan sobre el conocimiento y las dificultades que estudiantes próximos a finalizar la Educación Primaria tienen cuando resuelven actividades sobre gráficos estadísticos. Además, se aporta información sobre la presencia de los gráficos en las directrices curriculares y en libros de texto, así como sobre las características psicométricas del instrumento que puede aplicarse en otros países o sujetos.

ABSTRACT

The aim of this research was to evaluate the understanding of statistical graphs included in the Chilean curricular guidelines reached by Chilean Primary Education 6th and 7th grade students. The interest of this study is justified by the incorporation of this topic from the first grades of Primary Education in the last curricular guidelines and by the scarcity of previous research in Chilean context.

To develop this work, we use, as a theoretical framework, elements of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction, which allow comparing the institutional meaning of reference and the personal meaning achieved by a sample of Chilean students, in analysing their answers to an assessment questionnaire, which was previously built and is based on the textbooks content. In developing the research we followed the following stages:

First, we analysed the presence of statistical graphs in the Spanish and Chilean Primary Education curricular guidelines, and studied the distribution of some variables that have been relevant in previous research (type of graph, activity requested, level of reading, semiotic complexity) in three textbooks series for each of these countries. This analysis was the basis to establish the semantic definition of the questionnaire.

Secondly, and using this semantic definition, we designed and validated a questionnaire to assess understanding of statistical graphs aimed at 6th and 7th grade Primary Education Chilean students. The items have been selected, from an item bank taken from the textbooks and previous research, through consultation with experts. The items were refined by taking into account their comments and those of the children who collaborated in a pilot study.

Finally, the understanding of statistical graphs was evaluated in a sample of 745 students of Primary Education in Chile, 380 from 6th grade and 365 from 7th grade, belonging to 13 public or private schools in different cities of Chile. The results inform about the students' knowledge and difficulties in activities involving statistical graphs by the end of Primary Education. In addition, we provide information about the presence of the graphs in the curricular guidelines and textbooks, as well as on the psychometric characteristics of the instrument that can be applied in other countries or subjects.

ÍNDICE

	Pag.
INTRODUCCIÓN	1
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	5
1.1. Introducción	5
1.2. Importancia de los gráficos estadísticos	6
1.2.1. Gráficos y cultura estadística	6
1.2.2. Gráficos en la formación del estudiante	7
1.3. Los gráficos en el currículo de Educación Primaria	7
1.3.1. Análisis del currículo chileno	7
1.3.1.1. La matemática en la Educación Primaria	9
1.3.1.2. Los gráficos estadísticos en la Educación Primaria	10
1.3.2. Análisis del currículo español	13
1.3.2.1. Orientaciones generales para el territorio español	13
1.3.2.2. Orientaciones de la Junta de Andalucía	16
1.3.3. Comparación con otros contextos	18
1.3.3.1. Los estándares americanos	18
1.3.3.2. Proyecto GAISE	19
1.4. Marco Teórico	20
1.4.1. Actividad matemática. Objeto y significado	20
1.4.2. Significado institucional y personal	21
1.4.3. Tipos de objetos matemáticos	22
1.4.4. Idoneidad didáctica	24
1.5. Objetivos del trabajo	25
1.6. Organización de la investigación	26
2. ANTECEDENTES	29
2.1. Introducción	29
2.2. Elementos en la comprensión de gráficos estadísticos	30
2.2.1. Componentes del gráfico estadístico	30
2.2.2. Comprensión gráfica	31
2.2.3. Definición de niveles de lectura	33
2.2.4. Niveles de complejidad semiótica del gráfico estadístico	36
2.2.5. Clasificación de errores en la construcción de gráficos estadísticos	37
2.3. Competencias gráficas de niños	40
2.3.1. Competencia de lectura de gráficos estadísticos	40
2.3.2. Competencia de construcción de gráficos estadísticos	43
2.4. Competencias gráficas de futuros profesores	45
2.4.1. Competencia de lectura de gráficos estadísticos	45
2.4.2. Errores de construcción de gráficos estadísticos	46
2.5. Investigaciones sobre análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria	48
2.6. Otras investigaciones sobre gráficos estadísticos	49
2.7. Conclusiones sobre los antecedentes	50
3. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA	51
3.1. Introducción	51

3.2. Importancia del libro de texto	52
3.3. Objetivos e hipótesis del estudio de los libros de texto	53
3.3.1. Objetivos	53
3.3.2. Hipótesis	54
3.4. Metodología de análisis	55
3.4.1. Muestra de textos analizados	55
3.4.2. Método y variables de análisis	57
3.5. Los gráficos en los libros de texto chilenos	60
3.5.1. Tipo de gráfico	61
3.5.2. Nivel de lectura	62
3.5.3. Complejidad semiótica	64
3.5.4. Actividad planteada	66
3.6. Los gráficos en los libros de texto españoles	70
3.6.1. Tipo de gráfico	70
3.6.2. Nivel de lectura	71
3.6.3. Complejidad semiótica	73
3.6.4. Actividad planteada	74
3.7. Conclusiones sobre el estudio de libros de texto	77
4. CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO	83
4.1. Introducción	83
4.2. Objetivos y clasificación del instrumento	84
4.3. Determinación del contenido de la variable objeto de medición	86
4.3.1. Fundamentos de la definición	86
4.3.2. Tabla de especificaciones del contenido	87
4.4. Elaboración de un banco inicial de ítems	89
4.4.1. Proceso de selección y depuración	89
4.5. Selección de ítems mediante juicio de expertos	90
4.5.1. Muestra de expertos	91
4.5.2. Método y cuestionario a expertos	92
4.5.3. Resultados del juicio de expertos	94
4.5.4. Ítems que componen el cuestionario piloto y análisis a priori	110
4.6. Prueba piloto del cuestionario	127
4.6.1. Descripción de la muestra de estudiantes	128
4.6.2. Resultados del estudio piloto y modificaciones en algunos ítems	128
4.7. Aproximación al estudio de validez de contenido	134
4.8. Conclusiones sobre el cuestionario	135
5. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE EVALUACIÓN	137
5.1. Introducción	137
5.2. Objetivos e hipótesis	138
5.3. Descripción de la muestra y procedimiento	139
5.4. Metodología del análisis de los datos	140
5.5. Resultados por ítem	141
5.5.1. Resultados en el ítem 1	141
5.5.2. Resultados en el ítem 2	149
5.5.3. Resultados en el ítem 3	154
5.5.4. Resultados en el ítem 4	160
5.5.5. Resultados en el ítem 5	166
5.5.6. Resultados en el ítem 6	171

5.5.7. Resultados en el ítem 7	177
5.5.8. Resultados en el ítem 8	185
5.5.9. Resultados en el ítem 9	189
5.5.10. Resultados en el ítem 10	200
5.5.11. Resultados en el ítem 11*	204
5.6. Estudio de la puntuación total	207
5.7. Características psicométricas del cuestionario	209
5.8. Diferencias entre grupos	214
5.9. Conflictos semióticos detectados en el estudio de evaluación	215
5.10. Conclusiones	218
6. CONCLUSIONES	223
6.1. Introducción	223
6.2. Conclusión sobre los objetivos generales	223
6.3. Principales aportaciones	226
6.4. Limitaciones del estudio	227
6.5. Futuras líneas de investigación	228
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	229

INTRODUCCIÓN

Los gráficos estadísticos son un elemento de la cultura estadística, es decir, parte de los conocimientos básicos que todo ciudadano educado debe poseer para manejarse de forma eficaz en la sociedad de la información (Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras, 2009). Esta necesidad se justifica, entre otras cosas, por la amplia presencia de estas representaciones en los medios de comunicación, en el trabajo profesional, la publicidad y otras situaciones de la vida cotidiana (Cavalcanti, Natrielli y Guimarães, 2010; González, Espinel y Ainley, 2011). Contribuyen también a la toma de decisiones, la comunicación de trabajos de investigación, o a realizar conexiones entre la matemática y la sociedad (Espinel, 2007). Además, tanto la elaboración de gráficos como su interpretación permiten al estudiante ejercitar diferentes contenidos matemáticos de geometría, números y operaciones o medida de magnitudes.

Esta relevancia ha sido reconocida por las autoridades educativas en las directrices de Educación Primaria; por ejemplo, en los estándares del NCTM (2000), o los CCSSI (2010). Igualmente ha llevado a incluir este tema en la enseñanza obligatoria desde los primeros cursos en Chile y España, e incluso algunos autores, como Alsina (2017), recomiendan su iniciación desde la educación infantil, como una forma de proporcionar una formación que permita a los estudiantes, y futuros ciudadanos, insertarse sin dificultad a la sociedad del conocimiento y de la información.

La enseñanza eficaz de cualquier contenido debe sustentarse en la investigación educativa relacionada con el mismo, que, en el caso de los gráficos estadísticos es todavía escasa comparada con otros temas de matemática. Más aún, en el contexto chileno, donde la novedad del tema hace especialmente necesario proporcionar a los profesores información sobre el currículo, su implementación en los libros de texto y las posibles dificultades de los estudiantes al abordarlo.

Como una forma de contribuir a las investigaciones sobre este tema, en esta tesis doctoral nos planteamos como principal objetivo el de evaluar la comprensión que alcanzan los estudiantes de los cursos 6° y 7° de Educación Primaria en Chile sobre los gráficos estadísticos. Se han elegido estos cursos porque en España y otros países la Educación Primaria finaliza en 6° curso y hay previsto un cambio curricular que reducirá en unos años dicha etapa educativa de los 8 años actuales a 6. Además, son en los seis primeros cursos, donde principalmente se trabaja con gráficos estadísticos.

Apoyándonos en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos como marco teórico (Godino, 2002, 2012, 2017; Godino y Batanero, 1994) y en la investigación previa, intentamos cumplir este objetivo, para lo que fue previamente necesario realizar un estudio curricular y de libros de texto y construir un instrumento de evaluación. Todos estos estudios se describen con detalle en la memoria de tesis doctoral, que se ha organizado en los siguientes capítulos:

En el Capítulo 1 se dedica a describir y justificar el problema de investigación elegido. Para ello, se analiza la importancia que el conocimiento de los gráficos estadísticos tiene como elemento cultural y en la formación del estudiante para el aprendizaje de otras materias. También se detalla su presencia y la forma de trabajo con los gráficos estadísticos que se sugiere en las directrices curriculares en España y Chile. Se describen los elementos del marco teórico que utilizamos en la investigación, en particular, las nociones de objeto matemático y sus diferentes facetas, significado personal e institucional y sus tipos e idoneidad didáctica y sus componentes. Finalmente, se explicitan los objetivos que se siguen en este trabajo y la forma en que se organiza la investigación.

En el Capítulo 2 sintetizamos la investigación previa sobre los gráficos estadísticos. Describimos los elementos que se requieren en la comprensión del gráfico estadísticos, en especial los componentes estructurales de los gráficos, y diversas teorías sobre los procesos que intervienen en la comprensión gráfica. Se analizan seguidamente las jerarquías que diferentes autores han definido para describir los niveles de niveles de lectura y de complejidad semiótica de los gráficos, y se precisan los que serán elementos centrales en nuestro trabajo. Detallamos a continuación y clasificamos los principales resultados de las investigaciones que han analizado la capacidad de lectura y construcción de gráficos estadísticos por estudiantes de edades parecidas a las que intervienen en la nuestra, así como las realizadas con futuros profesores. Este resumen se completa con la síntesis de algunos estudios de los gráficos en libros de texto y en pruebas de evaluación externas, de los cuales tomaremos las principales variables utilizadas en nuestro trabajo. Estos hallazgos se compararán con los obtenidos el nuestro.

En el Capítulo 3 presentamos los resultados de un estudio sobre los gráficos estadísticos incluidos en tres series completas de libros de texto de Educación Primaria en Chile y otras tantas colecciones en España, como una forma de caracterizar la enseñanza que se propone para este nivel educativo, que complementa el análisis curricular y sirve de apoyo a la construcción posterior de un instrumento de evaluación. El análisis se realiza considerando las variables descritas en los antecedentes y que han sido tenidas en cuenta, principalmente en el trabajo de Arteaga (2011) con una única serie de libros de texto españoles y en mi propia tesis de máster (Díaz-Levicoy- 2014) en que se amplió dicho estudio para incluir otras dos series de textos.

Utilizando la información obtenida en los libros de texto y las investigaciones previas, en el Capítulo 4 donde detallamos en proceso de construcción del instrumento aplicado en nuestro estudio, siguiendo un proceso metodológico riguroso y la metodología sugerida en Batanero y Díaz (2005). Definimos los contenidos a evaluar, mediante la elaboración de la tabla de especificaciones del contenido que se basa en el análisis curricular y de libros de texto. Fijadas las variables del estudio y cruzando algunas de las categorías principales de las mismas se decide el número de ítems y se construye un banco con ítems adaptados de la investigación previa y los libros de texto. Este banco de ítems (tres por cada uno de los que se necesitan) se somete a juicio de 10 expertos en Didáctica de la Estadística. A lo largo del capítulo describimos el proceso de selección de expertos, el cuestionario para evaluar y los resultados de dicho juicio, con los que establecimos los ítems provisionales. Se finaliza mostrando los resultados del pilotaje con una muestra pequeña de estudiantes y las modificaciones que se han realizado de acuerdo a este proceso para obtener el cuestionario finalmente utilizado.

En el Capítulo 5 describimos los resultados del estudio de evaluación realizado

por medio de dicho cuestionario en una muestra de 745 estudiantes chilenos de 6° y 7° cursos de Educación Primaria, constituida por varias escuelas de cinco ciudades diferentes. Mostramos los resultados para ítem, tanto en lo que se refiere a la respuesta, como al nivel de lectura alcanzado por los estudiantes, y errores cometidos. También se analiza la puntuación total en cada uno de los ítems y en el total del cuestionario, diferenciando por curso. Se completa el análisis con el estudio de las características psicométricas del cuestionario (dificultad y discriminación de los ítems, fiabilidad y validez). Finalizamos describiendo y clasificando los conflictos semióticos detectados en las respuestas de los estudiantes.

En el Capítulo 6 presentamos las principales conclusiones de nuestro estudio. Discutimos, en primer lugar, el grado por el que los objetivos generales fijados se han cumplido, ya que los objetivos parciales e hipótesis de cada estudio se analizan en las conclusiones del capítulo correspondiente. Presentamos también las aportaciones más importantes que se desprenden de los resultados, muchas de las cuales ya han sido publicadas. Finalizamos reflexionando sobre las limitaciones del estudio y proponemos algunas futuras líneas de investigación. La memoria finaliza con las referencias.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

- 1.1. Introducción
- 1.2. Importancia de los gráficos estadísticos
 - 1.2.1. Gráficos y cultura estadística
 - 1.2.2. Gráficos en la formación del estudiante
- 1.3. Los gráficos en el currículo de Educación Primaria
 - 1.3.1. Análisis del currículo chileno
 - 1.3.1.1. La matemática en la Educación Primaria
 - 1.3.1.2. Los gráficos estadísticos en la Educación Primaria
 - 1.3.2. Análisis del currículo español
 - 1.3.2.1. Orientaciones generales para el territorio español
 - 1.3.2.2. Orientaciones de la Junta de Andalucía
 - 1.3.3. Comparación con otros contextos
 - 1.3.3.1. Los estándares americanos
 - 1.3.3.2. Proyecto GAISE
- 1.4. Marco Teórico
 - 1.4.1. Actividad matemática. Objeto y significado
 - 1.4.2. Significado institucional y personal
 - 1.4.3. Tipos de objetos matemáticos
 - 1.4.4. Idoneidad didáctica
- 1.5. Objetivos del trabajo
- 1.6. Organización de la investigación

1.1. INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo hacemos una descripción del problema de investigación, que, como se ha indicado en la introducción, es el análisis de la comprensión adquirida por los niños chilenos de 6° y 7° curso de Educación Primaria sobre los gráficos estadísticos.

Para ello, comenzamos describiendo la importancia de los gráficos estadísticos en la formación de los estudiantes. Seguimos analizando la presencia de este contenido en las directrices curriculares de Chile y comparando con los correspondientes al decreto de enseñanzas mínimas del Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC, 2006), el reciente decreto que establece el currículo básico para la Educación Primaria (MECD, 2014), como desarrollo de la LOMCE (Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa), y las orientaciones de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (2007) y de la actual Consejería de Educación, Cultura y Deporte (2015) que describe el currículo de Educación Primaria en Andalucía. También se exponen las indicaciones de los Principios y estándares para matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) y del Proyecto Guidelines for Assessment and Instruction

in Statistics Education (GAISE, Franklin et al., 2007) para la enseñanza de la estadística y los gráficos.

Resumimos a continuación algunos elementos del enfoque ontosemiótico que servirán de apoyo al trabajo. Finalmente, enunciaremos los objetivos que guían el desarrollo de esta investigación, describimos su estructura y la metodología adoptada

1.2. IMPORTANCIA DE LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Seguidamente se analiza la importancia del tema de investigación elegido, tanto por su contribución a la cultura estadística del estudiante, como por su interés para la formación del mismo.

1.2.1. GRÁFICOS Y CULTURA ESTADÍSTICA

El conocimiento sobre gráficos estadístico se engloba dentro de la *cultura estadística*, es decir, de los conocimientos básicos que debe tener una persona culta para analizar críticamente la información con que se encuentra en la sociedad (Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras, 2009).

Son varios los autores que han definido lo que consideran por cultura estadística. Watson (1997) entiende que la cultura estadística implica la capacidad de comprender el significado y las implicaciones que los gráficos o la información estadística pueden tener en el contexto en que se presentan. Incluye un modelo de niveles progresivos de cultura estadística, en el que considera los siguientes elementos: conocimiento básico de los conceptos estadísticos, comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos, cuando se presentan en los medios de comunicación o en el trabajo y una actitud crítica que se muestra al ser capaz de cuestionar argumentos basados en evidencia estadística insuficiente o sesgada. Gal (2002, p. 2), por su parte, la describe como la suma de dos componentes, cada uno de los cuales puede aplicarse a la actividad de leer o construir gráficos estadísticos:

- a) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) discutir o comunicar sus opiniones respecto tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.

Una persona con cultura estadística debe ser capaz de leer críticamente los diferentes tipos de gráficos que puede encontrar en los medios de comunicación, Internet y su vida profesional (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010; del Pino y Estrella, 2012). Además, siguiendo el modelo de Gal, debe tener conocimientos de los gráficos estadísticos elementales, ser capaz de razonar con ello y mostrar ciertas actitudes, que incluyen la capacidad de interpretación crítica de la información estadística.

En este sentido, Schield (2006) señala que no basta con la lectura literal de los gráficos estadísticos, sino que una adecuada cultura estadística implica identificar tendencias y variabilidad en los datos representados, identificado posibles errores en la información entregada o en la interpretación que se hace de la misma.

1.2.2. GRÁFICOS EN LA FORMACIÓN DEL ESTUDIANTE

Dado el papel de los gráficos en la cultura estadística, es de vital importancia que los niños, y en general todos los estudiantes, reciban una formación estadística adecuada que les permita leer, interpretar y construir gráficos estadísticos para adaptarse adecuadamente a la sociedad de la información.

Por otro lado, los gráficos estadísticos también permiten conectar a la escuela con la sociedad actual, debido a su presencia en los medios de comunicación (Espinel, 2007). Arteaga et al. (2011) recuerdan el auge de las redes sociales, donde las personas acceden a una diversidad de datos estadísticos sobre variedad de temas. En este sentido, Eudave (2009) señala:

En efecto, diferentes medios de comunicación utilizan de manera recurrente información estadística ordenada en tablas y gráficas de distintos tipos y, gracias a la Internet, actualmente es posible disponer de casi cualquier tipo de información, ya sea en bases de datos o en concentrados numéricos que anteriormente eran de difícil acceso (p. 6).

Estos gráficos son también usados en el análisis de datos y en la comunicación social para resumirlos de una manera eficiente. Wild y Pfannkuch (1999) señalan que la *transnumeración* es un elemento relevante del razonamiento estadístico. Dicha transnumeración consiste en cambiar la representación de los datos a otra para obtener una información que no era visible inicialmente.

Un estudiante debe ser capaz de emitir juicios sobre un gráfico estadístico realizado en un ordenador, es decir, señalar si este gráfico posee, o no, algún error. Pese a que las nuevas tecnologías permiten la realización de gráficos de una manera rápida, estos pueden no ser los adecuados para las variables que se están representando (Arteaga, Batanero y Contreras, 2011). Estos autores indican también que los gráficos permiten construir y comunicar conceptos, y ayudan a establecer (y comprender) las relaciones abstractas que existen entre diferentes variables que son parte de un fenómeno en ciencias naturales o sociales. Por eso, los estudiantes deben ser capaces de interpretarlos y construirlos sin dificultad para facilitarles el trabajo en dichas materias.

Como resumen, se ha mostrado y justificado la necesidad de que los estudiantes, de los diferentes niveles educacionales, reciban una formación estadística que les permita actuar crítica y responsablemente frente a la variedad de información a la que se accede en situaciones laborales, en los medios de comunicación, redes sociales y otras instancias de la vida cotidiana, donde mucha de esta información está resumida en tablas y gráficos estadísticos y debe ser interpretada. También, se considera que los gráficos estadísticos son un elemento importante para acercar la sociedad a la escuela y ser usados como un recurso didáctico para interpretar fenómenos cotidianos.

1.3. LOS GRÁFICOS EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

A continuación, analizamos el papel de los gráficos estadísticos en las directrices curriculares promulgadas en Chile y España, y comparando con otros contextos.

1.3.1. ANÁLISIS DEL CURRÍCULO CHILENO

En este punto presentamos el análisis de las principales características de la enseñanza de la matemática y el trabajo con gráficos estadísticos que se plasman en las

directrices curriculares chilenas. En primer lugar, para contextualizar, describimos la organización de la enseñanza en Chile.

La organización de la enseñanza en Chile

La Ley General de Educación (LGE) (MINEDUC, 2009) nace como respuesta a diversas inquietudes sobre la calidad y la equidad de la educación chilena, fijando los derechos y deberes que deben guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Establece los siguientes niveles de enseñanza formal: infantil (parvularia), primaria (básica), secundaria (media) y universitaria (superior).

En esta ley, la Educación Infantil se contempla desde el nacimiento del niño hasta el ingreso a la Educación Primaria, que es promovida por el estado, financiando el 1° y 2° nivel de transición (entre los 4 y 6 años de edad), y no es obligatoria. La Educación Primaria es de carácter obligatoria, atendiendo a niños con una edad mínima de 6 años de edad y, a partir del 2027, disminuye su duración de 8 a 6 años. Sus objetivos matemáticos son:

Comprender y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos básicos, relativos a números y formas geométricas, en la resolución de problemas cotidianos, y apreciar el aporte de la matemática para entender y actuar en el mundo (MINEDUC, 2009, p. 10).

Tras finalizar la Educación Primaria los estudiantes ingresan a la Educación Secundaria, que es obligatoria. En este nivel, uno de los objetivos generales es:

Comprender y aplicar conceptos, procedimientos y formas de razonamiento matemático para resolver problemas numéricos, geométricos, algebraicos y estadísticos, y para modelar situaciones y fenómenos reales, formular inferencias y tomar decisiones fundadas (MINEDUC, 2009, p. 11).

A partir del 2027, la Educación Secundaria pasará de 4 a 6 años de duración, con una formación general de 4 años y 2 años de formación diferenciada en tres líneas posibles (científico-humanista, técnico-profesional, artística), que tienen las siguientes características:

- *Científico-humanista*. En esta rama, se profundizan las áreas generales, por ejemplo: matemática, lengua castellana, ciencias sociales, entre otras.
- *Técnico-profesional*. Forma a estudiantes en alguna especialidad relacionada con una actividad económica que es de interés, de acuerdo al perfil de egreso. Tras finalizar el nivel educacional pueden acceder a un título técnico de nivel medio.
- *Artística*. En esta formación se trabajan áreas artísticas, de acuerdo a los intereses de los estudiantes.

La LGE conserva la idea del derecho a la educación y la libertad de enseñanza; asegurando que los niños y jóvenes reciban una educación de calidad, independiente de las circunstancias y condiciones en que se encuentra el estudiante y su familia. La administración de los establecimientos educativos puede ser estatal o privada (con o sin subvención del estado, respectivamente); dando la posibilidad de respetar la libertad de credos y la pluralidad de la población. Además, garantiza un proceso objetivo y transparente para que los niños y jóvenes puedan ingresar a cualquier establecimiento; sin que el ingreso esté condicionado a las calificaciones, los resultados de una prueba de

ingreso (selección) o situación socioeconómica.

1.3.1.1. LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

El Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) establece para el área de matemática, en los seis primeros años de la Educación Primaria, los ejes o bloques que guían en proceso de enseñanza y aprendizaje: (1) *Números y operaciones*; (2) *Patrones y álgebra*; (3) *Geometría*; (4) *Medición*; y (5) *Datos y probabilidades* (MINEDUC, 2012). Para los estudiantes del 7° y 8° año de Educación Primaria se definen los siguientes: (1) *Números*; (2) *Álgebra y funciones*; (3) *Geometría*; (4) *Medición*; y (5) *Probabilidad y estadística* (MINEDUC, 2013a). Las orientaciones o bases curriculares (MINEDUC, 2012), dejan en evidencia la utilidad que posee la matemática para comprender de la realidad social, señalando que esta área:

(...) proporciona herramientas conceptuales para analizar la información cuantitativa presente en noticias, opiniones, publicidad y diversos textos, aportando al desarrollo de las capacidades de comunicación, razonamiento y abstracción e impulsando el desarrollo del pensamiento intuitivo y la reflexión sistemática (MINEDUC, 2012, p. 1).

Otra forma de organizar el currículo escolar chileno es mediante habilidades y actitudes que se espera desarrollar. Las habilidades definidas para los estudiantes de los ocho años de Educación Primaria son: resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar. Las actitudes definidas para los estudiantes que cursen desde primer a sexto año de Educación Primaria, que se deben desarrollar a la vez que los conocimientos MINEDUC (2012, p. 8), son:

- Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico.
- Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.
- Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas.
- Manifestar una actitud positiva frente a sí mismo y sus capacidades.
- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.
- Demostrar una actitud de esfuerzo y perseverancia.
- Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa.

Y las actitudes definidas para 7° y 8° año, plasmadas en MINEDUC (2013a, p. 10), son, además de las anteriores:

- Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.
- Trabajar en equipo en forma responsable, ayudando a los compañeros, considerando y respetando sus aportes, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.
- Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

- Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, respetando la propiedad y la privacidad de las personas.

1.3.1.2. LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

En la Tabla 1.3.1.2.1 se resumen los objetivos de aprendizaje explicitados en los ejes de datos y probabilidades en las directrices curriculares para estudiantes de enseñanza primaria.

Tabla 1.3.1.2.1. *Contenido de gráficos estadísticos en el currículo chileno*

Curso	Contenidos
Primero	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas. Construir, leer e interpretar pictogramas (MINEDUC, 2013b, p. 42)
Segundo	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas (MINEDUC, 2013c, p. 43)
Tercero	Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra. Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, en base a información recolectada o dada Representar datos usando diagramas de puntos (MINEDUC, 2013d, p. 43-44)
Cuarto	Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos. Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo. Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, y comunicar sus conclusiones. (MINEDUC, 2013e, p. 44)
Quinto	Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones. Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias (MINEDUC, 2013f, p. 43)
Sexto	Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones (MINEDUC, 2013g, p. 43).
Séptimo	Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos (MINEDUC, 2013a, p. 13)
Octavo	Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles: identificando la población que está sobre o bajo el percentil; representándolas con diagramas, incluyendo el diagrama de cajón, de manera manual y/o con software educativo; utilizándolas para comparar poblaciones. Evaluar la forma en que los datos están presentados: comparando la información de los mismos datos representada en distintos tipos de gráficos para determinar fortalezas y debilidades de cada uno; justificando la elección del gráfico para una determinada situación y su correspondiente conjunto de datos; detectando manipulaciones de gráficos para representar datos. (MINEDUC, 2013a, p. 16).

Para dar cumplimiento a las directrices curriculares para el primer curso se plantea, por ejemplo, la actividad mostrada en la Figura 1.3.1.2.1. En ella se debe recoger la información sobre el jugo de fruta que se prefiere en un curso (primero de primaria) y representarla en un pictograma usando como icono manzanas, naranjas y frutillas. Además, se pide una lectura literal de la información y cálculos asociados a la información que se presenta. Otro ejemplo es la actividad mostrada en la parte derecha de la Figura sobre lectura de pictogramas.

Responden preguntas acerca de datos recolectados del entorno; por ejemplo, de gustos de jugos naturales. Con este propósito:

- Recolectan información en un curso de 1º básico acerca de la cantidad de alumnos que beben Jugo de fruta natural de manzana, naranja y frutilla.
- Registran los datos recolectados en el pictograma siguiente, dibujando una naranja, una manzana o una frutilla sobre el nombre de cada fruta.

Cada fruta dibujada corresponde a la preferencia de 1 alumno

Responden las siguientes preguntas:

- > ¿cuántos niños prefieren el jugo natural de naranja?
- > ¿cuál es el jugo natural que más prefieren los niños encuestados?

Ordenan las cantidades de preferencias de esos jugos naturales de menor a mayor.

b El pictograma de la figura que muestra la cantidad de profesores y profesoras de Enseñanza Básica que hay en un colegio.

Profesoras

Profesores

Contestan las preguntas:

- > ¿cuántos profesores hay en total?
- > ¿cuántas profesoras más que profesores hay en el colegio?

Figura 1.3.1.2.1. Actividades para 1º de primaria (MINEDUC, 2013b, p.136)

Se busca cumplir los objetivos de segundo curso con actividades como las mostradas en la Figura 1.3.1.2.2, donde se debe representar en un pictograma alguno de los resultados que se obtienen al lanzar dos dados o construir un gráfico de barras simple. Estas actividades, además de ser muy prácticas, permiten al estudiante aproximarse a situaciones de probabilidad que serán abordadas en los próximos cursos.

Desafío:

Registran en pictogramas con cubos apilables resultados que se pueden obtener al lanzar dos dados. Por ejemplo:

- > las veces que la suma de los números que aparecen es 5
- > las veces que la resta de los números que aparecen (el mayor menos el menor) es mayor que 3

Realizan juegos aleatorios con monedas y registran los resultados en un gráfico de barra simple. Por ejemplo, lanzan tres veces una moneda al aire y registran:

- > las veces que aparecen dos caras
- > las veces que aparecen una cara y un sello
- > las veces que aparecen dos sellos

Figura 1.3.1.2.2. Actividades para 2º de primaria (MINEDUC, 2013c, p.126 y p. 143)

En tercer curso, se sugiere trabajar con los niños actividades como la mostrada en la Figura 1.3.1.2.3, que presenta una situación relacionada con Ciencias Sociales y se pide construir un gráfico de barras. En la parte derecha de esta figura, vemos una de las primeras aproximaciones que tiene los niños a los gráficos de puntos. Además, se proponen preguntas que requieren una lectura literal y al desarrollo de operaciones sencillas (comparación).

R 1

- Sacan conclusiones con respecto a los siguientes datos: Anita ahorró plata entre agosto y noviembre, como muestra la tabla: (Historia, Geografía y Ciencias Sociales)

Cantidad de pesos	Mes	Cantidad	Mes	Cantidad
		Agosto	\$ 200	Octubre
	Setiembre	\$ 350	Noviembre	\$ 150

- Confeccionan un gráfico de barras con los datos de la tabla del ejercicio anterior.

- Indican en un diagrama de puntos dado sus partes: recta graduada, título, frecuencia

Hora de levantarse

			x		
			x		
		x	x		
		x	x		
	x	x	x		
	x	x	x		
x	x	x	x	x	
x	x	x	x	x	x
6:00	6:15	6:30	6:45	7:00	7:15

hora de levantarse

- Marcan con una cruz cuando un alumno dice a qué hora se levanta todos los días que hay clases.
- Responden a qué hora se levanta la mayoría del curso.
- Responden cuántas personas se levantan después de las 7 horas.
- Responden a qué hora se levantan los madrugadores.

Figura 1.3.1.2.3. Actividades para 3º de primaria (MINEDUC, 2013d, p.133 y 132)

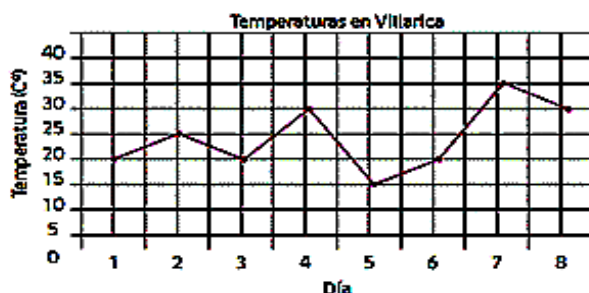
Se sigue en cuarto con la elaboración de encuestas, analizando los datos y comparándolos, mediante tablas y gráficos. También se propone realizar experimentos y leer e interpretar pictogramas y gráficos de barras simple con escala, comunicando las conclusiones. Un ejemplo de actividad se muestra en la Figura 1.3.1.2.4, donde los niños deben realizar encuestas al interior del curso, donde los resultados deben ser presentados gráficos estadísticos que faciliten la comunicación de los resultados. Este tipo de actividades son fundamental para evidenciar la relación y utilidad que tiene la estadística con otras disciplinas de currículo escolar.

Realizan encuestas en su curso para saber qué actividades realizan después de clase. Comunican y comparan sus datos. Preparan una documentación y la representan con gráficos elaborados manualmente o usando el computador.
(Historia, Geografía y Ciencias Sociales)

Figura 1.3.1.2.4. Actividad sugerida para 4° de primaria (MINEDUC, 2013e, p.142)

Las recomendaciones para quinto curso incluyen leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barras simples y gráficos de líneas y comunicar las conclusiones. Para abordar este objetivo, se recomiendan actividades como la mostrada en la Figura 1.3.1.2.5, donde el estudiante debe leer e interpretar la información representada en un gráfico de líneas y dar respuestas a preguntas sobre los elementos propios del gráfico y la información representada. En este nivel se introducen los diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias.

Leen e interpretan información presentada en gráficos de línea. Por ejemplo, el siguiente gráfico muestra las temperaturas registradas en Villarica cuando Ana fue de vacaciones a ese lugar.



- > analizan los elementos de un gráfico de líneas por medio de las preguntas:
 - ¿Qué situación representa el gráfico?
 - ¿Qué representan los puntos del gráfico?
 - ¿Qué representan las líneas que unen los puntos del gráfico?
 - > a continuación responden preguntas como las siguientes:
 - ¿Qué temperatura se produjo el día 5?
 - ¿Qué día fue el más caluroso y qué día el más frío?
- (Historia, Geografía y Ciencias Sociales)

Figura 1.3.1.2.5. Actividad sugerida para 5° de primaria (MINEDUC, 2013f, p.145)

Finalmente, en sexto año se sugiere comparar distribuciones de dos grupos, proveniente de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas, así como leer e interpretar gráficos de barras dobles y circulares y comunicar las conclusiones. En la Figura 1.3.1.2.6 mostramos dos actividades. En la primera, el estudiante debe realizar un par de cálculos, basados en la lectura literal de un diagrama de tallo y hojas. En la segunda deben calcular un porcentaje no especificado en el gráfico de sectores y el número de personas en cada categoría si se sabe el total de

estudiantes.

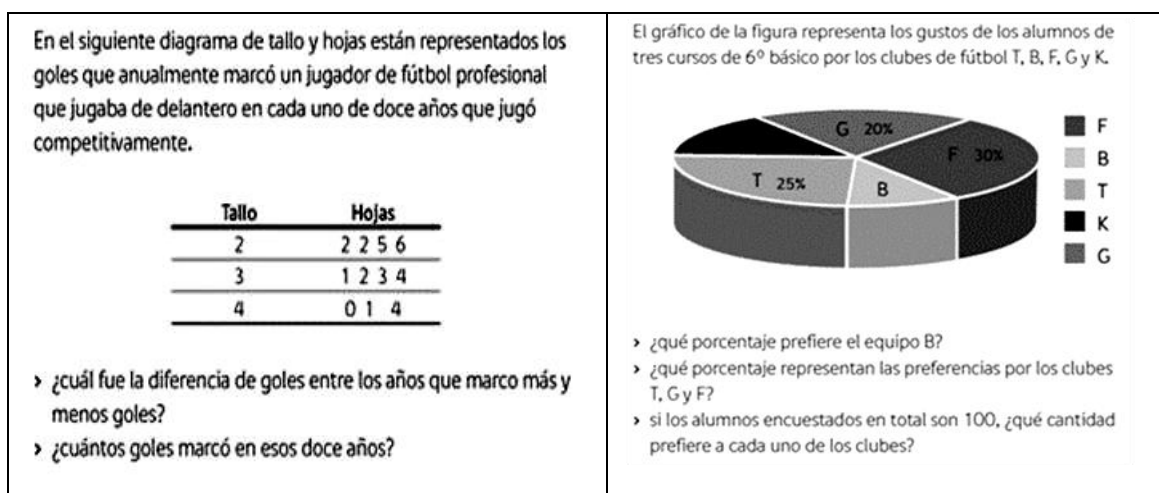


Figura 1.3.1.2.6. Actividades para 6º de primaria (MINEDUC, 2013g, p. 139 y 136)

En resumen, la presencia de los gráficos estadísticos en las directrices curriculares de Educación Primaria chilena es potente y constante, ya que están considerados en la totalidad de sus cursos o niveles. Presentan una secuencia gradual, desde gráficos sencillos (desde pictogramas, barras) hasta otros de mayor complejidad (gráficos de barra doble, circulares, gráfico de caja). Estos gráficos deben ser leídos, interpretados o contruidos, según la naturaleza de los datos; manteniendo una relación directa con tablas de organización de la información. Para trabajar con datos, se recomienda que estos sean obtenidos mediante actividades que sean de interés o que capten la atención de los estudiantes, experimentos, juegos y/o encuestas. Es decir, con actividades que permitan recolectar información desde el entorno y vida cotidiana para los estudiantes.

Cabe destacar que, en los últimos años, el currículo de matemática en Chile ha venido mostrando modificaciones significativas; el caso más claro es el gráfico de caja y bigotes, que hace un par de años estaba propuesto para el último año de secundaria y ahora se presenta en el último año de primaria, aunque de una manera sencilla.

1.3.2. ANÁLISIS DEL CURRÍCULO ESPAÑOL

A continuación, analizamos la presencia de los gráficos estadísticos en los objetivos, contenidos y criterios de evaluación del Decreto de Enseñanzas Mínimas del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 2006), las orientaciones de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (2007), los nuevos decretos que define el currículo básico (MECD, 2014) y la Consejería de Educación, Cultura y Deporte (2015), donde se exponen los lineamientos para la Educación Primaria española y andaluzas. Este nivel educativo se caracteriza por ser obligatorio y gratuito; comprende tres ciclos de enseñanza, con dos años cada uno; y atiende a niños que tienen edades entre seis y doce años, idealmente.

1.3.2.1. ORIENTACIONES GENERALES PARA EL TERRITORIO ESPAÑOL

Nos encontramos en un cambio reciente de normativa, debido a la promulgación reciente de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).

En la normativa vigente anterior y que fue utilizada para estudiar los gráficos estadísticos en los libros de texto que se detallan en el Capítulo 3, el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 2006) organizó los contenidos de la matemática escolar española, en la enseñanza primaria, en cuatro bloques: (1) *Números y operaciones*; (2) *Medida*; (3) *Geometría*; (4) *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*. Es en este último bloque, en particular, donde el trabajo con gráficos estadísticos toma importancia y significado, cuando favorece la interpretación de la información entregada por los medios de comunicación y la toma adecuada de decisiones (MEC, 2006).

De los objetivos planteados para la matemática en primaria, que están relacionados con el tema en estudio, se destaca: “utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma” (MEC, 2006, p. 43097). Arteaga (2011) señala que, junto con iniciar antes el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos estadísticos, en este currículo hubo un cambio de enfoque en el trabajo escolar de los niños, pues se trató de proponer actividades que permitiesen desarrollar el razonamiento estadístico y descubrir la estadística como un instrumento que permite resolver problemas.

La Tabla 1.3.2.1.1 muestra los contenidos relacionados con gráficos estadísticos en el currículo citado de matemática de Educación Primaria española. Se puede observar que en el primer ciclo se debían plantear actividades de lectura e interpretación de gráficos estadísticos sencillos. En el segundo ciclo, se buscaba que los niños fuesen capaces de crear y describir gráficos estadísticos. En el tercer ciclo, debían distinguir distintos tipos de gráficos estadísticos (según el tipo de variable), analizar los gráficos estadísticos de una forma crítica y obtener información, de diversas fuentes, para la confección de los gráficos. Se destaca el progreso que se experimentaba en el tratamiento de estas representaciones, donde en el primer ciclo se requiere la interpretación de ciertos elementos de gráficos sencillos que estuviesen relacionados con actividades cercanas a los niños y, hasta, el tercero donde estudiaban diferentes tipos de gráficos estadísticos y valorando de manera crítica la información que estos presentan.

Tabla 1.3.2.1.1. *Contenidos relacionados con gráficos estadísticos en Educación Primaria española*

Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
<ul style="list-style-type: none"> - Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos (MEC, 2006, p. 43098). 	<ul style="list-style-type: none"> - Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares, - Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara (MEC, 2006, p. 43099). 	<ul style="list-style-type: none"> - Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. - Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. - Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. - Obtención y utilización de información para la realización de gráficos (MEC, 2006, p. 43101).

La Tabla 1.3.2.1.2 contiene los criterios de evaluación presentes en estas directrices curriculares y que tiene relación con los gráficos estadísticos. Estos criterios quieren medir la capacidad que tienen los estudiantes para interpretar gráficos sencillos, representación de datos en gráficos adecuados según el tipo de información.

Tabla 1.3.2.1.2. *Criterios de evaluación relacionados con gráficos en la Educación Primaria española*

Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras. Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos (MEC, 2006, p. 43098).	Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado de forma de tabla o gráfica (MEC, 2006, p. 43100)	Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado (MEC, 2006, p. 43101). Plantea en uso de bloques de barras, diagramas lineales, entre otros.

Cambios curriculares recientes

El desarrollo de la LOMCE para el currículo de Educación Primaria se ha concretado, en una primera fase en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico (MECD, 2014).

Tabla 1.3.2.1.3. *Contenidos relacionados con gráficos estadísticos, Bloque 5 (MECD, 2014, p. 19393)*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<ul style="list-style-type: none"> - Gráficos y parámetros estadísticos. - Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos. - Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas. - Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango. - Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales. - Análisis crítico de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales, comunicando la información. 2. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. 3. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. 4. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Identifica datos cualitativos y cuantitativos en situaciones familiares. 2.1. Recoge y clasifica datos cualitativos y cuantitativos, de situaciones de su entorno, utilizándolos para construir tablas de frecuencias absolutas y relativas. 2.2. Aplica de forma intuitiva a situaciones familiares, las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango. 2.3. Realiza e interpreta gráficos muy sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales, con datos obtenidos de situaciones muy cercanas. 3.1. Realiza análisis crítico argumentado sobre las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos. 4.1. Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización. 4.2. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.

En estas directrices los contenidos matemáticos se organizan en cinco grandes bloques, el primero de los cuáles es transversal a los otros cuatro: (1) *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*; (2) *Números*; (3) *Medida*; (4) *Geometría*; (5) *Estadística* y

probabilidad. También se sugiere que los bloques se pueden conectar entre sí, y se da libertad a organizar y secuenciar estos contenidos dentro de los centros escolares. En la Tabla 1.3.2.1.3 se resume el contenido relacionado con los gráficos estadísticos (MECD, 2014, p. 19393).

Observamos que estos contenidos son más detallados en lo que se refiere a la evaluación, pues se incluyen criterios y estándares de aprendizaje evaluables.

1.3.2.2. ORIENTACIONES DE LA JUNTA DE ANDALUCÍA

La Consejería de Educación de Andalucía (2007) publicó la *Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía*. En esta orden, de la comunidad autónoma de Andalucía, entregaban los lineamientos curriculares que debían guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en este territorio. El documento indicaba que estos contenidos debían estar en función de las demandas de la sociedad, por lo que es necesario reorganizar el currículo para dar cumplimiento a estos requerimientos. Pero, sin contradecir las directrices del Estado, promulgadas en el Decreto de Enseñanzas Mínimas.

Los establecimientos educativos que imparten Educación Primaria tienen la autonomía para desarrollar un proyecto educativo que permita proporcionar una educación común y que atienda a la diversidad de los estudiantes. Además, este documento señalaba que:

Se aprende matemáticas porque son útiles e incluso imprescindibles para la vida cotidiana y para el desarrollo de las actividades profesionales y de todo tipo; porque nos ayudan a comprender la realidad que nos rodea; y también, porque su aprendizaje contribuye a la formación intelectual general potenciando las capacidades cognitivas de niños y niñas (Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, 2007, p. 18),

Los núcleos temáticos señalados por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía eran: (1) *Resolución de problemas (transversal)*; (2) *Uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (transversal)*; (3) *Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas (transversal)*; (4) *Desarrollo del sentido numérico. Medida de magnitudes*; (5) *Las formas y Figuras y sus propiedades*; y (6) *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* (Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, 2007)

El núcleo temático 6, *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*, buscaba que los estudiantes comprendan que la matemática permite interpretar situaciones de contextos cercanos, ayuda a comprender la realidad y actuar de forma responsable, crítica y positiva. Los contenidos que se debían abordar en este núcleo temático, eran los definidos en el Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006): bloque 4 (Tratamiento de la información, azar y probabilidad) en el primer, segundo y tercer ciclo de enseñanza primaria. Se resaltan las conexiones con los otros tres bloques de contenido y con aspectos planteados en las áreas de conocimiento del medio natural, social y cultural (Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, 2007).

El proceso de enseñanza y aprendizaje de este núcleo temático se debía basar en la conjugación adecuada de los ejes transversales: resolución de problemas (de la vida cotidiana); uso adecuado de los medios tecnológicos; y la dimensión social y cultural de la matemática. Además, la enseñanza ha de favorecer el trabajo colaborativo y con un

uso crítico de la información disponible.

Los gráficos estadísticos, de acuerdo a las consideraciones anteriores, se abordan en los tres ciclos de enseñanza primaria y se trabajan gradualmente. Es así, como la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (2007) señala:

Las tablas y gráficos presentes en los medios de comunicación, Internet o en la publicidad facilitarán ejemplos suficientes para analizar y agrupar datos y, sobre todo, para valorar la necesidad y la importancia de establecer relaciones entre ellos (p. 55).

Otro punto relevante es extraer conclusiones según los datos disponibles en tablas y gráficos, así como las actividades para el tratamiento de la información: planificación, uso de técnicas de recolección, técnicas de manipulación, agrupamiento y cálculo (Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, 2007). Finalmente, el proceso de evaluación debe considerar la clasificación, representación, deducción de relaciones y conclusiones existente entre los datos. Además, en los estudios estadísticos, se deben considerar la capacidad que tenga el estudiante para diseñar y utilizar técnicas apropiadas para la obtención, cuantificación, representación y extracción de conclusiones de las actividades realizadas.

Cambios curriculares recientes

Más recientemente, la Consejería de Educación, Cultura y Deporte (2015), por medio de la Orden de 17 de marzo de 2015, promulgan los lineamientos que guiarán el proceso de instrucción de primaria en este territorio andaluz, permitiendo concretar las directrices nacionales del MECD (2014). En estas directrices establecen criterio de evaluación, contenidos e indicadores para ser trabajados en los tres ciclos que se divide la Educación Primaria.

En la Tabla 1.3.2.2.1 se mencionan, a modo de resumen de estas directrices, los criterios de evaluación que se relacionan con gráficos estadísticos. En ellas, observamos una clara progresión de estas representaciones, basadas en datos que provengan del entorno cercano al estudiante. Confirmando la relevancia de los gráficos mencionadas en las directrices anteriores.

Tabla 1.3.2.2.1. *Criterios de evaluación relacionados con gráficos en la Educación Primaria andaluza*

Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
Leer, entender, recoger y registrar una información cuantificable de los contextos familiar y escolar, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos y diagramas de barras, comunicando oralmente la información (Consejería de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 260).	Leer e interpretar, recoger y registrar una información cuantificable del entorno cercano utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, diagramas de barras, diagramas lineales. Comunicar la información oralmente y por escrito (Consejería de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 276).	Leer e interpretar, recoger y registrar una información cuantificable en situaciones familiares del contexto social, utilizando y elaborando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, diagramas de barras, diagramas lineales, diagramas poligonales y sectoriales, comunicando la información oralmente y por escrito. (Consejería de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 296)

En resumen, en estas directrices esperan que los estudiantes puedan decidir si los datos contienen la información necesaria para dar respuesta a preguntas que se plantean; y recolectar datos en el aula, escuela o ciudad, en concordancia a lo expresado por Arteaga (2011). Cuando los estudiantes utilizan una variedad de gráficos estadísticos

deben “comprender los valores en los ejes horizontal y vertical, la utilidad de las escalas y cómo representar el cero en una gráfica” (Batanero y Godino, 2003, p. 721). Además de utilizar ordenadores, software, planillas de cálculo y applets que ayuden a la representación gráfica de la información.

1.3.3. COMPARACIÓN CON OTROS CONTEXTOS

A continuación, describimos dos documentos que han transformado la enseñanza de la estadística en los Estados Unidos y otros países que los han tomado como base para realizar adaptaciones curriculares. Estos documentos son: Los Principios y Estándares para la Matemática Escolar del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) y el Proyecto GAISE de la American Statistical Association y el NCTM (Franklin et al., 2007).

1.3.3.1. LOS ESTÁNDARES AMERICANOS

El NCTM (2000) estableció cinco bloques de contenidos que guían el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar: (1) *Números y operaciones*; (2) *Álgebra*; (3) *Geometría*; (4) *Medición*; y (5) *Análisis de Datos y Probabilidad*. Este último bloque se vio fundamentado por la cantidad de datos disponibles para la toma de decisiones en los diversos campos profesionales y en la vida diaria.

Estos estándares propusieron que los estudiantes de infantil y de primer ciclo de enseñanza primaria (nivel K-2) se enfrenten a situaciones de análisis de datos, para ser capaces de:

- Plantear preguntas y recoger datos sobre ellos (niños) y de su contexto.
- Clasificar objetos según sus atributos y organizar datos sobre los objetos.
- Representar datos usando objetos concretos, dibujos y gráficos.

Resaltamos que las actividades donde los niños deben clasificar y contar, aunque sean informales, pueden ayudar a iniciar la comprensión y el análisis de los datos que se posean o se obtengan (Arteaga, 2011; Batanero y Godino, 2003).

El NCTM señala que los estudiantes de tercero a quinto grado deben ser capaces de:

- Diseñar investigaciones que permitan dar respuesta a ciertas interrogantes y razonar sobre cómo los métodos de recogida de información afectan al conjunto de datos.
- Recoger datos de diferentes fuentes (observación, encuestas y experimentos).
- Representar la información recogida en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.
- Diferenciar la representación de datos numéricos y categóricos.
- Utilizar las medidas de tendencia central, en particular la mediana, e interpretar lo que cada una de ellas determina en un conjunto determinado de datos.
- Representar los datos de diferentes formas, comparar y evaluar qué aspectos importantes, de la información disponible, se evidencian de mejor forma con una u otra forma de representación.

- Entregar conclusiones y predicciones, con sus respectivas justificaciones, en base a los datos recogidos.

1.3.3.2. PROYECTO GAISE

El proyecto GAISE (Franklin et al., 2007) está dirigido para estudiantes del K-12 (que abarca desde preescolar hasta final de la secundaria). Este proyecto señala que la enseñanza de la estadística debe seguir las siguientes etapas: (1) formulación de preguntas; (2) recolección de datos; (3) análisis de datos; e (4) interpretación de resultados. Para los niveles K-12 se indica que los cursos donde se trabaje estadística deben tener como objetivo que los estudiantes manejen los elementos básicos del razonamiento estadístico. Estos han sido resumidos en Arteaga (2011):

- *La necesidad de los datos.* Comprender la necesidad de tomar decisiones basadas en evidencias (datos) y reconocer las dificultades que conlleva actuar sobre supuestos que no están respaldados por datos.
- *La importancia de generar buenos datos.* Comprender que el conseguir datos de calidad exige un esfuerzo en recursos, generalmente tiempo, y que no se puede considerar como una pérdida de estos recursos.
- *La presencia de la variabilidad.* La variabilidad, como esencia de la estadística, debe ser experimentada en los fenómenos de la vida cotidiana.
- *La cuantificación y explicación de la variabilidad.* comprender que la variabilidad se mide y explica con los conceptos de aleatoriedad y variable aleatoria.
- *Más datos y conceptos, y menos formulas.* Colocar énfasis en el desarrollo de actividades de interpretación de cálculos y gráficos estadísticos, y no en algoritmos.
- *Fomento del aprendizaje activo.* Centrar el proceso de enseñanza y aprendizaje en desarrollo de proyectos estadísticos, ejercicios de laboratorios, resolución de problemas en equipo y no en clases magistrales.

Algunas de las recomendaciones del GAISE son: énfasis en la cultura estadística; uso de datos reales; énfasis en la comprensión y aplicación de conceptos y no el aprendizaje de procedimientos; promoción de un aprendizaje activo; uso de tecnologías para el desarrollo de conceptos y análisis de datos; uso de la evaluación para mejorar y medir el aprendizaje. La cultura estadística, contempla tres aspectos: conocimiento de términos y símbolos; habilidad para leer gráficos y entender ideas fundamentales de estadística (Zapata-Cardona, 2011).

Estos documentos dejan en evidencia lo completo y avanzado del currículum americano para estadística y la incidencia que ha tenido en la modificación de los currículos de diferentes países. También muestran la importancia que ha venido tomando la estadística y la necesidad de que los ciudadanos cuenten con herramientas básicas que les permitan interpretar y analizar críticamente los gráficos estadísticos que pueden encontrar en su vida cotidiana.

1.4. MARCO TEÓRICO

En esta investigación utilizamos los elementos teóricos del enfoque ontosemiótico (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemáticos, que ha sido desarrollado por Godino y colaboradores (Godino, 2002, 2012, 2017; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). En este enfoque, podemos encontrar elementos que serán de utilidad para nuestro estudio, como los de actividad matemática, objeto y significado; significado institucional y personal de un objeto matemático e idoneidad didáctica y sus tipos.

1.4.1. ACTIVIDAD MATEMÁTICA. OBJETO Y SIGNIFICADO

En el EOS se considera la actividad matemática como un conjunto de prácticas que dan origen a objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007). En este enfoque se asume la situación- problema (problema, proyecto, ejercicio, etc.) como un elemento primario y se interpreta “en un sentido amplio, incluyendo tanto problemas simples como situaciones complejas, así como problemas puramente matemáticos y extra matemáticos” (Godino, 2003, p. 108). La resolución de tales situaciones requiere una actividad de matematización.

Los objetos matemáticos, por su parte, son vistos como unidades culturales que nacen de los usos relacionados a la actividad de resolución de problemas para un determinado grupo de personas y que evolucionan con el paso del tiempo (Godino y Batanero, 1994), donde el “significado de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática” (p. 330).

Godino y Batanero (1994) definen las prácticas matemáticas como las actuaciones o expresiones (verbal, gráfica, etc.) que realizan una persona o un grupo para resolver un problema matemático, comunicar la solución, generalizar a otros problemas o contextos. En el trabajo o el aprendizaje de la matemática hay dos tipos de prácticas asociadas a la resolución de problemas, una práctica operativa que consiste en el trabajo con los objetos matemáticos, y en la resolución de problemas; y, una práctica discursiva que consiste en reflexionar sobre la práctica operativa, así como en los argumentos orales o escritos involucrados.

En Godino et al. (2007) se indica que las prácticas pueden ser personales o institucionales; en este caso se trataría de prácticas realizadas por un grupo de personas interesadas en resolver un mismo tipo de situaciones problemáticas. El ser parte de una institución provoca que se realicen prácticas de tipo social que están regidas por las reglas, disposiciones y normas definidas por la institución y donde se utilizan herramientas comunes a los miembros de la misma. Por ejemplo, en relación con los gráficos, la institución escolar determina las prácticas que se requieren en cada nivel educativo.

Desde el punto de vista de la enseñanza, más que las prácticas aisladas interesan los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que una institución o una persona pone de manifiesto ante determinadas situaciones problemáticas. Esto da pie a definir lo que es un sistema de prácticas institucional asociado a un campo de problemas, así según Godino y Batanero, (1994) este sistema “está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I.” (p. 335). Además, en las prácticas matemáticas intervienen dos tipos de objetos: los materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos

(que evocamos al hacer matemática), estos últimos son representados por objetos materiales (Godino, 2003).

Godino et al. (2007) indican que el significado de un objeto matemático surge del sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) o se realizan en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problema en las que el objeto es fundamental para su realización.

1.4.2. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL

En el significado institucional de un objeto matemático se distinguen los siguientes tipos de significados (Godino, 2003; Godino et al., 2007).

- *Referencial.* Sistema de prácticas utilizado para la elaboración del significado pretendido. Para delimitarlo, se recurrirá a las fuentes necesarias como libros de historia, de matemática o de texto, De esta forma se obtiene un significado global del objeto matemático, origen, evolución, contextos en que se utiliza, etc. Un ejemplo sería observar analizar el significado del histograma a lo largo de la historia y actualmente.
- *Pretendido.* Sistema de prácticas plasmadas en la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje que se realizará sobre cierto objeto matemático. Un ejemplo sería qué tipo de gráficos se quiere enseñar en un curso concreto de Educación Primaria y cómo se realizaría esa enseñanza.
- *Implementado.* Es el sistema de prácticas efectivamente desarrollado por el profesor en la clase de matemática, o en una investigación; las que guiarán a los estudiantes para el estudio del objeto matemático y para las evaluaciones que deban rendir como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es decir, son las actividades que efectivamente se trabajaron en clases, puede que sean menos que las pretendidas.
- *Evaluado.* El sistema de prácticas que selecciona el profesor o un investigador, mediante un conjunto de tareas y/o pautas de observaciones, para evaluar significado implementado del objeto matemático en cuestión.

En el significado personal de un objeto matemático se distinguen los siguientes tipos (Godino, 2003; Godino et al., 2007).

- *Global.* Corresponde a todo el sistema de prácticas que un sujeto, por ejemplo, un estudiante potencialmente sería capaz de manifestar respecto a un determinado objeto matemático.
- *Declarado.* Son el sistema de prácticas que el sujeto manifiesta explícitamente en una evaluación propuesta por el profesor o investigador. En estas prácticas se incluyen tanto las correctas y las incorrectas, a la luz del significado institucional del objeto matemático abordado.
- *Logrado.* Es el sistema de prácticas que es considerado correcto por la pauta definida por la institución (significado institucional). Los significados que han sido declarados y que no son concordantes con el significado institucional se consideran errores de aprendizaje.

En la Figura 1.4.2.1 se muestra la lógica del proceso de enseñanza y aprendizaje; donde debería ocurrir un acercamiento progresivo entre el significado personal del estudiante y el institucional que se trata de que adquiriera. En este sentido, la enseñanza de un objeto matemático implica que el estudiante participe en una comunidad de prácticas y donde el aprendizaje supone que se apropie del significado.



Figura 1.4.2.1. Tipos de significados (Godino, 2003, p. 140)

1.4.3. TIPOS DE OBJETOS MATEMÁTICOS

El EOS amplía la distinción clásica que se realiza en el currículo o en la investigación de concepto-procedimiento-actitud. Godino et al. (2007) describen de objetos o entidades matemáticas primarias propuestas en este marco teórico como se detallan a continuación.

- *Situaciones-problemas.* Corresponde a ejercicios, problemas, aplicaciones extra matemáticas y acciones que motivan una actividad matemática. En nuestro caso, la problemática está en torno a las actividades en las que intervienen gráficos estadísticos.
- *Lenguajes.* Incluye los términos, expresiones, notaciones y/o gráficos usados para representar la información proporcionada en una situación problemática; las operaciones y objetos utilizando en la resolución; además de la respuesta entregada. Por ejemplo, en las actividades de los libros de texto, en los que intervienen gráficos estadísticos, se pueden identificar los tipos de gráficos estadísticos empleados, los elementos simbólicos, vocabulario específico del trabajo con gráficos, etc.
- *Conceptos-definición.* Corresponde a los objetos matemáticos que se utilizan implícita o explícitamente en la actividad matemática; por ejemplo, en la resolución de problemas se debe recordar o aplicar definiciones. Por ejemplo, en nuestro caso, una actividad sobre gráficos estadísticos podría movilizar conceptos como: números enteros, racionales, variables estadísticas, rango de la variable, frecuencia, proporcionalidad, coordenadas cartesianas, área o longitud.
- *Proposiciones.* Son los enunciados sobre propiedades que se han empleado en la resolución de una actividad planteada. Por ejemplo, la relación de proporcionalidad entre la frecuencia y la altura de una de las barras en un gráfico de barras.

- *Procedimientos*. Algoritmos, operaciones y/o técnicas de cálculo que surgen en la práctica matemática y que los estudiantes han aprendido y aplican en la resolución de problemas. Por ejemplo, en actividades donde se pida la construcción de un gráfico, se han de realizar recuentos para el cálculo de frecuencias. En otras ocasiones podrían tener que representar números enteros en la recta numérica, o bien interpretar un gráfico.
- *Argumentos*. Corresponde a los enunciados que se usan para validar o explicar proposiciones, procedimientos y/o soluciones a problemas. Un ejemplo podría ser la explicación que hace el profesor de un método de construcción de un gráfico, o bien, cuando el estudiante debe explicar la información representada en un gráfico a otra persona.

Godino et al. (2007) indican que estos objetos matemáticos están relacionados, entre sí, formando configuraciones, es decir, una trama de objetos interconectados, que tienen una cierta unidad. En sí mismo cada gráfico estadístico es una configuración de objetos de los tipos descritos anteriormente.

Los autores distinguen dos tipos de configuraciones, la epistémica y la cognitiva. La configuración epistémica hace referencia a una red de objetos matemáticos institucionales que actúan en la resolución de problemas y se diferencia en configuración epistémica previa (objetos que se supone el alumno conoce) y emergente (objetos que se supone aprenderá). La configuración cognitiva está formada por los objetos matemáticos personales, y se diferencia de la epistémica en que el estudiante puede construir una diferente de la institucional.

Además de los objetos matemáticos primarios, en el marco teórico se describen una serie de facetas desde las cuáles pueden ser contemplados. Font, Godino y D'Amore (2007) introducen las siguientes dimensiones que tienen un carácter dual:

- *Faceta personal - institucional*. Si el sistema de prácticas es compartido en el seno de una institución, el objeto se denomina institucional, mientras que, si el sistema de prácticas es privado de una persona, el objeto es personal. Es necesario considerar ambas facetas en la enseñanza, sobre todo si se analiza el proceso de comprensión personal en el seno de una institución.
- *Faceta ostensiva - no ostensiva*. Un objeto ostensivo puede ser mostrado, aunque los objetos matemáticos en general son no ostensivos, es decir, no se perciben por sí mismos. Así el gráfico de barras como objeto abstracto es no ostensivo, pero un gráfico particular sí lo es.
- *Faceta expresión - contenido*. Todos los objetos primarios pueden ser antecedentes y/o consecuentes de una función semiótica que consiste en una relación de una expresión (antecedente) con un contenido (consecuente), establecida por una persona o institución con respecto algún criterio de correspondencia.
- *Faceta extensivo - intensivo*. Es la relación que se da entre un caso particular y su generalización, por ejemplo, el concepto distribución en general y una distribución concreta en particular.
- *Faceta unitaria - sistémica*. Los objetos pueden ser estudiados globalmente como una unidad (el gráfico de barras) o considerarlo descompuesto en sus componentes y analizarlos por separado (título, escalas, ejes, etiquetas, barras).

1.4.4. IDONEIDAD DIDÁCTICA

En el marco del EOS surge el concepto de idoneidad didáctica (Godino, 2013; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Rivas y Arteaga, 2012), con varios componentes. En el EOS se considera el proceso de enseñanza y aprendizaje como relacional y multidimensional, y se indica que en el mismo intervienen seis subprocesos o dimensiones (mostrados en la Figura 1.4.4.1).

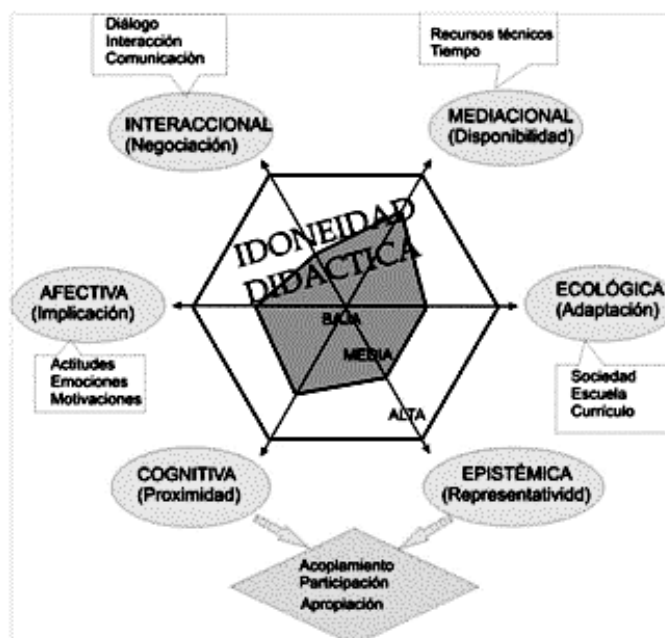


Figura 1.4.4.1. Idoneidad Didáctica (Godino, 2013, p. 116)

Para Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) la noción de idoneidad didáctica se entiende como un criterio que se debe considerar para la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En este sentido, la idoneidad didáctica es entendida en Godino, Bencomo, et al. (2006) como el nivel de pertinencia y adecuación del proceso los procesos de instrucción, y en Godino, Contreras, et al. (2006) como la articulación coherente y sistémica de los seis siguientes componentes:

- *Idoneidad epistémica.* Hace referencia a la representatividad de los significados implementados o pretendidos, en relación al significado de referencia sobre el objeto matemático que se está abordando. Es así como se puede valorar al comparar si los objetos matemáticos incluidos en un libro de texto o una lección constituyen una muestra representativa de los que serían óptimos desde el punto de vista del significado institucional.
- *Idoneidad cognitiva.* Indica el grado en que los significados pretendidos/implementados pueden ser alcanzados por los estudiantes, es decir, la cercanía que se establece entre los significados personales logrados y los significados pretendidos/implementados.
- *Idoneidad interaccional.* Valora el grado en que la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje permite identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional.* Se refiere a la disponibilidad y adecuación de los recursos

(materiales y temporales) que se necesitan para desarrollar el proceso de instrucción.

- *Idoneidad afectiva (emocional)*. Está relacionada con el grado en que los estudiantes están implicados (interés, motivación) en su proceso de estudio. En este tipo de idoneidad didáctica intervienen factores tanto institucionales como del estudiante y su historial escolar.
- *Idoneidad ecológica*. Indica el grado en que el proceso de enseñanza y aprendizaje concuerda con el proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad.

En la Figura 1.4.4.1 el hexágono regular corresponde a un proceso de estudio pretendido, donde se asume un grado máximo de las diferentes idoneidades; y el hexágono irregular corresponde a los tipos de idoneidad logradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje implementado.

1.5. OBJETIVOS DEL TRABAJO

De acuerdo a los antecedentes expuestos anteriormente, la inclusión de los gráficos estadísticos en el currículo es reciente. Como se verá en el análisis de las investigaciones previas del Capítulo 2, hay todavía pocas investigaciones sobre comprensión de gráficos en el nivel de Educación Primaria y sobre su presencia en los libros de texto, en especial en el contexto chileno.

Es de interés para los profesores saber si la presentación que se hace en dichos libros sigue las directrices curriculares y si es adecuada a la edad de los estudiantes. Por ello, surge la necesidad de indagar sobre los tipos de gráficos que se incluyen en los textos, las variables que los determinan, así como las actividades propuestas en torno a los mismos. Además, es importante estudiar la comprensión que logran los estudiantes al desarrollar actividades en que intervengan gráficos estadísticos.

Nuestra investigación persigue los siguientes objetivos en cada uno de los cuales pretendemos aportar información original:

Objetivo 1. Realizar un análisis detallado de la presentación de los gráficos estadísticos en los libros de texto chilenos de Educación Primaria, con la finalidad de caracterizar el significado institucional de referencia en nuestro trabajo.

Este estudio proporcionará la base para determinar de modo objetivo el contenido semántico de un cuestionario de evaluación y permitirá describir el significado pretendido de los libros de texto y evaluado en nuestro trabajo.

Objetivo 2. Construir un instrumento para evaluar la comprensión de los gráficos estadísticos de los estudiantes chilenos al finalizar su Educación Primaria, siguiendo unos criterios metodológicos rigurosos.

Una vez fijado el contenido del cuestionario, con un proceso riguroso se construirá y validará un instrumento adecuado, siguiendo los pasos descritos en la metodología, asegurando su calidad (McDonald, 2013).

Objetivo 3. Evaluar la comprensión que alcanzan los estudiantes chilenos de 6° y 7° curso sobre los gráficos estadísticos utilizando un cuestionario válido y fiable.

Mediante un estudio de evaluación trataremos de valorar si los objetivos planteados en las directrices curriculares y libros de texto son alcanzados por los escolares chilenos. El análisis detallado de los resultados pretende contribuir a las mejoras en los procesos de instrucción. Para lograr este objetivo, se utiliza la información extraída de los libros de texto en el Capítulo 3, para construir un cuestionario propio, con los pasos que se describen en el Capítulo 4 y siguiendo un proceso metodológico que trata de aportar validez y fiabilidad al estudio de evaluación.

Ambos objetivos se justifican por la inexistencia de estudios relacionados con este tema en Chile. Se eligen estos niveles escolares porque, de acuerdo a las modificaciones curriculares la Educación Primaria, se tiene previsto reducir esta etapa educativa de ocho a seis cursos, como ocurre en España y en muchos otros países. Además, en estos cursos se presenta gran variedad de gráficos estadísticos y al considerar estos seis cursos hace fácil su replicabilidad a otros contextos (por ejemplo, el español).

1.6. ORGANIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La tesis se organiza en una primera parte que sirve de fundamentos y otra consistente en tres estudios independientes, cada uno de los cuales tienen sus propios objetivos y entidad propia.

Los fundamentos han comenzado en este primer capítulo, donde hemos incluido un análisis curricular sobre la presentación de los gráficos estadísticos en la Educación Primaria y el marco teórico que sustenta la tesis, que es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Además, los fundamentos se completan en el Capítulo 2 donde se recoge una síntesis de las principales investigaciones que nos anteceden y en las que nos basamos en nuestro estudio.

La parte empírica se compone de tres estudios independientes:

En primer lugar, se lleva a cabo un análisis de tres series completas (18 libros de texto chilenos) y otros tantos españoles de Educación Primaria, en los cuales analizamos con detalle la presentación y progresión de los gráficos estadísticos. Se trata de un estudio documental (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) y según Bisquerra (1989), inductivo, aplicado y descriptivo. La muestra de textos es intencional, aunque elegida de forma que represente adecuadamente los textos utilizados para este nivel de enseñanza. Nos apoyamos en investigaciones previas para definir las categorías primarias, que se desarrollan posteriormente en forma inductiva utilizando la técnica de análisis de contenido (Porta y Silva, 2003). El análisis de contenido de los textos permite describir el significado institucional de referencia de los gráficos estadísticos en nuestro trabajo y es la base para la construcción de un cuestionario de evaluación, que sería el segundo estudio.

El segundo estudio consiste en la construcción de un cuestionario para evaluar la comprensión de gráficos estadísticos por parte de los estudiantes chilenos. Nos basamos en la metodología usual recomendada por APA, AERA y NCME (1999) para reforzar su validez y su fiabilidad. Es un instrumento de medición que proporciona una estimación de conocimientos y capacidades de los sujetos, que no son accesibles por simple observación o encuesta (Batanero y Díaz, 2005). La definición semántica de la variable objeto de medición se apoya como fundamento en la revisión de las

investigaciones previas, que permitió conocer las variables relevantes a tener en cuenta y en el primer estudio de libros de texto y en el estudio curricular, que nos ayudó a conocer los tipos de gráfico y actividades que se proponen a los estudiantes a lo largo de la Educación Primaria.

Para construir el cuestionario, se comienza por la elaboración de una lista de unidades de contenido de la variable objeto de medición. Se sigue con la recopilación de un banco de ítems, se realizan juicios de expertos y pruebas piloto de los ítems. Con todo ello se seleccionan los ítems del cuestionario definitivo.

El estudio principal es el de evaluación de los conocimientos sobre gráficos de los estudiantes chilenos de 6° y 7° grado. En total completaron el cuestionario 745 estudiantes de varias ciudades y centros educativos chilenos. El análisis de las respuestas se realiza, en primer lugar, para cada ítem aislado, comparando para ambos cursos las soluciones aportadas y, cuando sea pertinente, el nivel de lectura del gráfico que alcanzan los estudiantes. Además, se realiza una síntesis de cada ítem mediante una puntuación total. Para concluir se analiza la puntuación total en la prueba y una serie de indicadores normalizados en valores entre 0 y 1 que permiten estudiar la dificultad y discriminación de los ítems y la fiabilidad del instrumento (Barbero, 2002).

Cada uno de los estudios citados tiene sus propios objetivos que desglosan los descritos en este apartado, así como sus hipótesis y metodología específicas. Estos se presentarán en el comienzo de la descripción de cada uno de estos estudios, así como de las publicaciones realizadas y se discutirán en las conclusiones de los capítulos relacionados.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES

- 2.1. Introducción
- 2.2. Elementos en la comprensión de gráficos estadísticos
 - 2.2.1. Componentes del gráfico estadístico
 - 2.2.2. Comprensión gráfica
 - 2.2.3. Definición de niveles de lectura
 - 2.2.4. Niveles de complejidad semiótica del gráfico estadístico
 - 2.2.5. Clasificación de errores en la construcción de gráficos estadísticos
- 2.3. Competencias gráficas de niños
 - 2.3.1. Competencia de lectura de gráficos estadísticos
 - 2.3.2. Competencia de construcción de gráficos estadísticos
- 2.4. Competencias gráficas de futuros profesores
 - 2.4.1. Competencia de lectura de gráficos estadísticos
 - 2.4.2. Errores de construcción de gráficos estadísticos
- 2.5. Investigaciones sobre análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria
- 2.6. Otras investigaciones sobre gráficos estadísticos
- 2.7. Conclusiones sobre los antecedentes

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo describiremos los antecedentes que utilizamos como soporte de nuestra investigación. Utilizaremos como guía los trabajos de síntesis desarrollados por Arteaga (2011), Arteaga et al. (2009) y Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2012) y ampliaremos con otras investigaciones no consideradas por estos autores, que se van a mencionar en el transcurso de este capítulo.

Entendemos los gráficos estadísticos como instrumentos que permiten representar datos estadísticos por medio de elementos geométricos (puntos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.). El desarrollo de una efectiva competencia gráfica implica, además del conocimiento de la estadística, el dominio de diferentes contenidos de matemática escolar, como porcentajes, fracciones, proporcionalidad, entre otros.

En primer lugar, detallamos algunos trabajos que describen los elementos constituyentes de los gráficos estadísticos, cada uno de los cuales debe ser interpretado por los estudiantes para su correcta comprensión. Posteriormente se resumen los tipos de competencias que definen la comprensión gráfica, y enunciamos los niveles de lectura de los gráficos y el nivel de complejidad semiótica en la construcción de los mismos.

Seguidamente se clasifican y resumen las investigaciones sobre la lectura y construcción de gráficos en estudiantes de Educación Primaria y Secundaria, que hemos resumido previamente en Arteaga, Díaz-Levicoy y Batanero (2018) y algunos realizados con profesores en formación que describen variables que podemos utilizar al analizar nuestros datos. Igualmente, se incluyen algunas investigaciones que analizan los gráficos en los libros de texto u otros documentos curriculares. Se finaliza con algunas implicaciones para nuestro trabajo derivadas de esta revisión de la literatura.

2.2. ELEMENTOS EN LA COMPRENSIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Entendemos la comprensión de gráficos estadísticos como el conjunto de “habilidades de los lectores de gráficos para interpretar el significado de gráficos creados por otros o por ellos mismos” (Friel, Curcio y Bright, 2001, p. 132). Son varios los autores que analizan los componentes de los gráficos estadísticos, así como los niveles de dificultad que implican la respuesta correcta a preguntas sobre los gráficos o incluso los niveles de complejidad semiótica relacionados con la construcción de los mismos. A continuación, se resumen estos trabajos.

2.2.1. COMPONENTES DEL GRÁFICO ESTADÍSTICO

La correcta lectura y construcción de un gráfico requiere el conocimiento de sus elementos, que han de reconocer los estudiantes y ser conscientes del papel que juegan en el gráfico. Por ejemplo, es muy importante prestar especial atención a las escalas, ya que estudios como los de Watson (2006) indican que la forma más habitual de presentar información sesgada en un gráfico es a partir de escalas mal construidas. Al analizar un gráfico, hay que tener en cuenta sus componentes que, según Kosslyn (1985), son:

- *El plano de fondo.* Corresponde a la parte del gráfico estadístico que se utiliza como soporte del mismo; aunque con frecuencia es simplemente un fondo liso, en algunos gráficos se incluyen dibujos o fotografías, que aluden a su contenido y favorecen su interpretación.
- *Estructura del gráfico.* Partes del gráfico que proporcionan información sobre lo que se está representado y la forma en que se lleva a cabo la representación. Dependiendo del gráfico, dicha estructura puede estar formada por un sistema de ejes cartesianos bidimensional o tridimensional. Una estructura diferente aparece, por ejemplo, en los gráficos de sectores o el gráfico de cajas.
- *Contenido pictórico.* Son los elementos que se usan para representar los datos, por ejemplo, los rectángulos en los diagramas de barras, los puntos en los diagramas de puntos, las líneas en los gráficos de líneas, o los iconos en el pictograma.
- *Rótulos.* Palabras y números que proporcionan información sobre las variables representadas y escalas de medida. Se colocan en el título del gráfico y en los ejes.

Curcio (1987, 1989), por su parte, describe los siguientes elementos constituyentes de los gráficos estadísticos:

- *Palabras o expresiones* que aparecen en el título del gráfico, o en las etiquetas situadas en los ejes y que definen las variables representadas, sus unidades de medida y las escalas. Todo ello permite entender el contexto de la información

proporcionada, así como las variables de interés y la relación que se establece entre ellas.

- *Contenido matemático* que subyace en el gráfico estadístico. Incluye los conjuntos numéricos que se utilizan para representar valores o frecuencias, y los elementos geométricos, como la longitud de las líneas en un gráfico de líneas, el círculo o sector circular en gráfico de sectores.
- *Convenios específicos*. Son los que conciernen a cada tipo de gráfico, y que son necesarios para abordar con éxito su lectura y construcción; por ejemplo, la proporcionalidad entre amplitud del sector circular y la frecuencia de cada categoría, cuando se trabaja con un gráfico de sectores.

Más tarde Friel et al. (2001) reformulan los anteriores elementos de la forma siguiente:

- *Título y etiquetas*. Proporcionan información sobre el contexto de los datos y permiten identificar las variables que se están representando.
- *Marco del gráfico*. Se relaciona con la información que se muestra en los ejes, escalas y marcas. Con esta información se pueden interpretar las magnitudes utilizadas y rango de valores que se consideran.
- *Especificadores*. Son elementos propios y específicos de cada gráfico estadístico, que son utilizados para la representación de la información. Como, por ejemplo, las líneas en los gráficos de líneas y polígono de frecuencias.
- *Fondo*. Hace referencia los colores, cuadrículas e imágenes sobre la que se construye en gráfico estadístico.

2.2.2. COMPRENSIÓN GRÁFICA

Arteaga (2011) señala que, cuando se pide a un estudiante interpretar un gráfico estadístico, él debe realizar una traducción entre el estudio o fenómeno y su representación en el gráfico. El autor resume el trabajo de Bertin (1967), quien describe el gráfico como un sistema semiótico complejo, que demanda la interpretación de cada uno de sus elementos por separado y, finalmente, una interpretación conjunta. Bertin indica que, tanto el gráfico en su conjunto, como los elementos que lo componen están constituidos por signos, que requieren de la persona una actividad semiótica para su interpretación. Considera que se precisa un conjunto mínimo de elementos para poder construir un gráfico, es decir, transmitir la información necesaria para establecer una correspondencia entre cada símbolo y su significado. Con estas ideas, Bertin desarrolla una teoría semiótica sobre el proceso de lectura de un gráfico, considerando que se deberían realizar, de manera sucesiva, los siguientes pasos:

- *Identificación externa*. Consiste en el reconocimiento de los elementos conceptuales y de la vida cotidiana que están representados en el gráfico y que se deducen observando los rótulos alfanuméricos del gráfico (título y etiquetas). De esta forma se toma conocimiento sobre las variables representadas, el origen de los datos, el propósito del gráfico, tamaño de la muestra o población de datos, etc.
- *Identificación interna*. Valoración de la variabilidad del gráfico, estableciendo una relación entre los ejes y las dimensiones visuales (escalas del gráfico), con la

magnitudes y variables representadas en cada eje, el rango de variación de las mismas, las unidades de medida y el factor de escala, si los hay.

- *Percepción de la correspondencia.* El último paso consiste en la puesta en relación o correspondencia de cada uno de los elementos del gráfico con la realidad representada. Con ello se obtienen conclusiones sobre las variables, su rango de variación, su distribución y sus características, en la situación real representada.

Bertin (1967) describe dos tipos de preguntas que pueden hacerse en un gráfico: la primera consiste en, dada una entrada X, encontrar el valor de Y (lectura directa); y la segunda es la contraria, para un determinado valor de Y, encontrar la entrada o entradas correspondientes X (lectura inversa). El autor llama *imagen* a una unidad visual significativa-perceptiva que se forma a través de la percepción de las correspondencias originadas por una pregunta sobre el gráfico. Para responderla, se produce una selección visual al centrarse en una información, aislándola de las demás contenidas en el gráfico y todo ello en un instante.

Otros autores que estudian la comprensión gráfica son Cleveland y McGill (1984), que identificaron una serie de tareas que una persona debía poner en juego para comprender la información representada en un gráfico estadístico. Al construir un gráfico, la información es codificada (por ejemplo, la frecuencia se codifica en la altura de una barra) y cuando otro sujeto lo lee debe descodificarla mediante el proceso denominado *percepción gráfica*, que consiste en la “descodificación visual de la información codificada en un gráfico” (p. 531). Algunas tareas elementales de percepción gráfica propuestas por los autores son las siguientes: (a) Comparar la posición de varios elementos a lo largo de una escala común; (b) comparar la posición de un elemento con respecto a escalas diferentes; y (c) determinar la longitud, dirección, ángulo, área, volumen, curvatura de un elemento del gráfico.

Basándose en todas estas ideas algunos autores definen la comprensión gráfica, sus niveles y componentes. Entre ellos encontramos a Kosslyn (1985), que definió tres niveles de análisis de la comprensión gráfica:

- *Nivel sintáctico.* En este nivel se consideran las propiedades de los elementos gráficos, como, por ejemplo, decidir si existen distorsiones visuales, o si los elementos están ordenados o agrupados adecuadamente, en relación con las capacidades perceptivas de las personas.
- *Nivel semántico.* En el cual el objetivo es realizar interpretaciones cuantitativas y cualitativas y la valoración del significado del gráfico.
- *Nivel pragmático.* Cuando se busca reconocer la intención del gráfico y examinar la finalidad de la información que se transmite.

Según Friel et al. (2001) preguntas de diferentes niveles de dificultad conllevan distintos niveles de comprensión. Para los autores, esta comprensión del lenguaje de gráfico requiere los siguientes tipos de competencias:

- *Reconocer los componentes estructurales del gráfico y sus relaciones.* Es decir, diferenciar cada uno de los elementos que hemos descrito con anterioridad e interpretarlos, además de ser capaz de relacionarlos unos con otros.

- *Percibir el impacto de cada uno de los componentes sobre la presentación de la información en un gráfico.* Esto supone, por ejemplo, darse cuenta de si la escala usada en el gráfico es incorrecta por no ser proporcional o cómo variaría el aspecto del gráfico, si se modificara la escala.
- *Traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos que se representan en el mismo y viceversa.* Así, si una barra en un diagrama de barras es más alta que otra, se debe interpretar que, en la primera, el valor de la variable tiene más frecuencia que en la segunda.
- *Reconocer la adecuación de un gráfico y su ventaja sobre otro.* Es decir, saber elegir el gráfico adecuado al tipo de variable, cuando se pide decidir qué gráfico usar para representar unos datos.

Wu (2004), por su parte, menciona cuatro competencias requeridas para la comprensión de los gráficos estadísticos por parte de los estudiantes:

- *Lectura gráfica.* Sería la capacidad de leer correctamente la información estadística contenida en un gráfico; por ejemplo, obtener la frecuencia para un cierto valor, determinar la tendencia o el valor máximo o mínimo.
- *Construcción gráfica.* Consistiría en la construcción, en sí, del gráfico estadístico de manera correcta, eligiendo el gráfico adecuado y con escalas correctas.
- *Interpretación gráfica.* Va más allá de la lectura y consiste en interpretar la información del gráfico, de acuerdo a su contexto.
- *Evaluación de gráficos estadísticos.* Lo asocia a la calidad de la información representada y a la pertinencia del gráfico estadístico usado. Incluiría un juicio sobre los datos utilizados y la forma en que han sido recogidos. Por ejemplo, determinar los sesgos presentes en un gráfico estadístico.

2.2.3. DEFINICIÓN DE NIVELES DE LECTURA

Otros autores se han preocupado en analizar la dificultad que implica el ser capaz de responder diferentes preguntas sobre un mismo gráfico estadístico, definiendo lo que denominan niveles de lectura. A continuación, describimos los niveles de lectura definidos por algunos autores, algunos de los cuales tendremos en cuenta en nuestro estudio. En primer lugar, Bertin (1967) menciona tres niveles:

- *Extracción de datos.* Consiste en establecer una correspondencia directa entre dos elementos representados en el gráfico. Por ejemplo, en un gráfico de barras se relacionan los ejes *X* e *Y* para determinar una frecuencia o una categoría.
- *Extracción de tendencias.* Conlleva relacionar dos o más conjuntos de datos representados en el gráfico. Un ejemplo sería determinar la moda visualmente, para lo cual se requiere comparar todas las frecuencias de las categorías representadas en el gráfico.
- *Análisis de la estructura de los datos.* Implica la comparación de tendencias en más de una variable. Un ejemplo sería comparar el rango en dos variables representadas en un gráfico de líneas múltiple.

Wainer (1992) clasifica el tipo de preguntas que se pueden plantear partir de un gráfico, en tres niveles, cada uno de los cuales corresponde a los anteriores de Bertin:

- *Nivel elemental.* Incluye preguntas relacionadas únicamente con la extracción de datos directamente del gráfico. Es decir, con la lectura directa o inversa de información a partir del gráfico.
- *Nivel intermedio.* Corresponde a las preguntas relacionadas con la evaluación de tendencias, basándose en una parte de los datos.
- *Nivel avanzado.* Preguntas acerca de la estructura profunda de la totalidad de los datos presentados; usualmente se responden comparando las tendencias y agrupaciones en el conjunto de datos representado.

Gerber, Boulton-Lewis y Bruce (1995) proponen un modelo más complejo con siete niveles de comprensión de gráficos, que son los siguientes:

- *Nivel 1.* Al interpretar el gráfico el estudiante no se centra en los datos, sino en su conocimiento del mundo y al hacerles una pregunta sobre el gráfico dan una respuesta aparentemente sin relación.
- *Niveles 2 y 3.* El estudiante se centra en los datos representados, pero incorrectamente. En el nivel 2 no aprecian el propósito del gráfico, mientras que en el nivel 3 sí, pero no llegan a una síntesis global de la información representada.
- *Niveles 4, 5 y 6.* El estudiante da una interpretación estática de los datos. En el nivel 4 son capaces de analizar una a una las variables representadas en el mismo gráfico, pero no conjuntamente. En el nivel 5 pueden comparar variables y en el nivel 6 se apoyan en los gráficos para sacar conclusiones respecto a hipótesis establecidas.
- *Nivel 7.* Son capaces de hacer extrapolaciones y predicciones de datos no representados en el gráfico.

Las clasificaciones anteriores fueron retomadas por Curcio (1989), quien definió los siguientes niveles:

- *Nivel 1. Leer los datos.* Corresponde a la lectura literal de información mostrada en el gráfico, es decir, no se realizan interpretaciones ni cálculos. Por ejemplo, determinar la frecuencia para una determinada categoría o bien la operación inversa, dada una frecuencia encontrar a qué categoría corresponde.
- *Nivel 2. Leer dentro de los datos.* Es una lectura basada en los datos proporcionados en el gráfico, que deben integrarse de algún modo; en este nivel se realizan cálculos o se buscan relaciones en función a la información mostrada en el gráfico. Un ejemplo es determinar la moda con la información entregada en el gráfico.
- *Nivel 3. Leer más allá de los datos.* Implica la realización de inferencias o predicciones con la información mostrada en el gráfico, tarea que va más allá de realizar cálculos, implicando la interpolación o extrapolación de los datos. Como ejemplo, podemos mencionar la estimación de los valores de una distribución que no están explicitados en el gráfico.

Shaughnessy, Garfield y Greer (1996) ampliaron con un cuarto nivel, que

posteriormente fue considerado por Friel et al. (2001):

- *Nivel 4. Leer detrás de los datos.* Consiste en juzgar críticamente los datos; la forma en que fueron obtenidos y la posibilidad de extender las conclusiones; por lo que se requiere un conocimiento del contexto. Es el nivel más alto y está asociado a una valoración crítica de los datos, del tipo de gráfico utilizado, de la manera en que se han obtenido y analizado los datos. Por ejemplo, analizar si la elección de la muestra considerada en el estudio es la adecuada; o si las conclusiones obtenidas corresponden a la información y el contexto representado.

Vigo (2016) estudia los niveles de lectura de 45 estudiantes de formación profesional básica (15 y 16 años) de la especialidad de peluquería y estética, utilizando un cuestionario con cinco gráficos tomados de las revistas o publicaciones de esta especialidad. El autor compara las clasificaciones de niveles de lectura propuestas por Bertin (B) y Curcio (C) y sus colaboradores, y llega a la conclusión de que no son coincidentes. En su trabajo propone una jerarquía mixta entre las dos anteriores con el siguiente convenio:

- *N1. Leer los datos (NB1 o NC1).* Cuando el estudiante realiza una lectura de un dato del gráfico (bien directa o inversa).
- *N2. Extracción de tendencias (NB2).* Cuando se requiere comparar conjuntos de datos o realizar cálculos con ellos.
- *N3. Extracción de estructura (NB3).* En una representación de datos múltiples comparar las tendencias de dos conjuntos de datos (sólo lo podemos evaluar en gráficos que representan dos o más distribuciones).
- *N4. Leer más allá de los datos (NC3).* Dar un valor que no está en el gráfico, es decir, interpolar o extrapolar.
- *N5. Leer detrás de los datos (NC4).* Dar una interpretación crítica del contenido de un gráfico.

Una vez que los estudiantes llegan al nivel más alto en estas clasificaciones, podemos identificar tres subniveles en función de la capacidad crítica, es decir, según su competencia para detectar sesgos en el gráfico o para discutir las conclusiones que se apoyan en los mismos (Aoyama y Stephens, 2003):

- *Nivel Racional/Literal.* Corresponden a aquellos estudiantes que leen correctamente el gráfico, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicciones. Es decir, que llegan al nivel más alto en las jerarquías anteriores, pero si la información del gráfico es incorrecta no lo detectan.
- *Nivel Crítico.* Lo alcanzan los estudiantes que leen correctamente los gráficos, comprenden el contexto del mismo y evalúan la fiabilidad de la información, es decir, encuentran los errores. Pero si se les da una hipótesis sobre la causa de los errores, no son capaces de buscar otras.
- *Nivel Hipotético.* Leen los gráficos, los interpretan y evalúan la información formando sus propias hipótesis y modelos. Son capaces de hallar una explicación para una información incorrecta en un gráfico.

2.2.4. NIVELES DE COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DEL GRÁFICO ESTADÍSTICO

Arteaga y sus colaboradores (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero et al., 2010) comparten la idea que la construcción de gráficos estadísticos es una actividad semiótica que puede ser más o menos compleja según los objetos matemáticos que intervienen en la tarea. Los autores utilizan ideas del enfoque ontosemiótico, en particular la clasificación de tipos de objetos matemáticos y configuración de objetos (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino et al., 2007). También se apoyan en la idea de función semiótica para definir niveles de complejidad en los gráficos, en función del tipo de objetos representados.

A este respecto Font, Godino y D'Amore (2007) indican que, en las prácticas matemáticas que realizan los sujetos al resolver problemas, se presentan múltiples funciones semióticas (bien de lectura o de representación), debido a la necesidad de usar y operar con objetos matemáticos inmateriales. También advierten que cualquier tipo de objeto matemático propuesto en el enfoque ontosemiótico pueden jugar el papel de antecedente o consecuente de una función semiótica. Al construir o leer un gráfico, las funciones semióticas requeridas por el que lo construye o interpreta pueden ser diferentes. Por ello los autores indican que distintos gráficos tienen distinta complejidad. A continuación, describimos los niveles de construcción de gráficos que han descrito estos autores y que han denominado niveles complejidad semiótica.

- *Nivel 1. Representación de datos individuales.* Se asocia a la representación de datos aislados (un dato o una porción de ellos), sin realizar una representación conjunta. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando un estudiante grafica sólo su edad, y quizás de algunos compañeros más de clase, pero no las del grupo completo, sin haber comprendido la finalidad del gráfico estadístico. Supone una actividad semiótica elemental, considerando sólo un valor, o pocos valores, pero no la idea de variable y tampoco la de frecuencia o distribución. Utilizará ideas geométricas y aritméticas que varían en función del gráfico.
- *Nivel 2. Representación de una serie de valores de una variable, sin llegar a resumir su distribución.* Está asociado a la representación de cada dato de la distribución sobre un gráfico, sin agruparlos y sin utilizar las ideas de frecuencia y distribución de frecuencias, pero ya se maneja la idea de variable. También aparece en los libros de texto en gráficos que representan una lista aislada de datos, por ejemplo, precio de varios productos. Un estudiante alcanza este nivel si realiza un gráfico con 20 barras, donde cada barra representa la edad de cada compañero de clase, sin cálculo de frecuencias. Ocasionalmente, en este tipo de gráficos el orden de presentación de los datos en el eje X no es el numérico, sino el mismo en que se han dado los datos en un listado.
- *Nivel 3. Representación de una distribución de datos.* Este nivel se refiere a la representación de una distribución, agrupando los datos y calculando las frecuencias respectivas. Los datos son mostrados en forma ordenada, en general, según el orden numérico. Un estudiante alcanza este nivel cuando es capaz de agrupar las edades de una clase, calculando frecuencias y representa las edades en orden numérico. Por tanto, además de todas las ideas ya citadas usa la de distribución y frecuencia. El orden de los valores de la variable es ya el convencional en caso de que esta sea numérica.

- *Nivel 4. Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico.* Se alcanza este nivel cuando se es capaz de representar dos o más distribuciones de frecuencias en el mismo gráfico estadístico. Para lograrlo, además de utilizar todas las ideas estadísticas ya citadas, el estudiante ha de comparar los rangos de variación de las dos variables y el rango de variación de las dos series de frecuencias y decidir una escala conveniente para representar conjuntamente las dos distribuciones. Una situación que ejemplifica este nivel es cuando un estudiante puede graficar las edades de sus compañeros de clase separando por sexo.

Cuando el problema lo requiera y sea posible, es preferible un gráfico de mayor complejidad, pues permite preguntas también más sofisticadas, con lo cual el estudiante puede obtener mayor información del mismo. Así, en el trabajo de Batanero et al. (2010) se encontró una relación directa entre mayor complejidad del gráfico y mejor interpretación del mismo.

2.2.5. CLASIFICACIÓN DE ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Respecto a la competencia en la construcción de gráficos estadísticos, diferentes investigaciones se centran en identificar los errores más comunes. En esta sección realizamos una clasificación de estos errores, partiendo de los trabajos de Arteaga, Batanero y Contreras (2011) y Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2016), mientras que más adelante proporcionamos detalles concretos de las investigaciones sobre construcción de gráficos estadísticos por parte de estudiantes y de futuros profesores de Educación Primaria.

Para la construcción de un gráfico estadístico se debe considerar, en primera instancia, el tipo de gráfico que se debe utilizar, ya que no todos los gráficos son adecuados según la naturaleza de los datos (cualitativos o cuantitativos). Con frecuencia los estudiantes realizan una elección errada, como se observa en el trabajo de Li y Shen (1992) donde se utilizan polígonos de frecuencias para variables cualitativas y, en otras ocasiones, se representan variables no relacionadas en un mismo gráfico.

Una vez elegido el tipo de gráfico, es importante la elección de una escala que permita representar la información de una manera óptima, sin inducir a errores o producir ambigüedades. En este sentido, Li y Shen (1992) encontraron que sus estudiantes cometen los siguientes errores:

- Elegir una escala inadecuada para el objetivo pretendido, es decir, que el gráfico no permita abarcar toda la variación de la variable que se desea representar o que la escala sea muy amplia cuando la variación de la variable no lo es.
- Omitir las escalas en alguno de los ejes.
- No señalar el origen de coordenadas del gráfico estadístico.
- No fijar las divisiones suficientes en las escalas de los ejes (X e Y), dificultando la lectura y la interpretación del gráfico estadístico.

Wu (2004) clasificó los errores de una muestra de 907 estudiantes de Educación Secundaria en Singapur (edades entre 13 y 15 años) al trabajar con distintos gráficos

estadísticos. Para ello aplicó un test, que contenía 10 preguntas con 53 ítems y realizando entrevistas a 63 de los estudiantes de este grupo. Una vez analizadas las respuestas se encontraron las siguientes categorías de error en la construcción de los gráficos: (1) errores de cálculo; (2) errores en las escalas; (3) errores en títulos, etiquetas o especificadores; (4) errores en gráficos de sectores; (5) problemas con el tamaño de los elementos en un pictograma; (6) confusión entre gráficos parecidos pero de naturaleza distinta (por ejemplo, entre histograma y gráfico de barras); (7) confusión entre frecuencia y valor de la variable. Los más frecuentes fueron los referentes a las escalas y especificadores del gráfico, siendo también abundantes los errores de comprensión de la información representada.

Esta clasificación es revisada y adaptada por Arteaga (2011) que los cataloga del siguiente modo:

E1. Gráficos básicamente correctos. En esta categoría, el estudiante elige correctamente el gráfico y lo construye adecuadamente, considerando los convenios y elementos estructurales, usa una escala adecuada, representa de manera correcta los datos y asigna rótulos y etiquetas claras y precisas. También se incluyen los gráficos que se apartan un poco de las normas (por ejemplo, hay líneas adicionales), pero son correctos.

E2. Gráfico con errores de escala. Son frecuentes los siguientes errores en las escalas:

- Escalas no proporcionales a las magnitudes representadas, donde las distancias que deberían ser iguales entre pares distintos de puntos, no lo son; el estudiante no es capaz de establecer una correspondencia adecuada entre la proporcionalidad numérica de las frecuencias y la correspondiente proporcionalidad geométrica en los gráficos.
- Valores numéricos faltantes en la recta real. Cuando en una variable numérica un determinado valor no aparece en los datos, en lugar de conservar este valor en el eje que representa las categorías, dicho valor se omite, lo que origina una distorsión en la representación de los números enteros sobre la recta real. Este error fue ya descrito por Bruno y Espinel (2005).
- Rótulos confusos, valores erróneos en las escalas o faltantes. Las palabras que aparecen en el título del gráfico, los rótulos de los ejes y las etiquetas de las escalas son parte esencial del gráfico (Curcio, 1987), pues proporcionan las claves necesarias para comprenderlo. A pesar de ello, Bruno y Espinel (2005) muestran que muchos futuros profesores tienen dificultades en incluir un rótulo correcto y significativo.
- Barras no centradas en el valor de la categoría en los gráficos de barras. Tanto en la elaboración de gráficos de barras, como de histogramas, algunos estudiantes no centran las barras o rectángulos en las categorías o marcas de clase. Este error fue detectado por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007).
- Escala inapropiada, por ejemplo, cuando no cubren el campo de variación de la variable representada o las que contienen subdivisiones excesivas, tal como lo observa en el trabajo de Li y Shen (1992). Arteaga (2011) encuentra casos de uso de una escala demasiado amplia en comparación con el rango de variación de la variable.

E3. Gráfico incorrecto. Se trata de gráficos claramente inadecuados para completar la tarea solicitada. Los errores incluidos en esta categoría son los siguientes:

- Gráfico claramente no apropiado para el problema. Por ejemplo, representar una variable bidimensional en un diagrama de barras adosado.
- Altura de la barra, área del rectángulo, o del sector circular no proporcional a la frecuencia. Supone un desconocimiento de los convenios en la construcción del gráfico en cuestión. Además, aparece otra vez la falta de correspondencia entre la proporcionalidad aritmética y geométrica.
- Intercambiar frecuencia y valor de la variable en los ejes. Al formar la distribución de frecuencias se establece una función donde, a cada valor de la variable, se asigna la frecuencia con que aparece. Sin embargo, algunos estudiantes confunden la variable (que sería variable independiente en esta función) con la frecuencia (que sería la variable dependiente). Este conflicto, descrito por Ruiz, Batanero y Arteaga (2011) supone que la función matemática representada no es unívoca, pues varios valores de la variable podrían tener la misma frecuencia.
- Representa cada valor de la variable junto con su frecuencia, construyéndose un gráfico de barras adosadas con dos variables diferentes. Generalmente este error se comete cuando se usa la hoja Excel, por lo que no es previsible que aparezca en nuestra investigación.
- Representar variables no relacionadas o las medias o medianas de variables no relacionadas en el mismo gráfico. En este caso no se comprende el propósito del gráfico.

Conflictos semióticos que explican los errores en la construcción de gráficos estadísticos

Arteaga et al. (2016) analizan un ejemplo de cada una de las categorías de error descritas anteriormente y tratan de explicarlas en términos de conflictos semióticos, es decir, disparidad entre la interpretación dada a una expresión matemática por el profesor y el estudiante. Encuentran los siguientes:

1. *Conflictos relacionados con las convenciones de construcción de los gráficos:*
 - Interpretación errónea de la regla consistente en representar todos los valores de los datos, suponiendo que solo se representan los valores de la variable cuya frecuencia es no nula. Esto lleva a omitir los valores de frecuencia nula en los gráficos de barras, polígonos de frecuencia e histogramas, error descrito por Bruno y Espinel (2005).
2. *Conflictos relacionados con la interpretación de la finalidad de cada gráfico.* Lleva a los estudiantes a representar variables no comparables o estadísticos no comparables en el mismo gráfico (Li y Shen, 1992). El conflicto subyacente es interpretar incorrectamente el propósito de comparar dos distribuciones en el mismo gráfico.
3. *Conflictos relacionados con la representación de números en la recta real.* La mayoría fueron detectados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores de Educación Primaria:
 - Conflicto al poner en correspondencia la proporcionalidad aritmética y geométrica. Lleva a producir escalas no proporcionales, representando diferencias numéricas iguales mediante distancias diferentes.

- Traducción incorrecta de la secuencia numérica a su representación sobre la recta real. Ocurre cuando se omiten valores numéricos, al representar los números naturales en la recta real o cuando se representan valores numéricos no ordenados.
4. *Conflictos relacionados con la interpretación de conceptos* o cuando les otorgan propiedades inexistentes:
- Confusión entre variable continua y discreta. Como consecuencia, no se centran las barras del histograma en la marca de clase o se representan variables discretas con pocos valores en un histograma.
 - Confusión sobre los convenios de agrupación de variables estadísticas, que no tiene sentido si la variable tiene un número limitado de valores. Este error fue descrito por Wu (2004) en estudiantes y por Bruno y Espinel (2005).
 - Interpretación incorrecta de un intervalo numérico. Por ejemplo, no se diferencia entre intervalos abiertos o cerrados, o entre intervalos y categoría (que es un valor unitario) o representa como disjuntos intervalos que no lo son.
 - Confusión entre valor de la variable y frecuencia, detectado previamente por Wu (2004). No se discriminan estos conceptos, por lo que a veces se representa la frecuencia junto con la variable o se calcula la media de las frecuencias.
 - Confusión de la variable dependiente e independiente en la distribución de frecuencias, conflicto descrito por Ruiz et al. (2011).
 - Asocia la idea de distribución a un conjunto de variables y no a una sola variable. Se observa al mezclar valores o estadísticos de varias variables en un solo gráfico, no comprendiendo que cada distribución está asociada a una sola variable.

2.3. COMPETENCIAS GRÁFICAS DE NIÑOS

Una vez analizadas las cuestiones generales sobre los gráficos estadísticos, en este apartado describimos algunas investigaciones sobre la construcción y lectura de gráficos estadísticos por estudiantes de Educación Primaria y Secundaria en diferentes contextos, que hemos publicado en Arteaga, Díaz-Levicoy y Batanero (2018). Estas investigaciones nos permitirán tener un panorama sobre los estudios realizados sobre nuestro tema y contrastar con los resultados que obtengamos tras la aplicación del cuestionario. Separamos las investigaciones relacionadas con la lectura y las relativas a la construcción de estas representaciones.

2.3.1. COMPETENCIA DE LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Distintos trabajos han analizado los niveles de lectura que alcanzan los niños y que resumimos a continuación y en la Tabla 2.3.1.1. Puesto que son trabajos variados, en dicha tabla tratamos de sintetizar los tipos de gráficos utilizados, tamaño de muestra, edades de los niños, niveles de lectura (según Curcio, 1987) considerados y algunos resultados obtenidos. Los comentamos brevemente a continuación por orden cronológico.

Guimarães (2002) estudia la interpretación de los gráficos de barras por 107 estudiantes de 3º curso de Educación Primaria en Brasil, plantando tres actividades de lectura (dos con datos nominales y uno con datos ordinales). Los resultados muestran que el 72% de los estudiantes logran la lectura directa (localizar frecuencias o

categorías; nivel 1 en nuestro marco teórico), presentando dificultades aquellas actividades en donde se debe leer una frecuencia que no está explícita. Es igualmente complicada la comprensión variacional (nivel 2 para nosotros) en las que se debe localizar la parte del gráfico en que la variable estudiada sufre su mayor aumento o disminución, que alcanza solo un 26,3% de respuestas correctas. Finalmente, el 54,2% de los estudiantes responde con éxito la actividad en que deben realizar una extrapolación (nivel 3).

Wu (2004) analiza la comprensión gráfica de 907 estudiantes de secundaria (13-15 años) mediante un cuestionario, y entrevistas a 63 estudiantes de la misma muestra. Alrededor del 50% resolvió correctamente la mitad o más de las tareas propuestas, pero no informa sobre los diferentes niveles de lectura. Se encuentran dificultades en la interpretación de gráficos estadísticos en las tareas que requerían realizar inferencias. Es decir, de los niveles de lectura superiores en las clasificaciones de Bertin y Curcio. Describe también los siguientes errores en la lectura de un gráfico: errores de comprensión del propósito del gráfico o de las variables, errores al interpretar gráficos de sectores; confunden gráficos parecidos, como histograma y diagrama de barras; confunden frecuencia y valor de la variable, y problemas al interpretar el gráfico en su contexto.

Pagan, Leite, Magina y Cazorla (2008) estudian la lectura de tablas y gráficos estadísticos de 399 estudiantes (159 de 5° y 80 de 8° grado de Educación Primaria y 160 de 2° de Educación Secundaria) en Brasil. Dos de sus ítems están relacionados con gráficos. Sus resultados muestran un logro del 67,3%; obteniendo mejores resultados en las actividades que demandan un nivel de lectura 1 (84% de respuestas correctas) frente al 43% en las actividades que se exige un nivel 2 de lectura.

Carvalho, Campos y Monteiro (2011) describen los resultados de dos estudios relacionados con la interpretación de gráficos de líneas en estudiantes ingleses. El primero se desarrolló con una muestra de 84 estudiantes de 7° a 9° de Educación Primaria inglesa, los que respondieron a dos preguntas relacionadas con gráficos que muestran una inferencia (proporcionalidad) directa y otra inversa. Los resultados de este estudio muestran que los estudiantes responden con éxito el 74,1% (62,5% en 7° curso; 93,1% en 8° y en 9° el 96,8%) la actividad relacionada con una inferencia directa, mientras que la gráfica que hacía alusión a la inferencia inversa solo fue abordada correctamente por el 38,7% (33,3% en 7°; 34,5% en 8° y 48,4% en 9°) de los estudiantes.

En un segundo estudio, desarrollado en los mismos niveles con estudiantes de 7° y 9° de Educación Primaria, varía del anterior al considerar problemas de inferencia directa e inversa en gráficos de líneas con pendientes positivas y negativas. Los resultados generales muestran que las preguntas de inferencia directa presentan mejores resultados (62,1% en la actividad con pendiente positiva y 62% en la actividad con pendiente negativa) frente a las de inferencia inversa (52,4% cuando la pendiente es positiva y 44% cuando es negativa), evidenciando una diferencia estadísticamente significativa por niveles educativos analizados, en ambos tipos de problemas.

Fernandes y Morais (2011) realizaron un estudio con 108 estudiantes de 9° grado, usando tres actividades relacionadas con la lectura de gráficos. La primera utiliza un gráfico de barras; la segunda un gráfico de sectores y la tercera un gráfico de líneas. Los estudiantes responden con mayor facilidad las actividades de nivel 1 (68%), seguido de las actividades de nivel 3 (33%) y, muy por debajo, de las actividades de nivel 2 (24%). Respecto al desempeño según el tipo de gráfico, los estudiantes presentan mayor

porcentaje de acierto cuando trabajan con gráficos de barras y sectores (45,3%), que cuando lo hacen con gráficos de líneas (25,3%). Algunas de las dificultades están asociadas a no manejar los contenidos matemáticos que se necesitan para desarrollar la actividad, o no conocer el contexto en que se presentan los datos.

Pagan y Magina (2011) estudian 105 estudiantes de 9° grado en Brasil, basándose en la aplicación de un pre test, una intervención de aula y un post test. El post test presentaba dos actividades relacionadas con la lectura de gráficos (barras y líneas) y una en se pasa la información de un gráfico a una tabla (cambio de registro). El 42,3% de los estudiantes aborda correctamente las actividades de lectura y el 42% aquellas en la que se realiza un cambio de registro. Respecto a los niveles de lectura de Curcio, el 67% de los estudiantes realiza correctamente una lectura literal. Las actividades de nivel 2 con abordadas con éxito por el 42% de los estudiantes, y el 18,7% de los estudiantes puede responder las actividades de nivel 3. Los resultados muestran una mejora en los tres grupos luego de la intervención de aula.

Cruz (2013) analiza las dificultades al leer gráficos estadísticos de 22 estudiantes de 3° de Educación Primaria en Lisboa. La investigación contempla la aplicación de un pre test, una intervención de aula y un post test. Este incluye dos actividades relacionadas con la lectura de gráficos (un pictograma y un gráfico de sectores). Los resultados muestran que los estudiantes alcanzan mejores resultados al trabajar con el pictograma que con el gráfico de sectores, con un 70% y 21,3% de éxito, respectivamente. Respecto a los niveles de lectura de Curcio (1989) los estudiantes, independiente del tipo de gráfico, responden correctamente el 53,8% de las actividades de nivel 1; el 46,8% de las del nivel 2; y 24,5% de las que se encuentran en un nivel 3. Estos resultados muestran también que los estudiantes han evolucionado en sus resultados debido a la enseñanza.

Evangelista (2013) analiza el desempeño de una muestra de 60 estudiantes de 5° de Educación Primaria en Brasil al trabajar con gráficos de barras y de líneas. En la investigación se propone a los niños ocho actividades de lectura e interpretación de gráficos con actividades de nivel de lectura 1 y 2. Los resultados muestran que los estudiantes contestan correctamente el 51% de las actividades planteadas. Los mejores resultados se alcanzan en los gráficos de barras y los de menor en el diagrama de líneas dobles. En promedio, los estudiantes responden correctamente el 59% de las actividades relacionadas con gráficos de barras y el 43% de los gráficos de líneas. Sobre el tipo de pregunta vemos que las actividades de localización de frecuencias o categorías tienen un nivel de logro de 60%, seguido de localizar la moda con un 51% y suma de valores con un 41%.

Una conclusión de estos estudios es que, al evaluar los niveles de lectura, se suelen utilizar preguntas diferentes para cada uno de ellos y eso explica que en la Tabla 2.3.1.1 los porcentajes de niños que alcanzan cada nivel no sumen el 100% pues cada porcentaje se refiere al éxito en una pregunta distinta. En nuestro caso, y para cada ítem de lectura del gráfico se evaluará el nivel máximo alcanzable en cada pregunta propuesta y también el porcentaje de estudiantes que alcanza los niveles anteriores en la misma. Por ello, podremos clasificar el total de la muestra por niveles de lectura en cada una de las preguntas. Además, se tendrá en cuenta el nivel de lectura en gráficos de diferente tipo y complejidad, lo que será una aportación original.

Tabla 2.3.1.1. *Resumen de las investigaciones sobre niveles de lectura de gráficos en niños*

Estudio	Curso y (muestra)	Gráficos considerados	Niveles de lectura	Gráficos (% correctos)	Niveles (% correctos)
Guimarães (2002)	3º (107)	Barras	1, 2 y 3	General: 52,4%	Nivel 1 y 2: 19,5% Nivel 2: 26,3% Nivel 3: 54,2%
Wu (2004)	3º ESO (907)	Barras, histograma, líneas, sectores, puntos	No considera	General: 50%	
Pagan, Leite, Magina y Cazorla (2008)	5º (159) 8º (80) 2º ESO (160)	Tablas y gráficos de barras (simples y dobles)	1 y 2	General: 67,3% (5º:56,7%; 8º:68%; 2ºEM: 78,7%)	Nivel 1: 84,5% (5º:77,8%; 8º:85%; 2ºES: 91%) Nivel 2: 59,7% (5º:46%; 8º:59,3%; 2ºES: 73%)
Pagan y Magina (2011)	9º (105)	Barras y líneas (simples y dobles)		Barras: 49,9%, Líneas: 49,9% General: 42,3%	Nivel 1: 67% Nivel 2: 42% Nivel 3: 18,7%
Carvalho, Campos y Monteiro (2011)	7º, 8º y 9º (84) 7º y 9º (186)	Líneas Líneas		I. Directa: 84,1% I. Inversa: 38,7% I. Directa: 62,1% I. Inversa: 48,2%	
Fernandes y Morais (2011)	9º (108)	Barras, líneas (dobles) y circular	1, 2 y 3	Barras: 45,3%, Líneas: 25,3% Sectores: 45,3% General: 39,3%	Nivel 1: 68% Nivel 2: 24% Nivel 3: 33%
Cruz (2013)	3º (21)	Pictograma Sectores	1, 2 y 3	Pictograma:70% Sectores: 21,3%	Nivel 1: 82% Nivel 2: 72% Nivel 3: 26%
Evangelista (2013)	5º (60)	Barras y líneas (simples y dobles)	1 y 2	Barras: 59%, Líneas: 43% General: 51%	Nivel 1: 60% Nivel 2: 41%

2.3.2. COMPETENCIA DE CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

En segundo lugar, analizamos algunas investigaciones que se han centrado en la construcción de gráficos por parte de estudiantes de edades similares a los que participan en nuestra muestra.

Entre ellas encontramos el trabajo de Wu (2004), ya descrito, con 907 estudiantes de secundaria (13- 15 años), quien también pide a los estudiantes construir algunos gráficos. Además de los errores ya indicados de lectura, en este estudio se encontraron errores de cálculo, errores en la asignación de títulos a los gráficos, en la escritura de las etiquetas, en determinar los especificadores adecuados al gráfico, y falta de proporcionalidad en los elementos del gráfico respecto a los datos representados.

Jungkenn y del Pino (2009) abordan una actividad en que estudiantes que terminan la Educación Primaria deben construir un gráfico a partir de una tabla. La mayoría de los estudiantes representaron adecuadamente la información (91,4%), de los cuales 17,2% realizaron un gráfico de sectores, 6,8% gráfico de barras horizontales y 62% de barras verticales. El 29,6% identificó correctamente los datos y asignó las

leyendas correspondientes; el 74% realizó las representaciones, mostrando una proporcionalidad correcta de los elementos, un 18,5% comente algunos errores y un 7,4% no logra construir el gráfico. Entre las dificultades que se observan en la construcción se encuentra la ausencia de leyendas en los gráficos y problemas con la proporcionalidad.

Fernandes, Morais y Lacaz (2011) analizan la construcción de gráficos estadísticos de 108 estudiantes de 9° grado para representar edades (cuantitativa discreta) y edades según sexo (comparación de dos cuantitativas discretas según una cualitativa) y los años de vida de 21 animales (cuantitativa continua). También deben elegir el gráfico estadístico que consideren más apropiado para representar la información. Los resultados son mejores en la representación de una variable cuantitativa discreta (61% correctas y parcialmente correcta), seguida de la representación para comparar una variable cuantitativa discreta (35%), y con un rendimiento muy bajo la de representar una variable cuantitativa continua (2% de respuestas correctas y parcialmente correcta). También se ha observado que el gráfico de barras es el que se utiliza con mayor frecuencia para representar información. Los errores encontrados están asociados a la elección de un gráfico inadecuado, ausencia de títulos y etiquetas de los ejes, escalas inadecuadas y falta de rigor al construir, tal con lo reflejan otras investigaciones.

Cruz (2013), en su trabajo con 22 estudiantes de 3° de Educación Primaria de Lisboa, plantea dos actividades que involucran la construcción de gráficos elegidos, de acuerdo a la naturaleza de los datos. Entre los errores identificados, encuentran la omisión de la leyenda de eje horizontal (67%) y la insuficiencia de la leyenda de eje vertical (62%), y dibujar las barras con diferentes anchuras (57%), con una separación no uniforme entre ellos (76%) o muy alejadas (9%). El 24% de los estudiantes no ha seleccionado una escala proporcional, o marca en el eje vertical sólo los valores de la tabla, en el orden en que aparecen.

Vasconcelos y Fernandes (2013) investigan la construcción de gráficos estadísticos usando la planilla de cálculo Excel por 26 estudiantes de 7° año de Educación Primaria. Dentro de los resultados, se observa la elección inadecuada del gráfico de acuerdo al tipo de información que se está trabajando, así como la ausencia de títulos; la falta de leyenda y rótulos en los gráficos. Algunas de estas dificultades se pueden asociar al bajo manejo de la hoja de cálculo, situación que se puede superar con una aproximación más temprana de los estudiantes con la tecnología con fin educativo.

Walichinski y dos Santos (2013) describen los resultados en una secuencia didáctica para el trabajo con gráficas y tablas estadísticas en una clase de 7° de Educación Primaria en Brasil. Los resultados de la experiencia muestran que el tema despierta el interés de los estudiantes y un avance significativo en relación a la adquisición de conocimiento. Se verificó que los estudiantes no perciben la necesidad de colocar título, categoría a los ejes o la fuente de los datos; por lo que se debe prestar especial atención en este aspecto.

Evangelista, Oliveira y Ribeiro (2014) desarrollan una investigación con 46 estudiantes de 5° año de Educación Primaria en Brasil a los que se les pidió construir dos gráficos estadísticos, sin especificar su tipo. Los resultados indican que el 88,1% de los estudiantes fueron capaces de construirlos; ninguno colocó título a los gráficos construidos; sólo el 3,3% fue capaz de asignar nombre a los ejes. La mayoría de los estudiantes (77,2%) consiguió describir las variables del eje X, y solo el 19,6% consiguió establecer adecuadamente la escala.

Evangelista y Guimarães (2015) investigan el aprendizaje de las escalas en gráficos de barras y líneas mediante una experiencia de aula con 69 estudiantes de 5° de Educación Primaria de Brasil. Para el desarrollo del estudio se aplicó un pre-test, una intervención y se finalizó con un post-test. En la intervención se trabajan actividades relacionadas con medidas de longitud, recta numérica y mapas, extraídas del estudio con libros de texto, y sin trabajar directamente con gráficos estadísticos para evaluar la forma en que estas actividades influyen en la lectura de gráficos de barras y líneas. Los resultados muestran que los estudiantes tienen dificultades en representar, analizar, localizar, comparar y construir escalas en un gráfico. Estas dificultades, en su mayoría, son superadas tras la intervención de aula.

En resumen, estas investigaciones realizadas con estudiantes de diferentes edades coinciden en la falta de comprensión del propósito del título y de los ejes en un gráfico, de las dificultades para establecer las escalas y de la falta de proporcionalidad de algunos elementos de los gráficos. Nuestro trabajo tratará de confirmar estas dificultades en estudiantes chilenos.

2.4. COMPETENCIAS GRÁFICAS DE FUTUROS PROFESORES

Las investigaciones sobre gráficos estadísticos realizadas con futuros profesores se relacionan con la nuestra, cuando utilizan tareas semejantes o se trata de futuros profesores de Educación Primaria, pues si ellos no alcanzan suficiente competencia gráfica es difícil la transmitan los estudiantes. Por esta razón, en este apartado, se resumen algunas de dichas investigaciones.

2.4.1. COMPETENCIA DE LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Al igual que en las investigaciones con niños, hemos encontrado trabajos centrados en la lectura de gráficos estadísticos por parte de futuros profesores.

Gitirana, Guerra y Selva (2005) estudian la lectura de gráficos de barras tomados de los medios de comunicación por ocho profesoras de Educación Primaria en Brasil. Las autoras analizan la lectura global, identificación de valores máximos y mínimos, y comparación dentro del gráfico. Los resultados muestran que las profesoras realizan lectura de los elementos del gráfico sin mayores dificultades y no presentan problemas en identificar los valores máximos o mínimos.

Monteiro y Ainley (2006, 2007) estudian la competencia de futuros profesores brasileños en la lectura de gráficos tomados de la prensa diaria, encontrando que muchos no tenían conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura. Algunos de estos futuros profesores no leían correctamente el gráfico y otros lo leían, pero no interpretaban correctamente su significado en el contexto de la noticia. Es decir, no llegan al nivel de lectura crítica de los datos, que serían los niveles 3 y 4 de Curcio y sus colaboradores. Los autores sugieren que la interpretación de gráficos tomados de la prensa moviliza conocimientos y sentimientos que inciden en su comprensión.

Algunos autores españoles comenzaron casi en la misma época a realizar investigaciones sobre gráficos estadísticos con futuros profesores. Así, Espinel (2007) y Espinel, Bruno y Plasencia (2008) plantean problemas de lectura de histogramas a 137 estudiantes de profesor de Educación Primaria, encontrando que confunden histograma

y el diagrama de barras. También mostraron dificultad para decidir cuál entre varios gráficos dados representaba mejor una distribución de datos.

Arteaga (2011) en su investigación propone a una muestra de 207 futuros profesores de Educación Primaria un proyecto estadístico. Como parte del mismo, los futuros profesores primero tienen que elaborar varias gráficas y seguidamente han de interpretarlas para obtener conclusiones respecto al proyecto. El autor informa que aproximadamente el 30% de los estudiantes que realizan gráficos no los leen y, en caso de obtener conclusiones al proyecto que se les planteó, lo hacen sin ayudarse de la información que les pueda proporcionar los gráficos. El autor atribuye el resultado al contrato didáctico, pues no es habitual en la clase de estadística pedir la interpretación de un gráfico. El resto de los estudiantes lee el gráfico, aunque a diferente nivel de lectura, según la clasificación de Bertin (1967). El nivel de lectura de extracción de datos, se produce en 22 a 25% de estudiantes según la variable, el nivel de extracción de tendencias 24 a 16 % y el nivel de análisis de estructura 13 a 11 % según la variable. El último nivel de lectura crítica para extraer las conclusiones del proyecto apenas se alcanza.

Rodríguez-Alveal y Sandoval (2012) estudian la lectura y construcción de tablas y gráficos estadísticos en profesores de Educación Primaria (44 en formación y 47 en activo) en el contexto chileno. Se propusieron actividades asociadas a la lectura de gráficos (barras simples, barras dobles y sectores), a la construcción y a la justificación y/o aplicación de conocimientos estadísticos sobre la representación de información mediante gráficos. Respecto a la lectura de datos el 90% de los estudiantes y profesores realiza algún tipo de lectura, el 79% de forma correcta, siendo más sencillos el gráfico de barras simples (95,5% de los estudiantes y 89,3% de profesores dan respuestas correctas) y menores en gráficos de barras agrupadas (40% y 45% respectivamente). Respecto a los niveles de Curcio, se observa un claro predominio del nivel de lectura 1 (93% y 100%) sobre el nivel 2 (20,9% y 13%).

2.4.2. ERRORES DE CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Por su parte Bruno y Espinel (2005) encuentran también dificultades en profesores en formación al trabajar con histogramas y polígonos de frecuencias. Las autoras pasan a 39 futuros profesores algunos gráficos tomados de la prensa y les piden construir un histograma. Parten de la hipótesis de que la habilidad para representar números en la recta numérica condiciona la comprensión y la realización de gráficas estadísticas. En concreto en el caso de histogramas y polígonos de frecuencias se requiere agrupar números con decimales en intervalos de clase.

Algunos participantes en el estudio tuvieron dificultad para representar las frecuencias relativas, y los intervalos de datos agrupados. Algunos estudiantes colocan todo el intervalo en un punto y otros hacen intervalos disjuntos en los histogramas. Además, los participantes tienen dificultad para una lectura crítica del gráfico. Entre los errores encontrados se destacan:

- Usar barras no adosadas en los histogramas, como si se tratara de un gráfico de barras.
- No colocar etiquetas, lo que dificulta la lectura e interpretación de la información representada.
- Omitir intervalos de frecuencia nula.
- No unir las marcas de clase en los polígonos de frecuencias.

- Omitir en la unión los intervalos de frecuencia nula.

Gitirana, Guerra y Selva (2005) estudian la construcción de gráficos estadísticos por ocho profesoras de Educación Primaria en Brasil. Estas construyeron diez gráficos de barras, cinco de sectores y uno de líneas, este último no es apropiado al tipo de información; se identifica 13 gráficos en los que faltan de elementos que facilitan la comprensión de la información, como títulos y nombre de los ejes, así como problemas con el área de los gráficos de sectores, y las escalas en los gráficos.

Arteaga (2011), en su tesis doctoral, propone a una muestra de más de 200 futuros profesores construir gráficos estadísticos dentro de un proyecto. Menos de la mitad de los estudiantes que elaboran gráficos para apoyar el análisis de datos en su proyecto los construyen correctamente. Alrededor de un 20% de los gráficos tienen errores en las escalas y reproducen los descritos en estudiantes por varios autores. Pocos estudiantes incluyen un rótulo correcto y significativo en el gráfico y algunos no centran los intervalos de frecuencias en los histogramas. La mayoría de estos errores son debidos a un insuficiente sentido numérico, por ejemplo, fallos al aplicar la proporcionalidad. Aproximadamente un 30% de los estudiantes realiza gráficos incorrectos con errores que invalidan su uso para el problema propuesto. Se confirman otros errores citados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores, como la elección de un gráfico no apropiado al tipo de variable o la supresión de intervalos con frecuencia nula. También explica los errores en términos de conflictos semióticos, como hemos descrito en la sección 2.2.5.

El autor compara los errores de los participantes que utilizan o no el ordenador, viendo que el porcentaje de errores es mayor en el primer caso. Concluye que el ordenador no contribuye a superar los errores en la construcción de gráficos estadísticos. Cita a Ben-Zvi y Friedlander (1997), quienes indican que los estudiantes hacen un uso acrítico de los ordenadores cuando construyen un gráfico estadístico y aceptan las opciones entregadas por defecto por el software que se está utilizando, aunque no sean las adecuadas.

Es el primer autor en analizar la complejidad semiótica de los gráficos elaborados por los estudiantes, indicando que, en general, la mayoría realizan gráficos de una misma complejidad semiótica, independientemente de la variable analizada. Además, comprueba que el número de interpretaciones correctas y el nivel de lectura aumenta en los gráficos de mayor complejidad semiótica. Aproximadamente la mitad de los participantes llega al nivel semiótico 3 y alrededor del 27% al 4 repartándose el resto entre los dos niveles inferiores.

Rodríguez-Alveal y Sandoval (2012) estudian la lectura y construcción de tablas y gráficos estadísticos en 44 profesores en formación y 47 ejercicios en el contexto chileno. Se observa que la habilidad de construcción depende de la cantidad de información y tipo de representación, obteniendo construcciones correctas de diagramas de barras en el 81,3% de estudiantes y el 77% de los profesores; en el de barras adosadas 64% y 40,4%, respectivamente. Se observaron dificultades en las actividades en las que se pedía entregar dos diferentes representaciones para los mismos datos, donde 41,4% de los estudiantes y 56,6% de los profesores realizan la misma representación; los estudiantes, en su mayoría, usan el gráfico de barras cuando la información es bivariada, y un 18,8% profesores usa el diagrama de líneas para representar variables cualitativas.

En resumen, las dificultades encontradas con estudiantes de primaria, secundaria, o universitarios (futuros profesores) persisten en los profesores en activo que, en general, tampoco utilizan un instrumento comprensivo como el empleado en nuestro trabajo.

2.5. INVESTIGACIONES SOBRE ANÁLISIS DE GRÁFICOS EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Algunos estudios previos han considerado los niveles de lectura y de complejidad de los gráficos estadísticos en diversos materiales curriculares, utilizando algunas de las variables que consideraremos en nuestro trabajo.

Lemos (2006) estudia el tema de *tratamiento de la información* en tres colecciones de libros de texto de 1º a 4º de Educación Primaria en Brasil. Observa actividades relacionadas con la interpretación y construcción de gráficos a partir del 2º curso, trabajándose exclusivamente en las unidades de Estadística y Probabilidad. La mayoría de las actividades hacen referencia a los diagramas de barras, sectores y líneas, y no aprovechan la potencialidad de los gráficos estadísticos, es decir, son actividades asociadas a lectura literal y cálculos sencillos (localización de una frecuencia, ubicar máximos y mínimos, suma total de valores, ubicar una categoría a partir de una frecuencia, etc.).

Menezes y Carvalho (2010) caracterizan las actividades en libros de texto en que intervienen gráficos para los niveles de 8º y 9º de Enseñanza Fundamental en las unidades de *Probabilidad y Estadística* y *Funciones* en los textos utilizados en una escuela pública de Recife. Tras el análisis de 68 actividades se observan tareas que promueven el razonamiento algebraico, con la limitación del tipo de gráfico, que es únicamente el de líneas en el plano cartesiano; las actividades están relacionadas mayoritariamente con el cálculo e interpretación. Un análisis más a fondo muestra que se enfatiza la lectura directa, donde los estudiantes necesitan leer una parte puntual de la gráfica o utilizar fórmulas.

Bivar y Selva (2011) realizan un estudio sobre las tablas y gráficos en cinco colecciones de libros de texto para la Educación Primaria en Brasil. En el caso de los gráficos estadísticos (246 actividades) existe un predominio de las actividades de interpretación (172) y de completar (44), y en menor medida las de traducir (18) y construir (12); se destaca la escasa cantidad de actividades relativas a la construcción. También se observa que están asociadas a la repetición de tareas, enfatizando en análisis puntual, y son consideradas fáciles para los estudiantes de primeros cursos.

Arteaga (2011) analiza el tipo de gráfico y actividad pedida el nivel de lectura requerido en la tarea en una serie completa de libros de texto españoles de Educación Primaria, definiendo las variables y categorías que posteriormente hemos utilizado en diferentes trabajos.

Evangelista y Guimarães (2013) analizan las actividades en las que se trabaja el concepto de escala en cinco series de libros de texto de 4º y 5º año de Educación Primaria en Brasil. Se estudian 316 actividades que se han encontrado en los todos los ejes temáticos (números y operaciones, geometría, cantidad y medida, y tratamiento de la información). Se muestra que el uso de la escala aparece en actividades relacionadas con las medidas de longitud, mapas, recta numérica y gráficos estadísticos. Además, se indica que la construcción e interpretación de escalas son quehaceres que niños pequeños podrían realizar con facilidad y que la construcción puede ayudar a mejorar su

interpretación.

Partiendo de las variables y categorías definidas por Arteaga (2011), Díaz-Levicoy (2014) estudia los gráficos estadísticos incluidos en tres series completas de libros de texto españoles de Educación Primaria, y los compara con las orientaciones curriculares. El autor analiza el tipo de gráfico propuesto, la actividad que se pide y el nivel de lectura implícito en el gráfico. Concluye la mayor presencia del gráfico de barras, con poco peso de otros tratados en el currículo. Respecto al nivel de lectura, los más frecuentes son los intermedios en la clasificación de Curcio (1989). Este trabajo se ha ampliado comparando con los libros de texto chilenos para constituir el Capítulo 3 de esta tesis y ha sido publicado en los artículos y comunicaciones citados en dicho capítulo.

Posteriormente, el autor de esta memoria ha analizado las mismas variables y categorías definidas por Arteaga (2011) e investigaciones en otros libros de texto: de matemática de 7° año de primaria en Chile (Díaz-Levicoy y Arteaga, 2014); libros digitales de matemática para la primaria en España (Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín y Piñeiro, 2016), de matemática de primaria en Argentina (Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017) y de matemática para la primaria en Perú (Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal, 2018), obteniendo algunos resultados similares.

2.6. OTRAS INVESTIGACIONES SOBRE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Para finalizar el estado de la cuestión, en este apartado resumimos de algunas investigaciones que también se derivan de Arteaga (2008, 2011).

Méndez y Ortiz (2012) realizan un análisis de los gráficos construidos en 58 tesis de la Licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional, México. Sus resultados indican que los estudiantes producen, mayoritariamente, gráficos con un nivel semiótico 3 (representación de una distribución de datos) y realizan una lectura de nivel 2 (leer dentro de los datos). Además, los autores de las tesis poseen una alfabetización gráfica elemental; producen, en su mayoría, gráficos de barras y de sectores, para representar los datos, fundamentado por su facilidad de lectura y comprensión. También encuentran dificultades, aunque mínimas, en la comprensión del significado de los gráficos estadísticos y la clasificación de variables. En la construcción de gráficos se observan dificultades en las escalas utilizadas, en el origen de los ejes, gráficos sin ejes, uso de títulos y etiquetas que no contextualizan la investigación. Los autores justifican estos errores por el hecho que el 100% de las tesis analizadas han usado opciones que les entrega Excel o algún programa estadístico, sin criticarlos.

Castellanos (2013) analiza los gráficos estadísticos incluidos en la Prueba SABER, evaluación externa de la calidad educativa en Colombia, para estudiantes de 5° año de primaria en el área de matemática durante tres años de aplicación. La autora considera: (1) el tipo de representación (tabla o gráfico); (2) la competencia matemática evaluada; (3) el nivel de lectura; (4) el nivel de complejidad semiótica del gráfico; y (5) la actividad solicitada respecto al gráfico. Entre los resultados, se indica el predominio de: la competencia matemática de comunicación con un porcentaje superior al 50%; el gráfico de barras (48%) de entre las representaciones; el nivel de lectura 2 de Curcio (*leer dentro los datos*) (73%), que implica realizar comparaciones y cálculos con los datos del gráfico; el nivel 3 de complejidad semiótica (Arteaga, 2011), de los gráficos y tablas con un 55,6%. Finalmente, respecto a la actividad solicitada, los ítems de las

pruebas generalmente incluyen más de una, siendo la más frecuente la lectura del gráfico (75,6%), seguido del cálculo (46%) y las comparaciones de datos (42,2%).

Mingorance (2014) analiza los gráficos y tablas estadísticas en las pruebas de diagnóstico andaluzas obligatorias para los niños de 10 años. En estas evaluaciones (de 17 o 18 preguntas) el número de actividades que están relacionadas con gráficos o tablas fluctúa entre 2 y 6, por lo que se confirma la importancia de estos contenidos en las evaluaciones diagnósticas. Entre los resultados destacamos que la mayoría de las actividades analizadas presentan algún gráfico estadístico (20 actividades), donde 12 corresponden a diagrama de barras (50% del total), 3 pictograma (12,5% del total), 2 cartogramas (8,3% del total), 2 de sectores (8,3% del total) y 1 de líneas (8,3% del total). El nivel de competencia pedido es bajo, según la actividad que se pide al estudiante (organizar, comprender e interpretar la información), y los contextos preferentes son los personales y sociales. El nivel de lectura es igualmente intermedio (niveles 2 y 3 en la clasificación de Curcio).

2.7. CONCLUSIONES SOBRE LOS ANTECEDENTES

En el transcurso de este capítulo hemos analizado investigaciones sobre gráficos estadísticos, dejando en evidencia la complejidad del tema y posible dificultad para leer y comprender correctamente estas representaciones, que se usan en diferentes instancias de la vida cotidiana. Igualmente, mostramos que la capacidad de construir un gráfico, no es sencilla para estudiantes ni profesores, quienes cometen diferentes errores.

Lo anterior está condicionado por la comprensión, dominio y entendimiento de la utilidad de los elementos que componen un gráfico estadístico, y de la manera de representar de una forma óptima la información deseada. De la misma forma, se muestra una clasificación de las investigaciones sobre el tema en los últimos años, y que van desde las centradas en estudiantes, profesores o análisis de libro de texto y de pruebas de evaluación. De las investigaciones previas hemos elegido también las variables que utilizaremos en nuestro análisis y que nos permitirán comparar nuestros resultados.

Las investigaciones sobre material curricular, así como las centradas en libros de texto y pruebas de evaluación, dejan en evidencia que los estudiantes se enfrentan a actividades que requieren diferente nivel de lectura (no sólo el más simple). Y, por otro lado, la investigación previa indica que no todos los estudiantes alcanzan los niveles de lectura adecuados.

Surge entonces la pregunta de si los estudiantes chilenos de Educación Primaria tienen un nivel de lectura suficiente para leer gráficos y pueden realizar otras actividades previstas en el currículo. Este es el problema que abordamos en este trabajo, de una manera exploratoria, pues nos concentramos en sólo una muestra. Además, trataremos de proporcionar información estadística de este grupo, tanto en el nivel que alcanzan en cada gráfico y pregunta propuestos, como globalmente.

CAPÍTULO 3

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

- 3.1. Introducción
- 3.2. Importancia del libro de texto
- 3.3. Objetivos e hipótesis del estudio de los libros de texto
 - 3.3.1. Objetivos
 - 3.3.2. Hipótesis
- 3.4. Metodología de análisis
 - 3.4.1. Muestra de textos analizados
 - 3.4.2. Método y variables de análisis
- 3.5. Los gráficos en los libros de texto chilenos
 - 3.5.1. Tipo de gráfico
 - 3.5.2. Nivel de lectura
 - 3.5.3. Complejidad semiótica
 - 3.5.4. Actividad planteada
- 3.6. Los gráficos en los libros de texto españoles
 - 3.6.1. Tipo de gráfico
 - 3.6.2. Nivel de lectura
 - 3.6.3. Complejidad semiótica
 - 3.6.4. Actividad planteada
- 3.7. Conclusiones sobre el estudio de libros de texto

3.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo mostramos los resultados de un estudio de las variables que determinan las actividades en las que intervienen gráficos estadísticos en algunos libros de texto de Educación Primaria en Chile y España y que se llevó a cabo durante los años 2014 y 2015. Estos resultados se han plasmado en Batanero, Díaz-Levicoy, Arteaga y Gea (2014), Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2015, 2016) y Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín (2015).

Este análisis nos permitió establecer semejanzas y diferencias en la forma que se abordan los gráficos en la Educación Primaria en los dos países y su correspondencia con las directrices curriculares establecidas por los ministerios de educación de los mismos. Junto al análisis curricular desarrollado en el Capítulo 1, sirvió, además, para determinar el significado institucional pretendido de los gráficos estadísticos en estos sistemas educativos y fue la base de la definición del contenido semántico de nuestro cuestionario, cuya construcción se describe en el Capítulo 4. Se relacionan, asimismo,

los resultados obtenidos con otras investigaciones sobre análisis de gráficos estadísticos descritas en el Capítulo 2.

A lo largo de este capítulo describimos los objetivos, muestra y variables, así como tipo de análisis que se han utilizado en la investigación. Luego, presentamos los resultados obtenidos en los libros de texto de cada país, para finalizar con una comparación general y las implicaciones de las mismas. Comenzamos con una sección donde se resalta la importancia del libro de texto como material didáctico.

3.2. IMPORTANCIA DEL LIBRO DE TEXTO

Son varios los autores que han analizado la relevancia de estos textos como recurso educativo en las aulas. Además, son un tema importante de investigación pues su estudio permite observar los resultados de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), esto es, los cambios que experimenta el conocimiento matemático cuando es adaptado para la enseñanza. Desde el currículo propuesto en las directrices curriculares (significado institucional pretendido) al implementado en el aula (significado institucional implementado), una fase importante es el currículo que se plasma en los libros de texto (Herbel, 2007). Escolano (2009) menciona que el libro de texto:

Es un soporte curricular, a través del cual se vehicula el conocimiento academizado que las instituciones educativas han de transmitir. Por otra parte, es un espacio de memoria como espejo de la sociedad que lo produce, en cuanto en él se representan valores, actitudes, estereotipos e ideologías que caracterizan la mentalidad dominante de una determinada época (p. 172).

Ferreira y Mayorga (2010) indican que el libro de texto es un material bibliográfico que apoya al estudiante en su aprendizaje y es una guía para el profesor en su proceso de enseñanza. Es un elemento de gran importancia dentro del sistema educativo porque presenta de forma clara, sencilla y amigable diferentes contenidos y permite desarrollar actitudes y habilidades. En el área de matemática, Van Dormolen (1986) menciona que existen tres tipos de libros de texto: los que contienen ejercicios y problemas; los que presentan teoría por un lado y, por otro, problemas y ejercicios; los que mezclan la teoría con los ejercicios y problemas.

Cordero y Flores (2007), por su parte, indican que el discurso matemático escolar es determinado con frecuencia por el libro de texto, que regula las acciones de enseñanza y aprendizaje, junto con las creencias de los profesores. Reys, Reys y Chavez (2004) mencionan que los libros de texto presentan las ideas matemáticas en variados contextos, lo que permite apreciar las aplicaciones de la matemática, a la vez que los estudiantes explorar diferentes ideas y facilitan el aprendizaje. Para Fernández y Mejía (2010) el libro de texto puede ser fundamental en el proceso de estudio y construcción de conocimiento de contenidos matemáticos, ya que organiza los temas a trabajar, presenta actividades y sugerencias pedagógicas que pueden ser útiles para su comprensión.

Finalmente, como señalan Braga y Belver (2016, p. 200) el libro de texto se configura “como una invariante de la escuela, como un material estable, de hecho, el material pedagógico de más larga duración en la historia de la escuela, aunque sujeto a modificaciones y transformaciones”.

En resumen, las anteriores consideraciones apoyan la importancia de los libros de texto como recurso didáctico de utilidad para las diferentes áreas de aprendizaje y justifica el estudio que incluimos a continuación.

3.3. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO DE LOS LIBROS DE TEXTO

3.3.1. OBJETIVOS

En el Capítulo 1 se describieron los Objetivos generales de nuestra investigación. Entre ellos, con el estudio de los libros de texto pretendíamos cumplir el siguiente:

O1. Realizar un análisis detallado de la presentación de los gráficos estadísticos en los libros de texto de Educación Primaria, con la finalidad de caracterizar el significado institucional de referencia en nuestro trabajo.

Este objetivo se justifica porque una adecuada idoneidad epistémica del libro de texto requiere una representatividad en el mismo de los diferentes objetos matemáticos que conforman el significado institucional de referencia del tema. Además, servirá para identificar el significado institucional pretendido en la enseñanza y también puede ser de utilidad para identificar puntos a mejorar en los textos. Asimismo, será la base de elaboración del cuestionario de evaluación. Este objetivo general se desglosa en siguientes objetivos específicos:

O1.1. Caracterizar los tipos de gráficos incluidos en cada sistema educativo y en los diferentes niveles de la Educación Primaria.

La importancia de este objetivo se deduce del hecho de que ciertos gráficos están explícitamente recomendados en las directrices curriculares, y el análisis de este aspecto nos permitirá ver hasta qué punto se están cumpliendo las mismas. Por otro lado, autores como Ragencroft (1992) afirman que es muy importante estudiar el orden en que los gráficos se introducen en las aulas y queremos constatar si en los textos analizados se sigue o no el orden sugerido.

O1.2. Caracterizar los niveles de lectura y los niveles de complejidad semiótica propuestos en las actividades basadas en gráficos estadísticos.

Este objetivo se ve justificado por considerar a los gráficos estadísticos como objetos semióticos (Batanero et al., 2010; Bertin, 1967), donde intervienen diferentes objetos matemáticos en su lectura y en su construcción. Por ello, es necesario caracterizar su presencia en los libros de texto y analizar si el trabajo que se propone con estos gráficos es adecuado al desarrollo cognitivo y al nivel educativo de los estudiantes.

O1.3. Caracterizar los tipos de actividades propuestas en relación a los gráficos.

Este objetivo se fundamenta por la necesidad de identificar las actividades que se sugieren trabajar en los libros de texto, pues muchas de ellas son seleccionadas por los profesores para el trabajo en el aula, como tarea de aprendizaje y de evaluación. Este análisis nos permitirá, asimismo, decidir las actividades que se incluirán en el cuestionario para aproximarnos al significado personal logrado por los estudiantes.

3.3.2. HIPÓTESIS

Respecto a los anteriores objetivos, en el momento de realizar el estudio, había poca información sobre el tema y se plantearon algunas hipótesis, con carácter exploratorio, que tuvieron en cuenta lo encontrado en el análisis de los gráficos en los libros de texto españoles es nuestro trabajo de máster (Díaz-Levicoy, 2014) y el resto de trabajos sobre análisis de libros de texto en otros contextos.

H1. El trabajo con gráficos estadísticos que se propone en los libros de texto de Educación Primaria en Chile y España, presenta una introducción gradual, comenzando desde el primer curso, y trabajando los que se explicitan en las directrices curriculares y con un predominio de los gráficos de barras, líneas y circulares.

Nos apoyamos para formular esta hipótesis en los resultados obtenidos en nuestro primer estudio de libros de texto españoles (Díaz-Levicoy, 2014), en los cuales encontramos un gran predominio de los gráficos de barras, sobre todo en los primeros grados de Educación Primaria. Además, se observó que todos los gráficos recomendados en las directrices curriculares españolas se introducían en el curso recomendado. Pensamos que esta tendencia también se seguiría en Chile, sobre todo en los textos editados para el Ministerio de Educación.

H2. Los niveles de complejidad semiótica y de lectura descritos en los antecedentes son introducidos en los textos en forma gradual, con un predominio del nivel semiótico de representación de una distribución de datos y del nivel de lectura leer dentro de los datos.

Estas variables nos permiten caracterizar las actividades matemáticas y objetos matemáticos que intervienen en el trabajo con gráficos estadísticos que aparecen en los libros de texto para la Educación Primaria. Una presentación adecuada y un trabajo gradual de los niveles semióticos y de lectura pueden favorecer que los estudiantes alcancen competencias que permita comprender la información mostrada en los gráficos estadísticos que se pueden encontrar en diferentes circunstancias de la vida cotidiana. El predominio del nivel semiótico *representación de una distribución* y del nivel de lectura *leer dentro de los datos* están motivados por los resultados que hemos obtenido en Díaz-Levicoy (2014), mismo estudio que detalla algunas diferencias interesantes, sobre estas variables, a medida que avanzan los cursos de Educación Primaria.

H3. Las actividades más frecuentes que se encuentran en los libros de texto están relacionadas con la construcción de gráficos estadísticos y la realización de cálculos con la información proporcionada en ellos.

Se esperaba que los libros de texto presentasen una variedad importante de actividades, pues estas constituyen una excelente forma de que los estudiantes conozcan la potencialidad de los gráficos estadísticos como elemento cultural y movilicen el conocimiento disciplinar adquirido durante su formación primaria. Por otro lado, se esperaba que la mayoría de las actividades hiciesen referencia a la construcción de gráficos y realización de cálculos, que son actividades más algorítmicas. Además, implican el dominio de los elementos y los convenios específicos de cada gráfico. Igualmente, esta hipótesis se apoyó en los resultados de nuestro trabajo fin de máster (Díaz-Levicoy, 2014).

3.4. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Una vez justificada la importancia del libro de texto y delimitado el tipo de trabajo que se pretendía realizar, así como sus objetivos e hipótesis, pasamos a describir la metodología.

3.4.1. MUESTRA DE TEXTOS ANALIZADOS

Para el desarrollo de este estudio se decidió elegir una muestra reducida de libros de texto, pues se trataba de un estudio de corte cualitativo y exploratorio, que permite desarrollar un análisis más profundo. Para realizar la investigación se utilizaron tres series de libros de texto de cada país, 18 libros por país.

La forma en que se seleccionaron los libros de texto fue mediante un muestreo dirigido, es decir, basado en una selección controlada y de acuerdo a determinadas características (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). En el caso de Chile se seleccionaron dos series de libros de texto editados para el Ministerio de Educación mediante licitación. Estos libros son distribuidos de manera gratuita en las escuelas y colegios que dependen de los Departamentos de la Administración de Educación de las municipalidades y en los que son subvencionados (con aporte del estado y privados).

Tabla 3.4.1.1. *Libros de texto en la muestra editados para el MINEDUC*

Código	Libro de texto
TC1	Salazar, R. y Sprovera, M. (2014). <i>Matemática 1º Básico. Texto del Estudiante</i> . Santiago: Fe y Alegría.
TC2	Salazar, R. y Sprovera, M. (2014). <i>Matemática 1º Básico. Cuaderno de ejercicios 4</i> . Santiago: Fe y Alegría.
TC3	Ho Kheong, F., Ramakrishnan, C., Pui Wah, B. L. y Choo, M. (2014). <i>Mi Matemática. Texto del Estudiante 2º</i> . Santiago: Marshall Cavendish Education.
TC4	Ho Kheong, F., Ramakrishnan, C., Pui Wah, B. L. y Choo, M. (2014). <i>Mi Matemática. Cuaderno de trabajo 2ºB</i> . Santiago: Marshall Cavendish Education.
TC5	Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Ramirez, A., Sammons, K., Schielack, J., Tate, W. y Van de Walle, J. (2014). <i>Matemática 3º Educación Básica. Texto del estudiante</i> . Santiago: Pearson.
TC6	Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Ramirez, A., Sammons, K., Schielack, J., Tate, W. y Van de Walle, J. (2014). <i>Matemática 3º Educación Básica. Cuaderno de ejercicios 4</i> . Santiago: Pearson.
TC7	Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014). <i>Matemática 4º Básico. Texto del estudiante</i> . Santiago: Galileo.
TC8	Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014). <i>Matemática 4º Básico. Cuaderno de Práctica Tomo II</i> . Santiago: Galileo.
TC9	Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014). <i>Matemática 5º Básico. Texto del estudiante</i> . Santiago: Galileo.
TC10	Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014). <i>Matemática 5º Básico. Cuaderno de Práctica Tomo II</i> . Santiago: Galileo.
TC11	Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014). <i>Matemática 6º Básico. Texto del estudiante</i> . Santiago: Galileo.
TC12	Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014). <i>Matemática 6º Básico. Cuaderno de Práctica Tomo II</i> . Santiago: Galileo.

Tabla 3.4.1.2. *Libros de texto en la muestra editados por Santillana: Proyecto “Casa del Saber”*

Código	Libro de texto
TC13	Baeza, A., López, F., Sandoval, M. y Urra, A. (2013). <i>Matemática 1° Básico. Tomo II</i> . Santiago: Santillana.
TC14	Baeza, A., Blajtrach, P., Kükenshöner, C. y Sandoval, M. (2013). <i>Matemática 2° Básico. Tomo II</i> . Santiago: Santillana.
TC15	Véliz, C. (2013). <i>Matemática 3° Básico. Tomo II</i> . Santiago: Santillana.
TC16	Batarce, Y., Cáceres, B. y Kükenshöner, C. (2013). <i>Matemática 4° Básico. Tomo II</i> . Santiago: Santillana.
TC17	Ávila, J., Fuenzalida, C., Jiménez, M. y Ramírez, P. (2013). <i>Matemática 5° Básico. Tomo II</i> . Santiago: Santillana.
TC18	Ávila, J., Castro, C., Merino, R. y Ramírez, P. (2013). <i>Matemática 6° Básico. Tomo II</i> . Santiago: Santillana.

Los otros son textos editados por Santillana, una editorial de amplia tradición en Chile, y accesible por medio del comercio. Todos estos libros son editados considerando las directrices curriculares definidas para este nivel (MINEDUC, 2012, 2013b, c, d, e, f, g) y estaban vigentes en las escuelas en el momento de realizar el estudio. Se incluye la Tabla 3.4.1.1 y 3.4.1.2 donde se referencian los libros de texto utilizados y sus respectivos códigos, donde TC corresponde a textos chilenos.

Tabla 3.4.1.3. *Libros de texto en la muestra editados por SM*

Código	Libro de texto
TE1	Ferrándiz, B., Monzó, A. y Santaolalla, E. (2008). <i>Matemáticas. 1 primaria</i> (Proyecto Trampolín). Madrid: SM.
TE2	Ferrándiz, B., Monzó, A., Fernández, B. y Santaolalla, E. (2008). <i>Matemáticas. 2 primaria</i> (Proyecto Trampolín). Madrid: SM.
TE3	Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). <i>Matemáticas 3°</i> (Proyecto Tirolina), Madrid: SM. (Reedición 2011).
TE4	Peña, M.; Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). <i>Matemáticas 4°</i> (Proyecto Tirolina). Madrid: SM. (Reedición 2011).
TE5	Aranzubía, V., Santaolalla, E., Gómez, M. y Pérez, E. (2008). <i>Matemáticas 5°</i> (Proyecto Planeta Amigo). Madrid: SM.
TE6	Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J. y Pérez, E. (2008). <i>Matemáticas 6°</i> (Proyecto Planeta Amigo). Madrid: SM.

Tabla 3.4.1.4. *Libros de texto en la muestra editados por Anaya*

Código	Libro de texto
TE7	Ferrero, L., Jiménez, C. y Martín, G. (2007). <i>Matemáticas 1</i> (Proyecto Salta a la vista). Madrid: Anaya.
TE8	Ferrero, L., Jiménez, C. y Martín, G. (2007). <i>Matemáticas 2</i> (Salta a la vista). Madrid: Anaya, 2007.
TE9	Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2001). <i>Matemáticas 3</i> (Proyecto Sol y Luna). Madrid: Anaya. (Reedición 2004).
TE10	Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2001). <i>Matemáticas 4</i> (Proyecto Sol y Luna). Madrid: Anaya. (Reedición 2004).
TE11	Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2001). <i>Matemáticas 5</i> (Proyecto Sol y Luna). Madrid: Anaya. (Reedición 2004).
TE12	Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2001). <i>Matemáticas 6</i> (Proyecto Sol y Luna). Madrid: Anaya. (Reedición 2004).

Los libros de texto de Educación Primaria española pertenecen a editoriales de gran tradición y difusión en Andalucía. Se han seleccionado porque son editados en años próximos a la publicación del Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006), que era la normativa vigente en el periodo académico 2013-2014, que fue el momento en

que se realizó el análisis de los textos y fueron editados de acuerdo a dichas directrices curriculares vigentes (que introducen los gráficos estadísticos desde primer año de Educación Primaria). Además, estas editoriales tienen gran difusión respectivamente en Chile y en España. Hemos utilizado el código TE para identificarlos, tal como se puede observar en la Tabla 3.4.1.3, 3.4.1.4 y 3.4.1.5.

Tabla 3.4.1.5. *Libros de texto en la muestra editados por Santillana*

Código	Libro de texto
TE13	Garín, M. y Rodríguez, M. (2004). <i>Matemáticas 1</i> (Proyecto Un paso más). Madrid: Santillana. (Reedición 2006).
TE14	García, P. y Garín, M. (2004). <i>Matemáticas 2</i> (Proyecto Un paso más). Madrid: Santillana. (Reedición 2006).
TE15	Almodóvar, J. A., García, F., Garín, M., Gómez, R., Rodríguez, M. y Uriondo, J. L. (2005). <i>Matemáticas 3</i> (Proyecto Un paso más). Madrid: Santillana. (Reedición 2006).
TE16	Almodóvar, J. A., García, F., Garín, M., Gómez, R., Rodríguez, M. y Uriondo, J. L. (2005). <i>Matemáticas 4</i> (Proyecto Un paso más). Madrid: Santillana.
TE17	Almodóvar, J. A., García, F., Hernández, J., Moreno, R., Rodríguez, M. y Serrano, E. (2006). <i>Matemáticas 5</i> (Proyecto Un paso más). Madrid: Santillana.
TE18	Almodóvar, J. A., García, F., Hernández, J., Moreno, R., Rodríguez, M., Serrano, E. (2006). <i>Matemáticas 6</i> (Proyecto Un paso más). Madrid: Santillana.

3.4.2. MÉTODO Y VARIABLES DE ANÁLISIS

Para el estudio de los libros de texto hemos seguido una metodología cualitativa, que se caracteriza por ser un “un proceso activo, sistemático y riguroso de indagación dirigida, en el cual se toman decisiones sobre lo investigable, en tanto se está en el campo de estudio” (Pérez-Serrano, 1994, p. 46).

La investigación sobre la presencia de gráficos estadísticos en libros de texto era reducida en el momento del estudio. Es por ello que esta investigación se enmarca en un nivel de estudio exploratorio, que se caracteriza por aproximarnos a fenómenos que son relativamente desconocidos y nos permite obtener la información necesaria sobre la viabilidad de realizar investigaciones más completa respecto a nuevos problemas (Hernández et al., 2010). De la misma forma, Escorcía (2010) menciona que este nivel de estudio facilita el acercamiento a temas poco examinados y reconocidos, de los cuales no hay un registro sistemático.

El método de investigación que hemos usado es el análisis de contenido, una forma particular del análisis de documentos (ejemplo libros de texto). Zapico (2007) menciona que el análisis de contenido permite averiguar sobre la naturaleza del discurso, utilizado en documentos escritos, notas de campo, entrevistas registradas, diarios, etc. Porta y Silva (2003) afirman que el análisis de contenido se establece “como una técnica objetiva, sistemática, cualitativa y cuantitativa que trabaja con materiales representativos, marcada por la exhaustividad y con posibilidades de generalización” (p. 8).

Las etapas del análisis de contenido son descritas por autores como Castiello (2002), quien indica las siguientes:

- Seleccionar las unidades del texto que contengan información (datos) de interés para el fenómeno que se está investigando; en nuestro caso son las actividades, ejemplos o párrafos del texto que presentan gráficos estadísticos o que proponen realizar alguno.

- Los datos se transforman en *unidades de registro*, es decir, porciones mínimas de contenido para su análisis por separado ya que aparecen palabras, frases o temas que son importantes para el estudio. En nuestro caso, cada una de las unidades anteriores fue codificada como un elemento (fila) de nuestro fichero de datos.
- Establecer un *sistema de variables y categorías de análisis* para desarrollar el proceso de codificación de la información, es decir, el paso de datos brutos a variables y categorías. Las variables se fijaron a priori, partiendo, como se ha indicado, de las utilizadas por Arteaga (2011) y, asimismo, tomamos de este autor una primera lista de categorías para cada una de las mismas; posteriormente en el proceso de codificación se amplió la lista de categorías en alguna de las variables.
- Se codifica la información de cada una de las variables consideradas en la investigación. Siguiendo un proceso inductivo y cíclico, es decir, se realiza una lectura detallada de cada actividad, se interpreta y se revisan los datos obtenidos para dar sentido al análisis, relacionar con las categorías definidas y contrastar con el marco teórico que sustenta la investigación. En este proceso se consulta con los directores del trabajo y con otros compañeros, para dar mayor validez a las categorías finales utilizadas.

En nuestro caso se estudia, de forma objetiva, las secciones de los libros de texto que sirven para determinar aspectos importantes que no se observarían al realizar un estudio más superficial. Para ello se analizó cada tarea según las variables definidas a priori, las que han sido utilizadas por Arteaga (2011) y otras investigaciones previas.

Una vez que se han ubicado las secciones del libro de texto consideradas en el estudio se identifica cada categoría de las variables que se han definido anteriormente, que son codificadas e ingresadas al software estadístico SPSS para realizar un análisis estadístico descriptivo.

VARIABLES UTILIZADAS

A continuación, mencionamos las variables consideradas:

Tipos de gráfico. En nuestro estudio son de interés los gráficos estadísticos que se incluyen en la Educación Primaria y que son analizados, desde el punto de vista matemático en Arteaga (2011). En esta variable encontramos las siguientes categorías: gráfico de barras (o de barras adosadas o agrupadas), gráfico de líneas (simples y múltiples), pictogramas, gráfico de sectores, histogramas, gráficos de puntos, diagramas de tallo y hojas, gráfico de dispersión y pirámide de población.

Parte de estos gráficos aparecen en el currículo de cada uno de los países analizados. Las directrices curriculares chilenas de matemática (MINEDUC, 2012) para los seis primeros cursos de primaria presentan una gran variedad de gráficos estadísticos (pictogramas, gráfico de barras, puntos, líneas, sectores, tallo y hojas, y barras múltiples); mientras que las españolas son menos explícitas sobre la tipología a trabajar. No obstante, mencionan los gráficos de barras y líneas (MEC, 2006), al que se agrega el de sectores en las últimas indicaciones curriculares (MECD, 2014). Watson (2006) afirma que los gráficos de barras, por su sencillez, pueden introducirse en edades tempranas. Además, los estándares del NCTM (2000) recomiendan que los estudiantes que cursan de 3° a 5° grado manejen gráficos de puntos, de barras y de líneas.

Niveles de lectura. Una segunda variable considerada ha sido el nivel de lectura requerido para el estudiante sobre un mismo gráfico, pues como se analizó en los antecedentes, sobre un mismo gráfico se puede requerir información más o menos compleja. Para esta variable hemos considerado los niveles de lectura que han descrito Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001) y Shaughnessy et al. (1996), estos son: leer los datos, leer dentro de los datos, leer más allá de los datos, y leer detrás de los datos.

Tal como hemos descrito en el Capítulo 2, los niveles de lectura describen un progreso en la dificultad de las tareas que se piden, que van desde una lectura literal de la información hasta pedir una opinión crítica sobre la forma de recoger los datos o las conclusiones obtenidas. Es así como las directrices curriculares de Chile presentan un desarrollo gradual en el trabajo con gráficos estadísticos y en el tipo de actividades que intervienen. Para el caso de España, Arteaga (2011) afirma que el currículo de Educación Primaria sugiere un progreso, ya que va desde la interpretación de elementos de gráficos sencillos y que están relacionados con el contexto inmediato del estudiante (primer ciclo) hasta la valoración crítica de la información (tercer ciclo); lo que significa, de forma implícita, una progresión armónica, durante los tres ciclos de Educación Primaria.

Nivel de complejidad semiótica. Las categorías de esta variable corresponden a los niveles descritos por Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010), quienes mostraron que no todos los gráficos estadísticos implican una misma complejidad semiótica, en el sentido de involucrar el mismo número de objetos matemáticos representados. Estos niveles son: representación de datos individuales, representación de un conjunto de datos sin llegar a resumir su distribución, representación de una distribución de datos, y representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico. Esta variable también ha sido descrita en el Capítulo 2, donde se ha mostrado una clara evolución en la dificultad en el trabajo con las formas de representación según dichos niveles.

Tipo de actividad. Esta variable está relacionada con lo que se pide realizar en cada actividad de los libros de texto estudiados. A continuación, describimos cada una de las categorías para esta variable; a lo largo del capítulo propondremos ejemplos concretos encontrados en los textos que ayuden a concretar estas categorías.

- *Leer el gráfico.* En esta actividad se pide la lectura literal de alguna información que se presenta en el gráfico estadístico (lectura del título, ejes y escala del gráfico, frecuencia, etc.). Implica la comprensión de los elementos del gráfico y la interpretación o bien de elementos aislados del mismo o de su conjunto.
- *Completar un gráfico.* Cuando el estudiante debe continuar la construcción de un gráfico estadístico ya iniciado, de acuerdo a los datos proporcionados, bien en un listado, bien en una tabla. Por ejemplo, continuar la construcción de un gráfico de barras, si ya se ha hecho la primera barra.
- *Calcular a partir de un gráfico.* Se solicita al estudiante realizar comparaciones y/o cálculos sencillos sobre la información representada en el gráfico estadístico. Por ejemplo, se puede pedir calcular la media aritmética a partir de un gráfico que representa los valores de la variable.
- *Construir un gráfico.* La actividad consiste en la construcción de un gráfico, ya sea a partir de un listado de datos o de una tabla de frecuencias. La diferencia con completar es que no se indican los pasos iniciales en la construcción del gráfico; por

tanto, el estudiante ha de recordarlos.

- *Traducir un gráfico a otra representación.* Consiste en pasar la información que se entrega en un gráfico a una tabla de frecuencias u otro gráfico; por ejemplo, de un gráfico de barras a otro de líneas. Es considerada una actividad difícil para los estudiantes de primaria, pues supone el dominio de las dos formas de representación.
- *Ejemplo.* Es una sección del libro de texto que se sirve para aclarar o definir algún concepto o idea sobre el tema que se está trabajando. El gráfico se presenta como instrumento didáctico.
- *Justificar/comparar.* En esta actividad el estudiante debe seleccionar adecuadamente un tipo de gráfico de acuerdo a sus características y naturaleza de los datos. Además, se pide la justificación de esta elección o bien comparar entre dos gráficos cuál es más adecuado para un cierto propósito.
- *Asignar variables.* Consiste en mencionar situaciones o contextos donde las gráficas estadísticas tengan sentido. Se da al estudiante un gráfico sin etiquetas o rótulos y se le pide pensar en una variable que pudiese estar representada en el gráfico.
- *Inventar problema.* Se refiere a la generación de alguna situación en que los datos que se entregan posean sentido y coherencia. Esta es una actividad avanzada para los estudiantes y poco frecuente en libros de texto, implicando un conocimiento del contexto.

En la Tabla 3.4.2.1 se resumen las actividades estudiadas, por país y nivel educativo. Observamos que en este estudio se ha analizado un gran número de actividades; se trata por tanto de una buena muestra, que permite obtener conclusiones fundadas. También se puede observar que los libros de texto de Chile incluyen un mayor número de actividades, quizás porque las directrices curriculares de este país son más explícitas sobre el tipo de gráfico estadístico que se debe trabajar; mientras que las directrices españolas son más generales. Existe coincidencia sobre los niveles educativos en los que se presentan mayor cantidad de actividades con 3°, 5° y 6°, aunque en diferente orden.

Tabla 3.4.2.1. *Porcentaje de actividades analizadas según nivel educativo*

Nivel educativo	Textos españoles (n=215)	Textos chilenos (n=508)	Total (n=723)
1°	5,6	9,1	8
2°	6,5	15,6	12,9
3°	20	23,6	22,5
4°	14,9	9,1	10,8
5°	29,8	20,7	23,4
6°	23,3	22	22,4

3.5. LOS GRÁFICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO CHILENOS

A continuación, se presenta el análisis detallado de las variables consideradas para los textos en cada uno de los países estudiados. Finalizamos con una síntesis para comparar las conclusiones en cada uno de estos países y proporcionar conclusiones para el trabajo en el aula y para la edición de futuros libros de texto.

3.5.1. TIPO DE GRÁFICO

En la Tabla 3.5.1.1 presentamos los tipos de gráficos estadísticos identificados en los libros de texto de Educación Primaria en Chile. Los resultados evidencian, en general, un predominio de los gráficos de barras (42,5%) y pictogramas (22,6%), con menor presencia los gráficos de puntos (9,1%), líneas y tallo y hojas (8,1%) y sectores (4,9%). Los gráficos de barras se mantienen durante los seis cursos, concordando con la afirmación que realiza Watson (2006), al señalar que son los más apropiados para trabajar desde edades tempranas y, por tanto, en la Educación Primaria. En la categoría “otros” incluimos aquellos gráficos estadísticos que se presentan en forma esporádica en los libros de texto analizados, entre ellos tenemos los gráficos de dispersión, histogramas y pirámides de población.

Observamos que en el primer y segundo curso de Educación Primaria existe un predominio de los pictogramas y gráficos de barras, cumpliendo las indicaciones curriculares para estos cursos (MINEDUC, 2013b y c), los de barras se inician en el primer nivel sin que se expliciten en los planes de estudio. Además, hay alguna actividad aislada en que se involucra más de un gráfico, lo que podría ser, desde nuestro punto de vista algo complejo para niños de apenas 6-7 años.

En el tercer curso se trabaja, con frecuencia alta, además de los abordados en los niveles anteriores, los gráficos de puntos, tal como lo explicita el plan de estudio de este nivel (MINEDUC, 2013d), disminuyendo la proporción de los pictogramas respecto a los cursos anteriores, pero con una frecuencia superior al gráfico de puntos. En el cuarto nivel se reduce prácticamente al trabajo con gráficos de barras, con algún pictograma, aunque nos parece extraño que una vez introducido el gráfico de puntos no se vuelva a considerar hasta el 6° curso.

En el quinto año se introducen los gráficos de tallo y hojas y de líneas según se indica en las directrices curriculares (MINEDUC, 2013f). También se proponen algunas actividades con gráficos de líneas dobles—los que se han incluido dentro de los gráficos de líneas para facilitar el análisis—, sectores y dispersión (incorporado en otros), que no son explicitados en las directrices curriculares.

Tabla 3.5.1.1. *Porcentaje de los tipos de gráficos en textos chilenos*

Tipo de gráfico	1° (n=46)	2° (n=79)	3° (n=120)	4° (n=46)	5° (n=105)	6° (n=112)	Total (n=508)
Barras	37	43	48,3	80,4	29,5	34,8	42,5
Pictograma	58,7	55,7	25,8	19,6		3,6	22,6
Puntos			22,5			17	9,1
Líneas					38,1	0,9	8,1
Tallo y hojas					19	18,8	8,1
Sectores					1	21,4	4,9
Otros			0,8		8,6	2,7	2,6
Dos o más gráficos	4,3	1,3	2,5		3,8	0,9	2,2

En el último nivel, se encontraron gráficos de los tipos barras (sencillos y de barras dobles), sectores, puntos, y tallo y hojas, cumpliendo las exigencias del MINEDUC (2013g). Es así como en los últimos cursos se tiene acceso a mayor variedad de gráficos estadísticos, que van evolucionando según lo indicado en el marco curricular de primaria chilena y de acuerdo al desarrollo cognitivo de los estudiantes. Los gráficos de línea introducidos en 5° curso casi desaparecen en 6°; posiblemente por la exigencia de introducir gráficos nuevos.

En resumen, nuestro análisis indica una gran variedad de gráficos en los libros, comenzando con unos pocos gráficos elementales e incluyendo poco a poco gráficos nuevos, siempre siguiendo las directrices. En algunos casos un gráfico se introduce en un nivel y prácticamente no se vuelve a mencionar en los cursos posteriores o se vuelve a introducir pasados algunos cursos, situación que debería ser analizada y considerada para la mejora de los planes de estudio y la edición de libros de texto.

3.5.2. NIVEL DE LECTURA

En este punto vamos a mostrar los ejemplos y resultados que se han encontrado sobre los niveles de lectura descritos por Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001) y Shaughnessy et al. (1996). El primer nivel, *leer los datos*, lo encontramos ejemplificado en la Figura 3.5.2.1, que consiste en realizar una lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico. La pregunta planteada solo requiere identificar un elemento del gráfico, relacionando el tres del dado (eje X) con la su frecuencia absoluta (eje Y). El valor de la variable en el eje X está representado por un ícono consistente en dados figurados; el valor de la frecuencia se representa en el eje Y. La actividad es sencilla, pues debido al ícono utilizado será difícil que el niño confunda valor de la variable y frecuencia.

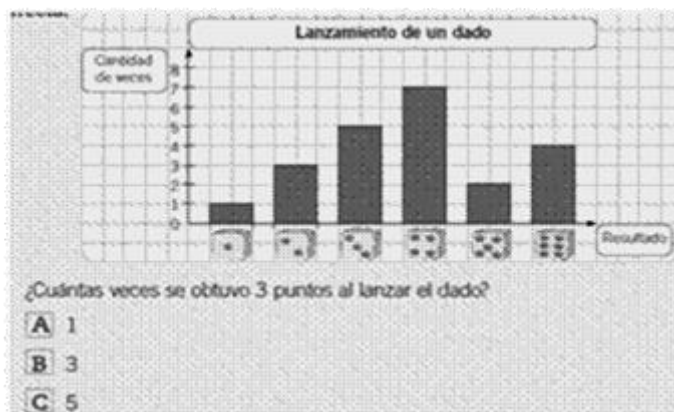


Figura 3.5.2.1. Ejemplo de nivel 1 de lectura (TC14, p. 277)

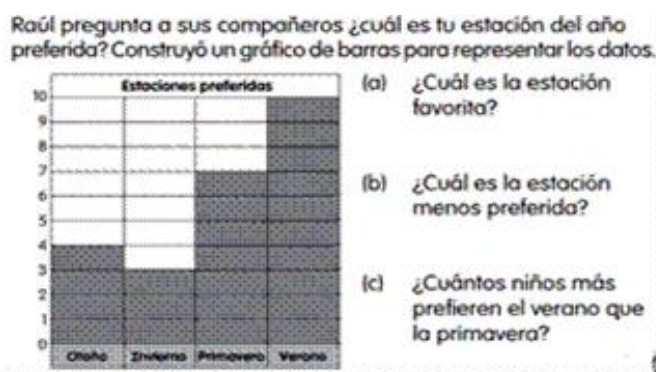


Figura 3.5.2.2. Ejemplo de nivel 2 de lectura (TC11, p. 97)

En la Figura 3.5.2.2 encontramos un ejemplo del nivel *leer dentro de los datos*. También en este caso los valores de la variable aparecen claros en el eje X pues se trata de categorías de una variable cualitativa, difícil de confundir con las frecuencias. El gráfico es algo más complejo, pues usa palabras como etiquetas en lugar de íconos; no obstante, la lectura de las frecuencias se facilita con cuadros. En esta tarea el nivel es

más alto, pues además de la lectura literal de valores, se debe realizar cálculo y comparaciones con ellos (comparar todas las frecuencias para encontrar la máxima y la mínima y calcular la diferencia entre la frecuencia de los niños que prefieren verano y primavera).

El siguiente nivel, *leer más allá de los datos*, que consiste en efectuar una predicción de valores no incluidos en el gráfico, se ejemplifica en la Figura 3.5.2.3. En dicha tarea, se establece relación con el contenido de probabilidades, ya que se muestran los resultados que se han obtenido al hacer girar una rueda de colores. Se pide al estudiante construir un gráfico de puntos, determinar la frecuencia del color verde y predecir el color que se obtendrá en el próximo giro. Por tanto, en esta actividad se pide una información que no se presenta en el gráfico.

En los ejercicios a, b y c, usa los datos del experimento de Roberto con la rueda giratoria.

Resultados de los giros					
Giro	Color	Giro	Color	Giro	Color
1	Amarillo	8	Roja	15	Amarillo
2	Azul	9	Amarillo	16	Amarillo
3	Amarillo	10	Amarillo	17	Roja
4	Roja	11	Amarillo	18	Amarillo
5	Verde	12	Verde	19	Amarillo
6	Azul	13	Azul	20	Azul
7	Amarillo	14	Azul		

- Haz un diagrama de puntos para mostrar los datos.
- ¿Cuántas X corresponden a la cantidad de veces que salió el verde?
- ¿Qué color predices que saldrá en el próximo giro? Explica tu respuesta.

Figura 3.5.2.3. Ejemplo de nivel 3 de lectura (TC3, 250)

Como ejemplo del nivel de lectura *leer detrás de los datos*, mostramos la actividad de la Figura 3.5.2.4. En ella se pide que el estudiante analice la validez de una conclusión obtenida mediante la información obtenida en una encuesta y representada en un gráfico de barras. El estudiante debe, por un lado, leer el gráfico y por otro analizar si la conclusión expresada responde a la información representada. Además, en el segundo apartado, se pide criticar la forma en que se hizo la pregunta de la encuesta e indicar por qué el gráfico es confuso. Este gráfico muestra el momento del día preferido para ir al cine, pero la pregunta no es clara; se puede interpretar, por ejemplo, qué día de la semana se prefiere. Por tanto, conlleva una mirada crítica a la forma en que se ha obtenido la información y a la conclusión que se ha llegado.

Figura 3.5.2.3. Ejemplo de nivel 3 de lectura (TC3, 250)

Grupo D Usa el gráfico de la derecha.

- Pedro llegó a la conclusión de que la noche es el momento que más les gusta a las personas para ir al cine. ¿Es válida su conclusión?
- La pregunta de la encuesta fue: "A mí me encanta ir al cine. ¿Cuándo prefieres ver películas tú?" Si el gráfico es confuso, explica por qué.

Figura 3.5.2.4. Ejemplo de nivel 4 de lectura (TC6, p. 262)

En la Tabla 3.5.2.1 clasificamos las actividades sobre gráficos encontradas en los libros de texto según el nivel de lectura que implica cada una de ellas. Se puede observar que los niveles 1 (leer los datos) y 2 (leer dentro de los datos) son los más frecuentes, agrupando sobre el 90% de las actividades estudiadas. El 70,1% de las actividades piden realizar algún cálculo o comparación con los datos del gráfico, una vez leídos, situaciones propias del nivel de lectura 2. Sigue en frecuencia el nivel 1, con un 22,4%, caracterizado por la lectura literal de la información que se representa en el gráfico. Los niveles más avanzados tienen una escasa presencia.

Los niveles de lectura 1 y 2 se extienden por los seis cursos de primaria, siendo los únicos en los dos primeros cursos. Los niveles 3 (leer más allá de los datos), donde se pide una predicción o una interpolación a partir de los datos y 4 (leer detrás de los datos), en que se debe hacer una lectura crítica, se presentan en forma ocasional a partir del tercer curso. No observamos una progresión armónica de los niveles de lectura a medida que avanzan los cursos, lo que dificulta el logro de la lectura crítica de la información presente en gráficos estadísticos por parte de los estudiantes. Pensamos que dichas actividades de nivel 3 y 4, iniciadas a partir de tercer curso, debieran ir aumentando en frecuencia y mantenerse en el último curso de esta etapa educativa.

Tabla 3.5.2.1. Porcentaje de los niveles de lectura en textos chilenos

Nivel de lectura	1° (n=46)	2° (n=79)	3° (n=120)	4° (n=46)	5° (n=105)	6° (n=112)	Total (n=508)
1	43,5	31,6	31,7	8,7	21	4,5	22,4
2	56,5	68,4	61,7	65,2	70,5	87,5	70,1
3			5,8	8,7	4,8		3,1
4			0,8	17,4	3,8	8	4,3

3.5.3. COMPLEJIDAD SEMIÓTICA

La tercera variable considerada ha sido el nivel de complejidad semiótica, propuesto por Arteaga y cols. (Arteaga, 2008, 2011; Batanero et al., 2010). Para el primer nivel, *representación de datos individuales*, solo se han encontrado tres ejemplos, tratándose de actividades en que se muestra la construcción inicial de un gráfico que el alumno ha de completar. La Figura 3.5.3.1 es un ejemplo, pues se representa un solo dato en el diagrama de dispersión o de coordenadas. Como vemos en el ejemplo, el alumno no necesita considerar la idea de variable estadística o de distribución, sino tan sólo algunos datos aislados. Puesto que no existe un contexto en la actividad, la consideramos algo abstracto, tan solo dirigido a recordar al alumno la representación de coordenadas cartesianas.

¿Cuáles son las coordenadas del punto W representado en el plano cartesiano?

- A. (4, 2)
- B. (2, 4)
- C. (3, 4)
- D. (4, 3)

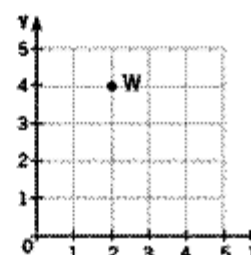


Figura 3.5.3.1. Ejemplo de nivel 1 de complejidad semiótica (TC17, p. 303)

En la Figura 3.5.3.2 se ejemplifica el nivel semiótico 2 (representación de un conjunto de datos sin llegar a resumir su distribución). Se trata de un gráfico de líneas que muestra la producción diaria de herramientas de una fábrica; como esta producción varía, está implícito el concepto de variable estadística y sus valores. Los datos se representan día a día, sin agrupar los días que tienen el mismo valor de producción (como lunes y martes o miércoles y Domingo). Por tanto, la construcción de este gráfico no exige el cálculo de frecuencias, aunque se maneja la idea de variable.

b. En promedio, ¿cuántas herramientas se produjeron diariamente?

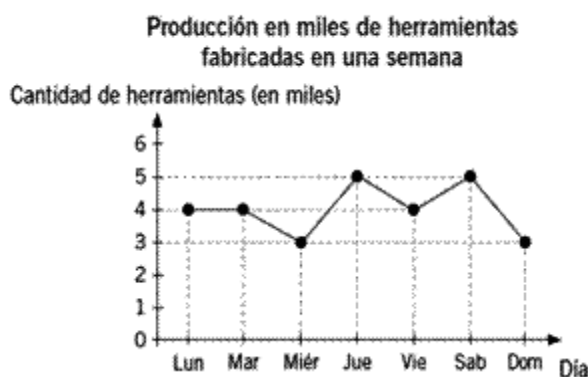


Figura 3.5.3.2. Ejemplo de nivel 2 de complejidad semiótica (TC17, p. 281)

La Figura 3.5.3.3 muestra una actividad en la que interviene el nivel semiótico 3 (representación de una distribución de datos). Se trata de una distribución de las preferencias musicales de un grupo de personas encuestadas, y para representar esta información se debió realizar los respectivos cálculos de frecuencias para luego representarlo en el gráfico estadístico. Vemos que aparece tanto la variable estadística cualitativa (música preferida), como la frecuencia (número de personas que la prefiere).

El gráfico circular corresponde a un estudio realizado a 15.200 personas sobre sus preferencias musicales. Calcula la cantidad que representa cada una de las preferencias.

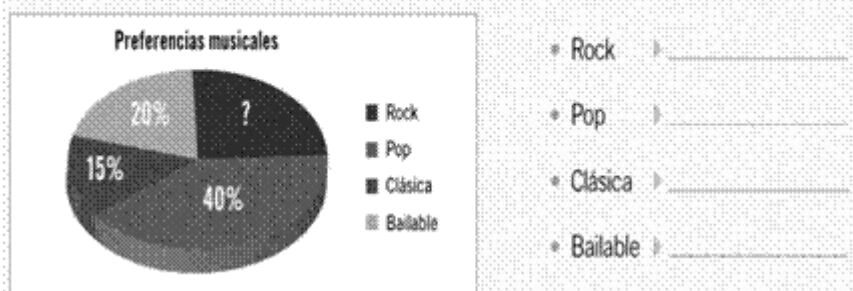


Figura 3.5.3.3. Ejemplo de nivel 3 de complejidad semiótica (TC18, p. 295)

Finalmente, el cuarto nivel de complejidad semiótica (representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico) se ejemplifica en la Figura 3.5.3.4. En este gráfico estadístico se representan dos distribuciones de frecuencia de la variable kilos de alimentos, uno por cada curso. Estas distribuciones podrían ser representadas en dos gráficos, uno para cada una de las distribuciones. Al representarlo conjuntamente, la complejidad es mayor, pues se debe elegir una escala común, teniendo en cuenta la variabilidad de ambas distribuciones.

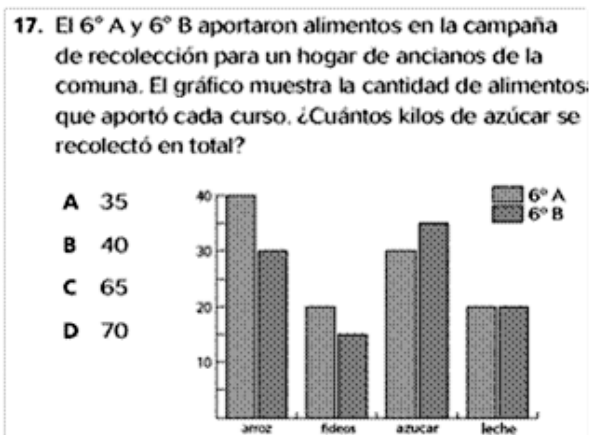


Figura 3.5.3.4. Ejemplo de nivel 4 de complejidad semiótica (TC6, p. 267)

Los resultados sobre los niveles de complejidad semiótica de las actividades de los textos chilenos donde intervienen gráficos estadísticos se han resumidos en la Tabla 3.5.3.1, donde cerca de dos tercios de las actividades (66,1%) corresponden al nivel semiótico 3 (representación de una distribución de datos), lo que nos indica que la mayoría de las actividades trabajan gráficos donde interviene el concepto de distribución y variable. Son también muy frecuentes los gráficos de complejidad 2 (representar una lista de datos uno a uno); generalmente, están asociados a diagramas de líneas o de dispersión. Los otros niveles semióticos son esporádicos.

Tabla 3.5.3.1. Porcentaje de niveles semióticos en textos chilenos

Nivel semiótico	1° (n=46)	2° (n=79)	3° (n=120)	4° (n=46)	5° (n=105)	6° (n=112)	Total (n=508)
1					1,9	0,9	0,6
2	41,3	31,6	29,2	19,6	32,4	13,4	27
3	58,7	68,4	70,8	80,4	54,3	67,9	66,1
4					11,4	18	6,3

Al considerar los diferentes cursos, observamos que el nivel de complejidad 2 aparece con mayor frecuencia en los primeros cursos, disminuyendo su frecuencia hasta cuarto curso; y aumentando un poco en quinto, aunque vuelve a disminuir en el último. Sucede lo contrario con el nivel 3, que va aumentando en los cuatro primeros cursos. En quinto y sexto aparecen actividades de nivel 4, más comunes en sexto curso, y también alguna aislada de nivel 1, generalmente para iniciar la construcción de un gráfico.

3.5.4. ACTIVIDAD PLANTEADA

En este apartado mostramos los resultados sobre el tipo de actividad que se han encontrado tras el análisis de los libros de texto. Para el estudio de esta variable, se ha considerado que respecto al mismo gráfico se puede pedir más de un tipo de actividad (por ejemplo: construir y calcular); cuando ocurre esto se consideran por separado, es decir, se cuenta más de una vez.

En la Figura 3.5.4.1 presentamos un ejemplo de la actividad de leer, que pide una lectura literal de la información proporcionada en el gráfico (título, nombre de los ejes y escala del gráfico). Implica que el estudiante ha de interpretar elementos o la globalidad del gráfico, sin actividad adicional. La primera pregunta pide identificar el título, la

segunda las etiquetas de los ejes y, por tanto, las variables representadas. También se pide interpretar la escala, para lo cual el estudiante ha de manejar este concepto. No hemos tenido en cuenta acá el nivel de lectura en la categorización de Curcio (1989); es decir, hemos agrupado juntas todas las actividades de lectura. Este tipo de actividades son sencillas y recomendables para trabajar en niveles iniciales de la Educación Primaria.



Figura 3.5.4.1. Actividad de leer (TC15, p. 318)

En la Figura 3.5.4.2 se muestra un ejemplo de la categoría *calcular*. El estudiante debe, primeramente, leer la información entregada en el diagrama de tallo y hojas, identificando e interpretando sus elementos. Además, ha de realizar cálculos para obtener la media aritmética y seleccionar la alternativa que tiene la respuesta correcta. Ello implica la lectura correcta de todos los datos representados, el conocimiento de la fórmula de la media y su correcta aplicación.

19. ¿Cuál es el promedio de los datos?

Cantidad de boletos vendidos				
Tallo	Hojas			
1	1	1		
2	0	2	6	8
3	1	2	7	
4	0	2	2	3

A 10,4 C 29,6
 B 37,5 D 45,3

Figura 3.5.4.2. Actividad de calcular (TC5, p. 277)

La actividad de *construir* se ejemplifica en la Figura 3.5.4.3, donde se pide elaborar un gráfico de puntos con la información sobre las horas que Luisa practica gimnasia rítmica y que se proporciona en la tabla. Para el desarrollo de esta actividad, el estudiante debe recordar cómo se construye el diagrama de puntos: trazar los ejes, proponer una escala, etiquetar los valores y finalmente representar cada dato para formar el gráfico.

Representa cada información en un diagrama de puntos. Recuerda todos los elementos que lo componen. Representar

a. Luisa practica gimnasia rítmica y entrena de lunes a sábado la cantidad de horas que se muestran en la siguiente tabla:

Horas diarias de entrenamiento						
Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Cantidad de horas	3	3	4	2	2	5

Figura 3.5.4.3. Ejemplo de actividad de construir (TC15, p. 321)

En la Figura 3.5.4.4 se muestra un ejemplo de la actividad de *completar*, donde se debe continuar la construcción de un gráfico estadístico de barras (horizontales) según la información proporcionada en la tabla sobre los libros que tiene un niño. Este tipo de actividades es ideal cuando se comienza a trabajar con determinados gráficos estadísticos, pues guían a los estudiantes y proporcionan seguridad para continuar la construcción del gráfico pedido.

3 Henry está construyendo una tabla de conteo y un gráfico de barras. Los datos son los tipos de libros que tiene.

Completa una copia de la tabla de conteo y de la gráfica de barras.

Tipos de libros	Conteo	Número de libros
Libro de tiras cómicas		
Libro de crucigramas		
Libro de cuentos		

Libros de Henry

Figura 3.5.4.4. Actividad de completar (TC2, p. 198)

En la Figura 3.5.4.5 se muestra un ejemplo de la actividad *traducir*, ya que se pide, entre otras cosas, construir una tabla estadística con la información proporcionada en el gráfico de barras de la izquierda.

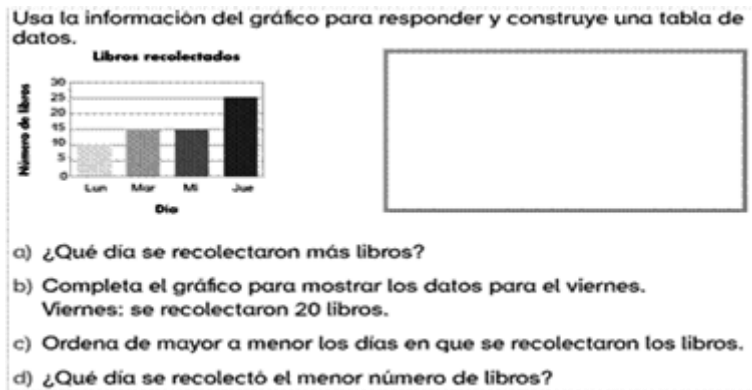


Figura 3.5.4.5. Actividad de traducir (TC3, p. 267)

El tipo de actividad que hemos llamado *ejemplo* la entendemos como una sección del libro de texto que utilizan los autores para aclarar o definir algún concepto o idea; es así como en la actividad de la Figura 3.5.4.6 se entrega una definición para los pictogramas, indicando sus partes y el rol que cumple cada icono, dibujo o símbolo.

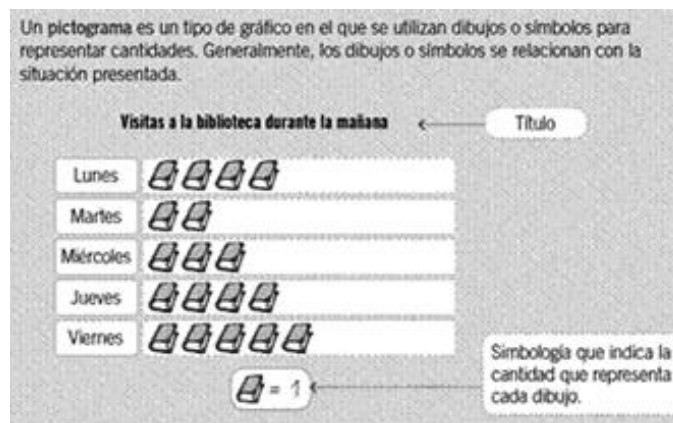


Figura 3.5.4.6. Actividad de ejemplo (TC13, p. 265)

La actividad de la Figura 3.5.4.7 corresponde a un ejemplo de la actividad *justificar/comparar*; en ella se pide al estudiante que construya un gráfico de tallo y hojas, y señale las ventajas de este gráfico frente a uno de barras, indicando si se podría representar esta información en un gráfico de líneas. Es una actividad que necesita de un conocimiento profundo sobre cada gráfico mencionado, fortaleciendo y desarrollando la capacidad argumentativa de los estudiantes.

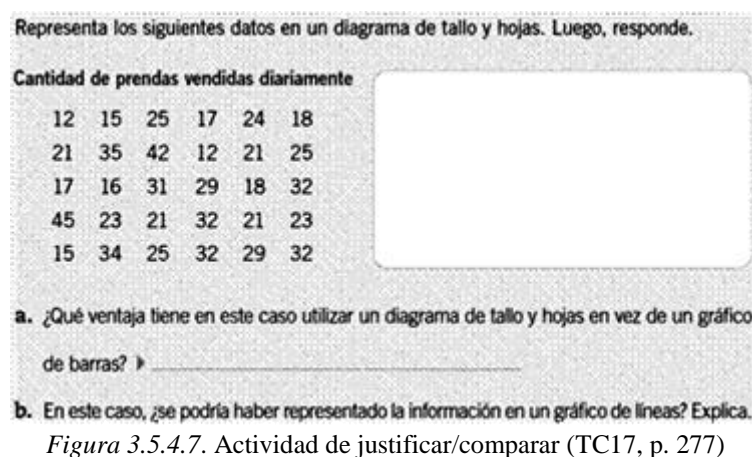


Figura 3.5.4.7. Actividad de justificar/comparar (TC17, p. 277)

La actividad de *inventar problema* la vemos ejemplificada en la Figura 3.5.4.8, donde junto con realizar cálculos con los datos del gráfico se pide a los estudiantes que escriban y resuelvan un problema diferente al contexto original del gráfico estadístico. Este tipo de actividades es poco frecuente en los libros de texto chilenos que hemos analizado.

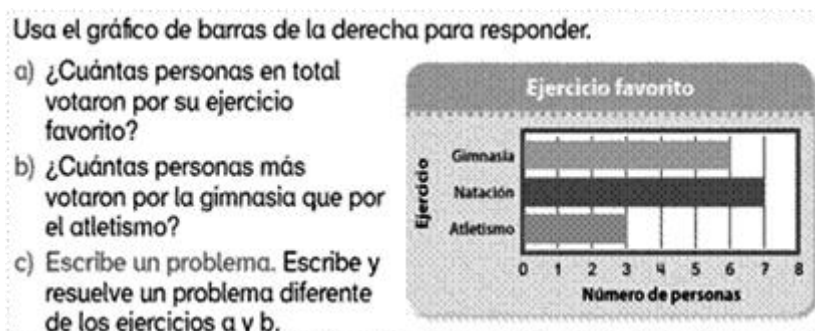


Figura 3.5.4.8. Actividad de inventar problema (TC3, p. 261)

En la Tabla 3.5.4.1 resumimos el tipo de actividad que se pide a los estudiantes en los textos chilenos analizados. Observamos a nivel general, un predominio de la actividad de *calcular* (52,2%), *construir* (24,8%) y *ejemplo* (12,6%). La actividad de *completar* es escasa a pesar de que es muy adecuada en los niveles iniciales y en especial cuando se comienza a introducir nuevos gráficos estadísticos, pues permite comprender la forma de construcción, así como los objetivos matemáticos específicos que se manejan. Las actividades de *inventar problema*, pese a tener una gran riqueza didáctica, son poco frecuentes en los libros de texto chilenos.

Tabla 3.5.4.1. Porcentaje de tipo de actividades en textos chilenos

Tipo de actividad	1° (n=46)	2° (n=79)	3° (n=120)	4° (n=46)	5° (n=105)	6° (n=112)	Total (n=508)
Leer	8,7	7,6	8,3	2,2	5,7	2,7	5,9
Completar	8,7	7,6	1,7	4,3			2,8
Calcular	32,6	51,9	45	56,5	55,2	63,4	52,2
Construir	23,9	21,5	30,8	8,7	25,7	26,8	24,8
Traducir	8,7		0,8			1,8	1,4
Ejemplo	13	15,2	12,5	17,4	11,4	9,8	12,6
Justificar/comparar	8,7	1,3	3,3	17,4	10,5	8	7,3
Inventar problema			2,5	2,2	1		1

3.6. LOS GRÁFICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES

A continuación, se entregan los resultados del estudio con los libros de texto españoles.

3.6.1. TIPO DE GRÁFICO

En la Tabla 3.6.1.1 presentamos los resultados sobre los tipos de gráficos estadísticos en los libros de texto de Educación Primaria española. La investigación deja en evidencia gran variedad de gráficos estadísticos en los que predominan los gráficos de barras y líneas citados en las directrices del MEC (2006) y, en tercer lugar, los de sectores citados en las actuales directrices (MECD, 2014). Los gráficos estadísticos que tiene menor presencia son los de dispersión, puntos, pirámide de población, pictograma

e histograma. Este resultado es razonable, puesto que estos gráficos son más complejos y se trata de libros dirigidos a niños de Educación Primaria. De acuerdo a ello se estarían siguiendo la recomendación de Watson (2006) de introducir los gráficos de barras en primer lugar debido a su sencillez.

Tabla 3.6.1.1. *Porcentaje de los tipos de gráficos en textos españoles*

Tipo de gráfico	1º (n=12)	2º (n=14)	3º (n=43)	4º (n=32)	5º (n=64)	6º (n=50)	Total (n=215)
Barras	100	100	26	31,3	40,6	22	46
Líneas			10	31,3	28,1	14	20,9
Puntos			3				1,4
Pictograma			3	9,4	12,5	4	7,4
Sectores				9,4	14,1	28	12,1
Histograma						16	3,7
Dos o más gráficos			1	6,3	4,7	12	5,6
Otros				12,5		4	2,8

3.6.2. NIVEL DE LECTURA

El primer nivel de lectura (leer los datos) se presenta en la Figura 3.6.2.1, donde el estudiante debe leer las frecuencias (cantidad vertical de cuadros) de la cantidad de animales en un belén.



Figura 3.6.2.1. Nivel leer los datos (TE1, p. 64)

La actividad que se muestra en la Figura 3.6.2.2, donde se trabaja con un gráfico de líneas, corresponde a un ejemplo del segundo nivel de lectura. La pregunta está asociada al día en que Raquel salió de vacaciones (el día en que la frecuencia acumulada se estabiliza y alcanza su valor máximo), es decir, se deben comparar los datos de cada día para ver si hay o no variación. La operación aritmética que se puede utilizar para determinar lo que consume cada día, y cuándo se fue de vacaciones, es la sustracción.

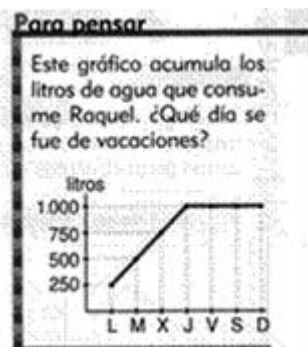


Figura 3.6.2.2. Nivel leer dentro de los datos (TE3, p. 121)

Para el tercer nivel de lectura, *leer más allá de los datos*, incluimos como ejemplo la Figura 3.6.2.3, donde pide, entre otras cosas, predecir lo que sucederá en los próximos tres meses con la cantidad de agua de un estanque, situación propia del nivel 3, ya que se pide explicar una posible tendencia en función de los valores representados.

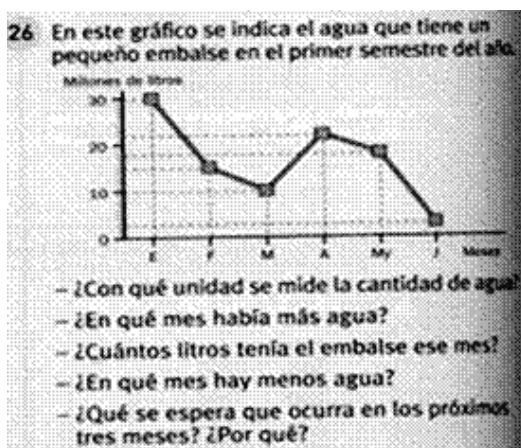


Figura 3.6.2.3. Nivel leer más allá de los datos (TE5, p. 118)

El último nivel de lectura (leer detrás de los datos) se ejemplifica en la Figura 3.6.2.4, en la que se observa un gráfico de barras con el dinero recaudado en taquilla de una película de dibujos animados. En ella se debe hacer un juicio sobre por qué ha vuelto a aumentar la recaudación tras cuatro semanas y si tardarán mucho en retirar la película; pidiendo aplicar conocimientos no matemáticos (sobre el contexto).



Figura 3.6.2.4. Nivel leer detrás de los datos (TE5, p.118)

En la Tabla 3.6.2.1 mostramos la clasificación de las actividades según nivel de lectura. En ella vemos que la mayoría de las actividades están centradas en los niveles 1 y 2, concentrando sobre el 90% de ellas, mientras que los otros niveles se presentan esporádicamente. Además, observamos que el nivel 4 sólo aparece en el quinto curso de primaria, y nunca en el sexto curso, que sería lo más lógico y coherente.

Tabla 3.6.2.1. *Porcentaje de los niveles de lectura en textos españoles*

Nivel de lectura	1° (n=12)	2° (n=14)	3° (n=43)	4° (n=32)	5° (n=64)	6° (n=50)	Total (n=215)
1	33,3	14,3	44,2	34,4	25	48	35,3
2	66,7	85,7	55,8	62,5	62,5	44	58,6
3				3,1	6,3	8	4,2
4					6,3		1,9

3.6.3. COMPLEJIDAD SEMIÓTICA

En los libros de texto españoles no identificamos gráficos del primer nivel de complejidad semiótica. El segundo nivel (representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución) lo vemos en la Figura 3.6.3.1, que muestra un gráfico de líneas con la variación de las temperaturas de un lugar durante una semana, donde no se han agrupado los datos para calcular las frecuencias, pero si se usa la idea de variable.



Figura 3.6.3.1. Gráfico de complejidad 2 (TE3, p. 120)

En la Figura 3.6.3.2 vemos una actividad que corresponde a al nivel *representación de una distribución de datos*, ya que se representan los distintos objetos vendidos en la tienda asociados a la frecuencia de sus ventas en el último mes.

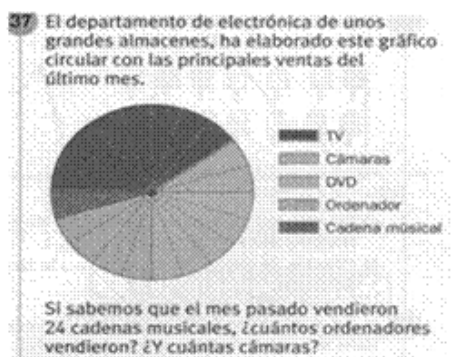


Figura 3.6.3.2. Gráfico de complejidad 3 (TE5, p.120)

La Figura 3.6.3.3 corresponde a una actividad en la que se muestra un gráfico de barras dobles, que corresponde al nivel semiótico de *representación de varias*

distribuciones sobre un mismo gráfico.



Figura 3.6.3.3. Gráfico de complejidad 4 (TE14, p.117)

Los niveles de complejidad semiótica identificados en las actividades analizadas se presentan en la Tabla 3.6.3.1, donde vemos un amplio predominio del nivel 3 con un porcentaje cercano al 60%, lo que indica que se trabaja con gráficos estadísticos según el concepto de distribución y no sólo la idea de variable estadística (nivel 2) o con datos aislados (nivel 1). El segundo nivel más frecuente es el 4 de *representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico*, el que supera levemente al nivel 2 (representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución).

Tabla 3.6.3.1. Porcentaje de niveles semióticos en textos españoles

Nivel semiótico	1° (n=12)	2° (n=14)	3° (n=43)	4° (n=32)	5° (n=64)	6° (n=50)	Total (n=215)
2	25	14,3	16,3	43,8	20,3	4	19,1
3	75	71,4	76,7	34,4	46,9	66	58,6
4		14,3	7	21,9	32,8	30	22,3

3.6.4. ACTIVIDAD PLANTEADA

En este punto vamos a mostrar los resultados y ejemplificar los tipos de actividad que hemos encontrado en los libros de texto españoles. Al igual que los textos chilenos se puede identificar en una misma actividad (sección del libro de texto) más de un tipo de ella (por ejemplo, se puede pedir la lectura literal y desarrollar algún cálculo).

En la Figura 3.6.2.1 observamos un ejemplo de la actividad de *leer* pues se debe identificar la frecuencia para cada una de las categorías indicadas. La actividad *calcular* la encontramos ejemplificada en la Figura 3.6.3.2, pues se deben realizar cálculos a partir de la información presentada en un gráfico de sectores, que representa la cantidad de ventas en el departamento de electrónica de unos grandes almacenes.

En la Figura 3.6.4.1 se presenta una actividad de *construir*, en la que se pide a los estudiantes que organicen la información en una tabla y que construyan el gráfico de barras que corresponda. La actividad de *completar* la observamos en la Figura 3.6.4.2, donde se presenta una tabla con la cantidad de agua caída en los primeros quince días del mes de diciembre. En esta actividad se han construido las dos primeras barras y el estudiante debe finalizar la construcción del gráfico de barras con los datos de tabla.

2 Ainboa ha preguntado la edad a 40 niños y niñas y ha anotado las respuestas en su cuaderno:

3, 4, 7, 10, 6, 4, 7, 9, 8, 5,
6, 5, 8, 10, 9, 5, 6, 6, 7, 5,
3, 7, 9, 8, 5, 6, 4, 10, 8, 7,
5, 6, 7, 9, 10, 9, 10, 9, 8, 6

Piensa en un modo de contar los datos y recogerlos en una tabla. Después, representalos en una gráfica de barras.

Figura 3.6.4.1. Ejemplo de construir (TE10, p.170)

La tabla recoge las precipitaciones de lluvia de la primera quincena de diciembre:

DÍA	PRECIPIT. EN LITROS	DÍA	PRECIPIT. EN LITROS
1	20	9	25
2	10	10	35
3	5	11	—
4	—	12	—
5	5	13	10
6	10	14	10
7	20	15	15
8	30		

Copia la gráfica y complétala con los datos de la tabla.

PRECIPITACIONES DE LLUVIA

CANTIDAD (L)

• ¿Que días no llovió?

Figura 3.6.4.2. Ejemplo de completar (TE10, p.170)

Para la actividad de *traducir* hemos elegido como ejemplo la mostrada en la Figura 3.6.4.3, en ella se debe construir un gráfico de puntos a partir de un pictograma. El estudiante debe considerar el valor estadístico del icono del pictograma, para luego multiplicar por la cantidad de iconos asociados al color de cada chincheta y representar en el gráfico de puntos.

Copia el pictograma, completa y representa los datos en un gráfico de puntos.

Pilar ha representado el número de chinchetas de cada color que hay en el tablón de clase. ¿Cuántas chinchetas hay de cada color?

representa 3 chinchetas.

Número de chinchetas

Figura 3.6.4.3. Actividad de traducir (TE17, p.128)

El tipo de actividad de *ejemplo* la mostramos en la Figura 3.6.3.3, en ella los autores del libro de texto muestran la forma en que se construye un gráfico de barras dobles a partir de una tabla y cómo se interpreta la información del gráfico (medio de transporte más usado en las vacaciones pasadas y próximas).

La Figura 3.6.4.4 presenta un ejemplo de *justificar/comparar*, en la que se pide construir un gráfico que represente la estatura de 6 niños (Carmen y sus amigos) de acuerdo a la información mostrada en la tabla. Luego, los estudiantes deben realizar una comparación de estas dos formas de representar la información, indicando cuál es la más apropiada a la información entregada.

3 En la tabla se recoge la altura, en centímetros, de Carmen y sus amigas y amigos. Representa esos datos en una gráfica.

NOMBRE	ESTATURA	NOMBRE	ESTATURA
CARMEN	140 cm	MARTA	140 cm
LUIS	135 cm	DAVID	130 cm
M ^a JESUS	145 cm	PABLO	135 cm

• ¿Dónde ves más clara la información, en la tabla o en la gráfica?

Figura 3.6.4.4. Ejemplo de justificar/comparar (TE10, p.170)

En la Figura 3.6.4.5 mostramos un ejemplo de la actividad de *asignar variables*, donde se pide al estudiante indicar dos situaciones en que las gráficas tengan sentido; por ejemplo, consumo de electricidad en una casa y cantidad de agua en un estanque. Se trata de una actividad compleja, que sólo se ha encontrado en los textos españoles.

39 Inventa a qué situación puede referirse cada una de estas gráficas.

Figura 3.6.4.5. Actividad de asignar variable (TE5, p.120)

La actividad de *inventar problema* la mostramos en la Figura 3.6.4.6, esta consiste en describir una situación en el que los datos que se aportan tengan sentido y coherencia. Es una actividad poco frecuente en los libros de texto analizados, y conlleva interpretar el contexto y plantear preguntas razonables que puedan responderse con los datos proporcionados.

En la Tabla 3.6.4.1 resumimos el tipo de actividad que se han encontrado tras el análisis de los libros de texto. En ella vemos el predominio de la actividad de *leer* (49,8%), *construir* (27,9%) y *ejemplo* (16,7%); además, estas actividades, y con excepción de los ejemplos, se han identificado en todos los niveles de primaria española.

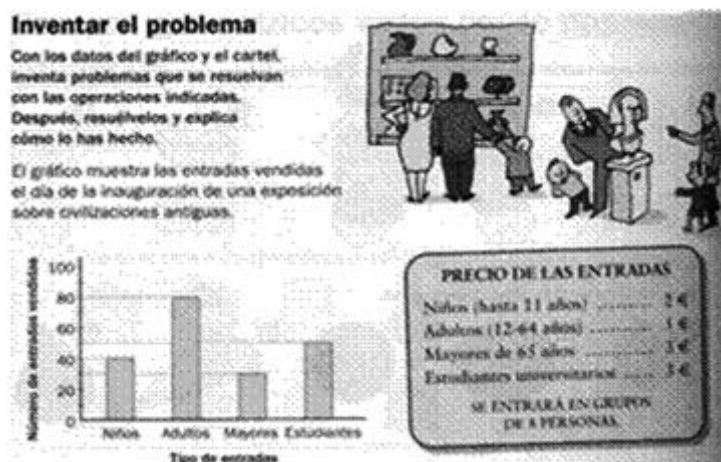


Figura 3.6.4.6. Actividad de inventar problema (TE15, p.194)

Las actividades de *inventar problema* y *asignación de variables* son las que se presentan en pequeñas proporciones en los libros de texto; en total sólo se han encontrado tres de estas actividades, implicando un gran desafío para los estudiantes, por lo que creemos que estas deberían tener una mayor presencia en los libros de texto.

Tabla 3.6.4.1. Porcentaje de tipo de actividades en textos españoles

Tipo de actividad	1º (n=12)	2º (n=14)	3º (n=43)	4º (n=32)	5º (n=64)	6º (n=50)	Total (n=215)
Leer	75	57,1	51,2	50	43,8	48	49,8
Completar	8,3				1,6	2	1,4
Calcular		7,1	7	9,4	14,1	6	8,8
Construir	41,7	14,3	25,6	31,3	29,7	26	27,9
Traducir		7,1	9,3	12,5	7,8	6	7,9
Ejemplo		21,4	23,3	6,3	14,1	24	16,7
Justificar/comparar				3,1	3,1		1,4
Asignar variables					3,1		0,9
Inventar problema			2,3				0,5

3.7. CONCLUSIONES SOBRE EL ESTUDIO DE LIBROS DE TEXTO

En este capítulo hemos abordado el objetivo: *Realizar un análisis detallado de la presentación de los gráficos estadísticos en los libros de texto de Educación Primaria, con la finalidad de caracterizar el significado institucional de referencia en nuestro trabajo.* Para cumplir dicho objetivo hemos analizado las actividades en que intervienen gráficos estadísticos en una muestra de 36 libros de texto, 18 para la Educación Primaria española y la misma cantidad para la Educación Primaria chilena. Dentro de los hallazgos se destaca la diferencia en el número de actividades que se han encontrado en los libros de texto por país, donde los textos chilenos plantean más del doble de actividades.

Los resultados obtenidos en estos estudios nos permiten ver cómo se aborda en trabajo con gráficos estadísticos, desde qué curso, en qué progresión y la diversidad de actividades propuestas en los libros investigados, y que detallamos a continuación en relación a los objetivos específicos.

01.1. Caracterizar los tipos de gráfico incluidos en cada sistema educativo y en los diferentes niveles de la Educación Primaria.

Hemos verificado la gran variedad de gráficos, incluso algunos que no se explicitan en las directrices curriculares de los países analizados. En España las directrices curriculares sólo mencionan los gráficos de barras, líneas y sectores (MEC, 2006; MECD, 2014), y hemos observado la presencia de gráficos de líneas, puntos y pictograma (3°), de dispersión (4°), sectores (4° y 5°), pirámide e histograma (6°). En los libros de texto chilenos, se trabajan los gráficos indicados en las directrices curriculares (MINEDUC, 2012, 2013b, c, d, e, f, g), aunque algunos de ellos se introducen antes de lo sugerido (como los gráficos de barras en primero; sectores y dispersión en quinto; y pirámide de población en sexto curso). En los textos españoles no se observan actividades con diagramas de tallo y hojas, y en los chilenos no se encontraron actividades con histogramas.

Pese a las diferencias, el gráfico de barras es el más frecuente en ambos países, situación que se puede justificar porque son fáciles para trabajar desde edades tempranas (Watson, 2006); resultados que coinciden con los de Castellanos (2013), Méndez y Ortiz (2012) y Mingorance (2014), aunque en nuestro estudio hemos identificado mayor diversidad de gráficos estadísticos. En Lemos (2006) los gráficos más frecuentes son los diagramas de barras, sectores y líneas, y en nuestros trabajos posteriores a este análisis (Díaz-Levicoy y Arteaga, 2014; Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017; Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín y Piñeiro, 2016; Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal, 2018), los resultados son similares respecto al predominio del gráfico de barras.

01.2. Caracterizar los niveles de lectura y los niveles de complejidad semiótica propuestos en las actividades basadas en gráficos estadísticos.

En ambos países sobre el 90% de las actividades corresponden a los niveles de lectura 1 (leer los datos) y 2 (leer dentro de los datos). El predominio de este nivel de lectura coincide con los resultados encontrados por Castellanos (2013), que ha identificado este nivel en el 73% de las actividades analizadas, y Méndez y Ortiz (2012) con un 67,25% de los gráficos estudiados. Aunque nos parece adecuado, pensamos que en los últimos cursos de primaria debería existir mayor cantidad de actividades con gráficos de niveles de lectura 3 y 4 para lograr que los estudiantes desarrollen una lectura crítica de la información a la que acceden. El predominio del nivel 2 de lectura se mantiene en los estudios posteriores (Díaz-Levicoy y Arteaga, 2014; Díaz-Levicoy, Giacomone et al., 2017; Díaz-Levicoy et al., 2018).

El nivel semiótico más frecuente es el 3 (representación de una distribución de datos), en coincidencia con Castellanos (2013) y Méndez y Ortiz (2012) con el 55,6% y 67,24% de las actividades, respectivamente. En los libros de texto españoles presentan una distribución más homogénea del nivel de lectura, lo que puede favorecer la mejor comprensión de los gráficos estadísticos y sus elementos. En nuestros trabajos posteriores a este análisis (Díaz-Levicoy y Arteaga, 2014; Díaz-Levicoy et al., 2018), se ha encontrado el predominio del nivel 3, con excepción del trabajo en que el nivel más frecuente es el 2 (Díaz-Levicoy, Giacomone et al., 2017).

03.3. Caracterizar los tipos de actividades propuestos en relación a los gráficos.

Hemos identificado diferencias en el tipo de actividad que se pide, en los libros de texto españoles predomina la actividad de *leer*, al igual que en los estudios de Castellanos (2013) y Mingorance (2014), y en los chilenos es la de *calcular*. Hemos

encontrado pequeñas variaciones en nuestros trabajos posteriores a este análisis (Díaz-Levicoy y Arteaga, 2014; Díaz-Levicoy, Giacomone et al., 2017; Díaz-Levicoy, Giacomone et al., 2016; Díaz-Levicoy et al., 2018).

A continuación, discutimos las conclusiones respecto a las hipótesis que nos hemos planteado.

H1. El trabajo con gráficos estadísticos que se propone en los libros de texto de Educación Primaria en Chile y España, presenta una introducción gradual, comenzando desde el primer curso, y trabajando los que se explicitan en las directrices curriculares y con un predominio de los gráficos de barras, líneas y circulares.

Esta hipótesis se considera parcialmente cumplida, pues si bien en los textos de ambos países se cumplen las directrices curriculares, introduciendo desde el primer curso gráficos en forma gradual; existe diferencia sobre los gráficos más frecuentes. En el caso de los textos españoles se cumple lo señalado en el currículo, pero en el caso de los textos chilenos los más frecuentes son: barras, pictogramas y puntos, lo que no coincide con lo esperado.

H2. Los niveles de complejidad semiótica y de lectura descritos en los antecedentes son introducidos en los textos en forma gradual, con un predominio del nivel semiótico de representación de una distribución de datos y del nivel de lectura leer dentro de los datos.

Esta hipótesis se cumple, pues las actividades analizadas en los textos de ambos países tienen un predominio del nivel de representación de una distribución de datos y del nivel *leer dentro de los datos*. Pero se observa que presentan un escaso número de actividades de predicción y análisis crítico de los gráficos; así como un bajo número de actividades de *nivel semiótico de representación de un conjunto de datos sin llegar a resumir su distribución*, que sería ideal trabajar en los primeros cursos.

H3. Las actividades más frecuentes que se encuentran en los libros de texto están relacionadas con la construcción de gráficos estadísticos y la realización de cálculos con la información proporcionada en ellos.

Esta hipótesis no se ha cumplido, ya que la actividad consistente en *construir*, no es la primera, sino la segunda más frecuente en los libros de texto de Chile y España. En el caso de los textos chilenos la más frecuente es *calcular*, lo que distorsiona algo la finalidad principal del trabajo con los gráficos, que debiera ser proporcionar cultura estadística a los estudiantes. En los textos españoles, lo más frecuente es *leer* el gráfico. Esto último nos parece adecuado, pues como se sugirió en el Capítulo 2 el gráfico es un objeto semiótico complejo (Bertin, 1967), donde cada elemento y el gráfico en su conjunto requieren procesos interpretativos. Por ello se necesita un periodo suficiente de aprendizaje de su lectura, que sin duda pretenden los textos españoles.

Significado pretendido de los gráficos estadísticos en los libros analizados

Uno de los objetivos del estudio de los libros de texto fue analizar el significado institucional pretendido en los mismos, que refleja el significado institucional pretendido en la enseñanza que recibieron los estudiantes participantes en el estudio.

Para cumplir este objetivo, en la Tabla 3.7.1 presentamos los objetos matemáticos que se deducen del análisis realizado. Dichos objetos se relacionan entre sí y constituyen una configuración epistémica (Godino et al., 2007) y al mismo tiempo permite reflexionar sobre la complejidad de la enseñanza y aprendizaje de los gráficos en este nivel educativo.

Tabla 3.7.1. *Configuración epistémica que define el significado institucional pretendido de los gráficos estadísticos en los textos analizados*

Tipos de objetos primarios	Objetos matemáticos presentes en los textos analizados
Situaciones-problemas	Interpretar un gráfico Construir un gráfico Traducir una representación de una distribución a otra Extrapolar un valor a partir de la información representada en un gráfico Rebatir o confirmar afirmaciones a partir de un gráfico Comparar o elegir entre varios gráficos uno que represente mejor la información
Lenguaje	Verbal, numérico, geométrico, visual (colores, iconos, dimensiones)
Conceptos- definición	Gráfico de barras simple Gráfico de barras adosadas o apiladas Gráfico de líneas simple Gráfico de líneas compuesto Gráfico de sectores Gráfico de puntos Gráficos de tallo y hojas Histograma Dato, lista de datos Variable estadística, valor, rango, moda Frecuencia y distribución Magnitud, medida, unidad de medida, cantidad, longitud, área Conceptos geométricos: rectángulo, altura y anchura, punto, círculo y sector circular, coordenadas cartesianas Números enteros y decimales; orden numérico
Proposiciones	Correspondencia entre proporcionalidad numérica y geométrica Orden numérico en las escalas Correspondencia entre valores y frecuencias de la variable y su representación en la escala Convenios de representación de cada gráfico Perpendicularidad
Procedimientos	Construir un gráfico Completar un gráfico Reconocer las variables representadas en un gráfico Lectura directa de un dato en un gráfico Lectura inversa de un dato en un gráfico Realizar cálculo con los datos de un gráfico Determinar la moda o el rango en un gráfico Predecir valores no incluidos en un gráfico
Argumentos	Justificar la elección de un gráfico Comparar dos gráficos para ver cuál es más adecuado Criticar una información basada en un gráfico Inventar un problema a partir de un gráfico

Idoneidad didáctica de los libros de texto

Para finalizar, queremos valorar la idoneidad didáctica de la presentación de los gráficos en los libros de texto, siguiendo las orientaciones propuestas por Godino (2013) y Godino et al. (2013).

- *Respecto a la idoneidad epistémica* (representatividad del significado institucional pretendido), vemos que las actividades planteadas consideran todos los gráficos estadísticos indicados en las directrices curriculares, en una progresión adecuada. Teniendo en cuenta el tipo de actividades propuestas estos problemas además se proponen en situaciones de ejemplificación, ejercitación y aplicación. No hay muchas actividades de generación de problemas, pero ello es lógico debido a la edad de los estudiantes a los que van dirigidos los textos. Se promueven actividades de traducción de tabla o listado a gráfico y viceversa potenciando diverso lenguaje, las reglas de construcción están adaptadas al nivel de los estudiantes.
- *Sobre la idoneidad cognitiva*, creemos que es adecuada, pues se comienza a trabajar con gráficos muy sencillos que están indicados en las directrices de varios países y recomendados por investigadores. Además, un gran número de las actividades están asociadas a una lectura de nivel 1 o 2, que son las más sencillas para los estudiantes. Por ello, pensamos que el estudiante tiene conocimientos suficientes para abordar el tema y los contenidos pretendidos se pueden alcanzar.
- *Idoneidad interaccional*. No la podemos evaluar sólo a partir del libro de texto. Si bien depende de la organización del proceso de instrucción, esta se puede mejorar si se plantea un trabajo en equipo y donde los estudiantes deben aprovechar datos de su entorno.
- *Idoneidad mediacional* (relacionada en los medios y recursos ocupados). La consideramos adecuada pues el medio y objeto de investigación es el libro de texto, recurso tradicional en el aula. Esta idoneidad puede ser mejorada con el uso de applets para la construcción de gráficos y haciendo que los estudiantes recojan sus propios datos para interesarlos en la construcción y lectura de los gráficos.
- *Idoneidad afectiva* (emocional). Pese a no ser observada directamente, nos parece adecuada pues las actividades son presentadas en contextos en que el estudiante puede dar sentido a los datos. Las tareas permiten también ver la utilidad de la matemática fuera del aula y se resaltan las cualidades estéticas de los gráficos, y por tanto de la disciplina.
- *Idoneidad ecológica*. Nos parece aceptable, ya que el trabajo con gráficos da respuesta a las demandas de la sociedad actual sobre alfabetización estadística del ciudadano. Además, tiene en cuenta las orientaciones curriculares y las actividades en bastantes ocasiones se relacionan con otras áreas curriculares.

Para finalizar estas conclusiones, resaltamos que este análisis proporciona una visión sobre las características de las actividades que se sugieren a los estudiantes en los libros de texto de primaria de ambos países. Investigaciones como la de Arteaga (2011) muestran las dificultades que tiene los futuros profesores españoles para construir gráficos o incluso para interpretarlos a nivel crítico. Una aplicación inmediata es el uso de estos resultados para la formación de profesores y como apoyo para organizar el proceso de instrucción. Con ello se ayudaría a que los profesores de Educación Primaria reciban una formación adecuada para la enseñanza de estos contenidos, y ayuden a sus estudiantes a superar sus dificultades.

CAPÍTULO 4

CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

- 4.1. Introducción
- 4.2. Objetivos y clasificación del instrumento
- 4.3. Determinación del contenido de la variable objeto de medición
 - 4.3.1. Fundamentos de la definición
 - 4.3.2. Tabla de especificaciones del contenido
- 4.4. Elaboración de un banco inicial de ítems
 - 4.4.1. Proceso de selección y depuración
- 4.5. Selección de ítems mediante juicio de expertos
 - 4.5.1. Muestra de expertos
 - 4.5.2. Método y cuestionario a expertos
 - 4.5.3. Resultados del juicio de expertos
 - 4.5.4. Ítems que componen el cuestionario piloto y análisis a priori
- 4.6. Prueba piloto del cuestionario
 - 4.6.1. Descripción de la muestra de estudiantes
 - 4.6.2. Resultados del estudio piloto y modificaciones en algunos ítems
- 4.7. Aproximación al estudio de validez de contenido
- 4.8. Conclusiones sobre el cuestionario

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo describimos la construcción del cuestionario de evaluación de la comprensión de gráficos estadísticos dirigido a estudiantes chilenos que ha sido utilizado en nuestra investigación y cuya elaboración ha sido parte de la misma. Dicha construcción se ha abordado de manera rigurosa y sistemática, siguiendo los criterios científicos propuestos para el desarrollo de instrumentos de evaluación en psicología y educación (APA, AERA y NCME, 1999) y la metodología descrita en Batanero y Díaz (2005).

El cuestionario, que se describe a continuación, fue diseñando porque no se encontraron estudios en la revisión de la literatura que usaran un instrumento incluyendo todas las variables relevantes que hemos analizado en los libros de texto (tipo de gráfico, nivel de lectura, nivel semiótico y actividades). En primer lugar, describimos el proceso mediante el cual se fijó el contenido a evaluar, donde se determinó las variables que habría que tener en cuenta en los ítems que los componen y los fundamentos utilizados en dicha elección, que se ha basado en el estudio previo del currículo y de los libros de texto descrito en los capítulos 1 y 3. Es decir, en el significado de pretendido de los gráficos estadísticos en el currículo chileno,

determinado mediante los anteriores análisis. Además, se describe el diseño del cuestionario, que queda fijado en la tabla de especificaciones del contenido, que permite con un número razonable de ítems tener en cuenta las anteriores variables.

Seguidamente se detalla la construcción de un banco de ítems en que se tuvieron en cuenta las variables que se trataron de incluir en el cuestionario y las características de los estudiantes a los que iba dirigido. Dicha recopilación se efectuó, tanto a partir del análisis de los antecedentes de la investigación y los ítems utilizados en dichos estudios, como del análisis de los libros de texto descrito en el Capítulo 3. Una vez depurado el banco inicial de ítems, se realizó la selección de los que definitivamente entraron a formar parte en el cuestionario, mediante consulta a un grupo de expertos el análisis estadístico de los resultados de su valoración. Asimismo, sus sugerencias se tuvieron en cuenta para la mejora de los ítems finalmente incluidos en el cuestionario. Los resultados de este juicio de expertos, junto con el análisis a priori de los ítems incluidos en la versión piloto del instrumento nos permitieron mostrar evidencias de su validez de contenido (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008).

El cuestionario piloto se pasó a cuatro estudiantes chilenos de edades similares a aquellos a que va dirigido el instrumento, para comprobar la legibilidad de los ítems y el tiempo requerido para completarlo. Sus respuestas nos permitieron comprobar nuestras expectativas sobre posibles errores y sus comentarios nos ayudaron a depurar aún más la redacción de los ítems.

En lo que sigue se detallan estos pasos y sus resultados.

4.2. OBJETIVOS Y CLASIFICACIÓN DEL INSTRUMENTO

Como hemos indicado en los capítulos anteriores, los gráficos estadísticos tienen una amplia presencia en diferentes situaciones de la vida cotidiana, y la competencia gráfica es considerada parte de los conocimientos y habilidades que los ciudadanos deben poseer, para adquirir la cultura estadística (Arteaga, Batanero, Cañadas et al., 2011).

Como se analizó en el Capítulo 1, en el ámbito de la Educación Primaria, varios países han incluido los gráficos estadísticos en sus directrices curriculares. Puesto que se trata de un tema relativamente nuevo en este nivel educativo, los profesores necesitan un fuerte apoyo en su labor docente (Arteaga, Batanero y Contreras, 2011). En el Capítulo 3 se mostró que los libros de texto chilenos presentan el tema adecuadamente, y por tanto constituyen un apoyo importante para el profesor.

Además de contar con un libro de texto adecuado, el profesor necesita conocer de antemano la posible dificultad de las tareas propuestas para sus estudiantes y disponer de instrumentos de evaluación del aprendizaje. Las autoridades educativas también se interesan por conocer el grado de comprensión del tema alcanzada por los estudiantes al finalizar cada nivel y, en particular, la Educación Primaria.

Al analizar las investigaciones descritas en el Capítulo 2, aunque se encontraron trabajos aislados que evalúan la capacidad de lectura o de construcción de gráficos estadísticos específicos (por ejemplo, el diagrama de barras) no hallamos ningún instrumento comprensivo que en una sola aplicación permitiese evaluar la comprensión gráfica de los estudiantes al final de la Educación Primaria y que tuviese en cuenta las diferentes variables apropiadas identificadas en el análisis de los textos.

Esta constatación nos llevó a diseñar nuestro propio instrumento, cuyos objetivos

y clasificación se describen a continuación.

Objetivos de la construcción del instrumento

En consecuencia, de la discusión anterior, el objetivo fijado para la construcción del instrumento fue el segundo de la investigación descrito en el Capítulo 1, que tenía la siguiente formulación:

Objetivo 2. Construir un instrumento para evaluar la comprensión de los gráficos estadísticos de los estudiantes chilenos al finalizar su Educación Primaria, siguiendo unos criterios metodológicos rigurosos.

El interés de este objetivo es claro, pues, como se ha indicado, no hemos encontrado en la literatura de investigación un instrumento con las características deseadas. Por tanto, el instrumento en sí mismo constituye un producto y una aportación de la investigación, que será beneficioso, tanto para otros investigadores, que pueden utilizarlo en nuevos estudios, como para los profesores, que contarán con este cuestionario para su propio uso en el aula. Finalmente, la disponibilidad de un instrumento adecuado nos permite también completar el tercer objetivo de la investigación:

Objetivo 3. Evaluar la comprensión que alcanzan los estudiantes chilenos de 6º y 7º curso sobre los gráficos estadísticos utilizando un cuestionario válido y fiable.

Este estudio de evaluación comprobará si los objetivos planteados en las directrices curriculares y libros de texto son alcanzados por los escolares chilenos al finalizar el 6º curso, donde se concluirá la Educación Primaria en el nuevo currículo y comprobar el recuerdo del tema un año después.

El instrumento puede arrojar información que puede tener implicaciones importantes en el proceso de instrucción en el aula, pues permite observar el predominio de determinadas destrezas (Martínez-Arias, 1995), así como identificar errores y dificultades que presentan los estudiantes y facilitar una intervención de aula para su solución.

Clasificación del instrumento

Se trata de un instrumento de medición que por medio de las respuestas a los ítems que se plantean a los estudiantes, permite obtener una aproximación del conocimiento que ellos alcanzan, accediendo a información que no podría mediante observaciones y encuestas (Barbero, 2002). Debido a que deseamos evaluar la comprensión que tienen los estudiantes de 6º y 7º curso de Educación Primaria, caracterizaremos la forma en que abordan el trabajo con gráficos estadísticos mediante la inferencia de las respuestas que entregan, pues se está evaluado un constructo inobservable (León y Montero, 2002).

Este instrumento corresponde a un *cuestionario*, caracterizado por permitir acceder a una cantidad amplia de información sobre el tema que nos interesa en un tiempo reducido. Pretendemos que pueda aplicarse a la población general de estudiantes, por lo que queremos conseguir suficiente validez (Kline, 2013). Está compuesto de ítems o reactivos que se plantean con un formato determinado, todos ellos dirigidos a la evaluación del constructo de interés. De acuerdo con Barbero, Vila y Suárez (2003), los ítems que componen el cuestionario de nuestra investigación son de

respuesta abierta, por lo que promueven respuestas más elaboradas y profundas de los sujetos investigados.

Más específicamente, corresponde a un instrumento de *medida centrada en el sujeto* (Millman y Greene, 1989), pues se utiliza para inferir las capacidades y los conocimientos de los individuos. Permite que los estudiantes sean clasificados según las respuestas que proporcionen, dependiendo la puntuación de cada ítem por la calidad de la solución y los conocimientos movilizados (APA, AERA y NCME, 1999).

El cuestionario se construyó teniendo en cuenta las características de los estudiantes y la naturaleza de las inferencias que se extraerán de las puntuaciones obtenidas a partir de su aplicación. Esto nos permitirá especificar la variable dentro de un marco global, y también el desarrollo, prueba y revisión de los ítems, teniendo en cuenta el contexto (Kline, 2013).

4.3. DETERMINACIÓN DEL CONTENIDO DE LA VARIABLE OBJETO DE MEDICIÓN

En este apartado describimos el diseño del cuestionario y la delimitación de su contenido, que se ha tenido en cuenta para la selección de los ítems que lo componen. Martínez-Arias (1995) indica que la delimitación del contenido de un instrumento se puede realizar de dos maneras:

- A nivel semántico, donde el constructo queda definido mediante la especificación detallada de los comportamientos observables o reglas de correspondencia entre el constructo y la conducta;
- A nivel sintáctico o relacional, a través del cual ponemos en relación el constructo con otros relacionados con él dentro de una misma teoría.

En nuestro caso realizamos una definición semántica de la variable objeto de medición, partiendo de las variables y tipos de actividades identificadas en el estudio curricular (Capítulo 1) y de libros de texto (Capítulo 3), así como en los antecedentes (Capítulo 2).

4.3.1. FUNDAMENTOS DE LA DEFINICIÓN

Como se ha indicado, una vez definido los objetivos del instrumento, se revisó la presencia de los gráficos estadísticos en las directrices curriculares del Ministerio de Educación de Chile y España, así como su implementación en series de libros de texto, tal como se detalla en los capítulos 1 y 3, respectivamente. Al mismo tiempo, hemos realizado una síntesis de la literatura para poder identificar ítems de cuestionarios que podrían ser utilizados en nuestro estudio, así como resultados de investigaciones que nos proporcionen un panorama sobre el este tema, y que describimos en el Capítulo 2.

A partir de estos estudios se han identificado las variables pertinentes para la elaboración y validación del instrumento, que también se analizaron en el estudio de libros de texto. Por tanto, es lógico que nos basemos en ellas para evaluar si los estudiantes logran desarrollar con éxito las actividades propuestas en los libros y cuáles son las principales dificultades que presentan. En concreto, para la elaboración del instrumento se han considerado las siguientes:

- *Tipo de gráfico.* Hemos considerado todos los descritos en las directrices curriculares y los que se han encontrado en los libros de texto de Educación Primaria en Chile: gráficos de barras, gráficos de líneas, pictogramas, gráfico de tallo y hojas, gráfico de sectores y gráfico de puntos. La elección de esta variable se realizó para verificar si los gráficos que se establecen en las directrices curriculares y libros de texto son comprendidos por los estudiantes de 6° y 7° de Educación Primaria.
- *Tipo de actividad.* Consideramos las encontradas con mayor frecuencia en el análisis de libros de texto de Educación Primaria en Chile y España: leer un gráfico, construir un gráfico, traducir de gráfico a tabla y elegir un gráfico para representar una serie de datos. Su importancia radica en verificar hasta qué punto los estudiantes pueden resolver satisfactoriamente las actividades que se presentan con mayor frecuencia en los libros de texto y cuáles son los errores que cometen en cada una de ellas.
- *Niveles de lectura.* El análisis de libros de texto mostró la presencia de los cuatro niveles establecidos por Curcio y colaboradores, tanto en Chile como en España. Interesa identificar hasta qué nivel los estudiantes son capaces de alcanzar, los que van aumentando progresivamente su dificultad.
- *Nivel semiótico.* Los resultados de la investigación en libros de texto muestran la presencia de tres de los cuatro niveles (niveles dos a cuatro), que serán considerados en la construcción del cuestionario. La importancia de esta variable recae en que los objetos matemáticos implicados varían en los diferentes niveles y son progresivos en su dificultad.

4.3.2. TABLA DE ESPECIFICACIONES DEL CONTENIDO

Una vez que se fijaron las variables que se considerarían en el cuestionario, se comenzó a delimitar su estructura, con objeto de determinar el número mínimo de ítems que necesitaríamos para tener en cuenta todas las variables anteriores y algunos cruces entre las mismas. Este número de ítems no podía ser muy alto, puesto que queríamos trabajar con ítems de respuesta abierta, que requieren más tiempo en su elaboración, pero proporcionan más información.

Y, por otro lado, queríamos que el cuestionario se conteste cómodamente en el tiempo que dure una clase, ya que se administraría en forma grupal. Se disponía de un tiempo de dos horas, en el cual podría pasarse el cuestionario partido en dos partes. Pero, de hecho, se trató de que pudiese completarse en un tiempo menor, para no fatigar a los estudiantes.

En primer lugar, consideramos los tipos de gráficos encontrados en las directrices curriculares y libros de texto chilenos, entre los que destacan: gráfico de barras, gráfico de líneas, pictograma, tallo y hojas, gráfico de sectores y gráfico de puntos, y los relacionamos con los niveles de complejidad semiótica que se presentarían en los ítems, con la idea de tener al menos algunos ítems que para el mismo tipo de gráfico representasen conjuntos de datos de diferente complejidad semiótica. Con ello obtuvimos la Tabla 4.3.2.1 cruzando estas dos variables.

En algunos gráficos (tallo y hojas y sectores) no pueden darse a nivel de complejidad dos, porque no pueden representar listados de datos. También se consideró la dificultad que pueden tener los estudiantes al resolver actividades de nivel de

complejidad 4 con algunos gráficos. Así como que los gráficos de tallo y hoja y de sectores que se introducen más avanzados la Educación Primaria y por lo tanto los estudiantes tienen menos experiencia con ellos. Con estas condiciones, el cuestionario debería tener al menos 11 ítems.

Tabla 4.3.2.1. *Distribución de ítems por tipo de gráfico y nivel de complejidad*

Gráficos	Datos representados		
	Lista de datos	Una distribución	Dos o más distribuciones
Barras	Ítem 1 y 2	Ítem 7	Ítem 3
Pictograma	Ítem 4	Ítem 5	-
Líneas	Ítem 6	-	Ítem 8
Tallo y hojas	-	Ítem 9	-
Sectores	-	Ítem 10	-
Puntos	-	Ítem 11	-

Se trató, entonces de incluir los niveles posibles de lectura y la actividad pedida, cruzándolas también entre sí en lo posible, pero sin aumentar el número de ítems. De este modo obtuvimos la Tabla 4.3.2.2, distribuyendo los 11 ítems previstos.

Tabla 4.3.2.2. *Distribución de ítems por tipo de actividad y nivel de lectura*

Actividad	Nivel de lectura		
	N1	N2	N3 - N4
Leer	Ítem 6	Ítem 9	Ítem 2, 5 y 11
Construir un gráfico	Ítem 1	Ítem 7	-
Traducir de gráfico a tabla	Ítem 3	Ítem 4	-
Elegir un gráfico para datos/frecuencias	-	-	Ítem 8 y 10

Consideraremos que una actividad es de *leer* el gráfico si es la única pedida, aunque somos conscientes que en las tareas de traducir, construir, justificar y comparar también requieren la lectura de datos o información. No obstante, la tenemos en cuenta por separado para poder considerar los diferentes tipos de gráfico y niveles semióticos, y lograr una mejor descripción del trabajo que se sugiere sobre los gráficos en libros de texto. Además, al elaborar el cuestionario, hemos considerado los niveles de lectura de Curcio y colaboradores, separando en aquellas actividades en la que es necesaria la lectura de tipo literal, la que conlleva el desarrollo de actividades de cálculo y en las que debe hacer una predicción o análisis crítico.

La actividad se clasifica como *construir* cuando se les da a los estudiantes un listado pequeño de datos o una tabla de frecuencias y se les pide elaborar el gráfico. En los ítems relacionados con esta categoría se dará una plantilla cuadrículada, para ayudar en la construcción, aunque no la escala, para ver si cometen algunos de los errores descritos por Arteaga (2011) en su elaboración.

La actividad de *traducir* consistirá en pasar de un gráfico a una tabla de datos o frecuencias, para analizar si deduce del gráfico todos los elementos de la tabla, y si diferencian valores de la variable y frecuencia.

La actividad de *elegir un gráfico*, está asociada a selección de un gráfico entre varios dados, de acuerdo a sus ventajas o de según el tipo de datos con que se trabaja. Otra posibilidad es decidir qué gráfico corresponde con una cierta distribución dada en forma de listado o de tabla de frecuencias. Estas actividades la hemos considerado como dos diferentes en el análisis de los libros de texto, pero acá como una sola categoría para no alargar el cuestionario. Además, piden lectura de nivel 4, porque supone

conocimiento del contexto y no sólo del gráfico.

4.4. ELABORACIÓN DE UN BANCO INICIAL DE ÍTEMS

Una vez que decidimos el número de ítems y la estructura que tendría el cuestionario, se comenzó a recopilar posibles actividades que podrían utilizarse. León y Montero (2002) describen el banco de ítems como un conjunto de tareas coleccionadas para una finalidad determinada, en general, producir una respuesta que permita inferir acerca de algún constructo.

Para formar un banco de ítems útiles en la construcción del cuestionario se revisaron las investigaciones analizadas en el Capítulo 2 y se seleccionaron los ítems utilizados en las mismas, junto con información sobre el tipo de estudiantes que tomó parte en su evaluación. Cuando los ítems habían sido usados con estudiantes de edades similares a los nuestros o eran suficientemente sencillos, se consideraron para el banco de ítems. Se optó por emplear ítems de respuesta abierta, que permitirán además de acceder a la solución final y al nivel de lectura alcanzado, reconocer los posibles errores de los estudiantes.

Además, se completó esta colección, con otros ítems tomados de los libros de texto analizados en el Capítulo 3, de los cursos anteriores a aquellos en que se pasó el cuestionario. Para elegir todos estos ítems seguimos los criterios de calidad que sugieren Wang y Osterlind (2013):

- Congruencia entre cada ítem y el objetivo del cuestionario, que es de vital importancia para lograr la validez del instrumento. Este criterio se garantiza mediante el análisis a priori de cada ítem (Sección 4.5.4) y el juicio de expertos que han valorado dicha congruencia (Sección 4.5).
- Reducir al máximo la contribución de cada ítem al error de la medida de puntuación en el test, tratando de no usar ítems de excesiva dificultad o facilidad. Se comprobará el resultado global mediante el estudio de la fiabilidad del cuestionario final en el Capítulo 5.
- Consistencia entre los fines del cuestionario y el formato de los ítems.
- La redacción del ítem debe ser lo suficientemente clara y las instrucciones para completarlo fácil de seguir, pues en esta administración el investigador no tiene tanta interacción con el estudiante.

4.4.1. PROCESO DE SELECCIÓN Y DEPURACIÓN

Cada ítem identificado en el punto anterior se analizó con detalle para determinar los contenidos evaluados, comparándolos con las tablas de especificaciones del contenido (Tablas 4.3.2.1 y 4.3.2.2). Si la actividad se podía utilizar para completar la combinación de variables de una de las celdas de cada tabla se seleccionó como uno de los posibles ítems. Por ejemplo, si se trataba de un diagrama de barras de nivel de complejidad semiótica 2 (representación de un listado de datos, sin resumir su distribución) y se proponía una actividad de construcción del gráfico requiriendo sólo el nivel de lectura 1, se seleccionó como posible ítem 1. También, se incluyeron actividades en que difieren de algunos de estos criterios, ya que con unas adaptaciones se logra el ítem con las condiciones requeridas.

En la Figura 4.4.1.1 mostramos de uno de los ítems seleccionados como potencial. En esta actividad se propone la construcción de un gráfico de barras. El contexto es la distribución de frecuencias de las medallas que obtuvo la delegación de Rusia en las olimpiadas de Londres 2012, por lo que tiene un nivel de complejidad semiótica 3. Para construir el gráfico debe realizar una lectura literal de la información disponible en la tabla, que se clasifica dentro de del nivel de lectura 1 (*leer los datos*). Este ítem podría utilizarse como posible para el ítem 1 si se adapta la complejidad semiótica de 3 a 2.

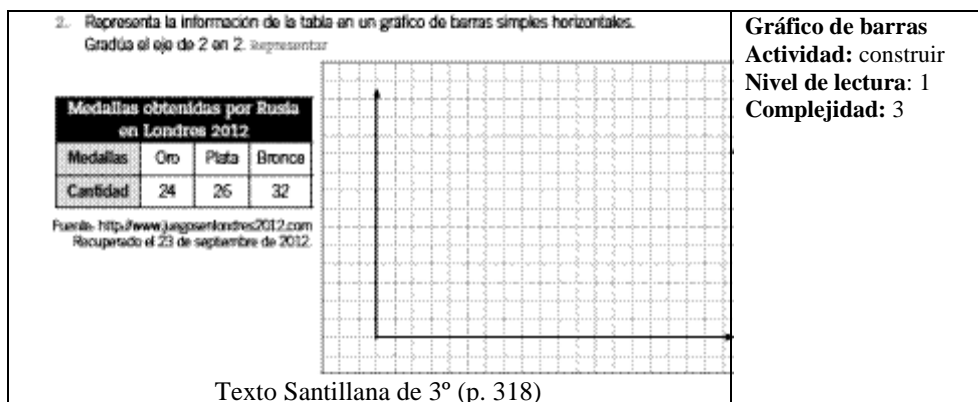


Figura 4.4.1.1. Ejemplo de ítem posible para el cuestionario

Con el mismo sistema se analizaron ítems potencialmente válidos para el resto del cuestionario, obteniendo el banco de ítems. La forma de completar el banco de ítems fue mediante un proceso iterativo que fue ampliando el conjunto de ítems, seleccionando con las tablas de especificaciones, completando el conjunto progresivamente, según encontráramos otras investigaciones u otros ejemplos en los libros de texto, cuyas tareas pudiesen utilizarse, directamente, o con pequeñas modificaciones de formato o redacción.

El banco de ítems inicial, obtenido con el proceso anterior, se modificó progresivamente, mejorando la redacción en los ítems, tratando de que los contextos fueran variados para motivar a los estudiantes. Se eligieron siempre conjuntos de datos sencillos y variables con pocas categorías diferentes para reducir en lo posible la dificultad. Se procuró que los gráficos utilizados fuesen claramente visibles al imprimir el cuestionario, volviendo a dibujarlo cuando fuese necesario, con ayuda de la hoja Excel. También se tuvieron en cuenta las siguientes recomendaciones (APA, AERA y NCME, 1999):

- Se separó con claridad la descripción inicial del contexto, el gráfico (en caso de estar representado) y la pregunta o instrucción a realizar.
- Se cuidó la precisión y claridad en el lenguaje.

4.5. SELECCIÓN DE ÍTEMS MEDIANTE JUICIO DE EXPERTOS

Finalizada la construcción del banco de ítems, se llevó a cabo un juicio de expertos (Losada y López-Feal, 2003). Dicho procedimiento trata de establecer el grado en que el conjunto de ítems del cuestionario representa adecuadamente un cierto dominio de conductas; en nuestra investigación la comprensión de los gráficos estadísticos por los estudiantes chilenos de Educación Primaria. Además, este

procedimiento permite proporcionar evidencias de validez de contenido del cuestionario (Martínez-Arias, 1995). Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) definen la consulta o juicio de expertos como:

Una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones (p. 29).

La muestra de expertos se utiliza con frecuencia en las investigaciones, ya que contribuyen al diseño del instrumento (Hernández et al., 2010). En nuestro caso, se ha tratado de valorar la adecuación de un conjunto de ítems respecto a las especificaciones del contenido fijadas en las Tablas 4.3.2.1 y 4.3.2.2 (Millman y Greene, 1989). Además, se pretendía recoger sugerencias de mejora de los ítems. Para cada una de las combinaciones de variables fijadas para los ítems 1 a 11, se seleccionaron tres posibles actividades del banco de ítems, para ser sometidas a juicio de expertos, de forma que nos ayudasen a determinar cuáles serían las más adecuadas para los estudiantes de 6° y 7° curso de Educación Primaria en Chile.

4.5.1. MUESTRA DE EXPERTOS

Millman y Greene (1989) indican que el *experto* lo define el propósito del instrumento y que el grupo elegido para ello ha de representar una diversidad relevante de capacidades y puntos de vista. En nuestro caso, los expertos consultados son investigadores, con publicaciones en revistas internacionales y continua participación en los eventos más importantes de la Educación Matemática y, en particular, de la Educación Estadística. A esto agregamos que el desarrollo de sus tesis doctorales se ha realizado en esta área y aportan continuamente resultados de nuevas investigaciones. Razón por la que los expertos considerados en este proceso son idóneos y aportarán una ayuda inestimable en la selección de los ítems.

Respecto al número de expertos existen diferentes visiones. Barraza (2007) sugiere seleccionar entre 5 y 10. En nuestro caso, se han considerado 10 expertos, teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Reconocimiento y prestigio dentro de una línea de investigación.
- Disposición para participar.
- Imparcialidad en el proceso.

Los expertos se identificaron preparando una lista de investigadores que hubiesen publicado en los últimos 10 años artículos en revistas o congresos internacionales de prestigio o tesis doctorales directamente relacionados con la enseñanza de la estadística. De entre ellos, se seleccionaron los que pudiesen leer la lengua castellana, cuestión fundamental, puesto que los ítems están realizados en dicha lengua. Todos ellos eran localizables por correo electrónico, puesto que sus direcciones eran accesibles en Internet, a través de sus departamentos o de listas de miembros de sociedades internacionales.

En la Tabla 4.5.1.1 se resume perfil académico de cada uno de los investigadores que formaron parte de la muestra de expertos consultados, destacando de ellos su sólida formación académica y la trayectoria investigadora. Así en la muestra contamos con especialistas de Argentina, Chile, Colombia, España y México, doctores o con título de

máster. Todos ellos especialistas en Educación Estadística, y con formación y docencia variada, en diversos niveles educativos.

Tabla 4.5.1.1. *Expertos participantes en la valoración del contenido*

Nº	Formación y Experiencia
1	Licenciada en Matemáticas en la especialidad de Estadística e Investigación Operativa. Profesora titular en el área de Didáctica de la Matemática. Profesora de Matemática y Didáctica de la Matemática. Amplia trayectoria investigadora en Educación Estadística. España.
2	Profesora de Matemática. Doctora en Pedagogía. Tesis desarrollada en el ámbito de la Educación Estadística. Desarrolla docencia en carreras de grado y posgrado. Argentina.
3	Licenciada en Matemáticas. Licenciada en Ciencias y Técnicas Estadísticas. Máster en Estadística Aplicada. Máster en Didáctica de la Matemática. Doctora en Ciencias de la Educación. Tesis desarrollada en el ámbito de la Educación Estadística. Trabaja en formación de profesores de Infantil y Primaria. España
4	Licenciada en Estadística. Magister en Estadística. Máster en Didáctica de la Matemática. Doctora en Ciencias de la Educación. Tesis desarrollada en el ámbito de la Educación Estadística. Colombia.
5	Licenciada en Matemáticas. Magíster en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Doctora en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Profesora titular en el área de Didáctica de la Matemática. Amplia trayectoria investigativa sobre temas en Didáctica de la Estadística y actitudes hacia la Estadística. España.
6	Profesor de Matemáticas. Magíster en Estadística. Doctor en Didáctica de la Matemática. Tesis desarrollada en el ámbito de la Educación Estadística. Coordinador programa de Magister en Didáctica de la Matemática. Chile.
7	Profesor de Primaria, con especialización en Matemática. Magíster en Ciencias con Mención en Didáctica de la Matemática. Máster en Didáctica de la Matemática. Doctor en Ciencias de la Educación. Tesis desarrollada en el ámbito de la Educación Estadística. Trabaja en formación de profesores en Educación Primaria en la especialidad de Matemática. Chile.
8	Licenciado en Matemáticas. Maestro en Ciencias. Doctor en Ciencias. Investiga sobre la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y TIC en la Enseñanza de la Matemática. México.
9	Licenciado en Ciencias y Técnicas Estadísticas. Máster en Didáctica de la Matemática. Máster de Metodología de las Ciencias del Comportamiento y de la Salud. Doctor en Didáctica de Matemática. Trabaja en formación de profesores de Infantil y Primaria. España.
10	Doctor en Matemáticas. Catedrático de Didáctica de la Matemática. Investiga sobre Didáctica de la Estadística y la Probabilidad. España.

4.5.2. MÉTODO Y CUESTIONARIO A EXPERTOS

Una vez seleccionado el conjunto inicial de ítems, se preparó un cuestionario para ser completado por los expertos que colaboraron con nosotros, con un objetivo doble: a) seleccionar los ítems finales del cuestionario, que sería uno de cada tres preparados para la misma combinación de variables (en total 11 ítems de 33); y b) aportar evidencias de validez de contenido (Martínez-Arias, 1995; Messick, 1998). Para evitar contaminaciones por persuasión, o prestigio personal, nuestros ítems fueron valorados por los expertos con el esquema conocido como “panel ciego”; de esta forma cada experto no conocía la identidad de los otros y nunca tuvieron un encuentro cara a cara (Wang y Osterlind, 2013).

El cuestionario que se preparó para los expertos contenía en la primera página una carta con la presentación del objetivo del cuestionario, y unas notas sobre la importancia de su colaboración, así como el agradecimiento por la misma. Se proporcionó instrucciones breves sobre la forma de completarlo, así como las preguntas que se debían responder.

En la segunda página presentan las Tablas 4.3.1.1 y 4.3.1.2 en las que se

especifican las variables que se consideraron en el diseño del cuestionario y el criterio seguido para seleccionar los 11 ítems posibles. Estas tablas podían permitir a los expertos comparar cada ítem propuesto con sus especificaciones en las mismas, para ayudarle en su selección de los ítems. Además, en esta página se indica exactamente qué se requiere de la colaboración (Figura 4.5.2.1):

- Valorar cada uno de los enunciados propuestos, para cada contenido, según su opinión.
- Sugerir mejoras en la redacción de los ítems.

Cuestionario para expertos

Las tablas siguientes muestran el diseño previsto del cuestionario, donde variamos a la vez el tipo de gráfico y tipo de datos representados (se daba copia de las tablas 4.3.2.1 y 4.3.2.2). Los once ítems resultantes los hemos clasificado para tener en cuenta distintas actividades y niveles de lectura del gráfico. Queremos pedir su ayuda para elegir y mejorar los 11 ítems que formarán el cuestionario. Cada uno de estos once ítems, corresponde a un contenido, fijado en las dos tablas anteriores. A continuación, presentamos los contenidos del cuestionario. En cada contenido presentamos tres posibles ítems para seleccionar uno. Requerimos su colaboración para:

- Valorar cada uno de los enunciados propuestos, para cada contenido, según su opinión.
- Sugerir mejoras en la redacción de los ítems.

Ítem 1: Construir un diagrama de barras (representar una lista de datos)

Ítem 1.1.
La tabla indica el número de comidas servidas, durante la semana, en la escuela de Pablo. Utiliza la información de la tabla para completar el siguiente gráfico.

Día de la semana	Número de almuerzos servidos
Lunes	100
Martes	75
Miércoles	50
Jueves	100
Viernes	125

Ítem 1.2.
La tabla muestra la cantidad de residuos en un pueblo cada día de una semana. Construye un gráfico de barras con la información de la tabla

Día	Cantidad de residuos (kg)
Lunes	150
Martes	135
Miércoles	148
Jueves	160
Viernes	155
TOTAL	748

Ítem 1.3.
En la siguiente tabla mostramos la altura en metros de algunas especies de árboles. Construye un diagrama de barras para representar estos datos.

Especie	Altura
Álamo	12
Higuera	6
Castaño	25
Araucaria	30
Palmera	20
Roble	12

Marque para cada ítem una puntuación:	1: Nada	2	3	4	5: Mucho
El ítem 1.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 1.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 1.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

Figura 4.5.2.1. Cuestionario para expertos

En cada una de las páginas siguientes, se presentan tres posibles ítems que

corresponde a una combinación de variables (actividad, tipo de gráfico, nivel de lectura y nivel semiótico). También se incluye una tabla en que los expertos deben valorar, en una escala de 1 a 5, estilo Likert, la pertinencia de cada actividad para el fin pretendido, en la que los valores extremos toman el siguiente sentido:

1: Nada relevante para el propósito del ítem.

5: Muy relevante para el propósito del ítem.

La decisión de utilizar una escala de cinco puntos se tomó siguiendo las recomendaciones de Osterlind (1989) que sugiere ampliar la valoración algo más que solamente indicando acuerdo o desacuerdo. También recomienda no más de cinco puntos en la escala pues una más graduada tendría el inconveniente de la dispersión.

Al final de la tabla anterior se añade un espacio en el que pueden realizar comentarios para la mejora de los ítems (Figura 4.5.2.1).

4.5.3. RESULTADOS DEL JUICIO DE EXPERTOS

Tabla 4.5.3.1. *Frecuencia de puntuación (1-5) por los expertos a cada ítem*

Ítem	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
1.1		4	1	3	2	3,3	3,5	1,25
1.2		1	3	2	4	3,9	4	1,10
1.3		1	2	2	5	4,1	4,5	1,10
2.1		1	3	4	2	3,7	4	0,95
2.2	1	1	2	2	4	3,7	4	1,42
2.3	1	1	1	3	4	3,8	4	1,40
3.1		1	2	3	4	4	4	1,05
3.2			2	3	5	4,3	4,5	0,82
3.3		2	2	2	4	3,8	4	1,23
4.1				1	9	4,9	5	0,32
4.2		1	2	6	1	3,7	4	0,82
4.3			4	4	2	3,8	4	0,79
5.1			1	4	4	4,3	4	0,71
5.2				3	6	4,7	5	0,50
5.3	1	3	1	2	2	3,1	3	1,45
6.1	3			5	2	3,3	4	1,64
6.2		1	1	2	6	4,3	5	1,06
6.3		1	2	4	3	3,9	4	0,99
7.1	2	1	2	3	2	3,2	3,5	1,48
7.2	2	2	1	2	3	3,2	3,5	1,62
7.3	2	2	2	2	2	3	3	1,49
8.1			1	5	4	4,3	4	0,67
8.2	1		1	4	4	4	4	1,25
8.3	3	1	1	1	4	3,2	3,5	1,81
9.1		1	3	2	4	3,9	4	1,10
9.2			1	7	2	4,1	4	0,57
9.3		1	1	3	5	4,2	4,5	1,03
10.1		2		6	2	3,8	4	1,03
10.2		1	1	5	3	4	4	0,94
10.3		1	2		7	4,3	5	1,16
11.1	1	4	1	3	1	2,9	2,5	1,29
11.2			4	1	5	4,1	4,5	0,99
11.3	2		3	1	4	3,5	3,5	1,58

En esta sección describimos los resultados de las puntuaciones asignadas por los

expertos a cada ítem que se les proporcionó en el cuestionario, para que a partir del análisis de estos resultados seleccionar los que formarán finalmente parte del cuestionario piloto. Para ello, recogidos los cuestionarios, y en cada uno de los 33 ítems iniciales se calculó la media, mediana y desviación típica de las puntuaciones otorgadas por los 10 expertos.

Estos resultados se presentan en la Tabla 4.5.3.1, junto con la frecuencia de expertos que han concedido cada una de las valoraciones 1 a 5. Observamos que los ítems han sido valorados en forma diferenciada, predominando las puntuaciones altas. Salvo pocos casos la puntuación mediana es 4 o superior y la media se acerca o supera el 4. En todo caso para cada grupo de tres ítems correspondiendo al mismo contenido siempre encontramos al menos uno con estas condiciones.

En consecuencia, nuestro análisis consistió en estudiar en cada grupo el ítem mejor evaluado y aquellos que los expertos consideran menos pertinentes, por medio de la puntuación asignada, junto con los comentarios de mejora. En el caso de los ítems 2 y 7 las preguntas propuestas no alcanzan la valoración media 4, en dichos casos se ha puesto especial énfasis en lo que señalan los expertos para mejorar las preguntas.

Ítem 1. Construir un diagrama de barras a partir de una lista de datos

Los tres ítems que corresponden a este contenido (nivel de complejidad 2, nivel de lectura 1) se presentaron en la Figura 4.5.2.1. Tal como se indica en la Tabla 4.5.3.2, fueron evaluados de forma desigual, por los diferentes criterios utilizados por los expertos en su valoración, que se explicitan más adelante. El mejor valorado fue el 1.3, donde se pide directamente construir completamente el gráfico. Al respecto, los jueces indicaron su preferencia por este último, puesto que no se daban construidos los ejes o escalas como los otros. Además, pensaban que daría mejor resultado en la evaluación, permitiendo estudiar posibles errores en la construcción de las escalas.

Tabla 4.5.3.2. Resultados en la valoración de expertos en el ítem 1

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 1.1		4	1	3	2	3,3	3,5	1,25
Ítem 1.2		1	3	2	4	3,9	4	1,10
Ítem 1.3		1	2	2	5	4,1	4,5	1,10

Puesto que la desviación típica es pequeña, lo que indicaba cierta homogeneidad de criterio, se eligió este ítem (Figura 4.5.2.1).

Algunos comentarios realizados por los expertos son:

Si el objetivo es construir un gráfico, en 1.1 y 1.2 la construcción es parcial, puesto que se le dan algunos elementos ya construidos (Experto 10).

Realmente el más completo para saber si sabe construir un diagrama de rectángulos es el 1.3, pero quizás poco apropiado para comenzar un cuestionario (Experto 1).

De acuerdo con la valoración y comentarios de los expertos el ítem se conserva, tal como se muestra en la Figura 4.5.4.1, y se evaluará la ubicación que tendrá dentro del instrumento final, ya que creemos necesario hacer más de una forma de cuestionario, para evitar que los resultados se alejen de realidad si los estudiantes se cansan antes de finalizar el cuestionario.

Ítem 2. Extrapolar información de un diagrama de barras que representa una lista de datos

En el segundo ítem que hemos considerado para este cuestionario se pide la predicción de un dato que no está en el gráfico. Se trata de un diagrama de barras, que representa una lista de datos (nivel de complejidad 2), pero requiere un nivel de lectura 3. La puntuación asignada por los expertos a cada uno de los tres ítems presentados, que se incluyen en la Figura 4.5.3.1 y puntuaciones que se resumen la Tabla 4.5.3.3.

Tabla 4.5.3.3. Resultados en la valoración de expertos en el ítem 2

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 2.1		1	3	4	2	3,7	4	0,95
Ítem 2.2	1	1	2	2	4	3,7	4	1,42
Ítem 2.3	1	1	1	3	4	3,8	4	1,40

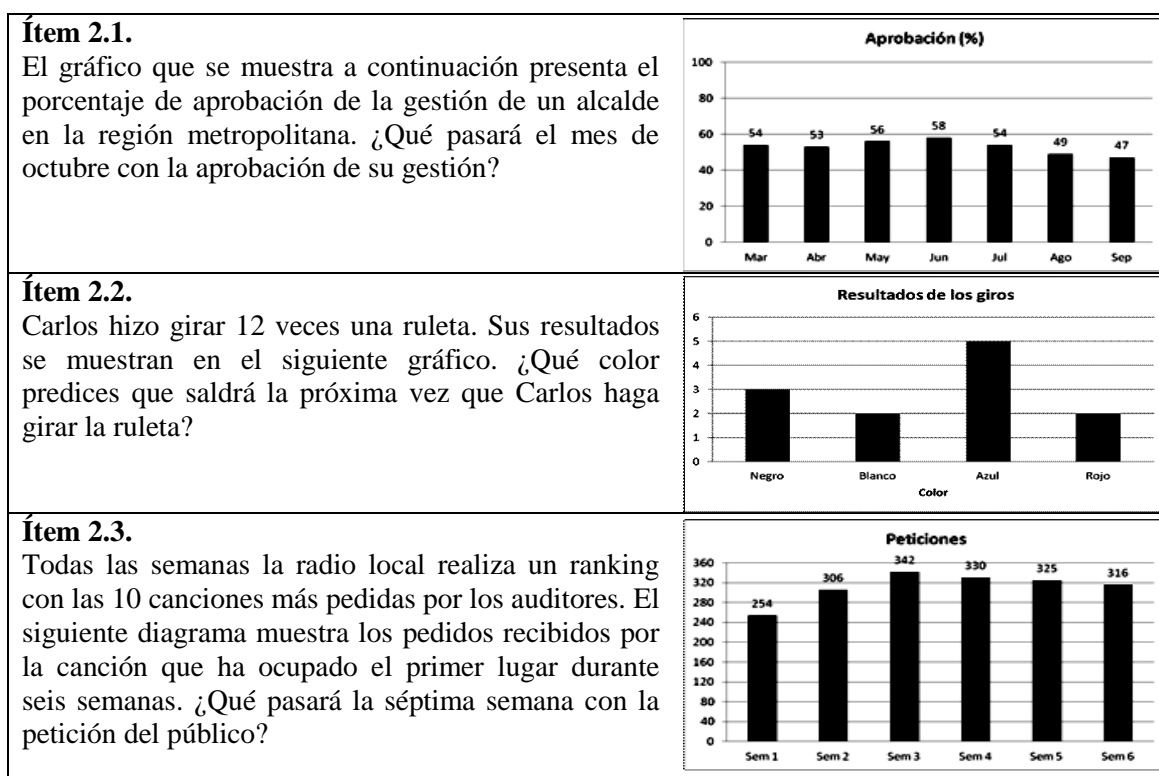


Figura 4.5.3.1. Versión ítem 2 para juicio de expertos

Al igual que en el caso anterior, los ítems fueron evaluados de forma desigual, debido a los criterios usados por los expertos, aunque la mayoría le da una puntuación 4 o 5 y sus medianas estén en los cuatro puntos. Estas discrepancias se explican en las opiniones que han dado los expertos, que nos han servido también para solventar las posibles dificultades previstas en el ítem y entre las que se destacan las siguientes:

En cuanto al último ítem, considero que la codificación respecto al contexto es dificultosa de entender: me planteo si se refiere a la misma canción o diferente canción; además, encuentro poco interesante la pregunta que se hace al alumno respecto a la situación que se plantea (Experto 3)

Encuentro el redactado del ítem 2.3 algo confuso, sustituiría canciones más pedidas por solicitadas y auditores por oyentes (Experto 5).

El ítem 3 es el que más se presta a una predicción, debido al contexto. La popularidad de los productos, como las canciones, suelen mantenerse constantes por un tiempo y luego disminuir, es

muy difícil que repunten. Las películas suelen repuntar cuando se dan los premios Oscar y obtienen algunas distinciones; pero en el caso de las canciones no ocurre así. Parece que lo más probable es que disminuya la popularidad de la canción y esperar alrededor de 300 llamadas (E8).

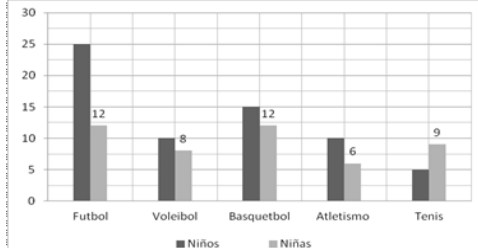
En consideración a los indicado por los expertos, hemos sustituido las palabras que han indicado (auditores por oyentes y pedidos por solicitudes) y se ha cambiado la redacción del enunciado, así como los datos del gráfico para que se vea con claridad la tendencia de los datos. También se han rotulado los ejes para no inducir a error a los estudiantes. En la Figura 4.5.4.3 se muestra la versión piloto de este ítem.

Ítem 3. Traducir de un gráfico de barras a una tabla

En el tercer ítem se representan dos distribuciones en un diagrama de barras adosado (nivel semiótico 4) y se pide traducir los datos a una tabla. Sólo se requiere nivel de lectura 1 (Figura 4.5.3.2).

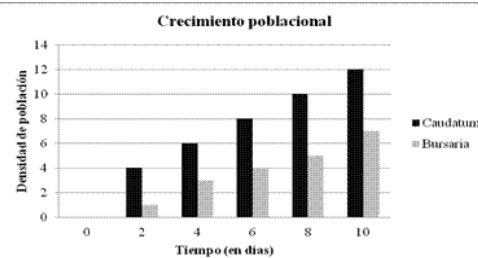
Ítem 3.1.
El gráfico muestra el número de alumnos matriculados en cada deporte practicado en una escuela. Cada estudiante sólo practica un deporte.

Representa estos datos en una tabla.



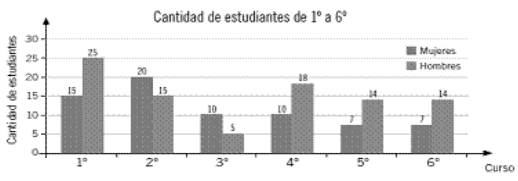
Ítem 3.2.
El gráfico muestra el crecimiento poblacional de dos especies de organismos, *Paramecium caudatum* y *Paramecium bursaria*, cuando comparten el mismo espacio.

Representa en una tabla la información que aparece en el gráfico estadístico.



Ítem 3.3.
En el gráfico de barras se muestra la cantidad de mujeres y hombres que hay en cada curso de una escuela. Observa el siguiente gráfico y responde.

Completa la tabla con la información del gráfico.



		Cantidad de estudiantes					
Curso		1º	2º	3º	4º	5º	6º
Género	Mujeres						
	Hombres						

Figura 4.5.3.2. Versión ítem 3 para juicio de expertos

Como vemos en la Tabla 4.5.3.4, los expertos han valorado mejor el ítem 3.2, que se relaciona con el crecimiento poblacional de dos tipos de bacterias y que alcanza una media de 4,5. De todos modos, los tres ítems han recibido una valoración alta con media y mediana 4 o superior. Algunas sugerencias de los expertos sobre este ítem nos llevaron a preferir uno de los otros dos:

En el enunciado del ítem 3.2., se debería aclarar cómo está expresado el crecimiento poblacional o

la densidad de población que se presenta en el eje vertical (Experto 2).

Pienso que el rótulo para este eje “Densidad de población” debería explicarse en el enunciado. Hay cierta inconsistencia entre la mención de “crecimiento poblacional” en el enunciado y “densidad de población” en la gráfica (Experto 8).

Tabla 4.5.3.4. Resultados en la valoración de expertos en el ítem 3

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 3.1		1	2	3	4	4	4	1,05
Ítem 3.2			2	3	5	4,3	4,5	0,82
Ítem 3.3		2	2	2	4	3,8	4	1,23

El ítem 3.1 es el segundo mejor puntuado, con la misma mediana que el 3.3, pero con una mejor desviación típica (menor). Además, para la lectura de las frecuencias asociadas a las niñas se basta con leer el rótulo en la parte superior de las barras y en las que están asociadas a los niños se debe hacer la relación entre la altura de las barras y el valor indicado en el eje Y. Esta decisión se apoya por algunos comentarios de los expertos:

Si los investigadores lo que quieren es que se vea esta dificultad, entonces mejor los ítems 3.1 o 3.2. (Experto 1).

En relación al ítem 3.3., considero que el enunciado realiza un planteo tan adecuado como en el ítem 3.1, pero le quitaría la tabla, justamente para darle la posibilidad al alumno de decidir cómo construir la tabla y para poder evaluar el criterio utilizado para realizarla (Experto 2).

De acuerdo con las consideraciones nos quedamos con el ítem 3.1, que compara la cantidad de estudiantes que se han matriculado para practicar un determinado deporte en la escuela (niño y niña). Además, se han realizado algunas modificaciones al gráfico, como agregar títulos (general y a los ejes), para facilitar la lectura de la información por parte de los estudiantes a quienes se le aplicará en instrumento. La versión del ítem seleccionado para la prueba piloto se muestra en la Figura 4.5.4.4.

Ítem 4. Traducir un pictograma a una tabla

La idea del cuarto ítem es traducir los datos de un pictograma a una tabla (complejidad semiótica 2). Dado que los iconos representan un valor diferente de la unidad, se requieren cálculos con los datos del gráfico y, por consiguiente, un nivel de lectura 2. Con esta idea se proponen tres ítems, con diferentes contextos: el primero relacionado con las horas de consumo eléctrico en un centro deportivo; el segundo sobre la cantidad de entradas vendidas en un teatro; y tercero, la cantidad de goles marcados en un campeonato deportivo (Figura 4.5.3.3).

En la Tabla 4.5.3.5 mostramos un resumen de la valoración de los expertos a estos tres ítems, siendo el mejor valorado el 4.1, que obtuvo una media de 4,9 y una baja desviación típica (0,32), y que es el seleccionado para el pilotaje.

Tabla 4.5.3.5. Resultados en la valoración de expertos en el ítem 4

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 4.1				1	9	4,9	5	0,32
Ítem 4.2		1	2	6	1	3,7	4	0,82
Ítem 4.3			4	4	2	3,8	4	0,79

Las puntuaciones asignadas por los expertos se complementan con algunos comentarios como:

Creo que sería mejor en cada ítem sustituir “tabla” por “tabla de frecuencias”. El gráfico 4.1 está más completo (Experto 10).

Sustituiría gráfico por pictograma, es más concreto (Experto 5).

Aunque cualquiera de los tres funciona para pasar la información a una tabla de datos, pienso que las gráficas y situaciones tienen diferente calidad. El problema con el ítem 4.2 es que el número de asistentes a un teatro no necesariamente es múltiplo de 15 y no es fácil dibujar una quinceava parte de rectángulo que representa a 15 espectadores. ¿Cómo se representa la asistencia cuando hay 318 espectadores? La gráfica del ítem 4.2 [4.3] me parece artificial; nunca he visto que se use algo parecido en los medios para indicar o comparar el número de goles de los jugadores con algo semejante. Si se conserva, sugeriría que se incluyeran medios balones para indicar la manera de representar un gol, pues los jugadores no meten goles de dos en dos (Experto 8).

<p>Ítem 4.1. Representa en una tabla la información mostrada en el siguiente gráfico.</p>	<p style="text-align: center;">Centro deportivo Número de horas en que las luces están prendidas por semana</p> <table border="1"> <tr> <td>Sala de ejercicios</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Casillero</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Piscina</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cancha de tenis</td> <td></td> </tr> </table> <p>Cada = 10 horas. Cada = 5 horas.</p>	Sala de ejercicios		Casillero		Piscina		Cancha de tenis	
Sala de ejercicios									
Casillero									
Piscina									
Cancha de tenis									
<p>Ítem 4.2. Representa en una tabla la información mostrada en el siguiente gráfico.</p>	<p style="text-align: center;">Espectadores por función de teatro al día</p> <table border="1"> <tr> <td>Lunes</td> <td>Miércoles</td> <td>Viernes</td> <td>Domingo</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p> = 15</p>	Lunes	Miércoles	Viernes	Domingo				
Lunes	Miércoles	Viernes	Domingo						
<p>Ítem 4.3. Representar en una tabla la información mostrada en el siguiente gráfico.</p>	<p style="text-align: center;">Goleadores del campeonato interescolar</p> <table border="1"> <tr> <td>Manuel</td> <td>César</td> <td>Rubén</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p> = 2</p>	Manuel	César	Rubén					
Manuel	César	Rubén							

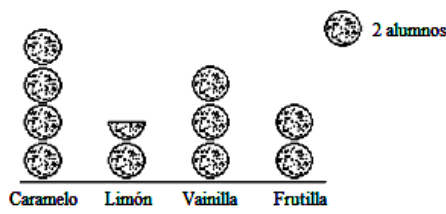
Figura 4.5.3.3. Versión ítem 4 para juicio de expertos

Siguiendo las directrices de los expertos, hemos realizado leves cambios al enunciado para hacerlo más simple; por ejemplo, cambiamos representar por completar. Se mantiene el término gráfico, pues nos parece claro y la palabra pictograma puede inducir a error al estudiante si no lo conoce con ese nombre. También se cambia la imagen del pictograma para que al imprimirse y fotocopiarse se pueda ver con claridad, y se agrega una tabla con una estructura definida y pidiendo el total, para que sea más fácil el desarrollo de la actividad (Figura 4.5.4.5).

Ítem 5. Realizar una lectura crítica de una distribución representada en un pictograma

En el quinto ítem se trabaja la lectura de la información a partir de un pictograma; más específicamente, la lectura crítica de dos afirmaciones o conclusiones que se apoyan en la información presentada en el gráfico (nivel de lectura 4 y nivel semiótico 3). Para ello, se proponen los ítems de la Figura 4.5.3.4.


Ítem 5.1.
 En el siguiente pictograma se muestra el resultado de una encuesta en un curso, sobre el sabor de galletas que prefieren:
 Sara realiza el siguiente comentario: “Hay cuatro niños que prefieren las galletas de caramelos”. ¿Sara tiene razón? ¿Por qué?
 Escribe una frase verdadera y otra falsa sobre la información entregada en el gráfico.



Ítem 5.2.
 Observa el pictograma y responde.
 La bibliotecaria del colegio hizo un inventario de los libros que hay en la biblioteca.
 Explica si son verdaderas las siguientes afirmaciones:

- “Sólo hay dos libros de ciencia ficción”
- “Hay 60 libros infantiles”

Observa el gráfico y escribe una frase verdadera y otra falsa sobre él.



Ítem 5.3.
 El siguiente pictograma muestra los resultados de una encuesta que tenía por objetivo saber la preferencia en sabor de jugo de los niños de un curso.
 Si la pregunta usada para obtener estos datos fue: ¿Qué jugo, de los que venden en el kiosco, te gustaría beber ahora?
 ¿Crees que la pregunta es la adecuada para el objetivo de la encuesta?

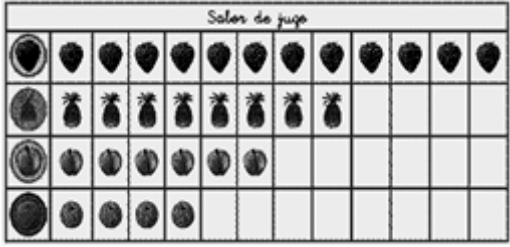


Figura 4.5.3.4. Versión ítem 5 para juicio de expertos

La valoración de los expertos indica que es más recomendable aplicar el ítem 5.2, que obtuvo una puntuación media de 4,7 y una desviación típica de 0,5. Este ítem presente diferencias importantes de valoración con los otros, que presentan menor puntuación media y mayor desviación típica, tal como se muestra en la Tabla 4.5.3.6.

Tabla 4.5.3.6. Resultados en la valoración de expertos en el ítem 5

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 5.1			1	4	4	4,3	4	0,71
Ítem 5.2				3	6	4,7	5	0,50
Ítem 5.3	1	3	1	2	2	3,1	3	1,45

El único comentario que realizó un experto, fue la sugerencia de cambio en el enunciado que se realizó sobre el mismo:

~~Explica si son verdaderas las siguientes afirmaciones:~~ Di si son verdaderas las siguientes afirmaciones, explicando por qué (Experto 10).

Tras el análisis de las valoraciones de los expertos, se decidió suprimir la última parte del ítem que decía “observa el gráfico y escribe una frase verdadera y otra falsa sobre él”, para que los estudiantes tuviesen tiempo para responder todos los ítems que iban a formar parte del cuestionario definitivo. Tras este cambio y la sugerencia realizada por el experto 10, la versión final para la prueba piloto de este ítem se muestra en la Figura 4.5.4.6.

Ítem 6. Lectura de una lista de datos en un gráfico de líneas

En este ítem se trabaja con un diagrama de líneas para representar una lista de datos, y se requiere leer información literal del mismo; corresponde al nivel de lectura 1 y nivel semiótico 2. En la Figura 4.5.3.5 vemos los tres ítems que han valorado los expertos.

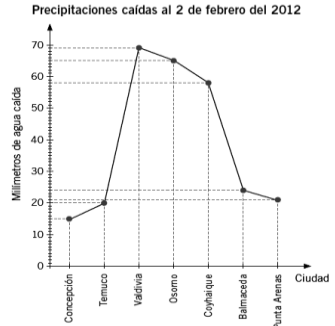
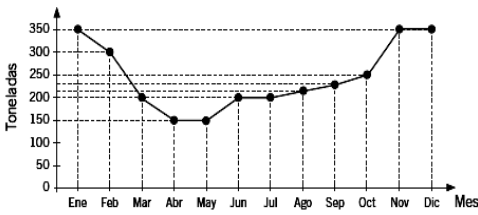
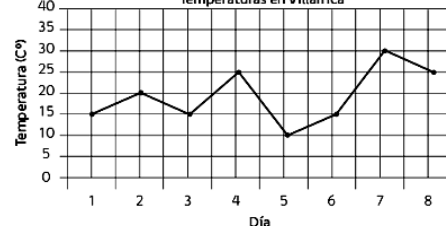
<p>Ítem 6.1. Observa el siguiente gráfico de línea y luego responde. ¿Cuál es el título del gráfico? ¿Cuáles son las variables representadas? ¿En qué ciudad cayeron 21 milímetros de agua? ¿Cuántos milímetros de agua cayeron en Osorno?</p>	 <table border="1"> <caption>Precipitaciones caídas al 2 de febrero del 2012</caption> <thead> <tr> <th>Ciudad</th> <th>Milímetros de agua caída</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Concepción</td><td>15</td></tr> <tr><td>Temuco</td><td>20</td></tr> <tr><td>Valdivia</td><td>68</td></tr> <tr><td>Osorno</td><td>65</td></tr> <tr><td>Coyhaique</td><td>58</td></tr> <tr><td>Balmaceda</td><td>25</td></tr> <tr><td>Punta Arenas</td><td>22</td></tr> </tbody> </table>	Ciudad	Milímetros de agua caída	Concepción	15	Temuco	20	Valdivia	68	Osorno	65	Coyhaique	58	Balmaceda	25	Punta Arenas	22										
Ciudad	Milímetros de agua caída																										
Concepción	15																										
Temuco	20																										
Valdivia	68																										
Osorno	65																										
Coyhaique	58																										
Balmaceda	25																										
Punta Arenas	22																										
<p>Ítem 6.2. Observa el siguiente gráfico de línea y luego responde. ¿Cuál es el título del gráfico? ¿Cuáles son las variables representadas? ¿Cuál fue la producción del mes de junio? ¿En qué mes(es) la producción fue de 300 toneladas de cemento?</p>	 <table border="1"> <caption>Producción de cemento durante el año 2010</caption> <thead> <tr> <th>Mes</th> <th>Toneladas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Ene</td><td>350</td></tr> <tr><td>Feb</td><td>300</td></tr> <tr><td>Mar</td><td>200</td></tr> <tr><td>Abr</td><td>150</td></tr> <tr><td>May</td><td>150</td></tr> <tr><td>Jun</td><td>200</td></tr> <tr><td>Jul</td><td>200</td></tr> <tr><td>Ago</td><td>220</td></tr> <tr><td>Sep</td><td>230</td></tr> <tr><td>Oct</td><td>250</td></tr> <tr><td>Nov</td><td>350</td></tr> <tr><td>Dic</td><td>350</td></tr> </tbody> </table>	Mes	Toneladas	Ene	350	Feb	300	Mar	200	Abr	150	May	150	Jun	200	Jul	200	Ago	220	Sep	230	Oct	250	Nov	350	Dic	350
Mes	Toneladas																										
Ene	350																										
Feb	300																										
Mar	200																										
Abr	150																										
May	150																										
Jun	200																										
Jul	200																										
Ago	220																										
Sep	230																										
Oct	250																										
Nov	350																										
Dic	350																										
<p>Ítem 6.3. El siguiente gráfico muestra las temperaturas registradas en la ciudad de Villarrica cuando Ana estuvo de vacaciones. ¿Qué situación representa el gráfico? ¿Cuáles son las variables representadas? ¿Qué temperatura se produjo el día 5? ¿Qué día(s) se alcanzó una temperatura de 20°?</p>	 <table border="1"> <caption>Temperaturas en Villarrica</caption> <thead> <tr> <th>Día</th> <th>Temperatura (°C)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>15</td></tr> <tr><td>2</td><td>20</td></tr> <tr><td>3</td><td>15</td></tr> <tr><td>4</td><td>25</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td></tr> <tr><td>6</td><td>15</td></tr> <tr><td>7</td><td>30</td></tr> <tr><td>8</td><td>25</td></tr> </tbody> </table>	Día	Temperatura (°C)	1	15	2	20	3	15	4	25	5	10	6	15	7	30	8	25								
Día	Temperatura (°C)																										
1	15																										
2	20																										
3	15																										
4	25																										
5	10																										
6	15																										
7	30																										
8	25																										

Figura 4.5.3.5. Versión ítem 6 para juicio de expertos

La mayor puntuación se ha concedido al ítem 6.2, tal como se muestra en la Tabla 4.5.3.7. Los ítems que ocupan el segundo y tercer lugar en la valoración tienen una diferencia de 4 y 10 décimas, respectivamente.

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 6.1	3			5	2	3,3	4	1,64
Ítem 6.2		1	1	2	6	4,3	5	1,06
Ítem 6.3		1	2	4	3	3,9	4	0,99

Dentro de los comentarios realizados por los expertos destacamos los siguientes; el primero de ellos no se tuvo en cuenta, pues la finalidad del ítem era únicamente evaluar la lectura literal de un gráfico de líneas:

Convendría, en algún gráfico, preguntar por la moda, máximo y mínimo de la distribución, así como pedir al alumno que realice alguna suma o resta entre datos (Experto 3).

Los ítems 6.2 y 6.2 [6.3] me parecen igualmente adecuados. La primera pregunta del ítem 6.3 resulta interesante, pero parece que va más allá de lo que se busca evaluar a nivel general en el ítem 6 (Experto 4).

En el ítem 6.2, la variable es el tiempo y es más frecuente usar la línea, pero no tiene sentido una interpolación (por ejemplo, a la mitad de enero y febrero no hubo una producción, aproximada, de 325 toneladas de cemento); en realidad se está tomando el tiempo en forma discreta. Luego tampoco veo que el uso de las líneas sea muy significativo (Experto 8).

Sobre la sugerencia del experto 8, creemos que el diagrama de líneas es adecuado para el tipo de datos que se está trabajando y al nivel educativo de los estudiantes que serán objeto de estudio. De acuerdo con lo anterior, hemos decidido mantener el ítem 6.2, sólo numerando las preguntas para una mejor organización del instrumento, tal como se muestra en la Figura 4.5.4.7.

Ítem 7. Construir un gráfico de líneas formando previamente la distribución

La Figura 4.5.3.6 muestra las tres opciones que, inicialmente, pretendían trabajar la construcción de un gráfico de líneas. En esta tarea los datos se dan desordenados y uno a uno. El estudiante debe clasificarlos, calcular la frecuencia y formar la distribución de frecuencias. Por tanto, se pretende construya un gráfico de complejidad semiótica 3. Además, la formación de la distribución requiere operaciones de clasificación, suma de los datos y establecer una escala, implicando un nivel 2 de lectura.

<p>Ítem 7.1. En un curso se realiza una encuesta para saber el medio de transporte que usan para llegar a la escuela. Bus – bus – auto – a pie – metro – metro – a pie – a pie – bus – bicicleta – bicicleta – bus – a pie – a pie – a pie – bicicleta – bus – metro – a pie – metro – bus – metro. Realiza un gráfico de líneas con la información proporcionada.</p>
<p>Ítem 7.2. A continuación, se muestran los resultados de una encuesta con la pregunta: ¿cuántos hermanos tienes? 0, 1, 3, 2, 2, 3, 2, 4, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2 Realiza un gráfico de líneas con la información proporcionada.</p>
<p>Ítem 7.3. Leonardo juega a lanzar un dado obteniendo los siguientes resultados: 1 5 6 4 3 1 4 2 1 6 4 2 3 5 3 4 1 2 6 3 Representa los resultados obtenidos mediante un diagrama de líneas.</p>

Figura 4.5.3.6. Versión ítem 7 para juicio de expertos

Tabla 4.5.3.8. Resultados en la valoración de expertos en el ítem 7

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 7.1	2	1	2	3	2	3,2	3,5	1,48
Ítem 7.2	2	2	1	2	3	3,2	3,5	1,62
Ítem 7.3	2	2	2	2	2	3	3	1,49

La valoración de los expertos, tan como se muestra en la Tabla 4.5.3.8, no es muy alta y además bastante variable, lo que se refleja en las desviaciones típicas. También observamos una baja puntuación media, pues la más alta no supera el 3,3. Esta disparidad de criterios se debe a que algunos de los expertos consideran que los ítems propuestos no responden a algunas de las variables que se han considerado para definirlo. Sus comentarios, en este sentido, son los siguientes:

Ninguna de estas situaciones llevaría a la construcción de un gráfico de líneas. Considero que en el ítem 7.1 sería adecuado un gráfico de barras simple y en los otros dos, un gráfico de bastones o de puntos. Es por ello que considero que ninguno de los ítems es adecuado para el contenido que se pretende evaluar. Podría tal vez modificarse la consigna y preguntar si para los datos presentados sería adecuado realizar un gráfico de líneas (Experto 2).

El ítem 7.1 no procede al tratarse de variable cualitativa no ordinal. En los ítems 7.2 y 7.3 incluiría la siguiente pregunta: interpreta la situación que representa el gráfico. ¿Por qué no se propone graficar una variable estadística que se cuantifique en el tiempo? Este tipo de gráficos adquieren verdaderamente significado cuando el tiempo sirve de soporte a la distribución de la variable (Experto 3).

Sugiero utilizar otro contexto para valorar este contenido, teniendo en cuenta que: a) Los ítems 7.2 y 7.3 sugieren un uso inadecuado del gráfico de líneas, convirtiéndose en fuente de un conflicto potencial, como indica Arteaga (2011, p. 12): un gráfico de líneas usa puntos conectados por líneas para mostrar cómo cambia el valor de algo (a lo largo del tiempo o del valor de la variable). Por ello no tiene mucho sentido al representar la distribución de frecuencias de variables cuantitativas. El ítem 7.1 me causa conflicto, si bien el uso de gráficos de líneas con variables cualitativas se menciona en Arteaga (2011) a mí me parece inadecuado. Mi conocimiento de gráficos relaciona los de líneas únicamente con la representación de series de tiempo, donde el comportamiento de las líneas refleja las tendencias, estacionalidades o ciclos de la variable que se está midiendo en función del tiempo. La otra situación que asocio con líneas es la representación del polígono de frecuencias, que no se clasifica como gráfico de líneas ya que tiene unas características particulares, similar al caso del histograma (Experto 4).

Los tres ítems me parecen más apropiados para observar si los niños saben elaborar una distribución agrupando los datos, es decir, determinando las frecuencias. Pero lo más natural sería que hicieran un diagrama de barras. Si se pide que se haga una gráfica de barras en lugar de gráfica de línea, estos reactivos son apropiados para el punto 1 “construir un diagrama de barras”. Considero que los ítems de diagramas de línea se deben usar preferentemente en situaciones en que al menos la variable independiente sea continua, como tiempo, distancia, volumen, etc. Se usan con mayor frecuencia en series de tiempo (Experto 8).

Estas valoraciones se apoyan demasiado en consideraciones formales y no tienen en cuenta el hecho que los gráficos de líneas se usan en los libros de texto en contextos similares a los presentados en los ítems. La sugerencia del experto 2 no se consideró, pues cambiaría lo que queríamos evaluar (si el estudiante sabe construir el gráfico) y además es muy difícil para la edad del estudiante. Igualmente, podemos interpretar el resto de comentarios. En consecuencia, hemos decidido mantener los datos y cambiar el tipo de gráfico con el cual trabajar, pidiendo la construcción de un diagrama de barras, pues es el más frecuente que se encuentran en los libros de texto chilenos y españoles de Educación Primaria. Por otro lado, dentro de las actividades propuestas para trabajar en

este instrumento no se había considerado la construcción de un gráfico de barras donde el estudiante deba calcular las frecuencias. Por lo anterior, la versión de la prueba piloto para este ítem se muestra, en la Figura 4.5.4.8.

Ítem 8. Elegir un gráfico de líneas dobles para representar una distribución

En la Figura 4.5.3.7 presentamos los tres posibles ítems para trabajar la lectura crítica de gráficos de líneas dobles (nivel de lectura 4 y nivel semiótico 4).

Ítem 8. 1.
Los dos gráficos muestran el mismo resultado de una encuesta electoral. ¿Cuál crees que Pedro mostraría en su campaña? Justifica tu respuesta.

Ítem 8. 2.
Los dos gráficos muestran el mismo resultado de una investigación sobre la audiencia de los canales de televisión. ¿Qué gráfico crees que elegirá el canal Y para mostrar a sus patrocinadores? Justifica tu respuesta.

Ítem 8. 3.
Jorge y Patricia deben registrar las temperaturas máximas y mínimas de su ciudad durante una semana. Para mostrar esta información Jorge ha decidido hacer un gráfico de sectores y Patricia un gráfico de líneas. ¿Cuál elegirías tú? Justifica tu respuesta.

Figura 4.5.3.7. Versión ítem 8 para juicio de expertos

La valoración de los expertos, resumida en la Tabla 4.5.3.9, es alta en los dos primeros ítems y menor en el tercero. El ítem 8.1 es el que presente una mayor puntuación (con una media de 4,3) y seguido por el ítem 8.2 (con una media de 4). Además, estos ítems presentan una desviación típica pequeña (0,67).

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 8.1			1	5	4	4,3	4	0,67
Ítem 8.2	1		1	4	4	4	4	1,25
Ítem 8.3	3	1	1	1	4	3,2	3,5	1,81

Algunos de los comentarios realizados por los expertos se exponen a continuación:

El ítem 8.1 y 8.2 son similares. Propongo eliminar uno de ellos y pedir al alumno, en un nuevo ítem, que construya un gráfico de líneas doble (Experto 3).

No se presentan los gráficos en el ítem 8.3. En el ítem 8.2, los gráficos no corresponden al enunciado (tienen como título intención de voto por candidato) (Experto 7).

El ítem 8.2 es parecido al 8.1 pero tiene un error en los rótulos de la gráfica, se supone que son sobre “audiencias” (Experto 8).

El título de los gráficos del ejercicio 2 son de la temática del ejercicio 1: Intención de voto por candidato. Por lo que algo falla (Experto 9).

En ellos no se sugieren cambios para el gráfico mejor valorado. Más bien hacen referencia a un error en el título que se cometió en el ítem 8.2, que coincide con el del 8.1, y que deberían ser diferentes. De acuerdo con lo anterior, no se realizan cambios significativos, sólo se agregan las letras A y B para que los estudiantes indiquen cuál eligen, y se decide cambiar la pregunta ¿Cuál crees que Pedro mostraría en su campaña?, por ¿Cuál crees que el candidato Pedro mostraría en su campaña?, y la forma de pedir la justificación. El ítem a pilotar se muestra en la Figura 4.5.4.10.

Ítem 9. Leer un diagrama de tallo y hojas

En la Figura 4.5.3.8 vemos las opciones sometidas a evaluación para trabajar la lectura de una distribución de frecuencias en un gráfico de tallo y hojas, que conlleve la lectura de datos y desarrollar cálculos a partir de ellos (nivel de lectura 2). Se trata de un gráfico de complejidad semiótica 3.

<p>Ítem 9.1.</p> <p>En el siguiente diagrama de tallo y hojas se registran las edades de un grupo de personas que asisten al cine. ¿Qué alternativa es falsa?</p>															
<p>A. Asistió 1 persona de 39 años.</p> <p>B. Asistieron 5 personas de 29 años.</p> <p>C. La edad mínima de la persona que asistió es 8 años.</p> <p>D. La edad máxima de la persona que asistió es 55 años.</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tallo</th> <th>Hojas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>→ 8 9 9</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>→ 1 1 1 2 2 3 4 5 9</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>→ 2 3 3 3 3 3 3 4 5 9 9 9 9 9</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>→ 1 1 1 2 2 3 4 5 6 7 8</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>→ 1 1 2 2 3 4 5 6</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>→ 1 2 3 5</td> </tr> </tbody> </table>	Tallo	Hojas	0	→ 8 9 9	1	→ 1 1 1 2 2 3 4 5 9	2	→ 2 3 3 3 3 3 3 4 5 9 9 9 9 9	3	→ 1 1 1 2 2 3 4 5 6 7 8	4	→ 1 1 2 2 3 4 5 6	5	→ 1 2 3 5
Tallo	Hojas														
0	→ 8 9 9														
1	→ 1 1 1 2 2 3 4 5 9														
2	→ 2 3 3 3 3 3 3 4 5 9 9 9 9 9														
3	→ 1 1 1 2 2 3 4 5 6 7 8														
4	→ 1 1 2 2 3 4 5 6														
5	→ 1 2 3 5														
<p>Ítem 9.2.</p> <p>Observa el gráfico y luego responde.</p> <p>¿Cuál es el rango de las edades?</p> <p>¿Cuántos trabajadores tienen menos de 31 años?</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Trabajadores de una oficina: edades</th> </tr> <tr> <th>Tallo</th> <th>Hoja</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>3 5 8 9</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0 1 1 1 4 5 5 6 9 9</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0 0 2 3 3 3 3 3 8 9</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0 1 3 8</td> </tr> </tbody> </table>	Trabajadores de una oficina: edades		Tallo	Hoja	2	3 5 8 9	3	0 1 1 1 4 5 5 6 9 9	4	0 0 2 3 3 3 3 3 8 9	5	0 1 3 8		
Trabajadores de una oficina: edades															
Tallo	Hoja														
2	3 5 8 9														
3	0 1 1 1 4 5 5 6 9 9														
4	0 0 2 3 3 3 3 3 8 9														
5	0 1 3 8														
<p>Ítem 9.3.</p> <p>Las notas obtenidas (entre 1,0 y 7,0) en un sexto básico en la prueba de matemática fueron las siguientes.</p> <p>¿Cuántos estudiantes rindieron la prueba?</p> <p>¿Qué nota es la que presenta mayor frecuencia?</p> <p>¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota mayor o igual a 4?</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tallo</th> <th>Hojas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>→ 2 3</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>→ 0 0 0 9</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>→ 0 1 1 1 6 9</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>→ 0 3 5 7 8</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>→ 0 1 6 5 6</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>→ 0</td> </tr> </tbody> </table>	Tallo	Hojas	2	→ 2 3	3	→ 0 0 0 9	4	→ 0 1 1 1 6 9	5	→ 0 3 5 7 8	6	→ 0 1 6 5 6	7	→ 0
Tallo	Hojas														
2	→ 2 3														
3	→ 0 0 0 9														
4	→ 0 1 1 1 6 9														
5	→ 0 3 5 7 8														
6	→ 0 1 6 5 6														
7	→ 0														

Figura 4.5.3.8. Versión ítem 9 para juicio de expertos

De acuerdo con las puntuaciones de la Tabla 4.5.3.10, observamos que los expertos han valorado con medias similares, con una puntuación más alta del ítem 9.3 con un promedio de 4,2 puntos, seguido del 9.2 con un de 4,1. Si bien el ítem 9.2 presenta una mejor desviación típica que el ítem 9.3, este último presenta una mediana mayor y tiene mayor cantidad de expertos que lo han valorado con la puntuación máxima.

Tabla 4.5.3.10. *Resultados en la valoración de expertos en el ítem 9*

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 9.1		1	3	2	4	3,9	4	1,10
Ítem 9.2			1	7	2	4,1	4	0,57
Ítem 9.3		1	1	3	5	4,2	4,5	1,03

Las puntuaciones de los expertos vienen acompañadas de algunos comentarios y sugerencias, entre ellos:

El ítem 9.3 me parece muy difícil para primaria (Expertos 1).

Los tres ítems evalúan el contenido, hice la graduación de la calificación de acuerdo con la dificultad que puede requerir dar la respuesta. El 3 es más sencillo mientras que el 1 es más completo (Expertos 4).

Si se deja el ítem 9.3., se podría incluir una pregunta relacionada con el rango (Expertos 7).

En 9.2 y 9.3, se pide algo más que leer los datos. Se sugiere cambiar: sexto básico por “sexto curso” (Experto 10).

Respecto al comentario del experto 1, podemos señalar que este tipo de gráficos están descritos en las directrices curriculares chilenas para el Educación Primaria, en particular en 5° y 6° curso, por lo que creemos sería una actividad que podrían responder los estudiantes a los que se les aplicará este cuestionario.

Sobre el comentario del experto 7, si bien creemos que es una pregunta que los estudiantes podrían responder, no la agregaremos en esta investigación, ya que el cuestionario puede llegar a ser muy extenso para algunos estudiantes si se agregan más actividades. Aunque se tendrán en cuenta para investigaciones futuras.

Estamos de acuerdo con el comentario que realizó el experto 10, sobre que en los ítems se pide más que la lectura de los datos, pues esta actividad, en forma global, va más allá de la lectura literal de la información. Pero para facilitar el trabajo de los expertos, hemos colocado para la lectura literal “leer datos simples”, en el caso que se refiera a una lectura literal (ítem 6); y para las actividades que conllevan alguna operación aritmética la denominamos “leer datos”. De igual forma, hemos considerado el segundo comentario de este experto, el cual se ha incluido en la reformulación que se realizó de este enunciado, cambiando “*las notas obtenidas (entre 1 y 7) en un sexto curso en la prueba de matemática fueron las siguientes*” a como se muestra en la Figura 4.5.4.11.

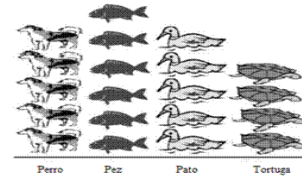
Además, se reconstruye el gráfico, porque presenta un error en la representación de los datos (los valores de las hojas no están ordenados) y se modificó los datos para que se obtenga sólo una moda y no sea bimodal. Finalmente, hemos eliminado la pregunta “¿Cuántos estudiantes rindieron la prueba?”, para que los estudiantes tengan el tiempo suficiente para responder a todos los ítems y el instrumento no resulte excesivamente largo.

Ítem 10. Elegir un gráfico de sectores para representar una distribución

En la Figura 4.5.3.9 vemos las alternativas para trabajar la selección de un gráfico de sectores para una determinada distribución de datos. Estos gráficos corresponden al nivel semiótico 3, y se trabaja un nivel de lectura 4, pues se requiere una lectura crítica de los gráficos de sectores, para seleccionar el más adecuado.

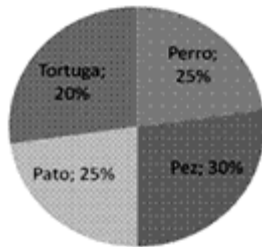
Ítem 10.1.

Para la clase de Ciencias se realizó una encuesta a 100 niños de 5º básico sobre qué mascota les gustaría tener. Los resultados se presentan en el siguiente pictograma, donde cada animal representa 5 niños que mostraron su preferencia.

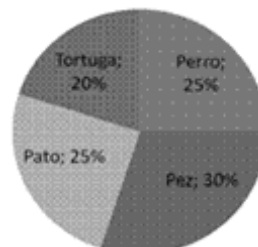


¿Cuál de los siguientes gráficos de sectores muestra la información del gráfico anterior? Justifica tu respuesta

A

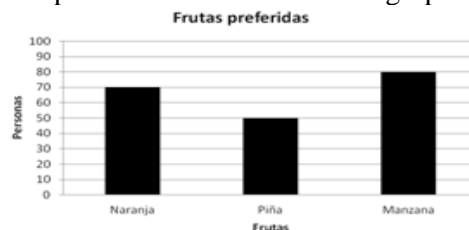


B



Ítem 10.2.

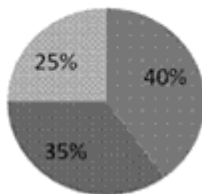
El siguiente gráfico muestra las preferencias de frutas de un grupo de personas.



¿Cuál de los siguientes gráficos de sectores muestra la información del gráfico anterior? Justifica tu respuesta

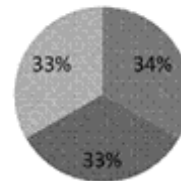
A

■ Manzana ■ Naranja ■ Piña



B

■ Manzana ■ Naranja ■ Piña



Ítem 10.3.

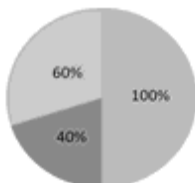
En la tabla se registró la cantidad de estudiantes de un colegio que practican diversos deportes.

Deporte	Cantidad de niños
Fútbol	100
Tenis	40
Vóleibol	60

¿Cuál de los siguientes gráficos representa la información de la tabla? Justifica tu respuesta

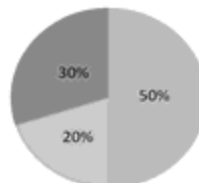
A

■ Fútbol ■ Tenis ■ Vóleibol



B

■ Fútbol ■ Tenis ■ Vóleibol



C

■ Fútbol ■ Tenis ■ Vóleibol

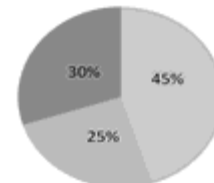


Figura 4.5.3.9. Versión ítem 10 para juicio de expertos

En este ítem los expertos dan mayor valoración al ítem 10.3, el que supera en tres décimas al 10.2 y alcanza una mediana de 5 puntos, tal como se muestra en la Tabla 4.5.3.11. Por lo que es el seleccionado para el pilotaje.

Tabla 4.5.3.11. Resultados en la valoración de expertos en el ítem 10

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 10.1		2		6	2	3,8	4	1,03
Ítem 10.2		1	1	5	3	4	4	0,94
Ítem 10.3		1	2		7	4,3	5	1,16

Los siguientes son algunos de los comentarios que realizaron los expertos, tras la puntuación de cada ítem:

Para el ítem 10.3 conservar los colores de las opciones de respuestas; el cambio en el color de la opción C genera un poco más de dificultad en la comparación del gráfico, requiere mayor atención a los detalles (Experto 4).

Entiendo que la tarea pretendida es comparar gráficos de sectores entre sí. Sin embargo, en las tareas propuestas se pretende identificar el gráfico de sectores que representa a la distribución dada (Experto 10).

Respecto a lo indicado por el experto E10, podemos comentar que estas actividades buscan que el estudiante identifique el gráfico que muestre la misma información dada inicialmente. Para completar este proceso, se debe realizar una comparación entre los datos de la tabla y los de cada gráfico.

Los cambios sólo están relacionados con el color de los sectores circulares de los gráficos, para que no inciten a error y los porcentajes se colocan fuera de los sectores para que corresponda a una lectura efectiva del gráfico, relacionando los porcentajes con el área de los sectores circulares. La versión definitiva de esta pregunta se muestra en la Figura 4.5.4.12.

Ítem 11. Realizar una lectura crítica de un diagrama de puntos

En el último ítem se pide realizar una valoración crítica de la información o de las afirmaciones que se realizan en torno a una distribución de datos representados en un diagrama de puntos (nivel de lectura 4 y nivel semiótico 3). Las alternativas sometidas a valoración de expertos se muestran en la Figura 4.5.3.10.

En la Tabla 4.5.3.12 resumimos las valoraciones realizadas por los expertos sobre la pertinencia de cada ítem sobre la lectura crítica de un diagrama de puntos. En ella, el ítem con mayor puntuación, y que presenta menor desviación típica, es el 11.2; este puntaje difiere bastante de los otros dos ítems, y corresponde al ítem seleccionado.

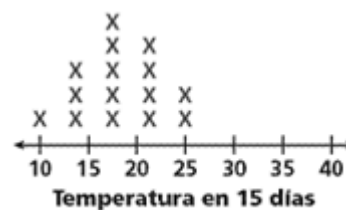
Tabla 4.5.3.12. Resultados en la valoración de expertos en el ítem 11

	Valoración expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 11.1	1	4	1	3	1	2,9	2,5	1,29
Ítem 11.2			4	1	5	4,1	4,5	0,99
Ítem 11.3	2		3	1	4	3,5	3,5	1,58

Ítem 11.1.

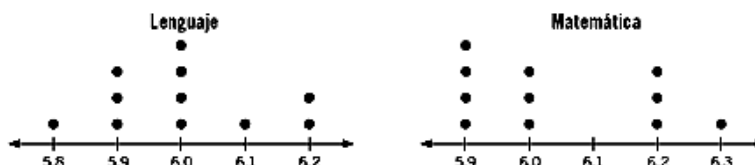
Pablo hizo el siguiente diagrama de puntos para mostrar las temperaturas registradas durante 15 días de enero en Chiloé.

¿Qué conclusión puedes obtener de dicho gráfico?
¿Crees que la representación ha sido la correcta? Explica.

**Ítem 11.2.**

Observa cada diagrama de puntos y luego responde.

Los siguientes diagramas corresponden a las calificaciones (entre 1,0 y 7,0) obtenidas por los niños de sexto básico en Lenguaje y Matemática.



María dice que las Matemáticas son más difíciles porque hay pocos niños con nota de 6 puntos o más. ¿Estás de acuerdo?

Ítem 11.3.

El siguiente gráfico representa las edades de los niños participantes en un campamento *scout*.

Isidora dice que “si se quisiera saber la edad media de los niños del grupo scout, el niño de 15 años no debería contar ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?”



Figura 4.5.3.10. Versión ítem 10 para juicio de expertos

Dentro de los comentarios realizados por los expertos y que se relacionan con el ítem más valorado, tenemos las siguientes:

En el ítem 11.2 añadiría la siguiente cuestión: “¿Qué conclusión puedes obtener de la situación que se muestra con dichos gráficos?” (Experto 3).

En el ítem 11.2 propongo un intercambio en el enunciado: Los siguientes diagramas corresponden a las calificaciones (entre 1,0 y 7,0) obtenidas por los niños de sexto básico en Lenguaje y Matemática. María dice que las Matemáticas son más difíciles porque hay pocos niños con nota de 6 puntos o más. Observa cada diagrama de puntos y luego responde: ¿Estás de acuerdo? (Experto 4).

El análisis que se pide en la 11.2 es más sencillo, el cual sí creo que lo logren los niños de esa edad o que expresen falsas concepciones con más significatividad didáctica. Sugiero una leve modificación del enunciado: “María dice que las Matemáticas son más difíciles que el español porque hay pocos niños con nota de 6 puntos o más. ¿Estás de acuerdo?” (Experto 8).

Añadiría “Explica” en la pregunta del segundo ejercicio (Experto 9).

De acuerdo con estos comentarios se realizan modificaciones del enunciado de la actividad. Se elimina la frase “observa cada diagrama de puntos y luego responde”, se cambia la palabra básico por curso, y se agrega “explica” al final de la actividad. No se cambia lenguaje por español, pues tiene mayor sentido dentro del contexto escolar chileno. Finalmente, se quita la palabra “punto” que acompaña al 6 (puntos), pues esa expresión no es usada en Chile. En la Figura 4.5.4.13 se presenta la versión que se usó en la prueba piloto del cuestionario.

4.5.4. ÍTEMS QUE COMPONEN EL CUESTIONARIO PILOTO Y ANÁLISIS A PRIORI

En lo que sigue mostramos los ítems que fueron usados en la prueba piloto y las respuestas que se esperan de los estudiantes. Cada uno de estos ítems constituye para el estudiante un problema matemático, de acuerdo al enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), y desencadena una serie de prácticas operativas y discursivas de las cuales emergen o bien se requiere recordar diferentes objetos matemáticos.

Para cada uno de los ítems describiremos la solución correcta esperada y las prácticas que conlleva y seguidamente realizamos un análisis semiótico de su solución, para identificar los objetos matemáticos requeridos. Ello nos permitirá valorar mejor en el Capítulo 5 las dificultades y errores de los estudiantes.

Ítem 1. Construir un diagrama de barras a partir de un listado de datos

En la siguiente tabla mostramos la altura en metros de algunas especies de árboles. Construye un diagrama de barras para representar estos datos.	Especie	Altura
	Álamo	12
	Higuera	6
	Castaño	25
	Araucaria	30
	Palmera	20
	Roble	12

Figura 4.5.4.1. Enunciado del ítem 1 en la prueba piloto

En el ítem 1, cuyo enunciado se presenta en la Figura 4.5.4.1, se espera que el estudiante sea capaz de construir un gráfico de barras similar al de la Figura 4.5.4.2. Su construcción constituye un problema para el estudiante, que desencadena la siguiente secuencia de prácticas matemáticas:

1. Lectura del enunciado del problema.
2. Reconocer la variable a representar (altura de un árbol). Interpretar los datos como un listado de datos (altura de seis especies, que serían los individuos del listado de datos).
3. Recordar el significado del diagrama de barras y los convenios de construcción.
4. Construir dos ejes perpendiculares, uno de ellos para representar las diferentes especies (en la figura es el eje X) y el otro para representar la altura de cada árbol. Etiquetar los ejes.
5. Fijar una escala proporcional en el eje Y , marcando el origen y llegando hasta una altura algo mayor que la del árbol más alto (Araucaria). Fijar divisiones en el eje, por ejemplo, cada 5 unidades.
6. Levantar para cada especie una barra de igual ancho y altura proporcional a la altura del árbol que corresponde a dicha especie.
7. Añadir al gráfico un título claro y preciso.

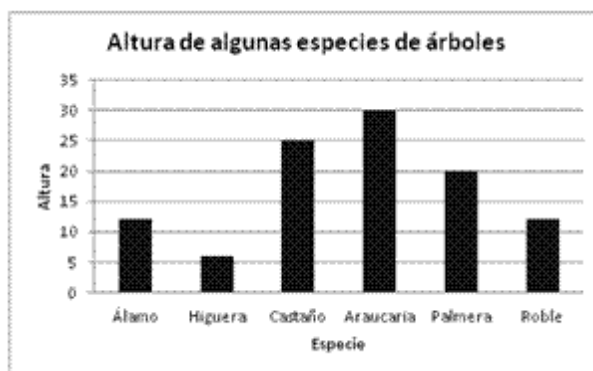


Figura 4.5.4.2. Respuesta esperada por el estudiante en el ítem 1.

En la Tabla 4.5.4.1 realizamos un análisis semiótico de las prácticas descritas, donde observamos la variedad de objetos matemáticos implicados que el estudiante debe recordar y aplicar (aunque sea inconscientemente) durante la solución. Los objetos estadísticos son pocos (los relacionados con el gráfico de barras, dato y variable). Pero aparecen también objetos geométricos y numéricos que el estudiante ha de aplicar en la construcción.

Tabla 4.5.4.1. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 1*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Construir un gráfico de barras a partir de un listado de datos.
Lenguajes	- Palabras en el enunciado y rótulos, números enteros, nombre de las especies, lenguaje gráfico (ejes perpendiculares, barras, colores).
Conceptos-definición	- Ancho, altura, barra, cantidad, conjunto de datos, dato, diagrama de barras, individuo, escala, longitud, metro, número entero, magnitud, medida, perpendicularidad, proporcionalidad, unidad de medida, variable, valor.
Proposiciones	- La altura de la barra ha de ser proporcional al valor de la variable. - Las divisiones de igual longitud en el eje Y corresponden a diferencias iguales de valor de la variable. - Correspondencia entre proporcionalidad geométrica y numérica.
Procedimientos	- Leer e interpretar el enunciado. - Escribir título del gráfico y de los ejes. - Fijar la escala, origen y máximo de la misma. - Fijar divisiones de la escala. - Construir las barras proporcionales en longitud al valor de la variable.
Argumentos	- No se pide un argumento al estudiante.

Ítem 2. Extrapolar información de un diagrama de barras que representa una lista de datos

El segundo ítem, presentado en la Figura 4.5.4.3, exige que el estudiante realice una extrapolación de la información del gráfico, que presenta la cantidad de oyentes que llaman a una radio en semanas sucesivas, estimando el valor para la siguiente. El gráfico tiene una complejidad semiótica 2, pero se exige un nivel de lectura 3, *leer más allá de los datos*. Sin duda, esta puede ser una actividad difícil para los estudiantes, ya que implica ir más allá de la información en el gráfico, donde debe tener en cuenta la variabilidad de los datos. Aunque en el contexto dado, es bastante razonable que la frecuencia de las peticiones a la emisora siga la tendencia creciente a corto plazo.

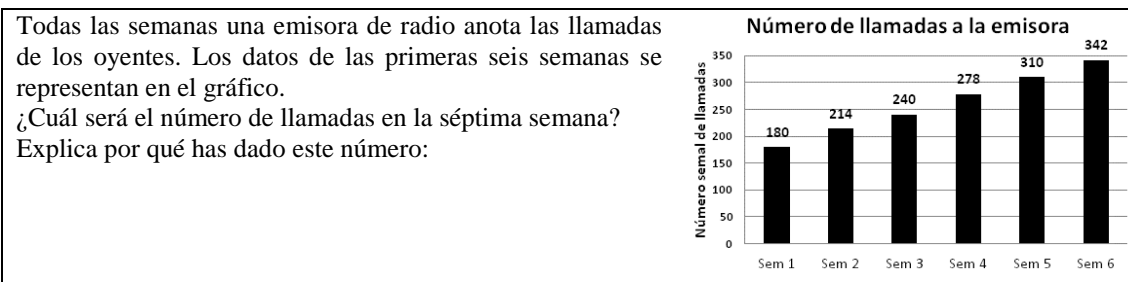


Figura 4.5.4.3. Enunciado del ítem 2 en la prueba piloto

Una respuesta adecuada implica la resolución de un problema por parte del estudiante, que implicaría la secuencia de prácticas matemáticas que se mencionan a continuación:

1. Lectura comprensiva del enunciado del problema, identificando la tarea propuesta.
2. Relacionar el enunciado con el gráfico y leer su título, para identificar el tema del gráfico
3. Reconocer y relacionar la variable representada en el gráfico: número de personas que llama a una emisora en seis semanas consecutivas.
4. Interpretar el conjunto de datos como un listado de datos.
5. Recordar el significado del diagrama de barras y sus elementos estructurales.
6. Leer el rótulo del eje *Y* e interpretar la escala y las unidades de medidas.
7. Leer el valor de la variable que corresponde de cada semana-
8. Observar la tendencia creciente de la serie da datos y calcular las diferencias entre los valores de cada semana (incrementos del número de llamadas).
9. Estimar el incremento medio mediante la media de los incrementos cada semana (34, 26, 38, 32 y 32). Este valor medio es 32,4, pero al tratarse de una variable que toma valores enteros se redondea a 32.
10. Sumar el número de llamadas del día sábado y el valor estimado del incremento. La respuesta del estudiante debería estar alrededor de 374. Se admite cierta variabilidad, pues el incremento no es constante.
11. Argumentar correctamente la respuesta en la que se explique el valor predicho y el proceso por el cual se llegó a él.

En la Tabla 4.5.4.2 realizamos un análisis semiótico de las prácticas implicadas en el desarrollo de este ítem. En ella observamos la variedad de objetos matemáticos que intervienen en la solución de la actividad.

Tabla 4.5.4.2. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 2*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Extrapolar un valor a partir de la información presentada en un gráfico.
Lenguajes	- Palabras del enunciado y rótulos, números enteros, categorías, lenguaje gráfico (ejes perpendiculares, barras).
Conceptos-definición	- Ancho, altura, barra, cantidad, diagrama de barras, escala, longitud, número entero, medida, perpendicularidad, proporcionalidad, unidad de medida, variable, valor, patrón, tendencia, estimación, media aritmética.
Proposiciones	- La altura de la barra ha de ser proporcional al valor de la variable. - Las divisiones de igual longitud en el eje Y corresponden a diferencias iguales de valor de la variable.
Procedimientos	- Correspondencia entre proporcionalidad geométrica y numérica. - Leer e interpretar el enunciado. - Calcular la diferencia entre una semana y la anterior. - Calcular la media aritmética de las diferencias obtenidas anteriormente. - Estimar la cantidad de oyentes que llamarían en la séptima semana.
Argumentos	- Argumentar la estimación dada basándose en los datos, observando que el número de llamadas aumenta de acuerdo a un patrón de crecimiento que se observa semana a semana.

Ítem 3. Traducir de un gráfico de barras a una tabla

Teniendo en cuenta el enunciado del ítem, que observamos en la Figura 4.5.4.4, el estudiante debe leer la información que se presenta en el gráfico de barras que corresponde a una complejidad semiótica 4 (pues se representan dos distribuciones) y traducirla a una tabla de frecuencias, que represente las dos variables, similar a la que se presenta en la Tabla 4.5.4.3.

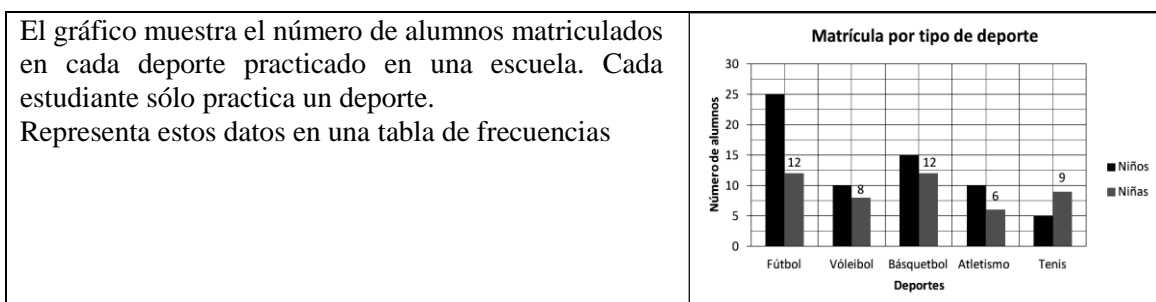


Figura 4.5.4.4. Enunciado del ítem 3 en la prueba piloto

Para la resolver esta situación-problema se debe seguir la siguiente secuencia de prácticas matemáticas:

1. Lectura del enunciado del problema para comprender el contexto y relacionar el gráfico con la situación planteada.
2. Leer el título del gráfico para identificar la variable representada. Leer los títulos y etiquetas de los ejes, así como el código asignado para diferenciar los grupos de niños y niñas para identificar los valores de la variable cualitativa práctica de deporte y el eje que representa las frecuencias.
3. Reconocer la escala utilizada y su graduación.
4. Recordar el significado del diagrama de barras y de sus elementos estructurales.
5. Realizar una lectura literal de cada uno de los datos representados en el gráfico.
6. Formar la estructura de la tabla de frecuencias con dos variables representadas simultáneamente, asignando un título general a la tabla y a cada columna.

7. Construir una serie de filas (cinco), para representar las frecuencias de los diferentes valores de la variable categórica (dos, una para cada sexo).
8. Traducir las categorías y sus frecuencias respectivas, desde el gráfico a la tabla.

Tabla 4.5.4.3. *Matrícula por tipo de deporte (respuesta esperada)*

Deporte	Niños	Niñas
Futbol	25	12
Voleibol	10	8
Basquetbol	15	12
Atletismo	10	6
Tenis	5	9

El análisis semiótico de las prácticas recientemente descritas se presenta en la Tabla 4.5.4.4, en la que observamos la variedad de objetos matemáticos implicados que el estudiante debe emplear para llegar a la solución del ítem.

Tabla 4.5.4.4. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 3*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Traducir un gráfico a una tabla de frecuencias.
Lenguajes	- Palabras del enunciado y rótulos, números enteros, categorías, lenguaje gráfico (ejes perpendiculares y barras) y lenguaje tabular (fila, columna, celda).
Conceptos-definición	- Altura, barra, cantidad, conjunto de datos, dato, diagrama de barras, distribución, escala, frecuencia, individuo, longitud, magnitud, medida, número entero, medida, perpendicularidad, proporcionalidad, unidad de medida, variable, valor, tabla, celda, columna, fila.
Proposiciones	- La altura de la barra ha de ser proporcional al valor de la variable. - Correspondencia entre proporcionalidad numérica y geométrica.
Procedimientos	- Leer e interpretar el enunciado. - Identificar las variables y las categorías representadas en el gráfico. - Construir una tabla de frecuencias para representar dos variables conjuntamente. - Asignar título general y de las columnas de la tabla. - Leer todos los valores del gráfico y escribirlos en las celdas correspondientes de la tabla.
Argumentos	- No se pide un argumento al estudiante.

Ítem 4. Traducir un pictograma a una tabla

Representa en una tabla la información mostrada en el siguiente gráfico.



Número de horas por semana que está prendida la luz

Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	
Casillero	
Piscina	
Canchas de tenis	
Total	

Figura 4.5.4.5. Enunciado del ítem 4 en la prueba piloto

En esta actividad el estudiante lee un pictograma (Figura 4.5.4.5) y traduce su información a una tabla de valores (Tabla 4.5.4.5). En este pictograma se usa como icono una bombilla (10 unidades) y media (5 unidades). El estudiante tiene que realizar cálculos, por lo que el nivel de lectura es *leer dentro de los datos* (2). El gráfico tiene una complejidad semiótica 2, pues representa una lista de datos.

La resolución del problema planteado conlleva el desarrollo de diferentes prácticas matemáticas y que pasamos a enumerar:

1. Lectura comprensiva del enunciado del problema.
2. Recordar el significado de un pictograma y sus elementos estructurales.
3. Leer el título del gráfico para comprender el contexto del problema.
4. Leer las etiquetas de las categorías para identificarlas.
5. Leer y comprender el convenio de representación, donde los iconos representan 10 y 5 horas, si es completo o medio, respectivamente.
6. Leer el número correspondiente de iconos a cada lugar del centro deportivo y multiplicar por el valor que corresponda, según si es entero o medio, para determinar el valor de la variable.
7. Establecer la relación entre las representaciones consideradas en el ítem, gráfico de barras y tabla de valores.
8. Ubicar cada resultado anterior en la celda correspondiente en la tabla dada.
9. Finalmente, calcular el total, sumando los valores obtenidos.

Tabla 4.5.4.5. *Horas semanales de luces prendidas (respuesta esperada)*

Lugar	Nº de Horas
Sala de ejercicio	75
Casilleros	90
Piscina	55
Cancha de tenis	50
Total	270

Tabla 4.5.4.6. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 4*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Traducir un gráfico a una tabla de frecuencias
Lenguajes	- Palabras del enunciado y rótulos, números enteros, categorías, iconos.
Conceptos-definición	- Icono, cantidad, pictograma, magnitud, número entero, proporcionalidad, tiempo, unidad de medida, variable, valor, tabla de valores, celda, columna, fila.
Proposiciones	- Dos iconos iguales representan el mismo valor numérico.
Procedimientos	- Leer comprensivamente el enunciado de la actividad. - Identificar las variables y las categorías representadas en el pictograma. - Leer el esquema de tabla dado y ponerlo en correspondencia con el pictograma. - Contar el número de iconos y multiplicar por el valor a que equivale. - Consignar los resultados obtenidos en las celdas correspondientes. - Sumar los valores anteriores para obtener el total de horas de consumo de luz eléctrica.
Argumentos	- No se pide un argumento al estudiante.

En la Tabla 4.5.4.6 presentamos un análisis semiótico de las prácticas que intervienen en la solución de esta actividad, por medio de la cual podemos observar la diversidad de objetos matemáticos usados por el estudiante para completar esta actividad.

Ítem 5. Realizar una lectura crítica de una distribución representada en un pictograma

En el quinto ítem, que se presenta en la Figura 4.5.4.6, se trabaja la lectura de la información a partir de un pictograma; más específicamente, la lectura crítica de dos afirmaciones o conclusiones que se apoyan en lo mostrado en el gráfico (nivel de lectura 4 y nivel semiótico 3).

La bibliotecaria del colegio hizo un inventario de los libros que hay en la biblioteca.

Cantidad de libros que hay en la biblioteca

Infantiles	📖 📖 📖 📖
Novelas	📖 📖 📖 📖 📖
Ciencia ficción	📖 📖
Investigación	📖 📖 📖 📖 = 15 libros

Marca si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

	Verdadero	Falso
1. “Sólo hay dos libros de ciencia ficción”		
Explica tu respuesta:		
	Verdadero	Falso
2. “Hay 60 libros infantiles”		
Explica tu respuesta:		

Figura 4.5.4.6. Enunciado del ítem 5 en la prueba piloto

Se espera que el estudiante indique que la primera afirmación, “sólo hay dos libros de ciencia ficción”, es falsa, porque si bien el gráfico muestra dos libros de ciencia ficción, cada icono de libro equivale a 15 unidades, es decir, existe un total de 30 libros de este tipo en la biblioteca del colegio. Respecto a la segunda, “hay 60 libros infantiles”, se debe indicar que es verdadera, pues a los libros de esta temática le corresponden cuatro iconos, y, dado que cada uno de ellos equivale a 15 libros, esto da un total de 60 libros de este tipo.

El éxito de esta tarea conlleva el desarrollo de diferentes prácticas matemáticas y que pasamos a enumerar a continuación:

1. Lectura comprensiva del enunciado del problema.
2. Recordar el significado de un pictograma y sus elementos estructurales.
3. Leer el título del gráfico para comprender el contexto del problema.
4. Leer las etiquetas de las categorías para identificarlas.
5. Leer y comprender el convenio de representación de 15 libros.
6. Leer el número de iconos correspondiente a cada tipo de libro y multiplicar por 15, para determinar el valor de la variable.
7. Lectura comprensiva de las dos afirmaciones.

8. Comprobar el número de libros de ciencia ficción e infantiles, a partir de la lectura del gráfico.
9. Decidir la veracidad o falsedad de la afirmación.
10. Argumentar la veracidad o falsedad de cada afirmación apoyándose en los datos.

En la Tabla 4.5.4.7 observamos el análisis semiótico de las prácticas que hemos descrito anteriormente:

Tabla 4.5.4.7. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 5*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Rebatir o confirmar afirmaciones a partir de un gráfico
Lenguajes	- Palabras del enunciado y rótulos, números enteros, categorías, iconos.
Conceptos-definición	- Cantidad, conjunto de datos, dato, magnitud, número entero, pictograma, proporcionalidad, tiempo, unidad de medida, variable, valor.
Proposiciones	- Dos iconos iguales deben tener el mismo valor numérico.
Procedimientos	- Leer comprensivamente el enunciado de la actividad. - Contar la cantidad de iconos. - Multiplicar la cantidad de iconos por las unidades estadística que representan estos. - Indicar la veracidad o falsedad de las afirmaciones.
Argumentos	- La primera afirmación es falsa y la segunda es verdadera, lo que se fundamenta en la equivalencia de cada icono.

Ítem 6. Lectura de una lista de datos en un gráfico de líneas

En el ítem 6, que vemos en la Figura 4.5.4.7, se espera que el estudiante sea capaz de lectura literal de algunos elementos (lectura de nivel 1) de un gráfico de líneas de complejidad semiótica 2.

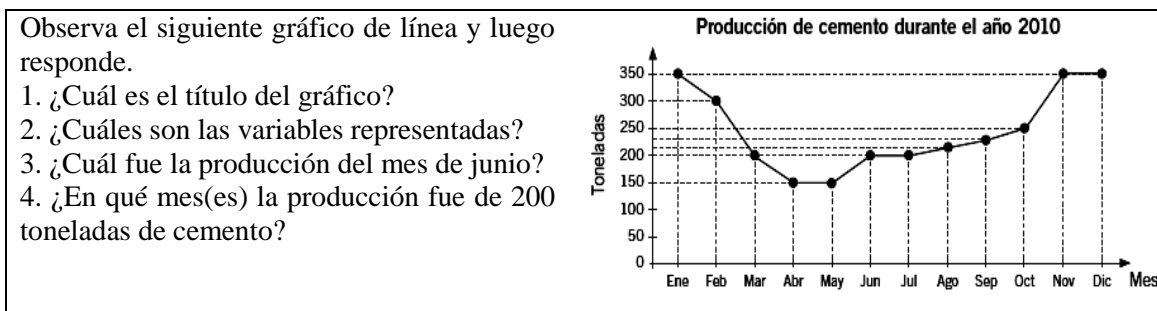


Figura 4.5.4.7. Enunciado del ítem 6 en la prueba piloto.

En la primera pregunta, ¿Cuál es el título del gráfico?, el estudiante debería leer el título que se encuentra en la parte superior del gráfico y responder: “Producción de cemento durante el año 2010”. La segunda pregunta, ¿Cuáles son las variables representadas?, el estudiante debe observar los ejes e indicar que las variables que se han representadas en el gráfico son: “toneladas de cemento y meses”.

Para la tercera pregunta, ¿Cuál fue la producción del mes de junio?, el estudiante tiene que ubicar el mes de junio (Jun) en el eje X, encontrar el punto que está sobre él y, finalmente, leer la cantidad que proyecta ese punto en el eje Y. El estudiante debería responder: “en el mes de junio hubo una producción de 200 toneladas de cemento”. Por tanto, es una lectura directa. Finalmente, la cuarta pregunta, ¿En qué mes(es) la

producción fue de 200 toneladas de cemento?, que corresponde a una lectura inversa, el estudiante de debe ubicar, en el eje Y , el número 200 y seguir la línea trazada hasta cada punto ubicado y leer los meses que proyectan sobre el eje X . Se espera que identifiquen los meses Marzo, junio y Julio.

Para resolver la tarea se han de desarrollar las siguientes prácticas matemáticas:

1. Lectura comprensiva del enunciado, identificando las preguntas que se realizan.
2. Lectura del título del gráfico para comprender el contexto del problema y responder la primera pregunta.
3. Recordar el significado de un gráfico de líneas y sus elementos estructurales.
4. Identificar la variable representada (producción de cemento en diferentes meses del año) para responder la pregunta segunda.
5. Lectura de la etiqueta de los ejes para identificar los momentos en que se mide la variable (eje X) y la escala utilizada, así como su graduación. Identificar cada abreviatura con un mes del año; por ejemplo, Jun representa junio.
6. Lectura directa de la producción de cemento del mes de junio, para lo que se debe leer el valor que proyecta en el eje Y en punto que está sobre el mes de junio (Jun).
7. Lectura inversa de los meses en que la producción de cemento es de 200 toneladas. Para ello, se deben leer la proyección del punto asociado al 200 en el eje X , que son marzo, junio y Julio.

Para desarrollar estas prácticas matemáticas y alcanzar estas respuestas, es necesario movilizar diferentes objetos matemáticos, como los que se describen en la Tabla 4.5.4.8.

Tabla 4.5.4.8. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 6*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Leer elementos de un gráfico de líneas.
Lenguajes	- Palabras en el enunciado y rótulos, números enteros, meses del año, lenguaje gráfico (ejes perpendiculares, puntos, segmentos).
Conceptos-definición	- Cantidad, conjunto de datos, coordenadas cartesianas, dato, diagrama de líneas, escala, longitud, número entero, magnitud, medida, perpendicularidad, peso, proporcionalidad, puntos, segmento, unidad de medida, variable, valor, título, categoría.
Proposiciones	- La altura del punto ha de ser proporcional al valor de la variable para la categoría. - Las divisiones de igual longitud en el eje Y corresponden a diferencias iguales de valor de la variable. - Correspondencia entre proporcionalidad geométrica y numérica.
Procedimientos	- Leer e interpretar el enunciado. - Leer el título del gráfico. - Leer las variables registradas en los ejes. - Lectura directa de un dato: producción en el mes de junio - Lectura inversa. meses en que la producción es de 200 toneladas.
Argumentos	- No se pide un argumento al estudiante.

Ítem 7. Construir un gráfico de barras formando previamente una distribución

En el séptimo ítem (Figura 4.5.4.8), se pide construir un diagrama de barras, formando previamente la distribución, es decir, un gráfico de complejidad semiótica 3. Se espera que el estudiante sea capaz de construir un gráfico similar al que observamos en la Figura 4.5.4.9.

A continuación, se muestran los resultados de una encuesta con la pregunta: ¿cuántos hermanos tienes?

0, 1, 3, 2, 2, 3, 2, 4, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2

Realiza un gráfico de barras con la información proporcionada.

Figura 4.5.4.8. Enunciado del ítem 7 en la prueba piloto

Para completar con éxito esta actividad se precisa el desarrollo de la siguiente secuencia de prácticas matemáticas:

1. Lectura y comprensión del enunciado del problema.
2. Reconocer la variable a representar (número de hermanos). Interpretar que el conjunto de datos muestra los valores del número de hermanos de una serie de niños. Es decir, se presenta un listado de datos.
3. Comprender que se pide reducir los datos y formar la distribución de frecuencias de la variable “número de hermanos”. Esta distribución ha de presentar la frecuencia correspondiente a cada valor numérico de la cantidad de hermanos, 0, 1, 2, 3 y 4.
4. Recordar el significado del diagrama de barras y los convenios de construcción.
5. Calcular la frecuencia para cada valor del número de hermanos.
6. Construir dos ejes perpendiculares, uno de ellos para representar el número de hermanos (en la figura es el eje X) y el otro para representar las frecuencias de aparición de estos valores. Etiquetar los ejes.
7. Fijar una escala proporcional en el eje Y, marcando el origen y llegando hasta una altura algo mayor que la frecuencia modal. Fijar divisiones en el eje, por ejemplo, cada 2 unidades (o 5 como se ve en la Figura).
8. Levantar para cada categoría una barra de igual ancho y altura proporcional a la frecuencia correspondiente.
9. Añadir al gráfico un título claro y preciso.

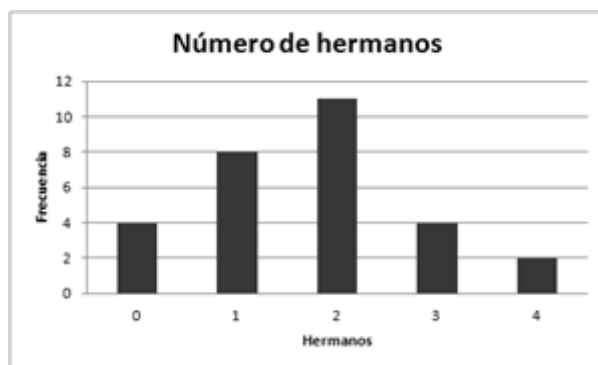


Figura 4.5.4.9. Respuesta esperada por el estudiante en el ítem 7

En la Tabla 4.5.4.9 mostramos el análisis semiótico de las prácticas matemáticas descritas anteriormente y que nos permite vislumbrar la variedad de objetos matemáticos implicados en la solución.

Tabla 4.5.4.9. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 7*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Construir un gráfico de una distribución de frecuencias a partir de un listado de datos
Lenguajes	- Palabras en el enunciado y rótulos, números enteros, número de hermanos, lenguaje gráfico (ejes perpendiculares, barras, colores).
Conceptos-definición	- Altura, barra, cantidad, conjunto de datos, dato, diagrama de barras, distribución de frecuencias, individuo, escala, frecuencia, número entero, magnitud, medida, perpendicularidad, proporcionalidad, unidad de medida, variable, valor.
Proposiciones	- La altura de la barra ha de ser proporcional al valor de la variable. - Las divisiones de igual longitud en el eje Y corresponden a diferencias iguales de valor de la variable. - Correspondencia entre proporcionalidad geométrica y numérica. - Relación de igualdad. - Relación de orden.
Procedimientos	- Leer e interpretar el enunciado. - Clasificar los datos. - Calcular las frecuencias de cada valor diferente. - Fijar la escala, origen y máximo de la misma. - Fijar divisiones de la escala. - Construir las barras proporcionales en longitud al valor de la variable. - Escribir título del gráfico y de los ejes.
Argumentos	- No se pide un argumento al estudiante.

Ítem 8. Elegir un gráfico de líneas dobles para representar una distribución

En este ítem (Figura 4.5.4.10) el estudiante debe elegir un gráfico de líneas dobles para representar una distribución doble (nivel de complejidad semiótica 4); concretamente, tiene que indicar qué gráfico, de dos opciones, mostraría Pedro en su campaña electoral. Para ello, debe analizar críticamente el contexto, el diagrama y la información que se muestra en él, ya que debe seleccionar el que permita mostrar que tiene una ventaja sobre el otro candidato.

Los dos gráficos muestran el mismo resultado de una encuesta electoral. ¿Cuál crees que el candidato Pedro mostraría en su campaña?

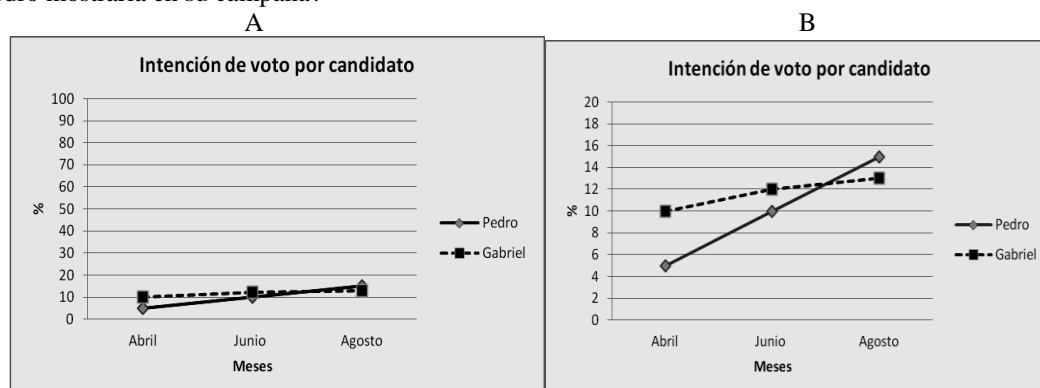


Gráfico que mostraría Pedro:

Explica tu respuesta:

Figura 4.5.4.10. Enunciado del ítem 8 en la prueba piloto

Se espera que el estudiante indique el gráfico B y entregue una justificación similar a la siguiente: “si bien ambos gráficos muestran la misma información, con una modificación en la escala de los porcentajes, el gráfico B muestra en forma más clara la evolución de la intención de voto e incluso que ha superado levemente al otro candidato (Gabriel)”. Con ello, el estudiante demuestra un conocimiento sobre el tipo de gráfico y la situación que está representado. Además, realizar una lectura crítica de los datos (nivel de lectura 4).

Esta tarea implica la realización de las siguientes prácticas matemáticas:

1. Lectura comprensiva del enunciado.
2. Recordar el significado de un gráfico de líneas y sus elementos estructurales.
3. Lectura del título del gráfico para comprender el contexto de la pregunta y de los datos.
4. Identificar la variable representada.
5. Lectura de las etiquetas en los ejes para determinar las categorías y el valor de la variable en cada una de ellas, así como el valor máximo, y escala utilizada.
6. Identificar la diferencia de escalas en cada gráfico y el efecto que tiene sobre la apariencia visual del crecimiento de cada una de las líneas que representa la intención de voto a un candidato.
7. Comparar la representación de los datos correspondientes a Pedro en cada uno de los dos gráficos y determinar cuál de ellos resalta más el crecimiento de la intención de voto para este candidato.
8. Seleccionar el segundo gráfico, puesto que marca el crecimiento con mayor énfasis.
9. Construir una argumentación para apoyar la selección de este gráfico, basándose en los pasos anteriores.

El desarrollo de estas prácticas matemáticas moviliza diferentes objetos matemáticos, como los que indican en la Tabla 4.5.4.10.

Tabla 4.5.4.10. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 8*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Elegir entre varios gráficos uno que represente mejor la información.
Lenguajes	- Palabras en el enunciado y rótulos, números enteros, meses del año, lenguaje gráfico (ejes perpendiculares, puntos, rectas).
Conceptos-definición	- Altura, puntos, conjunto de datos, dato, diagrama de líneas, escala, longitud, magnitud, medida, perpendicularidad, porcentajes, proporcionalidad, segmentos, unidad de medida, variable, valor.
Proposiciones	- La altura del punto ha de ser proporcional al valor de la categoría. - Las divisiones de igual longitud en el eje Y corresponden a diferencias iguales de valor de la variable. - Correspondencia entre proporcionalidad geométrica y numérica.
Procedimientos	- Relación entre escala vertical y pendiente de un segmento. - Leer e interpretar el enunciado. - Leer el título, variables y categorías del gráfico. - Comparar la información representada en dos gráficos con diferente escala.
Argumentos	- Dar un argumento basado en el gráfico. Cuando se usan escalas menores, las diferencias y variaciones de valores son más evidentes.

Ítem 9. Leer un diagrama de tallo y hojas

En esta actividad (Figura 4.5.4.11) el estudiante debe realizar cálculos a partir de los datos de un diagrama de tallo y hojas. Se trata de un gráfico de complejidad semiótica 3 y el nivel de lectura requerido es el 2. En la primera pregunta, se debe determinar la moda de los datos. Para la segunda pregunta, se ha de obtener las frecuencias que hay asociadas a los tallos 5, 6 y 7, para luego sumar dichas frecuencias.

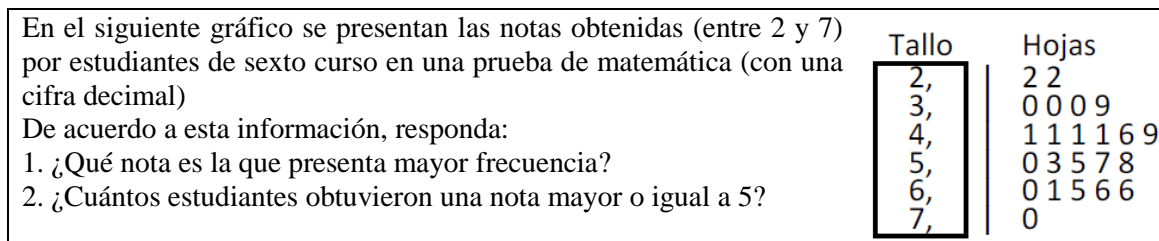


Figura 4.5.4.11. Ítem 9 en la prueba piloto

Para desarrollar este ítem, el estudiante debe realizar una serie de prácticas matemáticas, que se enumeran a continuación:

1. Leer comprensivamente el enunciado para comprender el contexto de los datos.
2. Recordar el significado de un diagrama de tallo y hojas, y sus elementos estructurales.
3. Leer correctamente cada uno de los datos del gráfico, comprendiéndolo como unión de un tallo y una hoja (parte entera y decimal de un número decimal).
4. Comprender el término frecuencia y la expresión mayor frecuencia.
5. Identificar la moda, es decir, el valor que más se repiten en el gráfico (4,1).
6. Interpretar la expresión mayor o igual que 5 y reconocer que corresponde a los datos cuyo tallo es 5, 6 o 7.
7. Determinar el número de hojas con tallos 5, 6 y 7, y sumar estos valores.

En la Tabla 4.5.4.11 mostramos la diversidad de objetos matemáticos que intervienen en las anteriores prácticas realizadas para el desarrollo de este ítem.

Tabla 4.5.4.11. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 9*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Obtener información de un gráfico.
Lenguajes	- Palabras en el enunciado y rótulos, números decimales, lenguaje gráfico (línea, disposición de los datos) y numérico (tallo y hojas).
Conceptos-definición	- Conjunto de datos, dato, desigualdad, diagrama de tallo y hojas, distribución, frecuencias, hojas, tallo, número decimal, parte entera, parte decimal, suma, variable, valor, moda.
Proposiciones	- Un número decimal consta de parte entera y parte decimal.
Procedimientos	- Leer e interpretar el enunciado. - Identificar la variable representada. - Calcular la frecuencia de cada valor. - Identificar la moda. - Realizar cálculos con las frecuencias.
Argumentos	- No se pide un argumento al estudiante.

Ítem 10. Elegir un gráfico de sectores para representar una distribución

En este ítem, que se enuncia en la Figura 4.5.3.12, se pide seleccionar un gráfico de sectores que represente una determinada distribución de datos, por tanto, se trabaja al nivel semiótico de 3. El nivel de lectura requerido es el 4, pues se debe realizar una lectura crítica de los gráficos, comparando con la información dada, para seleccionar el más adecuado.

En la tabla se registró la cantidad de estudiantes de un colegio que practican diversos deportes.

Deporte	Cantidad de niños
Fútbol	100
Tenis	40
Vóleibol	60

¿Cuál de los siguientes gráficos representa la información de la tabla? Justifica tu respuesta

A

Porcentaje de niños

60 % 100 % 40 %

□ Fútbol ■ Tenis ■ Vóleibol

B

Porcentaje de niños

30 % 45 % 25 %

□ Fútbol ■ Tenis ■ Vóleibol

C

Porcentaje de niños

30 % 50 % 20 %

□ Fútbol ■ Tenis ■ Vóleibol

Gráfico:
Justifica por qué has elegido este gráfico:

Figura 4.5.4.12. Enunciado del ítem 10 en la prueba piloto

El estudiante debe indicar que la alternativa correcta es la C. Descarta la A porque se confunde frecuencia con porcentaje, haciendo que la suma de los sectores circulares sea 200%, lo que es incorrecto y corresponde sólo a una lectura literal. En el caso de la opción B, si bien la suma de los porcentajes es 100% y el valor mayor está relacionado al sector de mayor área, estos porcentajes no se relacionan con los datos de la tabla, por ejemplo, el fútbol en el gráfico corresponde al 30% y que según la tabla sería un 50%; por lo que no corresponde.

En lo que sigue detallamos las prácticas matemáticas que se necesita para completar con éxito este ítem:

1. Leer comprensivamente el enunciado, para identificar el contexto de los datos.
2. Recordar el significado de una tabla de frecuencias y sus elementos estructurales.
3. Lectura de las etiquetas que corresponden a la variable, categorías y frecuencias, comprendiendo su significado.
4. Lectura simple de cada uno de los datos de la tabla de frecuencias.
5. Recordar el significado del gráfico de sectores y sus elementos estructurales.
6. Comprender que, en los gráficos dados, los datos están expresados en porcentajes.
7. Traducir las frecuencias de la tabla a porcentajes. Una forma sencilla es relacionar el total de estudiantes que practican deportes (200) y el total de porcentaje en un

gráfico de sectores (100%), observando que el porcentaje es la mitad de frecuencia asociada a cierto deporte.

8. Los porcentajes se calculan de forma sencilla dividiendo las frecuencias por 2 en este caso.
9. Elegir uno de los gráficos y argumentar la selección del gráfico seleccionado.

En la Tabla 4.5.4.12 presentamos los diferentes objetos matemáticos que se ponen en juego al resolver este ítem.

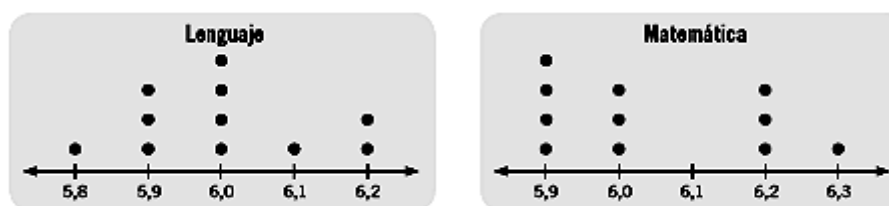
Tabla 4.5.4.12. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 10*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Elegir entre varios gráficos uno que represente mejor la información de una tabla.
Lenguajes	- Palabras en el enunciado y rótulos, números enteros, porcentajes, lenguaje gráfico (círculo, sector circular), tabla, gráfico de sectores.
Conceptos-definición	- Círculo, conjunto de datos, datos, tabla estadística, gráfico de sectores, sector circular, grados, porcentajes, número entero, adición, variable, valor, frecuencia, proporción, sector circular.
Proposiciones	- La suma de los porcentajes en un gráfico de sectores es de 100. - La frecuencia es proporcional al área del sector circular en cuestión.
Procedimientos	- Leer e interpretar el enunciado. - Calcular porcentajes de cada categoría. - Comparar información en varios gráficos.
Argumentos	- El estudiante debe explicar la elección de tanto en el total de las frecuencias y su relación porcentual, así como la porción del círculo que ocupa.

Ítem 11. Realizar una lectura crítica de un diagrama de puntos

En el último ítem, que vemos en la Figura 4.5.4.13, se pide realizar una valoración crítica de la información y de las afirmaciones en torno a una distribución de datos representados en un diagrama de puntos (nivel de lectura 4 y nivel semiótico 3).

Los siguientes diagramas corresponden a las calificaciones (entre 1,0 y 7,0) obtenidas por los niños de sexto curso en Lenguaje y Matemática.



María dice que las Matemáticas son más difíciles porque hay pocos niños con nota de 6 o más. ¿Estás de acuerdo? Explica.

Figura 4.5.4.13. Enunciado del ítem 11 en la prueba piloto

La respuesta correcta, es decir, que no se está de acuerdo con la afirmación que realiza por María, pues a pesar que el número de notas iguales o superiores a 6 son iguales en ambas asignaturas, en la prueba de matemática las calificaciones son más altas y presentar una mayor media (6,7 contra 6,6).

Para llegar a esta respuesta se deben seguir determinadas prácticas matemáticas, que se detallan a continuación:

1. Leer comprensivamente el enunciado para entender las preguntas y el contexto de los datos
2. Recordar el significado de un diagrama de puntos y sus elementos.
3. Leer los rótulos y etiquetas de los datos para comprender qué gráfico representa cada calificación y el rango de calificaciones.
4. Leer los datos del gráfico.
5. Comparar el rendimiento en las asignaturas por medio del cálculo de la media aritmética o comparando el número de niños con notas igual o superior a 6.
6. Deducir que la afirmación es falsa.
7. Argumentar que la información es falsa, en base a la información representada.

En la Tabla 4.5.4.13 mostramos los objetos matemáticos (estadísticos y matemáticos) que se movilizan al solucionar esta tarea:

Tabla 4.5.4.13. *Objetos matemáticos ligados a la solución correcta del ítem 11*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas Lenguajes	- Rebatir o confirmar afirmaciones a partir de un gráfico. - Palabras en el enunciado y rótulos, números decimales, lenguaje gráfico (puntos, línea).
Conceptos-definición	- Cantidad, conjunto de datos, dato, distribución, gráfico de puntos, números decimales, magnitud, media aritmética, unidad de medida, variable, valor, frecuencia, punto, recta numérica.
Proposiciones Procedimientos	- Cada punto equivale a un dato. - Leer e interpretar el enunciado. - Lectura de datos y cálculo de la media. - Comparar dos distribuciones por medio de la media aritmética o por la frecuencia de valores que supera un valor dado.
Argumentos	- El estudiante argumentar la falsedad de la afirmación de María, ya que la media de las notas de matemática es mayor que las de lenguaje.

Síntesis. Significado evaluado por el cuestionario

Para finalizar el análisis a priori del cuestionario, presentamos en las Tablas 4.3.4.14 y 4.5.4.15 una síntesis los diferentes objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas necesarias para resolver los ítems. Dichas tablas se han obtenido resumiendo las que hemos ido desarrollando a lo largo de esta sección y permite describir el significado institucional evaluado en el cuestionario.

Al comparar con el significado institucional pretendido de los gráficos estadísticos en los textos analizados (Tabla 3.7.1) vemos que el cuestionario incluye todos los campos de problemas y tipo de lenguaje considerados en la configuración epistémica que define el significado pretendido.

Tabla 4.5.4.14. *Síntesis de situaciones problemas, lenguajes y conceptos evaluados en el cuestionario*

Tipo de objetos	Objetos matemáticos	Ítem										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Situaciones-problemas	- Construir un gráfico a partir de un listado de datos o de una distribución de frecuencias.	x							x			
	- Extrapolar un valor a partir de la información presentada en un gráfico.		x									
	- Traducir un gráfico a una tabla de frecuencias.			x	x							
	- Rebatir o confirmar afirmaciones a partir de un gráfico.						x					x
	- Obtener información de un gráfico.							x			x	
	- Comparar o elegir entre varios gráficos uno que represente mejor la información.									x		x
Lenguajes	- Palabras en el enunciado y rótulos, números enteros, etiquetas de los ejes, o de las tablas, lenguaje gráfico (ejes perpendiculares, barras, colores, puntos, líneas, sectores), iconos.	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Conceptos-definición	- Conjunto de datos, dato, individuo, variable, valor.	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Distribución de datos, frecuencia.	x		x					x		x	x
	- Diagrama de barras, altura, barra.	x	x	x					x			
	- Número entero, escala, proporcionalidad, operaciones.	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Número decimal, parte entera, parte decimal.										x	x
	- Magnitud, cantidad, medida, unidad de medida,	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x
	- Longitud, perpendicularidad.	x	x	x					x	x	x	
	- Pictograma, icono.					x	x					
	- Diagrama de líneas, segmentos, puntos, coordenadas cartesianas.								x		x	
	- Diagrama de tallo y hojas, tallo, hojas.											x
	- Diagrama de sectores, círculo, sector circular, porcentajes.											
	- Desigualdad.										x	
- Tablas de datos o de frecuencias.	x		x	x					x		x	

Respecto a los conceptos, incluye todos los tipos de gráficos reflejados en dicha tabla y los requeridos para la interpretación de cada uno, así como los provenientes de otras ramas de la matemática: geometría, números y operaciones, magnitudes y su medida, también encontrados en el significado institucional pretendido.

El conjunto de proposiciones consideradas en el desarrollo de los ítems son las descritas en el significado institucional pretendido, aunque con mayor detalle. Por ejemplo, dentro de convenios de construcción de cada gráfico, se tienen en cuenta ahora que la altura de la barra o punto o amplitud del sector ha de ser proporcional al valor de la variable o frecuencia.

Por la misma razón se enriquece el conjunto de procedimientos considerados. Así ahora la lectura directa o inversa del gráfico se descompone en los pasos descritos por Bertín (1967), lectura del título, identificación de las variables representadas, etc. Igualmente, se descompone en procedimientos más elementales la construcción de un gráfico. Finalmente, resaltamos el hecho de que todos los tipos de argumentos fijados en el significado institucional pretendido son ahora considerados, excepto la invención de problemas, que no se ha tenido en cuenta por no ser la actividad objetivo de nuestro trabajo.

Tabla 4.5.4.15. Síntesis de proposiciones, procedimientos y argumentos evaluados en el cuestionario

Tipo de objetos	Objetos matemáticos	Ítem										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Proposiciones	- La altura de la barra o punto o amplitud del sector ha de ser proporcional al valor de la variable o frecuencia.	x	x	x			x	x	x			x
	- Las divisiones de igual longitud en el eje Y corresponden a diferencias iguales de valor de la variable.	x	x	x			x	x	x			
	- Correspondencia entre proporcionalidad geométrica y numérica.	x	x	x			x	x	x			x
	- Dos iconos iguales representan el mismo valor numérico.					x	x					
	- El valor o la frecuencia total es la suma de valores o frecuencias de los datos.					x						
	- Relación de igualdad o desigualdad.								x			x
	- Relación de orden.								x			
	- Relación entre escala y pendiente de un segmento									x		
	- Un número decimal se compone de parte entera y parte decimal.										x	
	- Suma de porcentajes es 100.											x
	Procedimientos	- Leer e interpretar el enunciado.	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
- Identificar las variables representadas en el gráfico		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X
- Escribir título del gráfico y de los ejes o de una tabla.		x		x					x			
- Clasificar los datos.									x			
- Calcular las frecuencias o porcentajes de cada valor									x		x	x
- Fijar la escala, origen y máximo de la misma. Fijar divisiones de la escala.		x								x		
- Construir las barras proporcionales en longitud al valor de la variable o a la frecuencia de una categoría.		x		x					x			
- Realizar una estimación.				x								
- Cálculos a partir de los datos.				x		x	x				x	x
- Completar los datos de una tabla a partir del gráfico.					x	x						
- Identificar la moda.												x
- Comparar información en dos gráficos.										x		
Argumentos	- Argumentar una estimación basada en los datos.		x									
	- Argumentar la veracidad de una afirmación.					x						
	- Argumentar la elección de un gráfico.									x	x	x

En resumen, podemos asegurar que el contenido cubierto por nuestro cuestionario refleja con gran precisión el contenido analizado en los libros de texto en el Capítulo 3. Y por ello hay una correspondencia entre el significado institucional pretendido de los gráficos estadísticos, descrito en dicho capítulo y el evaluado en nuestro cuestionario. Retomaremos esta idea al final del capítulo para presentar evidencias de validez de contenido del instrumento.

4.6. PRUEBA PILOTO DEL CUESTIONARIO

Finalizada la selección y modificación de los ítems que serían parte del cuestionario, de acuerdo al juicio de los expertos, se realizó una prueba piloto del mismo, con el objetivo de comprobar el tiempo requerido en su implementación, así como la legibilidad por parte de estudiantes chilenos que finalizan Educación Primaria.

Con esta prueba también se recabaría información de los estudiantes sobre posibles dificultades en la comprensión de los enunciados, al tiempo que se analizarían posibles errores que pueden presentar al desarrollar las actividades propuestas en los ítems. En lo que sigue describimos la muestra y los resultados de la prueba piloto.

4.6.1. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA DE ESTUDIANTES

Para la prueba piloto del cuestionario se negoció su aplicación en una escuela pública de en la comuna de Queilen, Región de Los Lagos, Chile. Se eligió una muestra reducida de cuatro estudiantes de 13 años de edad (a los que hemos asignado los códigos: E1, E2, E3 y E4), seleccionados por tener rendimientos medios en matemática. Estos cursaban el 7° de Educación Primaria y realizaron la actividad dentro de sus clases, con autorización del profesor de aula y del director del centro escolar. Eran estudiantes con ganas de participar, por lo que pensamos serían idóneos para proporcionarnos su opinión sobre el cuestionario.

Participaron en la aplicación tres niñas y un niño, a quienes se les explicó la importancia de responder cuidadosamente todas las actividades, y que contaban con dos horas para su desarrollo; tiempo que fue más que suficiente, pues todos acabaron mucho antes. Igualmente les informamos de los resultados obtenidos.

4.6.2. RESULTADOS DEL ESTUDIO PILOTO Y MODIFICACIONES EN ALGUNOS ÍTEMS

Luego de la aplicación de la prueba piloto, se realizó un análisis de contenido en las respuestas, para categorizarlas en incorrectas, parcialmente correctas, incorrectas o sin respuesta, como observamos en la Tabla 4.6.2.1.

Tabla 4.6.2.1. Frecuencia de respuesta al cuestionario piloto

Ítem	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Sin respuesta
1		4		
2		1	3	
3	3	1		
4	4			
5.1	1		3	
5.2	1		3	
6.1	4			
6.2		1	3	
6.3	4			
6.4	1	3		
7		2	1	1
8	4			
9.1		3		1
9.2		3		1
10	2		2	
11	2		2	

La respuesta correcta corresponde básicamente a la descrita en el análisis a priori, mientras que las parcialmente correctas incluyen pequeños errores o no están completas. Estos resultados nos informan que la dificultad del cuestionario es media, pues la mayoría de las su tareas los estudiantes dan respuestas correctas y/o parcialmente

correctas, el número de respuestas correctas son iguales al de las incorrectas. Sólo en cuatro su tareas hay más incorrectas que correctas y sólo en tres algún estudiante no la responde. Junto con determinar si las respuestas son correctas o incorrectas, hemos identificado los errores que cometen los estudiantes, ya que nos pueden ayudar a mejorar el ítem. Asimismo, recogimos sus comentarios sobre aspectos que no comprenden que nos permitieron mejorar la redacción del ítem. A continuación, presentamos estos resultados:

Ítem 1. Construir un diagrama de barras a partir de un listado de datos

Los cuatro estudiantes fueron capaces de construir el diagrama, traduciendo la lista de datos a un gráfico de barras. Las cuatro construcciones se pueden considerar como parcialmente correctas, ya que presentan diferentes errores que pueden dificultar la lectura de la información que en él se muestra.

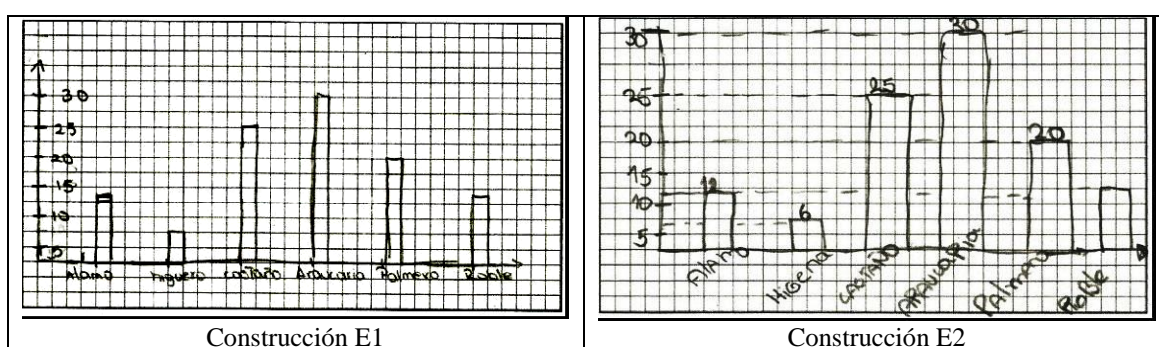


Figura 4.6.2.1. Respuesta de estudiantes en la prueba piloto al ítem 1

La Figura 4.6.2.1 es representativa de las construcciones realizadas por los estudiantes y, por ende, de los errores cometidos, entre los que se destacamos:

- La ausencia de título general del gráfico y en los ejes, error que también aparece en la investigación de Arteaga (2011), Cruz (2013) o Su (2004).
- Errores de proporcionalidad en la escala, la que se ve reflejado en que para distancias iguales se les asigna un segmento de diferente medida. Por ejemplo, en la construcción de E1, la distancia entre 0 y 5 es diferente a la que hay entre 10 y 15, lo mismo sucede entre 10 y 15 entre 25 y 30, en la construcción de E2; descrito por Arteaga (2011), Evangelista, Oliveria y Ribeiro (2014) o Su (2004). Los estudiantes presentan un *conflicto semiótico* al no relacionar la proporcionalidad numérica con la geométrica.
- Barras con anchos y distancia entre ellas diferentes, lo que distorsiona la información y no cumple con los convenios de construcción. Error observado, por ejemplo, en el trabajo de Cruz (2013).

Ítem 2. Extrapolar información de un diagrama de barras que representa una lista de datos

Los estudiantes no observan la tendencia creciente de los datos en el gráfico y sus respuestas se basan en la lectura literal del valor asociado a la última semana que en él se registra. Esto significa que los estudiantes creen que la respuesta está explícita en el gráfico y no que se estima a partir de la observación de los datos. Ejemplo de este tipo

de respuestas es la que entrega por E1, al señalar:

342. Lo he dado porque aparece en el gráfico (E1).

Sólo uno de estos estudiantes (E2) entrega una respuesta que se puede considerar como parcialmente correcta, donde estima en valor de la séptima semana a partir de la diferencia de los valores de las últimas:

374. Porque cada vez [vez] va creciendo en 32 en 32 (E2).

Producto del alto porcentaje de respuestas incorrectas consideramos pertinente modificar el enunciado del ítem, tal como se muestra en la Figura 4.6.2.2. También, cambiamos la situación planteada y el rótulo de los datos.

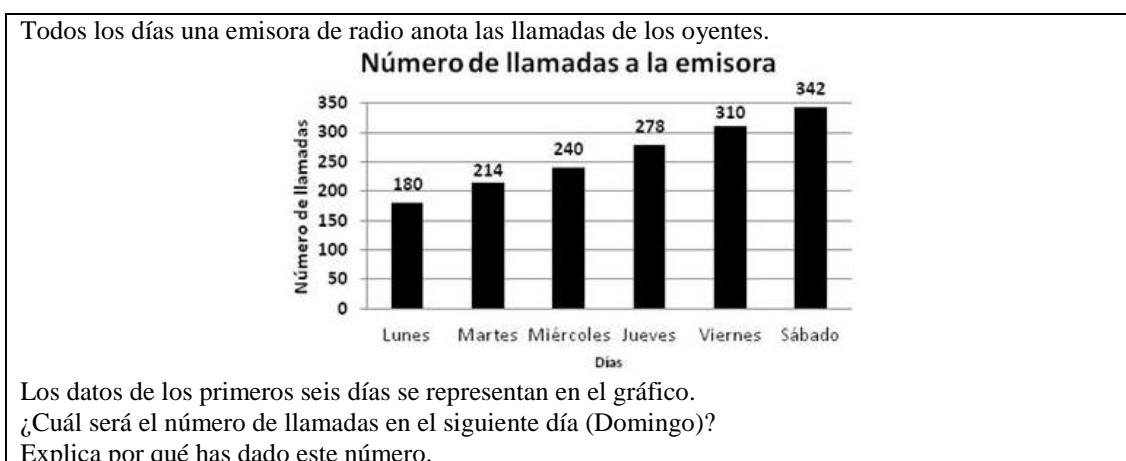


Figura 4.6.2.2. Ítem 2 del cuestionario final, modificada luego de la prueba piloto

Ítem 3. Traducir de un gráfico de barras a una tabla

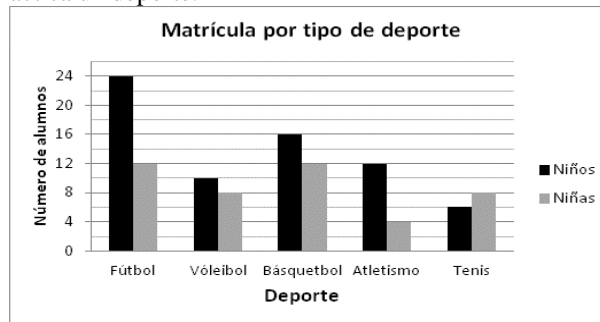
Como hemos visto anteriormente, en este ítem se debe traducir la información de un gráfico de barras dobles a una tabla de frecuencias, por medio de una lectura literal del diagrama. Esta es una actividad que los cuatro estudiantes responden correctamente, salvo E2 que confunde las barras y lee en forma errada de la frecuencia de niños en Atletismo, que es 10 y no 5 como se muestra en la Figura 4.6.2.3. Esta respuesta se ha considerado como parcialmente correcta.

Deporte	NIÑOS	NIÑAS
Futbol	25	12
Voleibol	10	8
Basketbol	15	12
Atletismo	5	6
tenis	5	9

Figura 4.6.2.3. Respuesta de E2 al ítem 3

Los resultados permiten observar que esta es una actividad sencilla, y que no debería implicar dificultades para los estudiantes en la aplicación definitiva. Con esta información, hemos creído necesario modificar levemente los datos del gráfico; quitando los rótulos que está sobre de las barras relacionadas a las niñas, y cambiando algunas frecuencias para no dificultar la lectura, tal como observamos en la Figura 4.6.2.4.

El gráfico muestra el número de alumnos matriculados en cada deporte practicado en una escuela. Cada estudiante sólo practica un deporte.



Representa estos datos en una tabla de frecuencias.

Figura 4.6.2.4. Ítem 3 del cuestionario final

Ítem 4. Traducir un pictograma a una tabla

Los estudiantes no presentan errores al resolver esta actividad, por lo que todas las respuestas son correctas. Ahora bien, en la aplicación definitiva se espera, por ejemplo, que los estudiantes consideren que el valor del icono es la unidad y no 10, como se señala en el pictograma. En la Figura 4.6.3.5 vemos un ejemplo de estas respuestas.

Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	75 Horas
Casillero	90 Horas
Piscina	55 Horas
Canchas de tenis	50 Horas
Total	270 Horas

Figura 4.6.2.5. Respuesta de E3 al ítem 4

Ítem 5. Realizar una lectura crítica de una distribución representada en un pictograma

Los estudiantes, en su mayoría, realizan una lectura literal de la cantidad de iconos que se muestran en el pictograma, considerando que estos equivalen a la unidad y no a quince como se explicita. Sólo uno de ellos determina correctamente la veracidad o falsedad de las afirmaciones enunciadas, respuesta considerada parcialmente correcta porque no pone en evidencia el proceso seguido para llegar al resultado. Por ejemplo, en la primera afirmación (*sólo hay dos libros de ciencia ficción*), que es falsa, porque hay 30 libros de ciencia ficción, E1 señala:

Es verdadero porque hay dos libros de ciencia ficción (E1).

Por su parte, E3 marca la alternativa correcta (y su argumentación es parcialmente correcta) en la segunda pregunta (*Hay 60 libros infantiles*), señalando:

Es verdadero porque hay 60 libros infantiles (E3).

Ítem 6. Lectura de una lista de datos en un gráfico de líneas

En este ítem los estudiantes realizan cuatro actividades sobre un gráfico de líneas. En la primera pregunta se pide leer el título del gráfico. Todos los estudiantes logran hacer con éxito la tarea y son consideradas correctas; aunque E2 omite algunas palabras:

“producción de cemento”.

En la segunda pregunta, en la que se pide identificar las variables representadas en el gráfico. Pese a ser una pregunta sencilla, observamos que la mayoría de los estudiantes responden de forma errada. Por ejemplo, E2 indica que “las variables en 50 y 100”, respuesta que hace referencia a cómo está definida la escala en el eje Y; E3 señala que “las variables son de: enero a mayo bajaron y de junio a diciembre subieron”, realizando un comentario sobre la tendencia que muestran los datos; y E4 declara “los números de los meses que se entregaron los toneladas de cemento”, en la que se hace alusión a cantidad de toneladas que se producen en cada mes. La respuesta de E1 es considerada parcialmente correcta, ya que explicita una de las variables del gráfico “los meses”.

En la tercera pregunta, ¿Cuántas toneladas de cemento se produjeron durante el mes de junio?, todos los estudiantes contestan correctamente, indicando que en junio se producen 200 toneladas. Por ejemplo, E1 responde:

Se produjeron [produjeron] 200 toneladas de cemento (E1).

En la cuarta pregunta, ¿En qué mes(es) la producción fue de 200 toneladas de cemento?, todos los estudiantes han identificado al menos un mes en que su producción es de 200 toneladas, respondiendo de la siguiente forma:

En el mes de junio (E1).

En el mes de marzo (E2).

En el mes que la producción de cemento fue de 200 toneladas es en: junio y julio (E3).

En marzo, junio y julio (E4).

En el caso de E4, que identifica los tres meses, su respuesta es correcta, en el resto de los casos se considera parcialmente correcta.

Al analizar las respuestas observamos que las preguntas 3 y 4 están relacionadas, ya que en la primera se pide la cantidad de cemento relacionada al mes de junio, y en última se solicita identificar los meses en que la cantidad de cemento fue de 200, entre los que está junio. Por ello, optamos por modificar la tercera pregunta, cambiando el mes por febrero, tal como se muestra en la Figura 4.6.2.6.

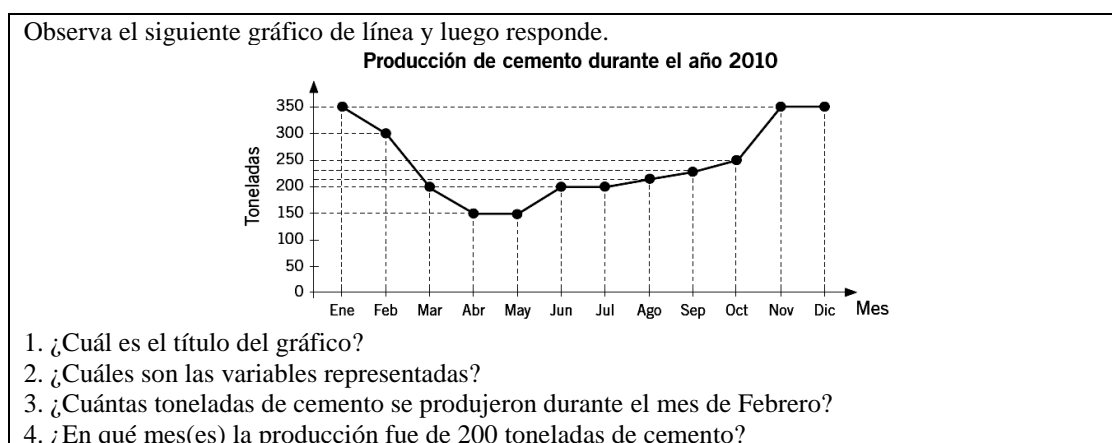


Figura 4.6.2.6. Ítem 6 del cuestionario final

Ítem 7. Construir un gráfico de barras formando previamente una distribución

En el séptimo ítem se pide la construcción de un gráfico de barras dado un conjunto de datos sin agrupar. En ella, identificamos construcciones parcialmente correctas e incorrectas. Ejemplos de estas respuestas vemos en la Figura 4.6.2.7, donde E3 realiza una construcción parcialmente correcta, en la que no se asigna título general y a los ejes. En el caso de E4, observamos que no define una escala que permita representar todas las frecuencias; situación por la que se considera incorrecta. Finalmente, E1 no responde a la actividad.

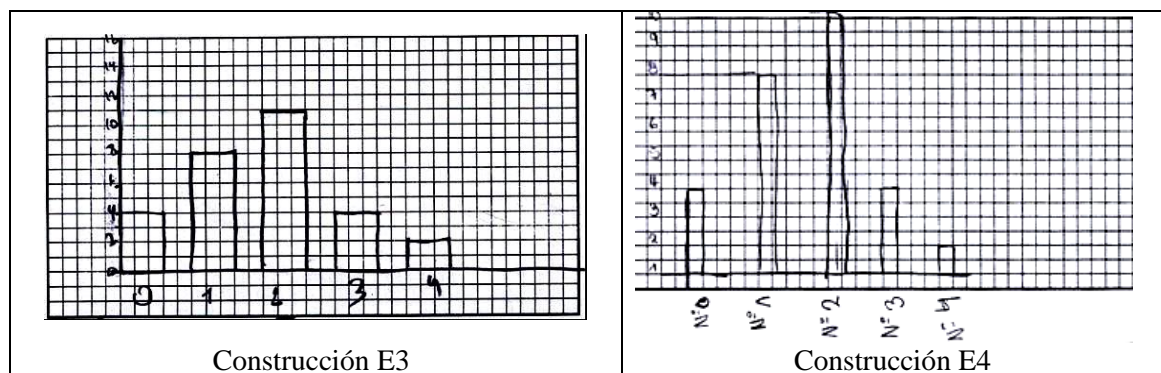


Figura 4.6.2.7. Respuesta de estudiantes en la prueba piloto al ítem 7

Ítem 8. Elegir un gráfico de líneas dobles para representar una distribución

En el octavo ítem los estudiantes deben elegir entre dos gráficos que presentan la misma información, pero que difieren en las escalas, provocando un efecto visual en lo representado. La elección del gráfico que debería usar el candidato Pedro es el correcto (B), pero en sus argumentos no son claros o correctos. Las respuestas de los estudiantes fueron:

- Yo creo que Pedro mostraría el gráfico B porque está bien explicado (E1).
- El B porque tiene más intención de voto (E2).
- B. Porque se ve más clarito que él gana (E3).
- La B porque se muestra en ventaja (E4).

Ítem 9. Leer un diagrama de tallo y hojas

En este ítem se trabaja la lectura de un diagrama de tallo y hojas con las calificaciones de los estudiantes de un curso. Este ítem consta de dos preguntas. En la primera, se pide encontrar el valor con mayor frecuencia, en la que se debe identificar las hojas que más se repiten y luego relacionar este valor con el tallo para obtener la nota. Las respuestas de los estudiantes han permitido encontrar dos tipos de respuestas, las que se han considerado como parcialmente correctas. La respuesta de E1 está basada en no distinguir la parte entera y decimal, por lo que da como respuesta el tallo y todas las hojas; situación similar a lo que hace E3. Por otro lado, E4 sólo consigna la parte entera.

- La nota que presenta mayor frecuencia es la de 4,111169 (E1).
- Es la 4 (E4).

En la segunda actividad, se solicita la cantidad de estudiantes que obtienen una calificación mayor o igual a 5. Las tres respuestas proporcionadas, que consideramos parcialmente correctas, las hemos clasificado en dos grupos. Un caso, el de E1, se fija solamente en las hojas del tallo 5, obteniendo tres valores (5, 7, y 8); en el caso de E3 considera a los que alcanzan sólo notas mayores a 5 (5+1). Esta última respuesta es similar a la de E4.

3 estudiantes obtuvieron una nota mayor (E1).

Los estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual al 5 son y alumnos (E3).

Ítem 10. Elegir un gráfico de sectores para representar una distribución

En el penúltimo ítem se evalúa si los estudiantes son capaces de seleccionar el gráfico de sectores que representa la distribución de datos mostrados en una tabla de frecuencias. En esta actividad observamos dos tipos de respuestas, las que seleccionan el gráfico A, consideradas incorrectas; y las que eligen el gráfico C, que son correctas. Por ejemplo, E4 indica que el gráfico correcto es el A, porque la tabla muestra la misma información que el gráfico; por lo que realiza una lectura literal y no relaciona las frecuencias de la tabla con los porcentajes del gráfico que deben sumar 100. Por otra parte, E3 establece la relación matemática entre las frecuencias de la tabla y los porcentajes del gráfico de sectores.

Es la A porque son las mismas cantidades que la tabla dicen (E4).

Lo elijo porque el futbol es la mitad y el único gráfico que lo demuestra es el C (E3).

Ítem 11. Elegir un gráfico de sectores para representar una distribución

En el último ítem, los estudiantes deben explicar si están de acuerdo o no con una afirmación que se realiza sobre la distribución de las calificaciones de un grupo de estudiantes en matemática y lenguaje, representadas en diagramas de puntos. Este ítem lo respondieron los cuatro estudiantes; dos de las respuestas son correctas y dos son incorrectas. Las incorrectas son las que mencionan que la afirmación es verdadera, como E2, y las correctas son las que dicen que son falsas, aunque la justificación sea incorrecta.

Si porque eso es lo que explica la tabla (E2).

No porque las matemáticas son más fáciles porque lo único que hay que hacer es estudiar y ponerle empeño en los estudios (E3).

4.7. APROXIMACIÓN A LA VALIDEZ DE CONTENIDO

Como punto final de este capítulo, discutimos en esta sección las evidencias que podemos aportar a la validez de contenido del cuestionario diseñado. La validación es un tema de gran importancia en el proceso de construcción de un instrumento (Barraza, 2007). Batanero y Díaz (2005) indican que para validar un cuestionario es necesario seguir un proceso riguroso de recogida y documentación. Por su parte, la validez es un concepto unitario, y las distintas formas de evaluarla se complementan. Messick (1998) define la validez como:

(...) un juicio evaluativo global del grado en el que la evidencia empírica y la lógica teórica apoyan la concepción y conveniencia de las inferencias y acciones que se realizan basándose en las puntuaciones que proporcionan los test u otros instrumentos de medida (p. 19).

Una de las evidencias de validación se consigue a través de la validez de contenido, esto se realiza para determinar si el reactivo evalúa lo que se pretende medir en el cuestionario (Salkind, 1999), en nuestro caso si se evalúa la comprensión sobre gráficos estadísticos y se consideran las variables pertinentes para en dicho proceso.

Podemos, entonces, para el cuestionario asegurar que esta validez se alcanza en un grado razonable. Por un lado, se realizó una planificación cuidadosa del contenido del instrumento, en base al estudio previo de los libros de texto y de los documentos curriculares, que nos permitieron fijar las variables que influyen en la comprensión y construcción de los gráficos. Dichas variables se tuvieron en cuenta en la construcción de las tablas de especificaciones del contenido.

Por otro lado, fijado el contenido del instrumento, se llevó a cabo un juicio de expertos, que nos ayudó a seleccionar un ítem entre tres posibles, para cada una de las celdas de las tablas que fijaban el contenido. Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) mencionan que, en la actualidad, el uso del juicio de expertos es una práctica generalizada y que requiere que la información obtenida sea analizada de forma adecuada para que el instrumento mida para lo que fue diseñado. En nuestro caso se eligieron ítems muy bien valorados por los expertos (que fueron diez especialistas) y con alto grado de consenso. Aún más, las sugerencias de estos expertos se han tenido en cuenta en la mejora de la redacción de los ítems.

También, hemos usado el análisis semiótico a priori de los ítems para revisar la congruencia entre los ítems y el significado institucional pretendido en los libros de texto descrito en el Capítulo 3. Según Osterlind (1989), el establecimiento de la validez mediante la determinación de la correspondencia entre ítems y un contenido previsto se aplica especialmente a los test de rendimiento como es el nuestro. Dicho análisis mostró una gran representatividad del contenido de los ítems (significado evaluado) respecto del significado institucional pretendido y por tanto es otra prueba de validez de contenido.

4.8. CONCLUSIONES SOBRE EL CUESTIONARIO

El objetivo de este cuestionario es evaluar el significado personal de estudiantes que finalizan la Educación Primaria, en el contexto chileno, sobre los gráficos estadísticos, y pensamos que cumplimos con la construcción de dicho instrumento. Previo a la misma, se realizó un análisis detallado de la presencia de los gráficos estadísticos en las directrices curriculares y su implementación en series de libros de texto, ya que estos elementos nos permiten aproximarnos al significado institucional pretendido. Este estudio previo viene dado por la importancia del libro de texto para la organización de la instrucción y su utilidad para dar cumplimiento a las directrices curriculares. En este caso, queremos evaluar si los estudiantes comprenden estas actividades, como una forma de verificar que estos temas son tratados.

Por otro lado, hemos realizado un juicio de expertos, con diferentes académicos que investigan temáticas de Educación Estadística. Estos expertos han realizado una valoración a cada ítem y diferentes comentarios, que consideramos para la mejora de los ítems.

Junto con la selección el ítem más idóneo, según nuestro objetivo de investigación, realizamos correcciones para facilitar la comprensión de las situaciones planteadas en los enunciados y de aspectos gráficos. Además, se realizó el análisis a priori descrita del instrumento.

Luego, se realizó la prueba piloto con un grupo de cuatro estudiantes, que nos permitió observar que dos horas son suficientes para el desarrollo de las actividades, así como hacer pequeñas modificaciones en el enunciado para la mejora de la comprensión de los estudiantes.

Todo lo anterior, contribuye a obtener un cuestionario validado para medir la comprensión sobre gráficos estadísticos en estudiantes que finalizan la Educación Primaria.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DEL ESTUDIO DE EVALUACIÓN

- 5.1. Introducción
- 5.2. Objetivos e hipótesis
- 5.3. Descripción de la muestra y procedimiento
- 5.4. Metodología del análisis de los datos
- 5.5. Resultados por ítem
 - 5.5.1. Resultados en el ítem 1
 - 5.5.2. Resultados en el ítem 2
 - 5.5.3. Resultados en el ítem 3
 - 5.5.4. Resultados en el ítem 4
 - 5.5.5. Resultados en el ítem 5
 - 5.5.6. Resultados en el ítem 6
 - 5.5.7. Resultados en el ítem 7
 - 5.5.8. Resultados en el ítem 8
 - 5.5.9. Resultados en el ítem 9
 - 5.5.10. Resultados en el ítem 10
 - 5.5.11. Resultados en el ítem 11
- 5.6. Estudio de la puntuación total
- 5.7. Características psicométricas del cuestionario
- 5.8. Diferencia entre grupos
- 5.9. Conflictos semióticos detectados en el estudio de evaluación
- 5.10. Conclusiones

5.1. INTRODUCCIÓN

En este quinto capítulo describimos los resultados del estudio de evaluación de la comprensión gráfica realizado en una muestra de estudiantes de 6° y 7° de Educación Primaria en Chile, utilizando el cuestionario cuya construcción y validación hemos descrito en el Capítulo 4. Por medio de este estudio hemos tratado de alcanzar el tercer objetivo de esta investigación, descrito en el Capítulo 1. Las respuestas de los estudiantes al cuestionario de evaluación nos permitieron aproximarnos al significado personal que estos tienen respecto a los gráficos estadísticos, caracterizando sus conocimientos y conflictos semióticos. Además, se pudo comprobar si los objetivos planteados sobre los gráficos estadísticos en las directrices curriculares y libros de texto son alcanzados por los escolares chilenos de la muestra.

En este capítulo, comenzamos con la formulación de los objetivos e hipótesis del estudio de evaluación realizado. Seguimos con la descripción de la muestra de estudiantes de Educación Primaria a los que se aplicó el cuestionario de evaluación.

Finalizamos con la descripción de la metodología seguida para analizar las respuestas de los estudiantes a los ítems del cuestionario.

En las siguientes secciones realizamos un análisis detallado de los resultados en cada uno de los ítems, describiendo los tipos de respuestas, con ejemplos de cada una de las categorías de las mismas. Estudiamos los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, caracterizando los principales errores y evaluando el nivel de lectura alcanzado cuando esto es posible. También, establecemos una puntuación global de cada ítem, comparando todos estos resultados en los dos cursos que participan en el estudio.

Finalmente, analizamos las características psicométricas del cuestionario y estudiamos la puntuación total que alcanzan en el mismo los estudiantes, comparando los resultados por grupo. Terminamos con las conclusiones del capítulo y del estudio de evaluación. Resultados parciales se han publicado en Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero (2017) y Batanero, Díaz-Levicoy y Arteaga (en prensa).

5.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS

El principal objetivo que se aborda en este capítulo, que se corresponde con el tercero de la investigación (Capítulo 1), es *evaluar la comprensión que alcanzan los estudiantes chilenos de 6° y 7° curso sobre los gráficos estadísticos utilizando un cuestionario válido y fiable*, de construcción propia (Capítulo 4). La importancia de este objetivo se deduce del hecho que nos permite estudiar si los contenidos sobre gráficos estadísticos que se plantean en las directrices curriculares y en los libros de texto son alcanzados por estos estudiantes. Este objetivo global se descompone en los siguientes:

O3.1. Seleccionar una muestra de estudiantes lo suficientemente amplia y representativa para que los resultados del estudio tengan suficiente fiabilidad y generalizabilidad. Para conseguir este estudio se eligió la muestra que se describe en la siguiente sección y está formada por escolares de diferentes centros educativos y regiones chilenas.

O3.2. Analizar los resultados obtenidos en cada uno de los ítems del cuestionario y la puntuación total alcanzada. Este objetivo se cumple en el resto de este capítulo con el análisis detallado que realizaremos y la interpretación de las respuestas típicas de los estudiantes.

O3.3. Comprobar si el conocimiento adquirido por los estudiantes de 6° curso se mantiene un año después de acabado lo que será en el nuevo currículo la Educación Primaria (7° curso). Para lograr este objetivo, en la mayoría de tablas y gráficos mostrados en los análisis realizados, comparamos los resultados en los dos grupos.

O3.4. Analizar las características psicométricas del cuestionario para finalizar el proceso de validación del mismo iniciado en el Capítulo 4. En concreto, al final del capítulo estudiamos la dificultad y discriminación de los ítems, así como la fiabilidad del cuestionario.

De acuerdo a estos objetivos, y teniendo en cuenta las investigaciones sobre este tema con estudiantes de edades similares a las de nuestra muestra que descritos en el Capítulo 2, se plantean las siguientes hipótesis.

H1. Esperamos que los estudiantes presenten dificultades de lectura de los gráficos estadísticos. Aunque esperamos que realicen una lectura literal de los datos con sencillez, prevemos encontrar más dificultades y errores cuando avanzamos en los niveles de lectura. Esta hipótesis se apoya en las dificultades descritas en investigaciones con estudiantes de edades similares a los de nuestro estudio, por ejemplo, las de Cruz (2013), Evangelista (2013), Fernández y Morais (2011), Guimarães (2002), Pagan y Magina (2011) y Pagan, Leite, Magina y Cazorla (2008). En todas estas investigaciones, aunque la mayoría de los estudiantes alcanzan los primeros niveles de lectura, pocos llegan a alcanzar los niveles superiores. Esperamos que estos resultados se reproduzcan en el contexto chileno y que no dependan del tipo de gráfico, pues los trabajos citados no contemplan todos los gráficos del currículo.

H2. Asimismo esperamos encontrar dificultades en la construcción de gráficos o en la traducción entre gráficos y de gráfico a tabla. Igualmente, las investigaciones previas, analizadas en el Capítulo 2, nos informan de la existencia de errores en la construcción de gráficos entre ellas, las de Cruz (2013), Fernández, Morais y Lacaz (2011), Jungkenn y del Pino (2009), Vasconcelos y Fernández (2013) y Wu (2004). Todas coinciden en la falta de comprensión por los estudiantes del propósito y necesidad del título del gráfico y de los ejes, de las dificultades para establecer las escalas y de la falta de proporcionalidad de algunos elementos de los gráficos. Nuestro trabajo tratará de confirmar la presencia de estas dificultades en estudiantes chilenos.

H3. Esperamos obtener unas buenas características psicométricas del cuestionario. Esta hipótesis se basa en la construcción rigurosa que se ha seguido y en el amplio tamaño de la muestra que utilizamos.

5.3. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA Y PROCEDIMIENTO

La muestra que colaboró en este estudio de evaluación estuvo formada por 745 estudiantes de 6° y 7° cursos de Educación Primaria de Chile, de los cuales 380 eran de 6° curso y 365 de 7°. Estos estudiantes asistían a 13 escuelas y colegios de diferentes ciudades de Chile (Osorno, Castro, Queilen, Puerto Octay, La Unión, Viña del Mar y Ñuñoa), lo que asegura una mayor representatividad geográfica y de características socioeconómicas de los participantes.

Además, entre los centros que prestaron su colaboración, encontramos escuelas de dependencia pública (municipalizada) y concertada (particular subvencionada); todas ellas se rigen por las directrices curriculares actuales (MINEDUC, 2012) que se describieron en el Capítulo 1. La distribución de los estudiantes que fueron parte de la muestra la presentamos en la Tabla 5.3.1, en la que se distingue según centro educativo (numerado de 1 a 13) y según el curso al que pertenecen (6° y 7°). Observamos que en la mayoría de los centros participaron estudiantes de los dos cursos en los que nos hemos enfocado y que el número total de estos, en cada uno de los cursos, es aproximadamente el mismo.

La muestra antes descrita no fue aleatoria, sino de tipo intencional, ya que el cuestionario de evaluación fue aplicado en las escuelas y cursos que hubo disponibles y a los que se accedió por medio de la negociación a través de una carta a los encargados de las instituciones educacionales y profesores. Sin embargo, intentamos conseguir la representatividad de la misma, con la forma de elección descrita.

Para facilitar el reconocimiento de las respuestas, a cada estudiante se le asignó un código Ex, de la forma x corresponde al número del 1 al 745, según el orden en que se

han revisado los ítems.

Tabla 5.3.1. *Distribución de la muestra*

Centro educativo	6°	7°	Total
1	21	24	45
2	28	27	55
3	20	20	40
4	18	18	36
5	18	17	35
6	59	49	108
7	0	21	21
8	27	16	43
9	22	30	52
10	65	26	91
11	42	51	93
12	60	52	112
13	0	14	14
Total	380	365	745

Una vez establecida la versión final del cuestionario, elaboramos dos formas alternativas, alterando el orden de las preguntas. La primera versión es la que se presenta en este capítulo y la segunda contiene exactamente los mismos ítems con otro orden. En cada uno de los grupos de estudiantes se repartieron de forma aleatoria cada una de las dos formas del cuestionario, de modo que aproximadamente la mitad de cada grupo pasó una versión. De este modo tratamos de evitar, tanto la posibilidad de copia, como que los últimos ítems tuviesen una tendencia a menor número de respuestas.

Una vez repartidos los cuestionarios pedimos a los estudiantes que completaran los datos solicitados al principio del mismo y que leyeran las instrucciones escritas, y se dedicaron unos minutos a explicar la forma de completarlo. De esta forma se aseguró que todos ellos recibían las mismas instrucciones y explicaciones acerca de la prueba (las instrucciones escritas).

El cuestionario fue completado exactamente en las mismas condiciones en todos los grupos; durante una de las sesiones de la asignatura de matemática. Se dejó un tiempo de dos horas, aunque prácticamente todos finalizaron antes. El periodo académico fue durante los meses de Noviembre y Diciembre de 2015.

5.4. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS

Posteriormente a la aplicación del cuestionario, procedimos a realizar al análisis de las respuestas proporcionadas en cada uno de los ítems. La determinación de las categorías de respuesta está basada en el análisis de contenido (López, 2002; Porta y Silva, 2003; Zapico, 2007), que ya hemos descrito en el Capítulo 3. Como indicamos en el mismo, este método permite indagar sobre la naturaleza del discurso, utilizado en documentos escritos. También, ha sido utilizado en otras tesis del grupo de investigación con el objetivo de describir y caracterizar tipo de respuestas en cuestionarios abiertos; por ejemplo, en Arteaga (2011), Cobo (2003) o Díaz (2007). Los pasos seguidos han sido los siguientes:

1. Seleccionar el ítem que se analizará. Para nosotros las unidades de análisis serán las respuestas a dicho ítem de cada uno de los estudiantes. Estos datos se transformaron

en *unidades de registro*, es decir, porciones mínimas de contenido para su estudio separado. En nuestro caso, cada estudiante fue codificado como un elemento (fila) de nuestro fichero de datos, identificándose con un número y añadiendo además el curso a que pertenece.

2. Establecer un *sistema de variables y categorías de análisis* para desarrollar el proceso de codificación de la información. Las variables se fijaron a priori y en cada ítem pueden variar un poco, aunque, en general consideramos las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. Mediante una primera revisión de los cuestionarios se estableció para cada ítem una primera lista de categorías (generalmente describiendo errores o variantes en las respuestas correctas); además, se identificaron niveles de lectura en los ítems en que era posible. Posteriormente en el proceso de codificación se amplió la lista de categorías en alguna de las variables.
3. Se codifica la información de cada una de las variables consideradas en la investigación. Siguiendo un proceso inductivo y cíclico, es decir, se realizó una lectura detallada de cada respuesta, se interpretaron y revisaron los datos obtenidos para dar sentido al análisis, relacionar con las categorías definidas y contrastar con el marco teórico que sustenta la investigación. En este proceso se consulta con los directores del trabajo y con otros compañeros, para dar mayor validez a las categorías finales utilizadas.
4. Con los datos ya codificados y depurados se llevaron a cabo diferentes análisis estadísticos, que incluyeron el descriptivo (porcentajes de respuestas) y gráficos estadísticos elementales (diagramas de barras adosados y gráficos de caja) para comparar los dos grupos.
5. Se completa el estudio con la obtención de gráficos y resúmenes estadísticos de la distribución de la puntuación total, y algunos contrastes estadísticos que permitieron evaluar las características psicométricas del cuestionario.

5.5. RESULTADOS POR ÍTEM

En este apartado describimos los resultados obtenidos para cada uno de los ítems del cuestionario. Estos se apoyan con la presentación de ejemplos para describir de mejor forma las categorías consideradas y con un estudio estadístico descriptivo de los resultados, comparando los dos cursos participantes.

5.5.1. RESULTADOS EN EL ÍTEM 1

En el primer ítem del cuestionario (Figura 5.5.1.1) se pide la *construcción* de un *gráfico de barras*, a partir de la información que se proporciona en una tabla de datos sobre la altura de algunas especies de árboles. La actividad se adaptó del estudio de Silva (2012), sobre el cambio de representación gráfica a tabular y viceversa con estudiantes de 3° y 5° curso de Educación Primaria. Este ítem involucra un nivel de complejidad semiótica 2, *representación de un listado de datos* (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010), donde cada dato corresponde a la altura de un árbol y en el cual no se utiliza la idea de distribución de frecuencias. Para desarrollarlo con éxito se exige un nivel de lectura de *leer los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), ya que el estudiante solo debe leer las frecuencias de la tabla y representarla sobre un eje cartesiano adecuadamente. El análisis semiótico del ítem se completó en el Capítulo 4.

Los estudiantes tienen como ayuda una plantilla cuadrículada que sirve de soporte para la construcción del gráfico de barras, y facilitarles la elaboración de la escala, una actividad que ha resultado difícil en los trabajos de Cruz (2013), Evangelista et al. (2014) y Fernández et al. (2011). También, se les proporcionaron los datos en la tabla, donde la primera columna identifica la variable y sus categorías y la segunda muestra los valores asociados a cada una de ellas. El estudiante debe elegir los ejes (horizontal o vertical) para representar la variable, establecer la escala (que esperamos sea unitaria y cada cuadrado representa una unidad). Debe colocar en el gráfico los respectivos rótulos (títulos en los ejes, categorías, valores de la altura), y un título general. Luego, se levantan seis barras, cuya altura corresponde, proporcionalmente, a los datos de los árboles mostrada en la tabla.

En la siguiente tabla mostramos la altura en metros de algunas especies de árboles.

Especie	Altura
Álamo	12
Higuera	6
Castaño	25
Araucaria	30
Palmera	20
Roble	12

Construye un diagrama de barras para representar estos datos.

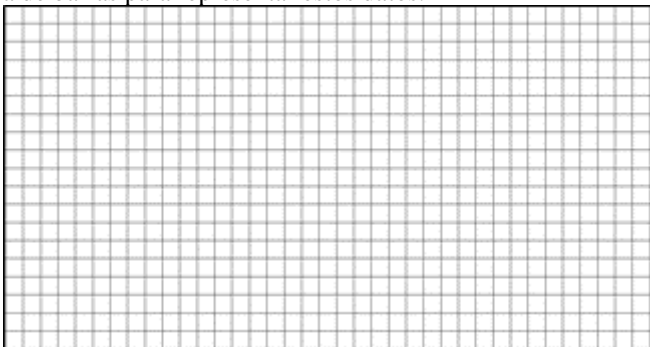


Figura 5.5.1.1. Ítem 1 del cuestionario de evaluación.

En los siguientes apartados describimos los resultados sobre el tipo de gráfico que han construido los estudiantes y la puntuación asignada, de acuerdo a la calidad de la construcción realizada.

Construcción de un gráfico de barras a partir de un listado de valores

Las construcciones de un gráfico de barras que han realizado los estudiantes se han clasificado en correctas o básicamente correctas, parcialmente correcta e incorrectas. En estos últimos casos se han diferenciado varias categorías, siguiendo las definidas por Arteaga (2011), y de acuerdo a los errores cometidos.

Respuesta correcta o básicamente correcta. Cuando se construye adecuadamente el gráfico, considerando los convenios y elementos estructurales del mismo (Kosslyn, 1985). Además, usa una escala adecuada y se representan de manera correcta los datos, asignando rótulos claros y precisos. También, siguiendo a Arteaga (2011), se incluyen los gráficos que se apartan un poco de las normas (por ejemplo, hay líneas adicionales), pero son correctos o bien los que son correctos, salvo la ausencia del título general. Los gráficos de la Figura 5.5.1.2 se han incluido en esta categoría, donde E487 utiliza todos los elementos requeridos para una construcción correcta de un gráfico de barras, a diferencia de E378 que omite el título general del gráfico. Sin embargo, aparte de esta

omisión, el gráfico es correcto. Hacemos notar que los estudiantes han propuesto una correspondencia entre la proporcionalidad numérica y geométrica, estableciendo una escala adecuada y construyendo barras de longitud proporcional a los valores de la variable.

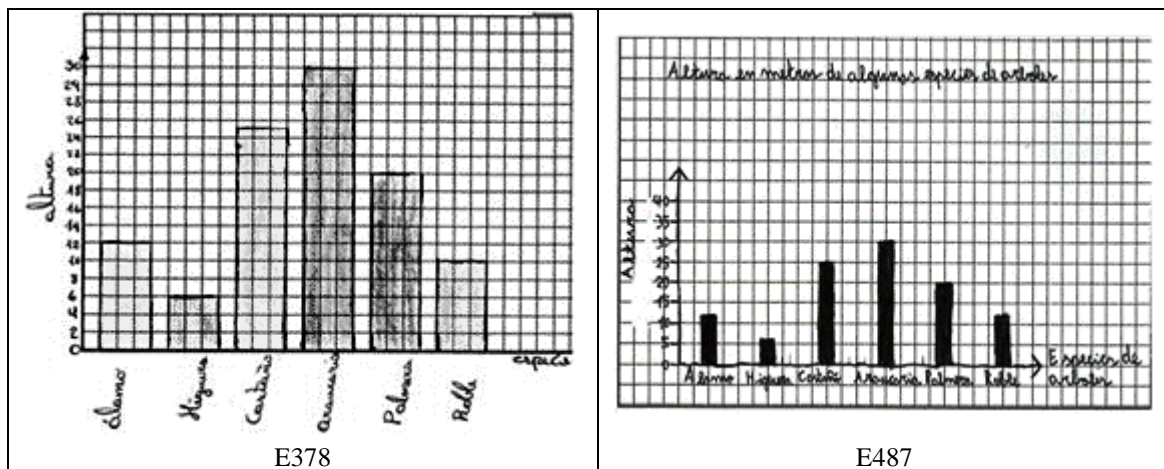


Figura 5.5.1.2. Gráficos estadísticos considerados correctos o básicamente correctos

Respuesta parcialmente correcta. Hemos considerado en este apartado las respuestas que contienen algún error u omisión de menor importancia, siendo el resto de elementos del gráfico correcto. Como se ha indicado, la construcción de un gráfico moviliza diferentes objetos matemáticos; puesto que este es un gráfico de complejidad semiótica 2 moviliza la idea de variable y sus valores, además de diferentes elementos numéricos y geométricos (Arteaga, 2011). En el proceso de construcción, el estudiante puede omitir, por error o por falta de conocimiento, alguno de los elementos estructurales del gráfico (Kosslyn, 1985), lo que dificulta la lectura de la información mostrada en esta representación. A continuación describimos aquellas respuestas que hemos identificado dentro de esta categoría:

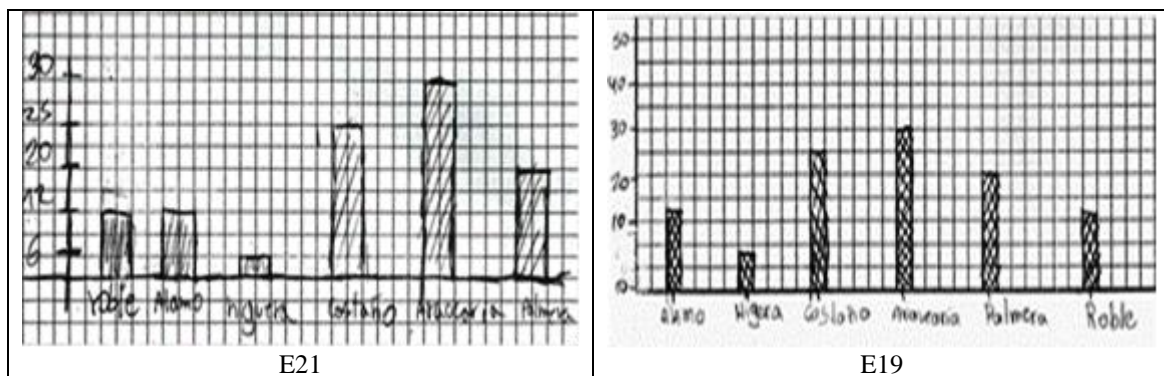


Figura 5.5.1.3. Gráficos estadísticos con escala no proporcional

P1. Escala no proporcional. Se trata de gráficos donde los estudiantes construyen una escala en la que no hay correspondencia entre la proporcionalidad numérica y la geométrica; por ello, se representan valores de la variable con una barra cuya longitud no es proporcional a dicho valor. Por ejemplo, en la escala del estudiante E19, de la Figura 5.5.1.3, la longitud entre los valores 0 a 10 no es congruente con los otros segmentos, por ejemplo el comprendido entre 20 y 30. El estudiante E21 establece una escala con distancias iguales para los valores de la variable que tiene que representar y que se muestran en la tabla; pero esta escala no es proporcional. Este error fue

encontrado en investigaciones con niños por Cruz (2013) y Evangelista et al. (2014) y en investigaciones con futuros profesores por Arteaga (2011) y Bruno y Espinel (2005).

P2. Errores o ausencia de rótulos de los ejes. Los diferentes elementos que son parte de un gráfico estadístico facilitan la lectura de la información mostrada en él. Entre ellos es necesario asignar títulos a cada eje, así como asignar rótulos para identificar la escala y las unidades de medida usadas (Curcio, 1987). En esta subcategoría hemos incluido aquellas construcciones en las que se han omitido o se asignan de forma errada el título de algún eje cartesiano, los rótulos que permiten identificar la escala o las categorías, así como los que no indican el origen en la intersección de los ejes.

En la Figura 5.5.1.4 vemos dos ejemplos de estas situaciones, que también se citan en el trabajo de Evangelista et al. (2014), Fernández et al. (2011), Jungkenn y del Pino (2009), Walichinski y dos Santos (2013) y Wu (2004) con estudiantes, y en Arteaga et al. (2016) con futuros profesores. En el primer ejemplo (construcción de E16) los datos están representados en forma correcta, pero no hay un título en el gráfico ni en los ejes, que permita identificar lo que se está representando. Además, no se especifica la escala usada en el eje X ni se indica el origen de la misma. Del mismo modo, la construcción de E273 no especifica el título ni para el gráfico ni para los ejes, aunque esta vez construye la escala en forma correcta.

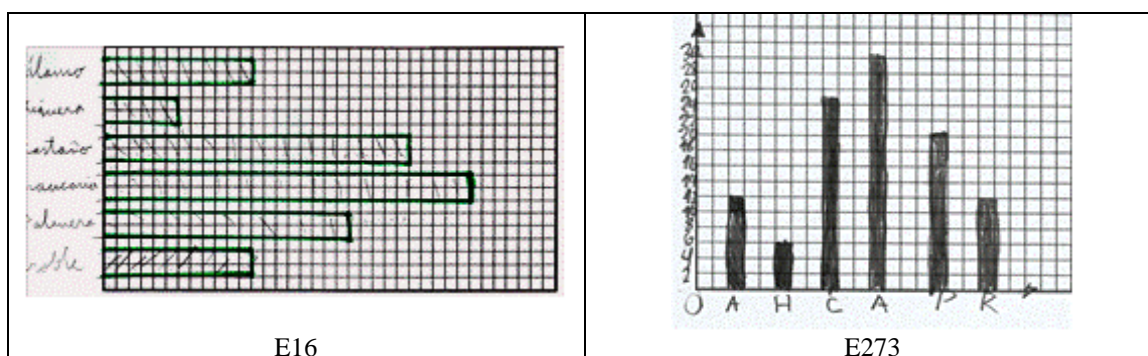


Figura 5.5.1.4. Gráficos estadísticos con errores o ausencia de rótulos

P3. Barras no separadas o de diferente anchura. Un error descrito por Arteaga et al. (2016) y Bruno y Espinel (2005) es representar en forma incorrecta las barras que forman parte de un diagrama de barras, lo que supone el desconocimiento de los convenios en la construcción de este gráfico. En nuestro trabajo algunos estudiantes presentan todas las barras unidas, como si se tratase de un histograma, confundiendo estos gráficos, lo que también ocurrió en el trabajo de Arteaga (2011). En otros casos construyen barras con diferente anchura, o bien las barras no están centradas sobre la categoría que le corresponde, los espacios de separación de las barras no son uniformes o las barras no son paralelas.

En la Figura 5.5.1.5 presentamos dos ejemplos. En el primero de ellos vemos que en la respuesta de E472 el ancho de algunas barras difieren, ya que la segunda barra tiene cinco cuadrados de ancho y la tercera sólo cuatro, por lo que se distorsiona la información que se muestra; el error aparece en el 57% de los niños en el trabajo de Cruz (2013). En el caso del estudiante E396 las barras están adosadas, como si se tratara de un histograma.

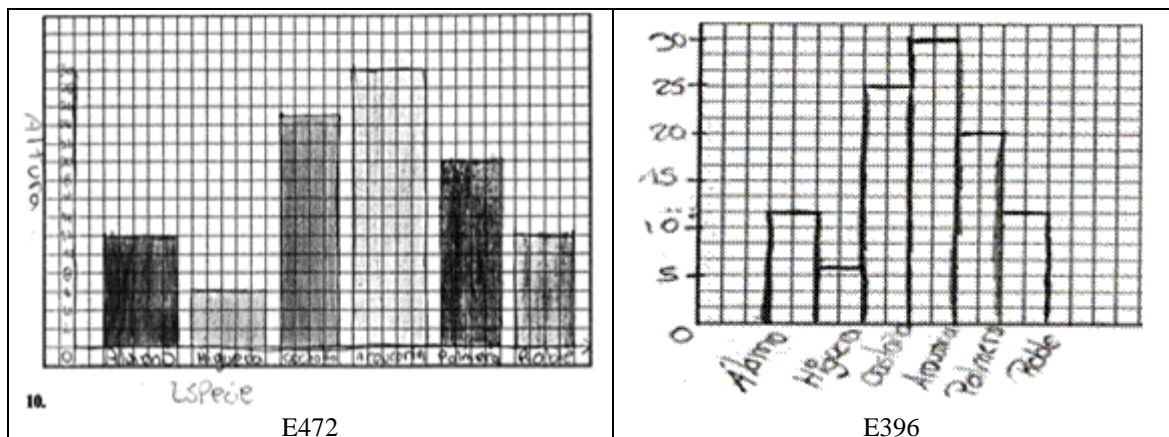


Figura 5.5.1.5. Gráficos estadísticos con errores en la separación o ancho de las barras

P4. Omite un valor en la construcción del gráfico. Este error, denominado por Bruno y Espinel (2005) y Arteaga (2011) como *valores faltantes*, ocurre cuando el estudiante omite en el gráfico uno de los valores de los datos o lo representa erradamente. Se ha identificado en otras investigaciones con niños (Evangelista, 2014; Evangelista y Guimarães, 2015; Guimarães, 2002).

Por ejemplo, en la Figura 5.5.1.6, vemos que el estudiante E53 no representa la barra asociada a la Araucaria, que tiene una altura de 30, y E421 no ha representado la barra de las palmeras (20 unidades); además ha graficado con imprecisión las frecuencias 12 (álamo y roble) e higueras.

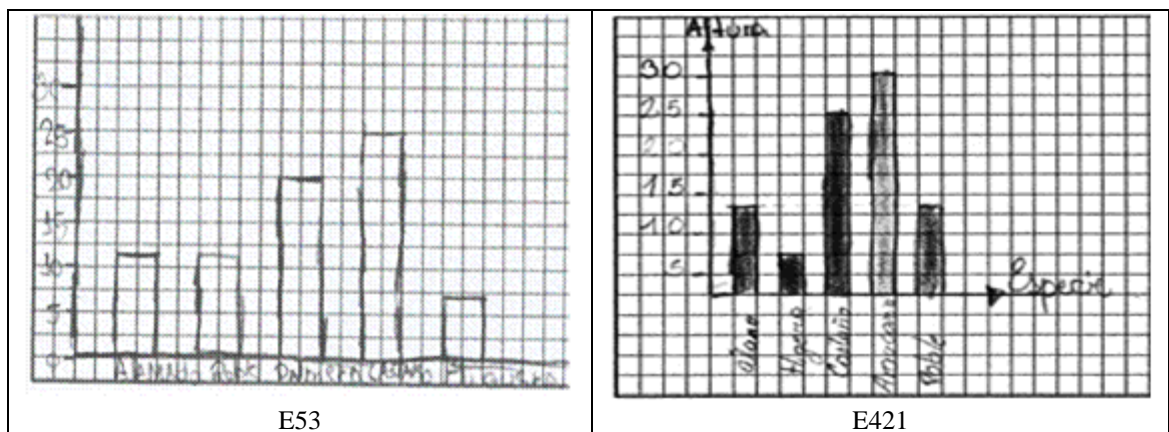


Figura 5.5.1.6. Gráficos estadísticos con error u omisión en la representación de un dato.

Respuestas incorrectas. También existen estudiantes que no fueron capaces de pasar de los datos registrados en una tabla a un gráfico de barras ni siquiera en forma parcialmente correcta. En tal situación, el estudiante realiza una construcción sin sentido para el lector de la información o no respeta los convenios de construcción de estas representaciones. Las respuestas de los estudiantes permitieron definir las siguientes categorías de errores:

II. Escala que no refleja el rango de la variable. También encontrado por Arteaga (2011), consiste en que el estudiante no es capaz de establecer una escala que permita representar todos los datos, porque no refleja el rango de variación de la variable o de las frecuencias.

Observamos dos ejemplos en la Figura 5.5.1.7. En el primero (E8), la altura de las barras se ve delimitada, pues se ha elegido una escala demasiado pequeña para

representar todos los datos; además, el estudiante no incluye los valores numéricos de las escalas. De modo similar, E574 se limita a graficar los valores hasta el máximo de su escala (18), truncando los valores mayores (20, 25 y 30); además una de las barras la construye fuera del área de trabajo. Este error es descrito por Fernández et al. (2011).

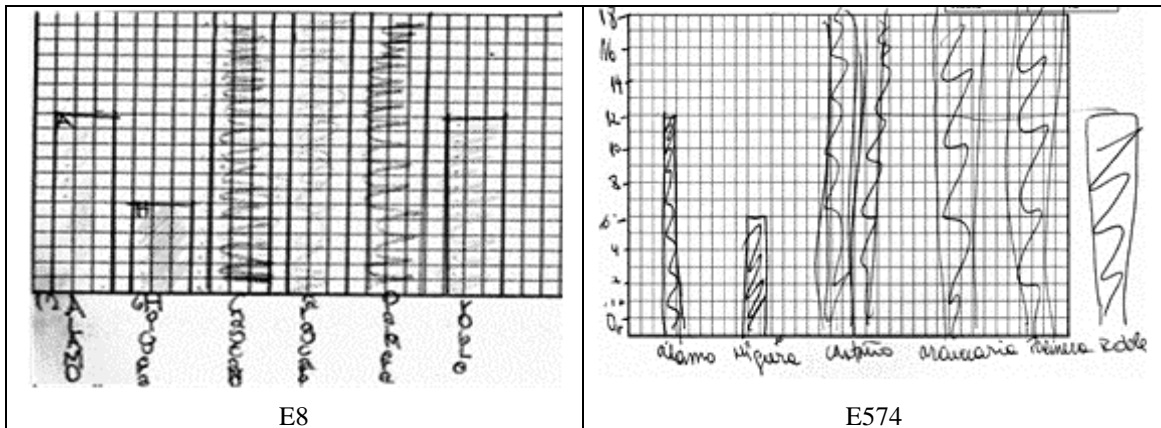


Figura 5.5.1.7. Gráficos estadísticos con escalas que no reflejan el rango de la variable

12. *Intercambiar categorías y valores de la variable.* Error encontrado en Batanero et al. (2010), que ocurre cuando los valores de la variable se confunden con sus frecuencias. En nuestro caso, se toman dichos valores como si fuesen etiquetas de una variable categórica y no se consideran sus propiedades numéricas. Por ejemplo, E321, cuya construcción mostramos en la Figura 5.5.1.8, ha representado cada dato en orden de presentación en la tabla, y las frecuencias se representan en el orden en que se dan los datos en el eje Y, pero sin tener en cuenta su posición en la escala numérica. Luego construye las barras con una longitud que no corresponde a la frecuencia y sin considerar los valores de la escala ni la correspondencia entre la proporcionalidad numérica y geométrica.

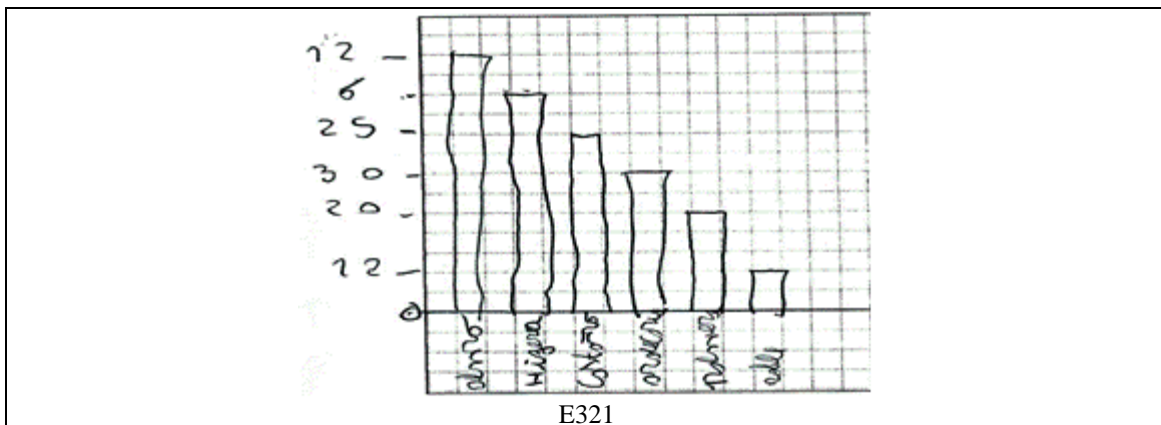


Figura 5.5.1.8. Intercambiar categorías por frecuencias

13. *Construcción de otro gráfico.* Cuando el estudiante construye un gráfico diferente al de barras. Este error puede deberse a no recordar el nombre del gráfico. En la Figura 5.5.1.9 vemos las respuestas de E168 y E263 en los que se realiza un gráfico de líneas y un pictograma, respectivamente. En el primer caso el estudiante construye un pictograma donde cada icono equivale a dos unidades estadísticas. Aunque presenta imprecisiones en la distancia, que no uniformes entre iconos, el gráfico es básicamente correcto, pero omite el título general y el rótulo del eje X. La segunda construcción es un gráfico de líneas construido donde las frecuencias se sitúan en el eje horizontal y las

categorías en el vertical. Este estudiante tampoco titula el gráfico ni el eje X; además comete errores para ubicar la altura de la Araucaria y la Palmera.

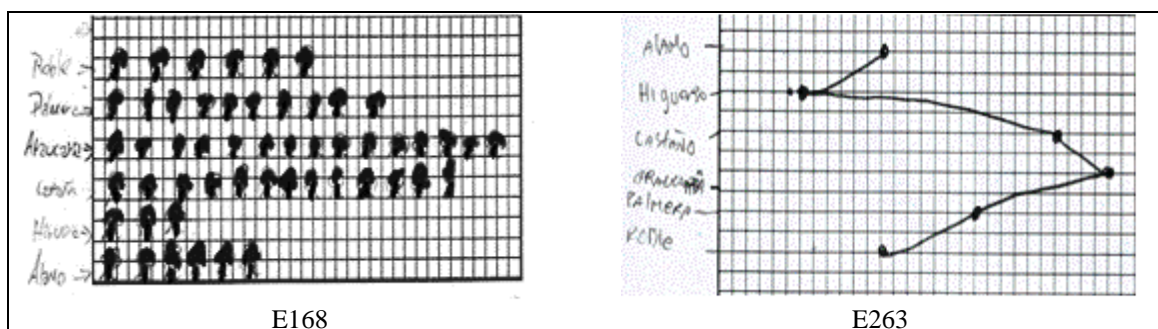


Figura 5.5.1.9. Construcción de otro gráfico.

14. *Construcción sin sentido.* En esta categoría hemos clasificado las respuestas de los estudiantes que no completan, ni siquiera en forma aproximada, la construcción del diagrama de barras y realizan un gráfico o un dibujo donde la información es ininteligible. En la Figura 5.5.1.10 vemos dos ejemplos de esta categoría. En el primer caso, E45 se limita a dibujar un árbol, que representaría la altura de la Araucaria; mientras que E56 dibuja cuatro barras, sin indicar la categoría representada por cada una, con tres valores que no se corresponden con los datos entregados en la tabla.

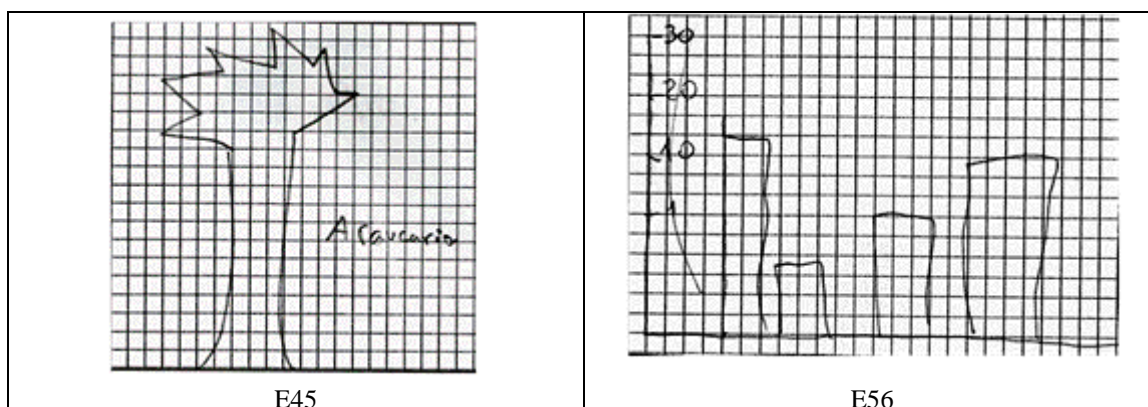


Figura 5.5.1.10. Gráficos estadísticos sin sentido

En la Tabla 5.5.1.1 presentamos el porcentaje del tipo de gráfico realizado por los estudiantes de la muestra, donde vemos que la mayoría son parcialmente correctos (69,3% de las respuestas de los estudiantes). Este porcentaje es similar al encontrado por Fernández et al. (2011) (61%), y menor que el reportado en investigaciones como las de Evangelista et al. (2014) (81%) y Jungkenn y del Pino (2009) (91,4%), pero en sus investigaciones los estudiantes podían elegir el tipo de gráfico.

Tabla 5.5.1.1 *Porcentaje de gráficos, según su corrección*

Tipo de gráfico	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcto	5,8	6,3	6
Parcialmente correcto	72,9	65,5	69,3
Incorrecto	6,1	5,5	5,8
No construye	15,3	22,7	18,9

De estos datos vemos que los estudiantes de 6° curso presentan mejores resultados que los de 7°, con una diferencia aproximada de un 7% (considerando las respuestas

correctas y parcialmente correctas). Respecto a las respuestas consideradas como correctas, sólo llegan a un 6% a nivel general, siendo algo más frecuentes en 7° curso. Un porcentaje similar, a nivel general, son las respuestas que se han considerado como incorrectas. Además, los estudiantes de 6° abordan la actividad en mayor porcentaje que los de 7° curso, porque el 22,7% de estos últimos, contra el 15,3% de los primeros, no responden a la actividad planteada.

En la Tabla 5.5.1.2 presentamos la distribución de los gráficos que hemos considerado como parcialmente correctos. En el caso de que un estudiante presente en el gráfico más de un tipo de error, se ha contabilizado por separado, por lo que la suma de porcentajes es mayor que 100. De acuerdo a esta tabla, el tipo de error más frecuente es la ausencia o error en los rótulos en los ejes, que se observa en el 65% de los estudiantes de 6° y en el 53,2% de 7° curso. Se confirman, por tanto, los resultados de las investigaciones previas que indican la falta de comprensión por los estudiantes del propósito del título en un gráfico y en los ejes (Cruz, 2013; Fernández et al., 2011; Jungkenn y del Pino, 2009, Vasconcelos y Fernández, 2013). Por ejemplo, en la investigación de Evangelista et al. (2014) con estudiantes de 5° grado, ninguno completa el título del gráfico.

Tabla 5.5.1.2. Porcentaje de estudiantes con diferentes errores en los gráficos parcialmente correctos

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
P1. Escala no proporcional	35,5	32,6	34,1
P2. Ausencia de rótulos	65	53,2	59,2
P3. Barras no separadas o de distinta anchura	44,2	32,9	38,7
P4. Omite valores	23,4	21,6	22,6

En segundo lugar, a nivel general y por curso, los gráficos presentan errores en cuanto a la separación entre las barras y/o la diferencia de ancho entre las mismas, error descrito por Arteaga (2011), Arteaga et al. (2016) y Bruno y Espinel (2005) y encontrado en el 57% de los niños por Cruz (2013). Las escalas no proporcionales serían el tercer error más frecuente (34,1%), concordando con lo encontrado en investigaciones con estudiantes por Cruz (2013) y Evangelista et al. (2014) y con futuros profesores por Arteaga (2011) y Bruno y Espinel (2005). Finalmente, se sitúan aquellas construcciones en las que se observa algún dato no representado (22,6%) que también se citan en el trabajo de Evangelista, Oliveira y Ribeiro (2014), Fernández et al (2011), Jungkenn y del Pino (2009), Walichinski y dos Santos (2013) y Wu (2004) con estudiantes y en la de Arteaga et al. (2016) con futuros profesores.

Tabla 5.5.1.3. Porcentaje de estudiantes con errores en los gráficos incorrectos

Tipos de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
I1. Escala que no refleja el rango	3,2	2,2	2,7
I2. Confundir categoría y valor	0,3	0,3	0,3
I3. Construir otro gráfico	1,1	1,9	1,5
I4. Construcción sin sentido	1,6	1,1	1,3

De igual modo, en la Tabla 5.5.1.3 mostramos el porcentaje de estudiantes con diferentes tipos de error en los gráficos incorrectos, que, en general, es bajo. En esta tabla, la categoría más frecuente es cuando la escala definida por el estudiante no alcanza a representar todos los datos. En segundo lugar, tenemos aquellos gráficos en las que se realiza una representación diferente a la pedida. Sigue la construcción de un

gráfico sin sentido. Finalmente, y en un porcentaje muy bajo, están los estudiantes que intercambian las frecuencias con las categorías.

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración general de ítem, hemos asignado una puntuación a las respuestas de cada estudiante dependiendo de la calidad de construcción que ha realizado, de la forma siguiente: se asigna un valor 0 si no realiza el gráfico; 1 si es incorrecto; 2 en aquellos casos que sea parcialmente correcto; y 3 cuando el gráfico es correcto o básicamente correcto. De acuerdo al criterio anterior, hemos obtenido los gráficos presentados en la Figura 5.5.1.11, donde diferenciamos los resultados por curso.

En el gráfico de barras adosadas de la izquierda observamos que lo más frecuente, especialmente en 6º curso, son las construcciones parcialmente correctas; situación similar ocurre a nivel general, seguido por los estudiantes que no desarrollan la actividad, que son más numerosos en 7º. Un pequeño grupo, y similar entre los dos cursos, realiza una construcción totalmente correcta.

Del gráfico de caja, que vemos a la derecha de la Figura 5.5.1.11, concluimos que los estudiantes de 6º curso presentan resultados más homogéneos, ya que la mediana coincide con los cuartiles 1 y 3; por lo que el 50% de los valores centrales de los estudiantes realizaría una construcción parcialmente correcta, mientras que en los estudiantes de 7º curso la mediana coincide con el tercer cuartil. Las diferencias también indican mayor variabilidad en 7º curso y la existencia de casos atípicos en el 6º. Los valores de la mediana son idénticos, por lo cual no existe mucha diferencia en promedio.

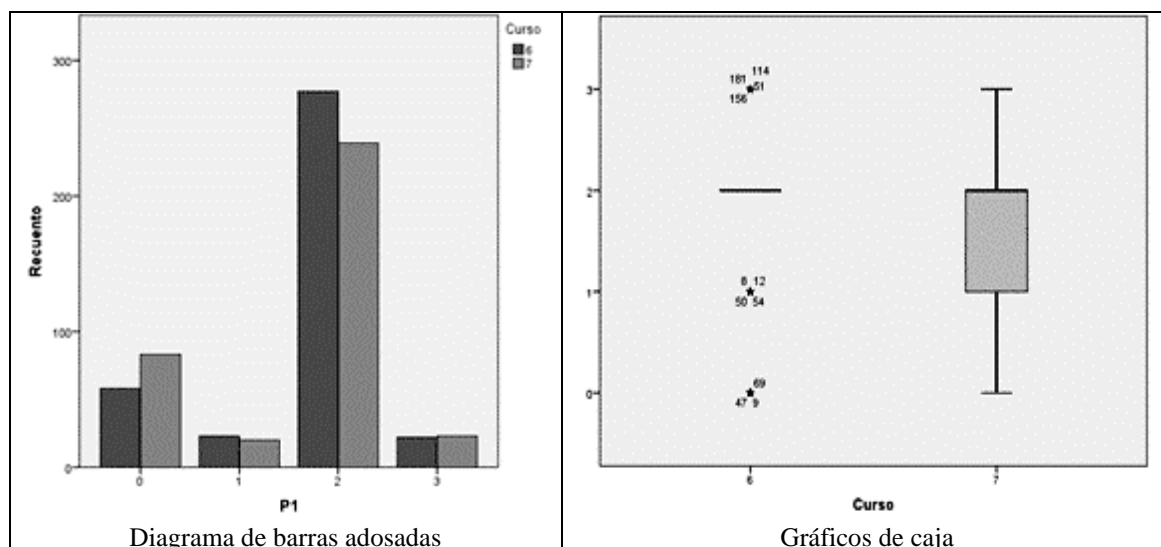


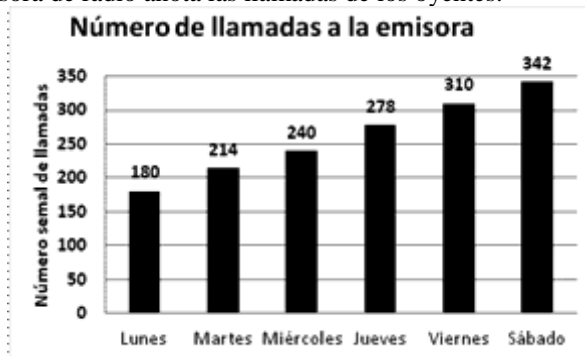
Figura 5.5.1.11. Distribución de la puntuación total en el ítem 1 por curso

5.5.2. RESULTADOS EN EL ÍTEM 2

En la Figura 5.5.2.1 mostramos la segunda actividad planteada a los estudiantes en el cuestionario, que consiste en extrapolar la información mostrada en un gráfico de barras que representa una lista de datos (complejidad semiótica 2, según Arteaga, 2011 y Batanero et al., 2010). El contexto se refiere a las llamadas realizadas por los oyentes de una emisora durante seis días de una semana. Este tipo de actividades se incluyen

dentro del nivel 3 de Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), denominado *leer más allá de los datos*.

Todos los días una emisora de radio anota las llamadas de los oyentes.



Los datos de los primeros seis días se representan en el gráfico.

¿Cuál será el número de llamadas en el siguiente día (Domingo)?

Explica por qué has dado este número.

Figura 5.5.2.1. Ítem 2 planteado a los estudiantes

A continuación, realizaremos un análisis de las respuestas, y seguidamente mostraremos los niveles de lectura que alcanzan las respuestas de los estudiantes en este ítem.

Tipos de respuestas

En esta actividad los estudiantes debían indicar un posible valor para el número de llamadas que se podrían recibir en la emisora el domingo. Las respuestas de los estudiantes han permitido obtener las siguientes categorías:

Respuesta correcta. Cuando los estudiantes producen una extrapolación adecuada. Para ello, calculan las diferencias de valores entre un día y otro, obteniendo la siguiente serie de incrementos: 34, 26, 38, 32, 32. A continuación estiman la subida entre el sábado y domingo, mediante el promedio de las diferencias entre días (32,4) redondeando a una cifra, pues las llamadas son números enteros. Por ejemplo, estiman una subida de 32 o 33, cantidad que se suma al último valor representado. También, consideramos correcta la respuesta que indica una subida aproximada, redondeando algo más, por ejemplo a la decena. Dentro de esta categoría también consideramos aquellas respuestas en que los estudiantes estiman la subida como el promedio de los dos primeros o últimos días. Algunos ejemplos de estas respuestas son las siguientes. El estudiante E15 ha seguido el proceso descrito, estimando una subida media de 32 llamadas, mientras E40 ha redondeado a la decena, estimando una subida de 30 llamadas.

Sería: 374. Porque le sumé a 342, 32. Ya que es el número de la secuencia (E15).

Aproximadamente 372. Principalmente porque el gráfico va en aumento, y porque el gráfico sigue una regla de 30 aproximadamente (E40).

Respuesta parcialmente correcta. Si el estudiante observa el incremento sistemático de los valores en el gráfico, pero su respuesta está limitada por aspectos visuales del mismo, es poco preciso con el procedimiento seguido, o no menciona un valor fijo. Además, en algunos casos, cometen errores al realizar los cálculos, como en

el ejemplo que sigue, en el que E3 descubre que a cada día ha de sumarse 32, pero suma el incremento al primer día de la serie, en vez de sumarlo al último. E102 observa el incremento de la cantidad, pero no llega a una estimación correcta de la subida; otro ejemplo es E48, cuya respuesta está dada por el valor máximo que se muestra en el eje Y. En general estos estudiantes han fallado en reconocer la media como un estimador de la cantidad desconocida; esta propiedad fue utilizada en la investigación de Cobo (2003) sobre la media con estudiantes de secundaria.

212 llamadas. Porque tiene que ir sumando 32 (E3).

Tal vez el número de llamadas el siguiente día será más de 342. Porque vi que iba aumentando más y más, y el número 342 número que recibió el día sábado, y como va aumentando el día domingo debería ser más llamadas (E102).

Yo creo que 350. Porque el gráfico termina en ese número (E48).

Respuesta incorrecta. Cuando el estudiante no es capaz de deducir con claridad la tendencia de incremento de los datos y/o su respuesta no es coherente a los datos mostrados. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la dada por E288, quien indica que la cantidad de llamadas será de 342, creyendo que la última barra corresponde al domingo, y no al sábado. Otro ejemplo es la respuesta de E10, que sugiere un número que se aleja de lo esperado y que, a simple vista, es demasiado alto para ser razonable. Finalmente, vemos que E538 da como respuesta la suma de los datos que se dan en el gráfico. Ninguno de estos estudiantes utilizó la media como estimador del incremento del número de llamadas, ni tampoco hizo alusión a este crecimiento.

342 llamadas. Porque en el gráfico sale que el sábado recibieron 342 llamadas (E288).

354. Porque va en secuencia, los números finales 46802... (E10).

1564. Da ese número, porque si sumamos todas las llamadas da 1564 (E538).

En la Tabla 5.5.2.1 mostramos la distribución de las respuestas de los estudiantes a este ítem. En ella observamos que estos responden mayoritariamente de forma correctamente o parcialmente correcta a la pregunta formulada (en total 63,7%), lo que confirma otros trabajos en que los porcentajes que varían entre el 50% (Wu, 2004) y el 84% (Carvalho, Campos y Monteiro, 2011), teniendo en cuenta que en esta investigación simplemente se pide una lectura directa de los gráficos. Respecto a los gráficos de barras, en concreto, los porcentajes de lectura correctas en trabajos previos fueron 52,4% (Guimarães, 2002) y 49,9% (Pagan y Magina, 2011). Cerca de un tercio de los estudiantes no aborda la actividad y la deja en blanco y el número de lecturas incorrectas es muy pequeño.

Al analizar los resultados por curso al que pertenecen los estudiantes vemos que, levemente, los de 6° presentan mejores resultados que los de 7° curso; estos últimos, además, presentan mayor porcentaje de no respuesta (38,9%), siendo incluso superior a las respuestas correctas y parcialmente correctas.

Tabla 5.5.2.1. *Porcentaje de estudiantes según tipo de respuesta*

Tipo de respuesta	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	35,3	31	33,2
Parcialmente	33,9	26,8	30,5
Incorrecta	5	3,3	4,2
No contesta	25,8	38,9	32,2

Nivel de lectura

Además del tipo de respuesta, nos interesaba evaluar el nivel de lectura alcanzado por el estudiante en la clasificación de Curcio y colaboradores (Curcio, 1987; Shaughnessy et al., 1996; Friel et al., 2001), que en este ítem puede llegar hasta el nivel 3 (interpolación o extrapolación de datos); en este caso extrapolar un valor que continúe la serie dada. Considerando las respuestas de los estudiantes al ítem, estas se han clasificado en los siguientes niveles de lectura:

Nivel 0. No lee el gráfico. Cuando el estudiante no responde a la actividad. También se consideran aquellas respuestas que carecen de sentido, al mencionar un número que se aleja de la estimación. En estos casos el estudiante no ha llegado a interpretar el gráfico y no tenemos constancia de que al menos haya llegado a una lectura literal, puesto que no informa de los valores representados. Un ejemplo de este tipo de respuestas lo encontramos en E110, que no concreta ningún valor del gráfico, sino que sólo se limita a mencionar que el dato pedido no está en la gráfica. Si bien este nivel no es propuesto por Curcio y colaboradores creemos necesario incluirlo para caracterizar las situaciones anteriormente descritas.

No se sabe, porque no hay tabla que dé esos números (E110)

Nivel 1. Leer los datos. En este nivel se clasifican las respuestas de los estudiantes que llegan a realizar una lectura directa o inversa de alguno de los valores del gráfico en forma correcta. A continuación, hacen referencia a algunos de estos valores, pero no realiza comparaciones de los mismos ni llega a extrapolar los datos. Por ejemplo, E45 señala que el número de llamadas será la cantidad registrada en último día mostrada en el gráfico (342 llamadas); otros estudiantes, como E21, hacen referencia al valor máximo indicado en el eje Y (350 llamadas). Es claro que en estas dos situaciones los estudiantes al menos han leído literalmente los datos representados y por tanto alcanzan el nivel 1.

350. Porque la tabla [el gráfico] no va más allá que 350 (E21).

342 (E45).

Nivel 2. Leer entre los datos. Cuando el estudiante, además de realizar una lectura literal de los datos del gráfico, compara sus valores y percibe que la tendencia de los datos es creciente, aunque no llega a extrapolar. Generalmente estima el valor que se pide mediante el desarrollo de cálculos sencillos considerando solo algunos valores de los mostrados en el gráfico, por ejemplo los últimos dos o tres días, sin hacer un análisis global del gráfico. También, se incluyen en este nivel aquellas respuestas en que se desarrollan cálculos con los datos del gráfico, pero el estudiante no es capaz de explicar el proceso realizado. Por ejemplo, el estudiante E12, sólo ha observado la diferencia de los dos primeros valores; el E15 los dos últimos.

376. Porque la cantidad de números que hay, es decir hay una secuencia de 34 números (E12).

Sería: 374. Porque le sumé a 342, 32. Ya que es el número de la secuencia (E15).

Nivel 3. Leer más allá de los datos. La respuesta del estudiante es clasificada en este nivel si, para resolver la actividad, considera todos los valores representados para extrapolar un valor no mostrado en el gráfico, ya sea calculando la media aritmética o

estimando, aproximadamente, el incremento diario de llamadas. Ejemplos de estas respuestas se muestran a continuación:

374,4. En la tabla [el gráfico] el número de llamadas iba aumentando por lo que saqué un promedio el cual sumé con el número de las llamadas del día sábado y me dio ese resultado (E25).

Aproximadamente 372. Principalmente porque el gráfico va en aumento, y porque el gráfico sigue una regla de 30 aproximadamente (E40).

En la Tabla 5.5.2.2 presentamos la distribución del nivel de lectura alcanzado por los estudiantes en este ítem. Se observa que el nivel más frecuentemente alcanzado es el 2, *leer dentro de los datos*, ya que, en su mayoría, los estudiantes aportan respuestas en las que hacen referencias a un grupo de datos mostrados en el gráfico y no a todos los que son necesarios para observar la tendencia de los datos. En segundo lugar, tenemos el grupo de respuestas categorizadas en el nivel 0, las que están en blanco o carecen de sentido. Son muy pocos los estudiantes que alcanzan el nivel máximo de lectura, llegando a realizar una extrapolación correcta de los datos. Este porcentaje es bastante menor que el alcanzado con un diagrama de barras en la investigación de Guimarães (2002) (54,2%) con niños de 3° curso o por Cruz (2013) también con estudiantes de 3° curso (36%).

Comparando los resultados por curso, los estudiantes de 6° presentan mejores resultados que los de 7° curso, pues alcanzan con más frecuencia los niveles 2 y 3. Los estudiantes de 7° curso, presentan un mayor porcentaje de preguntas consideradas en nivel 0 y 1, alcanzando un porcentaje sobre el 50%.

Tabla 5.5.2.2. *Porcentaje de estudiantes que alcanza cada nivel de lectura*

Nivel	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
0	26,6	39,5	32,9
1	17,1	16,7	16,9
2	47,9	34,2	41,2
3	8,4	9,6	9

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global de las respuestas a este ítem, hemos dado una puntuación a cada apartado, en la forma siguiente:

- En el nivel de lectura se ha asignado de 0 a 3 puntos.
- Dependiendo del tipo de respuesta, se puntúa hasta un máximo de 3 puntos (0: no completa la tarea; 1: respuesta incorrecta, 2: respuesta parcialmente correcta; y 3: respuesta correcta). Por tanto, en el ítem se puede alcanzar hasta un máximo de 6 puntos.

En la Figura 5.5.2.2 se presenta el diagrama de barras adosado y los gráficos de caja de la puntuación total por curso. En el primero observamos que la mayoría de estudiantes de 6° y 7° curso alcanza 0 puntos, indicando que no logran abordar la actividad. De quienes responden a la actividad, los puntajes alcanzando con mayor frecuencia es el 5. Del gráfico de caja vemos que los estudiantes, de 6° curso obtienen una mediana más alta que los de 7° (4 y 3, respectivamente), por lo que se puede concluir que los primeros obtienen mejores resultados. No se encuentran valores

atípicos.

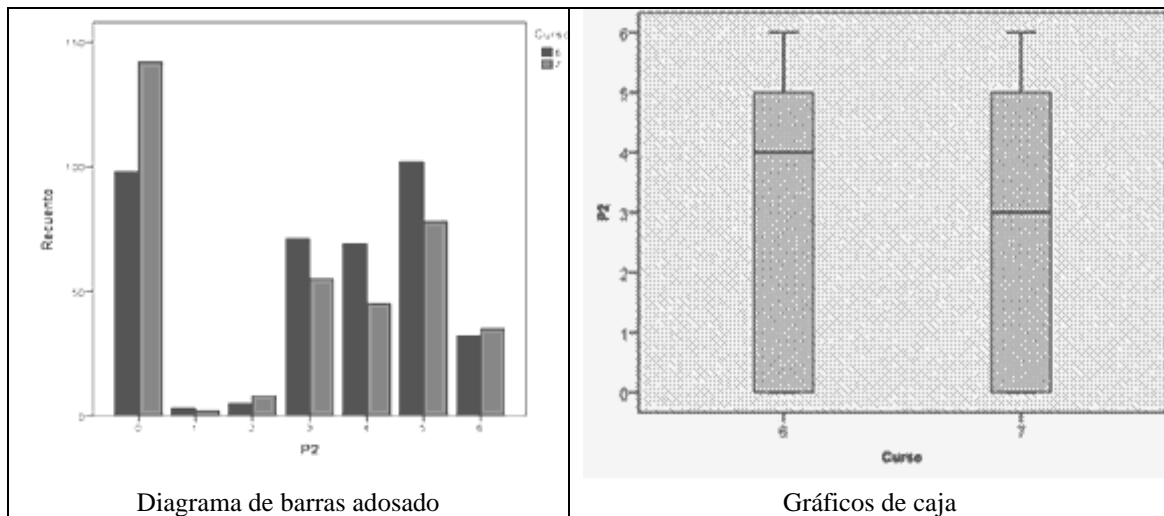


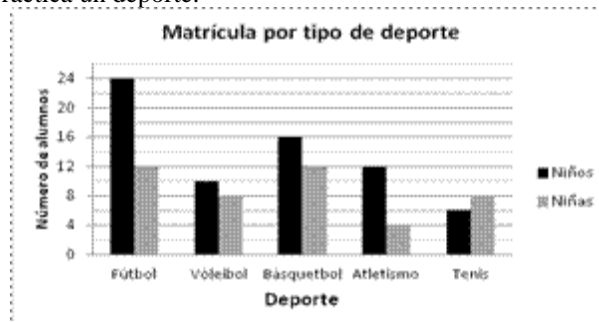
Figura 5.5.2.2. Distribución de la puntuación total en el ítem 2 por curso

5.5.3. RESULTADOS EN EL ÍTEM 3

El tercer ítem que formó parte del cuestionario, que fue adaptado de Walichinski y dos Santos (2013), se muestra en la Figura 5.5.3.1. Específicamente se trabaja la actividad que consiste en traducir los datos de un gráfico de barras adosadas a una tabla de doble entrada. Puesto que el gráfico presenta simultáneamente dos distribuciones, se trabaja el nivel de complejidad semiótica 4 (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010), *representación dos distribuciones sobre el mismo gráfico estadístico*. Además, exige un nivel de lectura 1 de *ler los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), centrado en una lectura literal de la información del gráfico.

Para responder de forma correcta a este ítem, el estudiante tuvo que leer correctamente el gráfico, identificando las dos variables representadas y sus categorías, así como sus frecuencias. También, debió interpretar la escala numérica que representa las frecuencias en el eje vertical. A partir de dicha información debe construir el cuerpo de la tabla, proponiendo un título y, además de la primera columna, donde se escriben las diferentes categorías de la variable deporte se deben considerar dos columnas, una para incluir la distribución de tipo de deportes practicado por los niños y otra para las niñas, identificado los valores de frecuencias para cada una de las celdas de la tabla, a partir de la lectura de los datos del gráfico.

El gráfico muestra el número de alumnos matriculados en cada deporte practicado en una escuela. Cada estudiante sólo practica un deporte.



Representa estos datos en una tabla de frecuencias.

Figura 5.5.3.1. Ítem 3 planteado a los estudiantes

En lo que sigue se describen el tipo de respuesta de los estudiantes. Puesto que el nivel de lectura máximo es 1, no se considera el nivel alcanzado en este ítem, sino sólo la corrección de la respuesta.

Tipos de respuestas

Las respuestas sobre la construcción de una tabla estadística, con la información proporcionada en el gráfico, se han categorizado de la siguiente forma.

Respuesta correcta. Cuando el estudiante lee el gráfico correctamente y construye correctamente la tabla estadística, con todos sus elementos, esto es, título, categorías y frecuencias asociadas a cada una de las dos distribuciones representadas. Ejemplos de este tipo de respuesta son las construcciones de E31 y E131 que se muestran en la Figura 5.5.3.2. Los dos estudiantes identificaron las dos distribuciones representadas (deporte practicado por niños y niñas) y las categorías de la variable (práctica de deporte). Además, han leído correctamente cada frecuencia en el gráfico y construido correctamente la tabla con todos sus elementos.

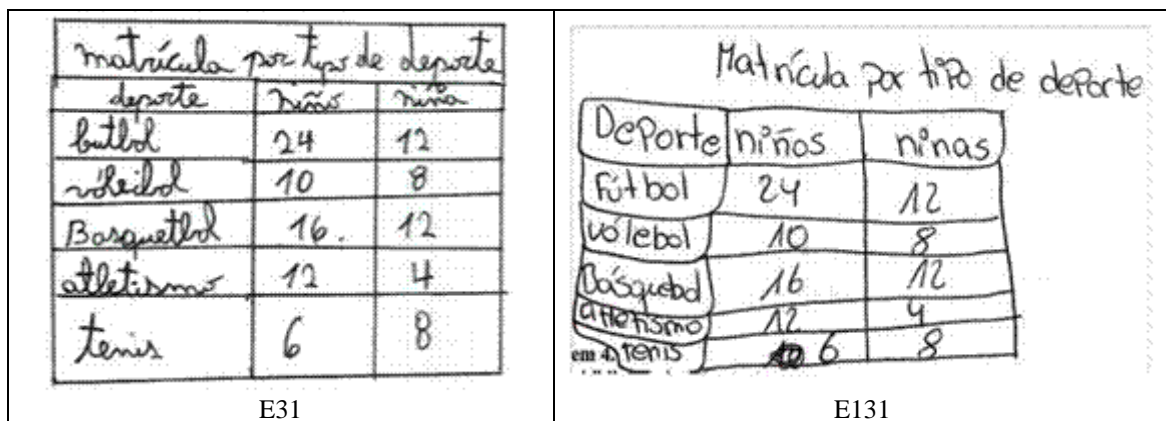


Figura 5.5.3.2. Respuestas correctas al Ítem 3

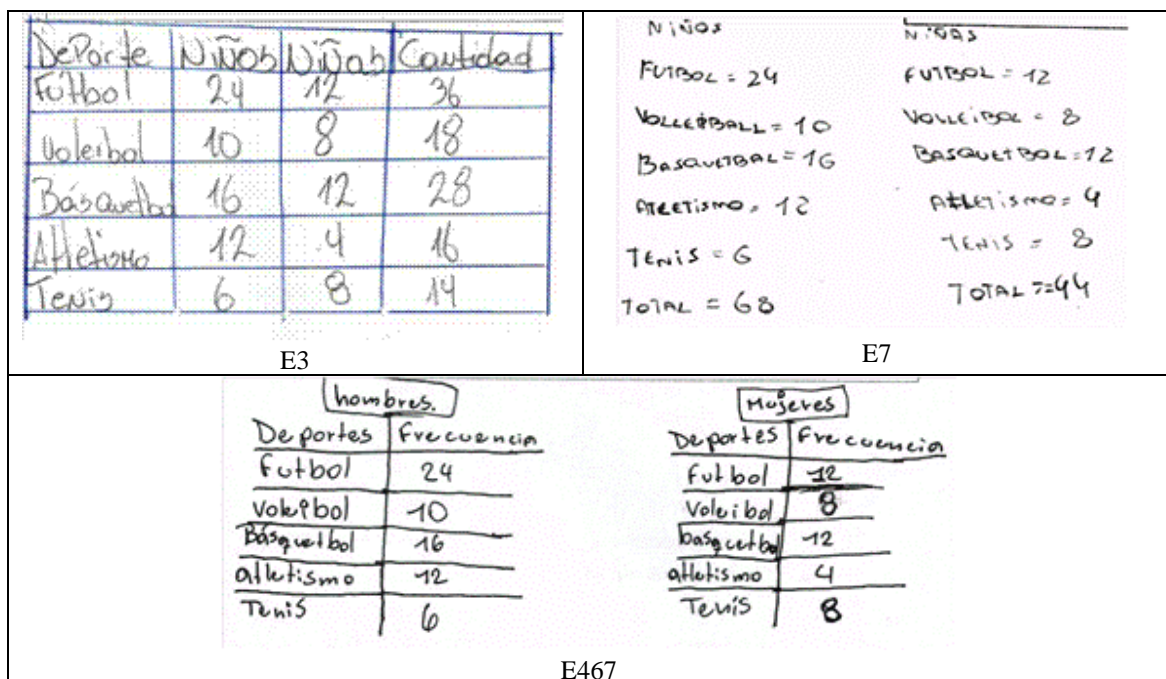


Figura 5.5.3.3. Respuestas correctas, salvo omisión, al ítem 3

Correcta, salvo omisión. Se trata de estudiantes que leen correctamente el gráfico y construyen una tabla casi correcta, pero que cometen pequeños errores u omisiones; por ejemplo, olvidan el título o no realizan la división adecuada de una tabla (columnas), lo que puede llevar a que la tabla parezca un listado de datos. Algunas de las respuestas que se han clasificado dentro de esta categoría se muestran en la Figura 5.5.3.3, donde E3 omite el título de la tabla y agrega una columna con el total (esto último sería correcto), E7 escribe dos listas con las frecuencias representadas en la tabla, y E469 hace una tabla separada por cada género.

Respuesta parcialmente correcta. Cuando el estudiante hace una traducción parcial de la información que se presenta en el gráfico de barras, generalmente, porque ha cometido algún error en la lectura de los datos. Pero su respuesta muestra la capacidad para desarrollar con éxito la tarea, ya que los errores no se deben a falta de conocimiento. A continuación, clasificamos los principales tipos, dentro de las respuestas parcialmente correctas:

P1. Realizar una tabla de conteo. Se construye una tabla donde las filas y columnas son correctas. Sin embargo, en vez de expresar numéricamente las frecuencias, se utilizan palitos u otro símbolo. Puede ser que el estudiante no recuerde la terminología *tabla de frecuencias*. En la Figura 5.5.3.4, donde E63 usa palitos para representar la cantidad de estudiantes y el E68 utiliza diferentes iconos. Pero los dos estudiantes han mostrado que alcanzan el nivel de lectura de datos 1 (Curcio, 1987) y que comprenden el concepto de tabla. Además, el primer estudiante ha calculado el total de niños y niñas en cada categoría.



Figura 5.5.3.4. Respuestas basadas en tabla de conteo

P2. Pequeños errores en la lectura del gráfico o en la construcción de la tabla. El estudiante logra leer el gráfico y traduce la información a una tabla, aunque tiene algunos errores en uno de estos procesos. Pesamos que las equivocaciones en la lectura del gráfico pueden deberse a que las alturas de las barras no están explicitadas en el eje Y, y el estudiante no llega a identificar sus valores. En la Figura 5.5.3.5 se muestran dos ejemplos; en el primer caso, E298 hace una lectura correcta de las frecuencias a partir del gráfico para las diferentes categorías y las dos variables, pero no incluye una columna con las etiquetas de las categorías.

En el segundo ejemplo, aunque la tabla tiene todos los elementos, excepto el título general, hay fallos de lectura en las frecuencias de los niños que practican voleibol y tenis (E305). En los dos ejemplos se confirman los resultados de los trabajos de Evangelista et al. (2014), Fernández et al. (2011), Jungkenn y del Pino (2009), Walichinski y dos Santos (2013) y Wu (2004) con estudiantes y en la de Arteaga et al. (2016) con futuros profesores, respecto a que al construir un gráfico o tabla no se percibe la necesidad de incluir los títulos o etiquetas.

<table border="1"> <tr> <th>niños</th> <th>niñas</th> </tr> <tr> <td>24</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>8</td> </tr> </table> <p>E298</p>	niños	niñas	24	12	10	8	16	12	12	4	6	8	<table border="1"> <tr> <th>Deportes</th> <th>Nº de niños que lo practican</th> <th>Nº de niñas que lo practican</th> </tr> <tr> <td>Fútbol</td> <td>24</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>voleibol</td> <td>9</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>básquetbol</td> <td>16</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>atletismo</td> <td>12</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>tenis</td> <td>5</td> <td>8</td> </tr> </table> <p>E305</p>	Deportes	Nº de niños que lo practican	Nº de niñas que lo practican	Fútbol	24	12	voleibol	9	8	básquetbol	16	12	atletismo	12	4	tenis	5	8
niños	niñas																														
24	12																														
10	8																														
16	12																														
12	4																														
6	8																														
Deportes	Nº de niños que lo practican	Nº de niñas que lo practican																													
Fútbol	24	12																													
voleibol	9	8																													
básquetbol	16	12																													
atletismo	12	4																													
tenis	5	8																													

Figura 5.5.3.5. Respuestas con problemas de lectura

P3. Se construye la tabla de frecuencias de la distribución marginal. Los estudiantes clasificados en esta categoría leen los datos del gráfico, pero en vez de construir la tabla doble, sólo presentan una tabla de frecuencias marginales. Es decir, en vez de detallar en la tabla la frecuencia de hombres y mujeres que practica cada tipo de deporte, la tabla presenta sólo una columna con los totales de personas que practican cada deporte. En esta categoría también se incluyen los casos en que existen algunos errores al realizar la suma de hombres y mujeres que practican algún deporte.

En la Figura 5.5.3.6 vemos tres ejemplos de respuestas clasificadas en esta categoría. En primer lugar, E623 suma las frecuencias de niños y niñas asociadas a cada deporte, calculando en forma errada el total de personas que practican atletismo; E574 suma la cantidad total de niños y niñas, sin tener en cuenta el deporte que se practica; E569 suma correctamente las frecuencias de niños y niñas, obteniendo luego las frecuencias absolutas, relativas y porcentuales respectivas. También calcula las frecuencia acumuladas, que no tienen sentido en una variable cualitativa.

<table border="1"> <tr> <th>deportes</th> <th>alumnos</th> </tr> <tr> <td>fútbol</td> <td>36</td> </tr> <tr> <td>voleibol</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>básquetbol</td> <td>28</td> </tr> <tr> <td>atletismo</td> <td>26</td> </tr> <tr> <td>tenis</td> <td>14</td> </tr> </table> <p>E623</p>	deportes	alumnos	fútbol	36	voleibol	18	básquetbol	28	atletismo	26	tenis	14	<table border="1"> <tr> <th>materiales deporte</th> <th>Nº de alumnos</th> <th>f. A. #</th> </tr> <tr> <td>niños</td> <td>68</td> <td>68</td> </tr> <tr> <td>niñas</td> <td>44</td> <td>112</td> </tr> </table> <p>E574</p>	materiales deporte	Nº de alumnos	f. A. #	niños	68	68	niñas	44	112																					
deportes	alumnos																																										
fútbol	36																																										
voleibol	18																																										
básquetbol	28																																										
atletismo	26																																										
tenis	14																																										
materiales deporte	Nº de alumnos	f. A. #																																									
niños	68	68																																									
niñas	44	112																																									
<table border="1"> <tr> <th>deportes</th> <th>FA</th> <th>FAA</th> <th>F.R</th> <th>F.R.P</th> <th>F.R.A</th> <th>F.R.A.P</th> </tr> <tr> <td>Fútbol</td> <td>36</td> <td>36</td> <td>$\frac{36}{112} = 0,32$</td> <td>32%</td> <td>0,32</td> <td>32%</td> </tr> <tr> <td>Voleibol</td> <td>18</td> <td>54</td> <td>$\frac{18}{112} = 0,16$</td> <td>16%</td> <td>0,48</td> <td>48%</td> </tr> <tr> <td>básquetbol</td> <td>28</td> <td>82</td> <td>$\frac{28}{112} = 0,25$</td> <td>25%</td> <td>0,73</td> <td>73%</td> </tr> <tr> <td>atletismo</td> <td>16</td> <td>98</td> <td>$\frac{16}{112} = 0,14$</td> <td>14%</td> <td>0,87</td> <td>87%</td> </tr> <tr> <td>tenis</td> <td>14</td> <td>112</td> <td>$\frac{14}{112} = 0,12$</td> <td>12%</td> <td>0,99</td> <td>99%</td> </tr> </table> <p>E569</p>		deportes	FA	FAA	F.R	F.R.P	F.R.A	F.R.A.P	Fútbol	36	36	$\frac{36}{112} = 0,32$	32%	0,32	32%	Voleibol	18	54	$\frac{18}{112} = 0,16$	16%	0,48	48%	básquetbol	28	82	$\frac{28}{112} = 0,25$	25%	0,73	73%	atletismo	16	98	$\frac{16}{112} = 0,14$	14%	0,87	87%	tenis	14	112	$\frac{14}{112} = 0,12$	12%	0,99	99%
deportes	FA	FAA	F.R	F.R.P	F.R.A	F.R.A.P																																					
Fútbol	36	36	$\frac{36}{112} = 0,32$	32%	0,32	32%																																					
Voleibol	18	54	$\frac{18}{112} = 0,16$	16%	0,48	48%																																					
básquetbol	28	82	$\frac{28}{112} = 0,25$	25%	0,73	73%																																					
atletismo	16	98	$\frac{16}{112} = 0,14$	14%	0,87	87%																																					
tenis	14	112	$\frac{14}{112} = 0,12$	12%	0,99	99%																																					

Figura 5.5.3.6. Tablas de distribuciones marginales

Respuesta incorrecta. Consideramos incorrecta cuando el paso de datos a la tabla no se corresponde con la información mostrada en el gráfico, sino que sólo se realiza la traducción de una porción pequeña de los datos, se realiza otra representación o bien no se completa la tabla. A continuación describimos las subcategorías de respuestas incorrectas encontradas.

II. Construyen otro gráfico en lugar de traducir el gráfico a una tabla. Este tipo de respuesta puede deberse a desconocimiento de los convenios de construcción de la tabla o simplemente desconocimiento de la terminología. El estudiante hace una traducción del gráfico de barras presentado a otro gráfico diferente; la traducción puede ser correcta o incluir errores.

Ejemplos de esta situación se presentan en la Figura 5.5.3.7. Así, E62 construye un diagrama de líneas con sólo algunos de los valores del gráfico de barras. Puesto que no incluye título ni etiquetas, no queda claro si está representando sólo los datos de una distribución (aparentemente es la distribución del deporte practicado por los niños). E326 traduce la información a un gráfico de barras, con algunos errores en la altura de las barras (frecuencias); en su gráfico la variable principal es el deporte y el género sería la variable secundaria, mientras en el gráfico original es al contrario. E21 construye un gráfico de líneas múltiples para representar las dos variables. Ni E62 ni E21 son conscientes de que el gráfico de líneas no es adecuado para estos datos, al ser la variable cualitativa.

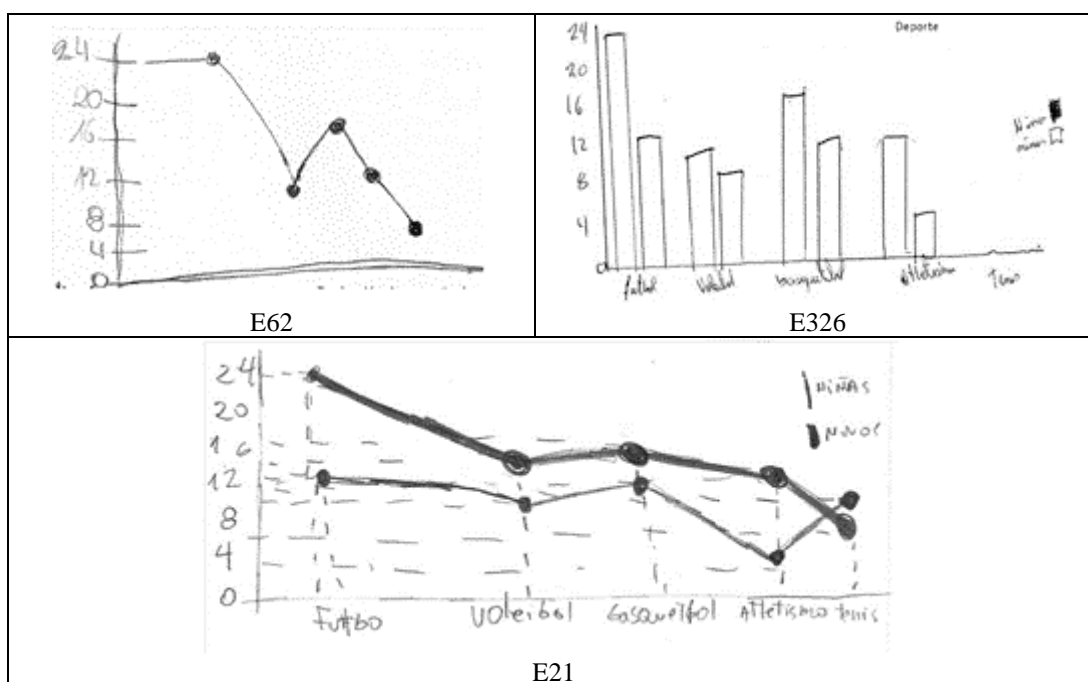


Figura 5.5.3.7. Construcción de gráfico en vez de tabla

12. Otros errores. Cuando los estudiantes construyen una tabla con una organización incompleta o errónea. Por ejemplo, como vemos en la Figura 5.5.3.8, el estudiante E162 presenta una tabla en que las frecuencias se han reorganizado en intervalos, pero no indica las categorías, por lo cual hay una confusión entre categoría y frecuencia. E79 construye unos intervalos que no incluyen todos los valores de las frecuencias, no indica las categorías ni realiza ninguna otra operación. Ninguno de estos estudiantes ha alcanzado un nivel de lectura adecuado del gráfico ni conoce los convenios de construcción de una tabla de frecuencias.

<p>[4-8]</p> <p>[12-16]</p> <p>[20-24]</p> <p>E79</p>	<p>Matrícula con tipo de respuesta</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Frecuencia</th> <th>Intervalo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>8</td> <td>0 - 12</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>13 - 25</td> </tr> </tbody> </table> <p>E162</p>	Frecuencia	Intervalo	8	0 - 12	2	13 - 25
Frecuencia	Intervalo						
8	0 - 12						
2	13 - 25						

Figura 5.5.3.8. Otros errores

En la Tabla 5.5.3.1 presentamos la distribución las respuestas al tercer ítem en los dos grupos de estudiantes. En ella observamos que, a nivel general, el mayor porcentaje de estudiantes corresponde a los que construyen una tabla correcta, con algunas omisiones. Estos estudiantes han leído todos los datos del gráfico, alcanzando el nivel 1 de lectura en la clasificación de Curcio (1989) y han demostrado ser capaces de construir una tabla de frecuencia, con algún desajuste de menor importancia.

Un porcentaje muy parecido no llega a desarrollar la actividad, posiblemente por no llegar a leer el gráfico o no recordar los convenios de construcción de la tabla. Las respuestas parcialmente correctas, junto con las correctas y correctas por omisión superan en 60%. Los porcentajes de éxito son similares entre los cursos estudiados, pero diferenciados en las respuestas parcialmente correctas y no contestadas, donde obtienen ventajas los estudiantes de 6° curso.

Tabla 5.5.3.1. Porcentaje estudiantes según tipo de respuesta

Tipo de respuesta	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	3,7	2,7	3,2
Correcta, salvo omisión	35,3	36,7	36
Parcialmente	21,6	17,8	19,7
Incorrecta	6,3	4,9	5,6
No contesta	33,2	37,8	35,4

En la Tabla 5.5.3.2 y 5.5.3.3 describimos el tipo de error que hemos identificado en las respuestas parcialmente correctas e incorrectas de los estudiantes. De ellas observamos que el error más frecuente el P2, consistente en cometer pequeños errores en la en la lectura o en la construcción de la tabla (14,5% de los estudiantes a los que se le aplicó el instrumento). Este error se presenta en mayor proporción en los estudiantes de 6° curso que en los de 7°, con un 17,6% y un 11,2% respectivamente. El resto de errores tiene pequeña incidencia.

Tabla 5.5.3.2. Porcentaje de estudiantes con errores en tablas parcialmente correctas

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
P1. Construir una tabla de conteo	1,8	0,3	1,1
P2. Pequeños errores u omisiones	17,6	11,2	14,5
P3. Construir una tabla marginal	2,1	6,3	4,2

Tabla 5.5.3.3. Porcentaje de estudiantes con errores en tablas incorrectas

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
I1. Construyen otro gráfico	2,4	1,4	1,9
I2. Otros errores	3,9	3,6	3,8

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global del ítem, hemos asignado una puntuación a cada estudiante según el tipo de tabla que construyen, en la que pueda alcanzar una puntuación máxima de 4. En la construcción de la tabla se puntúan 4 puntos (0: no contesta; 1: incorrecta; 2: parcialmente correcta; 3: correcta, salvo omisión; y 4: correcta).

En la Figura 5.5.3.9 se presenta el diagrama de barras adosado y los gráficos de caja con las puntuaciones totales por curso. En el primero observamos que la mayoría de estudiantes de 6º y 7º curso, que dan respuesta a la actividad, alcanzan 3 puntos, es decir, construcción correcta salvo pequeñas omisiones, con lo que llegan a leer correctamente el gráfico y construir una tabla casi correcta. Con casi la misma frecuencia se presentan los que no abordan la tarea. Al comparar los gráficos de caja vemos que la mediana es igual en ambos cursos, coincidiendo con el valor teórico. Los resultados son similares entre ambos cursos y no se observan valores atípicos.

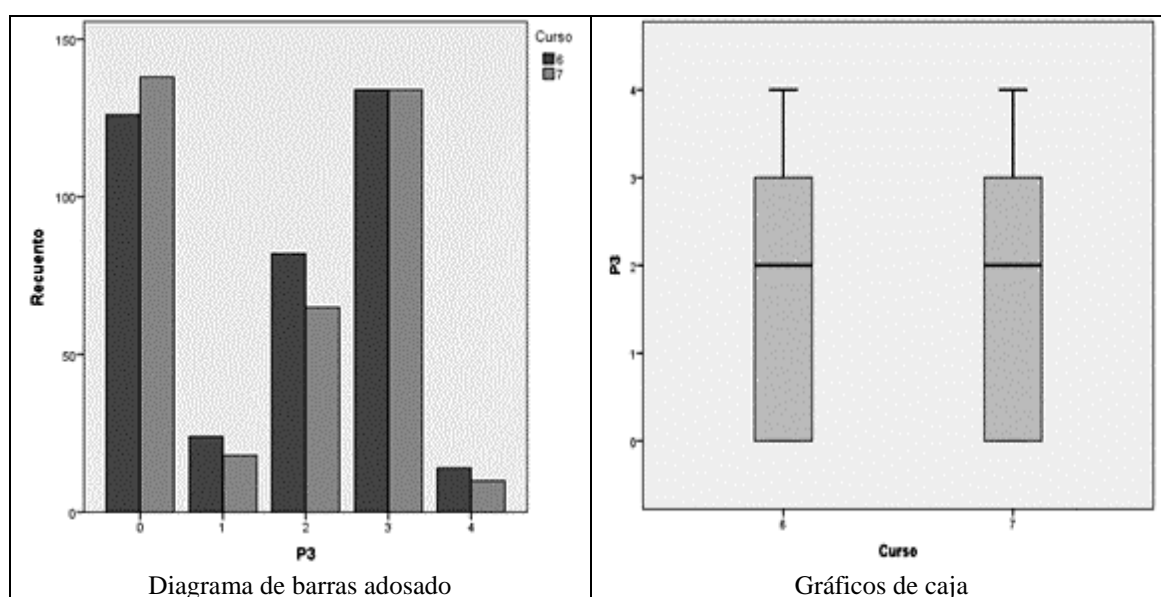


Figura 5.5.3.9. Distribución de la puntuación total en el ítem 3 por curso

5.5.4. RESULTADOS EN EL ÍTEM 4

En la Figura 5.5.4.1 mostramos en cuarto ítem del cuestionario de evaluación, que fue extraído y adaptado de un libro de texto de 4º de Educación Primaria (Batarce, Cáceres y Kükenshöner, 2013, p. 343), donde el estudiante debe traducir la información de un pictograma a una tabla. Para ello, en primer lugar ha de leer el título y deducir el tema del gráfico. Seguidamente, se debe identificar la variable representada (lugar donde se mide la variable) y sus categorías, interpretando las etiquetas de dicha variable. Para completar la tarea se comienza leyendo el gráfico. Para cada valor de la variable ha de contar el número de bombillas medias y enteras. Ya esto supone varias operaciones de *leer de datos*, que corresponde al nivel 1 según Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). Seguidamente, ha de interpretar el convenio representado en la última fila del gráfico que indica que cada bombilla representa 10 horas y cada media bombilla 5 horas. A partir de esta identificación ha de calcular el número total de horas que estuvo la luz prendida en cada lugar. Por ello, el estudiante ha de llegar al nivel 2, *leer dentro de los datos*, pues realiza cálculos con los datos directamente reflejados en el gráfico. Finalmente, se le pide traducir el gráfico a una

tabla, donde ha de situar el número de horas calculado anteriormente para cada valor de la variable y finalmente calcular el total de la tabla.

El gráfico de este ítem tiene un nivel de complejidad semiótica 2 de *representación de un listado de datos* de Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010). En comparación con el anterior, la parte de construcción de la tabla es más sencilla, puesto que se le da al estudiante el título, etiquetas de la variable y categorías.

Completa la siguiente tabla con la información mostrada en el gráfico.

Número de horas en que la luz está prendida por semana en un centro deportivo	
Sala de ejercicios	
Vestidores	
Piscina	
Cancha de tenis	

Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	
Vestidores	
Piscina	
Cancha de tenis	
Total	

Cada = 10 horas. Cada = 5 horas.

Figura 5.5.4.1. Ítem 4 planteado a los estudiantes

En lo que sigue hacemos la descripción de los resultados asociados a la construcción de la tabla a partir de la información mostrada en el pictograma por los estudiantes de 6º y 7º curso de Educación Primaria. Luego presentamos los resultados sobre los niveles de lectura observados en sus repuestas.

Construcción de la tabla

Como hemos indicado, los estudiantes debían realizar una traducción de la información contenida en el pictograma a una tabla, que se da parcialmente construida. Las respuestas entregadas por los estudiantes se han clasificado de acuerdo a las siguientes categorías, teniendo en cuenta la corrección de la tabla:

Tabla correcta. Cuando el estudiante lee el gráfico correctamente y ha traducido correctamente todos los datos del pictograma a la tabla parcialmente construida que se da el enunciado y calculando correctamente su total. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la de E361, que ha leído correctamente todos los valores del gráfico y los sitúa en su casilla correspondiente de la tabla, calculando su total (Figura 5.5.4.2).

Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	75
Vestidores	90
Piscina	55
Canchas de tenis	50
Total	270

E361

Figura 5.5.4.2. Respuesta considerada como correcta

Tabla parcialmente correcta. Cuando el estudiante hace una traducción parcialmente correcta de la información mostrada en el pictograma, debido a errores en la lectura de la información. La tabla tiene muchos elementos correctamente construidos, pero se comete algún error. A continuación describimos y ejemplificamos

los tipos de tablas parcialmente correctas que hemos encontrado.

P1. Error en la cantidad de iconos. Algunos estudiantes cuentan un icono más o menos al leer el pictograma, por lo cual tienen un error en el cálculo del valor de alguna categoría, que transmiten a la tabla. Por ejemplo, la respuesta de E25 que mostramos en la Figura 5.5.4.3, consideran 4 bombillas y media en lugar de 5 y media, para calcular el número de horas de luz en la piscina. Estos estudiantes han traducido correctamente cada icono por su valor, pero han cometido un error al contar el número de iconos; se trata de un descuido no relacionado, en sí mismo, con la lectura del gráfico o la construcción de la tabla.

Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	75
Vestidores	90
Piscina	45
Canchas de tenis	50
Total	260

E25

Figura 5.5.4.3. Tabla parcialmente correcta con error en el número de iconos

P2. Error en calcular el total de la tabla. Cuando el estudiante lee correctamente el pictograma y completa correctamente las filas de la tabla, pero no calcula la suma total, como se muestra en la respuesta de E194, o lo hace en forma errada, como lo hace E559, situaciones que se observan en la Figura 5.5.4.4. Se trata, en este último caso, de un error en la suma, aunque la lectura del pictograma y la construcción de la tabla son correctas.

Número de horas por semana que está prendida la luz		Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	Nº de horas	Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	75 horas	Sala de ejercicios	75
Vestidores	90 horas	Vestidores	90
Piscina	55 horas	Piscina	55
Canchas de tenis	50 horas	Canchas de tenis	50
Total	260 horas	Total	

E559
E194

Figura 5.5.4.4. Tablas parcialmente correctas con error en el total

P3. Otros errores. Incluimos en este apartado otros errores en la interpretación del valor del icono, que son poco frecuentes. Algunos de estos errores son: se considera que el icono que representa media bombilla equivale a 15 horas de consumo, en lugar de a cinco (E8), interpreta que uno de los iconos representa una hora de consumo, aunque el resto se ha traducido bien por 10 horas (E174); se considera que cada bombilla vale 100 y que media vale 50; se considera que las bombillas enteras y medias equivalen a 10 unidades estadísticas; considerar, en una fila, que el valor de cada bombilla es 5; repite el valor de una fila; no contabilizar las medias bombillas; considerar, una fila, que media bombilla equivale a 11 unidades estadísticas; y cuando se cometen dos o más de los errores indicados anteriormente. Ejemplos de los dos primeros tipos de errores se muestran en la Figura 5.5.4.5.

Número de horas por semana que está prendida la luz		Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	N° de horas	Lugar	N° de horas
Sala de ejercicios	85	Sala de ejercicios	75 horas
Vestidores	90	Vestidores	90 horas
Piscina	65	Piscina	55 horas
Canchas de tenis	50	Canchas de tenis	6 horas
Total	190	Total	225 horas

Figura 5.5.4.5. Ejemplos de tablas parcialmente correctas, con errores poco frecuentes

Tabla incorrecta. Cuando todas o la mayoría de las filas de la tabla son incorrectas, indicando un fallo en la lectura literal de algún elemento del gráfico. Algunos ejemplos los presentamos en la Figura 5.5.4.6. En ella, observamos la respuesta entregada por E111, que asigna un 10 y 5 en el lugar donde se encuentra una o media bombilla, respectivamente, pero no los relaciona con la cantidad de iconos. La respuesta de E147, expresa los datos en notación fraccionaria, interpretando la media bombilla como denominador y el número de bombillas enteras como numerador de la fracción.

Otros tipos de respuestas que hemos contabilizado en esta categoría son las de aquellos estudiantes que cuentan el número de iconos enteros, y cuando existen medios iconos forman una fracción de numerador 1 y cuyo denominador es el número de iconos enteros, o cuando se expresa la media bombilla como si fuese media hora (en notación de hora, minutos).

Número de horas por semana que está prendida la luz		Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	N° de horas	Lugar	N° de horas
Sala de ejercicios	10 iconos - 5 hora	Sala de ejercicios	$\frac{7}{2}$ de Horas
Vestidores	10 hora	Vestidores	9 de Horas
Piscina	10 hora - 5 hora	Piscina	$\frac{5}{2}$ de Horas
Canchas de tenis	10 hora	Canchas de tenis	5 de Horas
Total	40 hora	Total	$\frac{26}{4}$ de Horas

Figura 5.5.4.6. Ejemplos de respuestas de tablas incorrectas

No completa la tabla. Cuando el estudiante no desarrolla la actividad o alcanza parcialmente el nivel 1.

Tabla 5.5.4.1. Porcentaje de estudiantes según corrección de la tabla

Tipo de respuesta	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	74,5	76,4	75,4
Parcialmente correcta	20,8	16,2	18,5
Incorrecta	3,7	3,8	3,8
No completan la tabla	1,1	3,6	2,3

En la Tabla 5.5.4.1 observamos la distribución de las respuestas que han dado los estudiantes a la tarea de traducción (cambio de registro de representación). Se observa que gran parte de los estudiantes han realizado la tarea con éxito, con un porcentaje superior al 74% en cada curso y a nivel general. Cruz (2013) informa que el 70% de sus

estudiantes de 3° de primaria leen correctamente un pictograma, aunque usa uno más sencillos, pues cada icono corresponde a una unidad. La autora no contempla la traducción pictogramas a una tabla.

Respecto al tipo de error, de las respuestas parcialmente correctas, se describen sus resultados en la Tabla 5.5.4.2. En ella vemos que la mayoría de estos están asociados al cálculo del total de la tabla, es decir, a su ausencia o que no es correcto. No contabilizamos los errores asociados a tablas incorrectas al ser su número muy pequeño.

Tabla 5.5.4.2. Porcentaje de estudiantes que comenten diferentes errores en las tablas parcialmente correctas

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
P1. Error en la cantidad de iconos	7,4	4,9	6,2
P2. No calculan el total de la tabla	10,3	8,8	9,5
P3. Otros errores	3,2	2,5	2,8

Nivel de lectura

En segundo lugar, se presentan los resultados de acuerdo a los niveles de lectura que alcanza las respuestas de los estudiantes (Curcio, 1987, 1989; Friel *et al.*, 2001). Estas respuestas se han clasificar según los siguientes niveles:

Nivel 0. Cuando el estudiante no aborda la actividad y la deja en blanco. Este nivel no es descrito por Curcio, pero creemos que es necesario para describir cuando la actividad no es desarrollada, pues no llegan a leer el gráfico, ni siquiera incorrectamente. Manifiesta el desconocimiento u olvido del pictograma, que no pueden interpretar.

Nivel 1. Leer los datos. Se consideran aquellas respuestas en que se realiza una lectura literal de los datos del gráfico, que puede ser total o parcial. Es decir, los estudiantes leen un dato, pero no realizan operaciones con ellos; por tanto leen el número de bombillas de cada categoría correctamente, pero consideran que cada bombilla tiene el valor unitario y no 10, ni que la mitad de una bombilla equivale a 5 unidades.

Ejemplos de estas respuestas las vemos en la Figura 5.5.4.7. E226 considera la bombilla como unidad y la media bombilla como mitad, contando correctamente las bombillas enteras y medias. Algo similar es lo que hace E29, quien en ocasiones considera una bombilla como unidad y la media bombilla como mitad y, también, en una ocasión, la bombilla como 10 unidades.

Número de horas por semana que está prendida la luz		Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	N° de horas	Lugar	N° de horas
Sala de ejercicios	15	Sala de ejercicios	7,5 horas
Vestidores	9	Vestidores	90 horas
Piscina	55	Piscina	5,6 horas
Canchas de tenis	5	Canchas de tenis	6 horas
Total	28	Total	27 horas

Figura 5.5.4.7. Ejemplos de respuestas de nivel 1

Nivel 2. Leer dentro de los datos. Se consideran aquellas respuestas en que los

estudiantes logran leer correctamente el número de iconos correspondientes a cada valor de la variable y, además, multiplican este número por 10 o 5 dependiendo si el icono está completo o medio. En la Figura 5.5.4.8 vemos un ejemplo de este nivel (E361), donde el estudiante hace una lectura literal correcta de la información, interpreta el convenio dado y realiza el cálculo correcto para el número de horas para cada valor de la variable.

Lugar	N° de horas
Sala de ejercicios	75
Vestidores	90
Piscina	55
Canchas de tenis	50
Total	270

E361

Figura 5.5.4.8. Ejemplo de respuesta de nivel 2

En la Tabla 5.5.4.3 observamos la distribución del nivel de lectura que se deduce de las respuestas de los estudiantes. La tabla muestra el alto porcentaje de respuestas que se ubican en el nivel de lectura 2 (*leer dentro de los datos*). Más del 90% de los estudiantes son capaces de leer el pictograma en el nivel 2 y, por tanto, han realizado correctamente todas las operaciones aritméticas para la interpretación del gráfico. Si bien los resultados por curso son similares, vemos cómo los estudiantes de 6° grado muestran un mejor desempeño, por lo que parece haber un efecto de olvido. Observamos que los dos grupos superan en porcentaje de lectura correcta los datos de Cruz (2013), lo cual es lógico debido a la edad; pero también hay que tener en cuenta la mayor complejidad de nuestro gráfico respecto al de la citada autora.

Tabla 5.5.4.3. Porcentaje de estudiantes que alcanza cada nivel de lectura

Nivel	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
0	0,8	3	1,9
1	5,5	5,5	5,6
2	93,7	91,5	92,6

Respecto al nivel de lectura también los resultados son mejores que los de Cruz (2013), pues sus estudiantes llegaron a nivel 1 en el 82 % de los casos; en nuestro estudio llegaron todos, excepto los de nivel 0, es decir, el 98,2%. En el estudio de Evangelista (2013) con gráficos de barras y líneas respondieron a nivel 1 el 60% y a nivel 2 el 70%; por tanto, los estudiantes chilenos han tenido mejor desempeño que dichos estudios.

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global de la respuesta a este ítem, se ha dado una puntuación a cada apartado, en la forma siguiente:

- La construcción de la tabla se puntúa hasta un máximo de 3 puntos (0: si no la construye; 1: si es incorrecta; 2: si es parcialmente incorrecta; y 3: si es correcta).
- En el nivel de lectura se ha puntuado cada apartado de 0 a 2 puntos, dependiendo de si no se lee el gráfico (0 puntos), se alcanza un nivel de lectura (Curcio, 1987, 1989)

de leer los datos (1 punto) o si se llega al nivel leer dentro de los datos (2 puntos).

Por tanto, en este ítem, se pueden alcanzar hasta 5 puntos. En la Figura 5.5.4.9 se presenta el diagrama de barras adosado y los gráficos de caja de la puntuación total conseguida en este ítem. En el primer gráfico observamos que la mayoría de los estudiantes alcanzan 5 puntos, lo que muestra lo sencillo que ha sido para ellos. Seguidamente se alcanzan 4 puntos y en pocos casos una puntuación menor. En todo caso la mayoría de los estudiantes, en los dos grupos, se sitúan por encima del valor teórico medio que sería 2,5 puntos.

Al comparar los gráficos de caja vemos que la mediana es muy alta igual en ambos cursos, pero el 7º curso presenta mejores resultados ya que los cuartiles coinciden con el valor máximo. Apenas hay otras diferencias en los resultados en este ítem en los dos grupos.

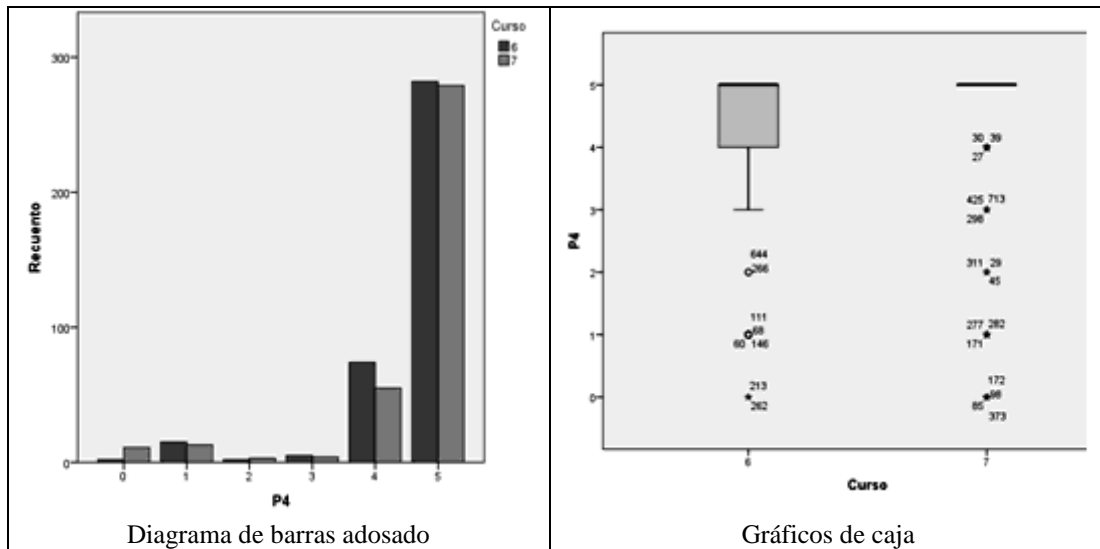


Figura 5.5.4.9. Distribución de la puntuación total en el ítem 4 por curso

5.5.5. RESULTADOS EN EL ÍTEM 5

La bibliotecaria del colegio hizo un inventario de los libros que hay en la biblioteca.

Cantidad de libros que hay en la biblioteca

Infantiles	📖 📖 📖 📖
Novelas	📖 📖 📖 📖 📖
Ciencia ficción	📖 📖
Investigación	📖 📖 📖

📖 = 15 libros

Marca si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, explicando tu respuesta

	Verdadero	Falso
1. Sólo hay dos libros de ciencia ficción		
2. Hay 60 libros infantiles		

Figura 5.5.5.1. Ítem 5 planteado a los estudiantes

En el quinto ítem, que observamos en la Figura 5.5.5.1, se pide realizar una lectura crítica de una distribución representada en un pictograma, y, por tanto, el estudiante ha de llegar al nivel de lectura 4. Consiste en la *representación de una*

distribución, que corresponde al tercero de los niveles de complejidad semiótica (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010). Se dan dos afirmaciones respecto al contenido del gráfico y el estudiante debe indicar si son ciertas o falsas, justificando su respuesta en base a la información representada. Dicha actividad ha sido adaptada del libro de texto de tercero de Educación Primaria (Charles et al., 2014, p. 253).

Para responder las preguntas, el estudiante debe, en primer lugar, interpretar el contenido del gráfico, leyendo el rótulo del mismo, para reconocer la variable representada; seguidamente, ha de identificar la fila de iconos correspondiente a cada uno de las categorías de la variable tipo de libro, encontrando la que se refiere a la pregunta (libros de ciencia ficción o libros infantiles). Esto ya requiere una lectura de datos de nivel 1 (*leer los datos*) según Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001).

Identificada la fila, ha de contar el número de iconos e interpretar la clave situada en la parte inferior derecha del gráfico, que indica que cada icono representa 15 libros. A partir de esta información ha de calcular la frecuencia correspondiente a la categoría de la variable, que sería el número de iconos multiplicado por la frecuencia representada por cada uno. Por tanto, ha de *leer dentro de los datos*, nivel 2, según Curcio (1987, 1989), ya que ha de realizar cálculos con los valores leídos. Además, el estudiante debe confirmar la afirmación cierta o rebatir la falsa con un argumento correcto; por tanto ha de hacer una lectura crítica del gráfico y llegaría al nivel 4, *leer detrás de los datos* (Shaughnessy et al., 1996).

A continuación, vamos a describir los resultados, tanto respecto a si la respuesta ha sido correcta, como al nivel de lectura que alcanza el estudiante al relacionar su respuesta con su respectiva justificación.

Porcentaje de respuestas correctas

En la Tabla 5.5.5.1 observamos el porcentaje de respuestas correctas respecto a la verdad o falsedad de las dos afirmaciones consideradas en el ítem. En esta tabla vemos que en los dos apartados, a nivel general, un poco menos del 60% de los estudiantes dan una respuesta correcta en cada uno de los enunciados. Los resultados aparentemente son inferiores a los obtenidos por Cruz (2013), en la lectura de pictogramas, pero en dicho trabajo sólo se plantean preguntas hasta nivel 2 de lectura y cada icono sólo representa una unidad, mientras en nuestro ítem cada icono representa 15 unidades; por ello, nuestros ítems son comparativamente más difíciles.

Tabla 5.5.5.1. *Porcentaje de respuestas correctas a las afirmaciones del ítem 5*

Afirmación	6º curso (n=380)	7º curso (n=365)	Total (n=745)
1. Sólo hay dos libros de ciencia ficción	65,6	61,1	63,4
2. Hay 60 libros infantiles	66,8	61,1	64

Los estudiantes de 6º de primaria presentan un mayor nivel de éxito que los de 7º, lo que puede deberse al efecto del olvido. Los pictogramas se estudian en Chile con más intensidad en los cuatro primeros cursos de Educación Primaria y también en 6º curso se proponen algunas actividades sobre estos gráficos en los libros de texto (Díaz-Levicoy et al., 2016). Sin embargo, apenas se utilizan en el 7º curso. No obstante, las diferencias fueron pequeñas.

Nivel de lectura

Seguidamente hemos analizado el nivel de lectura al que llegó el estudiante al indicar la veracidad o falsedad de las afirmaciones y al justificar de dicha elección. Estas respuestas se han clasificado de acuerdo a los niveles de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001; Shaughnessy et al., 1996), descritos anteriormente, e interpretándose de la siguiente forma:

Nivel 0. Cuando no se lee la información pedida en la pregunta o la lectura del gráfico es incorrecta, es decir, que no se lee correctamente ni siquiera a nivel literal, o cuenta mal el número de iconos.

Nivel 1. Leer los datos. La respuesta del estudiante se clasifica en esta categoría si se basa, simplemente, en la cuantificación de los iconos asociados a cada valor de la variable, es decir, cuenta el número de iconos que corresponde a cada tipo de libro. El estudiante ha leído correctamente el rótulo e identificado el tema del gráfico y ha asociado cada categoría (tipo de libro) con una fila de iconos, contando el número de ellos. Sin embargo, no tiene en cuenta que cada icono representa 15 libros, y no realiza los cálculos necesarios para determinar la frecuencia que corresponde a cada categoría. A continuación mostramos unos ejemplos de este tipo de respuestas. En el primero, el estudiante E55 interpreta cada icono en la categoría ciencia ficción como una unidad; en el segundo, E308 argumenta que la clave que da la equivalencia en número de libros por icono en realidad indica el total de libros en la biblioteca.

Verdadero, porque en el inventario aparecen 2 libros de ciencia ficción (E55).

Falso, porque la tabla dice que hay 15 libros en total. Entonces no puede haber 60 y además hay solo 4 (E308).

Nivel 2. Leer entre los datos. Cuando se responde correctamente a la afirmación. Por tanto, aparentemente, el estudiante ha leído el pictograma, y después de identificar el número de iconos que corresponde a cada categoría de libros, ha realizado los cálculos requeridos para determinar su frecuencia, multiplicando el número de iconos por 15. El estudiante es capaz de interpretar correctamente el pictograma, pero no argumenta en forma suficiente la veracidad o falsedad de la afirmación que se le ofrece. También, hemos considerado dentro del nivel 2 aquellas respuestas en que los estudiantes realizan una argumentación incompleta, es decir, no explicitan las operaciones aritméticas realizadas. Por ejemplo, E21 indica que la afirmación es falsa y da el número de libros, pero no argumenta suficientemente. Igual ocurre con E603.

Falso, hay 30 libros de ciencia ficción (E21).

Verdadero, en total si son 60 libros (E603).

Nivel 3. Leer más allá de los datos. Es un nivel no considerado en este ítem, ya que no se realizan predicciones o extrapolaciones con los datos del gráfico.

Nivel 4. Leer detrás de los datos. Cuando la respuesta dada por el estudiante implica, en primer lugar, la lectura correcta del pictograma y también el desarrollo de los cálculos necesarios para determinar la frecuencia de cada categoría. Además, el estudiante alcanza un nivel de lectura crítica según Shaughnessy et al., (1996), pues es capaz de determinar si la afirmación correcta o no y además puede dar una argumentación al respecto. Ejemplos de estas respuestas se muestran a continuación. Observamos que E38 hace referencia a que cada icono representa 15 unidades y al

número de iconos en la categoría y explicita los cálculos que le llevan a un total de 30 libros de ciencia ficción. Similar razonamiento es dado por E681.

Falso, porque como se ve en el inventario cada dibujo vale 15 libros y en el registro de ciencia ficción hay 2 dibujos; por lo tanto, si sumamos $15+15$ me da como resultado 30 libros (E38, pregunta 1).

Verdadero, cada libro vale 15; entonces se multiplica por 4 en este caso y daría 60 en total (E681, pregunta 2).

En la Tabla 5.5.5.2 mostramos la distribución de los niveles de lectura alcanzados por los estudiantes en este ítem. En ella, observamos que, globalmente, el nivel de lectura más frecuente es el 2, *leer dentro de los datos*, que se caracteriza por la lectura directa del gráfico, acompañada por el desarrollo de procesos matemáticos sencillos. Le sigue el nivel 1, de *leer los datos*, en el que únicamente se hace lectura literal del gráfico (contabilizar los iconos). Finalmente, son pocos los estudiantes que alcanzan el cuarto el nivel de lectura crítica, aunque el porcentaje es ligeramente mayor en la segunda afirmación.

En el trabajo de Cruz (2013) sus estudiantes llegaron a nivel 1 en el 82 % de los casos; en nuestro estudio el porcentaje fue mayor, el 98,4% en la primera afirmación y el 97,7% en la segunda. En el estudio de Evangelista (2013), con gráficos de barras y líneas, respondieron a las preguntas de nivel 1 en un 60%; un porcentaje algo mayor que el nuestro, aunque no es el nivel exigido en estas actividades. Al nivel 2 llegaron todos menos los que se quedan en nivel 0 y 1, es decir, el 61% de los estudiantes en la primera afirmación y el 64,3% en la segunda, mientras en el trabajo de Cruz llegan el 70% y en de Evangelista entre el 41% y el 51% dependiendo del gráfico. Al nivel 4 globalmente sólo llegan el 5,6% en la primera afirmación y el 11,1% en la segunda. Aparentemente también en el nivel de lectura los resultados son peores que los de Cruz, pero esta autora considera un pictograma en que cada icono sólo representa una unidad y no considera el nivel 4 de lectura crítica de pictogramas.

Tabla 5.5.5.2. *Porcentaje de estudiantes que alcanzan diferentes niveles de lectura*

Afirmación	Nivel de lectura			
	0	1	2	4
1. Sólo hay dos libros de ciencia ficción	1,6	37,3	55,4	5,6
2. Hay 60 libros infantiles	2,3	33,4	53,2	11,1

Al analizar los resultados por curso y afirmación (Figura 5.5.5.2), los estudiantes de 6° curso alcanzan con mayor frecuencia el nivel 2 en las dos preguntas (57,1% en la primera afirmación y 55,8% en la segunda) que los de 7° (53,7% en la primera y 50,4% en la segunda). Estos, por el contrario les superan en porcentaje en el nivel 1, con 39,2% en la primera afirmación y 35,6% en la segunda, mientras que los de 6° curso alcanzan un 35,5% en la primera y 31,3% en la segunda. Las respuestas que alcanzan un nivel 3, son escasa en ambos cursos y están cercanos al 10% de las respuestas de los estudiantes en la segunda parte y casi la mitad de esta cantidad en la primera. En este nivel, los niños de 7° obtienen algo mejor resultado, debido a su mayor edad y nivel de razonamiento, pero la diferencia es pequeña. Globalmente los de 6° tienen mejores resultados, ya que presentan un porcentaje mayor de respuestas ubicadas en los niveles 2 y 4, como se aprecia en los gráficos.

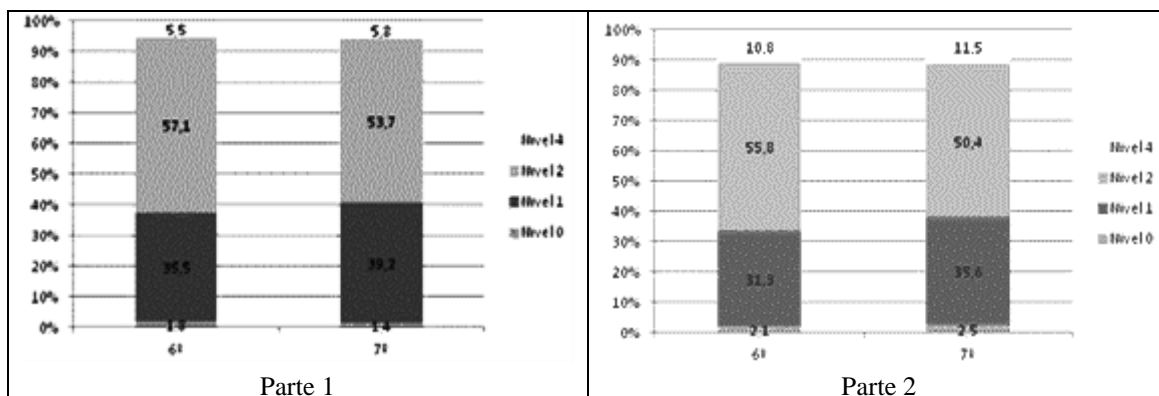


Figura 5.5.5.2. Porcentaje de estudiantes que alcanza diferentes niveles de lectura en las dos partes del ítem 5 en cada curso

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global del desempeño en esta tarea, se ha dado a cada estudiante una puntuación por cada apartado, en la forma siguiente.

- En el nivel de lectura se ha puntuado cada pregunta de 0 a 4 puntos, según el nivel alcanzado (no se considera el nivel 3).
- En la respuesta a cada una de las dos preguntas planteadas se puntúa 1 si es incorrecta y 2 si es correcta. Por tanto, se pueden alcanzar hasta 12 puntos en este ítem.

En la Figura 5.5.5.3 se presentan el diagrama de barras adosado y los gráficos de caja de la puntuación total en este ítem, diferenciando por los cursos participantes de esta investigación. En el diagrama de barras observamos que la mayoría de los estudiantes alcanza 8 puntos y también hay un grupo que obtienen 4 puntos. No obstante, la mediana y tercer cuartil (gráfico de caja) se sitúa por encima del valor mediano teórico, en concreto en 6 puntos, por lo que los resultados globales son buenos. Además, las diferencias entre los grupos no son muy grandes.

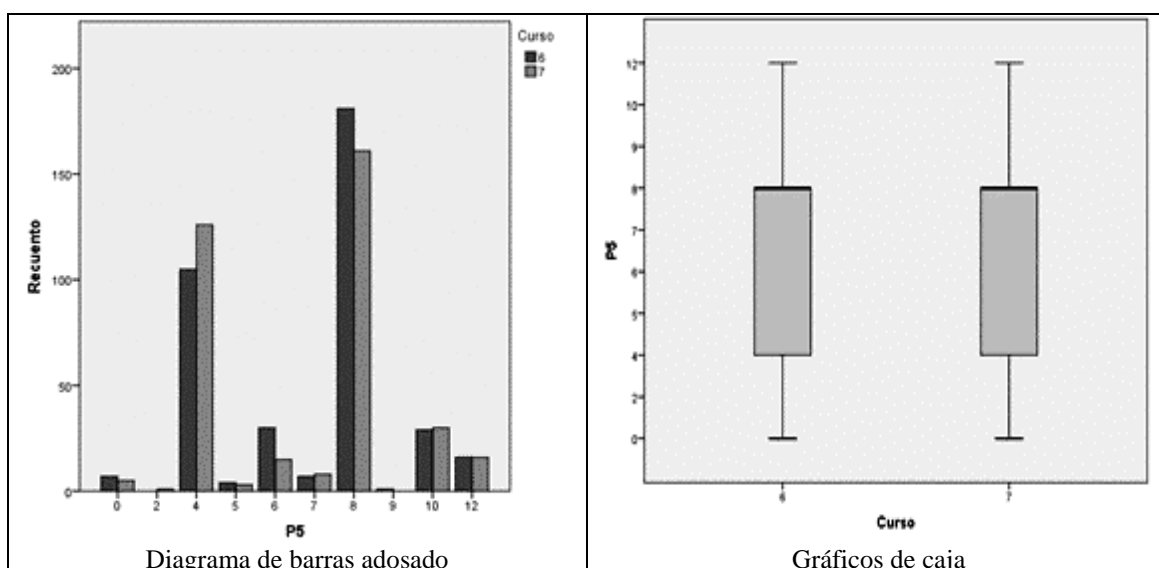


Figura 5.5.5.3. Distribución de la puntuación total en el ítem 5 por curso

5.5.6. RESULTADOS EN EL ÍTEM 6

La sexta pregunta que fue adaptada de un libro de texto de 5° de Educación Primaria chilena (Ávila, Fuenzalida, Jiménez y Ramírez, 2013), se muestra en la Figura 5.5.6.1. Para desarrollar con éxito las tareas pedidas, el estudiante ha de reconocer los elementos del gráfico, identificar su título (pregunta 1) y las variables representadas (pregunta 2), leer un valor del gráfico (pregunta 3) y la categoría asociada a un determinado valor (lectura inversa) (última pregunta); todas actividades relacionadas con el nivel 1 de *leer los datos* de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). La representación proporcionada corresponde a un listado de datos, que según los niveles de complejidad semiótica de Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010) corresponde al segundo nivel.

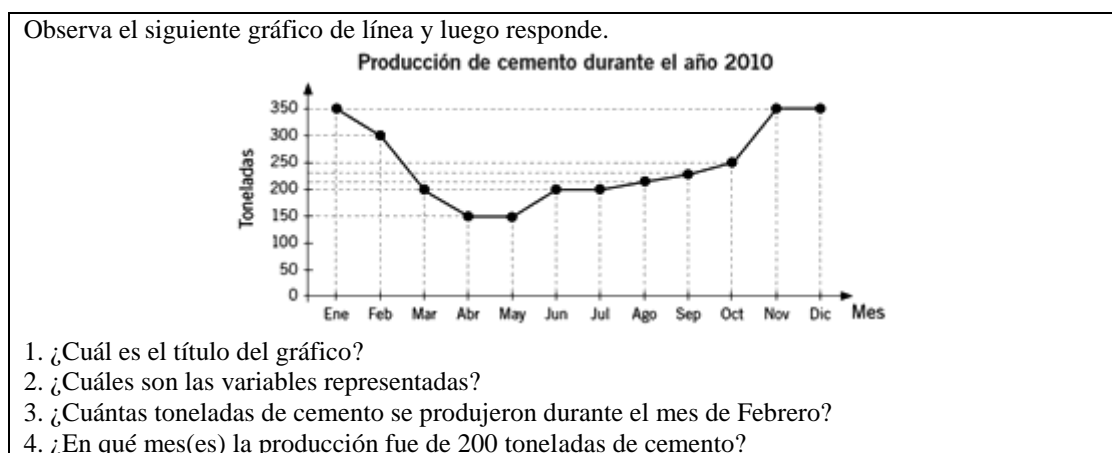


Figura 5.5.6.1. Ítem 6 del cuestionario de evaluación

Primera pregunta: lectura del título del gráfico.

La primera actividad pidió identificar el título del gráfico de líneas, que muestra el la producción de cemento durante los meses de un año. Este tipo de actividades, si bien son sencillas, permiten situar al estudiante en el contexto de la información mostrada.

Respuesta correcta. Se consideró correcta la respuesta del estudiante si responde dando el título exacto del gráfico, como el caso de E184, o bien omite alguna palabra, pero mantiene la idea central del mismo (E194):

Producción de cemento durante el 2010 (E184).

Producción de cemento (E194).

Respuesta incorrecta. La respuesta del estudiante se ha considerado incorrecta si no tiene relación con el título del gráfico. Ejemplo de estas respuestas, que son poco frecuentes, lo vemos en E119 y E140, que hacen referencia a un tipo de gráfico; el primer de ellos incluso confunde el tipo de gráfico.

Gráfico de puntos (E119).

Gráfico de línea (E140).

En la Tabla 5.5.6.1 presentamos los resultados en la lectura del título de gráfico. Se muestra que cerca del 95% de los estudiantes identifican el título correctamente. Al comparar los resultados por curso vemos que los estudiantes de 6° presentan un

porcentaje levemente superior de éxito, aunque en ambos casos el porcentaje es alto. No hemos encontrado antecedentes de investigación que informen de la competencia de los niños para la lectura del título de un gráfico.

Tabla 5.5.6.1. *Porcentaje de estudiantes según tipo de respuesta en la lectura del título*

Tipo de respuesta	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	95	93,7	94,4
Incorrecta	1,1	2,5	1,7
No contesta	3,9	3,8	3,9

Segunda pregunta: identificación de variables

En segundo lugar, se ha pedido al estudiante describir las variables representadas en el gráfico de líneas. Luego de analizar las respuestas de los estudiantes hemos encontrado las siguientes categorías.

Respuesta correcta. Si el estudiante identifica con claridad las dos variables representadas y las describe, a veces con lenguaje impreciso, debido a la edad. Como ejemplos, mostramos las respuestas de E21, que describe a su manera la relación entre las dos variables y E22, más conciso, que simplemente indica las dos variables.

Cuántas toneladas hay en los meses (E21).

Toneladas y meses (E22).

Respuesta parcialmente correcta. Si el estudiante describe, en forma correcta, una de las dos variables representadas en el gráfico de línea, pero omite la descripción de la otra. Por ejemplo, pueden mencionar las toneladas de cemento o los meses, como se muestra en los ejemplos que siguen a continuación:

Toneladas (E8).

Los meses (E23).

Respuesta incorrecta. Cuando el estudiante, en su respuesta, no es capaz de describir con claridad las variables representadas en el gráfico por no haberlas identificado. De acuerdo con el análisis realizado, hemos identificado las siguientes subcategorías de respuestas incorrectas.

11. Listado de valores de una variable. En esta respuesta, en lugar de describir la variable, se reproduce un listado de los posibles valores de las etiquetas de las escalas de uno de los dos ejes. Por ejemplo, en las respuestas de E6 y E39 se mencionan las etiquetas que se muestran en el eje Y. Por tanto los estudiantes confunden el título del gráfico con sus etiquetas.

350, 300, 250, 200, 150, 100, 50, 0 (E6).

0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350 (E39).

12. Da el valor del rango o los valores extremos. En lugar de dar las variables, el estudiante informa del rango de variación de una o las dos variables, o bien reproduce uno o los dos valores máximo y mínimo o los meses en que estos valores se alcanzan. Ejemplos de estas respuestas se muestran a continuación, donde E113 escribe el menor

de los datos que están representados en el gráfico, y E241 menciona los meses en que se obtiene la producción máxima de cemento (350 toneladas). No obstante, en estas respuesta se ve que el estudiante ha sido capaz de leer el gráfico a un nivel 2 (Curcio, 1987), *leer dentro de los datos*, pues ha sido capaz de realizar cálculos con ellos.

150 (E113).

Enero, Noviembre y Diciembre (E241).

13. Describe la tendencia de los datos. Cuando se describe la tendencia que siguen los valores representados en el gráfico a lo largo del periodo de tiempo mostrado. Por ejemplo, tenemos la respuesta de E28 que menciona la gran variación de los valores durante el año, y E33 que describe los cambios de tendencia en los valores en ciertos meses. También en este caso los estudiantes han llegado al nivel 2 de Curcio (1987), aunque la respuesta, respecto al título del gráfico es incorrecta.

Varía mucho las toneladas según los meses que pasan (E28).

Inicia bien, luego en Abril baja poco a poco y vuelve a subir (E33).

14. Da el listado de los datos. Cuando el estudiante menciona la producción de todos los meses, uno a uno, para lo cual ha tenido que realizar una lectura de los mismos. Se incluyen los casos en que se han leído mal algunos de los datos. Por ejemplo, en el caso de E104 se hace una lectura correcta de todos los datos, y E120 comente algunos errores.

350, 300, 200, 150, 150, 200, 200, 230, 240, 250, 350, 350 (E104).

350, 300, 200, 150, 150, 200, 200, 202, 204, 250, 350, 350 (E120).

15. Hace referencia a los valores que pueden tomar los datos. Por ejemplo, el E44 menciona que hay siete posibles valores de la producción de cemento durante un año. También, tenemos el caso de E212 que menciona los valores diferentes que toman los datos.

Las variables son 7 (E44).

350, 300, 250, 230, 210, 200, 150 (E212).

16. Meses próximos al máximo. Cuando se mencionan los meses anteriores o posteriores a aquellos en que se alcanza el valor máximo, como lo hace E10, que se muestra a continuación.

Febrero y Octubre (E10)

17. Otros errores. Cuando presentan otros errores, que no se han clasificado en las subcategorías anteriores y se observan en pocas ocasiones, como las respuestas de E34 y E375; el primer caso podría hacer referencia a los valores mínimos que se representan en el gráfico y el segundo podría estar relacionado con la escala.

150 y 200 (E34).

50 (E375).

En la Tabla 5.5.6.2 mostramos los porcentajes del tipo de respuestas en esta tarea, observando que en una alta proporción (alrededor del 40%) los estudiantes no saben responderla. Los estudiantes que son capaces de identificar con éxito las dos variables representadas no alcanzan el 20% de éxito, mientras que los estudiantes de 6° curso logran un porcentaje de éxito levemente superior que los de 7° curso.

Tabla 5.5.6.2. *Porcentaje de estudiantes según tipo de respuesta en la descripción de las variables*

Tipo de respuesta	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	20,3	16,4	18,4
Parcialmente	17,9	22,7	20,3
Incorrecta	24,2	21,4	22,8
No contesta	37,6	39,5	38,5

En la Tabla 5.5.6.3 presentamos la frecuencia de diferentes tipos de errores encontrados en las respuestas incorrectas. Todos ellos aparecen con poca proporción, siendo el más frecuente el listado de valores de una variable, seguido por aquel en que se hacen referencia a los rangos de las variables, valores máximos o mínimos o los extremos establecidos en el gráfico. No encontramos antecedentes sobre la competencia de los estudiantes en la identificación de las variables en un gráfico.

Tabla 5.5.6.3. *Porcentaje de estudiantes con diferentes errores en las respuestas incorrectas*

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
I1. Listado de valores de una variable	7,4	6,6	7
I2. Valor del rango o valores extremos	6,6	4,4	5,5
I3. Describe la tendencia de los datos	0,3	1,4	0,8
I4. Da el listado de datos	1,6	0,3	0,9
I5. Valores que pueden tomar los datos	0,5	0,3	0,4
I6. Meses próximos al máximo	0,3	0	0,1
I7. Otros errores	7,6	8,5	8,1

Tercera pregunta: lectura de un dato

En tercer lugar, se pide al estudiante una lectura directa de un dato del gráfico, lo que corresponde al nivel 1 (Curcio, 1987, 1989). Concretamente, se exige la cantidad de cemento que se produjo en el mes de Febrero. Las respuestas de los estudiantes se han clasificado de acuerdo a las siguientes categorías:

Respuesta correcta. Cuando el estudiante es capaz de realizar la lectura directa, indicando que en el mes de Febrero se ha obtenido una producción de 300 toneladas de cemento. Los estudiantes dan esta respuesta con pequeñas variaciones de redacción, como se muestra en los dos ejemplos que se presentan a continuación.

En el mes de Febrero se produjeron 300 toneladas de cemento (E138).

Se produjeron 300 toneladas (E150).

Respuesta incorrecta. Se considera que la respuesta del estudiante es incorrecta si no es capaz de realizar la lectura pedida y entrega otro valor, presente en el gráfico o no. Por ejemplo, E73 localiza el mes de Febrero en el gráfico, pero añade un cero a la cantidad correspondiente a dicho mes; E129 responde con el valor 250, que corresponde a Octubre.

3000 (E73).

250 (E129).

Como observamos en la Tabla 5.5.6.4, donde presentamos los resultados de esta pregunta, la tarea ha resultado fácil para los estudiantes, ya que en torno al 93% de ellos ha realizado correctamente la lectura directa. Los resultados son mejores que los de Guimarães (2002), quien obtuvo un 72% de éxito en la lectura directa de gráficos por niños de 3° curso. Estas diferencias son razonables, debida a la mayor edad de los estudiantes de nuestra muestra.

Tabla 5.5.6.4. *Porcentaje de estudiantes según tipo de respuesta en la lectura de un dato*

Tipo de respuesta	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	93,4	93,2	93,3
Incorrecta	1,8	3	2,4
No contesta	4,7	3,8	4,3

Cuarta pregunta: lectura inversa del gráfico

En la última actividad de este ítem, se pide a los estudiantes realizar una lectura inversa, es decir, dado un valor del gráfico, determinar los meses que corresponden a 200 toneladas, que son tres: Marzo, Junio y Julio. Las respuestas de los estudiantes, frente a esta actividad, se han clasificado de acuerdo a los siguientes criterios:

Respuesta correcta. Cuando el estudiante es capaz de identificar los tres meses en que la producción de cemento es de 200 toneladas, realizando correctamente la lectura inversa del mismo. Es decir, identifica y menciona los meses de Marzo, Junio y Julio en su respuesta, como, por ejemplo, ocurre con E69 y E169.

Marzo, Junio y Julio (E69).

En el mes de Marzo, Junio, Julio (E169).

Respuesta parcialmente correcta. La respuesta del estudiante es categorizada de esta forma si obtiene al menos uno de los meses en que la producción de cemento fue de 200 toneladas correctamente; por ejemplo, indica los meses de Marzo o Junio. También consideramos la respuesta parcialmente correcta si leen correctamente algunos meses y otros no. Ejemplo del primer caso es la respuesta de E730 que identifica sólo un mes con la producción dada y E138, que identifica dos meses en forma correcta y otro no.

Marzo (E730).

En el mes de Marzo y el mes de Agosto y en el mes de Junio (E138).

Respuesta incorrecta. Cuando el estudiante no logra realizar la lectura inversa del gráfico y no llega a hacer referencia a ninguno de los meses en que la producción de cemento fue de 200 toneladas. Ejemplos de estas respuestas se transcriben a continuación:

Enero, Febrero, Noviembre y Diciembre (E85).

Enero (E277).

En la Tabla 5.5.6.5 mostramos la distribución del tipo de respuesta de los estudiantes en este apartado, donde la mayoría de ellos pueden realizar correctamente una lectura inversa del gráfico. A nivel general, cerca del 95% puede identificar al menos uno de los meses en que se han producido las 200 toneladas de cemento, lo que implica también una lectura inversa correcta. Al comparar los resultados por curso, vemos que los estudiantes de 6º curso pueden leer con mayor éxito los tres meses, con una diferencia mínima; aunque, en total, los de 7º curso pueden leer con mayor éxito al menos un mes. No hemos encontrado antecedentes para comparar la lectura inversa de gráficos por parte de estudiantes.

Tabla 5.5.6.4. *Porcentaje de estudiantes según el tipo de respuesta en la lectura inversa de un dato*

Tipo de respuesta	6º curso (n=380)	7º curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	62,9	62,2	62,6
Parcialmente correcta	30	32,9	31,4
Incorrecta	0,8	1,4	1,1
No contesta	6,3	3,6	5

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global de las respuestas de los estudiantes a este ítem, hemos asignado a cada uno de ellos una puntuación de acuerdo a la calidad de la respuesta, con el siguiente criterio:

- En el primer y tercer apartados se puntúa de 1 a 2, según sea incorrecta o correcta la respuesta; 0 para cuando la actividad no es desarrollada (pues no hemos encontrado respuestas parcialmente correctas).
- En los apartados dos y cuarto se puntúa con 0, 1, 2 y 3, según la respuesta está en blanco, sea incorrecta, parcialmente correcta o correcta. En total el máximo posible es 10 puntos.

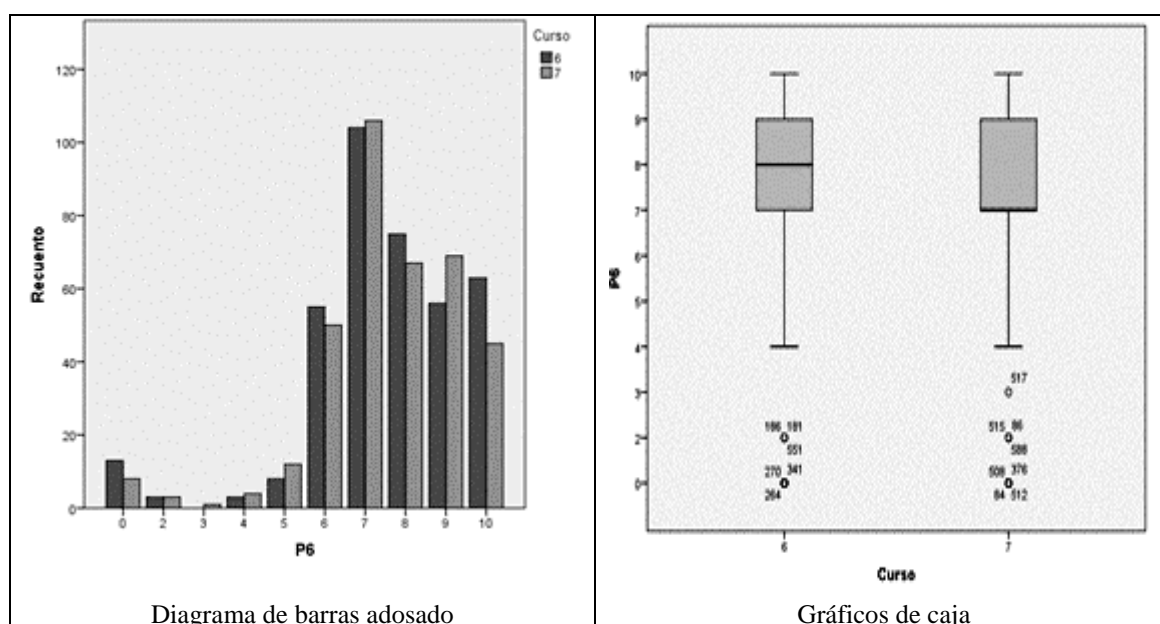


Figura 5.5.6.2. Distribución de la puntuación total en el ítem 6 por curso

En la Figura 5.5.6.2 presentamos el diagrama de barras adosado y los gráficos de caja de la puntuación total del ítem, diferenciando el curso al que pertenecen los

estudiantes. En el diagrama de barras observamos que, mayoritariamente, los estudiantes de ambos cursos alcanzan los 6 puntos o más; los que alcanzan 0 puntos son un porcentaje bajo. Los gráficos de caja muestran que la distribución de las puntuaciones es similar en los dos grupos, cuyas puntuaciones sobrepasan el valor mediano teórico (4 puntos). En general, los resultados se pueden considerar muy buenos.

5.5.7. RESULTADOS EN EL ÍTEM 7

Este ítem (Figura 5.5.7.1) corresponde a la segunda actividad relacionada a la *construcción de gráficos de barras* del cuestionario y pide representar los datos del número de hermanos de un grupo de personas. La actividad es adaptada de un libro de texto de Educación Primaria (Batarce, Cáceres y Kükenshöner, 2013, p. 333). A diferencia del ítem 1, conlleva el cálculo de las frecuencias de la variable número de hermanos y la representación de dicha distribución de frecuencias. Junto con esto, se espera que los estudiantes construyan los ejes cartesianos que servirán de soporte para construir el gráfico estadístico, definan una escala, asignen un título al gráfico, ejes y categorías. Cada barra que se levante sobre cada número de hermanos corresponde a la frecuencia de dicho valor en los datos.

A continuación se muestran los resultados de una encuesta con la pregunta: ¿cuántos hermanos tienes?

0, 1, 3, 2, 2, 3, 2, 4, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2

Realiza un gráfico de barras con la información proporcionada.

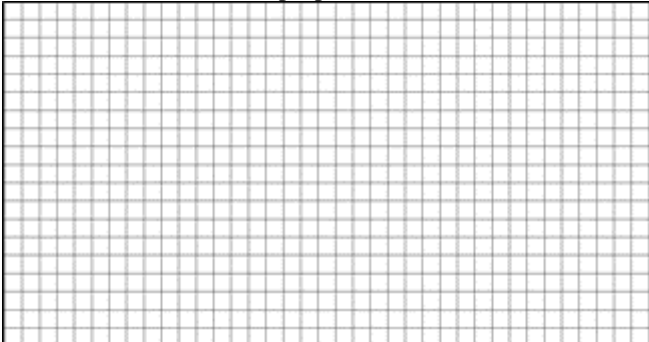


Figura 5.5.7.1. Ítem 7 del cuestionario de evaluación.

De esta forma, observamos que la construcción involucra un nivel de complejidad semiótica 3, *representación de una distribución* (Batanero et al., 2010), ya que los estudiantes han formado la distribución de frecuencias del número de hermanos de un grupo de personas. Respecto a los niveles de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al, 2001), se exige el de *leer dentro de los datos*, ya que se deben establecer la frecuencia asociada a cada número de hermanos y esto supone realizar operaciones con los datos.

A continuación mostramos los resultados obtenidos, comparándolos por curso y con investigaciones previas:

Construcción de un gráfico de barras formando previamente la distribución

Las construcciones que realizan los estudiantes las hemos clasificado en tres grupos: correctas o básicamente correctas, parcialmente correcta e incorrectas, que describimos a continuación:

Gráfico correcto o básicamente correcto. Siguiendo a Arteaga (2011), se considera cuando el gráfico estadístico respeta los convenios y elementos propios de los gráficos de barras (define una escala adecuada, representa correctamente los datos y asigna rótulos y etiquetas claras y precisas), salvo omisión del título o algún pequeño detalle; por ejemplo, hay líneas adicionales. Por tanto, el estudiante ha tenido en cuenta los convenios y elementos estructurales del gráfico (Kosslyn, 1985).

En la Figura 5.5.7.2 vemos dos ejemplos dentro de esta categoría. La construcción de E43 cumple con todos los elementos propios del gráfico de barras (incluye un título adecuado, y rótulos en los ejes, así como etiquetas para las categorías y escalas; respeta la correspondencia entre proporcionalidad geométrica y numérica; las barras tienen igual, ancho y separación). La construcción de E22 es similar, sólo omite el título general del gráfico.

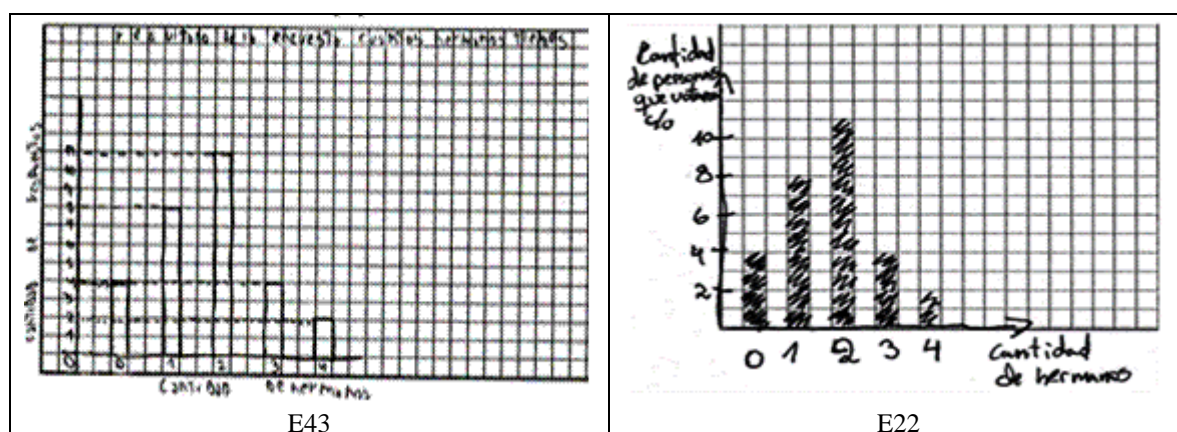


Figura 5.5.7.2. Gráficos estadísticos considerados correctos

Gráfico parcialmente correcto. Hemos considerado en este apartado las respuestas que contienen algún error u omisión de menor importancia y el resto de elementos del gráfico es correcto. Como se ha indicado, la construcción de un gráfico moviliza diferentes objetos matemáticos; puesto que este es un gráfico de complejidad semiótica 3 moviliza la idea de variable, sus valores y distribución de frecuencias, además de diferentes elementos numéricos y geométricos (Arteaga, 2011). En el proceso de construcción, el estudiante puede omitir, por error o por falta de conocimiento, algunos elementos estructurales del gráfico (Kosslyn, 1985), lo que dificulta la lectura de la información representada. A continuación describimos aquellas respuestas que hemos identificado dentro de esta categoría:

P1. Escala no proporcional. Este error fue encontrado por Arteaga (2011) y Bruno y Espinel (2005). Se trata de gráficos que se construyen con una escala en la que no hay correspondencia entre la proporcionalidad numérica y la geométrica; por ello se representan valores de la variable con barras cuya longitud no son proporcionales a sus respectivos valores. Incluimos en esta categoría los casos en no se incluye el origen, sino que es parte de uno de los ejes. Ejemplos de esta categoría se presentan en la Figura 5.5.7.3, donde la construcción de E193 asigna segmentos de la misma longitud para diferentes frecuencias y E34 que no sitúa el cero en el origen de coordenadas, aunque la escala es correcta en lo que queda de eje Y. Este error fue encontrado en investigaciones con niños por Cruz (2013) y Evangelista et al. (2014) y en investigaciones con futuros profesores por Arteaga (2011) y Bruno y Espinel (2005).

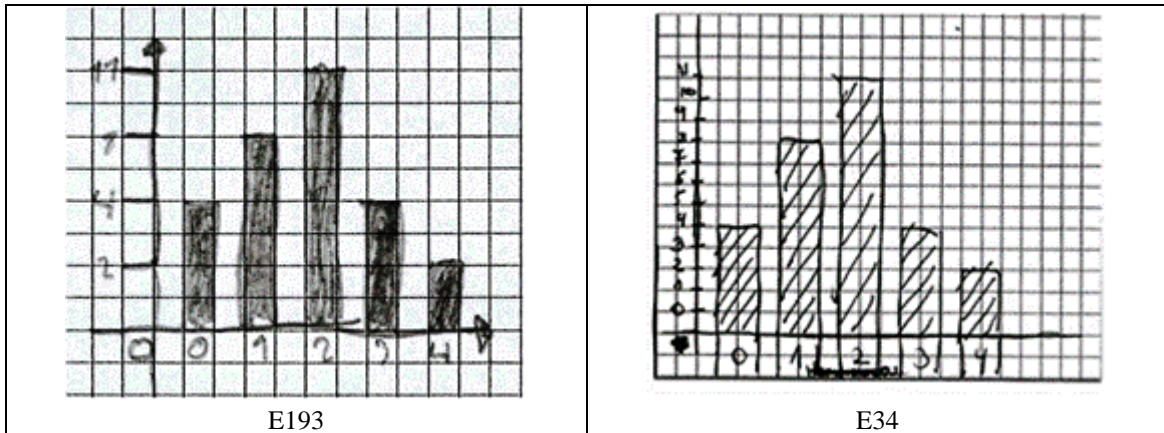


Figura 5.5.7.3. Gráficos estadísticos con escala no proporcional

P2. Errores o ausencia de rótulos de los ejes. La correcta construcción de un gráfico incluye el uso de diferentes rótulos, con el propósito de facilitar la transmisión de la información, de modo que esta sea comprendida por los receptores del gráfico. En esta sub-categoría, que también se observa en el trabajo de Arteaga et al. (2016), hemos incluido aquellas construcciones en las que se han omitido o se asignan de forma errada el título de algún eje cartesiano, los rótulos que permiten identificar la escala o las categorías, así como los que no indican el origen en la intersección de los ejes.

En la Figura 5.5.7.4 vemos ejemplos de estas situaciones, que también se citan en el trabajo de Evangelista et al. (2014), Fernández et al. (2011), Jungkenn y del Pino (2009), Walichinski y dos Santos (2013) y Wu (2004) con estudiantes y en la de Arteaga et al. (2016) con futuros profesores. En el gráfico de la izquierda, E4 no asigna títulos a los ejes. En el gráfico de la derecha, construido por E409, si bien se identifican la variable y las categorías que se registran en el eje X, estas no siguen el orden numérico (error también observado en Arteaga, 2011), y no asigna título ni rótulos sobre el eje Y, por lo que no se ve a simple vista el escala que se usa en la construcción.

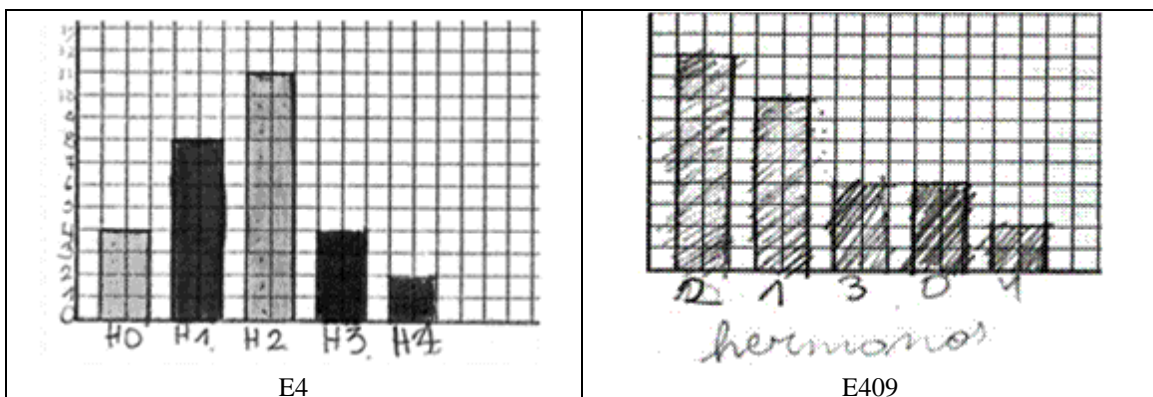


Figura 5.5.7.4. Gráficos estadísticos con errores o ausencia de rótulos

P3. Barras no separadas o de diferente anchura. Un error descrito por Bruno y Espinel (2005) y Arteaga et al. (2016) es representar en forma incorrecta las barras que forman parte de un diagrama de barras, en las que se presentan todas juntas como un histograma o con diferente ancho, no centradas sobre la categoría que le corresponde, con espacios no uniformes o barras no paralelas. De estos errores hemos encontrado algunos ejemplos, como los que presentamos en la Figura 5.5.7.5. En la construcción de E39 construye barras con diferente ancho y con diferente distancia entre ellas, incluso

una de las barras no mantienen el paralelismo con las otras. El error aparece en el 57% de los niños en el trabajo de Cruz (2013). En el caso de E86, el estudiante realiza una representación en la que se leerían las frecuencias asociadas a datos continuos, como se hace en los histogramas; por otro lado, tampoco asigna títulos a los ejes.

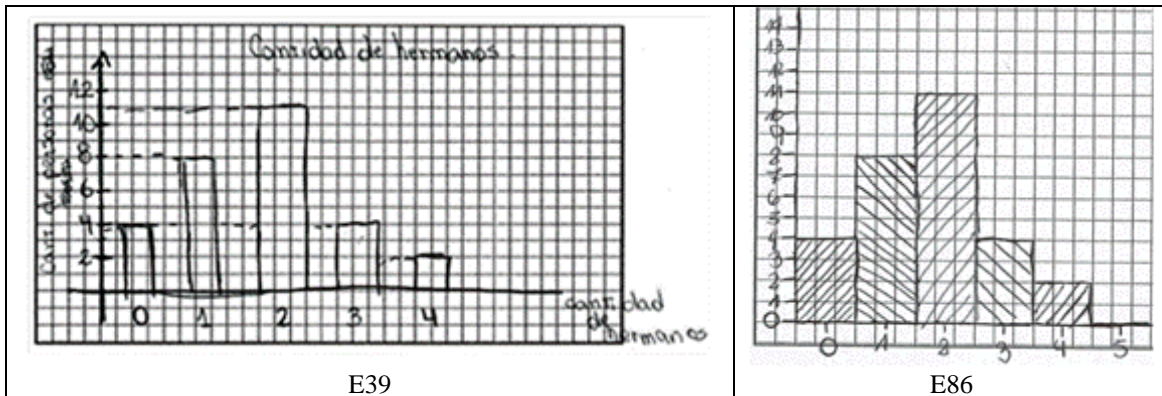


Figura 5.5.7.5. Gráficos estadísticos con barras no separadas o de diferente anchura

P4. Omite un valor en la construcción del gráfico. Este error denominado por Bruno y Espinel (2005) y Arteaga (2011) *valores faltantes*, ocurre cuando el estudiante comete un error en la lectura o representación de un dato. Este error se ha identificado en otras investigaciones con niños (Evangelista, 2014; Evangelista y Guimarães, 2015; Guimarães, 2002).

Como ejemplo, mostramos el gráfico de E16 en la Figura 5.5.7.6, en el que no se representa correctamente la frecuencia asociada al 0, que es 4 y no 3. En la misma figura vemos la construcción de E548, que reproduce correctamente la frecuencia de cuatro de las cinco barras, omitiendo aquella que contabiliza los ceros, pensando que la cantidad de ceros no se debe graficar, pese a observarse a cuatro sujetos con este valor.

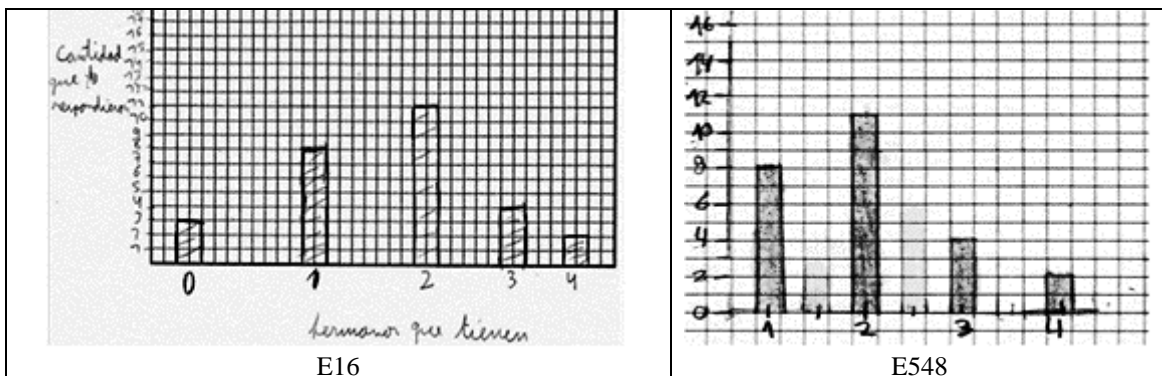


Figura 5.5.7.6. Gráficos estadísticos con omisión e valores

Respuesta incorrecta. También existen casos en que el estudiante no es capaz de pasar de los datos de una tabla a un gráfico de barras, ni siquiera parcialmente. En tal situación, se realiza una construcción sin sentido para el lector de la información o no se respetan los convenios de construcción de esta representación. Las respuestas de los estudiantes permitieron definir las siguientes categorías de errores:

II. Escala que no refleja el rango de la variable. También encontrado por Arteaga (2011), ocurre cuando el estudiante no es capaz de establecer una escala que permita representar toda la distribución de frecuencias, por no reflejar el rango de variación de la variable o de las frecuencias. En este último caso, que es el que ocurre en nuestro

trabajo, las barras se truncan en el máximo valor representado en la escala. Estas situaciones se ven ejemplificadas en la Figura 5.5.7.7, donde E47 ha tenido que salir de la zona asignada para representar la frecuencia 11. En el caso de E162, en el área de trabajo sólo pudo ubicar los números hasta el 4, por lo que no es capaz de representar la frecuencia 8 ni 11. Este error también es descrito por Fernández et al. (2011).

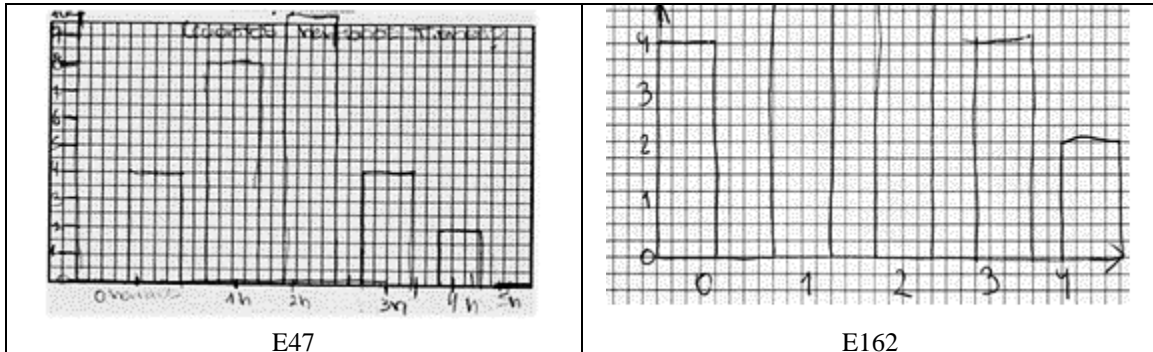


Figura 5.5.7.7. Gráficos estadísticos con escalas que no reflejan el rango de las frecuencias

12. *Representación del listado de datos.* Corresponde a la representación de cada uno de los datos o de una porción de ellos en forma aislada, sin calcular las frecuencias asociadas. En la Figura 5.5.7.8 tenemos tres ejemplos de las diferentes respuestas de los estudiantes. El representa uno a uno los datos, sin calcular las frecuencias; E459 ordena los datos de menor a mayor de los datos y lo representa uno a uno, pero sin calcular frecuencias. E513 se limita a representar una porción del conjunto de datos y omite representar el cero, que corresponde al primer número del conjunto. Esta forma de representar los datos se han encontrado en trabajos de Arteaga (2011) y Martins y Carvalho (2017).

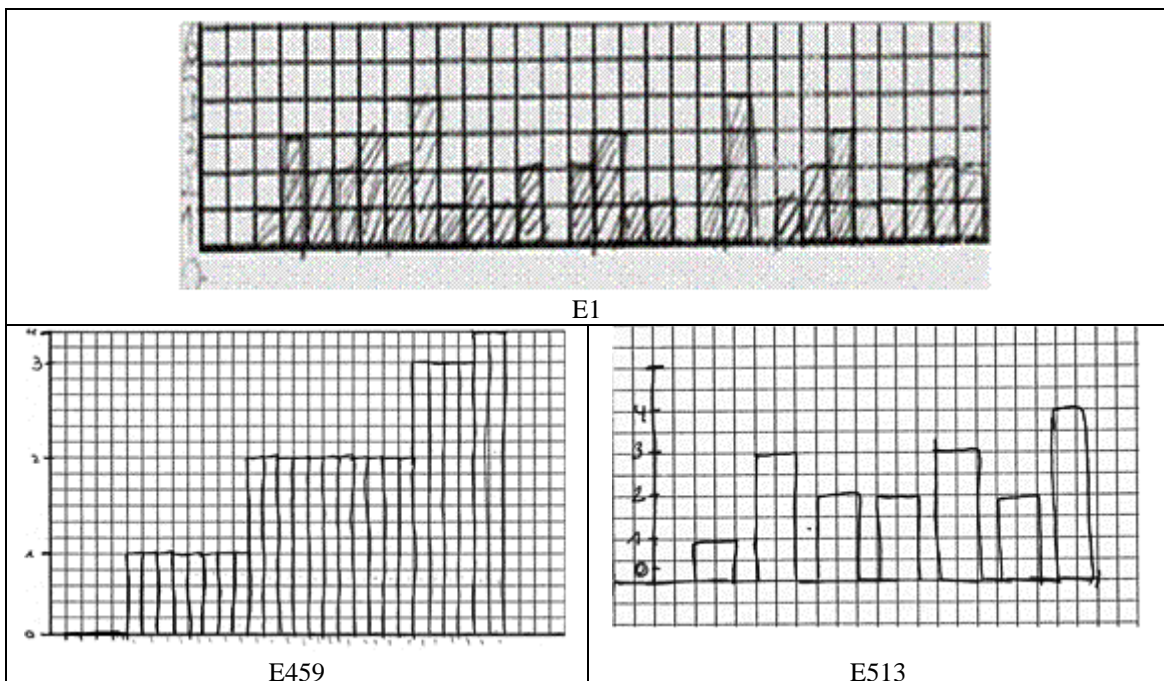


Figura 5.5.7.8. Gráficos en los que se representan el listado de datos

13. *Intercambiar frecuencias y valores de la variable.* Error encontrado en Batanero et al. (2010), que ocurre cuando se confunden estos conceptos; por ello las barras se construyen sobre las frecuencias y su altura está limitada por la ubicación de la

categoría respectiva, tal como se ve en la construcción de E420 de la Figura 5.5.7.9, que no tiene en cuenta el orden numérico.

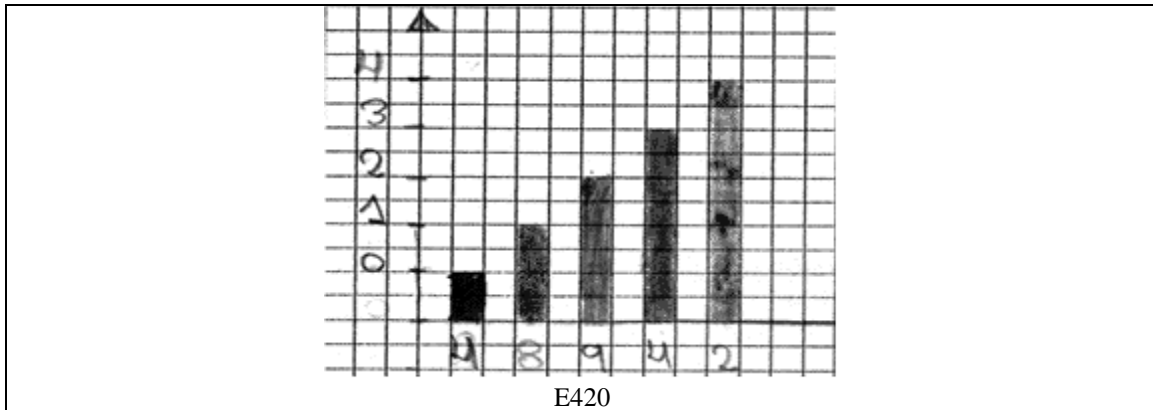


Figura 5.5.7.9. Gráfico con intercambio de frecuencias

14. *Construcción de otro gráfico.* Cuando el estudiante construye un gráfico diferente al pedido en el enunciado del ítem, lo que puede ocurrir por haber olvidado el nombre del gráfico; se incluye el caso en que se represente la información en una tabla de frecuencias. En la Figura 5.5.7.10 vemos tres ejemplos representaciones distintas para el conjunto de datos; entre ellos se observa un diagrama de tallo y hojas (E136), de puntos (E151) o una tabla de frecuencias (E527); las que incluso presentan algunos errores.

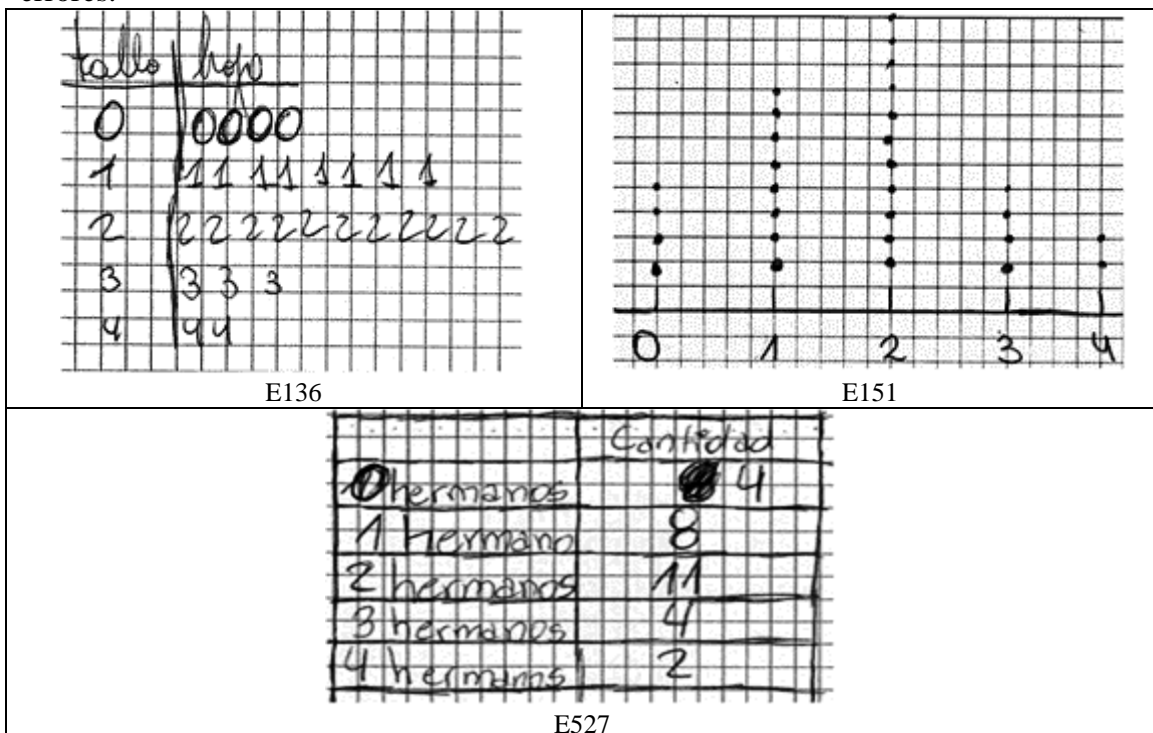


Figura 5.5.7.10. Construcción de otro gráfico

15. *Construcción sin sentido.* Cuando el estudiante construye un gráfico en los que no se consideran los datos, y no tiene sentido aparente, tal como lo vemos en la Figura 5.5.7.11. En ella, E45 construye dos barras sin indicar sus frecuencias y no se sabe a qué se refieren. También está la construcción de E233, que levanta cuatro barras que no se sabe qué representan, además de tener una escala, representada en el eje Y, que repite sus valores

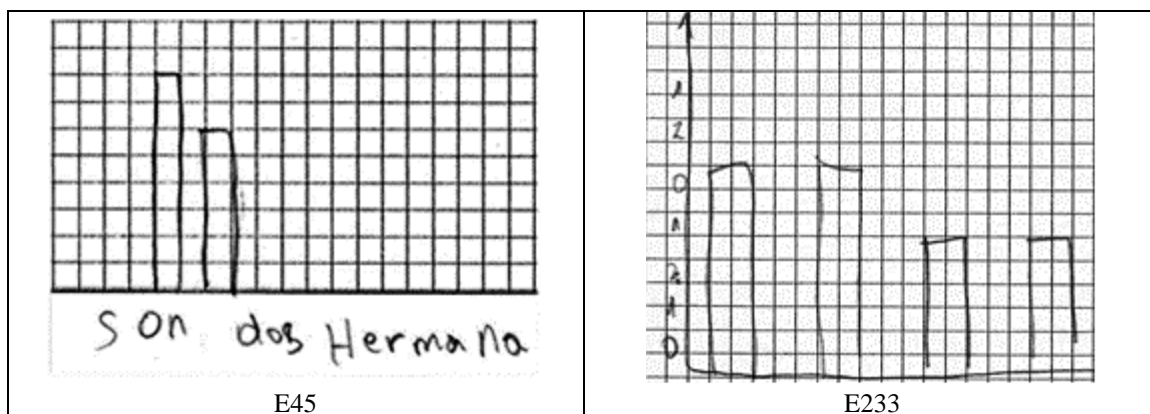


Figura 5.5.7.11. Gráfico estadístico sin sentido

A modo de resumen, mostramos en la Tabla 5.5.7.1 la distribución del tipo de gráfico que realizaron los estudiantes, donde el 42,1% son considerados como construcciones parcialmente correcta, y donde los de 7° obtienen 4 puntos porcentuales más que los de 6° curso. Es inferior a los reportados por Fernández et al. (2011) (61%), Evangelista et al. (2014) (81%) y Jungkenn y del Pino (2009) (91,4%), pero estas investigaciones no se pedía agrupar los datos y en las tres últimas los estudiantes podían elegir el tipo de gráfico.

Los gráficos correctos llegan a un 6,3%, de donde los estudiantes de 7° curso logran un 7,9% contra un 4,7% de los de 6° curso. Respecto a los incorrectos, los estudiantes de 6° (31,3%) presentan un porcentaje más alto que los de 7° (17,8%). Todo esto, incluso cuando los estudiantes de 7° no abordan la actividad en un 30,1%. Por lo anterior, el nivel de éxito es menor que la primera actividad, en la que se pide construir un gráfico de barras, lo que es razonable, pues el nivel de complejidad del gráfico ahora es mayor (3 en lugar de 2) y los estudiantes han de formar la distribución de datos.

Tabla 5.5.7.1. Porcentaje de estudiantes según tipo de gráfico construido

Tipo de gráfico	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcto	4,7	7,9	6,3
Parcialmente correcto	40,3	44,1	42,1
Incorrecto	31,3	17,8	24,7
No responde	23,7	30,1	26,8

La distribución de errores en los gráficos parcialmente correctos se muestra en la Tabla 5.5.7.2, siendo el tipo de error más frecuente la ausencia o error en los rótulos en los ejes (34,6% de las respuestas de los estudiantes), con porcentajes similares al comparar por curso. Se confirma, por tanto, los resultados de las investigaciones previas, que indican la falta de comprensión por los estudiantes del propósito del título del gráfico y de los ejes (Cruz, 2013; Fernández et al., 2011; Jungkenn y del Pino, 2009; Vasconcelos y Fernández, 2013). Por ejemplo, en la investigación de Evangelista et al. (2014) con estudiantes de 5° de primaria, ninguno completa el título del gráfico.

En segundo lugar, y con una diferencia en torno al 16%, están las construcciones en que las barras presentan diferente ancho entre ellas o su separación no es uniforme; en los estudiantes de 7° curso este error aparece levemente con mayor frecuencia. Este error aparece en Arteaga (2011), Arteaga et al. (2016) y Bruno y Espinel (2005) y es encontrado en el 57% de los niños por Cruz (2013). En tercer y cuarto lugar se sitúan aquellas construcciones en las que se observa algún dato no representado y los errores

de escala no proporcionales, respectivamente. Los primeros también se citan en el trabajo de Evangelista et al. (2014), Fernández et al. (2011), Jungkenn y del Pino (2009), Walichinski y dos Santos (2013) y Wu (2004) con estudiantes y en la de Arteaga et al. (2016) con futuros profesores, y los segundos en investigaciones con niños por Cruz (2013) y Evangelista et al. (2014) y en investigaciones con futuros profesores por Arteaga (2011) y Bruno y Espinel (2005). En general, los estudiantes de 7° curso tienden a presentar un mayor porcentaje de errores, aunque la diferencia es baja.

Tabla 5.5.7.2. *Porcentaje de estudiantes con errores en los gráficos parcialmente correctos*

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
P1. Escala no proporcional	11,6	15,9	13,7
P2. Ausencia de rótulos	34	34,8	34,6
P3. Barras no separadas o de distinta anchura	17,9	18,4	18,1
P4. Omite valores	14,2	16,7	15,4

El resumen de los tipos de errores en las construcciones incorrectas lo mostramos en la Tabla 5.5.7.3, donde el error más frecuente es la representación del conjunto de datos, uno a uno, no llegando a construir un gráfico de complejidad 3, error encontrado en Arteaga (2011) y Martins y Carvalho (2017). En segundo lugar, y muy por debajo, están las construcciones sin sentido, donde los estudiantes de 6° curso presentan este error en mayor porcentaje de los de 7° curso. En tercer lugar, y apenas con un 3% a nivel general, está el intercambiar categorías por frecuencias. Finalmente, y con un porcentaje pequeño, tenemos aquellos gráficos incorrectos o inacabados porque la escala establecida no alcanza para cubrir los diferentes valores de la variable.

Tabla 5.5.7.3. *Porcentaje de estudiantes que comenten errores en los gráficos incorrectos*

Tipos de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
I1. Escala que no refleja el rango	1,1	0,5	0,8
I2. Representar el listado de datos	19,5	11,2	15,4
I3. Confundir categoría y valor	3,2	2,7	3
I4. Construir otro gráfico	3,2	1,1	2,1
I5. Construcción sin sentido	4,5	2,2	3,4

El tipo de error más frecuente, en el que se presenta una barra por cada dato, o pequeña porciones del mismo, corresponde a uno de los niveles de complejidad semiótica que describió Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2011), donde el estudiante representa uno a uno los datos del conjunto, sin agrupar los valores iguales para establecer una frecuencia.

Síntesis de resultados

La valoración global del ítem se realizó por medio de la asignación de una puntuación, de acuerdo a la calidad de la construcción, y atendiendo a los siguientes criterios: se asignan 0 puntos si no realiza la construcción; 1 si es incorrecta; 2 cuando sea parcialmente correcta; y 3 cuando es correcta o básicamente correcta.

Esta puntuación ha permitido obtener los gráficos de la Figura 5.5.7.12, donde el diagrama de barras adosadas muestra que la puntuación de los estudiantes de 6° y 7° curso está concentrada en tres grupos de puntajes (0,1 y 2), siendo el más frecuente el de

2 puntos. En el caso de los estudiantes de 6º, se puede ver una evolución en los puntos de 0 a 3, mientras que la puntuación de los de 7º curso es más irregular.

A la derecha de la Figura 5.5.7.12 tenemos dos gráficos de caja, uno por curso, y vemos que tienen medianas diferentes, donde los estudiantes de 6º curso alcanzan una puntuación de 1 y los de 7º de 2. De estos gráficos vemos que los estudiantes de 7º curso tienen mayor frecuencia de puntaje 0 ya que el primer cuartil corresponde a este valor. Del mismo modo, se puede concluir que son los estudiantes de 7º curso los que concentran los puntajes más altos, ya que en 2 puntos concentran el segundo y tercer cuartil, mientras de los de 6º curso solo lo hacen con el tercero. Finalmente, podemos indicar que los estudiantes de 7º curso son los que presentan puntuaciones más distribuidas.

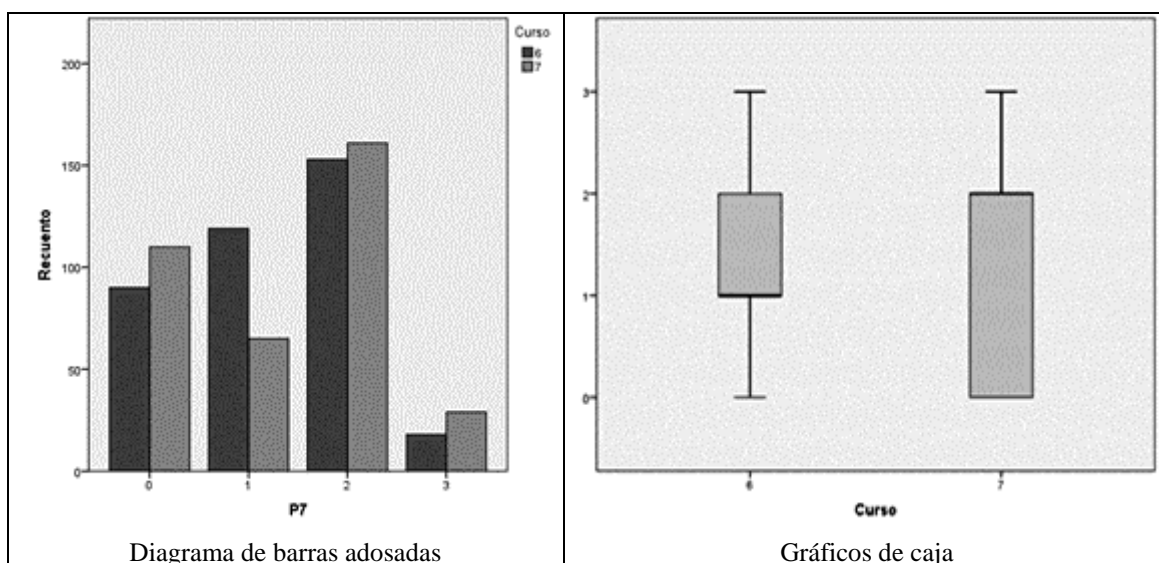


Figura 5.5.1.12. Distribución de la puntuación total en el ítem 7 por curso

5.5.8. RESULTADOS EN EL ÍTEM 8

En octavo ítem del cuestionario, que se muestra en la Figura 5.5.8.1, es una adaptación del utilizado previamente por Albuquerque (2010, p. 46) y Evangelista (2014, p. 38). Se pide al estudiante elegir un gráfico de líneas para representar conjuntamente dos distribuciones, justificando la elección. Los gráficos presentados conllevan un nivel de complejidad semiótica 4, *representación de varias distribuciones en un mismo gráfico estadístico* (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010), donde cada distribución es el porcentaje de intención de votos de uno de los candidatos en unas elecciones.

La tarea pedida se centra en la identificación y selección del gráfico (A o B), que es más conveniente para un candidato (Pedro), ya que ambos presentan la misma información y se diferencian por la *escala* de la construcción. Se requiere un nivel de lectura 4, *leer detrás de los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), porque deben realizar un análisis crítico del gráfico sobre el efecto visual que se tiene al modificar la escala de un gráfico. El primer gráfico favorece al candidato pues la pequeña diferencia (2 puntos en Agosto) se exagera. Igualmente se exagera el crecimiento entre Abril y Agosto, en comparación con el otro candidato. El estudiante debe argumentar su respuesta.

Los dos gráficos muestran el mismo resultado de una encuesta electoral. ¿Cuál crees que el candidato Pedro mostraría en su campaña?

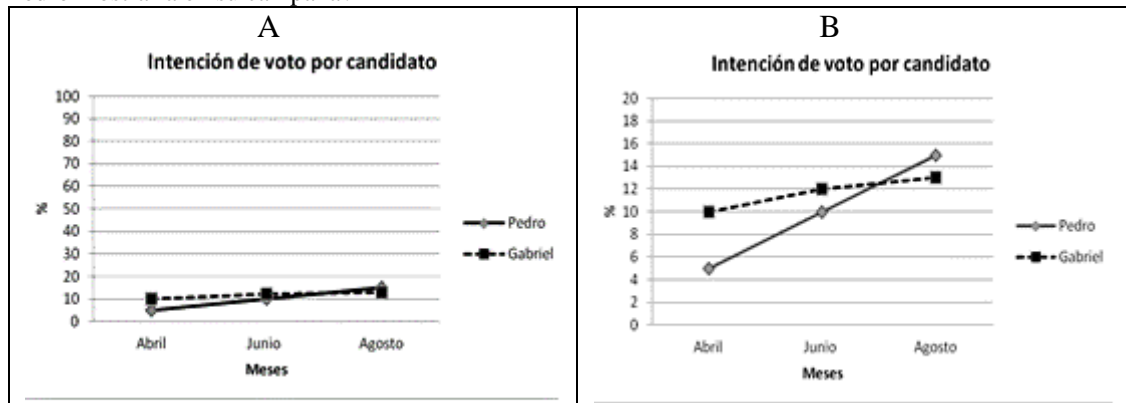


Gráfico que mostraría Pedro:

Explica tu respuesta:

Figura 5.5.8.1. Ítem 8 planteado a los estudiantes.

En lo que sigue mostramos los resultados respecto al gráfico que elegiría el candidato (Pedro) y el nivel de lectura alcanzado de acuerdo a la justificación que realiza de dicha elección.

Selección del gráfico

En esta pregunta se debe explicar qué gráfico seleccionarían uno de los candidatos (Pedro) para usar en su campaña electoral, entre los dos que, como se ha indicado, muestran la misma información. Para realizar la tarea, se debe leer el título del gráfico para comprender el contexto y la información representada, así como las etiquetas de las categorías (datos de tres meses para dos candidatos). Se debe comprender el convenio que, mediante diferentes tipos de líneas, sirve para diferenciar los dos candidatos. Una vez hecho esto, es necesario comparar las escalas de los dos gráficos y ver que la primera de ellas es demasiado amplia y no muestra con detalle las diferencias entre los candidatos. En la segunda escala las pendientes de cada gráfico se exageran, sobre todo la del candidato Pedro. Por ello, se espera que el estudiante elija el segundo gráfico, de menor rango en la escala, en el que se exagera la leve ventaja que tiene sobre el otro candidato (Gabriel), como consecuencia del cambio de escala. Si bien este tipo de actividades puede ser difícil para los estudiantes de Educación Primaria, es necesario saber si pueden percibir el efecto del cambio de escala, que se encuentra frecuentemente en diferentes escenarios de la vida cotidiana.

En la Tabla 5.5.8.1 presentamos los porcentajes del gráfico que según los estudiantes debería seleccionar el candidato Pedro. En ella, observamos que, a nivel general, sobre el 60% de los estudiantes escogen el gráfico correcto, lo que es muy buen resultado, teniendo en cuenta la dificultad del ítem. Los estudiantes de 6º curso presentan resultados levemente superiores a los de 7º (64,5% contra un 60,5%); resultados que son superiores a los alcanzados en Evangelista (2014), cuyos estudiantes sólo responden correctamente en un 4,3% en el pre-test y 17,4% en el post-test; situación similar a lo que ocurre con Albuquerque (2010), en una investigación con 152 estudiantes de 3º y 5º de primaria y de educación de adultos, donde alcanzan un nivel de éxito del 40%. En segundo lugar de frecuencia están los estudiantes que no responden a éste ítem.

Tabla 5.2.8.1. *Porcentaje de estudiantes según gráfico seleccionado*

Gráfico seleccionado	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
A	9,7	12,1	10,9
B	64,5	60,5	62,6
Ambos (A y B)	0,3	0,5	0,4
No responde	25,5	26,8	26,2

Nivel de lectura

Seguidamente analizamos el nivel de lectura que alcanzan los estudiantes al indicar el gráfico que seleccionaría el candidato (Pedro) y al justificar esta elección. Las respuestas las hemos categorizado según los niveles de Curcio (1989), Shaughnessy et al. (1996) y Friel et al. (2001), siguiendo los siguientes criterios:

Nivel 0. Ocurre cuando el estudiante no responde a la pregunta formulada, o su respuesta no presenta coherencia con la situación representada; porque eligen el gráfico incorrecto, sin observar la tendencia y sin leer ningún valor específico del gráfico. Algunas de las respuestas que se han clasificado dentro de este nivel son las de E278 y E315, que como vemos eligen el gráfico inadecuado y no dan una razón clara.

A. Porque no lo perjudica tanto (E278).

El A porque creo que está mejor hecho (E315).

Nivel 1. Leer los datos. Corresponde a la lectura directa de un dato o unos pocos datos, pero no se realiza interpretación ni cálculos. Ocurre en pocos estudiantes, que se limitan a comentar los valores finales, sin destacar la tendencia, pero leen algún valor, como los hacen E441 y E641.

Porque el gráfico A está en 0 y el gráfico B está en 4 (E441).

15. Pedro lo mostrara el 15 de Agosto (E641).

Nivel 2. Leer dentro de los datos. Es una lectura basada en la información proporcionada en el gráfico y donde, después de una lectura literal, se realizan cálculos o se buscan relaciones entre los datos. Un ejemplo sería cuando se indica la tendencia de uno de los candidatos sin elegir un gráfico concreto (E17), o marca la opción correcta, pero la argumentación es incompleta o errada (E5).

El de Pedro va en aumento (E17).

B. Porque así demostraría que era mejor desde un principio (E5).

Nivel 3. Leer más allá de los datos. Este nivel conlleva el realizar inferencias o predicciones de acuerdo a la información del gráfico, por ejemplo, para predecir un dato no representado. No se aplica en este gráfico, porque no se pide realizar extrapolación de los datos.

Nivel 4. Leer detrás de los datos. Este nivel implica la valoración crítica de algunos aspectos relacionados con el gráfico (tipo de gráfico, información obtenida, forma de recolección, conclusiones, entre otras). En este caso, el estudiante debe marcar la opción correcta y comprender que la información de los gráficos es la misma, pero se diferencian por la escala utilizada. Esta diferencia provoca un efecto visual que puede ser aprovechado por uno de los candidatos, incluso con algunas imprecisiones en su

argumentación, los ejemplos que mostramos a continuación completan todos estos pasos, y en su argumento se evidencia la comprensión de la situación abordada:

Porque al comparar los gráficos vi que en el A se ve como si estuvieran casi iguales pero en el B cambia todo porque al disminuir la cantidad de números o sea de 2 en 2 Pedro estaría ganando y por eso ha elegido el B (E125).

El candidato Pedro debería mostrar el gráfico B, ya que disminuye el rango de Y, y la diferencia visual cambia (E705).

En la Tabla 5.5.8.2 presentamos la distribución de los niveles de lectura que han alcanzado las respuestas de los estudiantes en este ítem. En ella vemos que, a nivel general, estos alcanzan con mayor frecuencia un nivel de *leer dentro de los datos*, es decir, que basan sus respuestas en comparar los valores, percibir las diferencias entre los porcentajes de las intenciones de voto. Por tanto, llegan a leer correctamente los gráficos y a observar las diferencias, pero no capacidad de lectura crítica.

Tabla 5.5.8.2. *Porcentaje de estudiantes según niveles de lectura alcanzado*

Nivel de lectura	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
0	29,2	31,8	30,5
1	5,8	4,4	5,1
2	53,4	47,9	50,7
4	11,6	15,9	13,7

La segunda frecuencia mayor corresponde a las respuestas en blanco o con poca coherencia, y en tercer lugar las respuestas totalmente correctas que son las que representan la lectura crítica, con poca presencia.

Al comparar los resultados por curso al que pertenecen los estudiantes, vemos que en el nivel 4 (*leer detrás de los datos*) los de 7° curso presentan resultados porcentualmente más altos que los de 6° curso, y que estos últimos tienen un porcentaje más alto de preguntas en el nivel 2 de *leer dentro de los datos*. El nivel de lectura literal es bajo en ambos grupos con un porcentaje en torno al 5%. Al comparar estos resultados con los obtenidos por Evangelista (2014), vemos que estos son mayores ya que en el estudio citado sólo el 4,3% (un estudiante de la clase) aborda correctamente la pregunta en el pre-test y un 17,4% en el post-test. Similar a lo ocurrido en Albuquerque (2010), donde el 40% de los estudiantes selecciona correctamente el gráfico.

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global de la respuesta a esta tarea, se ha dado una puntuación a cada estudiante, de acuerdo al siguiente criterio:

- El nivel de lectura se ha puntuado de 0 a 4 puntos, dependiendo del nivel de lectura observado en su respuesta, sin considerar el nivel 3.
- En la elección del gráfico se puede alcanzar hasta 2 puntos (0: no responde; 1: incorrecto; 2: correcto).

Por lo anterior, se puede obtener una puntuación máxima de 6 puntos. En la Figura 5.5.8.2 presentamos un diagrama de barras adosado y dos gráficos de caja con la puntuación del ítem, diferenciando los dos grupos de estudiantes según curso. En el

primer gráfico observamos que un alto número de estudiantes se ubican en la puntuación 4, un punto mayor que la mediana teórica, lo que ya supone un buen resultado en el ítem, a pesar de su complejidad. El segundo grupo más numerosos de estudiantes son los que tienen una puntuación de 0, es decir, no abordan la tarea o no llegan a leer los datos ni siquiera literalmente. En tercer lugar está el grupo de los estudiantes que logran la máxima puntuación del ítem (6 puntos), donde los de 7° curso presentan una leve ventaja frente a los de 6°.

En los gráficos de caja se muestra que en la distribución de las puntuaciones en ambos cursos existe coincidencia entre la mediana y el tercer cuartil, pero presentan diferencias en el primer cuartil, ya que los de 6° curso toman el valor 1 y los de 7° curso el 0. De lo anterior, se puede concluir que los estudiantes de 6° curso logran mejores resultados globales en este ítem, a pesar de que vimos que unos pocos más obtienen la máxima puntuación.

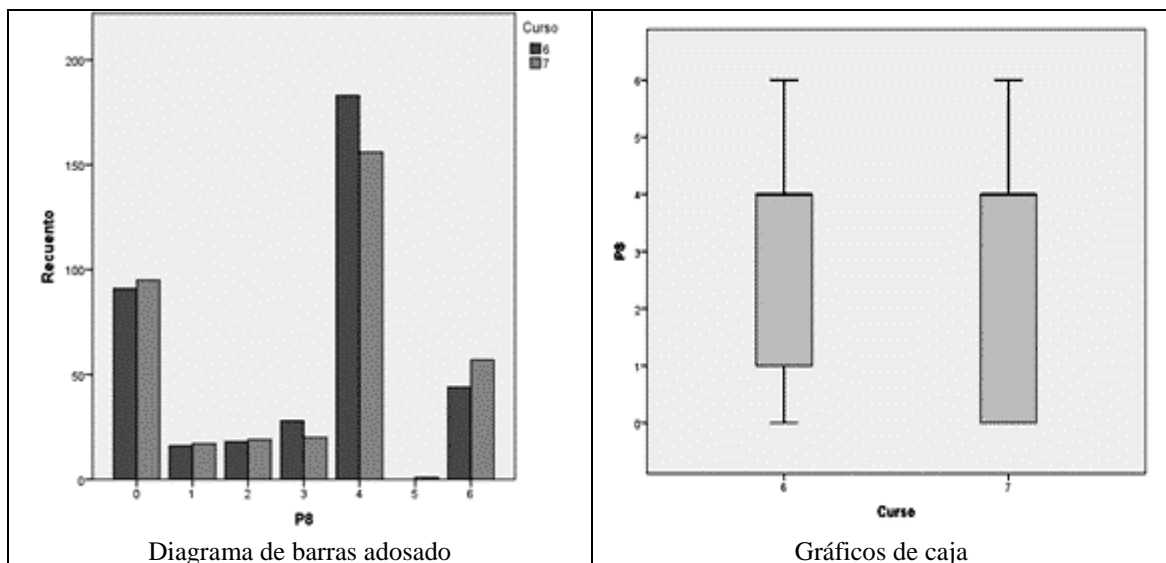


Figura 5.5.8.2. Distribución de la puntuación total en el ítem 8 por curso

5.5.9. RESULTADOS EN EL ÍTEM 9

El noveno ítem (Figura 5.5.9.1) del cuestionario se adaptó de un libro de texto de 6° curso de Educación Primaria chileno (Ávila et al., 2013). En él se plantean dos actividades de lectura de nivel 2 (*leer dentro de los datos*) en un diagrama de tallo y hojas, que *representa una distribución de datos*, y por tanto corresponde al tercer nivel de complejidad semiótica (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010).

En el siguiente gráfico se presentan las notas obtenidas (entre 2 y 7) por estudiantes de 6° curso en una prueba de matemática (con una cifra decimal).



De acuerdo a esta información, responde:

1. ¿Qué nota es la que presenta mayor frecuencia?
2. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una nota mayor o igual a 5?

Figura 5.5.9.1. Ítem 9 planteado a los estudiantes

Se espera que el estudiante, en primer lugar, lea el enunciado de la tarea para comprender el contexto y los datos representados. A continuación, debe reconocer la columna en que están representado los tallos (parte entera de la calificación) y las líneas donde, para cada tallo, se representan las hojas (parte decimal de las calificaciones). Cada hoja representa a un estudiante cuya calificación tiene como parte entera el tallo y parte decimal la hoja correspondiente. Así, los tres primeros estudiantes tienen una puntuación de 2,2, 2,2 y 3,0, respectivamente. Una vez leídos los datos, se deben realizar los cálculos necesarios para responder las preguntas.

En lo que sigue describiremos el tipo de respuesta aportado por los estudiantes a cada una de las dos preguntas y los niveles de lectura que alcanzan con las mismas.

Respuestas a la primera pregunta: nota de mayor frecuencia

En primer lugar, los estudiantes, deben identificar el valor de mayor frecuencia, de acuerdo a la información proporcionada en el gráfico. De acuerdo a las respuestas de los estudiantes hemos obtenido las siguientes categorías:

Respuesta correcta. Cuando los estudiantes, una vez leído correctamente el gráfico, reconocen la calificación que más se repite dentro del diagrama de tallo y hojas. Es decir, aquella en que el decimal tiene mayor frecuencia, representado en este caso por la hoja que se repite más veces. Además, debe interpretarla como parte de un número decimal, cuyo entero viene representado por el tallo, como se ha indicado. En este gráfico, la calificación que se repite más veces (cuatro) es el 4,1. Algunos ejemplos lo vemos en las respuestas de E16 y E313, donde los estudiantes encuentran este valor, que sería la moda de la distribución; el primero de ellos alude a la idea de frecuencia:

La nota 4,1 ya que se repite 4 veces (E16).

4,1 (A313).

Respuesta parcialmente correcta. Cuando el estudiante es capaz de identificar el tallo que muestra el valor más frecuente de las calificaciones; por tanto, ha realizado correctamente la mayor parte de los pasos que hemos descrito con anterioridad. Sin embargo, comete un error al explicitar la hoja o no la tiene en cuenta, si bien el estudiante logra identificar, a modo general, dónde se ubica la nota con mayor frecuencia, no la identifica correctamente. Dentro de esta categoría hemos definido diferentes tipos de respuestas que describimos y ejemplificamos a continuación:

P1. No considera las hojas. Los estudiantes que dan esta respuesta sólo identifican el tallo que corresponde a la calificación más frecuente, sin especificar la hoja, es decir, da el valor entero sin su parte decimal. Un ejemplo es la respuesta dada por E2 o E50; en este último caso asumió que el tallo representa la decena de un número.

4 (E2).

La más frecuente fue el 40 (E50).

P2. No distingue la parte entera y la parte decimal en el diagrama. En este caso, el estudiante no ha comprendido correctamente el enunciado de la tarea y asume que el tallo representa decenas y las hojas unidades. Por ello responde que la nota más frecuente es el 41; puesto que en Chile 41 no sería una nota que pertenece al rango usual

de calificaciones, de este hecho se observa que el estudiante no comprende el contexto de la situación. Sin embargo, el estudiante muestra ser capaz de leer el gráfico y además comprende la idea de mayor frecuencia, como observamos en las dos respuestas siguientes. La primera incluso usa explícitamente la palabra frecuencia, la segunda no la explicita pero indica los cuatro valores (que serían por tanto los que corresponden a la frecuencia mayor).

La nota que representa mayor frecuencia es el 41 (E57).

41, 41, 41, 41 (E123).

P3. Interpreta las hojas como la parte decimal de un sólo número. En estas respuestas el estudiante da el valor del tallo acompañado de todas sus hojas, sin distinguir que cada una de ellas representa una calificación diferente. El estudiante comprende en parte el gráfico y es capaz de leerlo, pues ha identificado la fila de mayor frecuencia, pero no interpreta correctamente el significado de las hojas. Ejemplos de esta situación son las respuestas de E14 y E166 que interpretan la fila como un número decimal. No queda claro en su respuesta que comprendan la idea de frecuencia, pues han dado como respuesta lo que para ellos es el decimal con mayor número de cifras decimales.

La número 4 con 111169 (E14).

La nota que presenta mayor frecuencia es 4,111169 (E166).

P4. Omite el valor del tallo e interpreta las hojas como la parte decimal de un solo número. Es una variante de la respuesta anterior, pero ahora el estudiante responde con el número formado por todas las hojas del tallo 4, sin considerar que cada una de estas hojas representa una calificación diferente y además hay que unirla al tallo. Aparentemente el estudiante ha leído, al menos parcialmente el gráfico, pues identifica la fila de mayor frecuencia, pero no queda claro que comprenda la idea de frecuencia ni que diferencie tallo y hojas. Ejemplos de estas respuestas son las de E321 y E659 que mostramos a continuación:

Es 111169 (E321).

La que presenta mayor frecuencia es 111169 (E659).

P5. Responde con un intervalo de valores. Cuando el estudiante indica que la nota de mayor frecuencia está incluida en un intervalo, uno de cuyos extremos es el valor 4. Se incluyen aquellas respuestas en las que no se distinguen entre la parte entera y decimal. Por ejemplo, E537 indica que la calificación más frecuente está incluida entre 4,1 y 4,9, mientras que E534 lo sitúa entre los valores 40 y 49, habiendo interpretado los tallos como decenas y las hojas como unidades.

La nota es entre 4,1 y 4,9 (E537).

La que representa mayor frecuencia es de 40 hasta 49 (E534).

Respuesta incorrecta. Son aquellas respuestas en las que se aprecia que el estudiante realiza una lectura incorrecta del diagrama de tallo y hojas o bien que no tienen sentido en el contexto dado. Dentro de este tipo de respuestas se han encontrado los siguientes tipos de errores:

11. *Da como respuesta la calificación más alta.* Cuando el estudiante indica el máximo de la distribución (7,0) en lugar del valor más frecuente (se incluyen los casos en que no distinguen entre la parte entera y decimal). Por tanto hay una confusión entre máximo y moda o bien entre frecuencia y valor de la variable, error que aparece en Cobo (2003) en un trabajo sobre comprensión de la media. A continuación mostramos dos ejemplos de esta situación; en el primero el estudiante además interpreta los datos como decenas y unidades.

70 es la mayor (E3).

La nota que presenta mayor frecuencia es el 7,0 (E129).

12. *Da como respuesta la calificación más baja.* Cuando el estudiante indica el mínimo de la distribución (2,2) en lugar del valor más frecuente (se consideran los casos en que no distinguen entre la parte entera y decimal). La respuesta puede indicar confusión por la forma en que se presenta el tallo del diagrama de tallo y hojas, donde el valor mínimo se coloca en la parte más alta. Por tanto, también en este caso se confunde mínimo y moda o bien frecuencia y posición en el gráfico. Por ejemplo, la respuesta de E2 responde que es un 2 y E495 que es un 2,22; como si fuesen un mismo número y no dos diferentes; este último estudiante también confunde lo que representa la hoja con la parte decimal de un número.

Un 2 (E2).

2,22 (E495).

13. *Valor con suma de las hojas más alto.* Otro de los errores que hemos podido identificar es cuando dan como respuesta el 5, interpretando las hojas como frecuencia de valores y la frase “mayor frecuencia” como suma de las frecuencias de un mismo tallo. Se vuelve a confundir frecuencia y valor de la variable (Cobo, 2003), como vemos en las dos respuestas que siguen. En el caso de E687 acompaña su respuesta con la suma de las hojas del diagrama, tal como se muestra en la Figura 5.5.9.2.

El 5 porque tiene 23 estudiantes (E398).

La nota 5,0 con una frecuencia de 23 (E687).

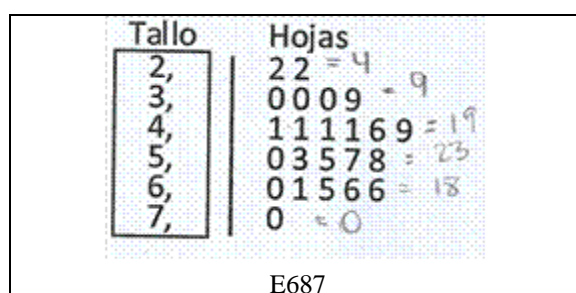


Figura 5.5.9.2. Respuesta de E687

14. *Hoja de mayor frecuencia.* Otro error es asumir que la mayor frecuencia se refiere a las hojas, interpretando únicamente las hojas, sin tener en cuenta el valor del tallo. En este caso se da como respuesta el 0, que corresponde al valor que se repite más veces entre las hojas, lo que implica que los estudiantes no recuerdan los convenios de lectura del gráfico (E266). Del mismo modo, hemos considerado dentro de esta

categoría las respuestas en que se ha dado el número 6, que es la frecuencia con que aparece el cero; en este último caso confunde de nuevo frecuencia y variable (E298).

6 (E298).

Un cero (E266).

15. Otros errores. Incluimos en esta categoría respuestas que no se han descrito anteriormente y que no tienen sentido aparente, o que se presentan en menor frecuencia. Por ejemplo, E35 que no es capaz de identificar un término que más se repita, o como E26 que indica el intervalo entre 2 y 7 como aquél donde está el valor más frecuente.

Ninguna ya [que] todas son diferentes (E35).

Las notas que se presentan con más frecuencia son las del 2 al 7 (E26).

No contesta. La actividad se deja en blanco y no es abordada por el estudiante.

En la Tabla 5.5.9.1 resumimos la distribución del tipo de respuesta a la primera pregunta del ítem. Cerca del 80% de los estudiantes respondió de forma parcialmente correcta (31,8%) y correcta sólo 26,3%. Los estudiantes de 6º curso presentan un mayor nivel de éxito, y un menor porcentaje de preguntas no contestadas, que los de 7º curso. No hemos encontrado antecedentes sobre lectura del diagrama de tallo y hojas por niños, por lo que este es un punto original del trabajo.

Tabla 5.5.9.1. *Porcentaje de estudiantes según tipo de respuesta*

Tipo de respuesta	6º curso (n=380)	7º curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	31,1	21,4	26,3
Parcialmente	32,9	30,7	31,8
Incorrecta	21,1	18,9	20
No contesta	15	29	21,9

En la Tabla 5.5.9.2 y 5.5.9.3 presentamos los resultados sobre errores encontrados en las respuestas parcialmente correctas e incorrectas, con poca incidencia, salvo cuando los estudiantes responden solamente considerando el tallo; estos identifican la fila que contiene a la moda, pero no interpretan correctamente el significado en el gráfico de la hoja.

Tabla 5.5.9.2. *Porcentaje de estudiantes con diferentes tipos de errores en las respuestas parcialmente correctas*

Tipo de error	6º curso (n=380)	7º curso (n=365)	Total (n=745)
P1. No considerar las hojas	27,4	26	26,7
P2. No diferencia parte entera y decimal	1,1	0,8	0,9
P3. Interpreta las hojas como parte decimal de un número	3,2	3	3,1
P4. Interpreta las hojas como parte decimal y omite el tallo	0,5	0,5	0,5
P5. Da un intervalo de valores	0,8	0,3	0,5

Tabla 5.5.9.3. *Porcentaje de estudiantes con diferentes tipos de error en las respuestas incorrectas*

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
I1. Da el máximo	5,5	4,7	5,1
I2. Da el mínimo	1,3	3	2,1
I3. Valor con mayor suma de hojas	4,2	6	5,1
I4. Hoja de máxima frecuencia	3,4	2,5	3
I5. Otros errores	6,6	2,7	4,7

Segunda pregunta: frecuencia de la calificación 5 o mayor

En segundo lugar, los estudiantes tienen que calcular la frecuencia de quienes tienen notas superiores o iguales a 5. A continuación se describen las categorías de respuestas en este apartado;

Respuesta correcta. Cuando logran determinar correctamente la frecuencia de quienes tienen una calificación superior o igual a 5. Para determinarla, han de localizar en el gráfico todos los valores que cumplen en la condición (valores con tallo 5, 6 y 7) y sumar el número de hojas que corresponde a cada uno, lo que da como resultado 11 (5+5+1). También, se consideran aquellas respuestas en que se evidencian pequeñas imprecisiones en la suma.

10 estudiantes obtuvieron una nota mayor a 5, y 1 obtuvo igual a 5,0 así que 11 estudiantes tuvieron sobre y [e] igual a 5,0 (E494).

11 estudiantes. Porque 5 personas se sacaron un 5 y tanto, 5 personas se sacaron un 6 y tanto, 1 persona un 7 (E713).

Respuesta parcialmente correcta. Cuando en la respuesta se evidencia comprensión de la pregunta formulada, y competencia para responderla, pero se omite algún aspecto o elemento del diagrama de tallo y hojas. Esta imprecisión se produce, en general, porque el estudiante no conoce los convenios de lectura de este gráfico. En esta categoría identificamos las siguientes subcategorías:

P1. Excluir en el cálculo de la frecuencia el valor 5. Algunos estudiantes no interpretan correctamente la frase mayor o igual, considerando sólo las calificaciones comprendidas entre 5 y 7; sin incluir el 5, obteniendo la frecuencia (4+5+1). El error no es debido al desconocimiento del gráfico sino del significado de la desigualdad. Algunas de estas respuestas son las de E124 y E302.

Los estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual que 5 fueron 10 (E124).

10 alumnos (E302).

P2. Excluir en el cálculo de la frecuencia las hojas correspondientes al tallo 5. Es una variante de la respuesta anterior, pero no sólo se excluye el valor 5, sino todos los valores cuya parte entera es 5. Para calcular la frecuencia sólo se considera las calificaciones comprendidas entre 6,0 y 7,0; incluyendo a ambas. En tal caso la frecuencia de calificaciones incluidas es 6 (5+1). Ejemplos de respuestas en esta subcategoría son las siguientes:

6 estudiantes obtuvieron una nota mayor o = a 5 (E44).

Solamente 6 alumnos (E115).

P3. Considerar sólo las calificaciones correspondientes al tallo 5. Cuando el estudiante centra su atención en las hojas del tallo 5, por lo que pueda dar como respuesta 4 o 5, dependiendo si considera o no la nota igual a 5,0. Del mismo modo, hemos considerado aquellas respuestas en la que sólo se identifica la cantidad de notas igual a 5,0. También este error se produce no por desconocimiento de la lectura del gráfico, sino por dificultad por interpretar la frase “mayor o igual”. Así. E106 es ejemplo de los que consideran la nota igual a 5, en cambio E617 no lo hace.

Los estudiantes que obtuvieron mayor o igual a 5 son 5 estudiantes (E106).

4 notas (E617).

P4. Considerar que la frecuencia asociada a cada tallo es la unidad. Cuando los estudiantes consideran sólo los tallos del diagrama, interpretando que las hojas son la cifras decimales del número cuya parte entera es el tallo. Este tipo de error indica falta de comprensión del diagrama de tallo y hojas, ya que consideran que estos elementos son parte de un mismo número. En consecuencia, el estudiante indica que sólo cumplen la condición pedida 3 o 2 estudiantes, dependiendo si consideran o no el tallo con valor 5. Por ejemplo, E38 y E567 son respuestas en las que se considera el 5 dentro de los valores a considerar.

3 estudiantes tuvieron nota mayor a 5 (E38).

3 personas obtuvieron una nota igual o mayor a 5 (5, 6 y 7) (E567).

Respuesta incorrecta. Son aquellas respuestas que muestran claramente la falta de competencia en la lectura del diagrama de tallo y hojas o que carecen de sentido. Dentro de este tipo de respuestas se han encontrado los siguientes tipos de errores:

11. Lectura de las hojas. La respuesta se basa en una lectura literal del valor de las hojas de algunos de los tallos (4, 5 o 6), interpretadas como parte decimal de un número. Estas respuestas atienden a un aspecto particular, y se alejan del sentido de la pregunta. Por ejemplo, E290 entrega como respuesta un número formado por las hojas asociadas al tallo 6 y no considera a la hoja 0. Otro ejemplo es la respuesta de E307 que escribe el número formado por las hojas del tallo 4.

1566 (E290).

111169 (E307).

12. Realizan cálculos con los valores de tallos u hojas. La respuesta está relacionada la suma de algunos valores de los tallos o las hojas del diagrama, que pueden ser correctos o presentar errores. Por ejemplo, sumar las hojas de los tallos 5, 6, como si fueran solo dos números o como si cada hoja fuese una frecuencia. Ejemplos son las respuestas de E246, que encuentra un estudiante con nota 5 y 18 con nota mayor a 5, al considerar cada hoja del tallo 6 como una frecuencia, y E249, que obtiene un valor al sumar el valor de los tallos 5, 6 y 7 (proceso indicado en la Figura 5.5.9.3).

Obtuvieron 23 estudiantes igual a la nota 5 y 18 estudiantes obtuvieron mayor nota (E246).

18 niños tuvieron una nota mayor o igual a 5 (E249).

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 6 \\ \hline 5 \\ + 13 \\ \hline 18 \end{array}$$

Figura 5.5.9.3. Proceso del estudiante E249

I3. Otros errores. Los estudiantes presentan valores que no tiene un sentido aparente y/o que son poco frecuentes. Ejemplo de esta situación son las de E8 y E45, que se mencionan a continuación.

0 (E8).

5,3 (E45).

No contesta. Finalmente, en esta categoría se contabilizan los estudiantes que no han abordado la actividad y que sus respuestas la dejan en blanco.

En la Tabla 5.5.9.4 se presenta la distribución del tipo de respuesta a la segunda pregunta del ítem, diferenciada por curso. En ella vemos que cerca del 75% de los estudiantes respondió a la actividad, y que entre las respuestas correctas y parcialmente correctas suman el 50%. El tipo de respuestas más frecuentes con las correctas (29,3%) y seguidas de las incorrectas (23,6%).

Al comparar los resultados por curso, observamos que los estudiantes de 6° curso presentan mayor proporción de respuestas correctas y menor de respuestas no contestadas que los de 7°. No hemos encontrado antecedentes en la investigación sobre este tipo de tarea.

Tabla 5.5.9.4. *Porcentaje de estudiantes según tipo de respuesta a la segunda pregunta*

Tipo de respuesta	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Correcta	31,6	26,8	29,3
Parcialmente	26,3	15,6	21,1
Incorrecta	26,1	21,1	23,6
No contesta	16,1	36,4	26

En la Tabla 5.5.9.5 y 5.5.9.6 mostramos las categorías de errores para las respuestas parcialmente correctas e incorrectas. Observamos que el error más frecuente consiste en realizar cálculos con tallos u hojas y, en segundo lugar, aquel en que sólo se consideran las calificaciones correspondientes al tallo 5. El primer error puede ser debido a no comprender la pregunta o no saber leer el gráfico, mientras el segundo a incompreensión de las desigualdades.

Tabla 5.5.9.5. *Porcentaje de estudiantes según tipo de error en las respuestas parcialmente correctas*

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
P1. Excluir el valor 5	1,1	1,4	1,2
P2. Excluir las hojas del tallo 5	2,6	2,2	2,4
P3. Sólo considera las correspondientes al tallo 5	14,5	6	10,3
P4. Considerar unitaria la frecuencia de cada tallo	8,2	6	7,1

Tabla 5.5.9.6. *Porcentaje de estudiantes según tipo de error en las respuestas incorrectas*

Tipo de error	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
I1. Lectura de las hojas	6,1	6,3	6,2
I2. Cálculos con tallos u hojas	11,8	10,4	11,1
I3. Otros errores	8,2	4,4	6,3

Nivel de lectura

Junto con establecer el tipo de respuesta que logran los estudiantes, hemos analizado el nivel de lectura que estas alcanzan (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). En la primera parte del ítem, que preguntaba por el valor más frecuente, los estudiantes pueden alcanzar los siguientes niveles:

Nivel 0. Cuando el estudiante no es capaz de leer el diagrama de tallo y hojas o su lectura no es correcta. Ejemplo de este nivel son las respuestas de E46 y E98, en las que se muestran respuestas que no tienen sentido:

105, 4,0 (E46).

6,5 (E98).

Nivel 1. Leer los datos. Cuando se realiza una lectura literal de un aspecto específico del diagrama de tallo y hojas, pero no se llega a realizar cálculos ni comparaciones con los datos. Por ejemplo, E8 escribe el número formado por el tallo 5 y sus respectivas hojas, formando la parte decimal; ha interpretado mal el gráfico, pero es capaz de dar una de las filas del mismo; no llega a comparar, pues no sería este el valor más frecuente. Otro ejemplo es la respuesta de E44, que sugiere el tallo 2. Este es un elemento del gráfico, por tanto lo ha leído, pero no es el de mayor frecuencia, ni tampoco el dígito más frecuente. En consecuencia no realiza comparaciones de los datos.

5,03578 (E8).

La nota con + frecuencia es el 2 (E44).

Nivel 2. Leer dentro de los datos. Cuando la actividad se responde a través de la lectura correcta de datos del gráfico y la posterior comparación de valores o por medio de cálculos sencillos. En este caso se incluyen las respuestas correctas y otras que evidencian el dominio de este nivel. Ejemplos son las respuestas de E51, que responde correctamente a la pregunta, ha leído correctamente los datos y ha identificado el valor más frecuente, y E57, que también lee correctamente los datos e identifica la moda, pero interpreta que se trata de números enteros (decenas y unidades).

La nota que tiene más frecuencia es el 4,1 (E51).

La nota que representa mayor frecuencia es el 41 (E57).

En la Tabla 5.5.9.7 vemos que la mayoría de las respuestas alcanzan el nivel de lectura 2 (71,3%), donde, además de la lectura literal, los estudiantes ponen en juego procesos matemáticos sencillos y/o comparación de valores. En segundo lugar, y con el 22,4%, están los estudiantes que no han respondido la actividad o no alcanzan el nivel 1 de lectura de este diagrama. Al comparar los resultados por curso, vemos que el porcentaje de éxito es mayor en los estudiantes de 6° que en los de 7° curso. Además,

son estos últimos que presentan un mayor porcentaje de preguntas a las que se les hemos asignado un nivel 0.

Tabla 5.5.9.7. *Porcentaje de estudiantes según niveles de lectura en la segunda en la primera actividad*

Nivel de lectura	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
2	77,1	65,2	71,3
1	7,6	4,9	6,3
0	15,3	29,9	22,4

En la segunda parte del ítem, hemos identificado los siguientes niveles de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001):

Nivel 0. Cuando la actividad no es abordada o la respuesta no tiene sentido. Ejemplos de esta situación son las respuestas de E32 y E56, y que se muestran a continuación. Estos estudiantes no llegan a la lectura literal correcta del gráfico.

Los estudiantes que obtuvieron una nota (E32).

12 (E56).

Nivel 1. Leer los datos. Cuando la respuesta se basa en la lectura literal de un dato específico del tallo o las hojas, pero no se realizan comparaciones o cálculos con los datos. Ejemplo es la respuesta de E14, que lee una fila en el gráfico, pero no realiza comparaciones. Otro ejemplo es E321, que lee sólo las hojas de una fila como si fuera un solo número.

La número 4 con 111169 (E14).

Es 111169 (E321).

Nivel 2. Leer dentro de los datos. El estudiante logra este nivel cuando realiza sumas sencillas de valores mostrados en el diagrama, previo a una lectura literal de algunos datos. Dentro de los ejemplos que hemos considerado están los que responden correctamente a la pregunta (E73), aquellos que responden 10 porque sólo consideran las notas de los tallos 5 y 6, dejando fuera al 7 por tener hoja igual a 0. Otros tipos de respuestas son las que consideran cada hoja como parte de un número y luego suma los formados en los tallos 5 y 6 (03578+01566) (E77).

11 (E73).

05144 (E77).

En la Tabla 5.5.9.8 mostramos la distribución de los niveles de lectura alcanzados en la segunda pregunta. En ella, la mayor parte de los estudiantes entrega respuestas en las que se aplican procesos matemáticos sencillos (43,5%), y por tanto alcanzan el máximo nivel abordable en el ítem. Luego siguen las respuestas que no tienen sentido, no llegan a la lectura literal o no responden. Además, vemos que los estudiantes alcanzan en menor porcentaje el nivel 2, respecto a la primera pregunta. Al comparar los resultados, según el curso al que pertenecen los estudiantes, vemos que los de 6° presentan mejores porcentajes en los niveles 1 y 2, además de presentar menor porcentajes en el nivel 0.

Tabla 5.5.9.8. *Porcentaje de estudiantes según niveles de lectura en la segunda actividad*

Nivel de lectura	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
2	46,3	40,5	43,5
1	28,2	18,1	23,2
0	25,5	41,4	33,3

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global de la lectura en el diagrama del tallo y hojas, se ha dado al estudiante una puntuación a cada apartado, de acuerdo al siguiente criterio:

- En el nivel de lectura se ha puntuado cada apartado de 0 a 2 puntos.
- En la respuesta se puntúa hasta 3 puntos (0: no hace; 1: incorrecta, 2: parcialmente incorrecta; y 3: correcta). Por tanto, se pueden alcanzar 5 puntos en cada apartado con un total de 10 puntos.

En la Figura 5.5.9.5 observamos un diagrama de barras adosado y dos gráficos de caja que resumen la distribución de las puntuaciones totales que alcanzan los estudiantes, según al curso que pertenecen. De acuerdo al gráfico de barras, vemos que una cantidad importante no da respuesta a la actividad (principalmente de 7° curso) y que las puntuaciones están concentradas a partir de los 6 puntos, destacando los 10, 6 y 7 puntos. Pero también hay una gran parte de estudiantes que no alcanza el mínimo de puntuación en esta tarea.

Respecto a los gráficos de caja vemos que las distribuciones presentan diferencias, entre ellas, la mediana de los estudiantes de 6° curso es un punto mayor que los de 7° curso (7 y 6, respectivamente) y que el primer cuartil de los de 6° curso es de 5, mientras que en 7° curso es 0. Por lo que este último grupo presenta resultados más deficientes.

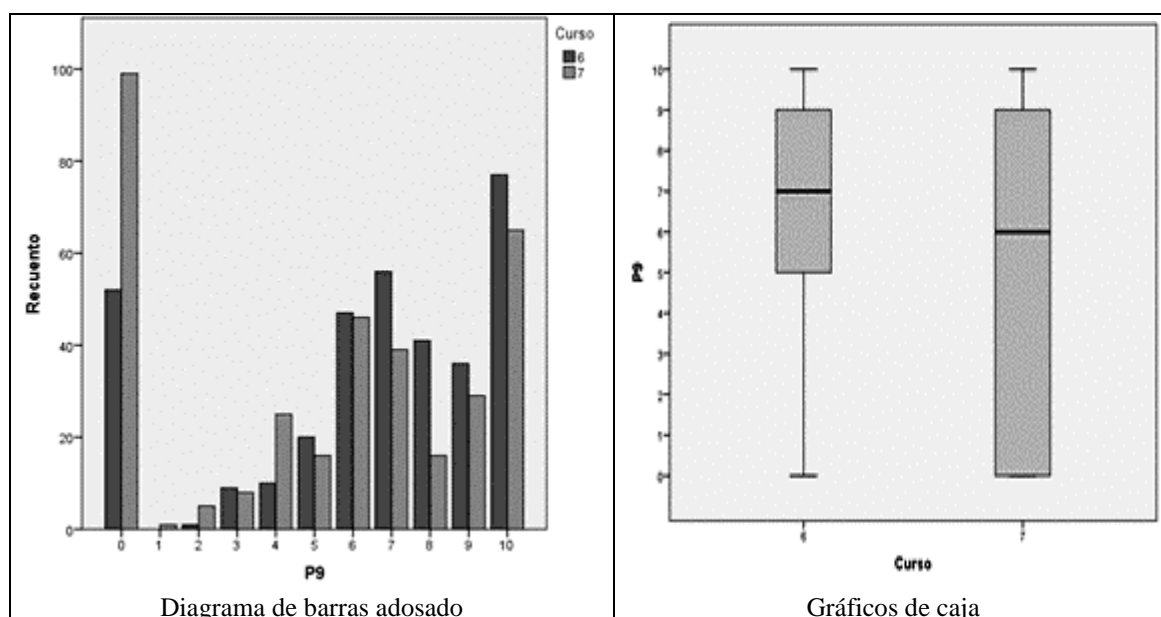


Figura 5.5.9.5. Distribución de la puntuación total en el ítem 9 por curso

5.5.10. RESULTADOS EN EL ÍTEM 10

En la Figura 5.5.10.1 mostramos el ítem 10 que pidió seleccionar, entre tres gráficos de sectores, el más adecuado para representar una distribución. Los datos se presentan en una tabla y se relaciona al número de estudiantes que practican ciertos deportes en un colegio (Fútbol, Tenis y Vóleibol); junto a ella se muestran tres gráficos de sectores, de los que se debe identificar el que representa correctamente la información de la tabla.

En la tabla se registró la cantidad de estudiantes de un colegio que practican diversos deportes.

Deporte	Cantidad de niños
Fútbol	100
Tenis	40
Vóleibol	60

¿Cuál de los siguientes gráficos representa la información de la tabla?

A

B

C

Gráfico:
Justifica por qué has elegido este gráfico:

Figura 5.2.10.1. Ítem 10 planteado a los estudiantes

En este ítem se trabaja con una *representación de una distribución de datos*, que corresponde al tercer nivel de la complejidad semiótica descrita por Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010). En nivel de lectura corresponde a *leer detrás de los datos*, que es el cuarto nivel de lectura de Shaughnessy et al. (1996), porque se debe realizar una lectura crítica y dar razones sobre la elección de un gráfico para representar la información de la tabla.

A continuación describimos los resultados sobre la elección del gráfico que realizan los estudiantes y el nivel de lectura que alcanzan en sus justificaciones.

Respuesta en la selección de gráfico

En primer lugar, consideramos el gráfico elegido por los estudiantes. Para deducir el gráfico correcto, el estudiante debe transformar los datos de la tabla a porcentajes, por la forma en que vienen dados en los gráficos de sectores. Además, debe leer el título y etiquetas del gráfico y comparar los valores de los porcentajes expresados en las etiquetas con las áreas de los sectores circulares correspondientes. La respuesta correcta supone elegir el gráfico C, puesto que el total de niños en el colegio es 200. Los que practican fútbol suponen la mitad (50%), los que juegan el tenis el 20% y a vóleibol el 30%. Los estudiantes que eligen el gráfico A confunden los conceptos de frecuencia y porcentaje, puesto que los porcentajes que se han asignado como etiquetas son precisamente las frecuencias absolutas de práctica de cada deporte. Los que eligen el gráfico B no calculan correctamente los porcentajes.

En la Tabla 5.5.10.1 mostramos los resultados de los gráficos que han seleccionado los estudiantes. Como vemos en ella, el mayor porcentaje ha seleccionado el primer gráfico (A), confundiendo frecuencia y porcentaje (45,6%), seguido del gráfico C, que corresponde al correcto (34,8%) y por aquellas respuestas en las que no se elige un gráfico (15,3%). Al comparar los resultados según el curso, notamos que los estudiantes de 7° seleccionan al gráfico C en mayor porcentaje (38,4%), aunque es el grupo con mayor proporción de respuestas en blanco. Además, los de 6° curso son los que seleccionan con mayor frecuencia el gráfico A, con un porcentaje superior al 50%. En la investigación de Fernández y Morais (2011) las respuestas a tareas sobre gráficos de sectores fueron correctas en un 45,3%, pero el autor considera niveles de lectura 1 y 2. Igualmente ocurre con Cruz (2013), que obtiene un 70% en la lectura directa de un gráfico de sectores.

Tabla 5.5.10.1. Porcentaje de estudiantes según gráfico seleccionado

Gráfico seleccionado	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
A	51,8	39,2	45,6
B	5	3,3	4,2
C	31,3	38,4	34,8
Todas (A, B y C)	0,3	0	0,1
No responde	11,6	19,2	15,3

Nivel de lectura

En segundo lugar, en relación al mismo ítem, analizamos el nivel de lectura que se deduce de los argumentos que se dan los estudiantes para realizar la selección de dicho gráfico. Dichas respuestas las hemos categorizado según los niveles de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), como se muestra a continuación:

Nivel 0. En este nivel hemos incluido aquellas respuestas en blanco, sin sentido o donde no existe evidencia de que se haya leído correctamente algún dato del gráfico. Por ejemplo, E98 justifica su elección del gráfico B por medio de una representación del mismo gráfico (Figura 5.5.10.2), pero sin respetar los convenios propios de los gráficos de sectores. Pero no llega a leer ningún dato del gráfico. Igual ocurre en la respuesta entregada por E65.

B. Porque ninguno estaba correcto (E65)



Figura 5.5.10.2. Justificación dada por el estudiante E98 a su elección del gráfico B

Nivel 1. Leer los datos. Este nivel recoge aquellas respuestas que están basadas en una lectura literal de la información. Los estudiantes han leído algún elemento, como las categorías o las etiquetas que muestran los porcentajes, pero no realizan ningún tipo de cálculo. En este apartado aparecen las respuestas que confunden las frecuencias mostradas en la tabla con los porcentajes del gráfico. Pero al menos, han leído los números que corresponden a cada sector y comprobado que corresponden a la

frecuencia del deporte dado para cada fila de la tabla. Ejemplos de estas situaciones se muestran a continuación:

A. Yo elijo este gráfico ya que representa la cantidad que representa la tabla donde aparece que 100 niños entrenan fútbol, 40 tenis y 60 vóleibol (E38).

A. Porque está como lo dice la tabla (E285).

Nivel 2. Leer dentro de los datos. En este nivel hemos incluido las justificaciones que, además de mostrar una lectura directa del gráfico, se apoyan en procesos matemáticos sencillos o comparaciones de los datos. En el caso de este ítem, se hacen comparaciones relacionadas con quienes practican un determinado deporte, con algún cálculo parcial de un porcentaje correcto (E27) o la suma de los porcentajes (E141). Ejemplos de estas situaciones se muestran a continuación.

C. Porque es el único gráfico que sumando los números da 100 (E27).

B. Porque F es el mayor T el menor y V el del medio (E141).

Nivel 3. Leer más allá de los datos. Nivel asociado a la predicción o inferencia de valores a partir de los datos mostrados en el gráfico. Este nivel no se aplica en el ítem.

Nivel 4. Leer detrás de los datos. Este nivel se caracteriza por la valoración crítica de diferentes aspectos de un gráfico estadístico, o como en este caso, por argumentar correcta y coherentemente la elección del gráfico que representa la información mostrada en la tabla, acompañado de cálculos y de comparación entre los datos. En lo que sigue mostramos algunas respuestas que hemos clasificado dentro de esta categoría. Un ejemplo es la respuesta de E22 (Figura 5.2.10.3), que entrega argumentos para descartar el gráfico A como representación para las frecuencias de los deportes de tabla y realiza cálculos para justificar su elección del gráfico C. De modo similar, E122 relaciona los valores de la tabla de frecuencias, con el 100% que debe representarse en el gráfico.

C. Porque el total de niños en deporte es 200 y la mitad es 100, pero también hay 100 niños en fútbol por lo que en gráfico tendría que 50% por lo que está bien. Además de que el porcentaje (total) es 100% cumple con el requisito que con gráfico A no lo hace ya que en total de ese es 200% (E122).

- Primero se puede descartar el A, ya que representa el 100% y al mismo tiempo 200%
Para que sea coherente deberían ser dos figuras.

- Luego si vemos la tabla, hay un total de 200 niños, para que sea un 100% debemos dividirlo a la mitad, por lo que cada niño representa un 0,5%
 $100 \cdot 0,5 = 50\% = \text{Fútbol}$
 $40 \cdot 0,5 = 20\% = \text{tenis}$
 $60 \cdot 0,5 = 30\% = \text{Voleibol}$

Figura 5.5.10.3. Justificación de E22 a su elección del gráfico C

A modo de resumen, en la Tabla 5.5.10.2 mostramos la distribución de los niveles de lectura que han alcanzado las respuestas de los estudiantes para justificar su elección del gráfico. En ella, vemos que menos del 10% alcanzan el nivel más alto, en que se presentan argumentos válidos, acompañados de procesos matemáticos, y donde los estudiantes de 7° curso presentan una diferencia de cerca de tres puntos porcentuales

sobre los de 6°. También, observamos que el nivel de lectura más frecuente es el de lectura literal con un 44,3% de las respuestas totales, comprendiendo al 49,5% de los estudiantes de 6° y al 38,9% de 7°. En segundo nivel más frecuente es el 2, *leer dentro de los datos*, con un 26,7% del total de los estudiantes, donde los de 7° curso lo logran en un 28,5% y los de 6° en un 25%.

Tabla 5.5.10.2. *Porcentaje de estudiantes según nivel de lectura alcanzado*

Nivel de lectura	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
0	17,6	21,4	19,5
1	49,5	38,9	44,3
2	25	28,5	26,7
4	7,9	11,2	9,5

De acuerdo a los resultados de las Tablas 5.5.10.1 y 5.5.10.2, vemos que para este ítem, en el que se trabaja el paso de la información de una tabla a un gráfico de sectores, la mayoría de los estudiantes hace un paso directo, olvidando que debe existir una proporción entre las frecuencias y los grados del sector circular respectivo.

Síntesis de resultados

Finalmente, realizamos una valoración global del ítem de acuerdo a las respuestas de los estudiantes y siguiendo los siguientes criterios para asignar una puntuación:

- De acuerdo al gráfico seleccionado se conceden de 0 a 2 puntos (0: no selecciona; 1: gráfico A; 1: gráfico B; 2: gráfico C; 1: todos los gráficos).
- De acuerdo al nivel de lectura alcanzado se puede conseguir desde 0 a 4 puntos, sin considerar el nivel 3 que no se pide en la actividad. Por lo que en esta actividad se podía lograr una puntuación máxima de 6 puntos.

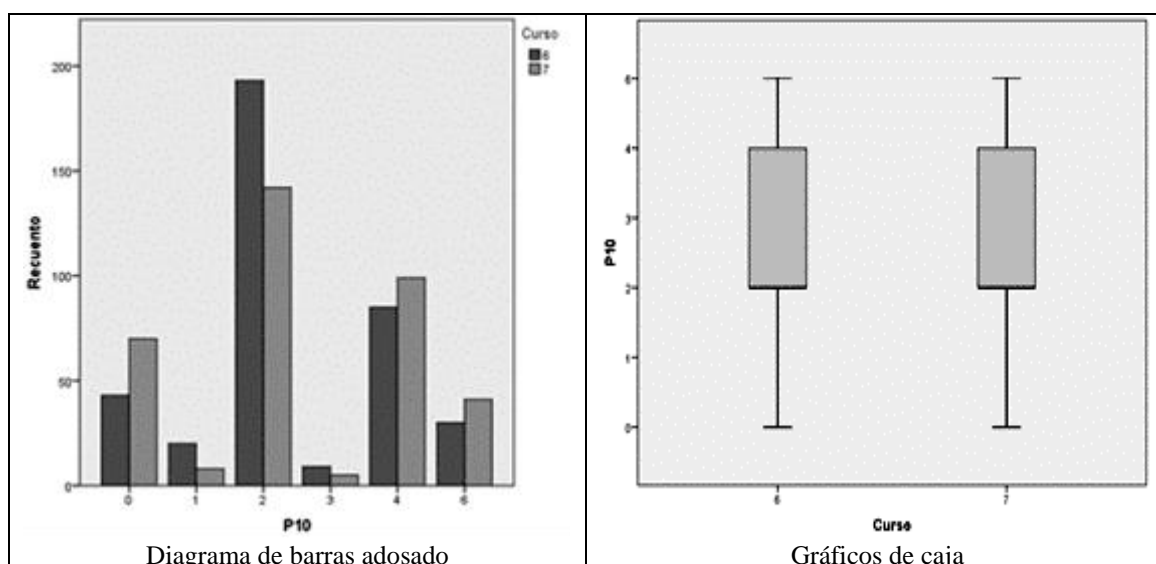


Figura 5.5.10.4. Distribución de la puntuación total en el ítem 10 por curso

En la Figura 5.5.10.4 mostramos la distribución de la puntuación total para el ítem 10, por medio de un diagrama de barras adosado y dos gráficos de caja. En el gráfico de

barras vemos que la puntuación está concentrada en 4 y 2 puntos, donde el máximo es 6; en los puntajes más altos (4 y 6) los estudiantes de 7° presentan una leve ventaja, sobre los de 6° curso. Al observar los gráficos de caja vemos que la mediana es igual en ambos cursos, así como los cuartiles uno y tres. Por tanto, no hay mucha diferencia en la puntuación total, aunque el nivel de lectura mejora en los de 7° curso, debido a su mayor madurez.

5.5.11. RESULTADOS EN EL ÍTEM 11

En el último ítem del cuestionario de evaluación, adaptado de un libro de texto de 6° curso de Educación Primaria (Ávila et al., 2013), se pretende evaluar la competencia de lectura crítica en un gráfico de puntos (Figura 5.5.11.1). En estos gráficos estadísticos se trabaja con dos gráficos estadísticos, cada uno de ellos con nivel de complejidad semiótica 3 de Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010), donde se muestran las distribuciones de las calificaciones obtenidas por un grupo de estudiantes de Educación Primaria en matemática y lenguaje. Con tal información, María afirma que matemática es más difícil que lenguaje porque el número de niños con calificaciones 6 o más es menor.

Respecto a los niveles de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), se exige un nivel de lectura 4, *leer detrás de los datos*, ya que los estudiantes deben argumentar sobre la afirmación realizada por María, apoyado de la comparación de ambas distribuciones (por ejemplo, utilizando la media aritmética).

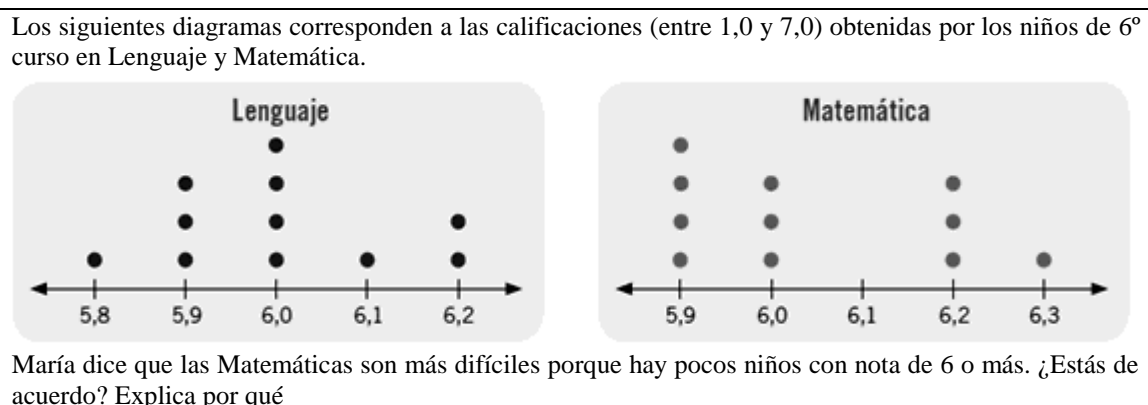


Figura 5.5.11.1. Ítem 11 planteado a los estudiantes

En lo que sigue mostramos los resultados respecto a la veracidad o falsedad de la afirmación realizada por María, respecto a que la matemática es más difícil que el lenguaje por la cantidad de calificaciones igual o superior a 6,0 que se muestran en los diagramas.

Porcentaje de acuerdo (verdadero) o desacuerdo (falso) con María

En primer lugar, el estudiante debió decidir si está o no de acuerdo con la afirmación que realiza María. Se espera que indique que no está de acuerdo, ya que hay 7 niños en cada grupo con nota 6 o superior y la media es más alta en matemática. La mediana es 6 en los dos grupos.

En la Tabla 5.5.11.1 mostramos la distribución de las respuestas de los estudiantes, en la que indican si están o no de acuerdo con la afirmación que realiza María. En ella, observamos que la mayoría (59,5%) no está de acuerdo con la afirmación de María, indicando que esta es falsa, por tanto dan la respuesta correcta.

Tabla 5.2.11.1. Porcentaje de estudiantes según valoración de la afirmación de María

Afirmación	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
Verdadero (Incorrecto)	20,8	17,3	19,1
Falso (Correcto)	59,7	59,2	59,5
No selecciona	19,5	23,6	21,5

En segundo lugar, están los estudiantes que no indican si están o no de acuerdo con María y no abordan la actividad (21,5%). Tan sólo el 19,1% de los estudiantes indica que estar de acuerdo con María al decir que la matemática es difícil, considerando el número de quienes tienen calificaciones de 6 puntos o mayor. De la misma tabla, vemos que el porcentaje de estudiantes que indican que la afirmación es falsa es similar entre los cursos considerados en el estudio (6° y 7°); los de 6° son los que indican que la afirmación es verdadera en mayor porcentaje y quienes omiten mencionar la veracidad o falsedad de la misma en un menor porcentaje.

Nivel de lectura

Tras la verificación la veracidad o falsedad de la afirmación de María, se estudia el proceso y la argumentación que realizó para respaldar dicha postura y de acuerdo a ella asigna un determinado nivel de lectura (Curcio, 1989; Friel et al., 2001; Shaughnessy et al., 1996), con los siguientes criterios:

Nivel 0. Cuando no se aborda la actividad o la respuesta muestra que no se ha sido capaz de leer los datos ni siquiera literalmente. Se incluyen las respuestas en que se realizan comentarios personales sobre las dificultades de la matemática y cómo afecta su esfuerzo en sus resultados (E6). En otro ejemplo, E4 ni siquiera lee bien el número decimal.

Yo no estoy de acuerdo con María porque como niñas y niños sabemos y nos debemos esforzar para los estudios y hacer todo lo posible o todo el empeño para que les de 60, 61, 62, 63, etc. (E4).

Si estoy de acuerdo porque si son difíciles las matemáticas (E6).

Nivel 1. Leer los datos. Cuando la respuesta del estudiante está basada en la lectura literal de una información que se entrega en el gráfico (o los gráficos). El estudiante ha leído algún elemento del gráfico de puntos. Por ejemplo, obtienen la frecuencia correspondiente al valor seis en uno o los dos gráficos, realizando una lectura directa (E17), o identifican una frecuencia nula (E303) llevando a cabo una lectura inversa.

Hay tres alumnos con nota 6,0 (E17).

Si porque nadie sacó un 6,1 (A303).

Nivel 2. Leer dentro de los datos. Cuando se entrega una respuesta en la que el estudiante, además de leer literalmente los datos, realiza cálculos o comparaciones a partir de la información mostrada en los diagramas. Esta respuesta no alcanza un nivel superior ya que sus conclusiones están basadas en algunos datos y no en toda la distribución, o bien porque sus argumentos son imprecisos. Como ejemplo, tenemos aquellas respuestas que se limitan a comparar el número de estudiantes con puntuación superior a seis en ambos diagramas (E692), o los valores extremos (E479).

No estoy de acuerdo porque en lenguaje estuvo la nota más baja un 5,8 y en matemática la más alta un 6,3 (E479).

No, no estoy de acuerdo con María porque hay más alumnos con 6 (6,0, 6,2, 6,3) que 5,9 (E692).

Nivel 3. Leer más allá de los datos. Se alcanza este nivel cuando se realiza una predicción o se infiere un valor que no está. Este nivel no se aplica en este ítem.

Nivel 4. Leer detrás de los datos. Finalmente, el cuarto nivel es aquel en que se realizan valoraciones críticas de diferentes aspectos de la información mostrada, de la forma de organizarla o de las conclusiones obtenidas. En este caso, además de leer los datos y realizar comparaciones o cálculos, se debe indicar si comparte (o no) lo que dice María, y argumentar su opinión usando todos los datos mostrados en los diagramas. También, se aceptan aquellos argumentos que presenten leves imprecisiones. Por ejemplo, E42, además de identificar las calificaciones máxima y mínima de matemática y lenguaje, hace una comparación de la frecuencia de puntuaciones iguales o superior a 6. Otro ejemplo es la respuesta de E700, que realiza comparación entre los valores.

No estoy de acuerdo ya que la misma cantidad de notas 6,0 y sobre 6: aparte la peor nota de matemáticas es 5,9 mientras que en lenguaje la peor es 5,8[;] también matemáticas tiene más notas sobre 6 que lenguaje y por otra parte la mejor nota es 6,3 y la de lenguaje es un 6,2 (E42).

No estoy de acuerdo, porque en lenguaje y matemáticas hay 7 personas con promedio 6,0 o mayor a 6,0 e incluso en matemática hay más personas con 6,2 e incluso una con 6,3 (E700).

En la Tabla 5.5.11.2 reproducimos la distribución de los niveles de lectura alcanzados por los estudiantes, al argumentar si comparten o no la afirmación de María. En ella notamos que el nivel de lectura más frecuente es el 0, que agrupa a las respuestas en blanco y las que muestran no leer los datos o carecen de sentido. Con una leve diferencia le sigue el nivel 2, *leer dentro de los datos*, donde los estudiantes trabajan con los datos que se muestran en los diagramas y también hacen una lectura literal. En un bajo porcentaje observamos el nivel 4 (*leer detrás de los datos*) y 1 (*leer los datos*).

Tabla 5.5.11.2. *Porcentaje de estudiantes según nivel de lectura alcanzado*

Nivel de lectura	6° curso (n=380)	7° curso (n=365)	Total (n=745)
0	45	49,3	47,1
1	6,6	3,3	5
2	47,4	46	46,7
4	1,1	1,4	1,2

En la comparación de los resultados por curso vemos los estudiantes de 7° presentan los peores resultados, ya que casi el 50% de sus respuestas son categorizadas en el nivel 0. No hemos encontrado muchos trabajos previos sobre lectura de gráficos de puntos. El de Wu (2004) indica una tasa correcta del 50% pero no estudia los niveles de lectura.

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global del ítem hemos dado una puntuación a cada

apartado, en la forma siguiente, donde se pueden obtener hasta 6 puntos:

- Indicar si la afirmación que hizo María es verdadera o falsa, donde se asignan 2 punto (0: no selecciona; 1: incorrecto; y 2: correcto).
- En el nivel de lectura se ha puntuado cada apartado de 0 a 4 puntos, sin considerar el nivel 3 que no se pide en la actividad y no se observa en las respuestas.

En la Figura 5.5.11.2 presentamos un diagrama de barras adosado y dos gráficos de caja con la puntuación total del ítem. En el primero observamos que la mayoría de estudiantes de 6° y 7° curso alcanza 4 puntos, seguido de 2 y 0 puntos. Al comparar los gráficos de caja vemos que la mediana es igual en ambos cursos (2 puntos), bajo el valor medio teórico, y que los cuartiles uno y tres coinciden (1 y 4, respectivamente).

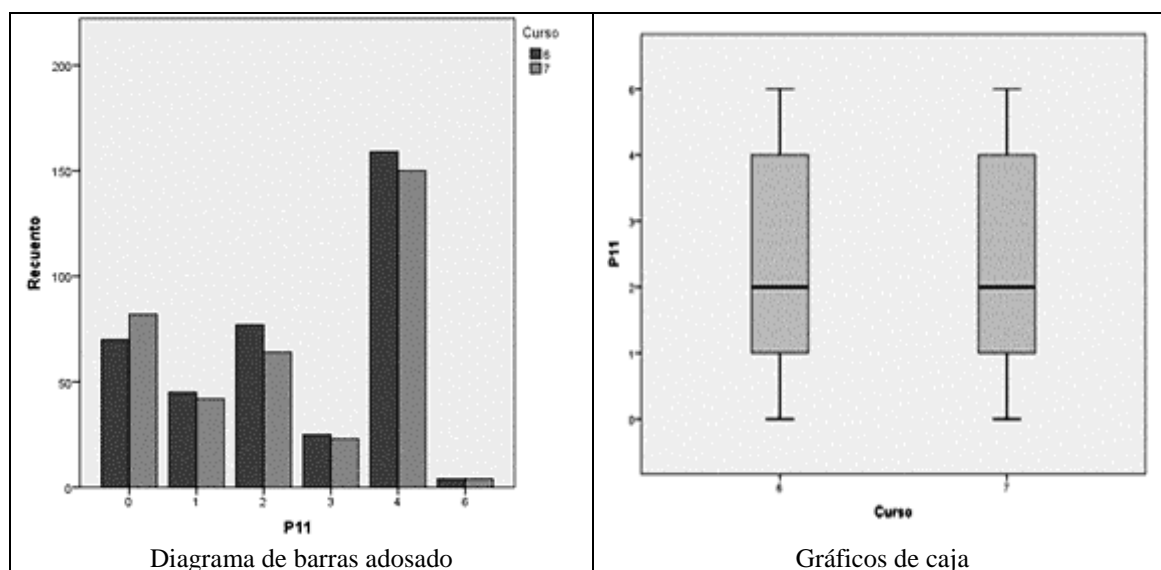


Figura 5.5.11.2. Distribución de la puntuación total en el ítem 11 por curso

5.6. ESTUDIO DE LA PUNTUACIÓN TOTAL

Tabla 5.6.1. Puntuaciones máximas teóricas en los ítems y global

Ítem	Máximo teórico	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica
P1	3	0	3	1,62	0,857
P2	7	0	7	3,00	2,347
P3	4	0	4	1,66	1,360
P4	5	0	5	4,54	1,055
P5	12	0	12	6,79	2,434
P6	10	0	10	7,50	1,966
P7	3	0	3	1,28	0,930
P8	6	0	6	2,98	2,039
P9	10	0	10	5,83	3,602
P10	6	0	6	2,55	1,695
P11	6	0	6	1,38	0,816
Total	72	0	69	40,28	11,291

Para dar una medida cuantitativa del conocimiento global sobre los gráficos estadísticos de cada participante, se sumaron en cada ítem las puntuaciones máximas en cada apartado, obteniendo una puntuación total en el ítem que ya se analizó en las secciones anteriores. De estas puntuaciones, así como de la puntuación total resultante al sumar las de todos los ítems, se calcularon los valores mínimo y máximo, media y

desviación típica. Estos valores se presentan en la Tabla 5.6.1, junto con el valor máximo teórico, que es alcanzado en todos los ítems, aunque no en la puntuación total, donde sólo se llega a una puntuación máxima de 69, aunque este valor se acerca bastante al máximo posible (72).

En la Figura 5.6.1 se representa la distribución de la puntuación total en el cuestionario, mediante un histograma, que muestra que dos estudiantes (uno de 6º curso y otro de 7º curso) obtuvieron una puntuación cero; es decir, no respondieron a las preguntas, pero representan un porcentaje muy pequeño (0,3%) en relación al tamaño de la muestra. La moda de la puntuación total en el cuestionario se sitúa en torno a 40 puntos (intervalo modal entre 35 y 45) y, teniendo en cuenta que teóricamente la media se situaría en 36 puntos, indica un buen resultado global en el cuestionario. Además, aunque casi simétrica, la distribución tiene algo de asimetría a la izquierda, con mayor número de estudiantes por encima de la moda.

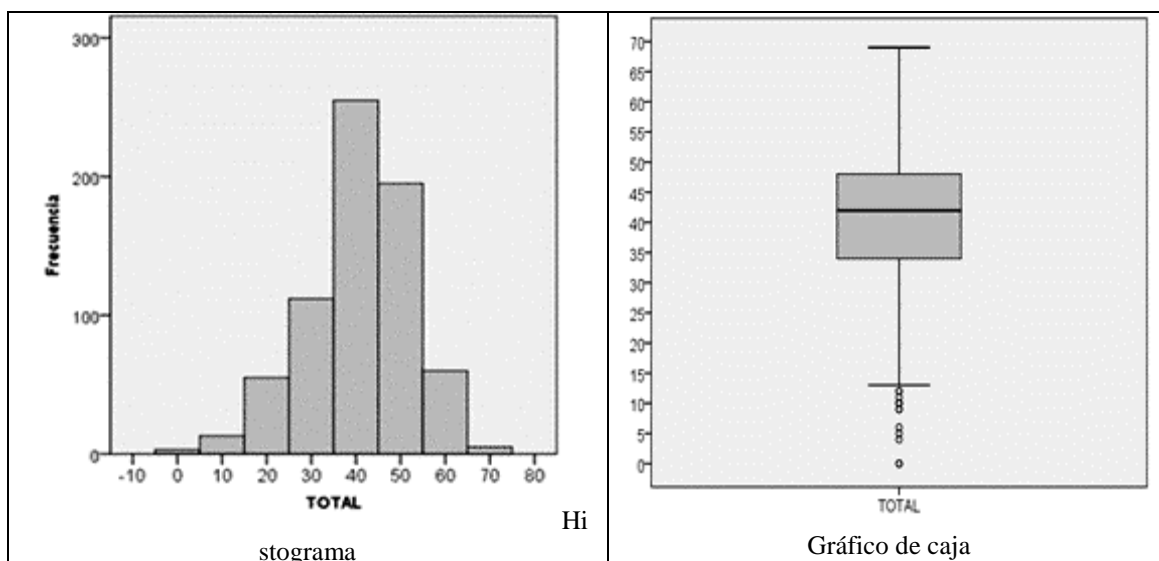


Figura 5.6.1. Distribución de la puntuación total en el cuestionario

Por otro lado, el gráfico de la caja permite deducir que la mediana (42) se sitúa por encima del valor 40 y los cuartiles son 34 (primer cuartil) y 48 (segundo); por tanto en este intervalo se sitúa el 50% central de la distribución. Los casos atípicos aparecen únicamente en los valores muy bajos de la puntuación total, es decir, son excepcionales los estudiantes que obtienen estas puntuaciones. Estos datos se observan mejor en la Tabla 5.6. 2, donde se presentan los resúmenes estadísticos de la puntuación total en el cuestionario.

Tabla 5.6.2. *Resúmenes estadísticos de la puntuación total*

Estadístico	Valor	
Media	40,27	
Mediana	42,00	
Moda	42,00	
Desviación típica	11,29	
Asimetría	-0,52	
Error típico. de asimetría	0,09	
	25	34,00
Percentiles	50	42,00
	75	48,00

Observamos en esta tabla la proximidad de media, mediana y moda debido a la casi simetría de la distribución (marcada también por el pequeño valor del coeficiente de asimetría). La puntuación ha variado alrededor de este valor central con una distribución a lo largo de todo el rango, esto quiere decir que el cuestionario se comporta adecuadamente para evaluar los conocimientos de una gama amplia de estudiantes, desde los que tienen una gran competencia gráfica hasta los que apenas conocen el tema, concentrando las puntuaciones en la parte central, como es habitual en este tipo de cuestionario (Millman y Greene, 1989).

5.7. CARACTERÍSTICAS PSICOMÉTRICAS DEL CUESTIONARIO

Al utilizar un nuevo cuestionario de evaluación, como el que hemos construido, es importante informar de algunas de sus características psicométricas, de modo que pueda ser utilizado con garantías en nuevas investigaciones. Por este motivo se han realizado los cálculos de algunos de estos indicadores con los datos de la muestra.

Indicadores de dificultad de los ítems

Una de las características que aseguran la calidad de un cuestionario es la distribución de la dificultad de cada ítem, que se refleja en la proporción de respuestas correctas (índice de dificultad). En caso de usar la teoría clásica de los test (Barbero, Vila y Suárez, 2003; Martínez-Arias, 1995), el índice de dificultad sería la proporción de estudiantes que responde correctamente al ítem entre aquellos que lo han intentado y para que un cuestionario sea adecuado conviene que la mayoría de estos índices tengan un valor cercano a 0,5 y además la distribución de los mismos sea algo variada (no todos los ítems tengan la misma dificultad).

En nuestro caso, hemos preferido construir otro indicador de la dificultad, puesto que si únicamente tuviéramos en cuenta las respuestas totalmente correctas a cada ítem, la mayoría de ellos resultaría con un índice de dificultad muy bajo, lo que daría una impresión falsa de dificultad. Además, al evaluar cada ítem y otorgarle una puntuación se ha considerado en la mayoría de los casos no sólo la respuesta, sino el nivel de lectura alcanzado por el estudiante. Nosotros hemos querido tener en cuenta estos dos aspectos al valorar la dificultad del ítem, considerando la puntuación que alcanza el estudiante, en función de la máxima posible en el ítem.

Tabla 5.7.1. *Índices de dificultad (media de la variable indicadora)*

Ítem	Media	Desviación típica.	Gráfico	Complejidad	Nivel lectura	Actividad
IND11	0,4	0,27	Puntos	3	4	Leer
IND3	0,41	0,34	Barras	4	1	Traducir
IND10	0,43	0,28	Sectores	3	4	Elegir
IND7	0,43	0,31	Barras	3	2	Construir
IND2	0,43	0,34	Barras	2	3	Leer
IND8	0,5	0,34	Líneas	4	4	Elegir
IND1	0,54	0,29	Barras	2	1	Construir
IND5	0,57	0,2	Pictograma	3	4	Leer
IND9	0,58	0,36	Tallo y hojas	3	2	Leer
IND6	0,75	0,2	Líneas	2	1	Leer
IND4	0,91	0,21	Pictograma	2	2	Traducir

Puesto que cada ítem varía en la puntuación máxima alcanzable, como se ha visto con anterioridad, se han construido unas variables indicadoras, todas ellas acotadas entre 0 y 1, dividiendo la puntuación de cada ítem por la puntuación máxima teórica en el mismo. De este modo obtenemos los indicadores presentados en la Tabla 5.7.1, junto con sus medias y desviación típica. Para analizarlo mejor, se han ordenado los indicadores por dificultad (de más difícil a más sencillo).

Observamos que todos los ítems tienen una dificultad adecuada, pues no han aparecido ítems demasiado difíciles y el rango de dificultad es variado (entre 40 y 91). Los ítems más difíciles, cuyo indicador de dificultad son inferiores a 0,6, por otro lado, fueron los siguientes:

- *Ítem 11.* Este ítem, con indicador de dificultad igual a 0,4 consiste en realizar una lectura crítica de un gráfico de puntos para, a partir de esta lectura refutar o confirmar una afirmación. En este ítem sobre el 60% de los estudiantes fue capaz de detectar que la afirmación realizada era falsa, es decir, supo leer el gráfico y relacionarlo con dicha afirmación. Y aunque pocos llegaron a una argumentación completa y al nivel de lectura 4, alrededor del 50 % llegó al nivel de lectura 2, siendo capaz de realizar operaciones y comparaciones con el gráfico.
- *Ítem 3.* En este ítem, con indicador de dificultad igual a 0,41, consiste en la traducción de un gráfico de barras dobles (nivel de complejidad semiótica 4) a una tabla. Únicamente el 36% de los estudiantes logra construir una tabla correcta, debido, tanto a problemas de lectura, como a errores en la construcción de la tabla.

Los ítems más sencillos, cuyo indicador de dificultad supera a 0,6, fueron los siguientes:

- *Ítem 4.* Traducir un pictograma de un gráfico de complejidad 2 y nivel de lectura 2 a tabla con un indicador de dificultad igual a 0,91. Recordemos que en este ítem el 75,4% de estudiantes construyó una tabla correcta y otro 18,5% parcialmente correcta. Además, el 92,6% alcanzó el máximo nivel de lectura en el ítem. Comparado con el ítem 3 que resultó bastante difícil es clara la influencia del nivel de complejidad del gráfico, que en este caso es mucho menor (por tanto menor también la construcción de la tabla correspondiente).
- *Ítem 6.* Lectura de un diagrama de líneas en un gráfico de complejidad 2 y nivel de lectura 1 con un indicador de dificultad igual a 0,75. En este ítem se hacían varias preguntas y el porcentaje de respuestas correctas en cada una fue el 94,4% (lectura del título), 93,3% (lectura de un valor), 62,6% (lectura inversa, con otro 31,4% de parcialmente correctas) y sólo hubo algo de dificultad al describir las variables representadas, posiblemente debido a dificultad de expresión por parte del estudiante.

Aunque no se observa una tendencia a la dificultad o sencillez en función del tipo de gráfico o la actividad, aparentemente, la complejidad del gráfico combinada con el nivel de lectura requerido es lo que contribuye a la dificultad del ítem, como puede verse en la Tabla 5.7.1. En ella vemos que los ítems más sencillos, en general, corresponden a gráficos de complejidad semiótica 2 y nivel de lectura 1 o 2 y los más difíciles gráficos de complejidad 3 o 4 combinados con nivel de lectura 4, excepto el ítem 3, cuya complejidad es 4 pero en donde hubo muchos fallos en la construcción de

la tabla.

Esta información se amplía con la Figura 5.7.1, que representa los gráficos de cajas de estos indicadores. En la mayoría de ellos la distribución de la puntuación está repartida, pero observamos dos excepciones. La primera es el ítem 4, ya comentado, donde los dos cuartiles y mediana están situados en el máximo valor, y no se observan bigotes. Ello es debido a que la mayoría de los estudiantes responde correctamente y a nivel máximo de lectura al ítem, pues fue un ítem muy sencillo. Por otro lado, el ítem 1, consistente en la construcción de un gráfico de barras; también concentra la mediana y los cuartiles pero en el valor 0,65, ya que la amplia mayoría de la muestra se concentra en el 65% de la posible puntuación, debido a errores realizados en la construcción del gráfico.

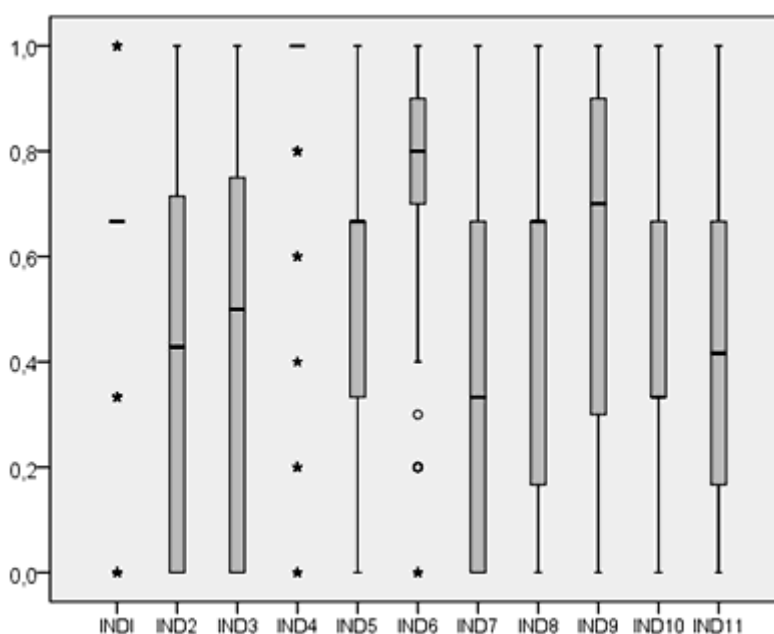


Figura 5.7.1. Comparación de la distribución de indicadores de dificultad de los ítems

Indicadores de la discriminación de los ítems

Igualmente hemos utilizado los indicadores descritos anteriormente, en lugar de realizar el cálculo con las variables originales, para analizar la discriminación de los ítems, es decir, la capacidad de separar a los estudiantes en función de sus conocimientos del tema. Ello nos permite comprobar la discriminación en una escala homogénea. Muñiz (2017) sugiere dos formas de calcular el índice de discriminación:

1. Como correlación entre el indicador y la puntuación total del cuestionario. Este método se usará cuando se realice el estudio de la fiabilidad del cuestionario.
2. Mediante el estudio de la diferencia media del indicador en los estudiantes en el grupo de mejor desempeño y el de peor desempeño (medidos por la puntuación total alcanzada), aplicando el contraste de hipótesis de diferencia de medias. Estos grupos se pueden determinar de diferente manera, según Díaz (2007): como sujetos con y sin instrucción, como sujetos que puntúan por encima o debajo de la mediana, etc. Nosotros usaremos el método más frecuente, consistente en elegir los estudiantes que puntúan por encima del primer tercil y debajo del tercero. Lo elegiremos en forma aproximada para que los dos grupos tengan un número razonable de estudiantes. Teniendo en cuenta los que respondieron todos los ítems (657) hemos

elegido los 200 estudiantes con mejor y peor puntuación en el total de la prueba.

Emplearemos a continuación este método, analizando la significación estadística de las diferencias entre la puntuación media en cada indicador en estos dos grupos de estudiantes con conocimientos altos y otro con conocimientos bajos. Para formar estos dos grupos, se ordena el fichero de datos en orden creciente de puntuación total en la prueba, pues dicha puntuación mide el conocimiento global de los gráficos en cada estudiante.

Tabla 5.7.2. *Discriminación de los indicadores*

Indicador	Grupo	Media	Desviación típica	Error típico de la media	Valor t	Valor p
IND1	1	0,36	0,32	0,023	-13,78	,000
	2	0,71	0,16	0,011		
IND2	1	0,21	0,28	0,020	-13,58	,000
	2	0,61	0,31	0,022		
IND3	1	0,22	0,31	0,022	-13,56	,000
	2	0,61	0,27	0,019		
IND4	1	0,80	0,32	0,023	-7,58	,000
	2	0,98	0,07	0,005		
IND5	1	0,44	0,19	0,014	-14,72	,000
	2	0,70	0,16	0,011		
IND6	1	0,63	0,24	0,017	-12,03	,000
	2	0,86	0,14	0,010		
IND7	1	0,21	0,27	0,019	-17,03	,000
	2	0,65	0,24	0,017		
IND8	1	0,25	0,32	0,022	-17,27	,000
	2	0,73	0,24	0,017		
IND9	1	0,26	0,31	0,022	-23,13	,000
	2	0,86	0,19	0,014		
IND10	1	0,24	0,23	0,017	-14,61	,000
	2	0,62	0,28	0,020		
IND11	1	0,22	0,26	0,019	-14,49	,000
	2	0,56	0,21	0,015		

Ordenados de este modo los datos, y siguiendo a Muñiz (2017), se forman tres grupos de puntuación alta (grupo superior, los 200 estudiantes de mayor puntuación total), puntuación baja (grupo inferior, los 200 estudiantes de menor puntuación total) y grupo intermedio. El contraste t de diferencia de medias de muestras independientes de cada uno de estos indicadores entre los grupos superior e inferior (Tabla 5.7.2) indica la capacidad de discriminación del indicador y por supuesto, del ítem de donde se ha deducido. Antes de aplicar el contraste t , se ha realizado la prueba de homogeneidad de varianzas, eligiendo el contraste adecuado en función de la significatividad de la prueba. Además, puesto que las muestras son muy grandes, de hecho la distribución t se aproximaría por la normal para este caso (Nortes, 1991).

Se observa una muy fuerte discriminación en todos los ítems, teniendo en cuenta los valores t muy altos y el valor p obtenido en todos ellos, siempre menor que 0,001. Por tanto, cada uno de los ítems mostraría un gran poder de discriminación entre estudiantes con o sin conocimientos del tipo de gráfico o tarea propuesta en el mismo.

Este resultado nos sirve para confirmar la validez del cuestionario. Díaz (2007) indica que la validez es un concepto unitario, y sus diferentes formas de constatarla (validez de constructo, contenido, criterio...) ayudan a recoger evidencias de una única noción de validez (Martínez-Arias, 1995). Asimismo entendemos la validez en relación al uso que se dará al cuestionario y la interpretación de sus puntuaciones.

En el Capítulo 4 se analizó la *validez de contenido* que es para nosotros fundamental, en cuanto asegura que el instrumento mide lo que se pretende. Dichas evidencias de validez se pueden completar ahora con este estudio de discriminación, que muestra que el cuestionario en su conjunto muestra una buena *validez discriminante*, que se sumaría a la validez de contenido analizada en el Capítulo 4.

Fiabilidad

Para completar información sobre el cuestionario, con el fin de que sea útil en otros trabajos, se proporcionan en este apartado evidencias de fiabilidad desde la teoría clásica de los test.

Para ello se calcula el *coeficiente alfa de Cronbach* que refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el cuestionario y que resultó en un valor de 0,773. Santisteban (2009) considera válidos en las pruebas de evaluación valores por encima de 0,5. El valor obtenido es razonable, ya que valores moderados son usuales en cuestionarios con fines de evaluación de conocimientos complejos que no son unidimensionales (Díaz, 2007). Ello es debido a que, frente al dilema entre precisión y amplitud de contenido, se llegó a un compromiso, en función al tiempo disponible y decidimos incluir sólo 11 ítems, pero que cubrieran todas las variables relevantes.

En consecuencia, no podemos hablar de un constructo unidimensional. Mientras que un test unidimensional es muy fiable, abarcando una gama muy limitada de contenidos. Por ello, se tomó un contenido más amplio, incluso cuando la fiabilidad podría ser menor.

El aporte de cada ítem a la consistencia interna del cuestionario se ha medido con la correlación corregida entre el ítem y la puntuación total del cuestionario (Tabla 5.7.3). Observamos que todas las correlaciones son positivas y la mayoría cercanas o pasan el valor 0,5, indicando un constructo subyacente que interpretamos como comprensión gráfica en los estudiantes. Esta correlación es un nuevo índice de discriminación que confirma de nuevo el poder discriminante de los ítems y del cuestionario en su conjunto.

Por otro lado la variación del *coeficiente Alfa* es mínima cuando se calcula al omitir cada ítem, de lo que se deduce el interés de mantener el cuestionario completo.

Tabla 5.7.3. *Análisis de fiabilidad del instrumento*

Indicador	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
IND1	5,4217	2,593	,490	,748
IND2	5,5414	2,652	,332	,769
IND3	5,5467	2,601	,377	,763
IND4	5,0529	2,876	,297	,769
IND5	5,4005	2,833	,369	,763
IND6	5,2137	2,786	,457	,756
IND7	5,5349	2,488	,555	,739
IND8	5,4687	2,499	,476	,749
IND9	5,3833	2,486	,451	,754
IND10	5,5372	2,606	,483	,749
IND11	5,5599	2,656	,447	,753

5.8. DIFERENCIAS ENTRE GRUPOS

Puesto que la muestra está constituida por dos niveles educativos diferentes, en esta sección realizamos un análisis de la diferencias en puntuaciones globales y en cada uno de los ítems entre los dos grupos. Recordamos que se trata de estudiantes de 6º curso, en el que está previsto finalice la Educación Primaria en el nuevo currículo y 7º curso. Este último grupo se ha incluido para analizar si los conocimientos que tienen en 6º curso se mantienen o hay un efecto del olvido.

En primer lugar, presentamos en la Figura 5.8.1 los histogramas de la puntuación total en el cuestionario en cada uno de los dos grupos de estudiantes. En ambos grupos la moda se sitúa alrededor del valor 40, aunque en 6º curso hay más estudiantes en el intervalo modal. El rango de variación de la puntuación total es muy similar.

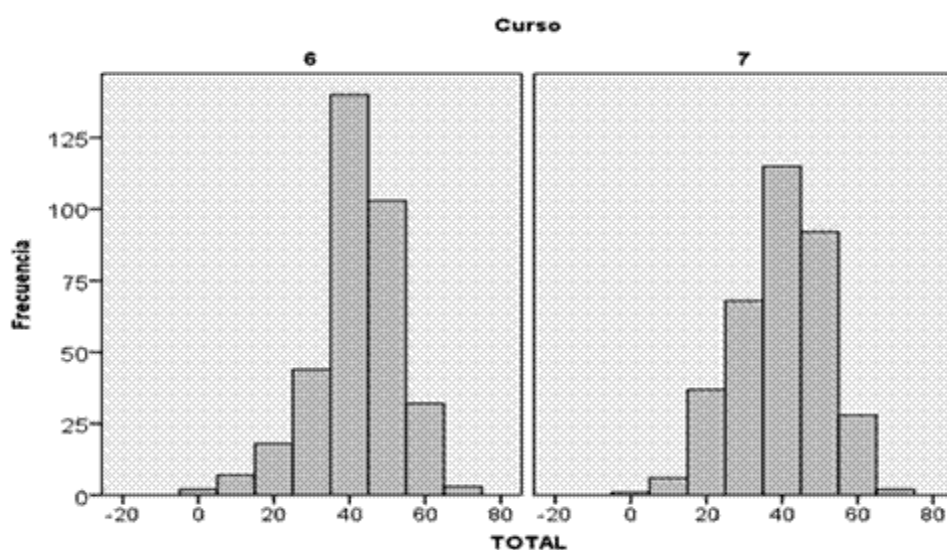


Figura 5.8.1. Distribución de la puntuación total en los dos grupos

A este mismo resultado se llega al comparar los gráficos de la caja en ambas distribuciones (Figura 5.8.2) con medianas muy próximas, algo superior en 6º curso, que es también un poco más homogéneo. Observamos más casos atípicos de estudiantes con muy pocos conocimientos en el 6º curso, que es menos variable que la de 7º.

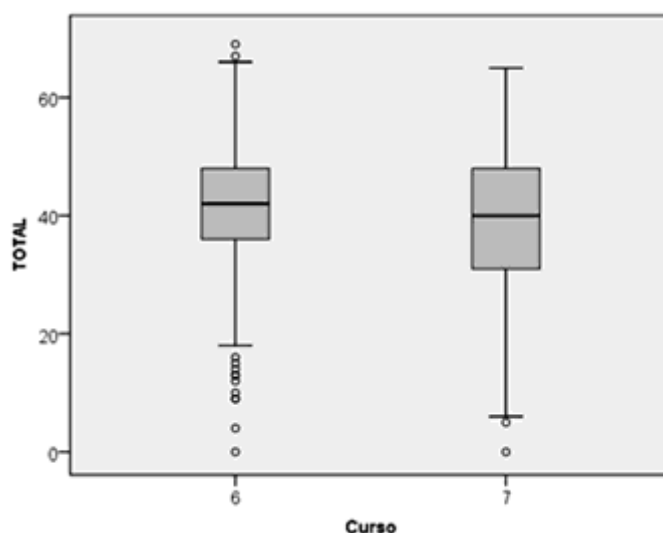


Figura 5.8.2. Gráficos de caja de la puntuación total en los dos grupos

Para analizar las diferencias de medias en los dos grupos, en la Tabla 5.8.1 se presentan los resultados del contraste de diferencia de medias entre los dos grupos (considerados como muestras independientes), tomando el caso de varianzas desiguales que es el más conservador (Nortes, 1991). La tabla también presenta para cada grupo la media y desviación típica, así como el error típico de la media.

Tabla 5.8.1. *Resultados de la comparación de las puntuaciones medias en los dos grupos*

	Curso	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media	Valor t	Valor p
P1	6	380	1,69	,797	,041	2,207	,027*
	7	365	1,55	,911	,048		
P2	6	380	3,25	2,218	,114	3,024	,003**
	7	365	2,73	2,450	,128		
P3	6	380	1,70	1,343	,069	,939	,402
	7	365	1,62	1,377	,072		
P4	6	380	4,58	,940	,048	,893	,372
	7	365	4,51	1,164	,061		
P5	6	380	6,86	2,394	,123	,991	,373
	7	365	6,70	2,475	,130		
P6	6	380	7,50	2,053	,105	,067	,947
	7	365	7,49	1,873	,098		
P7	6	380	1,26	,874	,045	,559	,557
	7	365	1,30	,987	,052		
P8	6	380	2,98	1,976	,101	,024	,981
	7	365	2,98	2,106	,110		
P9	6	349	6,49	3,270	,175	4,935	.000**
	7	349	5,17	3,797	,203		
P10	6	380	2,51	1,561	,080	-,741	,459
	7	365	2,60	1,826	,096		
P11	6	380	2,46	1,600	,082	,782	,435
	7	365	2,36	1,665	,087		
TOTAL	6	349	41,4756	10,77847	,57696	2,822	,003**
	7	349	39,0774	11,65881	,62408		

*: diferencia estadísticamente significativa; **: diferencia estadísticamente muy significativa

Encontramos muy pocas puntuaciones cuya diferencia son estadísticamente significativas. En primer lugar hay una diferencia en la puntuación total a favor del grupo de 6º curso, pero apenas representa dos puntos y medio sobre el valor medio (alrededor de 40). Además, encontramos diferencia significativa en el ítem 1 y muy significativa en los ítems 2 y 9. En el resto de los ítems no hay diferencias significativas, aunque la puntuación es generalmente un poco más alta en los estudiantes de 6º curso. Concluimos que hay un efecto de olvido, aunque pequeño, al transcurrir un año con un menor trabajo sobre gráficos. Pero la mayoría de las competencias se conservan pasado el año; sería necesario investigar si esta retención del aprendizaje se conserva a la larga.

5.9. CONFLICTOS SEMIÓTICOS DETECTADOS EN EL ESTUDIO DE EVALUACIÓN

Para finalizar el estudio de evaluación, en este apartado, describimos los conflictos semióticos observados en las respuestas parcialmente correctas e incorrectas de los estudiantes al cuestionario. Es decir, las interpretaciones de objetos o expresiones matemáticas que no están concordancia con las pretendidas por el profesor. Para

categorizarlos, nos basamos, en primer lugar, en los conflictos semióticos identificados en la construcción de gráficos el trabajo de Arteaga et al. (2016) con futuros profesores de Educación Primaria. Además, completamos su lista con otros que hemos identificado en las respuestas de los estudiantes de la muestra. A continuación los describimos, señalando los ítems en los que se han observado.

1. *Conflictos relacionados con las convenciones de construcción de los gráficos o tablas.* Sucede cuando los estudiantes no interpretan correctamente los convenios de construcción de cierta representación. En esta categoría hemos encontrado el siguiente conflictos:
 - *Interpretación errónea de la regla consistente en representar todos los valores de los datos* entendiendo que hay que incluir en el eje X sólo los valores de la variable cuya frecuencia es no nula (ítem 7). Este conflicto se produce cuando el estudiante omite al realizar el gráfico los valores de frecuencia nula. Dicha omisión también fue descrita por Arteaga et al. (2016) y Bruno y Espinel (2005).
 - *Ausencia o error en la asignación de rótulos.* Consideramos que existe un conflicto, también detectado por Arteaga et al. (2016), pero no identificado como tal, cuando no se incluye el rótulo en el gráfico o en una tabla, pese a ser estos elementos importantes para comprender la información representada (Curcio, 1987), o bien si el rótulo no corresponde a la información representada. Ocurre en los ítems 1, 4 y 7.
 - *Elección de una escala muy amplia o que no permita representar todo el rango de la variable.* Esto se explicaría por no dominar el rol que cumple la escala en el gráfico. Es un conflicto poco frecuente, que aparece en los ítems 1 y 7 y fue considerado como un error por Arteaga et al. (2016) y Wu (2004).
 - *Confusión del gráfico barras con otro tipo de representación.* Aunque es minoritario, observamos que los estudiantes construyen pictogramas y gráficos de líneas (ítem 1), diagrama de tallo y hojas, puntos y tablas de frecuencias (ítem 7) cuando se les pide construir un gráfico de barras.
 - *Confusión entre tabla de frecuencias y otro tipo de tabla.* Aparece cuando se pide pasar de un gráfico de barras adosadas a una tabla de frecuencias doble (ítem 3). En esta actividad algunos estudiantes *construyen una tabla de recuento* y otros construyen una tabla de la *distribución marginal* (considera sólo los totales); por tanto estos estudiantes confunden estos tipos de tabla.
 - *Confusión entre tabla de frecuencias y gráfico.* En el ítem 3, algunos estudiantes construye un gráfico, y no una tabla de frecuencias doble. Observamos algunos casos en que construyen un gráfico de líneas simple, dobles o de barras adosadas y por tanto confunden estos gráficos con la tabla de frecuencias.
 - *Confusión del título y nombre del gráfico.* Si bien se observa en pocas respuestas de los estudiantes, algunos confunden el título con el nombre del gráfico, al preguntarles sobre el tipo de gráfico. Este conflicto lo observamos en el ítem 6, con un diagrama de líneas.
2. *Conflictos relacionados con la interpretación de la finalidad del gráfico.* Aunque, generalmente un gráfico estadístico puede usarse para diversos fines, también existen convenios por los que algunos gráficos son inadecuados en ciertas situaciones. En general, la adecuación del gráfico dependerá del tipo de variable

representada y el número de valores que toma. Los conflictos semióticos observados en este grupo son los siguientes:

- *Representación de un conjunto de datos, o una parte de ellos, y no una distribución de datos.* Es un conflicto está asociado a no reconocer la necesidad de agrupar los datos iguales y calcular las frecuencias en una distribución de datos. Esto se observa en el ítem 7, donde un grupo importante de estudiantes representa una barra por cada dato y no grafica las frecuencias. Este es un error describe Arteaga (2011).
 - *No percibir el efecto del cambio de escala en un gráfico.* En el ítem 8 algunos estudiantes no perciben el efecto que causa el cambio de escala en la representación de los mismos datos, o no comprenden qué escala es más conveniente según la situación en que se quiera se quiera usar el gráfico. En este ítem, se puede observar con mayor claridad los valores graficados con una escala de menor rango, pero esta propiedad no se percibe por algunos estudiantes.
 - *No se identifican las variables representadas.* Algunos estudiantes sólo identifican una de las dos variables representadas en el gráfico en la segunda pregunta del ítem 6, que presenta dos variables representadas en un diagrama de líneas.
3. *Conflictos relacionados con la interpretación de conceptos numéricos.* La mayoría de estos conflictos han sido detectados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores de Educación Primaria. En nuestro estudio hemos observamos los siguientes:
- *Fallo al poner en correspondencia la proporcionalidad aritmética y geométrica.* Lleva a producir escalas no proporcionales, representando distancias numéricas iguales mediante distancias diferentes. Este conflicto también en Arteaga et al. (2016), Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) con profesores de Educación Primaria en formación; y Cruz (2013) y Evangelista, Oliveira y Ribeiro (2014) con estudiantes de Educación Primaria. Tal conflicto aparece en el ítem 1 y 7.
 - *No establece la correspondencia entre frecuencias y porcentajes.* Aparece en el ítem 10, donde se debe identificar el gráfico de sectores (expresada en porcentajes) que representa la información que se proporciona en una tabla (expresada en frecuencias). En tal caso, muchos estudiantes no son capaces de identificar la relación existente entre las frecuencias y los porcentajes correspondientes.
 - *Conflicto sobre la interpretación de desigualdades.* Sucede en la segunda pregunta del ítem 9, donde se debe obtener el número de estudiantes que obtienen una calificación “mayor o igual” a 5. En esta actividad algunos estudiantes excluyeron a los estudiantes con calificación igual a 5,0; excluyen todas las calificaciones que tienen como parte entera igual a 5; considera sólo las calificaciones con número entero igual a 5.
4. *Conflictos relacionados con la interpretación de otros conceptos o propiedades.* Cuando los estudiantes confunden conceptos entre sí, los asocian a propiedades inexistentes o no reconocen sus propiedades:
- *Confusión entre variable continua y discreta.* Se observa cuando las barras que representan las frecuencias están unidas, como si representaran variables continuas (histograma), o cuando éstas presentan diferente ancho cuando deberían ser iguales.

Este conflicto se describe en los trabajos de Wu (2004) en estudiantes y Arteaga et al. (2016) y Bruno y Espinel (2005) en futuros profesores. Aparece en el ítem 1 y 7.

- *Confusión de variable y categorías o valores.* Sucede en el ítem 6, cuando menciona todos los valores o las categorías de una de las variables y no la variable en sí. En tal caso el estudiante presenta confusiones con la idea de variable.
- *Confusión entre valor de la variable y frecuencia,* detectado previamente por Wu (2004). No se discriminan estos conceptos, por lo que a veces se representa la frecuencia junto con la variable o se calcula la media de las frecuencias. Aparece en los ítems de construcción de gráficos (ítem 1 y 7).
- *Confusión entre frecuencia absoluta y fracción.* Aparece en el ítem 4, donde algunos estudiantes representan los medios iconos en notación fraccionaria, en lugar de calcular la frecuencia que les corresponde.
- *No se reconoce la media como un estimador de la cantidad desconocida* en el ítem 2 y 11. Esta propiedad fue descrita por Cobo (2003).
- *Confundir moda con intervalo modal o con un dato.* En el ítem 9, algunos estudiantes, indican un intervalo en el que se encuentra la moda o bien uno de los datos (por ejemplo, el máximo o el mínimo) y no el valor de la misma; atribuimos el problema a la dificultad en encontrar el valor exacto de la moda en un diagrama de tallo y hojas.
- *Confundir la moda del conjunto de datos con la moda de los dígitos del gráfico de tallo y hojas.* En el ítem 9, los estudiantes obtienen la moda de los dígitos que forman parte de las hojas del gráfico. En este conflicto se debe a que no se dominan los convenios para leer un diagrama de tallo y hojas.

Existen otros errores, que no hemos podido observar un eventual conflicto semiótico. Entre ellos, citamos los siguientes

- *Error en la lectura directa e inversa de un gráfico de líneas.* En las preguntas 3 y 4 del ítem 6 algunos estudiantes no dominan con claridad la lectura de un gráfico de líneas, ya que no leen en algunos datos (lectura directa, pregunta 3) o no leen todas las categorías que están asociadas a un mismo dato (lectura inversa, pregunta 4), incluso presentando errores.
- *Error al interpretar una correspondencia numérica en un pictograma.* En el ítem 4 y 5 algunos estudiantes leen la cantidad de iconos de una categoría de un pictograma, pero no consideran que estos tienen valores estadísticos diferentes a la unidad y han de ser multiplicados por este valor para obtener los valores correspondientes.

5.10. CONCLUSIONES

Finalizado el capítulo discutiendo los objetivos e hipótesis que se plantearon en la Sección 5.2. Recordamos que el principal objetivo fue *evaluar la comprensión que alcanzan los estudiantes chilenos de 6º y 7º curso sobre los gráficos estadísticos utilizando un cuestionario válido y fiable*, que corresponde al tercero de la tesis y se descompone en los objetivos que discutimos a continuación.

Discusión de los objetivos

O3.1. Seleccionar una muestra de estudiantes lo suficientemente amplia y representativa para que los resultados del estudio tengan suficiente fiabilidad y generalizabilidad.

Pensamos que este objetivo se ha cumplido sobradamente. La muestra participante estuvo formada por 745 estudiantes chilenos, de los cuales 380 cursaban el 6° y 365 el 7° de Educación Primaria. Además, proceden de diferentes centros educativos y regiones, por lo que la muestra es muy variada y tiene una gran representatividad al considerar estudiantes de diferentes contextos.

Además, se ha mostrado en la Sección 5.7 que se obtuvo un valor de 0,73 para el coeficiente de fiabilidad en la aplicación del cuestionario. En dicho apartado se argumentó que dicho valor es considerado suficiente, dada la amplitud de los contenidos considerados en el cuestionario (tipo de gráficos, actividades, niveles de lectura y niveles semióticos) y porque el valor se encuentra dentro de unos límites aceptables en cuestionarios que buscan evaluar el conocimiento sobre un determinado tema (Díaz, 2007). Esta alta fiabilidad es resultado de la construcción rigurosa del instrumento descrita en el Capítulo 4.

O3.2. Analizar los resultados obtenidos en cada uno de los ítems del cuestionario y la puntuación total alcanzada.

Este objetivo también se ha cumplido. Para cada uno de los ítems hemos analizado en forma detallada y clasificamos las respuestas dada por los estudiantes de acuerdo a su calidad. En primer lugar, se han diferenciado las respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrectas, teniendo en cuenta igualmente en algunos casos, las correctas, pero con pequeñas omisiones (por ejemplo en la Sección 5.5.3 se ha incluido la categoría *correcta, salvo omisión*). Las respuestas incorrectas y parcialmente correctas, a su vez se han analizado según el tipo de error detectado en las mismas.

En segundo lugar, hemos clasificado las respuestas de los estudiantes de acuerdo a los niveles de lectura de Curcio y colaboradores, para poder evaluar en cada ítem la distribución de niveles alcanzados por los estudiantes

Los análisis anteriores los hemos realizado a nivel general en el conjunto de la muestra y también se han comparado los resultados por curso, permitiendo estudiar las diferencias de respuestas en ambos grupos.

Finalmente, se realiza un análisis de las puntuaciones globales para proporcionar una medida global del conocimiento sobre gráficos estadísticos que logran los estudiantes en el conjunto de la muestra, haciendo también una comparación entre los cursos.

O3.3. Comprobar si el conocimiento adquirido por los estudiantes de 6° curso se mantiene un año después de acabado lo que será en el nuevo currículo la Educación Primaria (7° curso).

Para alcanzar este objetivo se llevaron a cabo, como hemos indicado el estudio de las respuestas, errores y niveles de lectura en cada ítem separado por curso. Esta comparación nos permitió observar que globalmente los resultados son algo mejores en el 6°, por lo que hay un ligero olvido de lo aprendido respecto a los gráficos en el curso

séptimo, donde el trabajo con gráficos es menos intenso. No obstante las diferencias son pequeñas y no fueron estadísticamente significativas. Respecto al estudio aislado de cada uno de los ítems, la mayoría de diferencias también favorecen al 6° curso, pero siguen sin ser estadísticamente significativas.

Estas diferencias a favor del grupo de 6° curso suponen un porcentaje de respuestas correctas (considerando desde las parcialmente correctas hasta las correctas, considerando las categorías intermedias, si corresponden) que varían entre el 0,5% en el ítem 11 (para indicar si una afirmación es correcta o no) y el 13,7% en el ítem 9 (que es la media de los resultados de dos actividades de lectura de un diagrama de tallo y hojas, y donde 15,5% es la diferencia entre ambos grupos en una de las preguntas). Otra diferencia porcentual importante vemos en el ítem 2, de predicción, en el que la diferencia es un 11,4% a favor de los estudiantes de 6° curso. Además, existe una diferencia a favor del 6° curso en los ítem 1 (6,9%), ítem 3(3,4%), ítem 4(2,7%), ítem 5 (en promedio 5,1%) e ítem 8 (4%).

Del mismo modo, los estudiantes de séptimo presentan ventajas en algunos ítems. En el ítem 6, sobre lectura de un diagrama de líneas, la ventaja es de un 0,4% (en promedio), en el ítem 7 de un 7% y en el ítem 10 de un 7,1%. Estas diferencias, al igual que en donde la ventaja lo tiene los estudiantes de 6° curso, puedes variar levemente si se consideran las respuestas incorrectas y no respondidas, así como los niveles de lectura.

03.4. Analizar las características psicométricas del cuestionario para finalizar el proceso de validación del mismo iniciado en el Capítulo 4.

Para cumplir este objetivo, ya que en el Capítulo 4 se describe la validación de contenidos del instrumento por medio de la creación de un banco de ítem, una selección preliminar, que se fundamenta en la importancia que se da en el currículo y los libros de texto de los diferentes gráficos (tipo, actividad, nivel de lectura y semiótico), y la validación de los ítems por juicio de expertos (10). Luego de estudiar la valoración (tipo Likert) y los comentarios de los expertos se procedió a realizar un pilotaje del instrumento, que permitió mejorar ciertos aspectos y obtener, finalmente, la versión final del instrumento.

En el Capítulo 5 hacemos un estudio de la se estudia la dificultad y discriminación de los ítems, así como la fiabilidad del cuestionario. En el caso de la dificultad, esta es adecuada, considera valores entre 0,4 y 0,91. Entre las actividades que han considerada más difíciles están la lectura crítica de un diagrama de puntos (ítem 11) y donde se debe traducir la información de un gráfico de barras dobles a una tabla con una dificultad de 0,41 (ítem 3). Del mismo, los ítems que han presentado mejores resultados tenemos aquel en que se pide pasar la información de un pictograma a una tabla (ítem 4) con 0,91, el segundo más fácil es aquel en que se pide la lectura literal de un diagrama de líneas (ítem 6) con un índice de dificultad de 0,75.

Al analizar el índice de discriminación, es decir, la capacidad de separación de los estudiantes en función a su conocimiento, vemos que la diferencia media del indicador (puntuación de la calidad de la respuesta y el nivel de lectura alcanzado) indica una discriminación muy fuerte entre los quienes tienen o no conocimiento sobre las actividades planteadas y los tipos de gráficos estadísticos.

Finalmente, y como indicado en el Objetivo 1, el instrumento alcanzó un coeficiente de fiabilidad 0,73, lo que se considera adecuado.

Discusión de las hipótesis

H1. Esperamos que los estudiantes presenten dificultades de lectura de los gráficos estadísticos.

Esta hipótesis se cumple, pues los estudiantes de la muestra cometen diferentes errores en la lectura de gráficos estadísticos, en todas las actividades. Si consideramos sólo aquellas actividades en las que se pide una lectura (ver Tabla 5.7.1), vemos que las de nivel 1 y 2 son respondidas con facilidad por los estudiantes (con excepción de identificar variables en un diagrama de líneas). En el caso que se exija un nivel de lectura superior (3 y 4), no se llega a alcanzar, sino que el nivel 2 es el más frecuente, es decir, aquel que implica el desarrollo de ciertos procedimientos matemáticos sencillos. Estos resultados coinciden con las investigaciones previas (e.g., Cruz, 2013; Evangelista, 2013; Fernández y Morais, 2011), donde se evidencia que las actividades de niveles superiores son más complejas y son pocos los niños que las abordan con éxito.

H2. Asimismo esperamos encontrar dificultades en la construcción de gráficos o en la traducción entre gráficos y de gráfico a tabla.

Esta hipótesis se confirma, ya que los estudiantes cometen diferentes errores en las actividades de construcción de gráficos estadísticos (barras) y las de traducir (pasar la información de un gráfico a tabla). En las dos actividades de construcción (ítem 1 y 7) encontramos errores en la asignación de títulos, rótulos en los ejes, escalas no proporcionales, barras con diferente ancho o separación, omisión de algunos valores/frecuencias, escala que no alcanza a cubrir el rango de los datos o frecuencias, confundir categoría con valor, así como realizar construcciones sin sentido. La mayoría de estos errores ya fueron observados en investigaciones previas (e.g., Arteaga et al. 2016; Bruno y Espinel, 2005; Cruz, 2013; Fernández et al., 2011; Wu, 2004).

La construcción que presentó mayores dificultades fue aquella en la que se daban los datos sin agrupar (ítem 7), mientras que cuando se dan los datos en una tabla (ítem 1) el nivel de éxito alcanza el 75% de los estudiantes. Además, en el ítem 7 se pudo observar que muchos estudiantes no llegan a formar la distribución, representado los datos uno a uno; este error fue observado por Arteaga et al. (2016) y Martins y Carvalho (2017).

Respecto a la traducción de la representación de los datos, es decir, el paso de la información de un gráfico (barras adosadas y pictograma) a una tabla vemos diferentes errores que cometen los estudiantes, dependiendo si se da o no la estructura de la tabla. Si se da la estructura de la tabla, los errores están asociados a la lectura de iconos, considerar que cada icono es igual a una unidad estadística, contabilizar más o menos iconos, cometer error al calcular la equivalencia de los iconos, o errores al obtener el total (calcularlo mal o no hacerlo). En el caso que la tabla debe construirla completamente el estudiante vemos ausencia de títulos, realizar una otra tabla (conteo o distribución marginal) y no de frecuencias, errores en la lectura de los iconos o construir un gráfico.

Para los estudiantes es más fácil construir la tabla cuando la estructura ya está dada (solo debe completar con los datos), que cuando debe hacer todo (estructura y luego completar datos). En el primer caso el éxito es superior al 80%, mientras que en el segundo este no sobrepasa el 60%.

H3. Esperamos obtener unas buenas características psicométricas del cuestionario.

Esta hipótesis se cumple, ya que, como mencionamos recientemente, el instrumento se ha diseñado y validado siguiendo una rigurosa metodología y se ha justificado al discutir los objetivos las evidencias de validez y de fiabilidad del instrumento.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">6.1. Introducción6.2. Conclusión sobre los objetivos generales6.3. Principales aportaciones6.4. Limitaciones del estudio6.5. Futuras líneas de investigación |
|--|

6.1. INTRODUCCIÓN

En este último capítulo exponemos las conclusiones de nuestra investigación, para valorar lo alcanzado en la misma y resaltar las aportaciones originales. En primer lugar, discutimos las conclusiones que hemos alcanzado respecto a cada uno de los objetivos generales que expusimos en el Capítulo 1, sin entrar en detalles de los objetivos e hipótesis en cada uno de los tres estudios empíricos llevados a cabo, puesto ellos han sido suficientemente discutidos en los correspondientes capítulos.

Seguidamente, hacemos un análisis de las principales aportaciones de esta tesis, respecto a la investigación en Didáctica de la Matemática, algunas de las cuales se han reflejado en diferentes publicaciones realizadas en revistas y congresos del área de conocimiento. Igualmente, exponemos los resultados que podrían utilizarse en la enseñanza de los gráficos estadísticos a los estudiantes de Educación Primaria y en la formación de profesores de este nivel educativo.

Puesto que todo estudio empírico es necesariamente limitado en su extensión, muestra y objetivos, a continuación, exponemos las limitaciones de la investigación. Dichas limitaciones originan nuevas cuestiones para continuar el trabajo y extender sus conclusiones, por lo que, finalmente, indicamos las posibles futuras líneas que pueden continuar el trabajo expuesto en esta memoria.

6.2. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS GENERALES

Como se expuso en el Capítulo 1, en nuestro trabajo intentamos alcanzar dos objetivos generales, en cada uno de los cuales pretendíamos aportar información original, con respecto a las investigaciones previas. Estos objetivos fueron los siguientes:

Objetivo 1. Realizar un análisis detallado de la presentación de los gráficos estadísticos en los libros de texto chilenos de Educación Primaria, con la finalidad de caracterizar el significado institucional de referencia en nuestro trabajo.

Este objetivo se incluyó ya que en Chile los estudios sobre gráficos estadísticos y, más aún, que abordasen la presentación de estos en los libros de texto de Educación Primaria, eran inexistentes al momento de formularlo. Se pensaba, también, que el objetivo tenía interés en sí mismo, para conocer la forma en que la enseñanza de los gráficos se implementa en los mismos y para facilitar los resultados del análisis a los profesores y autoridades educativas. Además, este análisis, junto con el estudio de las directrices curriculares correspondientes incluido en el Capítulo 1, fue la base para establecer un significado institucional de referencia de los gráficos estadísticos en la Enseñanza Primaria en Chile, que se utilizará en la segunda etapa de nuestra investigación en la que se diseñó y validó un cuestionario para evaluar su comprensión por parte de los estudiantes.

Para cumplir con este objetivo, se ha completado el análisis iniciado en nuestro Trabajo Fin de Máster (Díaz-Levicoy, 2014), ampliando la muestra utilizada en el mismo (que constaba únicamente de libros españoles) y analizando las mismas variables en textos chilenos. En consecuencia, hemos llevado a cabo el estudio de la presentación de los gráficos estadísticos en las directrices curriculares y su implementación en 36 libros de texto de España y Chile (18 libros de texto por país y considerando tres series completas de 1º a 6º curso en cada uno de ellos). Esto nos permitió caracterizar el trabajo que se espera de los estudiantes sobre estas representaciones gráficas en los seis primeros cursos de Educación Primaria en ambos países.

En los textos analizados se identificaron un total de 723 actividades (215 en los textos españoles y 508 en los chilenos) en las que los estudiantes deben trabajar con gráficos, distribuyéndose mayoritariamente entre los cursos 3º, 5º y 6º. Las actividades más frecuentes varían dependiendo del país; por ejemplo, en los libros españoles lo más frecuente es pedir leer información del gráfico, mientras que en los chilenos se pide realizar cálculos a partir de los datos del gráfico. Entre las similitudes en los dos países destacan un predominio de los gráficos de barras, el nivel de lectura elemental de los mismos (niveles 1 de *leer los datos* y 2 de *leer dentro de los datos*, en la terminología de Curcio, 1989) y la complejidad semiótica de nivel 3 en el gráfico (representación de una distribución de datos en un gráfico estadístico) según Arteaga (2011).

En resumen, los resultados del estudio de los libros de texto, detallado en el Capítulo 3, nos lleva a afirmar que este objetivo se ha cumplido. Este análisis ha permitido caracterizar la manera en que se sugiere enfrentar la enseñanza de los gráficos en cada nivel educativo en Chile y su comparación con la situación en España, desde el tipo de gráfico que se trabaja, la tarea pedida, el nivel de lectura y la complejidad semiótica del gráfico. Todos estos puntos influyen en la demanda cognitiva de la tarea, así como los objetos matemáticos que intervienen en su construcción y que el estudiante debe conocer.

Objetivo 2. Construir un instrumento para evaluar la comprensión de los gráficos estadísticos de los estudiantes chilenos al finalizar su Educación Primaria, siguiendo unos criterios metodológicos rigurosos.

Este objetivo se justificó por la inexistencia de un instrumento que permitiera abordar con éxito el Objetivo 3 y se considera cumplido. Debido a que se deseaba evaluar la comprensión que tienen los escolares de los últimos años de Educación Primaria chilenos, de los gráficos estadísticos y las actividades que en esta etapa deben completar, y de acuerdo a los resultados del estudio del currículo y libros de texto, se abordó la construcción de un instrumento que cumpliera con las características del

estudio que se deseaba realizar. La decisión se tomó al constatar que en la revisión de las investigaciones previas no existía un instrumento con las características deseadas. Aunque se han encontrado investigaciones con estudiantes de edades similares, generalmente se centran en un sólo gráfico o unos pocos tipos y apenas se estudia el nivel de lectura que los estudiantes alcanzan. Además, ninguno aborda en un solo instrumento todos los gráficos considerados en el currículo chileno.

Por ello, se inició el diseño de un cuestionario, que se describe en el Capítulo 4. En la construcción de dicho instrumento se comenzó con la definición semántica del mismo, donde hemos considerado los resultados de nuestro estudio de libros de texto y de revisión de la literatura. Es decir, los diferentes tipos de gráfico considerados, niveles de lectura y de complejidad semiótica, así como tipos de actividades. Fijado dicho contenido, se comenzó la construcción de un banco de ítems, mediante una pre-selección de tareas tomadas de libros de texto o de investigaciones previas que fueron adaptadas a nuestras necesidades. Para elegir los ítems definitivos se llevó a cabo a su evaluación por juicio de expertos y su pilotaje en un grupo reducido de estudiantes. Todo este proceso asegura una adecuada validez de contenido del instrumento. Además, se ha aportado información sobre su fiabilidad, así como sobre la dificultad y discriminación de los ítems que lo componen.

Objetivo 3. Evaluar la comprensión que alcanzan los estudiantes chilenos de 6° y 7° curso sobre los gráficos estadísticos utilizando un cuestionario válido y fiable.

La importancia de este objetivo se justificó por la ausencia de investigaciones sobre la comprensión gráfica de los estudiantes chilenos de Educación Primaria. Además, el estado de la cuestión analizado en el Capítulo 2 ha dejado patente que, aunque existen en otros países estudios de aspectos aislados de la comprensión gráfica de estos estudiantes, no hemos encontrado un estudio de tipo global como el que hemos aportado en el Capítulo 5. En consecuencia, nuestro estudio proporciona una amplia gama de información original, en relación con las investigaciones previas.

Este objetivo, que es el central de este estudio, lo consideramos cumplido. En el Capítulo 5 se analizan con detalle las respuestas a los diferentes ítems que componen el instrumento construido para esta investigación y aplicado a una muestra amplia de 745 estudiantes de 6° y 7° cursos de Educación Primaria en Chile. Considerando que participan en la muestra estudiantes de varias ciudades de Chile y centros educativos y el tamaño de la muestra, la podemos considerar altamente representativa de la realidad escolar. Además, como se comenta en el Objetivo 2, el cuestionario aplicado presenta una alta validez para el fin pretendido y una fiabilidad adecuada para medir la comprensión sobre gráficos estadísticos.

Dichos resultados han aportado información sobre la dificultad relativa de las diferentes tareas, el nivel medio de lectura alcanzado en cada una de ellas, los errores más frecuentes en la construcción y lectura de gráficos y las diferencias entre los dos cursos comparados. Igualmente se ha proporcionado una medida global de la comprensión gráfica de los estudiantes participantes, mediante el análisis de la puntuación total en el cuestionario y una clasificación de los conflictos semióticos identificados.

6.3. PRINCIPALES APORTACIONES

Al analizar los resultados de la tesis vemos con claridad diferentes aportes realizados, que en su mayoría se respaldan mediante publicaciones en revistas del área. En lo que sigue detallamos las principales contribuciones y su eventual ámbito de impacto:

- *Análisis de las directrices curriculares de Educación Primaria sobre gráficos estadísticos.* Conocer qué se espera que los estudiantes aprendan durante la Educación Primaria sobre un tema es fundamental, ya que esto condiciona el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y en particular de los gráficos estadísticos. Por este motivo se ha llevado a cabo un estudio detallado de las directrices curriculares españolas y chilenas, comparándolas con los estándares americanos (NCTM, 2000) y el proyecto GAISE (Franklin et al., 2005). Estos aportes se pueden observar en el Trabajo Fin de Máster que antecede a esta tesis (Díaz-Levicoy, 2014), que se amplía en el Capítulo 1 de esta memoria.
- *Estudio de los gráficos estadísticos en libros de texto.* Consideramos que este punto es un aporte importante en diferentes ámbitos. En primer lugar, contribuye al desarrollo de la Educación Estadística en Chile, al proporcionar resultados novedosos que pueden ser utilizados para ser usados en réplicas de estudios en otros contextos y niveles, y que pueden ampliarse utilizando otras variables. En segundo lugar, los resultados pueden ser de utilidad en la formación de profesores, quienes deben conocer y saber desarrollar como mínimo las actividades que aparecen en los libros de texto. En tercer lugar, amplía la caracterización de las actividades sobre gráficos estadísticos de Arteaga (2011), que puede ser de utilidad para los profesores en activo, quienes las adaptan a sus objetivos de aprendizaje y las necesidades de sus estudiantes. Finalmente, entrega resultados que pueden ayudar a los autores y editores de libros de texto, para incluir aquellas actividades que son poco frecuentes y potenciar los aspectos que se han encontrado débiles (e.g., mayor énfasis a la actividad de invención de problemas). Las contribuciones están descritas en el Capítulo 3, y de ellas se han derivado publicaciones sobre textos españoles (Batanero et al., 2014; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2015), textos chilenos (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015), y un estudio comparativo (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2016). Además, se ha analizado la idoneidad didáctica de la presentación de los gráficos estadísticos en los libros de texto.
- *Una tercera aportación es el cuestionario que se ha construido para evaluar la comprensión sobre gráficos estadísticos.* Consideramos que dicho cuestionario constituye un aporte principalmente para la comunidad científica, debido a la inexistencia de instrumentos similares y al método riguroso que se ha seguido en su construcción. Dicho cuestionario puede ser utilizado en nuevas investigaciones con estudiantes de edades parecidas en diferentes contextos geográficos para llevar a cabo estudios comparativos. Sería también posible adaptarlo y aplicarlo a otros estudiantes de edades diferentes, incluso en profesores en formación o en activo. Por otro lado, el cuestionario completo o parte de los ítems que lo componen pueden ser utilizados por los profesores con fines de evaluación.
- *Caracterización del nivel de logro que alcanzan y de las dificultades y los errores que tienen los estudiantes al finalizar la Educación Primaria al trabajar con gráficos estadísticos.* Hemos proporcionado un estudio detallado del porcentaje de estudiantes que alcanzan los diferentes niveles de lectura para distintos gráficos y

actividades. Además, mediante un análisis detallado de los tipos de respuestas, se ha proporcionado información sobre el índice de dificultad de cada tarea. Las respuestas incorrectas han permitido, para la mayoría de los ítems, identificar los errores y conflictos semióticos más comunes de los estudiantes. Estos resultados en su mayoría son originales y por tanto contribuyen al desarrollo de la Educación Estadística. Además, pueden ser usados por los profesores para prever las posibles dificultades de sus estudiantes y la manera de ayudarles a superarlas. Por último, son útiles en la formación de profesores, a los que se puede proponer el análisis de las dificultades que presentan los estudiantes al desarrollar ciertas actividades y la búsqueda de actividades que permitan superarlas. Estos resultados se detallan en el Capítulo 5 y se han publicado parcialmente en Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero (2017) y Batanero, Díaz-Levicoy y Arteaga (en prensa).

- *Revisión de los estudios sobre gráficos estadísticos en la formación obligatoria.* Una última aportación es la síntesis realizada de los antecedentes, que completa y actualiza la desarrollada por Arteaga (2011) y otros trabajos de dicho autor. Para el desarrollo de cualquier estudio es necesario indagar sobre los trabajos que se han realizado sobre el tema, para tener un panorama sobre los resultados. En nuestro caso, y como vemos en el Capítulo 2, las investigaciones sobre gráficos estadísticos con estudiantes de Educación Primaria son escasos. Sobre este aspecto se contribuye con el artículo Arteaga, Díaz-Levicoy y Batanero (2018).

En resumen, consideramos que la tesis en general presenta diferentes aportes para los actores del proceso de investigación y de instrucción.

6.4. LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Pese a los diferentes aportes que se realizan en esta tesis, creemos que nuestro estudio presenta, como cualquier investigación, ciertas limitaciones. Por ejemplo, respecto al estudio sobre libros de texto, creemos que una restricción es la cantidad de series de libros considerados en tal estudio, con lo que ampliando dichas series podría obtenerse una mejor caracterización del trabajo con gráficos estadísticos. Del mismo modo, creemos que se podrían analizar más variables en cada sección que aparece un gráfico estadístico, entre ellas: el contexto, considerado en el trabajo de Jiménez-Castro (2017) en un estudio de textos de Costa Rica, ya que es un aspecto considerado en diversas evaluaciones de carácter nacional o internacional. Igualmente, sería posible continuar el estudio con textos de Educación Secundaria o en otros países.

Respecto al instrumento diseñado y validado, pensamos que presenta ciertos inconvenientes, debido sobre todo a la extensión del instrumento y a la variedad de actividades plateadas. Por ejemplo, sólo hemos estudiado la construcción de gráficos de barras (elegido por ser el de mayor frecuencia en los libros de texto), y sería de interés ver cómo responden frente a la elaboración de otros gráficos, por ejemplo, pictogramas o gráficos de sectores. De este mismo instrumento, se pudo plantear una actividad en que los propios estudiantes podrían elegir el gráfico a construir, para ver si son capaces de escoger uno que sea adecuado a la naturaleza de los datos, aunque esto podría representar una dificultad y podría perjudicar el nivel de éxito.

Respecto del análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario, pese a caracterizar de buena forma el conocimiento que tienen los estudiantes de 6º y 7º de Educación Primaria sobre gráficos estadísticos, creemos que una limitación es la

proximidad de los niveles educativos considerados, ya que en general no se observan diferencias significativas. Por ello, consideramos, que en próximos estudios es recomendable tomar cursos posteriores, para analizar si existe olvido del conocimiento sobre gráficos al transcurrir más tiempo. Igualmente, sería posible comparar con estudiantes más jóvenes para ver la evolución de la comprensión gráfica a lo largo de diferentes edades.

6.5. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En el apartado anterior, junto con la identificación de limitaciones, ya se han hecho algunas sugerencias para continuar el trabajo realizado en la presente tesis; por ejemplo, analizando la construcción de otros tipos de gráfico, estudiando libros de otros niveles educativos o comparando las respuestas con las de otros estudiantes de mayor y menor edad a las elegidas para el estudio.

Creemos que otra futura línea es estudiar la comprensión de gráficos estadísticos en profesores en formación, porque es un tema que deben enseñar. Se seguiría de este modo el trabajo de Arteaga (2011), con otros profesores o bien proponiéndoles actividades diferentes a las sugeridas por dicho autor. Sería también importante realizar algunas investigaciones sobre el conocimiento didáctico-matemático de los profesores en activo respecto al tema, porque al tratarse de un tema de incorporación reciente en el currículo no era obligatoria su enseñanza en la formación inicial.

Otro posible campo de estudio es el uso y la comprensión de los gráficos estadísticos en el campo de las ciencias naturales y sociales, en los que son usados con frecuencia para representar información de diferentes situaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albuquerque, R. G. C. (2010). *Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos*. Tesis de Máster. Universidad Federal de Pernambuco.
- Alsina, A. (2017). La estadística y la probabilidad en educación infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas específicas*, 7, 4-22.
- Aoyama, K. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective, *Mathematics Education Research Journal* 15(3), 3-22.
- APA, AERA y NCME (1999). *Standards for educational and psychological testing*. Washington, DC: Autores.
- Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Arteaga, P. y Batanero, C. (2011). Relating graph semiotic complexity to graph comprehension in statistical graphs produced by prospective teachers. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 368-377). Rzeszów: ERME.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, 76, 55-67.
- Arteaga, P., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. *Indivisa*, 12, 123-135.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2012). Understanding statistical graphs: a research survey. *BEIO*, 28(3), 261-277.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *RELIME*, 19(1), 15-40.
- Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. M. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *UNIÓN*, 18, 93-104.
- Arteaga, P., Díaz-Levicoy, D. y Batanero, C. (2018). Investigaciones sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria: revisión de la literatura. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 18(1), 1-12.

- Ávila, J., Fuenzalida, C., Jiménez, M. y Ramírez, P. (2013). *Matemática 5º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.
- Barbero, M. I. (2002). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED.
- Barbero, M. I., Vila, E. y Suárez, J. C. (2003). *Psicometría*. Madrid: UNED.
- Barraza, M. A. (2007) La consulta a expertos como estrategia para la recolección de evidencias de validez basado en el contenido. *Investigación Educativa Duranguense*, 2(7), 5-14.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS. En A. Contreras, L. Ordóñez, y C. Batanero (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 13-36). Jaén: Universidad de Jaén.
- Batanero, C., Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (en prensa). Evaluación del nivel de lectura y la traducción de pictogramas por estudiantes chilenos de Educación Básica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*.
- Batanero, C., Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Gea, M.M. (2014). Sentido de los gráficos estadísticos en los libros de texto de Educación Primaria. En F. España (Ed.), *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 245-254). Baeza: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Batarce, Y., Cáceres, B. y Kükenshöner, C. (2013). *Matemática 4º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.
- Ben-Zvi, D. y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics* (pp. 54-64). Voorburgo: International Statistical Institute.
- Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: PPU.
- Bivar, D. y Selva, A. (2011). *Analisando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros didáticos de matemática*. En R. Borba, C. Monteiro y A. Ruiz (Eds.), *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-12). Recife: Universidad Federal de Pernambuco.
- Braga, G. y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218.
- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un

estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas*, VII, 57-85.

- Carvalho, L. M., Campos, T. y Monteiro, C. (2011). Aspectos visuais e conceituais nas interpretações de gráficos de linhas por estudantes. *BOLEMA*, 24(40), 679-700.
- Castellanos, M. (2013). *Tablas y gráficos estadísticos en pruebas SABER-Colombia*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Castiello, J. M. (2002). *Los desafíos de la educación intercultural: migraciones y currículum*. Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.
- Cavalcanti, M. R., Natrielli, K. R. y Guimarães, G. (2010). Gráficos na mídia impressa. *BOLEMA*, 23(36), 733-751.
- Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J., Crown, W., Van de Walle, J. (2014). *Matemática 3º Educación Básica. Texto del estudiante*. Santiago: Pearson.
- CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: NGA Center y CCSSO
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Cleveland, W. S. y McGill, R. (1984). Graphical perception: theory, experimentation and application to the development of graphical methods. *Journal of the American Statistical Association*, 79(387), 531-554.
- Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (2007). *Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria Obligatoria en Andalucía*. Sevilla: Autor.
- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *RELIME*, 10(1), 7-38.
- Cruz, A. (2013). *Erros e dificuldades de alunos de 1.º ciclo na representação de dados estatísticos*. Tesis de Máster. Universidad de Lisboa.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.
- del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo*, 49(1), 53-64.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Díaz-Levicoy, D. (2014). *Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2014). Análisis de gráficos estadísticos en textos

escolares de séptimo básico en Chile. *Diálogos Educativos*, 14(28), 21-40.

- Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2017a). Chilean primary school student's levels in reading pictograms. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 740-747). Dublin: DCU Institute of Education and ERME.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2015). Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española. *UNION*, 44, 90-112.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M.M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: Un estudio comparativo entre Chile y Chile. *BOLEMA*, 30(55), 713-737.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. Arteaga, P. y López-Martín M. M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(4), 715-739.
- Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P. (2017). Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de Educación Primaria. *Profesorado*, 21(2), 299-326.
- Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B., López-Martín, M. M. y Piñeiro, J. L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de Educación Primaria española. *Profesorado*, 20(1), 133-156
- Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F. (2018). Gráficos estadísticos en libros de texto de matemática de Educación Primaria en Perú. *BOLEMA*, en prensa.
- Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición*, 6(1), 27-36.
- Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias Pedagógicas*, 14, 169-180.
- Escorcia, O. (2010). *Manual para la investigación: guía para la formulación, desarrollo y divulgación de proyectos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 99-119). Tenerife: SEIEM.
- Espinel, C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE.
- Eudave, D. (2009) Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación Matemática*, 21(2), 5-37.
- Evangelista, B. (2013). Atividades de interpretação de gráficos de barras e linhas: o que

sabem os alunos do 5º ano? En J.M. Contreras, G.R. Cañadas, M.M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 121-128). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

- Evangelista, B. (2014). *Aprendendo a representar escalas em gráficos: um estudo de intervenção*. Tesis de Máster. Universidad Federal de Pernambuco.
- Evangelista, B. y Guimarães, G. (2013). O conceito de escala em livros didáticos de matemática do 4º e 5º ano do ensino fundamental. En C. R. Ferreira (Ed.), *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-14). Curitiba: SBEM.
- Evangelista, B. y Guimarães, G. (2015). Escalas representadas em gráficos: um estudo de intervenção com alunos do 5º ano. *Revista Portuguesa de Educação*, 28(1), 117-138.
- Evangelista, B., Oliveira, F. S. y Ribeiro, P. M. (2014). Analisando a construção de gráficos de alunos do 5º ano do ensino fundamental. En CONEDU (Ed.), *Anais I Congresso Nacional de Educação* (pp. 1-5). Campina Grande: Realize.
- Fernandes, J. A. y Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 95-115.
- Fernandes, J. A., Morais, P. C. y Lacaz, T. V. S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. En R. Borba, C. Monteiro y A. Ruiz (Eds.), *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-13). Recife: Universidad Federal de Pernambuco.
- Fernández, E. y Mejía, M. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. En G. García (Ed.), *Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 61-68). Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.
- Ferreira, A. y Mayorga, L. (2010). Propuesta para la evaluación de libros de matemática de todos los niveles educativos. *Revista Ciencias de la Educación*, 20(35), 15-28.
- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 3-9.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K- 12 curriculum framework*. Alexandria, VA: ASA.
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gerber, R., Boulton-Lewis, G. y Bruce, C. (1995). Children's understanding of graphic representation of quantitative data. *Learning and Instruction*, 5, 70-100.
- Gitirana, J., Guerra, S. y Selva, A. (2005). *Professores construindo e interpretando*

gráficos de barras: um estudo exploratório. Trabajo Fin de Grado. Universidad Federal de Pernambuco.

- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 11*, 111-132.
- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp.1-20). Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa*, 7(2), 331-354.
- Guimarães, G. (2002). *Interpretando e construyendo gráficos de barras*. Tesis doctoral. Universidad Federal de Pernambuco.
- Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Jiménez-Castro, M. (2017). *Los gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto de Educación Primaria en Costa Rica*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Jungkenn, M. y del Pino, J. C. (2009). Analizando a capacidade de estudantes

concluintes do Ensino Fundamental de interpretar informações de gráficos e tabelas. En E. F. Mortimer (Ed.), *Atas VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências* (pp. 1-12). Belo Horizonte: ABRAPEC.

- Kline, P. (2013). *Handbook of psychological testing*. Londres: Routledge.
- Kosslyn, S. M. (1985). Graphics and human information processing. *Journal of the American Statistical Association*, 80(391), 499-512.
- Lemos, M. (2006). O estudo do tratamento da informação nos livros didáticos das séries iniciais do Ensino Fundamental. *Ciência e Educação*, 12(2), 171-184.
- León, O. G. y Montero, I. (2002). *Métodos de investigación en psicología y educación*. Madrid: McGraw-Hill.
- Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics* 14(1), 2-8.
- Losada, J. L. y López-Feal, R. (2003). *Métodos de investigación en ciencias humanas y sociales*. Madrid: Thompson.
- Martínez-Arias, R. (1995). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos*. Madrid: Síntesis.
- Martins, M. N. y Carvalho, C. F. (2017). Gráficos estatísticos e complexidade semiótica: um estudo com professores do ensino fundamental. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-10). Granada: Universidad de Granada.
- McDonald, R. P. (2013). *Test theory: A unified treatment*. Sussex, UK: Psychology Press.
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- Méndez, M. y Ortiz, M. (2012). *Construcción y lectura de gráficos y tablas estadísticas en tesis de la licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional*. Tesis de Licenciatura. Universidad Pedagógica Nacional Ajusco.
- Menezes, M. D. y Carvalho, L. M. T. L. (2010). *Atividades sobre gráficos em livros didáticos de matemática do ensino fundamental*. Tesis de Grado. Universidad Federal de Pernambuco, Brasil.
- Messick, S. (1998). Test validity: a matter of consequence. *Social Indicators Research*, 45, 35-44.
- Millman, J. y Greene, J. (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335-366). London: Macmillan.
- MINEDUC (2009). *Ley General de Educación (Ley 20370)*. Valparaíso: Congreso Nacional de Chile

- MINEDUC (2012). *Matemática Educación Básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2013a). *Bases curriculares Matemática 7° y 8° básico - 1° y 2° medio*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2013b). *Matemática. Programa de estudio primer año básico*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2013c). *Matemática. Programa de estudio segundo año básico*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2013d). *Matemática. Programa de estudio tercer año básico*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2013e). *Matemática. Programa de estudio cuarto año básico*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2013f). *Matemática. Programa de estudio quinto año básico*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2013g). *Matemática. Programa de estudio sexto año básico*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Mingorance, C. (2014). *La estadística en las pruebas de diagnóstico andaluzas*. Trabajo Fin de Grado. Universidad de Granada.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2006). Student teachers interpreting media graphs. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Salvador de Bahía: ISI e IASE.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 188-207.
- Muñiz, J. (2017). *Teoría clásica de los tests* (2. Ed). Madrid: Pirámide.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Nortes, A. (1991). *Estadística teórica y aplicada*. Barcelona: PPU.
- Osterlind, S. J. (1989). *Constructing test items*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Pagan, A. y Magina, S. (2011). O ensino de estatística na educação básica com foco na interdisciplinaridade: um estudo comparativo. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 92(232), 723-738.
- Pagan, A., Leite, A. P., Magina, S. y Cazorla, I. (2008). A leitura e interpretação de gráficos e tabelas no Ensino Fundamental e Médio. En V. Gitirana, F. Bellemain y V. Andrade (Eds.), *Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-10). Recife: Universidad Federal de Pernambuco.
- Pérez-Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I. Métodos*. Madrid: La Muralla.
- Porta, L. y Silva, M. (2003). *La investigación cualitativa: el análisis de contenido en la investigación educativa*. Córdoba: CENDIE.

- Ragencroft, M. (1992). Le rappresentazioni grafiche. Sviluppare una progressione di lavoro. *Induzioni*, 4, 1-3.
- Reys, B. J., Reys, R. E. y Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61–66.
- Rodríguez-Alveal, F. y Sandoval, P. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en enseñanza básica. *Avaliação*, 17(1), 207-235.
- Ruiz, B., Batanero, C., Arteaga, P. (2011). Vinculación de la variable aleatoria y estadística en la realización de inferencias informales por parte de futuros profesores. *BOLEMA*, 24(39), 413-429.
- Santisteban, C. (2009). *Principios de psicometría*. Madrid: Editorial Síntesis
- Schild, M. (2006). Statistical literacy survey analysis: reading graphs and tables of rates and percentages. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-9). Salvador de Bahía: ISI e IASE.
- Salkind, N. J. (1999). *Métodos de investigación*. México, DF: Prentice-Hall.
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 205-237). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Silva, D. B. (2012). *Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental*. Tesis de Máster. Universidad Federal de Pernambuco
- Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht: Reidel.
- Vasconcelos, A. P. y Fernandes, J. A. (2013). O uso da folha de cálculo na construção de gráficos estatísticos por alunos do 7º ano. En J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho y P. F. Correia (Eds.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 127–143). Braga: CIED- UMINHO.
- Vigo, J. M. (2016). *Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos de formación profesional básica*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher* 21(1), 14-23.
- Walichinski, D. y dos Santos, G. (2013). Contribuições de uma sequência de ensino para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas segundo pressupostos da contextualização. *UNION*, 35, 19-42.
- Wang, Z. y Osterlind, S. J. (2013). *Classical test theory. Handbook of quantitative methods for educational research*. New York, NY: Sense Publishers.
- Watson, J. M. (1997). Assessing statistical thinking using the media. En J. B. Garfield (Ed.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121).

Amsterdam: IOS Press.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Wu, Y. (2004, Julio). *Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs*. Trabajo presentado en el 10th International Congress on Mathematics Education (ICME-10). Copenhagen, Dinamarca.

Zapata-Cardona, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 33, 234-247.

Zapico, M. (2007). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. En MINEDUC (Ed.), *Primer Seminario Internacional de Textos Escolares (SITE 2006)* (pp. 149-155). Santiago: MINEDUC.