

# PUNTUALIZACIONES Y REFLEXIONES SOBRE ALGUNOS CONCEPTOS ESPECÍFICOS Y CENTRALES EN LA TEORÍA SEMIÓTICO CULTURAL DE LA OBJETIVACIÓN

Bruno D'Amore

*En este trabajo se consideran algunos de los términos de mayor difusión usados en la descripción de la teoría semiótico cultural de la objetivación haciendo un análisis filosófico/epistemológico sobre la base de las acepciones sugeridas por diversos autores. El objetivo es contribuir a una clarificación que no quiere ser sólo terminológica, sino también significativa de la objetivación, saber y ontología, conocer y gnoseología, labor, semántica y comunicación.*

*Términos clave:* Labor; Objetivación; Práctica de aula; Unificación y separación de teorías

Clarifications and Reflections on Some Specific and Central Concepts in the Semiotic Cultural Theory of Objectivity

*In this paper we examine some of the most common terms used in the theory of knowledge objectification to carry out a philosophical/epistemological analysis based on several meanings suggested by different authors. The objective is to contribute to a clarification that does not want to be only terminological, but also meaningful of the objectification, knowledge and ontology, knowledge and gnoseology, work, semantics and communication.*

*Keywords:* Classroom practice; Objectification; Unifications and Separations of Theories; Work

La teoría semiótico cultural de la objetivación es sin ninguna duda una de las más fecundas en el ya vasto panorama de las teorías a disposición de los investigadores en Didáctica de la Matemática. Y es a este factor que se debe su gran difusión planetaria.

D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, 12(2), 97-127.

Ésta tiene como base conceptos que son también de carácter filosófico, conceptos y términos que hasta hace pocos años no formaban parte de la cultura de los matemáticos investigadores en esta disciplina. Muchos de estos conceptos tienen también significados y acepciones diferentes que fueron seleccionados específicamente para poder desarrollar la teoría misma.

Considero importante reflexionar lo más posible sobre estos términos y sus acepciones diversas, o incluso sólo similares, pero no coincidentes, con la finalidad de disfrutar al máximo del significado y del poder de las reflexiones que filósofos, lingüistas, semiólogos y otros estudiosos han realizado en los siglos. Sólo así se conquista, en mi opinión personal, la sólida competencia necesaria para poder hacer uso de estos términos con plena y madura conciencia.

Además, soy un obstinado y convencido constructor de relaciones y conexiones entre teorías; en el debate siempre abierto entre puntos afines y disonancias entre teorías (Prediger, Bikner-Ahsbahr y Arzarello, 2008), soy lo más propenso a encontrar nexos y relaciones comunes; me parece que ésta, la de la reflexión crítica, histórica, filosófica y semántica sea la línea a seguir para encontrar asonancias y analogías entre las teorías, para evitar la creación acrítica de dañosas vallas que alejan entre sí investigadores que, por el contrario, pueden trabajar al unísono intercambiando resultados y datos.

Nuestra disciplina es demasiado joven para erigir fronteras insuperables, es aún tan abierta y disponible a las interpretaciones que el descubrimiento de relaciones entre teorías sólo podrá beneficiar a la unicidad de los objetivos de estudio y de investigación.

## OBJETIVACIÓN

Introducimos nuestra reflexión a partir de varias ideas de Radford, quien propone:

*La objetivación es un proceso cuyo objetivo es mostrar algo (un objeto) a alguien. Ahora bien, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto? Esos medios son los que llamo medios semióticos de objetivación. Estos son objetos, artefactos, términos lingüísticos y signos en general que se utilizan con el fin de volver aparente una intención y de llevar a cabo una acción (2005, p. 203).*

En este sentido, en Radford (2017, p. 119) se lee:

*En la teoría de la objetivación, el aprendizaje se teoriza como procesos de objetivación, es decir, aquellos procesos sociales de volverse, progresivamente y críticamente, consciente de una forma codificada de pensamiento y de acción—algo que notamos gradualmente y al mismo tiempo adquiere significado. Son procesos de objetivación aquellos actos de notar significativamente algo que se revela a la conciencia por*

*medio de nuestra actividad corpórea, sensorial y artefactual. Es el notar o percibir algo (lo “en sí”) que se revela en la intención emergente proyectada en los signos o en el movimiento kinestésico, en el curso de la actividad práctica concreta—la revelación del “en sí” que se convierte en “para sí” en el curso de su aparición y por lo tanto se transforma en conocimiento para nosotros.*

Y aún en Radford (2014, p. 141) se indica “La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente”.

En Radford (2015, p. 139) se plantea:

*Ahora tengo todos los elementos para formular el concepto de objetivación a través del cual tematizamos el aprendizaje. La objetivación es la co-transformación social, el proceso sensorial de creación de sentido a través del cual los estudiantes gradualmente se vuelven críticamente conscientes de significados culturales construidos históricamente y de formas de pensamiento y acción (la traducción es nuestra). (Sobre esos temas, véase también Radford, 2002, 2003, 2004, 2006, 2013a).*

Con base en estas citaciones y de las numerosas y cultas referencias bibliográficas dadas por el autor, tengo la convicción que todos aquellos que de una forma u otra tienen relación con este argumento, tenemos el concepto de objetivación muy claro.

Sin embargo, un análisis detallado de los argumentos en juego debería ser muy bien aceptado, dado que sobre estos temas no se tiene una total concordancia de visiones.

Esta es la razón que me lleva a proponer algunas reflexiones personales.

### **Objetivismo y subjetivismo**

Dado que se citan elementos objetivos, entramos en primer lugar en la eterna confrontación filosófica entre objetivismo y subjetivismo.

Se habla normalmente de elementos objetivos a propósito de la realidad en la cual se desarrolla una determinada acción humana y en la cual dicha acción se manifiesta; el ambiente real y las formas de presentarse de éstas. Objetivismo es entonces la toma de consciencia de los elementos objetivos.

Se habla de elementos subjetivos cuando se hace referencia a una actividad (teórica o práctica) de un específico individuo o del grupo al cual pertenece o al cual el individuo hace referencia en el curso de dicha actividad. Subjetivismo entonces es la toma de consciencia de los elementos subjetivos.

Los términos objetivismo y subjetivismo aparecen generalmente en contraposición en cuanto complementarios, pero juntos y no separadamente determinan la historia, sea la historia objetiva de los hechos, de los eventos, del

pensamiento, de los procesos y de los fenómenos, sea la historia de cada uno de los sujetos que están participando. Esto muestra la estrecha relación entre los dos términos.

Precisamente, estableciendo una relación entre objetivismo y subjetivismo, Marx (1852/1944, p. 9) escribe:

*Los hombres hacen su propia historia, pero no la hacen de forma arbitraria, en circunstancias elegidas por ellos mismos, sino en las circunstancias que ellos encuentran inmediatamente delante de sí, determinadas por los hechos y por la tradición.*

Gracias a estas consideraciones e interpretando de forma oportuna la idea de historia, se puede evidenciar cómo la situación concreta en la cual actúa un individuo no es autónomamente describible sin centrar la atención en el sujeto; y, por el contrario: el sujeto resulta determinado también por la situación objetiva en la cual está inmerso.

Sujeto y objeto<sup>1</sup> están, por tanto, fuertemente relacionados y condicionados, difícilmente separables.

Si tenemos un sujeto y una situación, entonces los objetos y las acciones o las actividades que conforman la situación son vistos, considerados, analizados, hechos parte propia por los mismos sujetos; es esta, según mi punto de vista, una forma oportuna de presentar el proceso de objetivación.

Desde el punto de vista marxista, el ejemplo más conocido es el del trabajo, entendido como actividad humana que ocupa los sujetos al interior de una situación objetiva: el trabajo se objetiva en su producto. Es muy conocido que este análisis lleva a Marx a las ideas de alienación y distanciamiento. De hecho, no por caso, también Radford estudia estos procesos (Radford, 2016a).

### **Objetivación**

Debemos recordar que existen en la práctica filosófica actual por lo menos tres interpretaciones del término objetivación, las tres presentes en la teoría de la objetivación de Radford:

---

<sup>1</sup> Objeto se puede también entender en el sentido de “objeto real” o de “cosa”, en el sentido que Aristóteles en la *Metafísica* (1961) definió, donde afirma que la “cosa”, en cuanto parte de lo real, es todo aquello que presenta las tres características siguientes: (1) tridimensionalidad, (2) accesibilidad sensorial múltiple (es decir, por más de un sentido a la vez) independiente de las representaciones semióticas y (3) posibilidad de separación material y de otras partes de la realidad, es decir de otras cosas. Tal acepción se encierra en la palabra griega πράγμα que la expresa. Pero se necesitó esperar a René Descartes para una distinción entre “Cosas corporales” y “Cosas que piensan” (1982, 2), hasta Locke para tener el término “sustancias” (1971, 2, 12, 6), acuñado y hecho propio de Berkeley (1996, 1, 33) con la acepción de reales, para distinguirlas de aquellas surgidas de la imaginación a las cuales les espera el nombre de “ideas” o “imágenes de las Cosas que éstas copian o representan”.

- ◆ la sensación, advertida inicialmente como un estado afectivo, dicha sensación adquiere un carácter de realidad que se vuelve percepción, se llama objetivación el pasaje del estado afectivo al estado perceptivo;
- ◆ el fenómeno a través del cual una imagen es considerada objeto;
- ◆ la manifestación de la cosa en sí.

Escribe Duns Scoto en su obra *Ordinatio* (Scoto, 1996): “*Objectum non potest secundum se esse praesens intellectus nostro, et ideo requiritur species, quae est praesens, quae supplet vicem objecti*” (El objeto no puede estar en sí mismo presente en nuestro intelecto, y por esto requiere una especie que le sea presente y que lo haga de objeto).

Escribe René Descartes (1641, III, 9): “J’ai souvent remarqué qu’il y avait une grande différence entre l’objet et son idée” (He a menudo notado que existía una gran diferencia entre el objeto y su idea).

Este hecho, de subrayar la diferencia entre objeto y objeto en sí, es decir, entre materialidad del objeto e idealidad objetual, es de fundamental importancia en todas las acepciones filosóficas relativas al proceso de objetivación.

Pero existen otros caminos filosóficos hacia la objetivación.

Según el físico Erwin Schrödinger (1931/1987) existen dos principios sobre los cuales se basa la ciencia, principios que casi nadie ha nunca notado: inteligibilidad y objetivación.

Con el primero se entiende que los fenómenos naturales pueden ser comprendidos, medidos, clasificados, previstos etc. Por ejemplo, en la mitología antigua la inteligibilidad no existe aún, pues la realidad es considerada como un fenómeno incomprensible y sin leyes prefijadas. Por el contrario, en la ciencia, se da por descontado que la realidad pueda ser entendida en términos de nuestra inteligencia (inteligibilidad).

El segundo principio está aún más escondido, a tal punto que muchos científicos no lo ven ni siquiera durante su actividad de investigación. Objetivación según Schrödinger significa que cada elemento de la realidad y la realidad misma son considerados un objeto externo a la mente, es decir externo al sujeto que lo toma en consideración. Se crea por tanto una dualidad sujeto-objeto: quien percibe y lo percibido. Esta forma de objetivación es una hipótesis de trabajo necesaria en el proceso científico, de otra forma la realidad que nosotros llamamos objetiva no podría ser ni siquiera tomada en consideración.

Ahora bien, siempre según Schrödinger, existen concepciones despistadoras de la realidad causadas por una interpretación particular de la objetivación; y son las interpretaciones materialistas y mecanicistas. Para éstas el mundo es puramente objetivo, en eso la mente no tiene papel alguno, es esta misma un mecanismo nacido por casualidad dentro de algunos organismos vivientes. Como ejemplo de esta situación, Schrödinger (1987) propone una comparación:

*En ocasiones un pintor dibuja en un gran cuadro una figura menor en el cual se representa a sí mismo. De una parte esto es el artista que ha*

*creado el todo; pero en el cuadro él es una figura accesoria sin importancia, que podría incluso faltar, sin comprometer el efecto de la totalidad.*



*Figura 1.* Diego Velázquez, Las meninas, 1656, oleo sobre lienzo, 318×276 cm, Museo del Prado, Madrid.

¿Cómo y dónde buscar el origen de estas concepciones condenadas por Schrödinger?

Creo que se deba atribuir genéricamente a los filósofos presocráticos, en particular a la escuela de Mileto, para quienes la realidad es describible en términos puramente objetivos y con afirmaciones realísticas categóricas del tipo: el primer principio que da origen al universo es el agua, el aire, el fuego, por tanto, un objeto considerado real, parte de la realidad empírica.

Hace de contraparte significativa a esta posición toda filosofía que determina el origen de la realidad en el sujeto que percibe y que toma conciencia del mundo; de por sí el mundo no existe, mejor: no lo puede ni siquiera considerar ni nombrar, si no partiendo del sujeto.

En esta visión subjetiva, la objetivación sería un error intelectual en el cual existe la necesidad de considerar como pre-existentes al intelecto objetos sin necesidad de parte de quien los percibe como tal.

Se sabe que Schrödinger hizo un llamado a aquella posición para asignar como base filosófica de la mecánica cuántica ciertas visiones hindúes que asumen precisamente el mundo como un entrelazamiento entre objeto y sujeto, un mundo objetivo (objetos y relativas leyes) que adquiere sentido sólo cuando existen sujetos que los perciben.

Como vemos, la complejidad de la idea de objetivación no deja de asombrarnos<sup>2</sup>.

## SABER Y ONTOLOGÍA

Saber, se trata de una de las palabras de mayor uso en Didáctica, en todas las didácticas: El estudiante adquiere saber, ¿Cómo se construye el saber?, ¿Cómo se transmite el saber?... son temas que han visto interpretaciones diversas, por parte de célebres autores, que no vale la pena recordar aquí de forma pedante. Algunas son posiciones bastante ingenuas.

He encontrado siempre fascinante el hecho de que la raíz lingüística europea de saber, *sap*, reúne tanto el tener sabor como el tener sabiduría o tener sentido, compartida también por otras raíces lingüísticas. El tener sabiduría o sentido (algunos hablan de conocimiento) y el tener sabor son el origen ancestral de aquella idea tan sofisticada que hoy se llama saber; este hecho exalta el sentido mismo que está en el origen de las palabras: el sentido del gusto se vincula a la capacidad de conocer y de distinguir entre los conocimientos para elegir aquellos adaptados a las situaciones (que es el sentido o que expresa el tener sabiduría).

Pero el saber lleva inevitablemente al estudio preliminar del ser como tal, lleva entonces a la ontología.

Se lee en un muy bien conocido fragmento de Parménides “el ser es eterno; porque, si no fuese eterno, existiría alguna cosa antes del ser, lo cual es contradictorio” (Parménides, 2006).

En esta consideración se condensa media historia de la filosofía. El discurso sobre el ser lleva a la disputa: “mundo eterno *versus* mundo creado” y al tema Dios. Pero Dios está dentro del ser, dando razón a Baruch o Benedicto de Espinoza; o, ¿cómo distinguir un ser que es Dios de un ser que no es Dios? Todas las pruebas de la existencia de Dios tienen una cierta coherencia lógica, pero tienen también un evidente *non sequitur*; por ejemplo, pasando de movimiento (causa) en movimiento (causado) se encuentra un movimiento (primo), no un ser divino. Por ejemplo, Tomás (en la *Summa Theologiae*, véase: Tommaso, 1990) concluye, de su famosa cadena del ser, que existe alguien omnipotente omnisciente etc. a priori; conclusión gratuita, derivada de una asunción implícita. Esto coincide con nuestra experiencia: las plantas están más adaptadas a la vida, una secoya vive mil años y algo más, pero la percibimos como un ser inferior a

---

<sup>2</sup> Normalmente se denota “realismo ingenuo” (*Naiven Realismus*) lo así definido por G. Schuppe (1910), es decir aquello por lo cual se reconoce la independencia del objeto conocido del acto (psíquico) a través del cual este viene conocido. Esto tiene origen en un famoso artículo de G.E. Moore (1903) que se inspira en la posición de W. Hamilton (1859-60) el cual atribuye este modo de pensar a la filosofía escocesa. Creo que todas estas posiciones son hijas del *Realismo empírico* de Kant (1781).

nosotros. En conclusión, la forma de vida suprema tiene intelecto, consciencia, voluntad... Y así nosotros volcamos esta conclusión sobre nuestra idea de Dios.

¿Pero, es necesario que sea así? ¿No seremos nosotros los gusanos planos, que no perciben la tercera dimensión? ¿Somos y sabemos, o sólo somos? ¿Será posible saber sin ser?

Otra pregunta fundamental, expresada exactamente con las palabras de Leibniz: “¿Pourquoi il y a plus tôt quelque chose que rien?” (¿Por qué hay algo más bien que nada?) (Leibniz, 1714/1966); es decir la pregunta metafísica fundamental: *¿cur est aliquid?* (¿por qué hay algo?) es la pregunta de todo el saber, para responder a la cual nos ayuda nuevamente Parménides, en su profundo esquematismo: “porque la nada, siendo precisamente tal, no puede ser”. Y volvemos así a: “el ser es, el no ser no es”, que aparece ahora mucho menos obvia. La nada no puede darse sin convertirse en algo.

Ser, saber, conocer constituye por tanto una sucesión causal. Nosotros, los docentes, nuestros alumnos, somos, sabemos, conocemos en forma indistinguible. Sobre este tema, véase D'Amore (2015).

## CONOCER Y GNOSEOLOGÍA

La primera contraposición de base, del tipo por ejemplo de aquella fundamental entre protozoos y metazoos de Linneo, es entre, por así decirlo, los dogmáticos y los escépticos, es decir entre quienes consideran que el conocimiento pueda darse, y quienes lo niegan (obviamente el término dogmático debe ser considerado en una particular acepción que emergerá en el contexto de este mismo párrafo). El conocimiento es y puede ser adquirido; el conocimiento en sí es, pero queda fuera de nosotros.

Ejemplifiquémoslo haciendo referencia a la filosofía griega clásica. Ejemplos del primer tipo: Sócrates, Platón, Aristóteles (es decir la línea ganadora); del segundo tipo: Protágoras, Gorgias de Leontinos, Pirro de Epiro.

El argumento principal de los primeros contra los segundos es: pero ¿si el conocimiento no existe, tú cómo haces para saberlo?, es decir un uso filosóficamente interesante de la *consequentia mirabilis*.<sup>3</sup>

Este método deductivo aparece en un famoso paso del *Teeteto* (Vailati, 1911) y en la *Metafísica* de Aristóteles (en la cual la *consequentia* en mi opinión no es explícita sino sobrentendida, al contrario de lo que se afirma en Łukasiewicz,

<sup>3</sup> La *consequentia mirabilis* es la formulación de un especial principio de demostración por absurdo que es llamado también “principio de Clavio” propuesto por Jan Łukasiewicz (1970), cuya formulación es generalmente dada de la siguiente forma:  $(\neg T \rightarrow T) \rightarrow T$ . En realidad, esa debe ser expresada metalingüísticamente para formular una interesante deducción (usada por Gerolamo Saccheri y Georg Cantor, entre otros), que es la que la hizo célebre: si de  $\neg T$  se puede deducir  $T$ , entonces  $T$ . Hay quienes quiso ver esta deducción ya en Aristóteles, otros en Platón, otros en Sexto Empírico. Una detallada disertación histórico – lógico – analítica relativa a esta deducción se encuentra en D'Amore y Matteuzzi (1972).

1951); lo cual se puede expresar como sigue: si el escéptico niega todo, incluso que pueda existir un significado, entonces no está diciendo nada que tenga sentido, por tanto, él (el escéptico) *phytòs estì* (es como una planta), vegeta en un estado pre-humano. Es decir, característica del ser humano es reconocer, dar, comunicar significados. Como sugiere el colega y amigo Rodolfo Vergel, esta consideración se colega a una postura de Umberto Eco (1973, p. 159): “La semiótica no es solamente una teoría, ha de ser también una forma de praxis continua”.

El argumento típico de los segundos está articulado en dos partes: negación del conocimiento racional (lo cual lleva a paradojas, antinomias y sofismas muy bien conocidos), y negación del conocimiento sensible (los sentidos nos engañan, los ejemplos son numerosos a partir de las paradojas de Zenón).<sup>4</sup>

Una vez aceptada la primera tesis, es decir que el conocimiento se pueda dar, la pregunta siguiente es sobre el “cómo”, y aquí las soluciones son diversas, interesantísimas para nuestros estudios específicos en didáctica de la matemática.

Intento proceder de forma taxonómica, siguiendo los esquemas clásicos.

Si se da, ¿se da a priori o a posteriori?

En el primer caso tenemos el innatismo, por ejemplo el anamnesis de Platón (bien conocido el fenómeno de reminiscencia descrito en el *Menón*, en *Fedro* y en otros *Diálogos*; véase Platón, 1997), para citar el caso típico; en el segundo tenemos el empirismo, el *nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu* (nada hay en la mente que previamente no estuviera en los sentidos), axioma de la filosofía escolástica, hecho propio hasta convertirlo en un caso paradigmático por John Locke (1690/1988) [pero igualmente se puede atribuir a prácticamente cualquier filósofo anglosajón (Williams y Montefiore, 1966; Turco, 1974)]. Esta distinción, en mi opinión, no aparece en la TO de Radford, pues no es fundamental en esa teoría.

Entre los aprioristas, debemos distinguir entre quienes consideran como criterio de conocimiento la intuición o (*vel*) la evidencia; aquí podemos encontrar Platón y su *noesis*, que precede la *dianoia*, o conocimiento lógico racional (D’Amore, Fandiño-Pinilla y Iori, 2013, pp. 86–87); y sobre todo René Descartes (1637/1999), con su criterio de las ideas claras y distintas, que da precisamente, como paradigma de la evidencia, el famoso *cogito ergo sum* (*pienso y por lo tanto existo*); para Descartes el conocimiento a priori (*apriorismo*) es lo mismo que la noción de ideas innatas.

Nos gusta recordar que la noesis, fuertemente conexas a una visión no tradicional de la semiótica, volvió prepotentemente a repuntar a la palestra en los años 90 del siglo pasado gracias a las revolucionarias propuestas de Raymond

---

<sup>4</sup> Las interpretaciones de la paradoja de Zenón pueden darse a favor o en contra de los Pitagóricos; las dos versiones, a pesar de ser antitéticas, son ambas admisibles: véase D’Amore (2001a).

Duval (1993, 1995) que, en nuestra opinión, dieron el impulso decisivo a las formas actuales de interpretar la didáctica de la matemática (D'Amore, 2005b).

En el otro extremo, en el de quienes sostienen el a posteriori, encontramos los que podríamos llamar logicistas, para quienes el raciocinio está en el escalón superior, la lógica misma. Es decir, por ejemplo, Aristóteles y Leibniz. Para Leibniz, de hecho, todo es analítico, toda verdad tiene su base en un principio lógico de identidad, por lo menos para una mente perfecta; por tanto, las cosas que para nosotros son empíricas, son tales porque no las sabemos calcular (es decir derivarlas de un *calculus ratiocinator*; véase D'Amore, 2001b), pero no son empíricas para Dios.

Aquí el innatismo toma una forma muy atenuada: podemos incluso no tener ideas innatas (como piensan, por el contrario, Platón y Descartes) pero tenemos al nacer, en cuanto ser humanos, como mínimo la *facultas*, la capacidad intelectual; a la ya vista posición de Locke: *nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu*, nada está en la mente que antes no haya estado en los sentidos, Leibniz contesta con una potente respuesta a Locke en los **Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano** (Leibniz, 1704/1992): *nisi intellectus ipse*, sino el intelecto mismo. En otras palabras: si la mente en el momento del nacimiento fuera una *tabula rasa*, no se vería por qué los gatos no podrían llegar a conocer; al nacer el niño y el gato tienen una mente vacía de contenidos empíricos, pero el primero tiene la capacidad formal de organizarla según la lógica.

En mi opinión este análisis no es puramente filosófico, reputo importante su consideración concreta en la práctica de aula, sobre todo en lo que tiene que ver con las decisiones alrededor de la negociación de los significados en el intercambio terminológico y racional a propósito del lenguaje matemático entre estudiantes.

Debemos también hacer una segunda esencial distinción entre los racionalistas. Dado que el conocimiento tiene dos polos, el sujeto que conoce y el objeto conocido, debemos distinguir entre quienes consideran el principio activo, o criterio de verdad, en el primero y quienes lo atribuyen al segundo. Tenemos así los idealistas, en el primer caso, Fichte, Schelling, Hegel, y los realistas, Aristóteles, Leibniz, Espinoza. En medio está Kant: las formas *a priori* están en el sujeto, y constituyen un filtro obligado para el objeto, que no es conocido sino mediante su construcción en forma de “fenómeno” (Kant, 1781/2000).

En el otro sentido, los empiristas toman una vía diversa para recuperar el saber formal, es decir el nominalismo. Para Locke las “verdades de razón” deben ser justificadas; lo cual no significa no creer en la matemática, obviamente, sino que las verdades de la matemática no tienen que ver con las cosas, las *res*, pero con los nombres puros, es decir, objetos inexistentes. De aquí se explica la gran tradición de estudios de lógica de los anglosajones, de los *calculatores* de Cambridge hasta Boole.

Este intento personal de síntesis aparecerá obvio y burdo, pero es un esqueleto sobre el cual se puede razonar en el ámbito didáctico que es el que nos interesa. Veamos cómo.

### **Conocimiento y hermenéutica**

El conocimiento no es una banal reduplicación del mundo, como quisiera un tipo particular de positivismo o el neo-empirismo lógico: eliminado el pensamiento, tendríamos dos mundos y no uno y, simplemente, nos habríamos ciertamente complicado la vida. (Personalmente fueron fundamentales en este campo para mí los estudios de las siguientes obras: Santucci, 1970, y Pasquinelli, 1969).

Tomemos por ejemplo el conocimiento histórico. Para un positivista la historia es el pasado más el pensamiento del historiador, con este último que tiende a cero; pero así el resultado sería la crónica, no la historia. Por el contrario, el conocimiento histórico es el pasado más una hermenéutica. Por tanto, el conocimiento debe ser un esquema conceptual proyectado sobre lo real, no un segundo real, inútil, en mi opinión. Esta referencia a la hermenéutica nos lleva al interior de reflexiones que ya hicimos en didáctica de la matemática (Bagni, 2009). En la p. 20, Bagni escribe:

*67. La interpretación es un momento clave del acercarse a un texto, a un contenido, por tanto para el aprendizaje; pero para interpretar es indispensable acercarse de cualquier forma al saber en juego, y esto nos lleva al círculo hermenéutico. 68. El aprendizaje es asimilable a una construcción más que a la contemplación.*

### **Conocimiento y prejuicios**

El segundo tema que debemos afrontar es aquel de los *idola*, en el sentido baconiano, es decir los prejuicios (Bacon, 1620/1900). Aquí me refiero básicamente al conocimiento “científico”, del cual *idola* son, por ejemplo, las siguientes afirmaciones consideradas por los ingenuos como nociones comunes o axiomas:

- ◆ el conocimiento científico es cierto
- ◆ el conocimiento científico es verdadero
- ◆ el conocimiento científico es estable.

Encontrar contraejemplos es muy fácil, especialmente para un matemático. [¡Cuánto daño hacen en el proceso de enseñanza – aprendizaje estos axiomas – *idola*!].

Por tanto, de la aporía de la doble alma constituida de una parte por la aspiración a la estabilidad, y de la otra por el progreso (que es de signo opuesto a la certeza y a la estabilidad), propongo salir pasando a un nivel más fino, es decir al concepto de teoría; como hicieron los pluralistas (Empédocles, Anaxágoras, Demócrito,...) para salir de la contraposición entre Heráclito y Parménides. Tomemos por ejemplo a Demócrito: los átomos son siempre los mismos, y aquí

recupera la estabilidad eleática de Parménides, pero se combinan continuamente en formas diversas, y aquí recupera el *panta rei* de Heráclito. De la misma forma, podemos dar certeza, verdad y estabilidad local, dentro de una teoría, pero la ciencia pasa continuamente de una teoría a otra.

### **Conocimiento e individuo**

Un desarrollo dialéctico futuro podría estar contenido en la observación de que el conocer lleva necesariamente a la epistemología y que el conocer necesita de un discurso sobre el aprendizaje, lo cual se generaliza, tal vez, en nuestro campo, con el término educación. No es posible afrontar este tema sin usar el término individuo, la historia cultural que lo define, la ética que indudablemente acompaña cada una de las reflexiones. Aprender es entonces la subjetivación y la transformación debidas al aprendizaje y a la objetivación. Con la inmediata consecuencia: mientras aprendo, cambio desde cualquier punto de vista, pero soy siempre la misma persona. Y conmigo cambia quien me enseña. Y terminamos ambos con ser indistinguibles respecto al conocimiento. Pero este punto 3 deberá ser el tema central de un desarrollo posterior.

## ACCIÓN, LABOR, PRAXIS

Los términos que titulan este párrafo giran alrededor de la evidencia del hecho de que, en situación de enseñanza y aprendizaje, los dos polos de la acción, digamos docente y alumno, comparten una práctica que los vincula, que los modifica, con papeles y actividades no siempre distinguibles, que se basa en la idea de *labor* entendida en el sentido marxista del término.

Radford nos da las líneas guía de esta interpretación (Radford, 2013b). Cita justamente la *Introducción a la crítica de la economía política* de Karl Marx:

*las dos grandes categorías con las cuales se puede definir el trabajo:*

- 1) *las relaciones de producción, es decir las formas históricas y culturales de interacción humana;*
- 2) *los modos de producción, es decir la manera de producir de los individuos.*

No vale la pena agregar algo más, reenviando necesariamente al mismo texto de Radford [perfecta la citación de Dupré que hago mía: “Ni la materia bruta ni los instrumentos constituyen la fuerza económica hasta que son integrados dentro de un sistema social” (Dupré, 1983, p. 86)].

Desde esta perspectiva histórico-social hay que notar la precisa y profunda crítica que hace Radford a la interpretación de la función del alumno, como propietario privado que debe construir su propio saber negociando sus significados, y del maestro que guía la construcción del alumno (Radford, 2013b). Comenta Radford (2014, p. 146): “No hay teoría en la educación

matemática que se haya apegado con más fuerza y haya promovido con tanta energía esos conceptos como el constructivismo norteamericano”.

Quiero ir más allá, en la misma dirección.

Dado que de trabajo se trata, hay que definir un valor, recordando teorías económicas clásicas: el valor de cada cosa depende de la cantidad de trabajo necesario para producirla (Adam Smith, David Ricardo, Karl Marx, sólo para citar algunos pensadores). Y, para mí, este valor se basa en la eterna dialéctica entre “hombre histórico” y “hombre social”.

Para buscar una contribución a esta pista de análisis, me sirvo de Friedrich Engels (1956)<sup>5</sup>.

¿Por qué citar precisamente la edición italiana? Porque la tercera edición italiana de este extraordinario texto de epistemología de la ciencia (marcadamente dialéctica) fue editada por un personaje de excepción, Lucio Lombardo Radice (1916-1982), matemático muy bien conocido en el ambiente italiano, político activo en el partido comunista, con gran interés por los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y por la divulgación de esta.

En la introducción de Lombardo Radice (Engels, 1956, p. 16), se lee: “El interés de Marx estaba netamente polarizado hacia el *hombre histórico*, el hombre de la labor y de la producción social, hacia la dialéctica de la praxis humana social”.

Me parece oportuna la siguiente frase de la psicóloga chilena Martha Harnecker (Harnecker, 1969, p. 19), según la cual la comprensión última de los procesos históricos “debe buscarse en la forma en que los hombres producen los medios materiales”. Es decir: las causas últimas de todas las modificaciones sociales hay que buscarlas en las transformaciones de los modos de producción.<sup>6</sup>

Regresando a Engels (1956, p. 17):

*Marx veía en el trabajo y en la producción social un elemento del todo nuevo y original, respecto a los procesos naturales, que implica otra dialéctica. (...) El hecho es que el elemento primero, el constituyente elemental de tal dialéctica es la praxis, la actividad humana del trabajo. “El defecto principal de cada materialismo hasta hoy, (...) es que el objeto, lo real, lo sensible es concebido sólo bajo forma de objeto o de intuición; pero no como actividad humana sensible, como actividad práctica, no subjetivamente” (la frase entre comillas es tomada del apartado de F. Engels al interior del libro, en el capítulo: Primera tesis sobre Feuerbach).*

<sup>5</sup> Se trata de la célebre obra *Dialéctica de la Naturaleza* que Friedrich Engels proyectó como idea para la redacción de parte de un volumen que no alcanzó a concluir, cuyo índice parece fue elaborado en 1878 una primera vez y después en 1880. Pero yo uso la edición de 1956, Roma: Editori Riuniti, por un motivo preciso que veremos inmediatamente.

<sup>6</sup> Debo esta sugerencia bibliográfica a mi amigo y colega Rodolfo Vergel.

En la p. 18:

*Sobre la “parte obtenida de la labor en el proceso de humanización del simio” el lector encuentra, en esta Dialéctica de la naturaleza de Engels, un ensayo que desarrolla brillantemente y con detalle la idea de Marx, que el hombre es el resultado de su propio trabajo.*

Sobre este punto se cita un artículo de otro intelectual italiano, Palmiro Togliatti (Togliatti, 1954); Togliatti afirmaba que: “un verdadero naturalismo y un auténtico humanismo no pueden surgir sino a condición que la realización de la naturaleza humana sea entendida como el resultado de un proceso” (las palabras son de Lombardo Radice, p. 18, nota 2).

Lo mismo en la página 21:

*La acción recíproca excluye todo primario absoluto y todo secundario absoluto; pero es igualmente un proceso de dos caras que, por su naturaleza, puede ser considerado desde dos puntos de vista diferentes; para poder ser comprendido en su conjunto debe precisamente ser estudiado sucesivamente desde dos puntos de vista opuestos, antes que pueda ser comprendido el resultado plenamente.*

Cuando decimos que la acción del docente y del alumno no son dos acciones, sino que es la misma acción, encontramos precisamente este punto de vista; la labor, lo que se produce, la persona que lo produce, los varios agentes..., son todos componentes al unísono de una única actividad que, con una sola palabra, podemos llamar *labor*. Con esta palabra se indica una actividad humana específica, una forma de existir, de vivir, de ser parte de la humanidad, de la sociedad, de la realidad, no es sólo algo instrumental. El ser humano se identifica con su labor, con el resultado de su labor, con el cual produce algo y entonces se produce a sí mismo. El ser humano es así viviente en cuanto “laborante”.

Veamos que dice el mismo Engels (1956) en la p.190:

*Frente a todas estas creaciones, que se presentaban como productos directos de la mente y que parecían dominar las sociedades humanas, los más modestos productos de la labor manual fueron relegados en un segundo plano; (...). Todo el mérito de los rápidos progresos de la civilización fue atribuido a la mente, al desarrollo y a la actividad del cerebro; (...) incluso los científicos materialistas de la escuela darwiniana no logran aún hacerse una idea del origen del hombre porque, estando aún bajo la influencia ideológica del idealismo, no reconocen la función que ha tenido el trabajo en aquel proceso.*

Según mi opinión es una notable identificación que ayuda a entender posiciones diversas, de hecho, antitéticas, en el proceso de la labor en aula, pero también en su interpretación, aquel valor sobre el cual he puesto el acento inicial.

Insisto: enseñar y aprender son indistinguibles, el docente se transforma a sí mismo en la práctica de enseñar, así como el alumno se transforma al aprender. Estas transformaciones se deben a la labor puesta en práctica por los dos de forma personal, pero en el contexto social de pertenencia, el contexto escuela, en la evolución de la práctica de aula, que es una acción social (no individual) puesta en acto por todos aquellos que participan en ella.

El objeto construido en este trabajo está previamente delimitado, así como lo es en el trabajo en general, no se trata de replicar un modelo o de construir uno nuevo, sino de acercar el resultado de la acción a lo esperado, que se puede llamar institucional (D'Amore y Godino, 2006). No es necesario que el objeto matemático en construcción preexista de cualquier forma metafísica, identificable con el objeto de conocimiento en juego; es suficiente que este sea parte de la transposición didáctica de un objeto institucional puesta en obra por el docente (D'Amore, 2001c).

## SEMÁNTICA Y LIBERTAD DE EXPRESIÓN

En mi opinión, nunca se evidencia lo suficiente el hecho que nuestras expresiones, en cualquier contexto, frente a una aparente libertad, son por el contrario condicionadas por contextos de carácter antropológico y sociológico. Para dar fuerza a esta idea, que considero fundamental, me sirvo de los estudios del lingüista estadounidense Benjamín Whorf. Los intercambios dialógicos son siempre fruto de acuerdos, a menudo implícitos; estoy pensando en ideas como “el corte de las lenguas madres”, utilizando las palabras de Benjamín Whorf.

Es mi intención ser más preciso, utilizando otra citación de Whorf (1940b, 1970), es decir Hall (1959):

*Todos nosotros conservamos una ilusión sobre el acto de hablar, la ilusión que el hablar está libre de obligaciones, que es espontáneo, y que simplemente “expresa” cualquier cosa que deseemos expresar. Esta apariencia ilusoria deriva del hecho que los fenómenos obligatorios al interior del flujo aparentemente libre del discurso, son tan completamente despóticos, que el hablante y el oyente están ligados inconscientemente como por una ley natural.*

Y aún (Whorf, 1940a, 1970):

*Nosotros seleccionamos la naturaleza según líneas trazadas por nuestras lenguas madres, las categorías y los tipos que aislamos del mundo de los fenómenos no los encontramos allá porque están ahí, delante de los ojos de cada observador; por el contrario, el mundo es presentado en un caleidoscópico flujo de impresiones que debe ser organizado en nuestra mente. Nosotros hacemos a pedazos la naturaleza, la organizamos en conceptos, y esto básicamente porque*

*participamos en un acuerdo de organizarla de tal forma; un acuerdo que es aceptado por toda nuestra comunidad lingüística y es codificado en los esquemas de nuestra lengua. El acuerdo es totalmente implícito y no declarado, pero sus términos son absolutamente obligatorios; no podemos en modo alguno hablar sino sometiéndonos a la organización y a la clasificación de los datos que el acuerdo impone. Este hecho es muy significativo para la ciencia moderna, porque significa que ningún individuo es libre de describir la naturaleza con absoluta imparcialidad, sino que es obligado a interpretarla de cierta forma incluso cuando se considera máximamente libre.*

A esta posición de Whorf se opuso con decisión un vasto grupo de lingüistas; entre todos señalo a Louis Hjelmslev; véase, por ejemplo, Hjelmslev (1943/1968), en particular los capítulos 13, 15 y 21.

Pero no profundizo aquí con esta controversia, aunque alguien debería hacerlo. Los efectos de esta contraposición en relación con los estudios en Didáctica de la Matemática los considero más que evidentes.

¿Qué sucede en este intercambio dialógico, en una situación de enseñanza – aprendizaje, asumiendo que el conocer es posible y, como proceso, dado en una práctica compartida en la cual está en acto una labor que crea un hombre histórico, fruto no sólo de dicha labor, sino también de sus orígenes culturales y sociales?

La complejidad del fenómeno es evidente. Sería oportuno dar ejemplos; pero, en espera de análisis más profundos, específicos y ejemplificativos, me limito a hacer una referencia al complejo de prácticas compartidas que se reúnen bajo la denominación “dar una solución a una situación problemática”.

Por situación problemática entiendo no solo un texto, no solo estrategias resolutivas, no solo conocimientos matemáticos involucrados, sino el sistema de competencias reales, específico para dicho problema, en el marco del cual se puede imaginar todo lo descrito por el significado semántico del texto que conecta con las experiencias de cada uno de los aprendices (D'Amore, 1993, 2014).

Sobre estas experiencias (aquellas que después se pondrán en acto durante la labor), señalo los factores expertos o, por lo menos, aquellos que considero que tienen un peso mayor (una lista completa es impensable):

- ◆ experiencia (esta ya abriría un mundo en sí),
- ◆ hábitud a expresar (oralmente y por escrito) ideas y acciones,
- ◆ capacidad de hacerse representaciones internas,
- ◆ capacidad de proponer representaciones externas,
- ◆ competencia matemática adecuada,
- ◆ competencia lingüística adecuada.

## LA PRÁCTICA DE AULA, ALGUNAS OBSERVACIONES

Me parece interesante también reflexionar sobre algunas componentes de las prácticas de aula, que siempre se citan; entre estas, el trabajo cooperativo por su valencia cognitiva fuerte (por ejemplo, el trabajo en grupo de los alumnos). No se debe creer en una unicidad de interpretación terminológica ni siquiera en este caso (D'Amore y Fandiño-Pinilla, 2012).

Son múltiples y profundos los análisis modernos sobre esta metodología, por ejemplo, los estudios que definen las *relaciones cooperativas* en la escuela (Dozza, 2006).

Por ejemplo, existen varias acepciones de grupo:

*Acepción sociológica.* El grupo es un conjunto de dos o más individuos que buscan un mismo objetivo individual; sociología, estadística y derecho identifican en la objetividad de la tarea y en la coexistencia física de cada uno de los individuos y de los subgrupos el elemento significativo, pero no toman en consideración los aspectos relacionales, de comunicación, ni las dinámicas emotivas y afectivas.

*Acepción antropológica.* El grupo es un conjunto de individuos que se reconocen en determinados valores, mitos, tradiciones, ceremonias, rituales, sistemas de signos; el antropólogo se interesa por la cultura y por el proceso de enculturación (es decir por la transferencia del patrimonio cultural de una generación a otra) y de aculturación (identificada en la hibridación entre culturas); aquí el individuo es tanto un usuario como un agente activo de la cultura; cada sujeto actúa, cree y ritualiza y así mantiene viva la propia cultura a la cual pertenece; además, aceptando otros contextos culturales, modifica su cultura de origen.

*Acepción psicológica.* El grupo es un conjunto de tres o más individuos que se reúnen como grupo y tienen entre ellos relaciones de influencia recíproca; el psicólogo centra su atención en las relaciones, las comunicaciones y por tanto en el sentido de pertenencia al grupo; se habla de grupo sólo cuando se establecen, gracias a retroalimentación, relaciones circulares; aquí se estudia con mucha atención la relación entre emisor y receptor.

*Acepción analítica.* El grupo es un conjunto de tres o más individuos que comunican interactuando entre ellos según una matriz común interpersonal, según un sentir y un pensar progresivamente compartido que se convierte en patrimonio del grupo; en esta acepción es necesaria una matriz de grupo en el cual las comunicaciones interpersonales trascienden el individuo; lo que aquí interesa es la formación de un pensamiento compartido.

*Acepción pedagógica.* Un grupo es un conjunto de sujetos —personas que comparten contextos y relaciones dirigidas a reconocer y promover las potencialidades individuales en las diferentes edades de la vida; se trata de una de las acepciones más cercanas a la que nos interesa; pero, según la pedagogía,

todos los aspectos precedentes deben ser valorizados dado que cada uno de estos contribuye a crear la identidad misma del grupo y a estudiar las dinámicas que lo caracterizan; la pedagogía toma en consideración todos estos aportes con el fin de crear una significativa planificación y una reflexión entre los miembros del grupo para alcanzar una expansión, enriquecimiento, realización de sí y en especial como instrumento de orientación hacia el futuro; en este sentido, la formación pedagógica reconduce los valores al sujeto-individuo-hombre-persona y a su constituirse como tal; para formar la base de esta constitución se encuentran valores diversos, como los principios fundamentales de libertad y de igualdad, el reconocimiento y la valorización de las diversidades propia y la de los otros; todo esto constituye la base de un proyecto existencial no sólo para cada uno de los individuos sino para toda la sociedad, sobre la base de la convivencia democrática y de una emancipación individual; las condiciones de esta convivencia radican en la apertura crítica sobre sí mismo, de tipo racional, anti-dogmática; notable la colaboración de la pedagogía con las otras ciencias.

*Acepción formativa.* El grupo es un conjunto de dos o más sujetos-personas que establecen relaciones de interdependencia y coordinan sus acciones y comunicaciones en contextos específicos con el fin de perseguir el aprendizaje y la co-construcción de identidades, inteligencias y significados; es esta la acepción que mayor relación tiene con la didáctica; la atención aquí se centra en el currículo formativo y sobre las acciones, relaciones, comunicaciones, construcciones y re-construcciones de los conocimientos a nivel intra e inter-subjetivo; los estudiosos de esta acepción observan la organización de los contextos de aprendizaje y de formación, la inter-dependencia y la responsabilidad individual al interior del grupo, el dominio de cada una de las competencias sociales y el ejercicio de las habilidades lógicas, la reconstrucción personal de conocimientos y de competencias, la motivación intrínseca y la capacidad de considerar el sentido constructivo del error; la capacidad de reflexionar sobre la experiencia vivida es uno de los pilares del grupo de trabajo lo cual permite una continua planificación que debe llevar al empeño de cada uno de los sujetos involucrados que intervienen en el proceso de enseñanza y de aprendizaje; todo esto se presenta dando gran importancia a la continua re-definición de los contenidos, de los contextos y de los procesos cognitivos y emotivos.

Como se ve, definir qué es un grupo, qué significa labor en una práctica compartida, en una realidad de aula que no ve solo la relación alumno-docente, es problemático y complejo, pero se han dado grandes avances, respecto a las primeras apariciones de esta terminología que aparecía un poco confusa e ingenua hasta hace pocos años. Hoy todo es claro, todo es categorizado y formalizado, y se basa sobre el sentido de concepto de trabajo realizado en común.

Quiero concluir recordando la metodología didáctica de la discusión en aula, en la cual el grupo coincide con la clase; se trata de un óptimo momento de atribución de significados personales y compartidos y de conceptos entre docentes y alumnos y entre alumnos, que tuvo precisamente en la didáctica de la matemática extraordinarios éxitos.

Destaco también que el estudio de las comunidades de práctica que desarrollan matemática, y por tanto principalmente las clases, fueron tomadas en seria consideración en los últimos años como verdaderos grupos sociales, usando como instrumento la sociología, con resultados de gran interés tanto teórico como práctico (Bagni y D'Amore, 2005; D'Amore, 2005a; D'Amore, Font y Godino, 2007, 2008; D'Amore y Godino, 2006, 2007).

## DISCUSIÓN

Mi precisa intención era aquella de considerar algunos términos usados en la teoría de la objetivación para discutirlos sobre la base de análisis de tipo filosófico y epistemológico, para confrontarlos con puntos de vista personales, incluso para reafirmar su complejidad.

Sobre estas bases, considero poder mostrar que no existen contradicciones entre la teoría de la objetivación y la idea misma de situación, tal como se presenta en la teoría de las situaciones didácticas. Siempre he sido un fanático defensor de la unificación de teorías (Prediger, Bikner-Ahsbals y Arzarello, 2008; Radford, 2008a, 2008b), más que de su proliferación y separación; a veces las crisis, las diferencias, las rupturas se dan o, mejor, se evidencian, porque no se tiene la paciencia de buscar las raíces últimas, verdaderas, reales de cada una de las teorías. En la base de la objetivación se encuentran raíces culturales e históricas de los individuos y de las teorías; pero en la base de la definición de las situaciones elaborada por Guy Brousseau en los años setenta del siglo pasado también existen raíces epistemológicas y culturales que debemos respetar y tener en cuenta. En más de una ocasión, Brousseau llama la atención sobre la “inmersión en las didácticas específicas de los diferentes conocimientos” (Brousseau, 2008, p. 108) poniendo en evidencia el papel de las raíces culturales. En el fondo, además, en mi opinión, muchas de sus reflexiones sobre los obstáculos epistemológicos no son otra cosa que el análisis cultural de los conocimientos que determinan la labor en el aula (D'Amore y Radford, en prensa; sobre esta dualidad, véase Radford, 1997).

Pero el discurso se hace complejo y amerita un futuro estudio específico centrado en este preciso argumento. Sobre este tema véase también D'Amore (2015).

## TEORÍAS: UNIFICACIÓN Y SEPARACIÓN

En Radford (2008b, pp. 320–321) una teoría es vista como:

*Una forma de producir interpretaciones y formas de acción basadas en: un sistema, P, de principios fundamentales, que incluya visiones implícitas y afirmaciones explícitas que delimitan los confines del universo del discurso y de la perspectiva de investigación adoptada; una metodología, M, que incluya técnicas de recolección y de interpretación de datos, sostenidos por P; y, un conjunto, D, de preguntas de investigación paradigmáticas (modelos o esquemas que generan preguntas específicas cuando se presentan nuevas interpretaciones o cuando se profundizan, amplían o modifican los principios).*

La recolección de datos no es necesariamente entendida en el sentido empírico positivista de las ciencias naturales; la recolección de datos puede hacer referencia a procesos de producción hermenéuticos, fenomenológicos, epistemológicos o de otro tipo, dotando los datos de relevancia y de sentido.

Los principios P de una teoría constituyen, según Radford (2008b), un sistema, no un conjunto, dado que los elementos de P no tienen el mismo peso; existe una jerarquía que los organiza y que les da prioridad.

La metodología M debe respetar por lo menos dos condiciones: operatividad y coherencia.

Por operatividad de una metodología se entiende que la metodología debe poder producir y tratar los datos de forma tal de proporcionar respuestas “satisfactorias” a las preguntas de investigación, o respuestas basadas en métodos estadísticos, entrevistas, análisis de discursos, episodios de clase etc.

Por coherencia de una metodología se entiende que la metodología (sea estadística, discursiva u otra) debe basarse en, y ser compatible con, los principios elegidos.

Las preguntas de investigación D deben ser formuladas claramente dentro del aparato conceptual de la teoría. Una pregunta de investigación, de hecho, presupone siempre una perspectiva teórica para expresarla.

Así, de una parte, la elección de los principios P influye a M (en términos de operatividad y de coherencia) y a D (en cuanto a la forma en la cual las preguntas de investigación son formuladas) y, de otra parte, la elección de D presupone un sistema P de principios y determina la elección de M.

En Radford (2008a; 2011) se consideran los principios de tres enfoques fundamentales en el siglo XX para la investigación en Didáctica de la Matemática: el constructivismo, la teoría de las situaciones didácticas y las teorías socioculturales.

El objetivo es colocar a nivel teórico las semejanzas y las diferencias entre dichos enfoques, y aclarar los temas centrales alrededor de los cuales gira actualmente la investigación en didáctica de la matemática.

En esta dirección, trazada por Radford, sugiero releer, a distancia de 10 años, la confrontación entre las posiciones del mismo Radford y las mías, evidenciadas gracias a las preguntas de Giorgio Bagni, en el texto de la entrevista D'Amore, Radford y Bagni (2007).

Los análisis siempre más exhaustivos y la siempre más penetrante capacidad de encontrar analogías entre las teorías, más allá de las divergencias, para mí, hace que hoy sea mucho más fácil encontrar bases comunes a las dos teorías que entonces se confrontaron, la de la objetivación y la de las situaciones. En los años setenta y ochenta, cuando esta última fue delineada, aún no existían las sutiles competencias analíticas y críticas que hoy permiten asociar, por ejemplo, la idea de comunidad de práctica (en la visión de D'Amore y Godino, 2006, 2007; Font, Godino y D'Amore, 2007) y aquella de situaciones adidácticas, con aquel papel especial que se quiere que el docente asuma.

Sobre este punto, más bien, me convence aún más una idea de Radford (2016b) relativa al doble papel que asume la idea de labor en el aula, no en una visión dividida entre los componentes enseñanza y aprendizaje, sino en la interacción común, como una labor común. Pues bien, yo veo esta idea como coherente y pertinente con la teoría de las situaciones, en el caso de la situación adidáctica. Pero sobre este argumento volveré explícitamente en el parágrafo 10.

Antes debo proponer algunas reflexiones sobre la pragmática de la comunicación humana, dado que gran parte de la labor que se desarrolla en aula está precisamente condicionada por esta actividad, la comunicación entre seres humanos.

## LOS AXIOMAS DE LA COMUNICACIÓN

Usaré para este parágrafo la referencia al texto de Paul Watzlawick, Janet Helmick Beavin y Don D. Jackson (1971), en el cual, sobre la base heurística de la comunicación, se sugieren algunos principios que los autores llaman axiomas de la comunicación humana.

En las siguientes líneas, debemos tener presente como ejemplo concreto una situación de aula y, principalmente, situaciones como aquellas descritas por Radford en tantas ocasiones, donde los alumnos realizan procesos de generalización (por ejemplo, Radford, 2015), procesos que se presentan gracias a la comunicación entre los diversos alumnos y con el docente en el aula.

### **No se puede no comunicar**

El primer principio se basa en la siguiente convicción: la comunicación es un comportamiento; y todo el comportamiento es comunicación, no sólo aquello explícitamente pensado para comunicar intencionalmente. Comprender algo significa prestar atención no sólo a aquello que se expresa verbalmente, sino también a la globalidad de los comportamientos.

**Toda comunicación tiene aspectos de contenido y de relación**

En el proceso de comunicación no se transmiten sólo informaciones y contenidos, sino propuestas de posición recíproca, relativas, por ejemplo, a los papeles o a las implícitas situaciones relacionales. El ejemplo que es propuesto por los autores es la distinción entre dos operaciones que están siempre presentes en las comunicaciones: el aspecto (o función) de noticia, el aspecto (o función) de mando (yo agrego: normativa).

**Toda comunicación está compuesta de un módulo numérico y de un módulo analógico**

*La comunicación numérica es aquella propiamente verbal, pero no constituye más que la mínima parte del proceso de comunicación. Sin embargo, tiene una importancia particular porque sirve para intercambiar informaciones sobre los objetos y también porque tiene la función de transmitir el conocimiento de época en época (Watzlawick et al., 1971, p. 55).*

Se entiende por comunicación analógica (y es la parte con mayor presencia) toda comunicación no verbal; por ejemplo, posiciones del cuerpo, gestos, expresiones del rostro, inflexiones de la voz, secuencia, ritmo y cadencia de las mismas palabras y toda otra expresión no verbal.

Los contenidos son transmitidos con mayor eficacia del módulo numérico, mientras que el analógico tiene una preponderancia en la comunicación de relaciones.

**La interpretación del mensaje depende de la relación que se establece entre quien comunica**

Este punto es tan obvio que no entro en detalles. Los autores citados no lo hacen, pero me identifico con esta frase de Agustín de Tagaste: *La comunicación es amistad* (Agostino, 2005). [En realidad la frase es retomada de un famoso libro de Cicerón (1958, 6.20) dedicado a la amistad, considerada condición necesaria para la comunicación eficaz].

**Las comunicaciones son simétricas (si se basan en la igualdad) o complementarias (si se basan en la diferencia)**

*Los modelos simétrico y complementario pueden ser también descritos como relaciones basadas o en la igualdad o en la diferencia: en el primer caso los modelos tienden a reflejar el comportamiento del otro; en el segundo caso el comportamiento de un individuo completa el del otro. En otras palabras, en la relación complementaria se tienen dos posiciones diversas: un individuo asume la posición superior, primaria, one-up; mientras el otro tiene la posición inferior, secundaria, one-down (Watzlawick, Beavin y Jackson, 1971, p. 62).*

Yo interpreto este reflejar el comportamiento del otro como uno de los tantos aspectos del contrato didáctico en la teoría de las situaciones; me parece fácilmente observable el hecho que, en una situación de comunicación en aula, la comunicación docente-alumno sea asimétrica con respecto al alumno-docente y de todas formas diversa con respecto a la del alumno-alumno.

Escribe Watzlawick (1976):

*La comunicación crea aquello que nosotros llamamos realidad. Nuestras ideas tradicionales sobre la realidad son ilusiones que vamos acumulando durante la mayor parte de nuestra vida cotidiana, incluso con el riesgo tangible de tratar de obligar los hechos a adaptarse a nuestra definición de realidad y no viceversa. La ilusión más peligrosa, del resto, es que exista una única realidad. De hecho, existen muchas versiones diversas de la realidad, algunas contradictorias, pero todas resultado de la comunicación y no constituida por reflexiones de verdades objetivas, externas.*

Creo que, en futuro, nos tocará siempre más tomar en seria consideración el valor y el significado de la pragmática de la comunicación para interpretar lo que pasa en un salón de clase.

## EL VERDADERO SIGNIFICADO DE LA LABOR CONJUNTA

En Radford (2016b, pp. 4–6) encuentro la descripción más simple y convincente de cómo debe ser entendido el concepto de labor conjunta en el aula, en la relación comunicativa docente-alumno y en el intercambio cultural, social y de aprendizaje que hace real el proceso de enseñanza- aprendizaje:

*El concepto de labor conjunta, que en la teoría de la objetivación juega un papel central, ofrece una reconceptualización de la enseñanza y del aprendizaje. En el trabajo conjunto el papel de los alumnos no se reduce a ser sólo sujetos cognitivos. No asumen el papel de sujetos pasivos que reciben el conocimiento ni el de sujetos autocontenidos que construyen su propio conocimiento. De igual forma, los docentes no se reducen al papel de agentes tecnológicos y burócratas-guardianes e implementadores del currículo. No son los poseedores del saber que consignan o transmiten el conocimiento a los estudiantes directamente o a través de estrategias de sostenimiento estructurado. La noción de labor conjunta sugiere adoptar una perspectiva educativa en la cual se concibe la enseñanza y el aprendizaje no como dos actividades separadas sino como una sola y la misma actividad: aquella en la cual los docentes y los alumnos, incluso si no hacen las mismas cosas, se esfuerzan juntos, intelectual y emotivamente, en la realización de una labor en común.*

En esta larga y densa frase hay que resaltar varias cosas.

La primera es la idea hegeliana de *obra común* o *trabajo común* (Hegel, 1837/2001). Tomando desde Hegel (1820/1979, 1807/1995), se puede afirmar que la labor tiene su base en el reconocimiento del ser para sí, es decir la persona. La persona es al mismo tiempo trabajadora y consumidora y esto es reconocido por la persona misma y por los otros; esta voluntad-deseo de ser reconocida como tal en estos dos aspectos al tiempo, Hegel la llama “abstracción general del ser para-sí”. Obtener este reconocimiento es una existencia de voluntad, que pone el individuo en relación con su existencia singular, pero también en relación con los demás. El trabajo transforma y forma el sí mismo individual y el otro en personas, mejor: en personas para cada uno y para el otro: el hacer se puede entonces interpretar como un hacer respecto al otro. Así que la labor ya no es un hecho singular, sino algo común.

Segunda cosa que hay que resaltar tiene que ver con la primera parte de la frase precedente de Radford:

*La noción de labor conjunta sugiere adoptar una perspectiva educativa en la cual se concibe la enseñanza y el aprendizaje no como dos actividades separadas sino como una sola y la misma actividad: aquella en la cual los docentes y los alumnos, incluso si no hacen las mismas cosas.*

Ésta tiene como base la idea que la labor conjunta necesita y se basa sobre la pluralidad de los que trabajan ya no individualmente sino coralmente; y en este trabajo coral, por supuesto, como es característica del ser humano, se pueden generar incomprensiones, tensiones, faltas de consenso y contradicciones. Lo veremos otra vez dentro de poco.

Tercera y última nota, a propósito de la segunda parte de la frase de Radford: “se esfuerzan juntos, intelectual y emotivamente, en la realización de una labor en común”.

Hay que recordar que para Hegel (1837/2001) lo que cuenta en la vida de un individuo es su actividad conjunta con otros seres humanos en el proceso de producción; el ser humano coincide con lo que produce en esta labor conjunta. Él, en su existencia, acepta no tanto una labor individual, sino una labor conjunta en cuanto quiere mostrarse al mismo tiempo productor y consumidor. Naturalmente, en cuanto seres humanos, una Labor conjunta nos impulsa a actuar, pensar, reflexionar, operar en una posible comunalidad con otros individuos, lo cual lleva a realizar sí una obra común, pero son posibles discusiones, desacuerdos, discordancias, tensiones, ocasiones de desequilibrio. Pero es precisamente todo esto lo que crea la obra común para Hegel y que nosotros aceptamos como modelo de lo que sucede en la labor conjunta en un aula escolar.

Aprovecho de este párrafo y del tema desarrollado para profundizar explícitamente una afirmación hecha en precedencia, es decir que el término labor, utilizado en la TO, no es incoherente con la TSD.

Hay que decir primero que, en las seis fases que Guy Brousseau utiliza para identificar las características de una situación adidáctica (por ejemplo, Brousseau, 1998), no se estudia el problema de cómo el alumno aprende, sino de cómo los alumnos actúan. En la TSD no es central la problemática de las modalidades de aprendizaje. Por tanto, la idea de aprendizaje propuesto en la TO no puede contrastar con las ideas implícitas y las aceptados (al plural) en la TSD, incluso si, para mí, pareciera que aquí se hace referencia básicamente a visiones de tipo situado – social (respectivamente: Lave y Wenger, 1990; Bandura, 1986; estos autores no son citados explícitamente por Brousseau), de tipo constructivista. Más explícitamente: aprendizaje situado, dado que con las fases de devolución y de implicación (TSD) los alumnos aceptan comprometerse personalmente en la resolución de un específico problema oportuno, propuesto por el docente; social, porque en las fases específicas de la situación adidáctica se encuentran actividades de intercambio y de discusión acerca de las soluciones encontradas por cada uno de los estudiantes o por cada grupo y en ocasiones de re-consideración de los aprendizajes alcanzados.

Dicho esto, la labor que determina una situación adidáctica no contrasta, para mí, con la TO; es más: parece descrita por frases de Radford precedentemente citadas (Radford, 2016b, p. 6):

*La noción de labor conjunta sugiere adoptar una perspectiva educativa en la cual se concibe la enseñanza y el aprendizaje no como dos actividades separadas sino como una sola y la misma actividad: aquella en la cual los docentes y los alumnos, incluso si no hacen las mismas cosas, se esfuerzan juntos, intelectual y emotivamente, en la realización de una labor en común.*

Esta frase parece describir lo que pasa en una situación adidáctica; el docente propone un problema y se aparta, en el sentido que deja de ser el docente de estampa clásica que explica a sus alumnos lo que deben aprender de sus palabras, sino que se presenta como un ser humano que colabora con los aprendices, mezclándose y unificándose con ellos en cada fase de la situación misma: idea básica de labor común.

Las consideraciones hechas líneas arriba sobre actividad conjunta y labor conjunta con referencia a Hegel (2001) son consideraciones ejemplares en las actividades que se realizan en la TSD, precisamente en el específico caso de las situaciones adidáctica.

Esto no quita que las dos teorías, TSD y TO, sean divergentes y que se centren en diversas interpretaciones y modalidades de la labor de aula, pero esto tampoco significa que no se encuentren aspectos no del todo en oposición.

## CONCLUSIÓN

¿Por qué proponer una reflexión sobre algunos términos de una teoría que en la actualidad es ampliamente conocida, con principios muy claros y plenamente aceptada?

La reflexión es siempre útil; según Aristóteles (1961) y los escolásticos, reflexión significa conocimiento que el intelecto tiene de sí cuando, además de conocer, sabe que conoce. Un conocimiento de segundo nivel que se vuelve explícito si toma en examen a sí mismo (la llamada segunda intención de los escolásticos).

Según Locke (1971) esta actividad de reflexión (conocimiento de segundo nivel que él llama sentido interno) suscita ideas, para las cuales dos son las fuentes: una es externa a nuestra actividad, la otra es precisamente la que propongo, la reflexión sobre nuestras elecciones y sobre nuestras mismas reflexiones. Hume (2008) considera que las reflexiones son la reproducción de las imágenes y de las emociones (impresiones inmediatas) y dan origen o reelaboran las ideas, constituyendo por tanto una verdadera fuente de creación activa de pensamiento crítico. Kant (1781) propone dos tipos de reflexiones, las lógicas y las transcendentales, dependiendo de si se presentan diversas representaciones o explicaciones o descripciones para encontrar aspectos diversos o comunes, o si se determinan relaciones entre diversas acepciones recurriendo a las siguientes cuatro parejas de conceptos: identidad/diversidad, coincidencia/oposición, interno/externo, materia/forma.

Y así sucesivamente, son innumerables los filósofos que han dedicado espacio y... reflexiones alrededor de la idea de qué es y qué implicaciones tiene la reflexión, incluso desde un punto de vista terminológico.

De otra parte, la historia de la matemática nos lo enseña: pensemos en los cambios de ideas y por tanto de definiciones en matemática gracias a las reflexiones de los matemáticos a través de los siglos.

Guardo la esperanza que estos párrafos, dedicados a los términos que ya aparecen claros y significativos en la teoría de la objetivación, sean de utilidad y sirvan de estímulo para la difusión culta y compartida definitivamente.

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Martha Isabel Fandiño Pinilla, Maura Iori, Maurizio Matteuzzi, George Santi, Rodolfo Vergel y los dos árbitros anónimos por las diferentes contribuciones a la redacción de este texto.

## REFERENCIAS

- Agostino, S. (2005). *Contro gli accademici* (G. Catapano Ed.). Milano: Bompiani.
- Aristotele (1961). *Metafisica* (G. Reale, Ed.). Milano: Vita e pensiero.
- Bacon, F. (1900). *Advancement of learning and Novum organum* (J. E. Creighton, Trans.). New York: P. F. Collier & Son. (Trabajo original publicado en 1620).
- Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora.
- Bagni, G. T. y D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 19(1), 73–89.
- Bandura, A. (1986). *Social Foundations of Thought and Action*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Berkeley, G. (1996). *Principles of human knowledge*. Torino: UTET.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Cicerone, M. T. (1958). *Laelius seu de amicitia*. Milano: Mursia.
- D'Amore, B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Prefacio de G. Vérnaud. [2ª edición, 1996]. Milano: Angeli.
- D'Amore, B. (2001a). Corri, Achille, corri... Ovvero: come interpretare i paradossi. En B. D'Amore (2001). *Scritti di epistemologia matematica, 1980–2001* (pp. 129–133). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2001b). Riflessioni sulla Caratteristica leibniziana. En B. D'Amore (2001), *Scritti di Epistemologia Matematica, 1980–2001* (pp. 1–10). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2001c). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, 15(1), 4–30.
- D'Amore, B. (2005a). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 19(3), 325–336.
- D'Amore B. (2005b). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México DF, México: Reverté Ediciones.
- D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica: Prefacios de Gérard Vergnaud y de Silvia Sbaragli*. Modena, Italia: Digital Docet.

- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. En L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* (pp. 151–171). Urbino, Italia: University of Urbino Carlo Bo. Recuperado de <http://isonomia.uniurb.it/epistemologica/> / <http://isonomia.uniurb.it/node/30>
- D'Amore, B. y Fandiño-Pinilla, M. I. (2012). *Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze: Giunti Scuola.
- D'Amore, B., Fandiño-Pinilla, M. I. y Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiótica [La semiótica en la didáctica de la matemática]*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 38(2), 49–77.
- D'Amore, B. y Godino, D. J. (2006). Puntos de vista antropológico y ontosemiótico en didáctica de la matemática. *La matemática y su didáctica*, 20(1), 9–38.
- D'Amore, B. y Godino, D. J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime*, 10(2), 191–218.
- D'Amore, B. y Matteuzzi, M. (1972). Generalizzazione della “consequentia mirabilis” nelle logiche polivalenti. *Lingua e stile*, 7(2), 343–372.
- D'Amore, B., & Radford, L. (en prensa). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B., Radford, L. y Bagni, G. T. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática. Colección “Cuadernos del Seminario en educación”*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Descartes, R. (1641). *Méditations métaphysiques*. Parigi: M. Soly.
- Descartes, R. (1982). *Meditationes de prima philosophia* (G. Cantelli, Ed.). Firenze: La Nuova Italia.
- Descartes, R. (1999). *Discorso sul metodo* (G. D. Lucia, Ed.). Roma: Armando. (Trabajo original publicado en 1637).
- Dozza, L. (2006). *Relazioni cooperative a scuola*. Trento: Erickson.
- Dupré, L. K. (1983). *Marx's social critique of culture*. New Haven: Yale University Press.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de science cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* [Semiosis y pensamiento humano]. Berna, Suiza: Peter Lang.
- Eco, U. (1973). *Segno*. Milano: Isedi.

- Engels, F. (1956). *Dialettica della natura* (G. L. Radice, Ed.). Roma: Editori Riuniti.
- Font, V., Godino, D. J. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2–7 y 14.
- Hall, E. T. (1959). *The silent language*. New York: Doubleday.
- Hamilton, W. (1859-60). *Lectures on metaphysics and logic*. Edinburgh: W. Blackwood and sons.
- Harnecker, M. (1969). *Los conceptos elementales del materialismo histórico*. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Hegel, G. W. F. (1995). *Fenomenologia dello spirito*. Milano: Rusconi. (Trabajo original publicado en 1807).
- Hegel, G. W. F. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, ON: Batoche Books. (Trabajo original publicado en 1837).
- Hjelmslev, L. (1968). *I fondamenti della teoria del linguaggio* (E. G. Lepschy, Trans.). Torino: Einaudi. (Trabajo original publicado en 1943)
- Hume, D. (2008). *Trattato sulla natura umana*. Bari-Roma: Laterza.
- Kant, I. (1781). *Kritik der reinen Vernunft*. Riga: J. F. Hartknock
- Lave, J., y Wenger, E., *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*, Cambridge University Press, 1990.
- Leibniz, G. W. (1966). *Principi della natura e della grazia fondati sulla ragione* (L. Pozzi, Ed.). Padova: Liviana. (Trabajo original publicado en 1714).
- Leibniz, G. W. (1992). *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano* (J. Echeverría, Ed.). Madrid: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1704).
- Locke, J. (1690). *An essay concerning human understanding*. London, Reino Unido: Thomas Bassett. (Traduc. ital.: 1988, Bari: Laterza).
- Locke, J. (1971). *Saggio sull'intelletto umano*. Torino: Utet.
- Łukasiewicz, L. (1951). *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*. Oxford: Clarendon Press.
- Łukasiewicz, L. (1970). *Selected works* (L. Borkowski, Ed.). Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Marx, K. (1944). *Il 18 Brumaio di Luigi Bonaparte*. Roma, Italia: De Luigi Editore. (Trabajo original publicado en 1852)
- Moore, G. E. (1903). The refutation of idealism. *Mind*, 12(48), 433–453.
- Parmenide (2006). *Poema sulla natura*. Milano: Medusa.
- Pasquinelli, A. (Ed.) (1969). *Il neoempirismo*. Torino: UTET.
- Platone (1997). *Tutti gli scritti* (G. Reale, Ed.). Milano: Bompiani.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 165–178.

- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 18(1), 4–23.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129.
- Radford, L. (2008a). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. Working Paper. ICMI 11 Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research*.
- Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 317–327.
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez, y R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docente: intervenció, innovació, investigació* [Teacher's activity: Intervention, innovation, research] (pp. 33–49). Girona, España: Documenta Universitaria.
- Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44.
- Radford, L. (2013b). De la teoría de la objetivación. *Revista Científica Edición Especial*. Recuperado de [http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME\\_14\\_Revista\\_Cientifica\\_EdicionEspecial\\_-\\_Memorias\\_ECME\\_14.pdf](http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial_-_Memorias_ECME_14.pdf)
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2015). The epistemological foundations of the theory of objectification. En L. Branchetti (Ed.). *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education* (pp. 127–149). Urbino, Italia: University of Urbino Carlo Bo.
- Radford, L. (2016a). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258–266.

- Radford, L. (2016b). Mathematics education as a matter of labor. En M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory*. Singapore: Springer.
- Radford, L. (2017). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (en prensa). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Santucci, A. (Ed.) (1970). *Il pragmatismo*. Torino: UTET.
- Schrödinger**, E. (1987). *L'immagine del mondo*. Torino: Boringhieri.
- Schuppe, G. (1910). *Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*. Berlin: Weidenmannsche Buchhandlung.
- Scoto, J. D. (1996). *Antologia*. Alberobello, Italia: AGA Editrice.
- Togliatti, P. (1954). Da Hegel al marxismo. *Rinascita*, 11(1), 254–256, 336–339, 387–393.
- Tommaso (1990). *La somma teologica* (T. S. Centi y A. Boccanegra, Trans.). Bologna: Edizioni Studio Domenicano.
- Turco, L. (1974). *Dal sistema al senso comune: studi sul newtonismo e gli illuministi britannici*. Bologna: Il Mulino.
- Vailati, G. (1911). A proposito di un passo del *Teeteto* e d'una dimostrazione d'Euclide. En G. Vailati (Ed.), *Scritti di Giovanni Vailati* (pp. 516–527). Leipzig, Alemania: J. A. Barth
- Watzlawick, P. (1976). *La realtà della realtà*. Roma: Astrolabio Ubaldini Edizioni.
- Watzlawick, P., Beavin, J. H. y Jackson, D. D. (1971). *Pragmatica della comunicazione umana: studio dei modelli interattivi, delle patologie e dei paradossi* (M. Ferretti, Trans.). Roma, Italia: Astrolabio.
- Williams, B. y Montefiore, A. (1966). *British analytical philosophy*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Whorf, B. L. (1940a). Science and linguistics. *MIT Technology Review*, 42(6), 229–231.
- Whorf, B. L. (1940b). *Linguistics as an exact science: New ways of thinking, hence of talking, about facts vastly alter the world of science, emphasizing the need for investigation of language*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press.
- Whorf, B. L. (1970). *Linguaggio, pensiero e realtà* (J. B. Carroll, Ed.). Torino, Italia: Boringhieri. (Trabajo original publicado en 1956).

Bruno D'Amore  
University of Cyprus  
bruno.damore@unibo.it

Recibido: Mayo 2017. Aceptado: Enero 2018  
Handle:



ISSN: 1887-3987