

Universidad de Granada
Departamento de Métodos Cuantitativos
para la Economía y la Empresa



Universidad de Granada

**GENERACIÓN DE DISTRIBUCIONES
APLICABLES EN AMBIENTE DE
INCERTIDUMBRE Y EN EL ÁMBITO
FINANCIERO**

Tesis doctoral

**María del Mar López Martín
Granada, 2010**

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: María del Mar López Martín
D.L.: GR 2259-2010
ISBN: 978-84-693-1315-2

Universidad de Granada
Departamento de Métodos Cuantitativos
para la Economía y la Empresa



Universidad de Granada

**GENERACIÓN DE DISTRIBUCIONES
APLICABLES EN AMBIENTE DE
INCERTIDUMBRE Y EN EL ÁMBITO
FINANCIERO**

Tesis doctoral

**María del Mar López Martín
Granada, 2010**

María del Mar López Martín

**GENERACIÓN DE DISTRIBUCIONES
APLICABLES EN AMBIENTE DE
INCERTIDUMBRE Y EN EL ÁMBITO
FINANCIERO**

Memoria de tesis presentada por María del Mar López Martín para optar al grado de Doctor por la Universidad de Granada bajo la dirección de los Doctores, D. Rafael Herrerías Pleguezuelo, D. José García Pérez y Dña. Catalina B. García García.

Fdo. María del Mar López Martín

V° B° Directores de tesis:

Fdo. D. Rafael Herrerías Pleguezuelo

Fdo. D. José García Pérez

Fdo. Dña. Catalina B. García García

AGRADECIMIENTOS

Quiero dejar mi más profundo agradecimiento a mis tutores Rafael Herrería Pleguezuelo, José García Pérez y Catalina García García por su constante asesoramiento y confianza en todo momento.

Gracias a todos mis compañeros del Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa por sus muestras de ánimo y apoyo durante la realización de este trabajo y, al profesor Miguel Ángel Sánchez de la Universidad de Almería por su ayuda y amabilidad.

Mención especial a mi directora y compañera, que junto a su familia han mostrado un gran entusiasmo y esfuerzo incesante.

Por último, agradecer a mi familia la comprensión, paciencia y cariño aportada durante este periodo.

María del Mar

A **Ti**, por estar cuando más te necesito.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	1
1. MODELOS PROBABILÍSTICOS EMPLEADOS EN EL TRATAMIENTO DEL RIESGO Y LA INCERTIDUMBRE	5
1.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	6
1.1.1. Distribución Uniforme o Rectangular	6
1.1.1.1. Distribución rectangular estandarizada	8
1.1.2. Distribución Triangular	9
1.1.2.1. Distribución triangular estandarizada	10
1.1.3. Distribución Beta	12
1.1.3.1. Distribución beta estandarizada	15
1.1.4. Distribución Trapezoidal	17
1.1.4.1. Distribución trapezoidal estandarizada	20
1.1.5. Distribución Two-Sided Power	21
1.1.5.1. Distribución TSP estandarizada	23
1.1.6. Distribución Biparabólica	24
1.1.6.1. Distribución biparabólica estandarizada	25
1.1.6.2. Distribución biparabólica generalizada de una rama	27
1.1.7. Distribución Coseno	31
1.2. SISTEMA GENERADOR DE VAN DORP Y KOTZ	32

2. CONSTRUCCIÓN Y ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y LA DISTRIBUCIÓN BISENO. GENERALIZACIÓN Y APLICACIÓN EN EL PERT	35
2.1. DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO	37
2.1.1. Construcción y características estocásticas de la distribución bicúbica	37
2.1.1.1. Construcción distribución bicúbica	37
2.1.1.2. Características estocásticas distribución bicúbica	40
2.1.2. Construcción y características estocásticas de la distribución biseno	42
2.1.2.1. Construcción distribución biseno	42
2.1.2.2. Características estocásticas distribución biseno .	45
2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO	48
2.2.1. Generalización de la distribución bicúbica	48
2.2.1.1. Construcción de la generalización a una rama de la distribución bicúbica	48
2.2.1.2. Cálculo de los momentos	54
2.2.1.3. Estudio de la asimetría y curtosis de la distribución GBC_1	57
2.2.1.4. Estimación de la distribución GBC_1 mediante restricciones en la familia de distribuciones	62
2.2.2. Generalización de la distribución biseno	63
2.2.2.1. Construcción de la generalización a una rama de la distribución biseno	63
2.2.2.2. Cálculo de los momentos y estudio de su forma .	67
2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA	69
2.3.1. Generalización de la distribución bicúbica	70
2.3.2. Cálculo de los momentos	75
2.4. APLICACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES BICÚBICA Y BI-SENO EN LA METODOLOGÍA PERT	78
2.5. CONCLUSIÓN	82

3. ESTIMACIÓN ROBUSTA EN GESTIÓN DE PROYECTOS (PERT)	85
3.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	86
3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES	91
3.2.1. La distribución U-GBC	93
3.2.1.1. Principales Características	96
3.2.2. Distribuciones alternativas para el ambiente de incertidumbre	99
3.2.2.1. Características Estocásticas de las distribuciones U-TSP y U-GBP	103
3.2.3. Estudio comparativo de distribuciones	107
3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES	108
3.3.1. Elicitación de la distribución U-GBC	111
3.3.2. Elicitación de la distribución U-TSP	114
3.3.3. Elicitación de la distribución U-GBP	117
3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA	120
3.5. CONCLUSIÓN	135
4. TRATAMIENTO DE LA CURTOSIS EN EL ÁMBITO FINANCIERO	139
4.1. DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO	145
4.1.1. Las distribuciones GBC y U-GBC en el ámbito financiero .	146
4.1.1.1. La distribución bicúbica generalizada en el ámbito financiero	146
4.1.1.2. La distribución U-GBC en el ámbito financiero .	148
4.1.2. Otras distribuciones en el ámbito financiero	150
4.2. TRATAMIENTO DE LA CURTOSIS	156
4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA	160
4.3.1. Estimación de las distribuciones	160
4.4. CONCLUSIÓN	177
CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	179
Bibliografía	190

A. Características Estocásticas de las Distribuciones en el Ámbito Financiero	203
A.1. Distribución Beta	203
A.2. Distribución U-Beta	204
A.3. Distribución TSP	204
A.4. Distribución U-TSP	205
A.5. Distribución GBP	205
A.6. Distribución U-GBP	205

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Función de densidad distribución uniforme	7
1.2. Función de distribución de la distribución uniforme	7
1.3. Función de densidad de la distribución triangular.	9
1.4. Función de densidad de la distribución beta clásica.	15
1.5. Función de densidad de la distribución beta estandarizada	16
1.6. Función de densidad de la distribución trapezoidal.	18
1.7. Función de densidad de la distribución TSP (1)	23
1.8. Función de densidad de la distribución TSP (2)	23
1.9. Función de densidad de la distribución TSP (3)	23
1.10. Función de densidad de la distribución TSP (4)	23
1.11. Función de densidad de la distribución SGBP	28
1.12. Función de densidad de la distribución SGBP con $n = 1.40407148$	29
1.13. Función de densidad de la distribución SGBP con $n = 2.74669$	30
1.14. Coeficiente de curtosis de la distribución SGBP.	30
1.15. Función de densidad de la distribución coseno.	31
2.1. Polinomio generador de la distribución bicúbica	37
2.2. Función de densidad de la distribución bicúbica.	38
2.3. Coeficiente de asimetría de la distribución SBC.	42
2.4. Coeficiente de curtosis de la distribución SBC.	42

2.5. Polinomio generador distribución biseno	43
2.6. Función de densidad de la distribución biseno.	44
2.7. Coeficiente de asimetría de la distribución SBS	47
2.8. Coeficiente de curtosis de la distribución SBS	47
2.9. Coeficiente de curtosis de la distribución GBC (1)	50
2.10. Coeficiente de curtosis de la distribución GBC (2)	50
2.11. Coeficiente de curtosis de la distribución GBC (3)	50
2.12. Función generadora y de densidad distribución $SGBC_1(M, 0.1)$. .	52
2.13. Función generadora y de densidad distribución $SGBC_1(M, 1)$. . .	52
2.14. Función generadora y de densidad distribución $SGBC_1(M, 1.9)$. .	52
2.15. Función generadora y de densidad distribución $SGBC_1(M, 3)$. . .	53
2.16. Función generadora y de densidad distribución $SGBC_1(M, 10)$. .	53
2.17. Función generadora y de densidad distribución $SGBC_1(M, 30)$. .	53
2.18. Función de densidad de la distribución $SGBC_1$ en función de M y n	57
2.19. Coeficiente de asimetría de la distribución GBC_1 (1).	58
2.20. Coeficiente de asimetría de la distribución GBC_1 (2).	58
2.21. Coeficiente de curtosis de la distribución GBC_1	60
2.22. Diagrama del ratio de los momentos	61
2.23. Función de densidad de la distribución GBC_1 clásica	63
2.24. Coeficiente de curtosis de la distribución GBS (1)	64
2.25. Coeficiente de curtosis de la distribución GBS (2)	64
2.26. Función generadora y de densidad de la distribución $SGBS(M, 1.1)$	67
2.27. Función generadora y de densidad de la distribución $SGBS(M, 2)$	67
2.28. Función generadora y de densidad de la distribución $SGBS(M, 30)$	67
2.29. Coeficiente de asimetría de la distribución $SGBS$	69
2.30. Coeficiente de curtosis de la distribución $SGBS$	69
2.31. Representación gráfica de π	73
2.32. Función de densidad de la distribución $SGBC_2(0.5, 2, 20)$	74
2.33. Función de densidad de la distribución $SGBC_2(0.5, 20, 2)$	74
2.34. Función de densidad de la distribución $SGBC_2(0.5, 10, 10)$	74
2.35. Función de densidad de la distribución $SGBC_2(0.5, 0, 0)$	75
2.36. Valor esperado de la distribución $SGBC_2$ (1)	77
2.37. Valor esperado de la distribución $SGBC_2$ (2)	77

2.38. Varianza de la distribución $SGBC_2$ (1)	77
2.39. Varianza de la distribución $SGBC_2$ (2)	77
2.40. Coeficiente de curtosis de la distribución $SGBC_2$	77
2.41. Estudio comparativo de los valores esperados en la metodología PERT.	81
2.42. Estudio comparativo de las varianzas en la metodología PERT.	81
3.1. Coeficientes de curtosis de las distribuciones clásicas beta, GBC, TSP, GBP	89
3.2. Coeficientes de curtosis de las distribuciones simétricas beta, GBC, TSP, GBP	90
3.3. Función de densidad de la distribución U-BETA	92
3.4. Función de densidad de la distribución U-SGBC	95
3.5. Varianza de las distribuciones U-CSGBC y U-CBETA	98
3.6. Coeficiente de curtosis de las distribuciones U-CSGBC y U-CBETA	98
3.7. Varianza de las distribuciones U-SCSGBC y U-SCBETA	99
3.8. Función de densidad de la distribución U-STSP	101
3.9. Función de densidad de la distribución U-SGBP	101
3.10. Varianza de las distribuciones U-CSTSP, U-CSGBP y U-CBETA	105
3.11. Varianza de las distribuciones U-SCSTSP, U-SCSGBP y U-SCBETA	106
3.12. Coeficiente de curtosis de las distribuciones U-CSTSP y U-CSGBP con U-CBETA	106
3.13. Varianza de las distribuciones U-CBETA, U-CSGBC, U-CSTSP y U-CSGBP	107
3.14. Coeficiente de curtosis de las distribuciones U-CBETA, U-CSGBC, U-CSTSP y U-CSGBP	108
3.15. Resolución gráfica del parámetro n en la distribución U-GBC con solución	113
3.16. Resolución gráfica del parámetro n en la distribución U-GBC sin solución	114
3.17. Resolución gráfica del parámetro n en la distribución U-GBP con solución	119

3.18. Resolución gráfica del parámetro n en la distribución U-GBP sin solución	119
3.19. Diagrama PERT	122
3.20. Simulación de las distribuciones con $\theta = 0.25$	124
3.21. Simulación de las distribuciones con $\theta = 0.5$	125
3.22. Simulación de las distribuciones con $\theta = 0.75$	125
3.23. Simulación de las distribuciones con $\theta = 1$	126
3.24. Simulación con $\theta = 0.25$	128
3.25. Simulación con $\theta = 0.5$	129
3.26. Simulación con $\theta = 0.75$	129
3.27. Función de distribución de las distribuciones clásicas U-BETA y U-SGBC	133
3.28. Función de distribución de las distribuciones U-CBETA, U-CSTSP y U-CSGBP	133
3.29. Función de distribución de las distribuciones elicítadas	135
4.1. Histograma del valor BAS	141
4.2. Función de densidad de la distribución GBC financiera	147
4.3. Función de densidad de la distribución U-GBC financiera	149
4.4. Función de densidad de las distribuciones financieras	152
4.5. Función de densidad de la distribución U-BETA financiera	153
4.6. Función de densidad de la distribución U-TSP financiera	154
4.7. Función de densidad de la distribución U-GBP financiera	154
4.8. Coeficiente de curtosis de las distribuciones simétricas	157
4.9. Coeficiente de curtosis de las distribuciones mixturas simétricas	159
4.10. Evolución del índice bursátil DJ Eurostoxx 50	161
4.11. Evolución del valor BAS y su diferencia logarítmica	162
4.12. Evolución del valor FORA y su diferencia logarítmica	163
4.13. Gráfico QQ Plot valor BAS y FORA	169
4.14. Kernel de la función de densidad empírica	175
4.15. Ajuste de la distribución U-GBC	175
4.16. Ajuste de la distribución U-GBP	176
5.1. Gráfico de la calibración de un experto	184

ÍNDICE DE FIGURAS

5.2. Función de distribución uniforme y función de distribución de una distribución continua	185
5.3. Representación gráfica de las varianzas.	186
5.4. Representación gráfica de los calibres.	186

ÍNDICE DE CUADROS

2.1. Valor esperado y varianza de las distribuciones estandarizadas utilizadas en la metodología PERT.	80
3.1. Funciones de densidad y de distribución de las distribuciones U-STSP y U-SGBP	100
3.2. Funciones de densidad y de distribución de las distribuciones U-TSP y U-GBP	102
3.3. Características estocásticas U-STSP y U-SGBP	104
3.4. Resumen Estadístico de las distribuciones U-CBETA, U-CSGBC, U-CSTSP y U-CSGBP.	124
3.5. Resumen estadístico de las distribuciones U-BETA, U-SGBC, U-STSP y U-SGBP.	128
3.6. Intervalos de confianza y $P(X \leq x) = 0.95$	132
4.1. Expresiones de las funciones asociadas a las distribuciones beta, TSP y GBP.	151
4.2. Expresiones de las funciones de densidad y de distribución de las distribuciones U-BETA, U-TSP y U-GBP.	155
4.3. Resumen estadístico de los valores del índice DJ Eurostoxx 50	165
4.4. Test de Wilcoxon para el estudio de la asimetría.	167

4.5. Resumen de los coeficientes de asimetría y de curtosis de los rendimientos.	167
4.6. p -valor del test de Kolmogorov-Smirnov de los ajustes realizados en $[0,1]$ utilizando los valores diarios.	172
4.7. p -valor del test de Kolmogorov-Smirnov de los ajustes realizados en $[-s,s]$ utilizando los valores diarios.	172
4.8. Estimación de los parámetros obtenidos en la utilización del método de mínimos cuadrados.	177

ÍNDICE DE SIGLAS

- BC: distribución bicúbica, definida en $[a, b]$.
- BP: distribución bipolarabólica, definida en $[a, b]$.
- BS: distribución biseno, definida en $[a, b]$.
- GBC y GBC₁: distribución bicúbica generalizada a una rama, definida en $[a, b]$.
- GBC₂: distribución bicúbica generalizada a dos ramas, definida en $[a, b]$.
- GBP: distribución bipolarabólica generalizada a una rama, definida en $[a, b]$.
- GBS: distribución biseno generalizada a una rama, definida en $[a, b]$.
- SBC: distribución bicúbica, estandarizada en $[0, 1]$.
- SBP: distribución bipolarabólica, estandarizada en $[0, 1]$.
- SGBC y SGBC₁: distribución bicúbica generalizada a una rama, estandarizada en $[0, 1]$.
- SGBC₂: distribución bicúbica generalizada a dos ramas, estandarizada en $[0, 1]$.

- SGBP: distribución biparabólica generalizada a una rama, estandarizada en $[0, 1]$.
- SGBS: distribución biseno generalizada a una rama, estandarizada en $[0, 1]$.
- STSP: distribución two-sided power, estandarizada en $[0, 1]$.
- TSP: distribución two-sided power, definida en $[a, b]$.
- U-BETA: mixtura de las distribuciones uniforme y beta, definida en $[a, b]$.
- U-CSGBC: mixtura de las distribuciones uniforme y bicúbica generalizada clásica, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-CSGBP: mixtura de las distribuciones uniforme y biparabólica generalizada clásica, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-CSTSP: mixtura de las distribuciones uniforme y two-sided power clásica, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-GBC: mixtura de las distribuciones uniforme y bicúbica generalizada, definida en $[a, b]$.
- U-GBP: mixtura de las distribuciones uniforme y biparabólica generalizada, definida en $[a, b]$.
- U-SBETA: mixtura de las distribuciones uniforme y beta, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-SCBETA: mixtura de las distribuciones simétricas uniforme y beta clásica, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-SCSGBC: mixtura de las distribuciones simétricas uniforme y bicúbica generalizada clásica, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-SCSGBP: mixtura de las distribuciones simétricas uniforme y biparabólica generalizada clásica, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-SCSTSP: mixtura de las distribuciones simétricas uniforme y two-sided power clásica, estandarizada en $[0, 1]$.

- U-SGBC: mixtura de las distribuciones uniforme y bicúbica generalizada, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-SGBP: mixtura de las distribuciones uniforme y bipolarabólica generalizada, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-STSP: mixtura de las distribuciones uniforme y two-sided power, estandarizada en $[0, 1]$.
- U-TSP: mixtura de las distribuciones uniforme y two-sided power, definida en $[a, b]$.

INTRODUCCIÓN

Ya en 1919, Pairman y Pearson, [87], resaltaron la importancia de las distribuciones continuas y acotadas dentro de la teoría estadística. Sin embargo, durante el siglo XX la investigación se centró en las distribuciones no acotadas, entre las que destaca la distribución normal. Esta abundancia de distribuciones no acotadas contrasta con la escasez de modelos acotados desarrollados en este periodo.

El uso de distribuciones no acotadas se generalizó hasta el extremo de proponer modelos con estas características para ajustar fenómenos descritos sobre dominios acotados. Por ejemplo, Fama, [27], propone la distribución normal como distribución subyacente para el ajuste de los rendimientos financieros definidos sobre un dominio acotado.

La justificación para ajustar datos acotados con distribuciones no limitadas podría ser el mayor desarrollo teórico de este tipo de distribuciones, que facilitan, su aplicación práctica. El avance computacional actual nos permite una mayor exigencia a la hora de describir como distribución subyacente aquella que se comporte con características similares a las presentadas por los datos empíricos.

Como alternativa acotada de la distribución normal se ha usado e, incluso, abusado de la distribución beta. Se podrían nombrar multitud de aplicaciones en muy diversos campos desde la ingeniería a la medicina. Especial interés tiene su aplicación como distribución subyacente en la metodología PERT propuesta por

la marina estadounidense.

Es conocido que la distribución beta no tiene una expresión cerrada de su función de distribución y que sus parámetros carecen de una interpretación intuitiva. A pesar de ello, es innegable que la distribución beta continúa siendo aplicada en una multitud de campos y, que sin duda, es un referente en la teoría de distribuciones continuas acotadas.

Muestra de ello es el manual publicado por Gupta y Nadarajah, [39]. Con el objetivo de desarrollar distribuciones alternativas a la beta, van Dorp y Kotz realizan determinados avances que concluyen con la presentación de la distribución two-sided power en el año 2002. Esta distribución, que resulta ser una generalización de la distribución triangular, supera los inconvenientes anteriormente descritos y además presenta una función de densidad con forma de pico que contrasta con la suavidad de la distribución beta. Esta característica puede resultar muy apropiada en el caso de ajuste de datos financieros que suelen presentar histogramas con apuntamiento pronunciado.

Continuando con el objetivo de extender las alternativas de la distribución beta, se publica en el año 2004 la monografía *Beyond Beta* (Kotz y van Dorp, [61]) que, como su propio título indica, recoge distribuciones acotadas que pueden servir como alternativa a la distribución beta y que se pueden considerar extensiones de la distribuciones triangular. Se recogen alternativas novedosas como, por ejemplo, la anteriormente citada two-sided power, y otras, como la distribución Topp-Leone, que fueron publicadas durante el siglo XX pero que permanecieron en la oscuridad, relativamente desconocidas, hasta que el interés por las distribuciones acotadas ha resurgido.

La principal aportación de esta memoria es la presentación de un conjunto de distribuciones acotadas que podrían servir de alternativa a la distribución beta en la metodología PERT y a la distribución normal en el ámbito financiero. De esta manera se pretende seguir extendiendo el conjunto de distribuciones acotadas disponibles y completar así el vacío existente en la literatura del siglo XX con respecto a este aspecto.

La memoria que se presenta está compuesta por cuatro capítulos, siendo en todos ellos común la presencia y construcción de distribuciones acotadas en un dominio finito.

En el primer capítulo se presenta una breve revisión bibliográfica de las principales distribuciones que habitualmente han sido empleadas dentro de la metodología PERT, así como las construidas recientemente, la distribución two-sided power y la distribución biparabólica. Utilizando como referencia los estudios desarrollados por van Dorp y Kotz, [111], se muestra el sistema generador de distribuciones unimodales, que será la base del desarrollo teórico mostrado a lo largo de este trabajo.

En el segundo capítulo se presentan las distribuciones bicúbica y biseno, así como la generalización de ambas. Con el objeto de enmarcarlas dentro del ambiente de incertidumbre se realiza una mención especial al estudio de sus valores esperados y varianzas.

Con el objeto de solventar los problemas existentes en la presencia de colas pesadas (*heavy tails*), y utilizando como punto de partida los estudios presentados por Hahn, [41], se muestra en el tercer capítulo la construcción de diversas distribuciones utilizando el proceso de mixtura. Basándonos en los resultados obtenidos en la aplicación práctica, se proponen las distribuciones construidas, en dicho capítulo, como modelos probabilísticos para su aplicación en el ámbito de incertidumbre.

Utilizando como referencia las conclusiones obtenidas con las distribuciones construidas en el tercer capítulo, y teniendo las características de apuntamiento y colas pesadas, se enmarcan dentro del ámbito financiero. Así pues, teniendo en cuenta las características que presentan los mercados financieros, se realiza las transformaciones necesarias de adaptación de las distribuciones para su posterior aplicación en el ajuste de los rendimientos financieros pertenecientes al índice bursátil DJ Eurostoxx 50.

Por último y a modo de conclusión, se presenta un breve resumen de los resultados y conclusiones obtenidas en cada uno de los capítulos, así como las líneas de investigación que han surgido de los estudios mostrados en esta memoria.

CAPÍTULO 1

MODELOS PROBABILÍSTICOS EMPLEADOS EN EL TRATAMIENTO DEL RIESGO Y LA INCERTIDUMBRE

Las distribuciones de probabilidad rectangular o uniforme, triangular y beta son utilizadas habitualmente, dentro de la metodología PERT, para el estudio de la duración de un proyecto de fabricación o realización de un trabajo en función de la duración de las diferentes tareas o actividades, Romero, [97]. Además, han sido empleadas en el análisis de la bondad de un proyecto de inversión mediante sus diversos flujos de caja, actualizados según su valor capital, Suárez, [104] e incluso para la valoración de bienes en ambiente de incertidumbre, haciendo uso del método de las dos funciones de distribución, Caballer [11].

En este primer capítulo de presentación, se realiza una breve revisión bibliográfica sobre los modelos probabilísticos citados anteriormente e incluir algunos de los modelos presentados recientemente para el tratamiento del riesgo y la incertidumbre. Entre ellos cabe destacar la distribución two-sided power (TSP), van Dorp y Kotz, [109], la distribución bипarabólica, García, [31] y [34] y

la distribución coseno, Castrup, [14].

Para terminar el capítulo, se presenta el sistema generador de van Dorp y Kotz, que será una de las herramientas fundamentales en el desarrollo teórico de los capítulos siguientes.

1.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

1.1.1. Distribución Uniforme o Rectangular

La utilización de la distribución uniforme o rectangular dentro de la metodología PERT ha sido de gran utilidad por requerir un primer nivel de información. Aunque fundamentalmente se utiliza cuando no se dispone de información suficiente y su estimación es muy simple, presenta el inconveniente del excesivo valor de su varianza, conduciendo a resultados excesivamente conservadores.

Definición 1.1 *Sea X una variable aleatoria valuada en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se dice que se distribuye uniformemente o según una distribución rectangular si y sólo si su función de densidad asociada responde a la expresión:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Por tanto, la probabilidad de que X esté en el intervalo $[a, b]$ es siempre constante, alcanzando el valor $\frac{1}{b-a}$, mientras que la probabilidad de que X no pertenezca al intervalo es nula. La distribución rectangular es conocida también como distribución uniforme ya que la probabilidad de que X pertenezca al intervalo $[a, b]$ queda repartida de forma uniforme en el dominio de definición de dicha variable, tal y como se muestra en la Figura 1.1.

La función de distribución asociada a la distribución uniforme viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x \geq b, \end{cases} \quad (1.2)$$

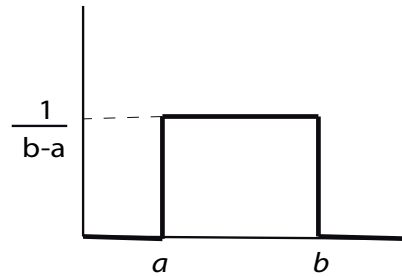


Figura 1.1: Función de densidad de la distribución uniforme.

y, cuya representación gráfica corresponde a la Figura 1.2.

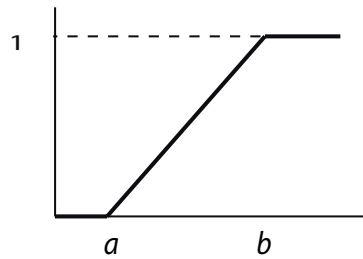


Figura 1.2: Función de distribución de la distribución uniforme.

Las principales características estocásticas que presenta dicha distribución son:

$$\Rightarrow \text{Función generatriz de momentos} \quad G(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}, \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow \text{Media} \quad E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad (1.4)$$

$$\Rightarrow \text{Varianza} \quad \text{var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad (1.5)$$

$$\Rightarrow \text{Coeficiente de asimetría de Fisher} \quad \beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 0, \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow \text{Coeficiente de curtosis de Fisher} \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{-6}{5}. \quad (1.7)$$

Por tanto, teniendo en cuenta el valor de su coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis se puede afirmar que la distribución rectangular es simétrica ya que $\beta_1 = 0$ y, además es platicúrtica, por presentar un coeficiente de curtosis inferior al de la distribución gaussiana.

1.1.1.1. Distribución rectangular estandarizada

Las expresiones (1.1) y (1.2) pueden simplificarse considerando la variable estandarizada

$$T = \frac{X - a}{b - a}.$$

Realizando el cambio de variable, se tiene que la función de densidad y la función de distribución de la distribución rectangular estandarizada quedan reducidas a las expresiones siguientes:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ t & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

En el caso particular de la distribución rectangular estandarizada se tiene que sus características estocásticas corresponden a:

$$\Rightarrow \text{Función Generatriz de Momentos} \quad G(t^*) = \frac{e^{t^*} - 1}{t^*}, \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow \text{Media} \quad E(T) = \frac{1}{2}, \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow \text{Varianza} \quad \text{var}(T) = \frac{1}{12}, \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow \text{Coeficiente de asimetría} \quad \beta_1 = 0, \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow \text{Coeficiente de curtosis} \quad \beta_2 = \frac{-6}{5}. \quad (1.14)$$

Tal y como se ha comentado al inicio de este apartado, la característica principal que presenta dicha distribución, es que solamente requiere la información correspondiente a los extremos del intervalo. Por tanto, recurriendo a la ayuda de un experto se puede describir la expresión de dicha distribución utilizando los valores, mínimo (a) y máximo (b).

1.1.2. Distribución Triangular

La distribución triangular fue una de las primera distribuciones de tipo continuo propuestas. Fue presentada en 1755 por el matemático inglés Simpson, [100].

La distribución triangular se caracteriza por tener una aproximación inicial en aquellas situaciones donde se carece de información. Es una distribución ampliamente utilizada en el análisis de la duración de proyectos económicos usando la información aportada por una persona experta en el tema, ya que queda perfectamente determinada a partir del valor mínimo a , valor máximo b y valor más probable m .

Definición 1.2 Sea X una variable aleatoria definida en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se dice que X se distribuye según una distribución triangular si su función de densidad responde a la expresión:

$$f(x) = \frac{2}{b-a} \begin{cases} \frac{x-a}{m-a} & a \leq x \leq m, \\ \frac{x-b}{m-b} & m \leq x \leq b. \end{cases} \quad (1.15)$$

La distribución presenta distintas intensidades en su asimetría dependiendo de la situación del valor modal con respecto al centro del intervalo, tal y como se observa en los gráficos mostrados en la Figura 1.3.

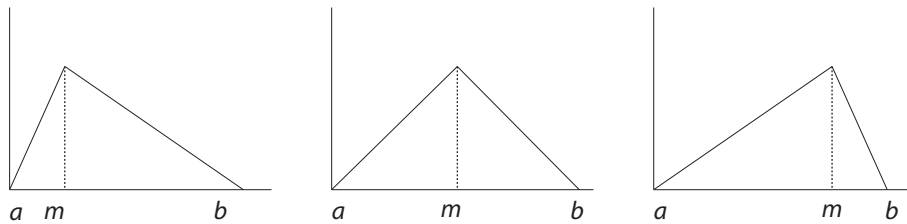


Figura 1.3: Función de densidad de la distribución triangular.

La función de distribución asociada a la función de densidad (1.15) viene dada por la expresión (1.16). Teniendo en cuenta la expresión que describe a la función de distribución se observa que es una función fácilmente invertible, no presentando problemas de estimación de sus parámetros cuando se han estimado subjetivamente o determinado, Herreras, [47], los valores de a , b y m .

$$F(x) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{(x-a)^2}{m-a} & a \leq x \leq m, \\ \frac{(x-b)^2}{m-b} & m \leq x \leq b, \\ 1 & x \geq b. \end{cases} \quad (1.16)$$

Así pues, la función inversa de (1.16) viene dada por:

$$F^{-1}(\alpha) = x_\alpha = \begin{cases} a + \sqrt{\alpha(b-a)(m-a)} & 0 < \alpha \leq \frac{m-a}{b-a}, \\ b - \sqrt{(1-\alpha)(b-a)(b-m)} & \frac{m-a}{b-a} < \alpha < 1, \end{cases} \quad (1.17)$$

siendo x_α un cuantil de la función de distribución $F(x)$, Palacios et al., [89].

Las principales características estocásticas a destacar de la distribución triangular son, su función generatriz de momentos (1.25), valor esperado (1.26), varianza (1.27) y coeficientes de asimetría (1.28) y curtosis, (1.29).

$$G(t) = 2 \frac{(b-m)e^{at} + (m-a)e^{bt} - (b-a)e^{mt}}{t^2(b-a)(m-a)(b-m)}, \quad (1.18)$$

$$E[X] = \frac{a+m+b}{3}, \quad (1.19)$$

$$\text{var}[X] = \frac{(b-m)^2 + (m-a)^2 + (b-m)(m-a)}{18}, \quad (1.20)$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}(a-2m+b)(b-2a+m)(2b-m-a)}{5((b-a)^2 - (m-a)(b-m))^{3/2}}, \quad (1.21)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{-3}{5}. \quad (1.22)$$

1.1.2.1. Distribución triangular estandarizada

Con objeto de presentar la distribución triangular estandarizada se considera el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$, así pues las expresiones (1.15) y (1.16) adoptan una forma más simplificada, tal y como se muestran en (1.23) y (1.24) para el

caso de la función de densidad y de distribución respectivamente.

$$f(t) = 2 \begin{cases} \frac{t}{M} & 0 \leq t \leq M, \\ \frac{1-t}{1-M} & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.23)$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \frac{t^2}{M} & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - \frac{(1-t)^2}{1-M} & M \leq t \leq 1, \\ 1 & t \geq 1. \end{cases} \quad (1.24)$$

Las características de la distribución triangular estandarizada adoptan unas expresiones más simplificadas dependiendo exclusivamente de la moda estandarizada.

$$G(t^*) = 2 \frac{1 - M + Me^{t^*} - e^{Mt^*}}{t^{*2}M(1 - M)}, \quad (1.25)$$

$$E[T] = \frac{M + 1}{3}, \quad (1.26)$$

$$\text{var}[T] = \frac{(1 - M)^2 + M^2 + (1 - M)M}{18}, \quad (1.27)$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{2}(1 - 2M)(1 + M)(2 - M)}{5(M^2 - M + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.28)$$

$$\beta_2 = \frac{-3}{5}. \quad (1.29)$$

En 1941, Ayyangar, [4], estudia la distribución simétrica estandarizada. Sin embargo, la distribución encontró su gran esplendor, adquiriendo un mayor protagonismo, a partir de la década de los sesenta cuando varios autores la aplicaron dentro de la metodología PERT, Clark, [17], Grubbs, [38], MacCrimmon y Ryavec, [68], Moder y Rodgers, [78], Văduva, [115], Williams, [119], Keefer y Bodily, [56] y Johnson, [53], entre otros.

Además de ser utilizada en la metodología PERT, la distribución triangular ha sido empleada también en el método de simulación de Monte Carlo, Vose [116] y en sistemas de simulación discretos, Banks et al. [7] y Altiok y Melamed [3], teniendo también aplicación dentro del campo de software de análisis de

incertidumbre tales como @Risk o Crystal Ball.

1.1.3. Distribución Beta

La distribución beta, se nota por $\beta(a; b; p; q)$, y se utiliza como modelo probabilístico en un gran número de problemas económicos: fidelidad a una marca, análisis de inversiones, valoración, duración de un trabajo complejo, etc..., debido, entre otras cosas, a su tremenda maleabilidad para representar diferentes situaciones.

En el caso particular de considerar $p = q = 1$, la distribución beta se reduce a la anteriormente presentada, la distribución uniforme y, asignando a ambos parámetros el valor dos, se describe la expresión correspondiente a la distribución parabólica.

Definición 1.3 *Sea X una variable aleatoria definida en el intervalo (a, b) , se dice que se distribuye según una distribución beta si y sólo si su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p,q)} \frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}} & a < x < b; p > 1; q > 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.30)$$

donde $\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$.

Teniendo en cuenta los estudios realizados por Dumas de Rauily, [22], y Canavos, [13], se describe el valor esperado, la moda y la varianza de la distribución beta como:

$$E[X] = \frac{pb + qa}{p + q}, \quad (1.31)$$

$$m = \frac{(p-1)b + (q-1)a}{p + q - 2}, \quad (1.32)$$

$$\text{var}[X] = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2} (b-a)^2. \quad (1.33)$$

Notando por c el centro del intervalo (a, b) y R el radio del mismo, se expresa el valor modal y el valor esperado en función de c , p , q y R ,

$$E[X] = c + \frac{p - q}{p + q}R, \quad (1.34)$$

$$m = c + \frac{p - q}{p + q - 2}R. \quad (1.35)$$

El objetivo principal de la realización de dicho cambio es la comodidad ante el estudio de la asimetría de la distribución dependiendo de los valores que tomen los parámetros p y q . Romero, [97], demuestra que:

- Si $p = q$, la media, la moda y el centro del intervalo tomarían el mismo valor, indicando por tanto que la distribución beta es simétrica.
- Si $p > q$, la moda y la media se situarían a la derecha del centro y, teniendo en cuenta que $c < \mu < m$, la distribución es asimétrica a la izquierda.
- Si $p < q$, la moda y la media están a la izquierda del centro y $m < \mu < c$, la distribución presenta asimetría a derecha.

A partir de los resultados comentados se tiene que $\min(c, m) \leq \mu \leq \max(c, m)$, es decir, el valor esperado de la variable aleatoria con distribución beta siempre se encuentra en el subintervalo determinado por la moda y el centro del intervalo (a, b) .

Con el fin de resaltar la rigidez de la distribución beta, y para salvaguardar la flexibilidad modeladora, Herrerías [43] desarrolló, utilizando la clásica ecuación diferencial de Pearson, un sistema de modelos probabilísticos que permiten una ponderación variable para el valor modal en las expresiones de $E[X]$ y $\text{var}[X]$, quedando definidas como:

$$E[X] = \frac{a + km + b}{k + 2}, \quad (1.36)$$

$$\text{var}[X] = \frac{(1 + k)(b - a)^2 + k^2(m - a)(b - m)}{(k + 2)^2(k + 3)}, \quad (1.37)$$

donde k puede entenderse como el parámetro que se determina según la confianza subjetiva en la experiencia del experto que determinó a , m y b . En el caso de asignar el valor cuatro al parámetro k , la distribución beta recibe el nombre de

distribución beta clásica o beta Tipo I. Para este caso particular, las expresiones (1.36) y (1.37) quedan reducidas a

$$E[X] = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad (1.38)$$

$$\text{var}[X] = \frac{(5a - 4m - b)(a + 4m - 5b)}{252}. \quad (1.39)$$

Teniendo en cuenta la información que aporta el experto, valor mínimo, más probable y máximo, no se puede determinar la expresión de la función de densidad de la distribución beta, ya que ésta depende de 4 parámetros a , b , p y q . Sasieni, [98], y Moitra, [80], pusieron de manifiesto la imposibilidad de determinar los cuatro parámetros de la distribución beta a partir de las tres estimaciones periciales. Así pues, es necesario recurrir a información adicional que permita simplificar los cálculos para obtener la expresión correspondiente a la función de distribución, Littlefield y Randolph, [95]. Yu Chuen-Tao, [122], presenta en su trabajo la idea de considerar la hipótesis en la que el recorrido finito de la variable es 6 veces la desviación típica:

$$\sigma = \frac{b - a}{6}. \quad (1.40)$$

Luego, a partir de las expresiones, (1.33) y (1.40) resulta que:

$$\frac{pq}{(p + q + 1)(p + q)^2} = \frac{1}{36}, \quad (1.41)$$

que junto con la expresión de la moda (1.32) describen un sistema de ecuaciones donde p y q son las incógnitas a resolver. Romero, [97], recurre a ciertas hipótesis que permiten la obtención de las soluciones siguientes;

$$1^{\text{a}} \text{ solución: } p = 3 + \sqrt{2} \quad \text{y} \quad q = 3 - \sqrt{2}, \quad (1.42)$$

$$2^{\text{a}} \text{ solución: } p = 3 - \sqrt{2} \quad \text{y} \quad q = 3 + \sqrt{2}. \quad (1.43)$$

Teniendo en cuenta las soluciones obtenidas, la función de densidad de la distribución beta adoptaría la formas, véase Figura 1.4.

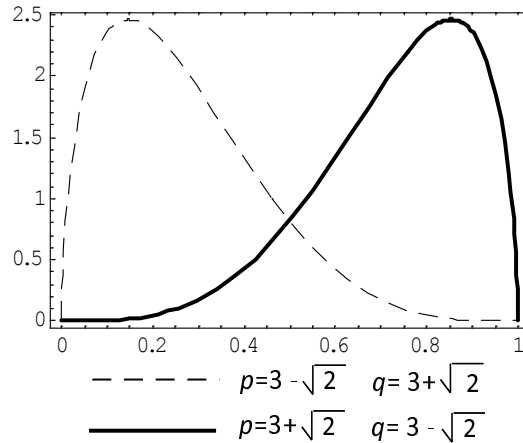


Figura 1.4: Función de densidad de la distribución beta clásica.

1.1.3.1. Distribución beta estandarizada

Realizando el cambio $T = \frac{X-a}{b-a}$ en (1.30), y teniendo en cuenta que $a = 0$ y $b = 1$, la expresión de la función de densidad de la distribución beta estandarizada queda definida por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p,q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1} & 0 < t < 1; p > 1; q > 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.44)$$

En la Figura 1.5 se muestra la representación gráfica de la función de densidad de la distribución beta definida en $[0, 1]$, variando los valores de los parámetros p y q , consiguiendo así, describir distintas formas para dicha distribución. Cuando $p = 0.5$ y $q = 2$, la función adopta la forma de U, obteniendo una distribución no unimodal. Por otro lado, cuando se le asignan a ambos parámetros el valor 3 la función de densidad adopta una forma acampanada similar a la distribución normal.

A partir de la Figura 1.5, se observa que la distribución beta puede adoptar distintas formas con respecto a su asimetría, dependiendo de los valores considerados para los parámetros p y q .

En el caso particular de la distribución estandarizada, las expresiones del valor esperado, valor modal y varianza quedan descritas por, según los estudios de Dumas de Raully [22]:

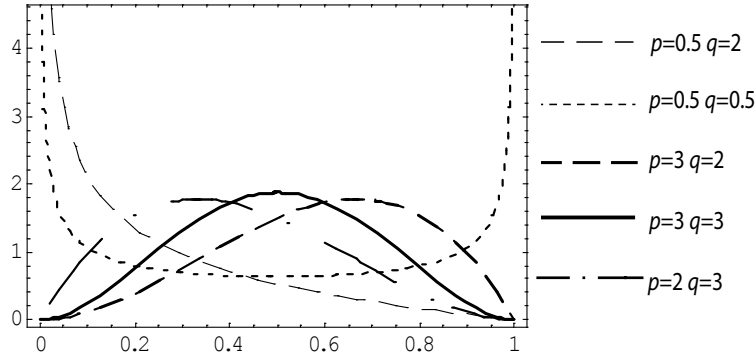


Figura 1.5: Función de densidad de la distribución beta estandarizada en función de p y q .

$$E[X] = \frac{1 + (p + q - 2)M}{p + q} = \frac{1 + kM}{k + 2}, \quad (1.45)$$

$$M = \frac{(p - 1)}{p + q - 2} = \frac{m - a}{b - a}, \quad (1.46)$$

$$\text{var}[X] = \frac{pq}{(p + q + 1)(p + q)^2} = \frac{(1 + kM)(1 + k(1 - M))}{(k + 2)^2(k + 3)}, \quad (1.47)$$

donde se ha hecho uso de la parametrización introducida por Gallagher [30] para la distribución beta de parámetros p y q , siendo:

$$p = 1 + kM \quad q = 1 + k(1 - M), \quad (1.48)$$

por lo que se tiene $p + q = k + 2$, de donde se concluye que $k = p + q - 2$.

La distribución beta siempre se ha considerado como un modelo adecuado para describir la duración de una actividad definida esta sobre un intervalo finito. Una de las características más destacables de dicho modelo probabilístico es la presencia de variedad de formas, con distintas intensidades en su asimetría y en su apuntamiento, además de presentar un recorrido de la variable limitado y acotado. Entendemos que este hecho fue uno de los motivos por los que los creadores del PERT decidieron reemplazar la distribución normal por la distribución beta, Yu Chuen-Tao [122], [123].

Los creadores del PERT sugirieron estimar los valores de la media y de la

varianza de la distribución mediante las expresiones

$$E[X] = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad (1.49)$$

$$\text{var}[X] = \frac{(b - a)^2}{36}, \quad (1.50)$$

las cuales fueron muy criticadas por Sasieni [98], ya que la estimación de la varianza solamente depende del amplitud del intervalo (a, b) . Sustituyendo las soluciones (1.42) y (1.43) en las expresiones de la media y la varianza de la distribución beta con recorrido en (a, b) , (1.31) y (1.33), se consigue describir el valor esperado y la varianza de las expresiones típicas del PERT clásico, (1.49) y (1.50), coincidiendo éstas con el valor esperado y varianza de la distribución normal tal y como mostraron en sus estudios Kamburowski, [55], Herrerias et al., [45] y Yu Cheun Tao, [122].

Según el trabajo mostrado por Littlefield y Randolph [95], la utilización de las expresiones clásicas requieren el hecho de considerar las siguientes suposiciones:

- la duración del tiempo de ejecución de una actividad se distribuye según una distribución beta.
- los valores aportados por el experto son los adecuados.
- la desviación típica es un sexto de la amplitud.

1.1.4. Distribución Trapezoidal

Definición 1.4 *Sea X una variable aleatoria definida en el intervalo $[a, b]$. Se dice que X se distribuye según una distribución trapezoidal si su función de densidad viene dada por la expresión*

$$f(x) = \frac{2}{b - a + m_2 - m_1} \begin{cases} \frac{x-a}{m_1-a} & a \leq x \leq m_1, \\ 1 & m_1 \leq x \leq m_2, \\ \frac{b-x}{b-m_2} & m_2 \leq x \leq b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.51)$$

1.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

donde m_1 y m_2 describen el intervalo donde se encuentra el valor de m .

Observando los gráficos asociados a la función de densidad, se entiende porque la distribución recibe el nombre de distribución trapezoidal, véase Figura 1.6.

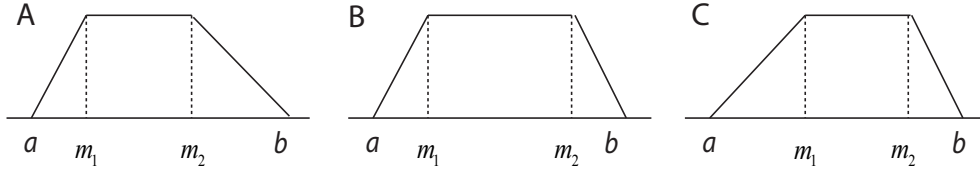


Figura 1.6: Función de densidad de la distribución trapezoidal.

La distribución trapezoidal presenta distintas intensidades en su asimetrías en función de los valores los parámetros presentados por la distribución, Figura 1.6. Así pues,

- si $b - m_2 > m_1 - a$, la distribución presenta asimetría a derecha, Figura 1.6 (A),
- en el caso de que $b - m_2 = m_1 - a$, la distribución trapezoidal es simétrica, Figura 1.6 (B),
- y si $b - m_2 < m_1 - a$, la distribución cambia su asimetría a izquierda, Figura 1.6 (C).

Considerando el caso particular en el que $m_1 = a$ y $m_2 = b$, la distribución trapezoidal se reduce a la distribución uniforme o rectangular, y si $m_1 = m_2 = m$ entonces se tienen las expresiones correspondientes a la distribución triangular.

Su función de distribución, véase Herrerías y Calvete, [44], y Herrerías y Miguel, [46], viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{1}{b-a+m_2-m_1} \frac{(x-a)^2}{m_1-a} & a \leq x \leq m_1, \\ \frac{2x-m_1-a}{b-a+m_2-m_1} & m_1 \leq x \leq m_2, \\ 1 - \frac{1}{b-a+m_2-m_1} \frac{(b-x)^2}{b-m_2} & m_2 \leq x \leq b, \\ 1 & x \geq b. \end{cases} \quad (1.52)$$

Nótese, que al igual que sucedía con la distribución triangular, la distribución trapezoidal se caracteriza por tener una función de distribución es fácilmente invertible, ya que es una función que viene descrita a través de expresiones cuadráticas. Luego, definiendo $L = (b - a) + (m_2 - m_1)$, se describe el cuantil x_α de $F(x)$ mediante la expresión (1.53), verificándose que $F(x_\alpha) = \alpha$, [89].

$$x_\alpha = \begin{cases} a + \sqrt{L(m_1 - a)\alpha} & 0 \leq \alpha \leq \frac{m_1 - a}{L}, \\ \frac{\alpha L + a + m_1}{2} & \frac{m_1 - a}{L} \leq \alpha \leq 1 - \frac{b - m_2}{L}, \\ b - \sqrt{L(b - m_2)(1 - \alpha)} & 1 - \frac{b - m_2}{L} \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (1.53)$$

Como características estocásticas destacables se presentan a continuación las expresiones correspondientes a su función generatriz de momentos, valor esperado y varianza.

$$G(t) = \frac{2 [(m_1 - a)(e^{bt} - e^{m_2t}) + (b - m_2)(e^{at} - e^{m_1t})]}{(m_1 - a)(b - m_2)(b - a + m_2 - m_1)t^2}, \quad (1.54)$$

$$E[X] = \frac{1}{3} \left[a + m_1 + m_2 + b - \frac{bm_2 - am_1}{b - m_1 + m_2 - a} \right], \quad (1.55)$$

$$\text{var}[X] = \frac{1}{18} [(b - m_1)^2 + (m_2 - m_1)^2 + (m_1 - a)(b - m_1) - A], \quad (1.56)$$

donde $A = \frac{2(b-a)(m_2-m_1)(m_2-a)(b-m_1)}{(b-m_1+m_2-a)^2}$. Debido a la complejidad que encierran los coeficientes de asimetría y de curtosis se omitirá las expresiones correspondientes a ambos coeficientes, siendo indicadas cuando se presente la distribución estandarizada.

Teniendo en cuenta que en la mayoría de los casos solamente se dispone de la información aportada por el experto sobre los valores mínimo, máximo y más probable, y que la distribución trapezoidal es una distribución cuatrimétrica Callejón et al., [12], proponen la distribución trapezoidal CPR (CPR hace referencia a las iniciales de los apellidos de los creadores de la distribución). La construcción de la distribución CPR surge de considerar las siguientes pautas sobre la distribución trapezoidal.

1. Se calcula el punto medio del intervalo, $c = \frac{a+b}{2}$:

- a) Si $c > m$ entonces se considera que $m_1 = m$ y $m_2 = c$,
 b) Si $c < m$ entonces se considera que $m_1 = c$ y $m_2 = m$.

1.1.4.1. Distribución trapezoidal estandarizada

Considerando el cambio de variable $T = \frac{X-a}{b-a}$ se describe la distribución trapezoidal estandarizada, siendo (1.57) y (1.58) las expresiones correspondientes a la función de densidad y de distribución, respectivamente.

$$f(t) = \frac{2}{1 + M_2 - M_1} \begin{cases} \frac{t}{M_1} & 0 \leq t \leq M_1, \\ 1 & M_1 \leq t \leq M_2, \\ \frac{1-t}{1-M_2} & M_2 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.57)$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \frac{1}{b+M_2-M_1} \frac{t^2}{M_1} & 0 \leq t \leq M_1, \\ \frac{2t-M_1}{1+M_2-M_1} & M_1 \leq t \leq M_2, \\ 1 - \frac{1}{1+M_2-M_1} \frac{(1-t)^2}{1-M_2} & M_2 \leq t \leq 1, \\ 1 & t \geq 1. \end{cases} \quad (1.58)$$

Trabajando con la distribución definida en $[0, 1]$, las expresiones correspondientes a las características estocásticas de la distribución adoptan una expresión más sencilla, quedando definidas por:

$$G(t^*) = \frac{2 [M_1(e^{t^*} - e^{M_2 t^*}) + (1 - M_2)(1 - e^{M_1 t^*})]}{M_1(1 - M_2)(1 + M_2 - M_1)(t^*)^2}, \quad (1.59)$$

$$E[T] = \frac{1}{3} \left[M_1 + M_2 + 1 - \frac{M_2}{1 - M_1 + M_2} \right], \quad (1.60)$$

$$\text{var}[T] = \frac{1}{18} \left[(1 - M_1)^2 + (M_2 - M_1)^2 + M_1(1 - M_1) - \frac{2M_2(M_2 - M_1)(1 - M_1)}{(1 - M_1 + M_2)^2} \right], \quad (1.61)$$

$$\beta_1 = \frac{10A^2B^2 - 45ABC + 54D}{5\sqrt{A}(3C - AB^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.62)$$

$$\beta_2 = \frac{216E - 3A(10A^2B^4 - 60AB^2C + 45C^2 + 72BD)}{5\sqrt{A}(3C - AB^2)^2}, \quad (1.63)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{1 + M_2 - M_1}, \\ B &= 1 + M_2 + M_2^2 - M_1^2, \\ C &= 1 + M_2 + M_2^2 + M_2^3 - M_1^3, \\ D &= 1 + M_2 + M_2^2 + M_2^3 + M_2^4 - M_1^4, \\ E &= 1 + M_2 + M_2^2 + M_2^3 + M_2^4 + M_2^5 - M_1^5. \end{aligned}$$

Al hacer uso de la distribución trapezoidal dentro de la metodología PERT, Callejón et al., [12], comprobaron, al realizar la comparación con las distribuciones triangular y beta clásica, que el modelo proporcionaba una media más moderada, ya que su valor esperado se encuentra próximo al centro del intervalo. Además, la varianza de la distribución trapezoidal presenta un valor similar al obtenido con la distribución triangular, llegando a superara la distribución CPR a la distribución uniforme cuando el valor modal está proximo a los extremos del intervalo de definición.

1.1.5. Distribución Two-Sided Power

La distribución estandarizada two-sided power (TSP) fue introducida por van Dorp y Kotz, [109], y estudiada por Kotz y van Dorp, [61]. Inicialmente se presentó como una generalización de la distribución triangular de tres parámetros. Ha sido aplicada en el ámbito financiero, procesos de ingeniería y análisis de riesgo e incertidumbre, Johnson [53].

Definición 1.5 *Sea X una variable aleatoria, diremos que X se distribuye según una distribución two-sided power, $X \rightsquigarrow TSP(a, m, b, n)$, si y sólo si su función de densidad viene dada por la expresión*

$$f(x|a, m, b, n) = \begin{cases} \frac{n}{b-a} \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} & a \leq x \leq m, \\ \frac{n}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{n-1} & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (1.64)$$

1.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

donde a y b son números reales arbitrarios con $a < b$ y n es un número positivo, no necesariamente entero.

En función de los valores que tome el parámetro n , la función de densidad de la distribución TSP adopta distintas formas. Así pues,

- Para $n > 1$, se verifica que m es el valor modal de la distribución y cuya imagen a través de la función de densidad viene dada por $m = \frac{n}{b-a}$. Además, tal y como se observa en la Figura 1.7, la función de densidad adopta distintas formas alcanzando su máximo apuntamiento cuando el parámetro n toma valores más elevados.
- Si $0 \leq n < 1$ y $a < m < b$, la moda de la función es a o b y, la función de densidad converge a ∞ si x tiende a los valores extremos, Figura 1.8.
- Para $n = 1$, la función de densidad toma la expresión de la distribución uniforme en $[a, b]$, Figura 1.9.
- Si $n = 2$, se reduce a una distribución triangular de parámetros a , m y b , Figura 1.10.

La función de distribución asociada a (1.64), viene dada por:

$$F(x|a, m, b, n) = \begin{cases} \frac{m-a}{b-a} \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^n & a \leq x \leq m, \\ 1 - \frac{b-m}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^n & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (1.65)$$

y, el valor esperado y varianza corresponden a las expresiones:

$$E[X] = \frac{a + (n-1)m + b}{n+1}, \quad (1.66)$$

$$\text{var}[X] = (b-a)^2 \cdot \frac{n - \frac{2(n-1)(m-a)}{(b-a)} \cdot \frac{(b-m)}{(b-a)}}{(n+2)(n+1)^2}. \quad (1.67)$$

A partir de (1.66), se observa que el parámetro n pondera más al valor de la moda que a los valores extremos del intervalo en el que vienen definidas las funciones de la distribución TSP, así pues, se tiene que en el caso particular de considerar un valor de n superior a uno, la función de densidad alcanzará

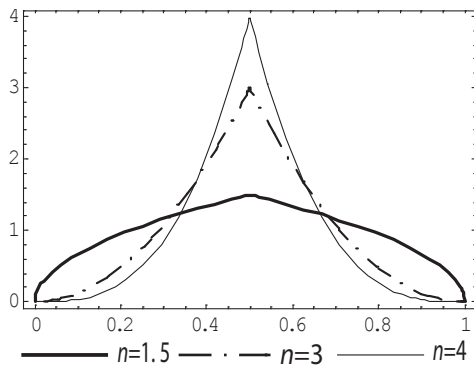


Figura 1.7: Función de densidad de la distribución $TSP(0, 0.5, 1, n)$.

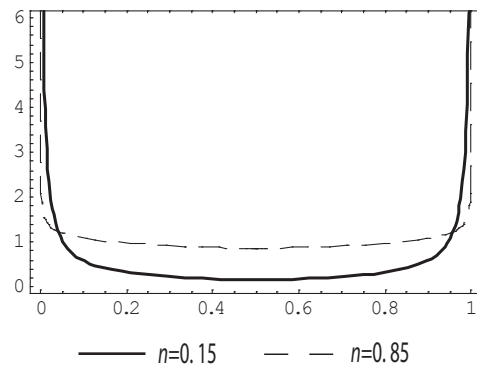


Figura 1.8: Función de densidad de la distribución $TSP(0, 0.5, 1, n)$.

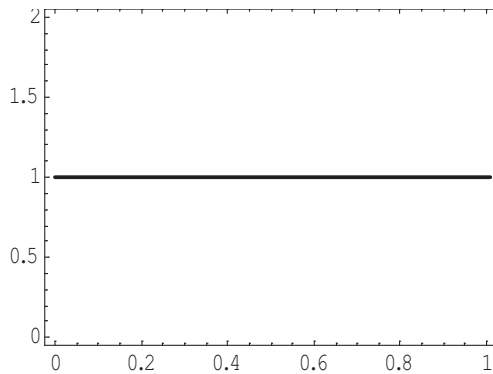


Figura 1.9: Función de densidad de la distribución $TSP(0, 0.5, 1, 1)$.

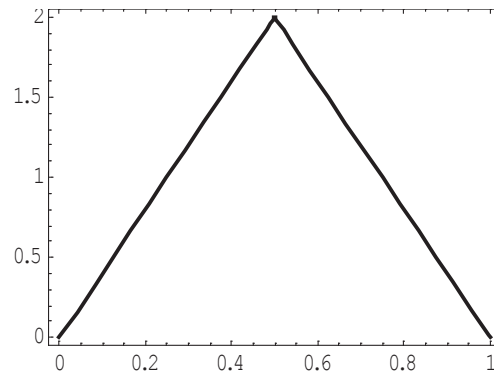


Figura 1.10: Función de densidad de la distribución $TSP(0, 0.5, 1, 2)$.

su máximo valor en la imagen de m . Sin embargo, tal y como se observa en la Figura 1.8, si n toma un valor comprendido en el intervalo $[0, 1)$ se tiene que la distribución presenta sus máximos valores en los extremos del intervalo del dominio de definición, describiendo así una distribución bimodal.

1.1.5.1. Distribución TSP estandarizada (STSP)

Si se tiene en cuenta el cambio de variable $X = T(b - a) + a$ sobre la expresión (1.64), se describe la función de densidad de la distribución TSP estandarizada, denotada por STSP. En este caso la distribución depende únicamente de dos parámetros, M y n y su recorrido viene definido en intervalo $[0, 1]$.

Definición 1.6 Sea T una variable aleatoria definida en el intervalo $[0, 1]$, se dice que T se distribuye según una distribución standard two-sided power, $T \rightsquigarrow STSP(M, n)$, si y sólo si, su función de densidad corresponde a

$$f(t|M, n) = \begin{cases} n \left(\frac{t}{M}\right)^{n-1} & 0 \leq t \leq M, \\ n \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n-1} & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.68)$$

donde $M = \frac{m-a}{b-a}$ es el valor modal estandarizado y, $n > 0$.

Haciendo uso de (1.68), se describe la función de distribución de la distribución STSP, mediante la expresión:

$$F(t|M, n) = \begin{cases} M \left(\frac{t}{M}\right)^n & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1 - M) \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n & M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.69)$$

En los estudios presentados por van Dorp y Kotz, [110], se describen los momentos ordinarios k -ésimo de la distribución STSP, cuya expresión corresponde a:

$$E[T^k] = \frac{nM^{k+1}}{n+k} + \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{k-i} \frac{n}{n+i} (1-M)^{i+1}. \quad (1.70)$$

A partir de (1.70) se muestran las expresiones del valor esperado y la varianza de la distribución STSP:

$$E[T] = \frac{(n-1)M + 1}{n+1}, \quad (1.71)$$

$$\text{var}[T] = E[T^2] - E[T]^2 = \frac{n - 2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}. \quad (1.72)$$

La distribución TSP ha sido estudiada y utilizada en distintos ámbitos por varios autores entre otros destacan, Kotz y van Dorp, [61] y [62], I-Tung, [52], Nadarajah, [83], García et al., [33], García, [31] y García et al., [34].

1.1.6. Distribución Biparabólica

Al igual que la distribución two-sided power fue presentada como una generalización de la distribución triangular de tres parámetros, la distribución

biparabólica surge como la generalización de la distribución parabólica. Una de las características que diferencia a la distribución biparabólica de las distribuciones utilizadas habitualmente en el tratamiento del riesgo y la incertidumbre, es que además de estar definida en un dominio acotado y quedar determinada a partir de los tres valores clásicos, su función de densidad es derivable en el punto correspondiente a su moda.

Definición 1.7 *Sea X una variable aleatoria definida en el dominio acotado $[a, b]$, se dice que X se distribuye según una distribución biparabólica, denotándolo por $X \rightsquigarrow BP(a, m, b)$, si y sólo si su función de densidad viene dada por la expresión*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-a)^2(b-a)} (x^2 - 2mx + (2m-a)a) & a \leq x \leq m, \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-b)^2(b-a)} (x^2 - 2mx + (2m-b)b) & m \leq x \leq b. \end{cases} \quad (1.73)$$

A partir de la función (1.73), se tiene la función de distribución asociada a la distribución biparabólica, estando descrita a través de la expresión siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2(x-3m+2a)}{(m-a)^2(b-a)} & a \leq x \leq m, \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{(x-b)^2(x-3m+2b)}{(m-b)^2(b-a)} & m \leq x \leq b. \end{cases} \quad (1.74)$$

Además, se comprueba con gran facilidad, que $F(m) = \frac{m-a}{b-a} = M$, propiedad que también verifica la distribución two-sided power.

Partiendo de la expresión de la función de densidad de la distribución biparabólica, (1.73), se obtiene el valor esperado y la varianza de la distribución

$$E[X] = \frac{3a + 2m + 3b}{8}, \quad (1.75)$$

$$\text{var}[X] = \frac{12(m-a)(m-b) + 19(b-a)^2}{320}. \quad (1.76)$$

1.1.6.1. Distribución biparabólica estandarizada

Realizando el cambio de variable $x = t(b-a) + a$ sobre las expresiones (1.73) y (1.74), se obtiene la función de densidad, (1.77), y la función de distribución,

(1.78), asociada a la distribución bipolarabólica en $[0, 1]$, denotada por SBP, donde $M = \frac{m-a}{b-a}$:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{M^2} (t^2 - 2Mt) & 0 \leq t \leq M, \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-M)^2} (t^2 - 2Mt + 2M - 1) & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.77)$$

$$F(t) = \begin{cases} -\frac{t^2(t-3M)}{2M^2} & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - \frac{(t-1)^2(t-3M+2)}{2(1-M)^2} & M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.78)$$

Las características estocásticas que se describen en el caso particular de trabajar con la distribución SBP corresponden a las siguientes expresiones:

$$E[T] = \frac{2M + 3}{8}, \quad (1.79)$$

$$\text{var}[T] = \frac{12M^2 - 12M + 19}{320}, \quad (1.80)$$

$$\beta_1 = \frac{8M^3 - 12M^2 - 10M + 7}{1280} \left(\frac{320}{12M^2 - 12M + 19} \right)^{3/2}, \quad (1.81)$$

$$\beta_2 = \frac{7}{5} \cdot \frac{624M^4 - 1248M^3 + 2088M^2 - 1464M + 1095}{(12M^2 - 12M + 19)^2}. \quad (1.82)$$

Enmarcando dicha distribución dentro de la metodología PERT, García [31] obtiene que la distribución bipolarabólica presenta un valor esperado moderado y una varianza superior a la de las distribuciones utilizadas tradicionalmente en dicha metodología como son, por ejemplo, la distribución trapezoidal, triangular y rectangular. Al verificar el criterio de máxima varianza definido por Taha [105] y desarrollado por Herrerías [43], la distribución SBP se sitúa como una buena candidata para se aplicable en ambiente de incertidumbre.

En el caso particular de considerar las funciones de densidad marginales de la distribución piramidal estandarizada en $[0, 1]$ se describe la expresión correspondiente la función de densidad asociada a la distribución bipolarabólica estandarizada, (1.77). Este hecho permite afirmar que la distribución SBP resulta ser la distribución marginal de la distribución bivalente piramidal, Herrerías [42], y por tanto verifica la ecuación diferencial del sistema de Pearson correspondiente a las distribuciones univariantes continuas.

1.1.6.2. Distribución biparabólica generalizada de una rama

Con el objeto de aportar mayor flexibilidad y generalidad a la distribución biparabólica en García [31] y García et al., [34] se presenta la generalización de la distribución biparabólica de una y dos ramas. En esta sección se presenta únicamente la generalización de una rama ya que será utilizada en el capítulo (3).

Definición 1.8 Sea T una variable aleatoria definida en el intervalo $[0, 1]$, diremos que T se distribuye según una distribución biparabólica estandarizada generalizada de una rama, $T \rightsquigarrow SGBP(M, n)$, si y sólo si su función de densidad adopta la expresión

$$g(t|M, n) = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{2n} - 2\left(\frac{t}{M}\right)^n & 0 \leq t \leq M, \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{2n} - 2\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n & M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.83)$$

La función de distribución asociada a la expresión (1.83) corresponde a

$$G(t|M, n) = \begin{cases} C(n)M \left[\left(\frac{t}{M}\right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} - 2\left(\frac{t}{M}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 + C(n)(M-1) \left[\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} - 2\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.84)$$

donde $C(n) = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1}$.

A partir de la expresión (1.83), se obtiene como valor esperado y varianza de la distribución SGBP

$$E[T] = \frac{6Mn^2 + 7n + 2}{6n^2 + 14n + 4}, \quad (1.85)$$

$$\text{var}[T] = \frac{D(n)(M^2 - M) + 82n^4 + 247n^3 + 247n^2 + 96n + 12}{4(3n+1)^2(n+2)^2(2n+3)(n+3)}, \quad (1.86)$$

siendo $D(n) = 148n^4 + 244n^3 + 40n^2$.

Realizando un estudio más profundo de la distribución biparabólica generalizada de una rama, se comprueba que es una distribución adecuada para ser aplicable dentro de la metodología PERT por salvaguardar los problemas que presenta la distribución gaussiana. La distribución SGBP viene definida en un dominio acotado y presenta distintos tipos de asimetrías, tal y como se observa

en la Figura 1.11.

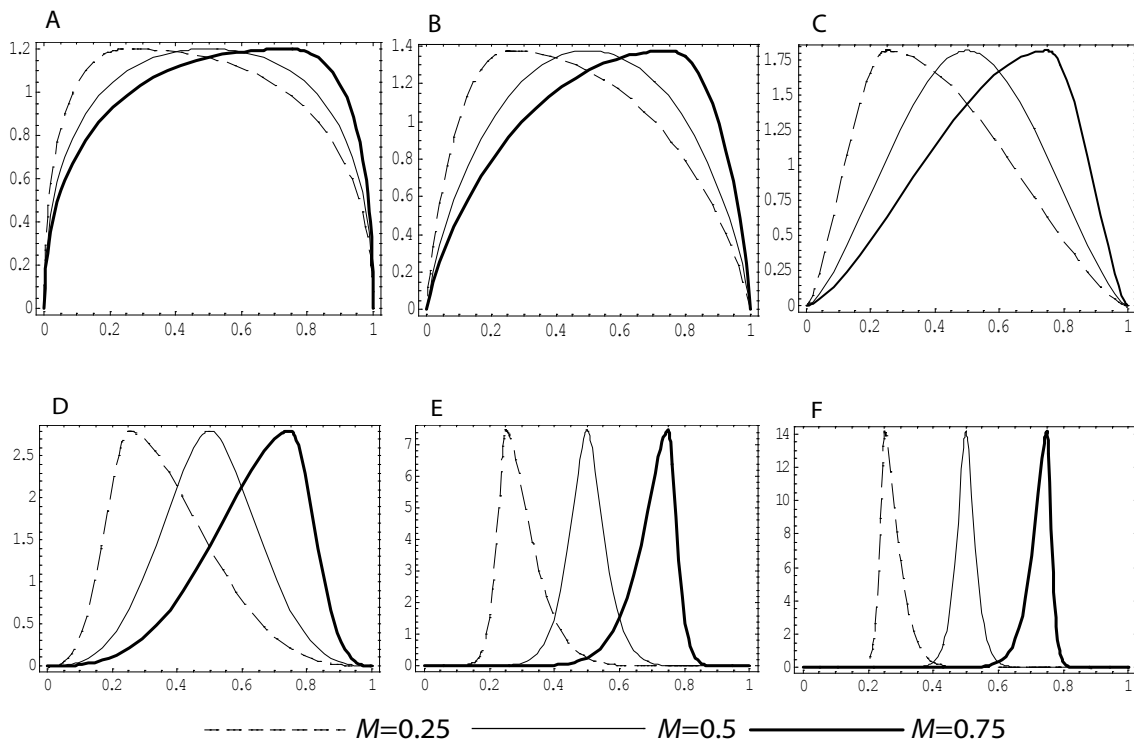


Figura 1.11: Función de densidad de la distribución $SGBP(M, n)$ para $n = 0.5$, (A), $n = 0.8$, (B), $n = 1.5$, (C), $n = 3$, (D), $n = 10$, (E), $n = 20$, (F).

Así pues, partiendo de la Figura 1.11, se tiene que cuando el parámetro n toma valores próximos a cero la distribución SGBP adopta la forma de la distribución uniforme, Figura 1.11 A, pero a medida que aumenta n , la función de densidad tiende a degenerar en un punto Figura 1.11 E, coincidiendo éste con el valor de la moda estandarizada considerado.

A partir de la transformación $T = X(b - a) + a$ se describen las funciones asociadas a la distribución GBP con recorrido en $[a, b]$, siendo su valor esperado la expresión:

$$E[X] = \frac{(7n + 2)a + 6n^2m + (7n + 2)b}{6n^2 + 14n + 4}, \quad (1.87)$$

1.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En (1.87) se observa que el parámetro n pondera al valor modal (m) y a los extremos del intervalo (a y b). Ponderando de forma equitativa los valores del experto, se describe la ecuación $7n + 2 = 6n^2$, cuya solución es $n = 1.40407148$. Así pues, en esta situación se define la distribución GBP, cuya función de densidad adopta las siguientes formas, tal y como se muestra en la Figura 1.12.

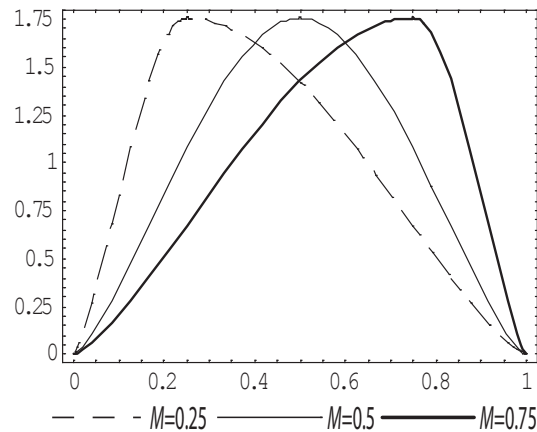


Figura 1.12: Función de densidad de la distribución GBP($a, m, b, 1.40407148$).

Si $n > 1.40407148$, la distribución biparabólica dará mayor peso a la moda que a los valores extremos, en caso contrario, si $n < 1.40407148$ entonces se consigue ponderar más los extremos que el valor modal. En el caso particular de trabajar con la distribución GBP con $n = 1.40407148$, se tiene que la distribución presenta mayor valor de la varianza que la distribución triangular. Es por ello, que se considera como una buena candidata para enmarcarla en ambiente de incertidumbre según los estudios presentados por Taha [105] y desarrollados por Herrerías [43].

Sin embargo, si la distribución pertenece a la familia de distribuciones de varianza constante igual a $\frac{1}{36}$ y coeficiente de curtosis 3 (denominado familia clásica), se obtiene, igualando las expresiones correspondientes a la varianza y coeficiente de curtosis de la distribución GBP a los valores $\frac{1}{36}$ y 3 respectivamente, que el parámetro n toma el valor 2.74669. En la Figura 1.13 se representa la función de densidad de la distribución GBP(0, 0.5, 1, 2.74669).

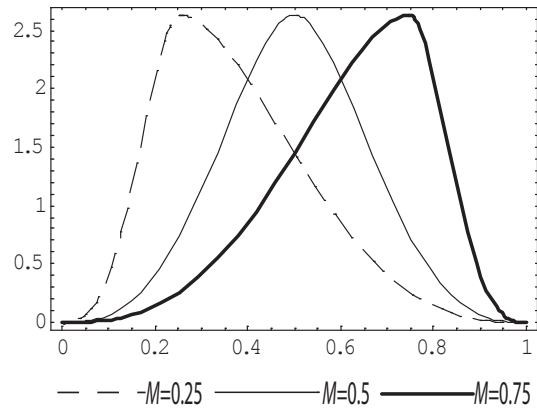


Figura 1.13: Función de densidad de la distribución GBP(0, 0.5, 1, 2.74669).

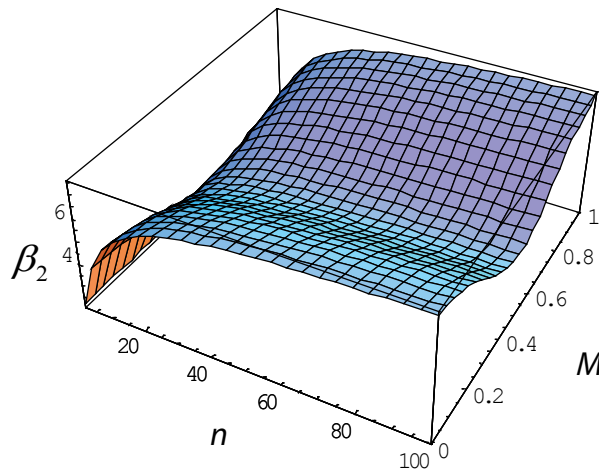


Figura 1.14: Coeficiente de curtosis de la distribución SGBP.

Con respecto a su coeficiente de curtosis habría que destacar que la distribución SGBP, presenta un apuntamiento superior al de la distribución normal, alcanzando un valor aproximado a 6, Figura 1.14. Partiendo de las características mostradas por la distribución SGBP, se tiene que este modelo probabilístico verifica algunos de los requisitos que encierran diversos fenómenos financieros, tales como el estudio de los rendimientos financieros.

1.1.7. Distribución Coseno

Dentro del campo de la teoría de valoración y de la metodología PERT se encuentran además de las distribuciones citadas anteriormente otros modelos probabilísticos como por ejemplo la distribución coseno.

Definición 1.9 Sea X una variable aleatoria definida en $[-a, a]$, se dice que X se distribuye según una distribución coseno si y solo si su función de densidad corresponde a la expresión

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} (1 + \cos(\frac{\pi x}{a})) & -a \leq x \leq a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.88)$$

La distribución coseno se caracteriza principalmente por presentar mayor flexibilidad en los extremos, además de venir determinada por los valores extremos de la distribución. Esta característica es destacable ya que, en el caso de trabajar con la distribución coseno, solamente es necesario describir el rango donde fluctuará la variable en estudio.

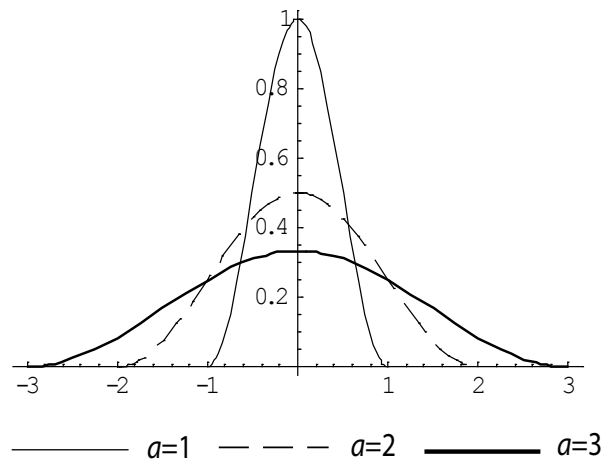


Figura 1.15: Función de densidad de la distribución coseno.

En la Figura 1.15, se observa que la gráfica asociada a la función de densidad disminuye su apuntamiento a medida que aumenta la diferencia entre los extremos del intervalo donde viene definida la variable aleatoria.

1.2. SISTEMA GENERADOR DE VAN DORP Y KOTZ

Van Dorp y Kotz, [111], presentaron un nuevo sistema generador de distribuciones a partir de cual, se describe de una forma más sencilla las expresiones de la función de densidad y la función de distribución, de las distribuciones que se presentan en esta memoria.

La idea principal de dicho sistema es generar una función de densidad acampanada y con moda en M , siendo M el valor modal estandarizado, a partir de una función de densidad generadora.

Definición 1.10 Si $p(\cdot|\psi)$ es una función de densidad continua definida en el intervalo $[0, 1]$ con parámetros o vector de parámetros ψ , se define la función de densidad unimodal en M por

$$g(t|M, p(\cdot|\psi)) = \begin{cases} p\left(\frac{t}{M}|\psi\right) & 0 \leq t \leq M, \\ p\left(\frac{1-t}{1-M}|\psi\right) & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.89)$$

donde $p(\cdot|\psi)$ es la función de densidad generadora de la familia de distribuciones $g(t|M, p(\cdot|\psi))$.

La función de distribución asociada a (1.89) es

$$G(t|M, P(\cdot|\psi)) = \begin{cases} MP\left(\frac{t}{M}|\psi\right) & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1 - M)P\left(\frac{1-t}{1-M}|\psi\right) & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.90)$$

siendo $P(\cdot|\psi)$ la función de distribución de la función de densidad generadora $p(\cdot|\psi)$.

Una de las propiedades a destacar de la familia de distribuciones dadas por (1.89), o alternativamente por (1.90), es la verificación de la siguiente igualdad

$$G(M|M, \psi) = MP(1|\psi) = M \quad (1.91)$$

Luego, teniendo en cuenta la propiedad mencionada, el parámetro M es

considerado como el “ punto de cambio ” a partir del cual la distribución presenta distintas formas a la izquierda y derecha de él.

En el trabajo desarrollado por van Dorp y Kotz, [111], se muestra la relación existente entre los momentos centrados respecto al origen, de las variables $T \sim g(.|M, p(.|\psi))$ e $Y \sim p(.|\psi)$. La expresión (1.92) permite describir los momentos de la distribución generada a partir de los momentos de la función de densidad generadora.

$$E[T^k|M, \psi] = M^{k+1}E[Y^k|\psi] + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^{i+1} E[Y^i|\psi]. \quad (1.92)$$

Así pues, partiendo de la relación (1.92) y utilizando las definiciones de los momentos de orden 1 y 2 se describe el valor esperado y la varianza de la distribución como

$$E[T|M, \psi] = (2M - 1)E[Y|\psi] + (1 - M), \quad (1.93)$$

$$\text{var}[T|M, \psi] = (M^3 + (1 - M)^3) \text{var}[Y|\psi] + M(1 - M) (E[Y|\psi] - 1)^2. \quad (1.94)$$

Utilizando los estudios realizados por Stuart y Ord, [103], se desarrollan las expresiones relacionadas con el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis.

En el caso particular de trabajar con los valores 0, 0.5 y 1 para M se tiene que la varianza en los tres casos considerados siempre toma el mismo valor.

A partir de las aportaciones de van Dorp y Kotz [111] y haciendo uso del sistema generador, se presentan en los capítulos siguientes la construcción de las distribuciones bicúbica, biseno y sus respectivas generalizaciones, así como las distribuciones U-BETA, U-TSP, U-GBP y U-GBC obtenidas de realizar la mixtura entre las distribuciones beta, two-sided power, bipolarabólica generalizada y bicúbica generalizada con la distribución uniforme.

CAPÍTULO 2

CONSTRUCCIÓN Y ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y LA DISTRIBUCIÓN BIENSO. GENERALIZACIÓN Y APLICACIÓN EN EL PERT

La planificación y programación de proyectos complejos comenzó a ser atendida de una forma especial a finales de la Segunda Guerra Mundial. En esta época, la oficina de proyectos especiales de la Marina de los Estados Unidos de América presenta una herramienta, denominada método PERT (Program Evaluation and Review Technique), para programar y controlar el tiempo de ejecución del proyecto Polaris. La técnica demostró tanta utilidad que se extendió su aplicación a sectores privados, (Malcolm et al., [70]).

El método PERT consiste en la descomposición de un proyecto en una serie de tareas, las cuales necesitan para su realización la utilización de uno o varios recursos (mano de obra, maquinaria, tiempo, etc.) considerando el tiempo necesario para completar la actividad. Romero, [97], aplica dicha metodología

para el estudio de la duración de un proyecto de fabricación en función de la duración de las diferentes tareas y Suárez, [104], lo enmarca dentro del análisis de la bondad de un proyecto de inversión mediante sus diversos flujos de caja actualizados según su valor capital.

El método PERT supone que el tiempo para realizar cada una de las tareas es una variable aleatoria descrita mediante una distribución de probabilidad. Es conocido que la distribución beta ha sido utilizada habitualmente como distribución subyacente en el PERT por tener, unas propiedades mejor adaptadas a dicha metodología que las presentadas por la distribución normal, Yu Chuen-Tao, [122], [123]. Como principales características de dicha distribución se destaca:

- el recorrido de la variable aleatoria es finito, no presentando colas infinitas,
- y la distribución beta puede presentar distintas asimetrías.

A lo largo del tiempo varios autores han mostrado distintas distribuciones que han sido enmarcadas en dicha metodología. Habitualmente se han utilizado las distribuciones rectangular, triangular, trapezoidal CPR, [12], y recientemente se han definido la distribución two-sided power, [109] y la distribución biparabólica, [31]. Estas últimas distribuciones tienen la característica de venir definidas en un dominio acotado y además, pueden ser determinadas a partir de las tres estimaciones aportadas por el experto, a , m y b .

Así pues, teniendo en cuenta los estudios desarrollados por van Dorp y Kotz, [109], [110], [111], se presenta la construcción de la distribución bicúbica y la distribución biseno, indicando las principales características estocásticas de cada una de ellas.

Con objeto de aportar mayor flexibilidad a las distribuciones bicúbica y biseno, se realiza la generalización de ambas distribuciones. Para ello, se recurre a un cuarto parámetro, n , que será el encargado de llevar a cabo esa aportación.

Por último, se estudia el comportamiento de ambas distribuciones dentro del ámbito PERT. Según los estudios presentados por Taha, [105], y desarrollados por Herrerías, [43] un modelo probabilístico será adecuado para ser aplicable en el ámbito del PERT si presenta una media “moderada” y máxima varianza. Es por ello, que se realiza un análisis detallado del comportamiento del valor

esperado y varianza de la distribución, comparando los resultados con algunas de las distribuciones que se han empleado en este ámbito.

2.1. DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENNO

2.1.1. Construcción y características estocásticas de la distribución bicúbica

2.1.1.1. Construcción distribución bicúbica

La construcción de la distribución bicúbica surge de estudios realizados por van Dorp y Kotz [111] tal y como se comentó en el capítulo 1.

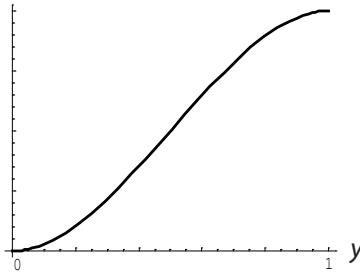


Figura 2.1: Representación de $p(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$.

Utilizando como punto de partida la idea plasmada en la sección (1.2) del primer capítulo, se describe a continuación la función de densidad generadora asociada a la distribución que se pretende construir. Por tanto, a partir de la función de densidad asociada a una distribución cúbica, cuya expresión viene dada por $p(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$, donde a , b , c y d son valores reales, e imponiendo las condiciones que se observan en la Figura 2.1:

- 1.- pasa por el origen de coordenadas, $p(0) = 0$,
- 2.- presenta un extremo relativo en $y = 1$; $p'(1) = 0$,
- 3.- presenta un extremos relativo en $y = 0$; $p'(0) = 0$,
- 4.- $\int_0^1 p(y) dy = 1$.

2.1. DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

se tiene, realizando los cálculos oportunos, que la la función de densidad generadora cúbica corresponde a

$$p(y) = 6 \left(y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right). \quad (2.1)$$

A partir de la expresión (2.1), y teniendo en cuenta la función de densidad (1.89), se describe la función de densidad asociada a la distribución bicúbica mediante la expresión

$$g(t|M, p(y)) = \begin{cases} 6 \left[\left(\frac{t}{M} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{t}{M} \right)^3 \right] & \text{si } 0 \leq t \leq M, \\ 6 \left[\left(\frac{1-t}{1-M} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^3 \right] & \text{si } M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Tal y como se observa en la Figura 2.2, la distribución bicúbica presenta distinta asimetrías en función de los valores asignados al parámetro M . Por tanto, al igual que la distribución beta, se tiene que SBC ¹ tiene una forma acampanada, asimétrica y corta al eje de abscisas en dos puntos, quedando así definida la distribución en un dominio acotado.

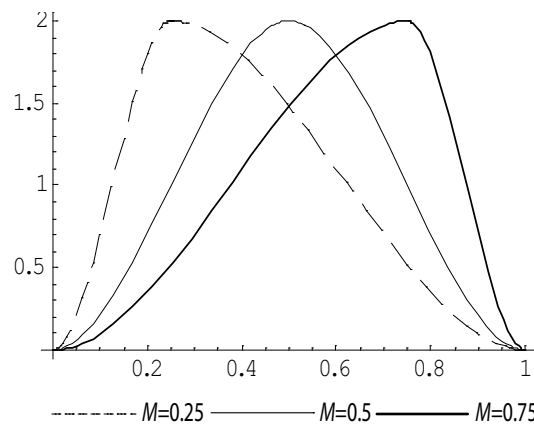


Figura 2.2: Función de densidad de la distribución bicúbica.

La función de distribución generadora asociada a (2.1) viene dada por la expresión $P(y) = 2y^3 - y^4$. Así pues, a partir de la expresión obtenida de $P(y)$, y la función de distribución definida en el capítulo uno, (1.90), se describe la

¹Se denota por SBC a la distribución bicúbica estandarizada en $[0, 1]$

función de distribución de una distribución bicúbica como

$$G(t|M, P(y)) = \begin{cases} M \left[2 \left(\frac{t}{M} \right)^3 - \left(\frac{t}{M} \right)^4 \right] & \text{si } 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1 - M) \left[2 \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^3 - \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^4 \right] & \text{si } M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Al evaluar la función (2.3) en $t = M$ se obtiene que $G(M|M, P(.|\psi)) = MP(1|\psi) = M$, consiguiendo así que todos los parámetros de la función de distribución dependa de M , siendo este el punto principal de la distribución. La variación de los valores del parámetro M , provoca sobre la función de densidad distintas asimetrías. Por tanto, dependiendo de los valores asignados a M , la distribución presentará asimetría positiva ($M < 0.5$), negativa ($M > 0.5$) o será simétrica ($M = 0.5$).

Con el objeto de describir la función de densidad y de distribución de la distribución bicúbica con recorrido definido a partir de los valores aportados por el experto, $[a, b]$, donde a es el valor mínimo, m el valor más probable y b el valor máximo, se realiza el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$ y $M = \frac{m-a}{b-a}$, obteniendo la expresión correspondiente a la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(m-a)^3(b-a)} (x-a)^2 (2x-3m+a) & \text{si } a \leq x \leq m, \\ \frac{-2}{(m-b)^3(b-a)} (x-b)^2 (2x-3m+b) & \text{si } m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $f(x) \geq 0$ para cualquier valor de x perteneciente a $[a, b]$, ya que $(x-a)^2(2x-3m+a) \leq 0$ y $(x-b)^2(2x-3m+b) \geq 0$. Además, hay que destacar que la expresión (2.4) es derivable en la moda, ya que se verifica $f'_+(m) = f'_-(m) = 0$, consiguiendo así obtener una función que presenta un extremo relativo en su punto modal. Esta característica, solamente la verifica la distribución biparabólica.

En el caso de la función de distribución se tiene

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-(x-a)^3(x-2m+a)}{(m-a)^3(b-a)} & \text{si } a \leq x \leq m, \\ 1 - \frac{(x-b)^3(x-2m+b)}{(m-b)^3(b-a)} & \text{si } m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde se verifica que la imagen del valor modal facilitado por el experto, a través de la función de distribución, coincide con el valor de la moda estandarizada en

$[0, 1]$, es decir, $F(m) = \frac{m-a}{b-a} = M$, al igual que en el caso de las distribuciones two-side power y biparabólica.

2.1.1.2. Características estocásticas distribución bicúbica

Partiendo de la función de densidad descrita por van Dorp y Kotz [111]

$$g(t|M, p(\cdot|\psi)) = \begin{cases} p\left(\frac{t}{M}|\psi\right) & \text{si } 0 \leq t \leq M, \\ p\left(\frac{1-t}{1-M}|\psi\right) & \text{si } M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

se describe la relación existente entre los momentos de la función generadora $p(y)$ y la función de densidad mediante la expresión

$$E[T^k|M, p] = M^{k+1}E[Y^k|\psi] + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^{i+1} E[Y^i|\psi]. \quad (2.7)$$

A partir de la expresión (2.7) y teniendo en cuenta la función de densidad generadora (2.1), se definen los momentos de la distribución bicúbica estandarizada en $[0, 1]$ por

$$E[T] = \frac{4M + 3}{10}, \quad (2.8)$$

$$E[T^2] = \frac{3M^2 + 3M + 2}{15}, \quad (2.9)$$

$$\text{var}[T] = \frac{12M^2 - 12M + 13}{300}, \quad (2.10)$$

y los momentos de la distribución con dominio $[a, b]$ como

$$E[X] = \frac{3a + 4m + 3b}{10}, \quad (2.11)$$

$$E[X^2] = \frac{2a^2 + 2ab + 2b^2 + 3am + 3bm + 3m^2}{15}, \quad (2.12)$$

$$\text{var}[X] = \frac{13a^2 + 13b^2 - 12bm + 12m^2 - 2a(7b + 6m)}{300}. \quad (2.13)$$

Utilizando la relación existente entre los momentos centrados y no centrados, Stuart y Ord, [103]:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2, \quad (2.14)$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3, \quad (2.15)$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4, \quad (2.16)$$

se muestran las expresiones del coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{6\sqrt{3}(2M-1)(4M^2-4M-19)}{7(12M^2-12M+13)^{3/2}}, \quad (2.17)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{27(88M^4-176M^3+312M^2-224M+113)}{7(12M^2-12M+13)^2}. \quad (2.18)$$

Para tener una visión más general sobre la distribución bicúbica se muestra el estudio de las representaciones gráficas de los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución bicúbica estandarizada en el intervalo $[0, 1]$, que se denotará por SBC.

En la Figura 2.3, la distribución bicúbica presenta asimetría positiva cuando M es inferior a 0.5, ya que el coeficiente de asimetría siempre toma valores positivos, llegando a alcanzar como máximo el valor 0.6. Sin embargo, la asimetría de la distribución cambia de signo a medida que la moda estandarizada toma valores comprendidos entre 0.5 y 1. En el caso particular en el que la moda estandarizada alcanza el punto medio del intervalo $[0, 1]$, se consigue describir una distribución simétrica. Uno de los principales inconvenientes que limitan en la práctica la aplicación de la distribución normal es, la carencia de distintos tipos de asimetrías. Es por ello, que la distribución bicúbica se puede considerar como una posible candidata para sustituir a la distribución normal.

Con respecto al coeficiente de curtosis, se comprueba a partir de la Figura 2.4, que la distribución estandarizada toma valores en el intervalo $[2.410, 2.579]$. Teniendo en cuenta que el coeficiente de curtosis de la distribución normal es 3, entonces se tiene una distribución que presenta menor apuntamiento que dicha distribución, describiéndose así una distribución platicúrtica.

A partir del sistema generador de van Dorp y Kotz [111], se ha definido la

2.1. DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

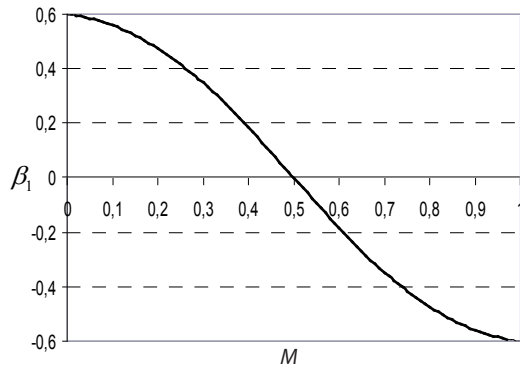


Figura 2.3: Coeficiente de asimetría de la distribución SBC.

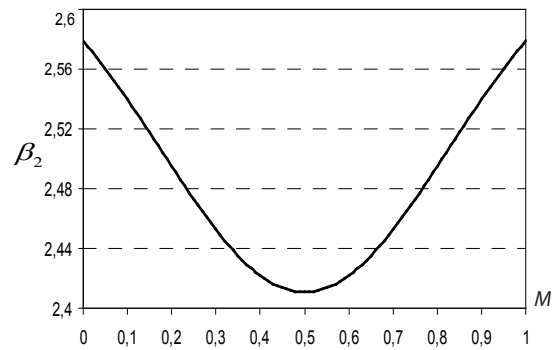


Figura 2.4: Coeficiente de curtosis de la distribución SBC.

distribución bicúbica que presenta distintos tipos de asimetrías, según sea el valor que tome la moda estandarizada, M , y con un coeficiente de curtosis inferior al de la distribución normal.

Utilizando el mismo procedimiento que ha sido aplicado para generar la distribución bicúbica, se presenta a continuación la construcción de la distribución biseno indicando sus principales características estocásticas.

2.1.2. Construcción y características estocásticas de la distribución biseno

2.1.2.1. Construcción distribución biseno

Para describir las expresiones de las funciones asociadas a la distribución de la distribución biseno se utiliza, al igual que en el caso de la distribución bicúbica, el sistema generador de van Dorp y Kotz (2003), [111].

Teniendo en cuenta la representación gráfica, Figura 2.5, de la función de densidad asociada a la distribución seno $p(y|A, a) = A \text{sen}(ay)$, se describe la función de densidad generadora.

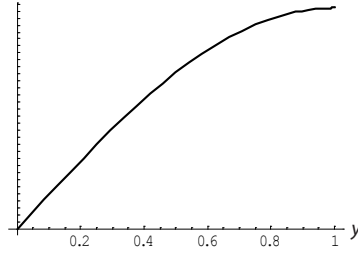


Figura 2.5: Representación de $p(y) = A \text{sen}(ay)$.

Utilizando el gráfico correspondiente a $p(y|A, a)$ e, imponiendo las condiciones necesarias que debe cumplir una función de densidad:

1. pasa por el origen de coordenadas, $p(0) = 0$,
2. presenta un extremo relativo en $y = 1$, $p'(1) = 0$,
3. $\int_0^1 p(y) dy = 1$,

se tiene que $A = \frac{\pi}{2}$ y $a = \frac{\pi}{2}$. Luego la expresión de la función de densidad biseno viene descrita por:

$$p(y|\psi) = \frac{\pi}{2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} y \right). \quad (2.19)$$

Así pues, utilizando la expresión correspondiente a la función de densidad generadora y las expresiones (1.89) y (1.90), se describe la función de densidad, (2.20), y de distribución, (2.21), de la distribución biseno en $[0, 1]$ respectivamente. A lo largo de la sección se denotará a la distribución biseno definida en $[a, b]$ por BS y en el caso de trabajar con la distribución biseno estandarizada en $[0, 1]$ se utilizará SBS.

$$g(t|M, p(y)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{M} \right) & 0 \leq t \leq M, \\ \frac{\pi}{2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{1-t}{1-M} \right) & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$G(t|M, P(y)) = \begin{cases} M [1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{M} \right)] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1 - M) [1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1-t}{1-M} \right)] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.21)$$

donde, se ha tenido en cuenta que la función de distribución asociada a la función de densidad generadora, (2.19), adopta la forma $P(y) = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} y \right)$.

2.1. DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

Realizando el estudio de la función de densidad de la distribución estandarizada biseno se tiene que dicha distribución adopta distintas intensidades en su asimetrías en función de la posición que adquiera el parámetro M en el intervalo $[0, 1]$, véase Figura 2.6. Si M toma valores inferiores o superiores a 0.5 la distribución presenta una asimetría positiva o negativa, respectivamente, y en el caso de que M alcance el valor 0.5 la distribución es simétrica.

Al igual que sucedía en el caso de la distribución bicúbica se tiene que la distribución biseno verifica la propiedad $G(M|M, P(\cdot|\psi)) = MP(1|\psi) = M$, siendo $P(1|\psi) = M \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{M}\right)\right] = M$.

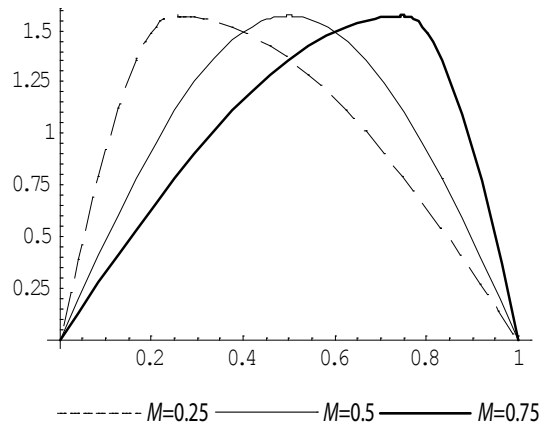


Figura 2.6: Función de densidad de la distribución biseno.

Para obtener las expresiones correspondientes a las funciones de densidad y de distribución asociadas a la distribución biseno definida en $[a, b]$, se realiza el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$ y $M = \frac{m-a}{b-a}$, donde a , b y m son los valores mínimo, máximo y más probable que aporta el experto para realizar el estudio. Así pues, se define la función de densidad de la distribución BS por:

$$f(x) = \frac{\pi}{2(b-a)} \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \frac{x-a}{m-a}\right) & a \leq x \leq m, \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \frac{x-b}{m-b}\right) & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.22)$$

y la función de distribución asociada por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{m-a}{b-a} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x-a}{m-a}\right)\right] & a \leq x \leq m, \\ \frac{m-a}{b-a} + \frac{b-m}{b-a} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x-b}{m-b}\right) & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.23)$$

Por otra parte, se observa que las derivadas laterales de $f(x)$ con respecto a la moda se anulan, indicando este hecho que la función de densidad presenta un extremo relativo en dicho punto, siendo la densidad marginal continua.

2.1.2.2. Características estocásticas distribución biseno

Teniendo en cuenta la relación

$$E[T^k | M, p] = M^{k+1} E[Y^k | \psi] + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^{i+1} E[Y^i | \psi], \quad (2.24)$$

se describen los momentos de orden 1 y 2 de la distribución biseno estandarizada por:

$$E[T] = \frac{\pi - 2 + (4 - \pi)M}{\pi}, \quad (2.25)$$

$$E[T^2] = \frac{8M^2(\pi - 3) + \pi^2 - M(-24 + \pi(4 + \pi)) + \pi^2 - 8}{\pi^2}. \quad (2.26)$$

Como consecuencia, se tiene que la varianza de dicha distribución viene definida mediante la expresión:

$$\text{var}[T] = \frac{4(\pi - 3) - M(M - 1)(40 + (\pi - 16)\pi)}{\pi^2}. \quad (2.27)$$

Para hallar los momentos de la función de distribución biseno en función de la variable aleatoria X definida en el intervalo $[a, b]$, se utiliza la función de densidad (2.22), obteniendo:

$$E[X] = \frac{a(\pi - 2) - m(\pi - 4) + b(\pi - 2)}{\pi}, \quad (2.28)$$

$$E[X^2] = \frac{-8(A - 3m(B - m)) - 4m(B - 2m)\pi + (A - Bm)\pi^2}{\pi^2}, \quad (2.29)$$

donde A y B son polinomios que dependen de los valores proporcionados por el experto

$$A = a^2 + ab + b^2,$$

$$B = a + b.$$

2.1. DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

En el caso de la varianza, la expresión quedaría de la forma:

$$\text{var}[X] = \frac{-4A + 40Bm - 40m^2 + 4C^2\pi - (m^2 - Bm + ab)\pi^2}{\pi^2}, \quad (2.30)$$

donde

$$A = 3a^2 + 4ab + 3b^2,$$

$$B = a + b,$$

$$C = a - 2m + b.$$

Luego, haciendo uso de la relación existente entre los momentos centrados y no centrados de una distribución, [103], y utilizando la expresión (2.24), se obtienen respectivamente, las expresiones del coeficiente de asimetría, β_1 , y curtosis, β_2 , de la distribución biseno:

$$\beta_1 = \frac{-(2M - 1)(-16 + 24\pi - 6\pi^2 + (112 - 120\pi + 30\pi^2 - \pi^3)(M - M^2))}{(-12 + 4\pi + (40 - 16\pi + \pi^2)(M - M^2))^{3/2}}, \quad (2.31)$$

$$\beta_2 = \frac{A - B\pi - C\pi^2 + D\pi^3 + E\pi^4}{(F - G\pi - H\pi^2)^2}, \quad (2.32)$$

donde A , B , C , D , E , F , G y H son polinomios cuyo coeficiente es la moda estandarizada M .

$$A = 528 - 2496M + 4416M^2 - 3840M^3 + 1920M^4,$$

$$B = 96 - 192M - 576M^2 + 1536M^3 - 768M^4,$$

$$C = 48 - 408M + 1320M^2 - 1824M^3 + 912M^4,$$

$$D = 8 - 72M + 232M^2 - 320M^3 + 160M^4,$$

$$E = M - 4M^2 + 6M^3 - 3M^4,$$

$$F = 12 - 40M + 40M^2,$$

$$G = 4 - 16M + 16M^2,$$

$$H = M - M^2.$$

2.1. DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENNO

Realizando la representación gráfica de ambos coeficientes se tiene que la distribución biseno presenta asimetría positiva si $M < 0.5$, asimetría negativa cuando $M > 0.5$ y es simétrica si $M = 0.5$, tal y como se comentó cuando se presentó la Figura (2.6) de la función de densidad. Sin embargo, habría que destacar que la distribución presenta poca asimetría ya que el máximo valor que alcanza dicho coeficiente es de aproximadamente 0.4.

Centrando la atención en el estudio del apuntamiento de la distribución, se observa en la Figura 2.8, la distribución alcanza como máximo el valor 2.23305, cuando la moda estandarizada toma sus valores extremos, 0 o 1, disminuyendo hasta el valor 2.19375, cuando se trabaja con la distribución biseno simétrica, $M = 0.5$. Es por ello que se concluye que la distribución biseno es platicúrtica por presentar un coeficiente de curtosis inferior al de la distribución normal.

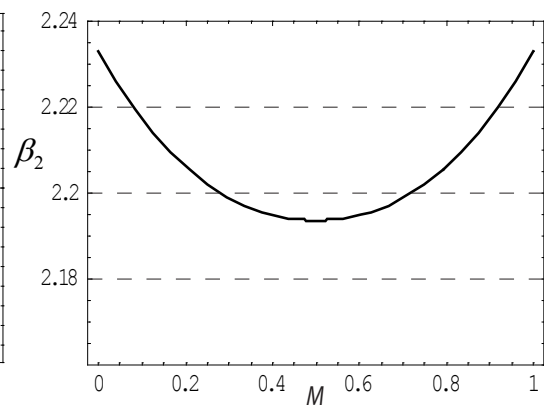
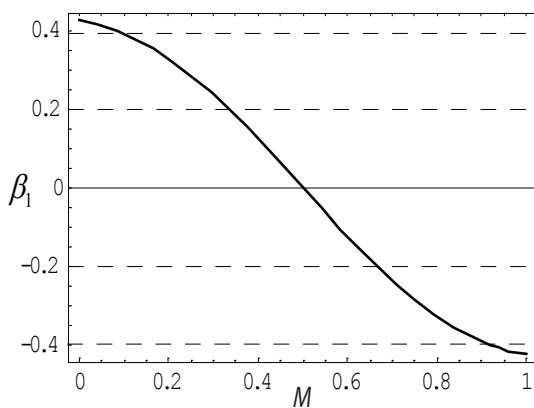


Figura 2.7: Representación del coeficiente de asimetría distribución SBS.

Figura 2.8: Representación del coeficiente de curtosis distribución SBS.

Según la información obtenida se concluye que la distribución biseno presenta distintas formas con respecto a su asimetrías, siendo además una distribución platicúrtica por presentar un coeficiente de curtosis inferior al de la distribución normal.

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

En esta sección se presenta la generalización de la distribución bicúbica y de la distribución biseno usando la herramienta de generalización presentada por van Dorp y Kotz, [109] y [111], y usada previamente para la generalización de la distribución two-sided power y la distribución bipolarabólica. El objetivo que se persigue con la generalización es aportar mayor flexibilidad a ambas distribuciones.

A la hora de mostrar la generalización se parte de la función de densidad generadora

$$p(y) = 6 \left(y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right), \quad (2.33)$$

para el caso de la distribución bicúbica y

$$p(y) = \frac{\pi}{2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2}y \right), \quad (2.34)$$

para la distribución biseno.

Para ello se recurre al uso de un nuevo parámetro n a partir del cual, y utilizando las expresiones (2.33) y (2.34), se describen las funciones generadoras que permitirán describir cada una de las distribuciones a construir.

2.2.1. Generalización de la distribución bicúbica

2.2.1.1. Construcción de la generalización a una rama de la distribución bicúbica

Para dotar a la distribución bicúbica de mayor flexibilidad se introduce, tal y como se comentó anteriormente, el parámetro n el cual permite describir las siguientes funciones de densidad generadoras:

$$p_1(y) = k \left(y^{2n} - \frac{2}{3}y^{3n} \right) = k \left(1 - \frac{2}{3}y^n \right) y^{2n}, \quad (2.35)$$

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

$$p_2(y) = k' \left(y^{n+2} - \frac{2}{3}y^{n+3} \right) = k' \left(y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right) y^n, \quad (2.36)$$

$$p_3(y) = k'' \left(y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right)^n. \quad (2.37)$$

Imponiendo las características que debe cumplir toda función de densidad se obtienen los valores de los parámetros k , k' y k'' ,

$$\int_0^1 k \left(y^{2n} - \frac{2}{3}y^{3n} \right) dy = 1 \Rightarrow k = \frac{3(2n+1)(3n+1)}{5n+1}, \quad (2.38)$$

$$\int_0^1 k' \left(y^{n+2} - \frac{2}{3}y^{n+3} \right) dy = 1 \Rightarrow k' = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6}, \quad (2.39)$$

$$\int_0^1 k'' \left(y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right)^n dy = 1 \Rightarrow k'' = \frac{(2/3)^{1+2n}}{\beta_{2/3}(1+2n, 1+n)}. \quad (2.40)$$

donde $\beta_{2/3}(1+2n, 1+n) = \int_0^{2/3} t^{1+2n-1}(1-t)^{1+n-1} dt = \int_0^{2/3} t^{2n}(1-t)^n dt$

Por tanto, las funciones de densidades generadoras candidatas para describir la distribución bicúbica generalizada corresponden a las expresiones siguientes:

$$p_1(y) = \frac{3(2n+1)(3n+1)}{5n+1} \left(y^{2n} - \frac{2}{3}y^{3n} \right), \quad (2.41)$$

$$p_2(y) = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6} \left(y^{n+2} - \frac{2}{3}y^{n+3} \right), \quad (2.42)$$

$$p_3(y) = \frac{(2/3)^{1+2n}}{\beta_{2/3}(1+2n, 1+n)} \left(y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right)^n. \quad (2.43)$$

Realizando un estudio más exhaustivo sobre sus coeficientes de curtosis se tiene que en el primer caso la función de densidad generadora (2.41) permite describir una distribución leptocúrtica con un coeficiente de curtosis de aproximadamente 6. Para el caso de la función (2.42) la distribución también es leptocúrtica pero alcanzando un valor superior, ya que este asciende hasta 8. En el caso de la función generadora (2.43) el coeficiente de curtosis desciende hasta tomar el valor 4, Figuras 2.9, 2.10 y 2.11.

Para cualquiera de las generalizaciones consideradas la distribución bicúbica presenta siempre un coeficiente de curtosis mayor al de la distribución normal. Es por ello, que con la introducción del parámetro n , la distribución consigue

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

describir un coeficiente de curtosis superior al mostrado en el caso de la distribución BC.

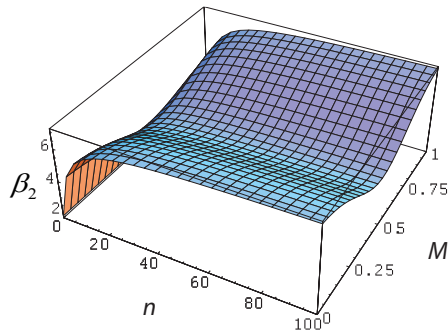


Figura 2.9: Coeficiente de curtosis de la distribución bicúbica generalizada de una rama con la función generadora (2.41).

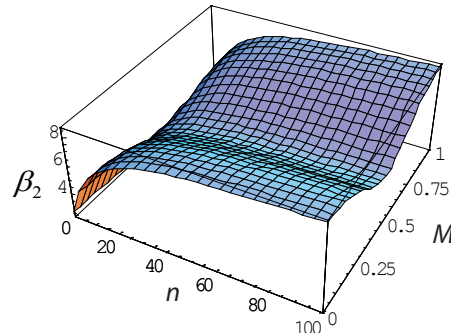


Figura 2.10: Coeficiente de curtosis de la distribución bicúbica generalizada de una rama con la función generadora (2.42).

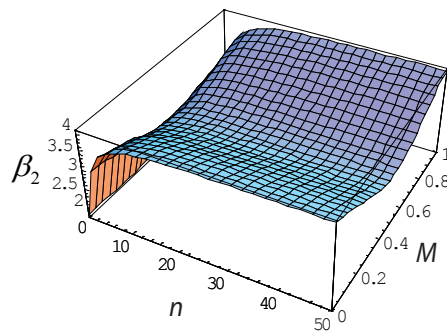


Figura 2.11: Coeficiente de curtosis de la distribución bicúbica generalizada de una rama con la función generadora (2.43).

Con objeto de aplicar la distribución bicúbica generalizada en el ámbito financiero, se seleccionará aquella función de densidad generadora que aporte un mayor rango de curtosis.

Por tanto, partiendo de los comentarios realizados se describirá la distribución bicúbica generalizada de una rama utilizando la función de densidad generadora

$$p_2(y) = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6} \left(y^{n+2} - \frac{2}{3} y^{n+3} \right), \quad (2.44)$$

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

donde Y , hace referencia a la variable generadora definida en $[0, 1]$.

Para el caso de la distribución bicúbica generalizada estandarizada $SGBC_1$, se denota a T como la variable aleatoria definida en $[0, 1]$. Po último, la variable X hace referencia a la variable desestandarizada cuyo dominio de definición viene descrito en el intervalo $[a, b]$, dando lugar a la distribución GBC_1 ².

Así pues, a partir del sistema generador de van Dorp y Kotz, se describen las expresiones correspondientes a la función de densidad, (2.45), y función de distribución, (2.48), de la distribución bicúbica estandarizada de una rama $SGBC_1$, definida en $[0, 1]$.

$$g(t|M, p(\cdot|n)) = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6} \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{2+n} - \frac{2}{3} \left(\frac{t}{M}\right)^{3+n} & 0 \leq t \leq M, \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{2+n} - \frac{2}{3} \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{3+n} & M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.45)$$

$$G(t|M, P(\cdot|n)) = \begin{cases} AM \left[\left(\frac{t}{M}\right)^{n+3} B - \left(\frac{t}{M}\right)^{n+4} C \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 + A(M-1) \left[\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n+3} B - \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n+4} C \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.46)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6}, \\ B &= \frac{1}{n+3}, \\ C &= \frac{2}{3(n+4)}. \end{aligned}$$

En las Figuras 2.12 A, 2.13 A, 2.14 A, 2.15 A, 2.16 A, 2.17A, se representa la función generadora y en las Figuras 2.12 B, 2.13 B, 2.14 B, 2.15 B, 2.16 B, 2.17 B, se muestra la representación gráfica de la función de densidad en función del parámetro n .

²Durante los capítulos siguientes se denota a la distribución bicúbica generalizada de una rama por GBC cuando el dominio de definición de la variable es el intervalo $[a, b]$ y $SGBC$ si la distribución está estandarizada en el intervalo $[0, 1]$

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

Tal y como se observa en las Figuras citadas, se comprueba que a medida que el valor del parámetro n aumenta, la función de densidad de la distribución tiende a degenerar en el punto medio del intervalo de definición de la variable aleatoria. Este hecho conlleva a la presencia de un apuntamiento y crecimiento más pronunciado por parte de la función de densidad.

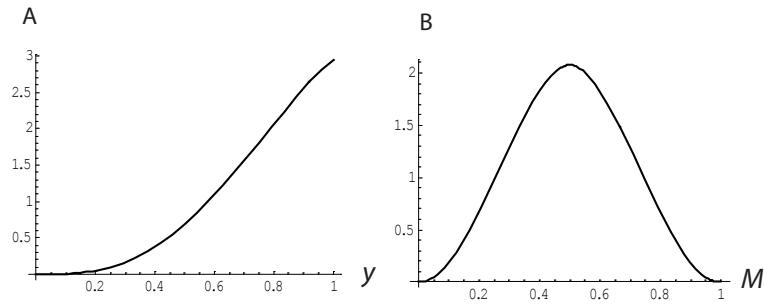


Figura 2.12: Función generadora, (A), y función de densidad, (B), de la distribución $SGBC_1(M, 0.1)$.

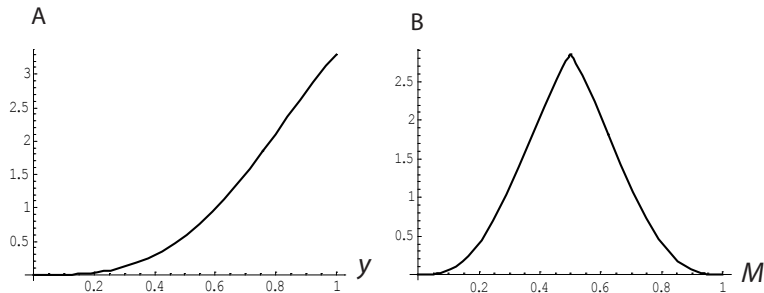


Figura 2.13: Función generadora, (A), y función de densidad, (B), de la distribución $SGBC_1(M, 1)$.

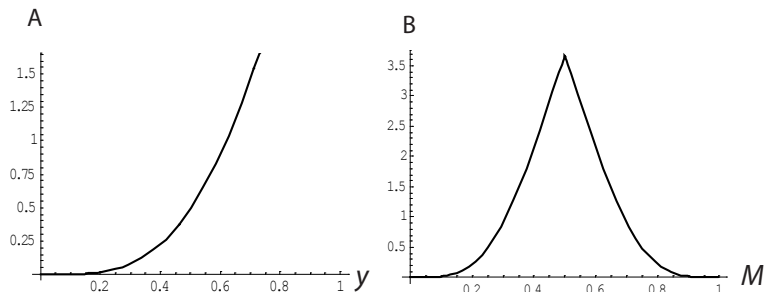


Figura 2.14: Función generadora, (A), y función de densidad, (B), de la distribución $SGBC_1(M, 1.9)$.

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

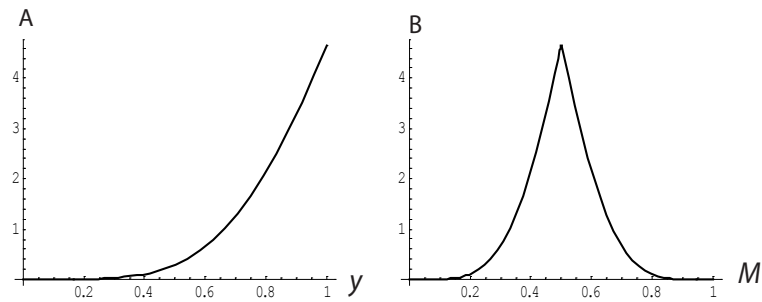


Figura 2.15: Función generadora, (A), y función de densidad, (B), de la distribución $SGBC_1(M, 3)$.

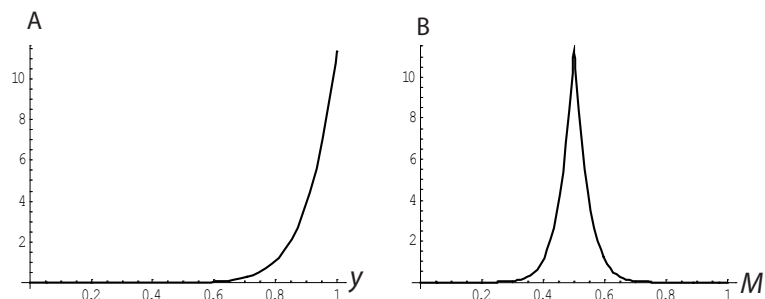


Figura 2.16: Función generadora, (A), y función de densidad, (B), de la distribución $SGBC_1(M, 10)$.

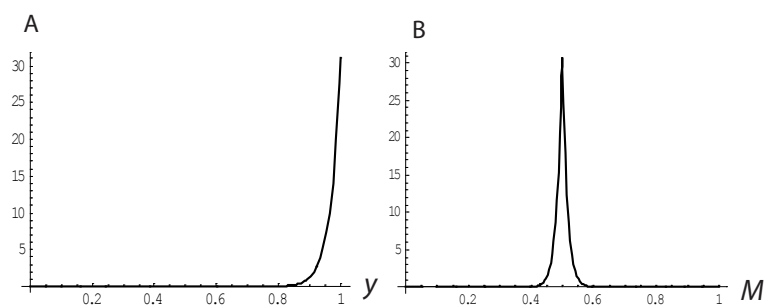


Figura 2.17: Función generadora, (A), y función de densidad, (B), de la distribución $SGBC_1(M, 30)$.

Considerando el valor cero para el parámetro n , se obtienen las expresiones de la función de densidad (2.2) y de la función de distribución (2.3) de la distribución bicúbica.

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

Tomando el cambio de variable $T = \frac{X-a}{b-a}$ y $M = \frac{m-a}{b-a}$ se describen las funciones de densidad y de distribución de la distribución bicúbica, que denotaremos por $SGBC_1$, con dominio de definición el intervalo $[a, b]$, siendo a es el valor mínimo, m el valor más probable y b el valor máximo, aportados todos ellos por el experto.

$$f(x, p(\cdot|n)) = \frac{3(n+3)(n+4)}{(n+6)(b-a)} \begin{cases} \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{2+n} - \frac{2}{3} \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{3+n} & a \leq x \leq m, \\ \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{2+n} - \frac{2}{3} \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{3+n} & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.47)$$

$$F(x, P(\cdot|n)) = \begin{cases} A \frac{m-a}{b-a} \left[\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n+3} B - \frac{2}{3} \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n+4} C \right] & a \leq x \leq m, \\ 1 + A \left(\frac{m-a}{b-a} - 1 \right) \left[\left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{n+3} B - \frac{2}{3} \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{n+4} C \right] & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.48)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6}, \\ B &= \frac{1}{n+3}, \\ C &= \frac{1}{n+4}. \end{aligned}$$

2.2.1.2. Cálculo de los momentos

Para facilitar el cálculo de los momentos de la distribución bicúbica generalizada en función de las variables aleatorias T y X , se describirán en primer lugar los momentos correspondientes a la variable generadora y . Para ello, utilizando la expresión de la función de densidad generadora

$$p(y) = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6} \left(y^{2+n} - \frac{2}{3} y^{3+n} \right), \quad (2.49)$$

se tiene que el momento de orden uno de dicha variable Y definida en el intervalo $[0, 1]$ corresponde a la expresión

$$E[Y] = \frac{(n+3)(n+7)}{(n+5)(n+6)}. \quad (2.50)$$

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

Una de las propiedades que verifica la distribución beta es que el valor esperado no coincide con la moda. Siguiendo esta misma línea, se tiene que la distribución bicúbica generalizada de una rama también cumple dicha propiedad. Igualando el valor modal de la función de densidad generadora, $y_{mo} = \frac{3n+6}{n+6}$, a la expresión (2.50), se tiene la ecuación

$$2n^2 + 11n + 9 = 0 \quad (2.51)$$

cuyas soluciones son $n_1 = \frac{-9}{2}$ y $n_2 = -1$, ambas negativas. Teniendo en cuenta la construcción de la distribución, el parámetro n que se utiliza para la generalización se considera que es un número positivo, por tanto, la ecuación (2.51) no conduce a soluciones válidas.

Realizando la generalización de dicho momento para la variable Y^k , con $k > 0$, se tiene que el momento de orden k de Y viene dado por:

$$E[Y^k] = \frac{(n+3)(n+4)}{(n+6)} \frac{n+k+6}{(n+k+3)(n+k+4)}. \quad (2.52)$$

Luego, utilizando la expresión de van Dorp y Kotz, [111],

$$E[T^k | M, p] = M^{k+1} E[Y^k | \psi] + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^{i+1} E[Y^i | \psi], \quad (2.53)$$

se describen respectivamente, el momento de orden 1, (2.54), y la varianza, (2.55), de la distribución SGBC₁,

$$E[T] = \frac{Mn^2 + (9M+1)n + 12M+9}{n^2 + 11n + 30}, \quad (2.54)$$

$$\text{var}[T] = \frac{(2M^2 - 2M + 1)n^2 + (30M^2 - 30M + 16)n + (36M^2 - 36M + 39)}{(n+5)^2(n+6)^2}. \quad (2.55)$$

y el valor esperado de la distribución GBC₁, en función de la variable X , con recorrido $[a, b]$, viene dado por:

$$E[X] = \frac{(n+9)a + (n^2 + 9n + 12)m + (n+9)b}{(n+5)(n+6)}. \quad (2.56)$$

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

Cuando $n = 0$, en la expresión (2.56) se reduce al valor esperado de la distribución bicúbica

$$E[X] = \frac{9a + 12m + 9b}{30} = \frac{3a + 4m + 3b}{10}. \quad (2.57)$$

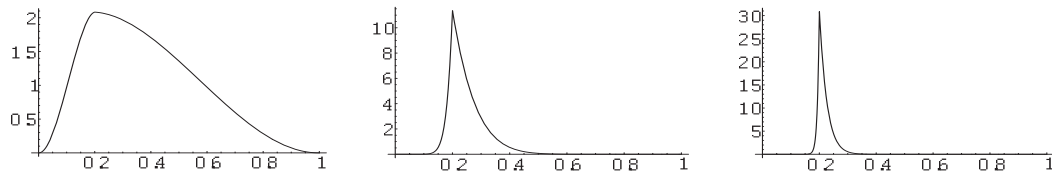
Resolviendo la ecuación $n^2 + 9n + 12 = n + 9$ se obtiene el valor, o valores, que puede tomar el parámetro n a partir de los cuales se consigue la misma ponderación para la moda y los valores extremos. De dicha ecuación se obtiene como soluciones $n = -0.3944487$ y $n = -7.6055513$. Así pues, para valores de n positivos la moda se verá más ponderada que los valores extremos del intervalo. Luego, teniendo en cuenta los resultados obtenidos no se trabajará en aquellos casos en los que se le dé mayor o igual importancia a los extremos que a la moda.

Para estudiar el comportamiento de la distribución $SGBC_1$ se muestra en la Figura 2.18 las funciones de densidad para unos determinados valores de M y n . En dichas representaciones se observa que aumentando el tamaño de n la función de densidad tiende a concentrarse alrededor del valor de la moda estandarizada, M . Con respecto al estudio de su asimetría, se tiene que la distribución presenta asimetría positiva cuando $M < 0.5$ y negativa si $M > 0.5$. En el caso particular de que la moda tome el punto medio del intervalo $[0, 1]$, se describe una distribución simétrica adoptando una forma muy similar a la función de densidad de la distribución normal.

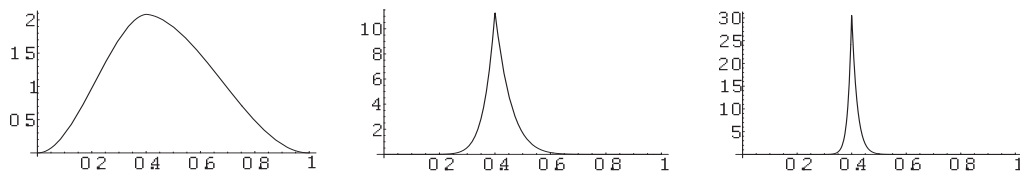
Luego, hay que destacar, que la distribución bicúbica generalizada de una rama reúne las condiciones para poder ser aplicada en el ámbito del PERT, por presentar una función de densidad con distintos tipos de asimetrías en función de los valores considerados de M y n . Además, la variable aleatoria viene definida en un dominio acotado. Este hecho es destacable, ya que la distribución beta fue introducida por los creadores del PERT para salvaguardar los problemas que presenta la distribución normal con respecto a su no asimetría y a su recorrido no acotado.

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

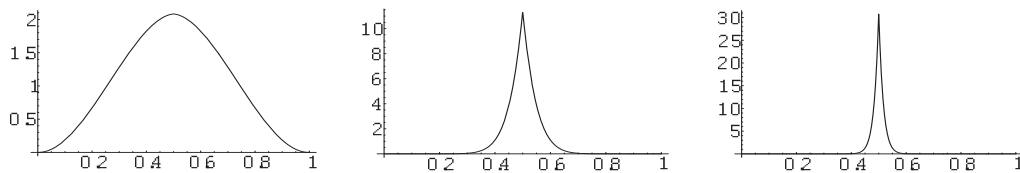
$M=0.2$



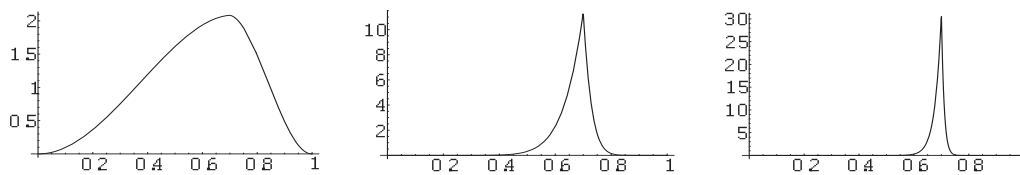
$M=0.4$



$M=0.5$



$M=0.7$



$M=0.9$

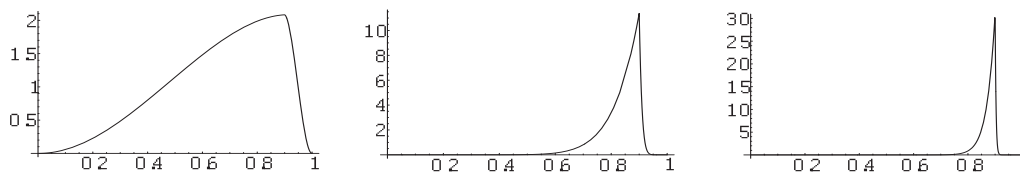


Figura 2.18: Función de densidad de la distribución $SGBC_1$ para $M = 0.2$, $M = 0.4$, $M = 0.5$, $M = 0.7$ y $M = 0.9$, considerando $n = 0.1$, $n = 10$ y $n = 30$.

2.2.1.3. Estudio de la asimetría y curtosis de la distribución GBC_1

Haciendo uso de la relación de los momentos de la función generadora $p(y)$ y la función de densidad $g(t)$, desarrollados por van Dorp y Kotz [112], (2.53), se describen los momentos centrados respecto a la media. A partir de ellos, se

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

generan las expresiones correspondientes al coeficiente de asimetría y de curtosis de la distribución bicúbica generalizada.

Así pues, después de realizar los cálculos de los momentos de orden 1, 2 y 3, se tiene que el coeficiente de asimetría viene descrito por:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = -\frac{2(2M-1)(A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4)}{(n+5)^3(n+6)^3(n+7)\left[\frac{F_1+G_1n+H_1n^2}{900+660n+181n^2+22n^3+n^4}\right]^{3/2}}, \quad (2.58)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= 513 + 108M - 108M^2, \\ B &= 612 + 9M - 9M^2, \\ C &= 222 - 123M + 123M^2, \\ D &= 28 - 25M + 25M^2, \\ E &= 1 - M + M^2, \\ F &= 39 - 36M + 36M^2, \\ G &= 16 - 30M + 30M^2, \\ H &= 1 - 2M + 2M^2, \end{aligned}$$

son expresiones polinómicas en M .

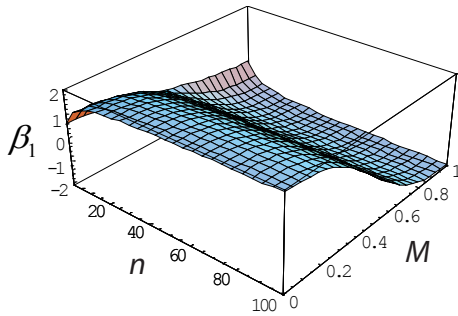


Figura 2.19: Coeficiente de asimetría de la distribución GBC_1 (1).

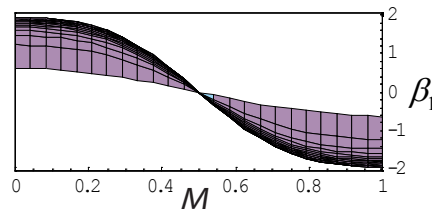


Figura 2.20: Coeficiente de asimetría de la distribución GBC_1 (2).

En las Figuras 2.19 y 2.20 se tiene que el coeficiente de asimetría de la distribución GBC_1 toma valores positivos cuando $M < 0.5$ y negativos si $M > 0.5$

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

presentando, por tanto, asimetría positiva y negativa respectivamente. En el caso particular de considerar $M = 0.5$ se tiene una distribución que presenta un coeficiente de asimetría nulo, es decir, se describe un modelo probabilístico simétrico.

Para valores de n y M próximos a cero, el coeficiente de asimetría se aproxima a uno, tal y como se recoge en la Figura 2.19. Sin embargo, en la Figura 2.20 se observa que a medida que el parámetro n aumenta, el coeficiente de asimetría alcanza, en valor absoluto, su máximo valor, ascendiendo este a dos.

La expresión que se tiene para el caso del coeficiente de curtosis viene dada por:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3}{(n+7)(n+8)} \frac{A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + Fn^5 + Gn^6}{(H + In + Jn^2)^2}, \quad (2.59)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= 73224 - 1451452M + 202176^2 - 114048M^3 + 57024M^4, \\ B &= 94257 - 243288M + 349128M^2 - 211680M^3 + 105840M^4, \\ C &= 49431 - 149580M + 215964M^2 - 132768M^3 + 66384M^4, \\ D &= 13234 - 45024M + 67800M^2 - 45552M^3 + 22776M^4, \\ E &= 1854 - 6856M + 10832M^2 - 7952M^3 + 3976M^4, \\ F &= 125 - 488M + 800M^2 - 624M^3 + 312M^4, \\ G &= 3 - 12M + 20M^2 - 16M^3 + 8M^4, \\ H &= 39 - 36M + 36M^2, \\ I &= 16 - 30M + 30M^2, \\ J &= 1 - 2M + 2M^2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la Figura 2.21, la distribución bicúbica generalizada de una rama presenta un coeficiente de curtosis de aproximadamente 8 cuando $n \rightarrow 100$ y M toma los valores extremos. En el caso de la distribución GBC_1 simétrica, el coeficiente disminuye aproximadamente hasta 6. Aún así, se tiene que en el caso de que n tome valores elevados la distribución presenta un apuntamiento superior al de la distribución normal.

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

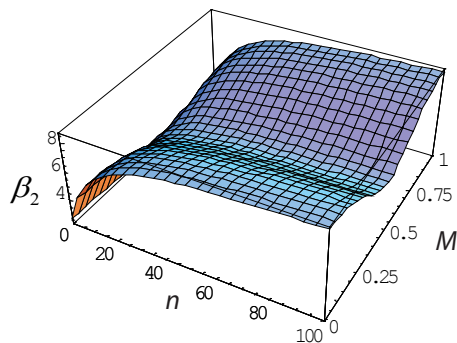


Figura 2.21: Coeficiente de curtosis de la distribución GBC_1 .

Por tanto, al describir la distribución bicúbica generalizada introduciendo el parámetro n se ha conseguido obtener una distribución que presenta distintas formas con respecto a su asimetría, además de conseguir describir un apuntamiento superior al de la distribución normal.

A partir de los resultados conseguidos en el estudio de la distribución GBC_1 , se observa que tiene ciertas características que la convierte en una buena distribución para aplicarla en el ajuste de la serie de los rendimientos financieros.

Como complemento a lo anteriormente presentado, se muestra el gráfico correspondiente al diagrama del ratio de los momentos. Dicho gráfico, presentado por Elderton y Johnson, [23], muestra el efecto de los parámetros de las distribuciones sobre los valores del coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis. Se representan en el eje de coordenadas los valores correspondientes al coeficiente de curtosis (β_2), y en el eje de abscisas la raíz cuadrada del coeficiente de asimetría ($\sqrt{\beta_1}$) con objeto de retener el signo del momento de orden tres y siguiendo la modificación propuesta por Kotz y Johnson, [59], sobre la expresión original del gráfico.

Así pues, el diagrama del ratio de los momentos permite representar la cobertura que cada una de las distribuciones tiene sobre el par $(\sqrt{\beta_1}, \beta_2)$. Por ejemplo, cualquiera que sea el valor de los parámetros que caracterizan a la distribución normal, solo existe una única combinación posible para dicho par y, por tanto, su representación en el diagrama del ratio de los momentos, sería un único punto asociado al par $(0,3)$. Análogamente, la representación de la distribución uniforme sería un punto en $(0,1.8)$. Nótese que, dado que para todas

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

las distribuciones se cumple que $\beta_2 \geq (\sqrt{\beta_1})^2 + 1$, existe una zona no factible en el gráfico que se ha representado con el área gris, Figura 2.22.

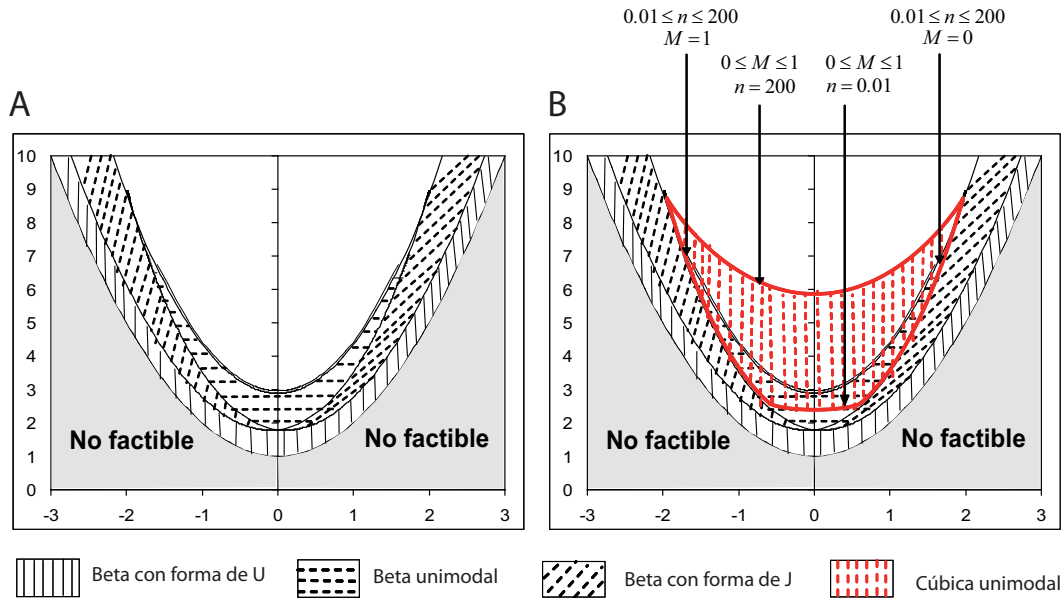


Figura 2.22: Diagrama del ratio de los momentos de la distribución beta, (A), y de las distribuciones beta y bicúbica, (B).

Para la construcción del ratio de los momentos de la distribución beta, representada en la Figura 2.22.A, se han hecho variar los parámetros α y β entre 0.01 y 1000. Siguiendo a van Dorp y Mazzuchi, [114], y con objetos prácticos, se ha reparametrizado la distribución beta de manera que $\beta = p + q$ y $\alpha = \frac{p}{p+q}$.

La zona horizontalmente rayada representa la cobertura de $(\sqrt{\beta_1}, \beta_2)$ para las distribuciones unimodales beta, y la zona verticalmente rayada las distribuciones beta con forma de U. El área diagonalmente rayada representa a las distribuciones beta con forma de J.

Con objetos comparativos se ha superpuesto, en la Figura 2.22.B, el diagrama del ratio de los momentos de la distribución bicúbica sobre el de la distribución beta. El rango para los parámetros de la distribución bicúbica es $0.01 \leq n \leq 200$ y $0 \leq M \leq 1$. Se observa que esta distribución consigue aumentar la cobertura de la distribución beta sobre el area de distribuciones unimodales.

Por ejemplo, si se trabajan con datos empíricos que presenten un coeficiente

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

de asimetría nulo y un coeficiente de curtosis igual a 5, no parecería adecuado recurrir a la distribución beta, mientras que la distribución bicúbica si permitiría dicha combinación. De hecho, el coeficiente de curtosis de una distribución beta unimodal simétrica es siempre estrictamente menor que 2.88679, mientras que en el caso de la distribución bicúbica dicho valor asciende a 5.88018.

Por otra parte, si se compara el área de cobertura en dicho gráfico de la distribución bicúbica con la de la distribución two-sided power, recogido en van Dorp y Kotz, [110], se puede afirmar que son equivalentes, lo que implica que ambas distribuciones presentan una flexibilidad similar.

2.2.1.4. Estimación de la distribución GBC_1 mediante restricciones en la familia de distribuciones

Con el objeto de realizar la estimación de los parámetros que describen a la distribución GBC_1 se presenta como una herramienta alternativa el método de restricciones en la familia de distribuciones. El método utilizado para la estimación consiste en considerar que la varianza y el coeficiente de curtosis asociado a la distribución coincide con los presentados por la distribución normal, es decir:

$$\begin{aligned}\text{var}[T] &= \frac{1}{36}, \\ \beta_2 &= 3.\end{aligned}$$

Así pues, igualando las expresiones de la varianza y coeficiente de curtosis de la distribución GBC_1 a $\frac{1}{36}$ y 3 respectivamente, se plantea un sistema de ecuaciones donde, tanto n como M son las incógnitas a obtener. Resolviendo el sistema, se tiene como soluciones los valores que se muestran a continuación

$$n = -22.29667, M = -2.92094$$

$$n = -22.29667, M = -1.92094$$

$$n = 0.97037, M = 0.12565$$

$$n = 0.97037, M = 0.87435$$

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

Luego teniendo en cuenta que el parámetro n es un número entero positivo y M toma valores en el intervalo $[0, 1]$, se puede concluir que el valor de n que verifica las dos restricciones impuestas sobre la distribución es 0.97037. A continuación, se muestra la representación gráfica de la distribución bicúbica clásica para distintos valores de la moda estandarizada, Figura 2.23.

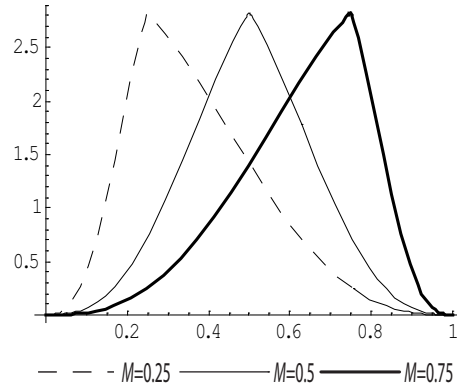


Figura 2.23: Función de densidad de la distribución GBC_1 clásica.

Como consecuencia, diremos que la distribución GBC_1 pertenece al grupo de familias clásicas cuando $n = 0.97037$.

2.2.2. Generalización de la distribución biseno

2.2.2.1. Construcción de la generalización a una rama de la distribución biseno

Procediendo de una forma similar a la construcción de la distribución GBC_1 , se presenta la distribución biseno generalizada a una rama. Para ello, partiendo de la función de densidad generadora asociada a la distribución biseno, $p(y|\psi) = \frac{\pi}{2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} y \right)$, se presentan las siguientes funciones de densidades generadoras como posibles candidatas para la construcción de la generalización:

$$p_1(y) = k \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} y^n \right), \quad (2.60)$$

$$p_2(y) = k' \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} y^{n+1} \right), \quad (2.61)$$

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

Imponiendo la condición

$$\int_0^1 p_1(y) dy = 1,$$

$$\int_0^1 p_2(y) dy = 1,$$

y realizando los cálculos necesarios, se tienen las expresiones de las funciones de densidad generadoras de la distribución biseno

$$p_1(y) = \frac{2 + 2n}{\pi {}_pF_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \right]} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} y^n \right), \quad (2.62)$$

$$p_2(y) = \frac{2(2 + n)}{\pi {}_pF_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \right]} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} y^{n+1} \right), \quad (2.63)$$

siendo ${}_pF_q[a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_k z^k}{\prod_{j=1}^q (b_j)_k k!}$, y $(a_j)_k = a_j(a_j + 1) \cdot \dots \cdot (a_j + k - 1)$ es el símbolo de Pochhammer.

Para realizar la generalización a una rama de la distribución biseno se selecciona entre las expresiones (2.62) y (2.63) aquella que aporte mayor recorrido al coeficiente de curtosis asociado a la distribución generalizada. Luego, teniendo en cuenta las Figuras 2.24 y 2.25, se observa que ambos coeficientes son similares alcanzado como máximo el valor 8. Debido a la complejidad que presenta ambas funciones generadoras y teniendo en cuenta que se comportan de una forma muy similar se realizará la generalización utilizando como función generadora (2.62).

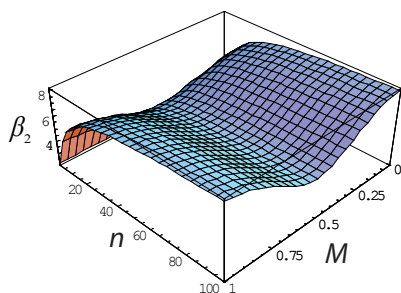


Figura 2.24: Coeficiente de curtosis de la distribución biseno generalizada de una rama con la función generadora (2.62).

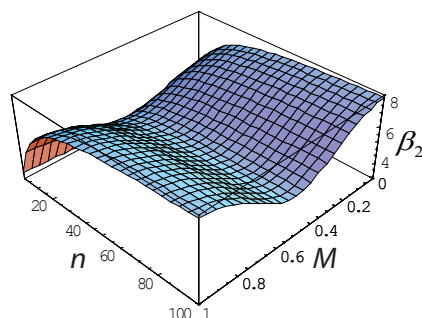


Figura 2.25: Coeficiente de curtosis de la distribución biseno generalizada de una rama con la función generadora (2.63).

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

A partir del sistema generador de van Dorp y Kotz, [111], se define la distribución biseno generalizada, denotada por SGBS en el caso de trabajar con la variable T definida en $[0, 1]$, y para el caso de la variable X cuyo dominio de definición es $[a, b]$, se denotará por GBS.

Luego, realizando los cálculos necesarios se tiene que la función de densidad de SGBS viene dada:

$$g(t|M, p(\cdot|n)) = \frac{(2+2n)}{\pi_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \right]} \begin{cases} \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{M} \right)^n \right] & 0 \leq t \leq M, \\ \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^n \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.64)$$

y la función de distribución asociada a dicha distribución adopta la expresión

$$G(t|M, p(\cdot|n)) = \begin{cases} G_1(t) M \left(\frac{t}{M} \right)^{n+1} \text{sign} \left[\left(\frac{t}{M} \right)^n \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - G_2(t) (1-M) \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{n+1} \text{sign} \left[\left(\frac{1-t}{1-M} \right)^n \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.65)$$

donde

$$G_1(t) = \frac{{}_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \left(\frac{t}{M} \right)^{2n} \right]}{{}_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \right]},$$

$$G_2(t) = \frac{{}_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{2n} \right]}{{}_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \right]},$$

y la función $\text{sign}[z]$ se define como

$$\text{sign}[z] = \begin{cases} -1 & z < 0, \\ 0 & z = 0, \\ 1 & z > 0. \end{cases}$$

Para obtener las expresiones de las funciones de la distribución biseno generalizada de una rama con dominio de definición $[a, b]$, se tiene en cuenta el cambio de variable $T = \frac{X-a}{b-a}$ y $M = \frac{m-a}{b-a}$, consiguiendo así describir la función

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

de densidad, (2.66), y de distribución, (2.67), respectivamente como

$$f(x, p(\cdot|n)) = A \begin{cases} \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^n \right] & a \leq x \leq m, \\ \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{x-b}{m-b} \right)^n \right] & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.66)$$

$$F(x, P(\cdot|n)) = \begin{cases} F_1(x)(x-a) \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^n \text{sign} \left[\left(\frac{x-a}{m-a} \right)^n \right] & a \leq x \leq m, \\ 1 - F_2(x)(x-b) \left(\frac{x-b}{m-b} \right)^n \text{sign} \left[\left(\frac{x-b}{m-b} \right)^n \right] & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.67)$$

siendo

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(n+1)}{(b-a)\pi_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \right]}, \\ F_1(x) &= \frac{{}_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{2n} \right]}{{}_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \right]}, \\ F_2(x) &= \frac{{}_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \left(\frac{x-b}{m-b} \right)^{2n} \right]}{{}_p F_q \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right\}, \frac{-\pi^2}{16} \right]}. \end{aligned}$$

En las Figuras 2.26, 2.27 y 2.28 se muestran las representaciones gráficas de la función de densidad generadora y la función de densidad de SGBS, en función del parámetro n .

Como consecuencia, se tiene a partir del estudio de dichas representaciones que, a medida que varía el valor de n , la función de densidad adopta formas similares a la distribución normal. Si n alcanza valores elevados entonces la función de densidad tiende a degenerar en un punto, concentrando su masa de probabilidad en el punto 0.5. Para este caso, la función de densidad generadora se comporta de una forma constante en casi todo su dominio de definición, presentando, cerca de su máximo valor, un crecimiento exponencial.

Por otra parte, la función de densidad generadora cambia su curvatura a medida que se incrementa el valor de n , ya que para $n = 1.1$ el gráfico presenta una función cóncava y para el caso de $n = 30$ ésta pasa a ser convexa.

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BIENO

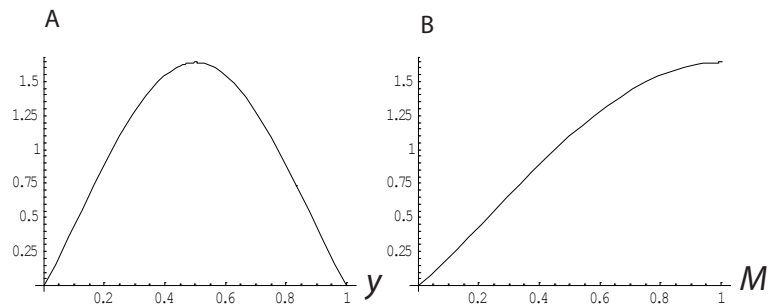


Figura 2.26: Función de densidad, (A), y función generadora, (B), de la distribución $SGBS(M, 1.1)$.

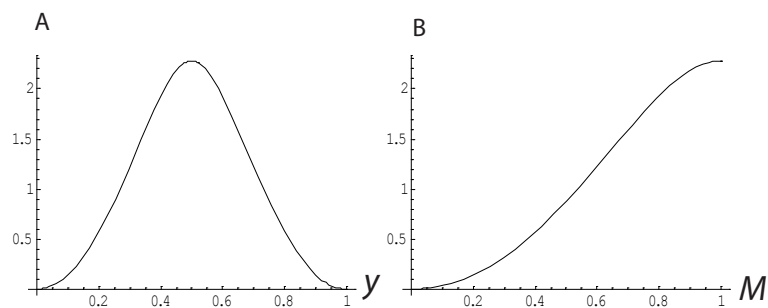


Figura 2.27: Función de densidad, (A), y función generadora, (B), de la distribución $SGBS(M, 2)$.

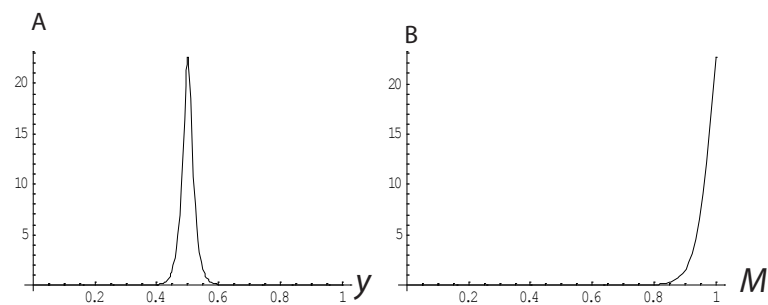


Figura 2.28: Función de densidad, (A), y función generadora, (B), de la distribución $SGBS(M, 30)$.

2.2.2.2. Cálculo de los momentos y estudio de su forma

Para realizar un estudio sobre las principales características estocásticas de la distribución biseno generalizada de una rama, se utilizan los gráficos del

2.2. GENERALIZACIÓN A UNA RAMA DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA Y BISENO

coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis, sin indicar la expresión de dichos momentos debido a la complejidad que presentan, aún así, están a disposición del lector que lo solicite ³.

Para realizar los cálculos de los momentos en primer lugar se obtiene la expresión correspondiente al momento centrado en el origen de orden k de la distribución SGBS, haciendo uso de la relación existente entre los momentos de la función generadora $p(y)$ y la función de densidad $g(t)$, desarrollada por van Dorp y Kotz [111]

$$E[y^k] = \frac{\Gamma\left[\frac{1+k+n}{2n}\right] p\tilde{F}_q\left[\frac{1+k+n}{2n}, \left\{\frac{3}{2}, \frac{1+k+3n}{2n}\right\}, \frac{-\pi^2}{16}\right]}{\Gamma\left[\frac{1+n}{2n}\right]_p \tilde{F}_q\left[\frac{1+n}{2n}, \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}\right\}, \frac{-\pi^2}{16}\right]}, \quad (2.68)$$

siendo $\Gamma[z]$ la función gamma de Euler y

$${}_p\tilde{F}_q[a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_k z^k}{k! \prod_{j=1}^q \Gamma(k + b_j)}.$$

Luego, utilizando la expresión (2.68) y la relación existente entre los momentos centrados con respecto al origen y con respecto a la media, se describen las expresiones del coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis de la distribución generalizada de una rama, cuyas representaciones gráficas vienen dadas en las Figuras 2.29 y 2.30 respectivamente.

A partir de la Figura 2.29, se observa que cuando el parámetro n toma su mínimo valor, la distribución presenta un coeficiente de asimetría nulo para cualquier valor de M comprendido entre 0 y 1. Sin embargo, a medida que el parámetro n aumenta, se tiene que la distribución presenta asimetría positiva cuando $M < 0.5$ y negativa si esta toma valores superiores a 0.5. En el caso particular de considerar $M = 0.5$ entonces se describe una distribución simétrica para cualquier valor de n . Por tanto, la distribución SGBS presenta distintos tipos de asimetrías dependiendo el valor que tomen M y n .

En la Figura 2.30, se observa que el máximo valor que alcanza el coeficiente de curtosis es de aproximadamente 8 cuando n tiende a tomar valores altos y M

³Las expresiones de los coeficientes de asimetrías y curtosis de la distribución han sido calculadas utilizando el programa informático *Mathematica 5.2*

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

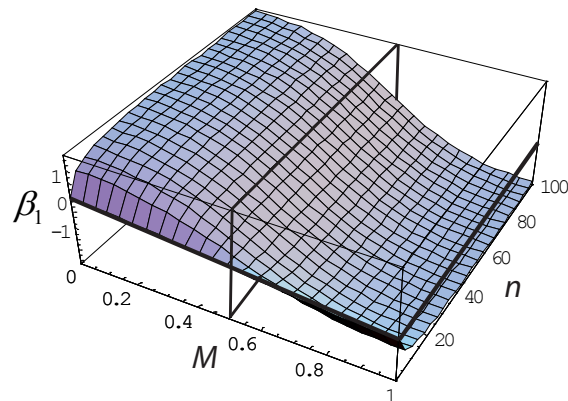


Figura 2.29: Coeficiente de asimetría de la distribución SGBS.

alcanza su mínimo y máximo valor. Sin embargo, cuando $M = 0.5$ el coeficiente de curtosis es aproximadamente 6. Luego, la distribución SGBS presenta un apuntamiento superior a 3, y por tanto se puede afirmar que dicha distribución es leptocúrtica.

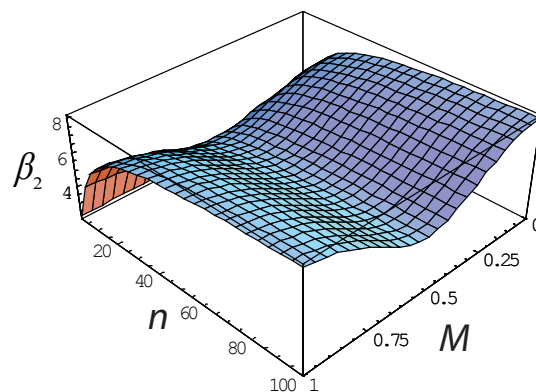


Figura 2.30: Coeficiente de curtosis de la distribución SGBS.

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

Durante la sección anterior se ha construido la generalización de la distribución bicúbica y biseno recurriendo al uso de un nuevo parámetro n , aportando así

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

mayor flexibilidad a la distribución.

Tal y como se comentó anteriormente, el sistema generador de van Dorp y Kotz, [111] viene descrito a partir de una función de densidad $p(y)$, creciente en $[0, 1]$. Parece lógico pensar que el parámetro n que se ha introducido en la generalización no tiene porque ser el mismo a izquierda y derecha de la moda estandarizada.

Por ello, a lo largo de esta sección se presenta la generalización de la distribución bicúbica a dos ramas empleando dos parámetros n_1 y n_2 , donde n_1 y $p(y)$ harán referencia a la rama izquierda de la función de densidad con respecto al parámetro M , y n_2 con $q(y)$ hacen referencia a la rama derecha de la función de densidad con respecto a la moda estandarizada.

2.3.1. Generalización de la distribución bicúbica

Sean $p(y|\psi)$ y $q(y|\gamma)$ dos funciones de densidad continuas y crecientes en el intervalo $[0, 1]$ y $M \in [0, 1]$, se define la familia de funciones de densidad unimodales, con moda en el punto M , como:

$$g(t|M, p(\cdot|\psi), q(\cdot|\gamma)) = \begin{cases} \frac{\pi}{M} p\left(\frac{t}{M}|\psi\right) & 0 \leq t \leq M, \\ \frac{1-\pi}{1-M} q\left(\frac{1-t}{1-M}|\gamma\right) & M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.69)$$

A partir de la función de densidad descrita y, teniendo en cuenta la relación existente entre la función de densidad y la función de distribución, se describe la expresión de la función de distribución asociada a $g(t|M, p(\cdot|\psi), q(\cdot|\gamma))$, que viene dada por:

$$G(t|M, P(\cdot|\psi), Q(\cdot|\gamma)) = \begin{cases} \pi P\left(\frac{t}{M}|\psi\right) & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1 - \pi) Q\left(\frac{1-t}{1-M}|\gamma\right) & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.70)$$

siendo $P(\cdot|\psi)$ y $Q(\cdot|\gamma)$ las funciones de distribución generadoras acumulativas asociadas a las densidades $p(\cdot|\psi)$ y $q(\cdot|\gamma)$, respectivamente.

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} t &\sim g(t|M, p(\cdot|\psi), q(\cdot|\gamma)), \\ Y_1 &\sim p(\cdot|\psi), \\ Y_2 &\sim q(\cdot|\gamma), \end{aligned}$$

y utilizando la expresión (2.69) se obtiene el valor esperado de t^k :

$$E[T^k] = \pi M^k E[Y_1^k] + (1 - \pi) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1 - M)^i E[Y_2^i]. \quad (2.71)$$

En el caso particular de $p(\cdot|\psi) \equiv q(\cdot|\gamma)$ y $\pi = M$ la expresión (2.69), se reduce a:

$$g(t|M, p(\cdot|\psi)) = \begin{cases} p\left(\frac{t}{M}|\psi\right) & 0 \leq t \leq M, \\ q\left(\frac{1-t}{1-M}|\gamma\right) & M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.72)$$

La ventaja que presenta la expresión (2.69), con respecto a la utilizada para la generalización de una rama es que permite especificaciones separadas para cada rama de la distribución. El principal inconveniente que presenta dicha generalización es que la expresión de la función de densidad generalizada a una rama era continua para cualquier valor de M , sin embargo realizando el estudio de la continuidad de la función (2.69), se observa que dicha expresión será continua en su intervalo de definición siempre y cuando se verifique la condición

$$\frac{\pi}{M} p(1|\psi) = \frac{1 - \pi}{1 - M} q(1|\gamma). \quad (2.73)$$

Luego, utilizando la condición impuesta a (2.69) para que sea continua se tiene que π debe adoptar la expresión

$$\pi = \frac{M q(1|\gamma)}{(1 - M) p(1|\psi) + M q(1|\gamma)}. \quad (2.74)$$

Sustituyendo (2.74) en la familia de funciones de densidades unimodales (2.69), se tiene la expresión de la función de densidad continua unimodal cuyo dominio de definición es $[0, 1]$:

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

$$g(t|M, p(\cdot|\psi), q(\cdot|\gamma)) = \begin{cases} \frac{q(1|\gamma)}{(1-M)p(1|\psi)+Mq(1|\gamma)} p\left(\frac{t}{M}|\psi\right) & 0 \leq t \leq M, \\ \frac{p(1|\psi)}{(1-M)p(1|\psi)+Mq(1|\gamma)} q\left(\frac{1-t}{1-M}|\gamma\right) & M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.75)$$

Es por ello, que es necesario describir las expresiones de las funciones de densidad generadoras para así realizar la generalización de la distribución bicúbica a dos ramas. Para describir ambas funciones se recurre a la expresión presentada en la generalización a una rama, con la diferencia de, en lugar de introducir un parámetro n , se hará uso de los parámetros n_1 y n_2 para cada una de las ramas.

Por tanto, se definen las expresiones $p(\cdot|\psi)$ y $q(\cdot|\gamma)$ como:

$$p(y|n_1) = \frac{3(n_1+3)(n_1+4)}{n_1+6} \left(y^{2+n_1} - \frac{2}{3} y^{3+n_1} \right) \quad 0 \leq y \leq 1 \quad n_1 > 0, \quad (2.76)$$

$$q(y|n_2) = \frac{3(n_2+3)(n_2+4)}{n_2+6} \left(y^{2+n_2} - \frac{2}{3} y^{3+n_2} \right) \quad 0 \leq y \leq 1 \quad n_2 > 0, \quad (2.77)$$

respectivamente, cuyas funciones de distribución asociadas vienen dadas por:

$$P(y|n_1) = \frac{3(n_1+3)(n_1+4)}{n_1+6} \left(\frac{y^{3+n_1}}{3+n_1} - \frac{2}{3} \frac{y^{4+n_1}}{4+n_1} \right) \quad 0 \leq y \leq 1 \quad n_1 > 0, \quad (2.78)$$

$$Q(y|n_2) = \frac{3(n_2+3)(n_2+4)}{n_2+6} \left(\frac{y^{3+n_2}}{3+n_2} - \frac{2}{3} \frac{y^{4+n_2}}{4+n_2} \right) \quad 0 \leq y \leq 1 \quad n_2 > 0. \quad (2.79)$$

Teniendo en cuenta que la función de densidad es continua en la moda estandarizada si se verifica la condición (2.74), se tiene sustituyendo (2.76) y (2.77) en dicha expresión la forma adoptada por π ,

$$\pi = \frac{M(n_2+3)(n_2+4)(n_1+6)}{(1-M)(n_1+3)(n_1+4)(n_2+6) + M(n_2+3)(n_2+4)(n_1+6)}, \quad (2.80)$$

cuya representación gráfica viene dada en la Figura 2.31.

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

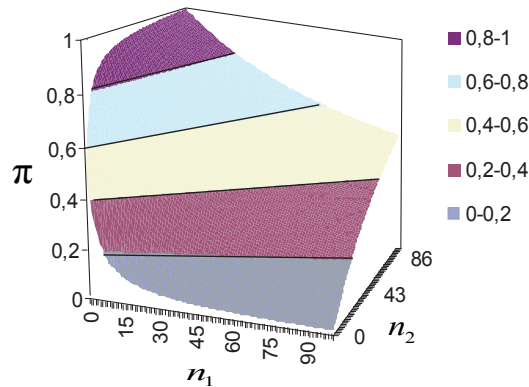


Figura 2.31: Representación gráfica de π .

Así pues, teniendo en cuenta la expresión (2.75), se define la función de densidad de la distribución bicúbica estandarizada generalizada de dos ramas, que se denotará por $SGBC_2$, por:

$$g(t|M, n_1, n_2) = C(M, n_1, n_2) \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{2+n_1} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{t}{M}\right)\right] & 0 \leq t \leq M, \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{2+n_2} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1-t}{1-M}\right)\right] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.81)$$

donde

$$C(M, n_1, n_2) = \frac{3(n_1 + 3)(n_2 + 3)(n_1 + 4)(n_2 + 4)}{(1 - M)(n_1 + 3)(n_1 + 4)(n_2 + 6) + M(n_2 + 3)(n_2 + 4)(n_1 + 6)}. \quad (2.82)$$

Durante la sección se denota por GBC_2 a la distribución bicúbica generalizada de dos ramas con recorrido el intervalo $[a, b]$, en el caso de trabajar con la distribución estandarizada en $[0, 1]$ se recurrirá a la notación $SGBC_2$.

A partir de (2.82), se observa en las Figuras 2.33, 2.32 y 2.34 que la función de densidad adopta distintos tipos de asimetrías según sean los valores que se le asignen a los parámetros n_1 y n_2 .

Si se trabaja con la distribución simétrica, es decir, con el valor 0.5 para la moda estandarizada, se tiene que cuando $n_1 < n_2$ la distribución presenta una asimetría a izquierda. Sin embargo, si se toma $n_1 > n_2$ entonces la representación correspondiente a la función de densidad, describe una gráfica que presenta más

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

valores altos que bajos, obteniendo una distribución con asimétrica a derecha. En el caso particular de que los dos parámetros tomen el mismo valor, se tiene que la distribución es simétrica respecto a su valor modal.

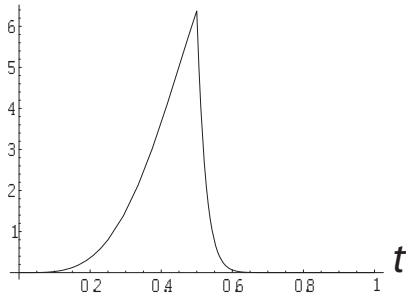


Figura 2.32: Función de densidad de la distribución $SGBC_2(0.5, 2, 20)$.

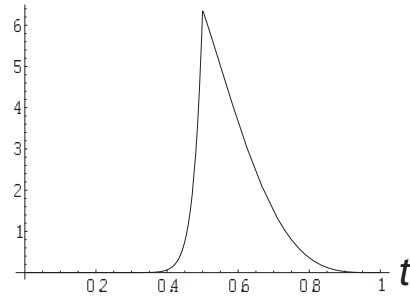


Figura 2.33: Función de densidad de la distribución $SGBC_2(0.5, 20, 2)$.

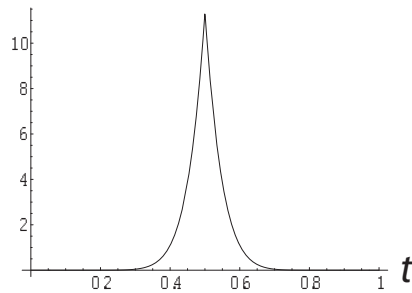


Figura 2.34: Función de densidad de la distribución $SGBC_2(0.5, 10, 10)$.

Además, a partir de dichas representaciones se comprueba con facilidad que la función de densidad asociada a la distribución es continua, tal y como se indicó anteriormente. La presencia de un punto “pico” en el máximo valor alcanzado por la imagen de la función, indica la no derivabilidad de la función de densidad.

En el caso particular en el que $n_1 = n_2$ la expresión de $C(M, n_1, n_2)$ que se obtiene adopta la forma:

$$C(M, n) = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6}, \quad (2.83)$$

coincidiendo esta con el valor de k' de la expresión (2.39), descrito en la

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

generalización a una rama de la distribución bicúbica, a partir del cuál se ha desarrollado todo el contenido teórico correspondiente a dicha sección. En el caso particular de asignarle a ambos parámetros el valor cero se consigue describir la expresión de la función de densidad de la distribución bicúbica (2.2), cuya representación gráfica viene dada en la Figura 2.35.

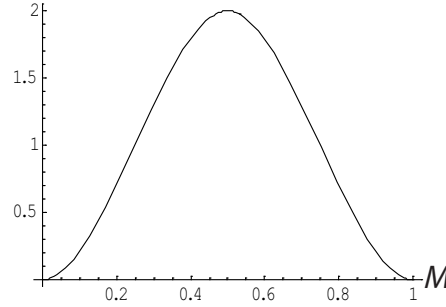


Figura 2.35: Función de densidad de la distribución $SGBC_2(0.5, 0, 0)$.

Con objeto de obtener la expresión de la función de densidad de la distribución bicúbica generalizada de dos ramas con dominio de definición descrito a partir de los valores aportados por el experto a , m y b , se realiza el cambio de variable $T = \frac{X-a}{b-a}$, obteniendo la función de densidad correspondiente a $SGBC_2$, (2.84):

$$f(x) = C(a, m, b, n_1, n_2) \begin{cases} \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{2+n_1} \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{x-a}{m-a}\right)\right) & a \leq x \leq m, \\ \left(\frac{x-b}{m-b}\right)^{2+n_2} \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{x-b}{m-b}\right)\right) & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2.84)$$

donde

$$C(a, m, b, n_1, n_2) = \frac{3(n_1 + 3)(n_1 + 4)(n_2 + 3)(n_2 + 4)}{(b - m)(n_1 + 3)(n_1 + 4)(n_2 + 6) + (m - a)(n_2 + 3)(n_2 + 4)(n_1 + 6)}. \quad (2.85)$$

2.3.2. Cálculo de los momentos

Se presenta a continuación las características estocásticas más destacables de dicha distribución, para conseguir así realizar una representación global de la distribución bicúbica. Para ello sustituyendo la expresión (2.80) correspondiente

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

a π , y

$$E[Y_1^k] = \frac{(n_1 + 3)(n_1 + 4)}{(n_1 + 6)} \left[\frac{n_1 + k + 6}{(n_1 + k + 3)(n_1 + k + 4)} \right],$$

$$E[Y_2^k] = \frac{(n_2 + 3)(n_2 + 4)}{(n_2 + 6)} \left[\frac{n_2 + k + 6}{(n_2 + k + 3)(n_2 + k + 4)} \right],$$

en:

$$E[T^k] = \pi M^k E[Y_1^k] + (1 - \pi) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1 - M)^i E[Y_2^i], \quad (2.86)$$

se tienen los momentos de la distribución centrados con respecto al origen. Debido a la complejidad que encierran las expresiones correspondientes a las principales características estocásticas de la distribución $SGBC_2$, se presenta a continuación los gráficos correspondientes a algunos de los momentos asociados a la distribución considerada, variando los parámetros introducidos en su generalización, n_1 y n_2 .

Por tanto, a partir de las expresiones obtenidas y utilizando los estudios presentados por Stuart y Ord [103], se obtiene el valor esperado, varianza y coeficiente de curtosis de la distribución bicúbica generalizada, de dos ramas, cuyas representaciones gráficas se muestran en las Figuras 2.36, 2.37, 2.38, 2.39 y 2.40.

Al depender el coeficiente de curtosis de la distribución estandarizada en $[0, 1]$ de los parámetros M , n_1 y n_2 se ha considerado el caso particular de $M = 0.5$ para representarlo en función de los parámetros introducidos en la generalización.

Luego, realizando el estudio de la Figura 2.40, se tiene que la distribución $SGBC_2$ simétrica, presenta un coeficiente de curtosis de aproximadamente 6 cuando los valores de los parámetros n_1 y n_2 varían entre 1 y 100.

Así pues, tal y como se comentó en la generalización de una rama, la distribución bicúbica presenta un apuntamiento mayor a 3, consiguiendo describir un modelo con un coeficiente de curtosis superior al coeficiente de la distribución gaussiana.

2.3. GENERALIZACIÓN A DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BICÚBICA

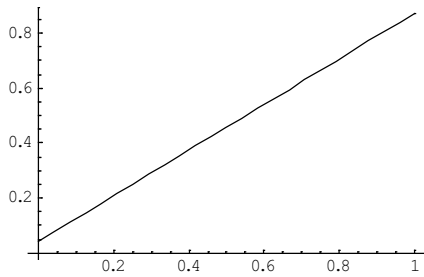


Figura 2.36: Media de la distribución $SGBC_2$ con $n_1 = 2$, $n_2 = 20$ y $M \in [0, 1]$.

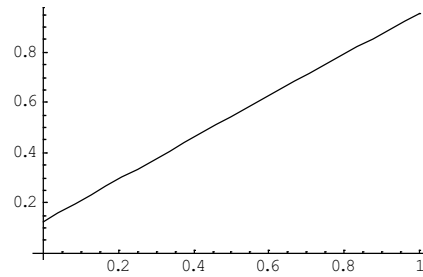


Figura 2.37: Media de la distribución $SGBC_2$ con $n_1 = 20$, $n_2 = 5$ y $M \in [0, 1]$.

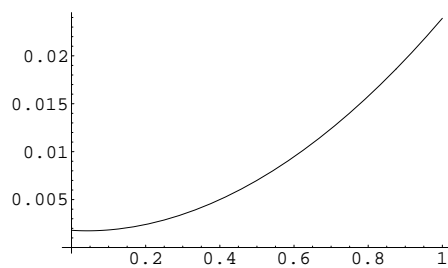


Figura 2.38: Varianza de la distribución $SGBC_2$ con $n_1 = 2$, $n_2 = 20$ y $M \in [0, 1]$.

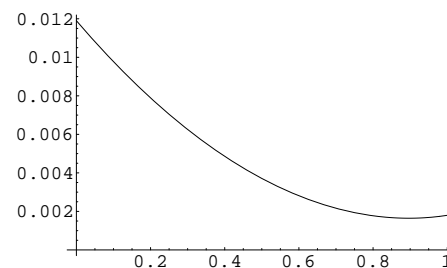


Figura 2.39: Varianza de la distribución $SGBC_2$ con $n_1 = 20$, $n_2 = 5$ y $M \in [0, 1]$.

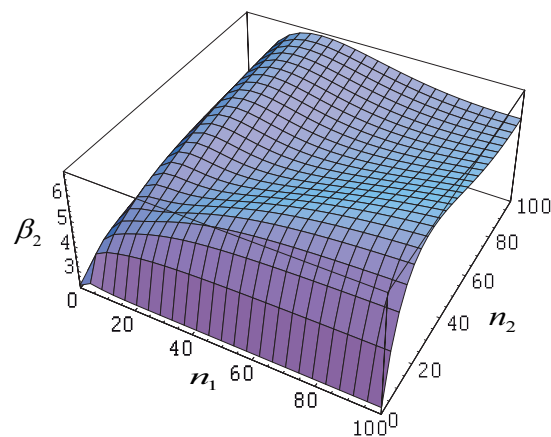


Figura 2.40: Coeficiente de curtosis de la distribución $SGBC_2(0.5, n_1, n_2)$ con $n_1 \in [0, 100]$ y $n_2 \in [0, 100]$.

Teniendo en cuenta esta característica y que las ramas pueden venir descritas a la izquierda y derecha de la moda por distintas distribuciones generadoras, se tiene que la distribución puede tener aplicaciones en el ámbito financiero. Este hecho es de gran interés ya que podrá ajustar los rendimientos de mercado con respecto a la moda, teniendo en cuenta las etapas de mercado al alza o a la baja.

2.4. APLICACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES BICÚBICA Y BIENSO EN LA METODOLOGÍA PERT

El método PERT surgió en un ambiente de investigación y desarrollo, donde existía una gran incertidumbre con respecto a los tiempos de actividad, resultando así un modelo probabilístico. La distribución del tiempo que se supone para la actividad se define utilizando los tres valores aportados por el experto donde:

- a : valor mínimo o también conocido como valor optimista, que representa el tiempo mínimo en que podría ejecutarse la actividad si todo marchara excepcionalmente bien.
- m : valor más probable o estimación modal, cuya interpretación hace referencia al tiempo, que normalmente, se empleará en ejecutar la actividad, con $m \in (a, b)$.
- b : valor máximo o valor pesimista, que representa el tiempo máximo en que se podría ejecutar la actividad si todas las circunstancias que influyen en su duración fueran totalmente desfavorables.

El intervalo definido por los valores a y b determinan el rango donde fluctuará la variable aleatoria.

A lo largo de la memoria se trabajará con la notación a para el valor mínimo, m valor modal y b valor máximo, ya que puede suceder que el valor optimista no coincida con el valor mínimo y el pesimista no coincida con el máximo, tal y como puede ocurrir sobre los flujos de caja, [104].

2.4. APLICACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES BICÚBICA Y BIENO EN LA METODOLOGÍA PERT

Según los estudios presentados por Taha, [105] y desarrollados por Herrerías, [43], un modelo probabilístico será adecuado en el análisis de inversiones en ambiente de riesgo, si presenta una media ‘moderada’ y un valor de la varianza lo más alto posible, consiguiendo así maximizar el riesgo y no concluir con resultados optimistas.

Por lo expuesto, si se tienen dos distribuciones que presentan la misma media, será más adecuada aquella que presente mayor varianza, pues refleja mayor incertidumbre y conduce, por tanto, a resultados más conservadores.

Durante esta sección se centra la atención en el estudio de las distribuciones bicúbica y biseno dentro del ámbito del PERT. Para ello, se compara el valor esperado y varianza de ambas distribuciones con algunas de las distribuciones utilizadas habitualmente en dicha metodología, tales como la distribución beta clásica, distribución triangular y la distribución bipolarabólica presentada por García, [31]. Esta última distribución se presentó en García, [31], como un modelo probabilístico adecuado para su uso en el ámbito del PERT.

Una vez obtenidos los valores mínimo y máximo aportados por el experto, los cuales determinan el rango donde fluctuará la variable X , y el valor modal, con $m \in [a, b]$ se describen las distribuciones. Para realizar el estudio de la media y varianza se estandariza el recorrido de la variable aleatoria X al intervalo $[0, 1]$ mediante el cambio de variable $X = T(b-a)+a$ con valor modal $m = M(b-a)+a$.

En la Cuadro 2.1 se recoge el valor esperado y la varianza de algunos de los modelos probabilísticos utilizados en la metodología PERT, y de las distribuciones bipolarabólica, bicúbica y biseno.

A partir de dicha información se representan los valores esperados, Figura 2.41, y las varianzas, Figura 2.42, de las distribuciones estandarizadas.

Se comprueba gráficamente que la distribución bicúbica y la distribución biseno presentan un valor esperado moderado, ya que las pendientes de las rectas que se describen tienen poca inclinación, consiguiendo así, obtener una esperanza matemática “centrada”. Este hecho da a entender que los valores esperados de las distribuciones presentadas en este capítulo toman valores moderados cuando se trabaja en $[0, 1]$.

2.4. APLICACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES BICÚBICA Y BISENO EN LA METODOLOGÍA PERT

	Variable aleatoria X	Variable estandarizada T
triangular	$E[x] = \frac{a+m+b}{3}$ $\text{var}[X] = \frac{(b-a)^2+(m-a)(m-b)}{18}$	$E[T] = \frac{M+1}{3}$ $\text{var}[T] = \frac{1+M(M-1)}{18}$
beta clásica	$E[X] = \frac{a+4m+b}{6}$ $\text{var}[X] = \frac{(b-a)^2}{36}$	$E[T] = \frac{4M+1}{6}$ $\text{var}[T] = \frac{1}{36}$
biparabólica	$EXx] = \frac{3a+2m+3b}{8}$ $\text{var}[X] = \frac{12(m-a)^2-12(m-a)(b-a)+19(b-a)^2}{320}$	$E[T] = \frac{2M+3}{8}$ $\text{var}[T] = \frac{12M^2-12M+19}{320}$
bicúbica	$E[X] = \frac{3a+4m+3b}{10}$ $\text{var}[X] = \frac{13a^2+13b^2-12bm+12m^2-2a(7b+6m)}{300}$	$E[T] = \frac{4M+3}{10}$ $\text{var}[T] = \frac{12M^2-12M+13}{300}$
biseno	$E[X] = \frac{a(\pi-2)-m(\pi-4)+b(\pi-2)}{\pi}$ $\text{var}[X] = \frac{-4(3a^2+4ab+3b^2)+40(a+b)m}{\pi^2} + \frac{-40m^2+4(a+b-2m)^2\pi-(m-a)(m-b)\pi^2}{\pi^2}$	$E[T] = \frac{\pi-2+(4-\pi)M}{\pi}$ $\text{var}[T] = \frac{4(\pi-3)-(M-1)M(40+(\pi-16)\pi)}{\pi^2}$

Cuadro 2.1: Valor esperado y varianza de las distribuciones estandarizadas utilizadas en la metodología PERT.

Con respecto a la varianza de las distribuciones consideradas, se observa que la distribución que presenta una mayor variación es la distribución biparabólica, seguida de la distribución biseno. En el caso de la distribución bicúbica se tiene que es una de las distribuciones que presenta una menor varianza, siendo la distribución beta el único modelo probabilístico que tiene un valor inferior a esta.

Así pues, teniendo en cuenta los criterios propuestos por Taha, [105], y desarrollados por Herrerías, [43], la distribución bicúbica y biseno son

2.4. APLICACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES BICÚBICA Y BIENO EN LA METODOLOGÍA PERT

distribuciones adecuadas para ser aplicables en el ámbito del PERT ya que presentan unos valores esperados “moderados”.

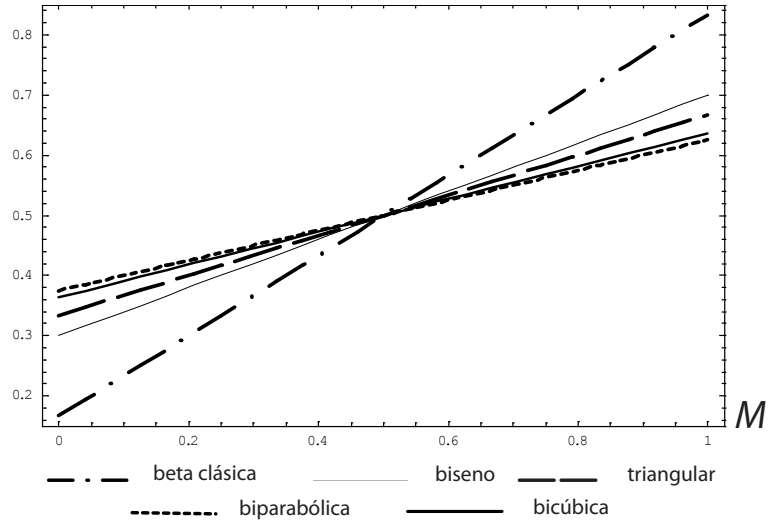


Figura 2.41: Estudio comparativo de los valores esperados en la metodología PERT.

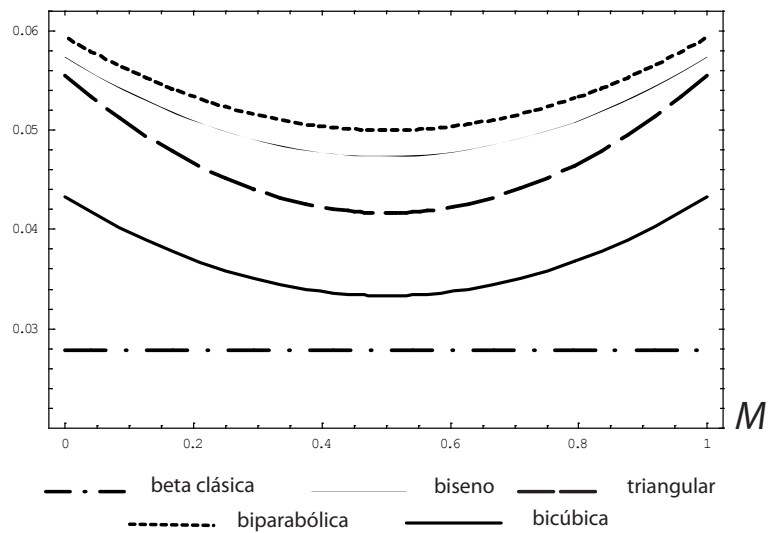


Figura 2.42: Estudio comparativo de las varianzas en la metodología PERT.

Por presentar la distribución biseno un valor de la varianza más elevado que la distribución bicúbica, esta aportará mayor incertidumbre en el análisis de

inversiones en ambiente de riesgo maximizando el riesgo y no conduciendo a resultados optimistas.

2.5. CONCLUSIÓN

A lo largo del capítulo se ha presentado la construcción de distintas distribuciones utilizando como principal herramienta el sistema generador de van Dorp y Kotz, [111]. Luego, definiendo la función de densidad generadora adecuada se han descrito y estudiado las distribuciones bicúbica y biseno.

Las principales características a destacar de ambas distribuciones son:

- Vienen definidas en un dominio acotado el cuál está descrito a partir de los valores que aporta el experto. A diferencia de la distribución normal, la distribución bicúbica y biseno presentan colas finitas siendo por tanto, más adecuadas para ser aplicables en el estudio de la duración de una tarea.
- Profundizando en el estudio de su forma, se tiene que tanto la distribución bicúbica como la distribución biseno presentan, con respecto a su asimetría, distintas formas dependiendo de los valores que tomen los parámetros que describen a las distribuciones. Insistiendo en el estudio de su apuntamiento, se tiene que las dos distribuciones se caracterizan porque ambas son platicúrticas, ya que presentan un coeficiente de curtosis inferior al de la distribución normal.

Los creadores de la metodología PERT introdujeron la distribución beta para sustituir a la distribución normal, por no venir definida en un dominio acotado y ser siempre simétrica. Teniendo en cuenta lo comentado anteriormente, las distribuciones bicúbica y biseno verifican las mismas características que hicieron implantar a la distribución beta para aplicarla dentro de dicha metodología.

Según los estudios presentados por Taha, [105], y desarrollados por Herrerías, [43], las principales propiedades que debe verificar un modelo probabilístico para ser aplicado en el ámbito del PERT, es que debe presentar una media moderada y máximo valor en su varianza, para maximizar el riesgo y concluir con resultados conservadores. Luego, a partir de los estudios realizados sobre

2.5. CONCLUSIÓN

la distribución bicúbica y biseno se puede concluir que ambas distribuciones son buenas aspirantes a ser aplicadas en la metodología PERT, siendo más destacable la distribución biseno, por presentar un valor de varianza más elevado que la distribución bicúbica.

Con el objeto de adaptar las distribuciones en la metodología PERT, y una próxima aplicación en el ámbito financiero, se recurre a la utilización de un parámetro adicional n . Realizando la generalización de las distribuciones bicúbica y biseno, se ha conseguido aportar mayor rango de curtosis. Las distribuciones BC y BS, que originalmente eran platicúrticas, consiguen describir un coeficiente de curtosis superior al de la distribución normal, llegando a alcanzar aproximadamente el valor de 8.

Se ha presentado una herramienta que permite definir cada una de las ramas de la distribución bicúbica utilizando distintas funciones generadoras a izquierda y derecha del valor modal. Con respecto a sus principales características estocásticas, se ha obtenido que la distribución GBC_2 presenta distintas intensidades en su asimetría y, su coeficiente de curtosis alcanza aproximadamente el valor 6. Con la generalización se consigue también superar, no solamente la simetría criticada a la distribución normal, sino que además cada una de las ramas pueden obedecer a distribuciones generadoras distintas. Este hecho puede tener aplicación en el ámbito financiero para ajustar los rendimientos del mercado, ya que parece lógico pensar que el comportamiento de un accionista es distinto en un mercado con beneficios que en un mercado con pérdidas. Por tanto, esta situación motivaría el uso de diferentes funciones generadoras a ambos lados de la moda.

CAPÍTULO 3

ESTIMACIÓN ROBUSTA EN GESTIÓN DE PROYECTOS (PERT)

El método PERT fue desarrollado para facilitar la gestión, control y coordinación de los tiempos de ejecución de las diversas tareas que intervienen en un proyecto, en el que, el tiempo de finalización de cada una de las actividades que lo componen está determinado por variables aleatorias.

Dentro de este ambiente, es necesario recurrir a distribuciones que presenten una mayor flexibilidad con máxima dispersión, con el objeto de modelar la incertidumbre presentada en una gran cantidad de actividades. Es por ello, que Hahn, [41], presenta la construcción de una distribución que surge de realizar la mixtura entre distribuciones, Titterington et al., [107] y, McLachlan y Basford, [75]. En dicho trabajo se propone la mixtura entre la distribución uniforme, caracterizada por su máxima dispersión, y la distribución beta, tradicionalmente aplicada en el ámbito del PERT. Dicha distribución, que originalmente se denominaba beta-rectangular y, que se notará por U-BETA a lo largo de la presente memoria, se propuso inicialmente para el ajuste del tiempo de realización de una actividad.

A lo largo del capítulo, se presentará una breve revisión bibliográfica sobre las ventajas e inconvenientes que presentó la utilización de la distribución beta en el

3.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

ámbito del PERT, así como, la construcción y algunas de las características más destacables de la distribución desarrollada recientemente por Hahn, [41].

Utilizando la idea planteada por Hahn en su trabajo, se realizará la construcción de la mixtura de las distribuciones bicúbica (GBC), two-sided power (TSP) y bipolarabólica (GBP), con la distribución rectangular, enmarcándolas dentro de la metodología PERT.

En 2004, Kotz y van Dorp, [61], desarrollaron un procedimiento de elicitación de distribuciones. Siguiendo esta línea y, solicitando más información al experto, se estimarán los parámetros de cada una de las distribuciones que se desarrollarán en el presente capítulo.

Por último, utilizando los datos empleados por Hahn, [41], se realiza la estimación de cada una de las distribuciones construidas. La idea fundamental de la utilización de los datos recogidos en el libro de Moder et al. [79], es realizar el estudio comparativo entre los resultados mostrados en el trabajo de Hahn, [41], y los obtenidos en este trabajo.

3.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Debido a la necesidad de trabajar con distribuciones definidas en un dominio acotado y, con distintas intensidades en su asimetría, Yu Chuen Tao, [122] y [123], propone la utilización de la distribución beta. Originalmente, fue introducida para solventar los problemas presentados por la distribución gaussiana con respecto a dichas características.

Como es conocido, la función de densidad de la distribución beta corresponde a la expresión (3.1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p,q)} \frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}} & a < x < b; p > 1; q > 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, a es el valor mínimo y b el valor máximo, y p y q son los parámetros de la distribución a partir de los cuales la función de densidad adopta distintas formas.

En 1959, la distribución beta adopta mayor protagonismo dentro del contexto

del PERT. Malcolm et al., [70], propone las expresiones (3.2) y (3.3), para estimar el valor esperado y varianza, suponiendo una beta como distribución subyacente en el PERT. Así pues, a partir de los valores facilitados por el experto, mínimo, más probable y máximo, se describen las expresiones:

$$E[X] = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad (3.2)$$

$$\text{var}[X] = \frac{(b - a)^2}{36}. \quad (3.3)$$

Sasieni, [98], planteó diversas cuestiones relacionadas con las suposiciones consideradas en la formulación de las expresiones aportadas por Malcolm et al., [70]. En concreto, se cuestiona que las expresiones (3.2) y (3.3) no pueden ser obtenidas a partir de la función de densidad (3.1) asociada a la distribución beta, además de que la expresión de la varianza ignora al valor modal.

En réplica a estas preguntas, Littlefield y Randolph, [95], y Gallagher [30] mostraron de forma matemática la relación existente entre los estudios presentados por Malcolm et al., [70], y los de la Marina Estadounidense, [84].

Ante estos acontecimientos, hay que destacar que el uso de las suposiciones planteadas dentro de la metodología PERT no se sustentaban sobre una fuerte base teórica, solamente se introdujo como un instrumento para facilitar el cálculo de los parámetros, y se comprobó su buen funcionamiento.

Con el objeto de resaltar la flexibilidad modeladora de la distribución beta, Golenko-Ginzburg, [36], y Herrerías, [43], proponen por distintos caminos, la siguiente reparametrización de las expresiones correspondientes al valor esperado y varianza de la distribución beta:

$$\mu = \frac{a + km + b}{k + 2}, \quad (3.4)$$

$$\sigma^2 = \frac{k^2(m - a)(b - m) + (k + 1)(b - a)^2}{(k + 3)(k + 2)^2}. \quad (3.5)$$

donde $k = p + q - 2$. El parámetro k está relacionado con la confianza aporta sobre el valor modal.

Debido a los problemas existentes en la estimación de los cuatro parámetros de la distribución beta, Herrerías et al., [45], obtiene, en la misma línea de

3.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Sasieni, [98] y Kamburowski, [55], las expresiones clásicas del PERT. Para ello, imponiendo la condición de que la distribución beta tenga la misma varianza y coeficiente de curtosis que la distribución normal, ($\sigma^2 = \frac{1}{36}$ y $\beta_2 = 3$), se consigue estimar la distribución beta, a la que se conoce como subfamilia beta clásica. Esta distribución, también conocida como distribución beta Tipo I presenta, como expresión del valor esperado y varianza, las que fueron propuestas originariamente en el PERT, (3.2) y (3.3).

Paradójicamente, asignando al parámetro k el valor 4 en las expresiones (3.4) y (3.5), estas quedan reducidas a las expresiones clásicas del PERT. Ténganse en cuenta que en el trabajo presentado por Hahn, [41], se considera $k = 6$ para describir la distribución beta Tipo I, ya que utiliza la relación $k = p + q$.

La idea básica que persigue Hahn en su trabajo es poner de manifiesto, a la hora de estimar la duración total de un proyecto, la necesidad de tener en cuenta la existencia de *outlier*, así como, realizar estimaciones robustas. Para ello, se intenta recurrir a distribuciones que presenten un coeficiente de curtosis elevado, ya que, a mayor coeficiente la distribución presentará un mayor apuntamiento y como consecuencia las colas de la distribución pueden ser más pesadas.

Es por ello que, se centra la atención en el estudio de esta característica sobre la distribución beta Tipo I, y las distribuciones GBC, TSP y GBP simétricas ($M = 0.5$) y clásicas.¹

En el caso particular de considerar las distribuciones clásicas, se tienen que los coeficientes de curtosis asociados a cada una de las distribuciones son:

$$\beta_{2_{beta}} = \frac{-21}{16M^2 - 16M - 5}, \quad (3.6)$$

$$\beta_{2_{GBC}} = \frac{2.30773(M^2 - M + 1.80201)(M^2 - M + 0.50599)}{(M^2 - M + 0.827944)^2}, \quad (3.7)$$

$$\beta_{2_{TSP}} = \frac{2.14581(M^2 - M + 1.6861)(M^2 - M + 0.4799)}{(M^2 - M + 0.7471)^2}, \quad (3.8)$$

$$\beta_{2_{GBP}} = \frac{2.33081(M^2 - 1.00007M + 1.94319)(M^2 - 0.999934M + 0.510212)}{(M^2 - M + 0.865257)^2}, \quad (3.9)$$

¹Definimos la distribución GBC clásica cuando $n = 0.97037$, TSP clásica cuando el parámetro $n = 3.02344$, la distribución GBP clásica si $n = 2.74669$.

3.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

y cuyas representaciones gráficas vienen dadas en la Figura 3.1.

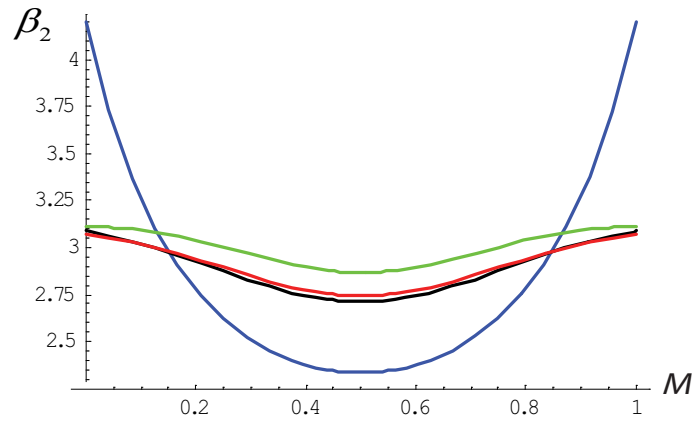


Figura 3.1: Coeficientes de curtosis de las distribuciones clásicas beta (azul), GBC (roja), TSP (verde), GBP (negra).

Así pues, a partir de la Figura 3.1, se tiene que la distribución beta presenta un recorrido de curtosis superior al de las distribuciones utilizadas, siendo únicamente superado por las distribuciones GBC, TSP y GBP cuando la moda estandarizada toma valores próximos a los extremos del intervalo. Por tanto, trabajando con un valor modal comprendido en el intervalo $[0.15, 0.85]$, se tiene que la distribución TSP adopta mayor protagonismo, por presentar el máximo coeficiente de curtosis.

Luego, se tiene que las distribuciones GBC, TSP y GBP son más adecuadas que la distribución beta para realizar la mixtura de distribuciones, ya que presentan un coeficiente de curtosis superior. Este hecho implica que dichas distribuciones asignarán mayor probabilidad de ocurrencia a los sucesos raros (*outliers*), por presentar unas colas más gruesas. Además, serán fácilmente elicitable, utilizando el método presentado y desarrollado por Kotz y van Dorp, [63].

En las tareas del PERT, donde el experto realiza las estimaciones sobre la duración mínima, a , más probable, m y máxima, b , es bastante habitual encontrar la situación en el que el experto sitúe el valor modal próximo al centro del intervalo (a, b) , situándose la moda estandarizada alrededor de 0.5. Así pues, utilizando la información obtenida de la Figura 3.1 y los comentarios realizados sobre la moda estandarizada, se tiene que las distribuciones clásicas GBC, TSP y GBP presentan mayor coeficiente que la distribución beta PERT Tipo I. Este hecho, implica

3.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

que las distribuciones presentadas serán buenas compañeras de la distribución uniforme en la mixtura propuesta por Hahn, [41].

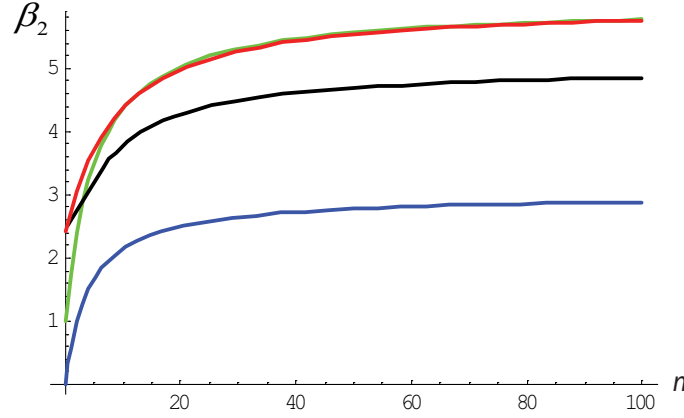


Figura 3.2: Coeficientes de curtosis de las distribuciones simétricas beta (azul), TSP (verde), GBP (negra), GBC (roja).

Realizando el estudio comparativo de los coeficientes de curtosis de las distribuciones simétricas, se tiene, utilizando las expresiones (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13), véase Figura 3.2, que las distribuciones GBC y TSP presentan el máximo valor del coeficiente de curtosis. Además, se observa que la distribución beta simétrica es la que presenta el menor apuntamiento para cualquier valor de n considerado.

$$\beta_{2_{beta}} = \frac{3(n+2)}{n+4}, \quad (3.10)$$

$$\beta_{2_{GBC}} = \frac{6(n+5)(n+6)^2(n+18)}{(n+12)^2(n+7)(n+8)}, \quad (3.11)$$

$$\beta_{2_{TSP}} = \frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}, \quad (3.12)$$

$$\beta_{2_{GBP}} = \frac{10206(2n^2 + 9n + 9)AB}{(2n^3 + 23n^2 + 85n + 100)(45n^4 + 186n^3 + 237n^2 + 96n + 12)^2}, \quad (3.13)$$

donde

$$A = (n + 0.1496)(n^2 + 0.1126n + 0.4467),$$

$$B = (n^2 + 0.2787n + 0.0347)(n^2 + 2.9711n + 7.0754)(n^2 + 7.869n + 17.2061).$$

Utilizando como referencia la Figura 3.2, se observa que las distribuciones simétricas más apropiadas para su uso en la metodología PERT, son la distribución GBC y TSP.

Como conclusión, se tiene, realizando el estudio comparativo de los coeficientes de curtosis que, las distribuciones clásicas GBC, TSP y GBP, mejoran los resultados de la distribución beta clásica. Es de señalar que, la distribución beta clásica alcanza mayor apuntamiento cuando la moda estandarizada se sitúa cerca de los extremos del intervalo $[0, 1]$. Este hecho, implica considerar las distribuciones bicúbica generalizada, two-sided power y biparabólica generalizada para la realización del desarrollo teórico presentado por Hahn, [41].

Es por ello que, se presenta a continuación la construcción de las mixturas entre las distribuciones GBC, TSP y GBP, con la distribución uniforme, estudiando sus principales características estocásticas.

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

En 2008, Hahn, [41], presenta la distribución rectangular-beta, denotada en la presente memoria por U-BETA. Esta distribución surge de considerar las expresiones correspondientes a las funciones de densidad de cada una de las distribuciones. Para describir la expresión correspondiente a la función de densidad de la distribución U-BETA se considera el parámetro θ , verificando $0 \leq \theta \leq 1$. Teniendo en cuenta los comentarios realizados se describe la función de densidad de la distribución U-BETA mediante la expresión

$$p(y|p, q, \theta, a, b) = \theta \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{(y-a)^{p-1}(b-y)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}} + (1-\theta) \frac{1}{b-a}. \quad (3.14)$$

Es obvio que, cuando θ toma el mínimo valor en la expresión (3.14), entonces se describe la expresión correspondiente a la distribución uniforme, sin embargo, en el caso de que dicho parámetro tome el valor uno entonces la expresión queda reducida a la distribución beta. Cuando θ alcanza valores próximos a cero, las distribuciones que se obtienen aportan mayor incertidumbre, por asignar mayor protagonismo a la distribución uniforme. En este caso, se consigue describir distribuciones con colas pesadas, tal y como se observa en la Figura 3.3.

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

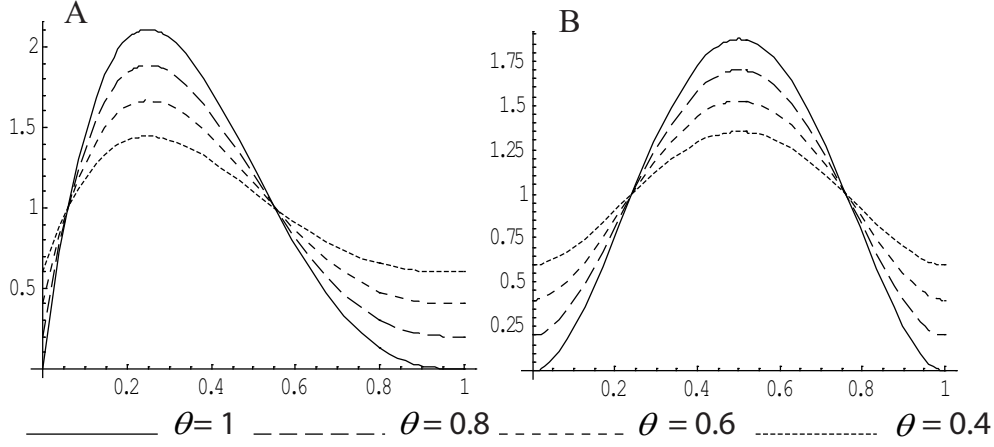


Figura 3.3: Función de densidad de la distribución U-BETA con $p = 2$ y $q = 4$ (A) y $p = 3$ y $q = 3$ (B).

Con objeto de aportar distribuciones con colas pesadas, y teniendo en cuenta el papel que juega la distribución uniforme en la construcción de la distribución U-BETA, se presentan a continuación las distribuciones:

- uniforme-bicúbica generalizada, U-GBC.
- uniforme-two-sided power, U-TSP.
- uniforme-biparabólica generalizada, U-GBP.

Para realizar el estudio comparativo de las distribuciones que se presentan en este capítulo, con la mixtura mostrada por Hahn, [41], se muestra la expresión de la varianza asociada a la distribución U-BETA. Así pues, teniendo en cuenta la expresión de la varianza que aporta Hahn en su trabajo,

$$\text{var}[X] = (b - a)^2 \left[\frac{\theta p(p + 1)}{k(k + 1)} + \frac{1 - \theta}{3} - \frac{(k + \theta(p - q))^2}{4k^2} \right], \quad (3.15)$$

y realizando el cambio $a = 0$, $b = 1$, $p = 1 + kM$ y $q = 1 + k(1 - M)$, la expresión (3.15) queda definida en función de k , θ y M .

$$\text{var}[T] = \frac{1 - \theta}{3} + \frac{\theta(1 + kM)(2 + kM)}{k(k + 1)} - \frac{(1 + \theta(1 + 2M))^2}{4}. \quad (3.16)$$

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

Considerando el valor cuatro para el parámetro k , la expresión (3.16) queda reducida a:

$$\text{var}[T] = \frac{1}{60} [5 + 4\theta (12M^2 - 6M - 11) - 15\theta^2 (1 + 2M)^2]. \quad (3.17)$$

3.2.1. La distribución U-GBC

Haciendo uso del proceso de generación de distribuciones utilizado durante el segundo capítulo, se presenta la construcción de la distribución que surge de realizar la mixtura entre la distribución uniforme y la distribución GBC, siendo denotada a lo largo de la presente memoria por U-GBC. Para ello, utilizando el sistema generador de van Dorp y Kotz, [111], y considerando la función de densidad generadora adecuada, se describe la expresión correspondiente a dicha distribución.

Así pues, recurriendo a la presencia del parámetro θ , con $0 \leq \theta \leq 1$, y teniendo en cuenta que la distribución U-GBC surge de realizar la mixtura entre la distribución GBC y la distribución uniforme, se describe la función de densidad generadora de la mencionada distribución mediante la expresión:

$$p(y|n, \theta) = \theta \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6} \left(y^{n+2} - \frac{2}{3} y^{n+3} \right) + (1 - \theta). \quad (3.18)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que la función de densidad del sistema generador de van Dorp y Kotz, [111], viene dada por la expresión

$$g(t|M, p(\cdot|\psi)) = \begin{cases} p\left(\frac{t}{M}|\psi\right) & 0 \leq t \leq M, \\ p\left(\frac{1-t}{1-M}|\psi\right) & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

y, utilizando (3.18) se describe la distribución U-GBC estandarizada en $[0, 1]$.

Definición 3.1 *Sea T la variable aleatoria definida en el intervalo $[0, 1]$. Se dice que T se distribuye según una distribución estandarizada uniforme-bicúbica generalizada, $T \rightsquigarrow U\text{-SGBC}$, si y sólo si, la función de densidad asociada a dicha*

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

distribución corresponde a la expresión:

$$g(t|M, p(y|n, \theta)) = \begin{cases} A\theta \left[\left(\frac{t}{M}\right)^{n+2} - \frac{2}{3} \left(\frac{t}{M}\right)^{n+3} \right] + (1 - \theta) & 0 \leq t \leq M, \\ A\theta \left[\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n+2} - \frac{2}{3} \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n+3} \right] + (1 - \theta) & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (3.20)$$

donde $A = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6}$.

Teniendo en cuenta la relación existente entre la función de densidad y la función de distribución, se obtiene, a partir de la expresión (3.20), la función de distribución asociada a la distribución U-SGBC, dada por:

$$G(t|M, P(y|n, \theta)) = \begin{cases} t \left[\theta \left\{ B \left(\frac{t}{M}\right)^{n+2} - C \left(\frac{t}{M}\right)^{n+3} \right\} + (1 - \theta) \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1-t) \left[\theta \left\{ B \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n+2} - C \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n+3} \right\} + (1 - \theta) \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (3.21)$$

donde $B = \frac{3(n+4)}{n+6}$ y $C = \frac{2(n+3)}{n+6}$.

Centrando la atención en el estudio del comportamiento de la distribución U-SGBC, se presenta a continuación, los gráficos correspondientes a la función de densidad, variando los parámetros que intervienen en la definición de la distribución, véase la Figura 3.9.

Luego, recurriendo a la información aportada por la Figura 3.9, se observa que al realizar la mixtura entre la distribución bicúbica generalizada y la distribución uniforme, ambas estandarizadas, se consigue describir una distribución cuya función de densidad presenta unas colas más pesadas. A medida que disminuye el valor del parámetro θ , la representación gráfica asociada a la función de densidad se separa del eje de abscisas, consiguiendo aportar mayor probabilidad a los valores extremos. Este hecho viene provocado por una mayor presencia de la distribución uniforme.

En el caso particular de que $\theta = 1$, se obtiene que, todos los gráficos que aparecen, independientemente del valor que tome la moda estandarizada, corresponden a la distribución SGBC, presentada en el segundo capítulo.

Tal y como se comentó anteriormente, uno de los objetivos que se persigue con este procedimiento es superar los problemas causados por la presencia de sucesos raros (*outliers*). Así pues, a partir de los resultados se tiene que la mixtura entre

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

ambas distribuciones nos permite describir distribuciones con colas más gruesas (*heavy tails*). Además, a medida que el parámetro n toma valores más elevados se obtiene que el apuntamiento de la distribución se hace más notable.

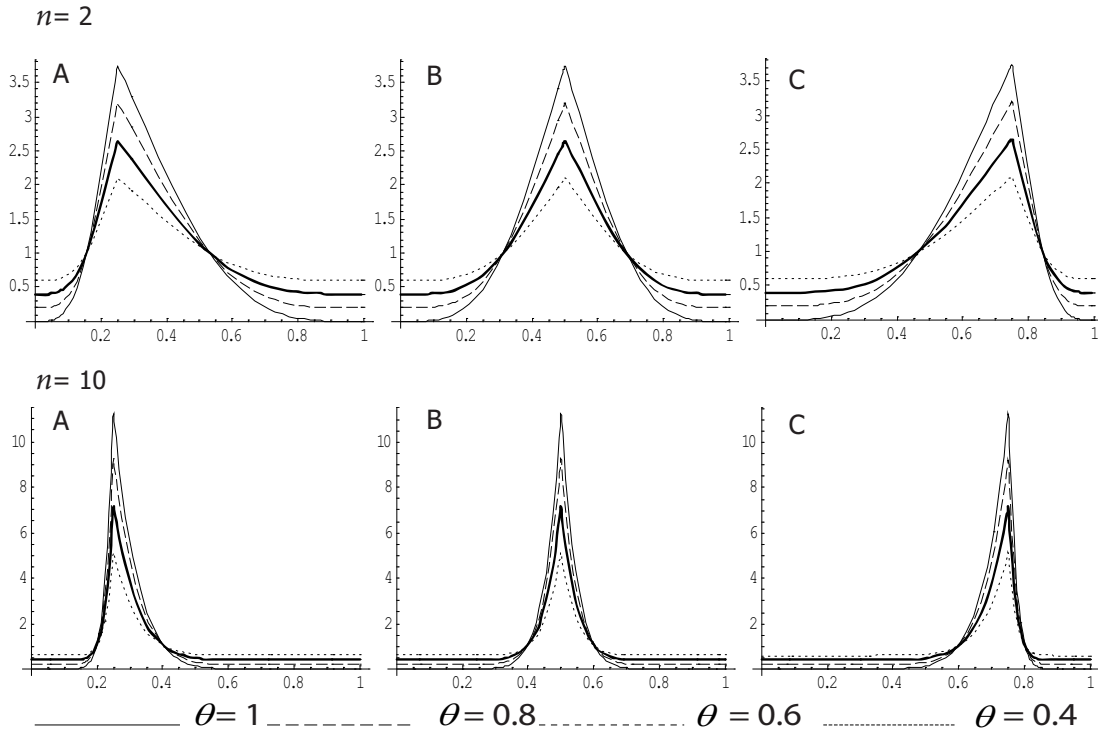


Figura 3.4: Función de densidad de la distribución U-SGBC para $M = 0.25$ (A), $M = 0.5$ (B) y $M = 0.75$ (C).

Como consecuencia de los comentarios realizados es posible afirmar que la distribución U-SGBC puede ser considerada como una buena candidata para su aplicación en estimaciones robustas sobre la duración total de un proyecto (*project management*). Además, ha de notarse que los resultados proporcionados por la distribución U-SGBC mejoran los conseguidos con la distribución U-BETA.

Con objeto de describir la distribución a partir de los valores periciales, se considera el cambio de variable $T = \frac{X-a}{b-a}$ y $M = \frac{m-a}{b-a}$, donde a es el valor mínimo, m es el más probable y b el valor máximo. Así pues, teniendo en cuenta el cambio de variable, se describe a continuación las expresiones correspondientes a las funciones asociadas a la distribución U-GBC.

Definición 3.2 Sea una variable aleatoria X definida en $[a, b]$. Se dice que X se distribuye según una distribución uniforme-bicúbica generalizada, U-GBC si y sólo si, su función de densidad viene dada por la expresión

$$f(x, p(y|n, \theta)) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} \theta A \left[\left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{n+2} - \frac{2}{3} \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{n+3} \right] + (1-\theta) & a \leq x \leq m, \\ \theta A \left[\left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n+2} - \frac{2}{3} \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n+3} \right] + (1-\theta) & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3.22)$$

donde $A = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6}$.

La función de distribución asociada a (3.22) viene descrita mediante la expresión:

$$F(x, P(y|n, \theta)) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} \left[\theta \left\{ B \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{n+2} - C \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{n+3} \right\} + (1-\theta) \right] & a \leq x \leq m, \\ 1 - \frac{b-x}{b-a} \left[\theta \left\{ B \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n+2} - C \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n+3} \right\} + (1-\theta) \right] & m \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3.23)$$

siendo $B = \frac{3(n+4)}{n+6}$ y $C = \frac{2(n+3)}{n+6}$.

La idea principal que se persigue con la distribución U-GBC es, sin necesidad de realizar ningún cambio de variable, trabajar directamente con los datos aportados por el experto. El principal inconveniente que conlleva la utilización de estas expresiones es la complejidad presentada tanto por las funciones, como por sus características estocásticas, implicando mayor trabajo en la estimación de distribuciones. Con objeto de simplificar los cálculos en la estimación de la distribución, se recurre de forma habitual, a las expresiones correspondientes a las distribuciones estandarizadas.

Una vez presentada la distribución U-GBC con dominio $[a, b]$ y la distribución U-GBC estandarizada en $[0, 1]$ denotada por U-SGBC, se presenta a continuación el estudio de las características estocásticas más destacables. Es por ello que, se presenta la varianza y coeficiente de curtosis y se comparan dichos resultados con los obtenidos a partir de la distribución presentada por Hahn, [41].

3.2.1.1. Principales Características

Partiendo de la relación existente entre los momentos centrados con respecto al origen, de la función generadora $p(y)$ y la función de densidad $g(t)$, propuesta

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

por van Dorp y Kotz, véase (3.24), [111], se obtienen, de forma inmediata, las principales características de la distribución U-SGBC.

$$E[T^k|M, \psi] = M^{k+1}E[Y^k|\psi] + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^{i+1} E[Y^i|\psi]. \quad (3.24)$$

Como consecuencia de la relación existente entre los momentos centrados y no centrados, se describen las expresiones correspondientes al valor esperado, (3.25), y varianza, (3.26), de la distribución U-SGBC.

$$E[T] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(2M-1)(n^2+9n+12)\theta}{(n+5)(n+6)} \right], \quad (3.25)$$

$$\text{var}[T] = \frac{1}{12} \left[1 + \frac{2\theta(A+Bn+Cn^2+Dn^3)}{(n+5)(n+6)^2} - \frac{3\theta^2(n^2+9n+12)^2}{(n+5)^2(n+6)^2} \right], \quad (3.26)$$

donde $A = 216M^2 - 216M$, $B = 252M^2 - 252M + 18$, $C = 72M^2 - 72M + 11$, $D = 6M^2 - 6M + 1$ y $E = (2M - 1)^2$.

En el caso particular de trabajar con la distribución U-SGBC clásica, las expresiones (3.25) y (3.26) adoptan una forma más simplificada, quedando únicamente descritas por M y θ , ya que, como se estableció anteriormente, $n = 0.97037$.

$$E[T] = 0.5 + (0.52083M - 0.26042)\theta, \quad (3.27)$$

$$\text{var}[T] = 0.27127(0.307197 + A\theta - B\theta^2), \quad (3.28)$$

siendo $A = 1.1426M^2 - 1.1426M + 0.06086$ y $B = M^2 - M + 0.25$.

Para estudiar las diferencias y similitudes existentes entre las distribuciones U-BETA y U-SGBC, se muestra a continuación la representación gráfica de la varianza y coeficiente de curtosis de ambas distribuciones. Para ello, se ha considerado $n = 0.97037$, para la distribución U-SGBC, y $k = 4$ para la distribución U-BETA.

En el estudio de la incertidumbre aportada por ambas distribuciones, se comprueba que no existen diferencias notables en los valores presentados por las varianzas asociadas a cada una de las distribuciones. Solamente existen

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

diferencias, cuando el parámetro θ se aproxima a uno y la moda estandarizada, M , toma valores cercanos a los extremos del intervalo de definición.

Centrando la atención en el estudio del apuntamiento, nos encontramos con la situación contraria, ya que la distribución U-SGBC presenta mayor coeficiente de curtosis. Sin embargo, cuando la moda estandarizada toma valores cercanos a cero o a uno, y el parámetro de la mixtura es superior a 0.25, la distribución U-BETA alcanza mayor apuntamiento. Este hecho era de esperar, ya que tal y como se comentó en la sección 3.1 del presente capítulo, la distribución SGBC se caracteriza por presentar un coeficiente de curtosis superior al de la distribución beta cuando $M \in [0.15, 0.85]$, siendo esta característica el punto de partida del desarrollo teórico que se plantea.

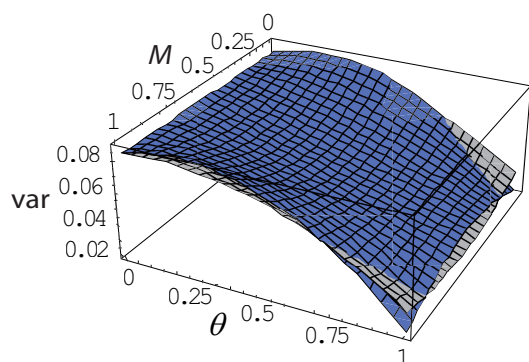


Figura 3.5: Varianza de las distribuciones U-CSGBC (gris) y U-CBETA (azul).

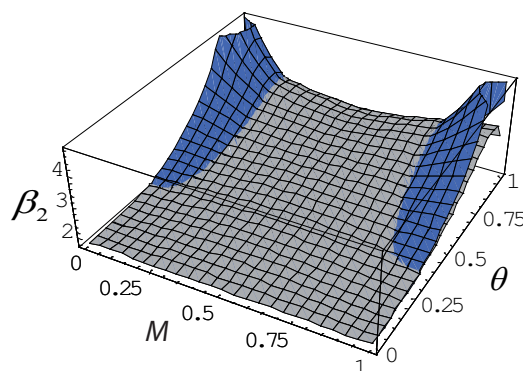


Figura 3.6: Coeficiente de curtosis de las distribuciones U-CSGBC (gris) y U-CBETA (azul).

Sin embargo, considerando el caso particular de las distribuciones clásicas y simétricas, en el que la varianza depende exclusivamente del parámetro θ , los resultados varían notablemente, ya que, tal y como se observa en la Figura 3.7, la distribución U-SCBETA presenta un valor de la varianza superior. En el caso de que $\theta = 0$, las distribuciones alcanzan el mismo valor, coincidiendo con la varianza de la distribución uniforme.

Así pues, teniendo en cuenta la información obtenida en el estudio de la varianza de las distribuciones U-SCSGBC y U-SCBETA, se observa que la distribución U-SCSGBC presenta menor incertidumbre para ser aplicable en la estimación del tiempo necesario para ejecutar una actividad.

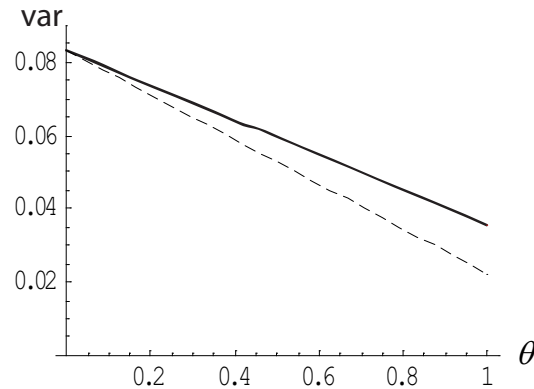


Figura 3.7: Varianza de las distribuciones U-SCSGBC (discontinua) y U-SCBETA (continua).

En definitiva, la mixtura realizada entre la distribución GBC y la distribución uniforme presenta un comportamiento muy similar en varianza a la distribución U-BETA. Partiendo de la relación existente entre un apuntamiento elevado y la presencia de unas colas más pesadas, junto con una expresión explícita de la función de distribución, nos lleva a considerar la distribución U-GBC como una buena candidata para su aplicación dentro de la metodología PERT.

3.2.2. Distribuciones alternativas para el ambiente de incertidumbre

Siguiendo la línea presentada en la sección 3.2.1 se muestra a continuación, de una forma resumida, las expresiones correspondientes a las funciones asociadas a las distribuciones obtenidas en la realización de la mixtura entre las distribuciones two-sided power y GBP, con la distribución uniforme. Para ello, utilizando los estudios presentados por van Dorp y Kotz, [111], se realiza la construcción de cada una de las distribuciones mencionadas.

Así pues, partiendo de las funciones generadoras asociadas a la distribución U-TSP, (3.29), y a la distribución U-GBP, (3.30), se describen las expresiones correspondientes a la función de densidad y de distribución de cada una de las distribuciones, véase Cuadro 3.1.

$$p(y|n, \theta) = \theta n y^{n-1} + (1 - \theta), \quad (3.29)$$

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

$$p(y|n, \theta) = \theta \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} (y^{2n} - 2y^n) + (1-\theta). \quad (3.30)$$

Distribución U-STSP	
Función de densidad	
$g(t M, p(\cdot n, \theta)) = \begin{cases} \theta n \left(\frac{t}{M}\right)^{n-1} + (1-\theta) & 0 \leq t \leq M, \\ \theta n \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n-1} + (1-\theta) & M \leq t \leq 1. \end{cases}$	
Función de distribución	
$G(t M, P(\cdot n, \theta)) = \begin{cases} t \left[\theta \left(\frac{t}{M}\right)^{n-1} + (1-\theta) \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1-t) \left[\theta \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n-1} + (1-\theta) \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases}$	
Distribución U-SGBP	
Función de densidad	
$g(t M, p(\cdot n, \theta)) = \begin{cases} \theta \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} \left[\left(\frac{t}{M}\right)^{2n} - 2 \left(\frac{t}{M}\right)^n \right] + (1-\theta) & 0 \leq t \leq M, \\ \theta \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} \left[\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{2n} - 2 \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n \right] + (1-\theta) & M \leq t \leq 1. \end{cases}$	
Función de distribución	
$G(t M, P(\cdot n, \theta)) = \begin{cases} t \left[\theta \left\{ A \left(\frac{t}{M}\right)^{2n} - B \left(\frac{t}{M}\right)^n \right\} + (1-\theta) \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1-t) \left[\theta \left\{ A \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{2n} - B \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n \right\} + (1-\theta) \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases}$ <p>siendo $A = \frac{n+1}{-3n-1}$ y $B = \frac{2(2n+1)}{-3n-1}$.</p>	

Cuadro 3.1: Expresiones de las funciones de densidad y de distribución asociadas a las distribuciones U-STSP y U-SGBP.

Estudiando el comportamiento existente entre las distribuciones U-STSP y U-SGBP, se observa en los gráficos recogidos en las Figuras 3.8 y 3.9 que, las distribuciones presentadas adoptan formas similares a las descritas por la distribución U-SGBC. Este hecho es debido a que, a medida que el parámetro θ disminuye su valor, la distribución presenta colas más gruesas.

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

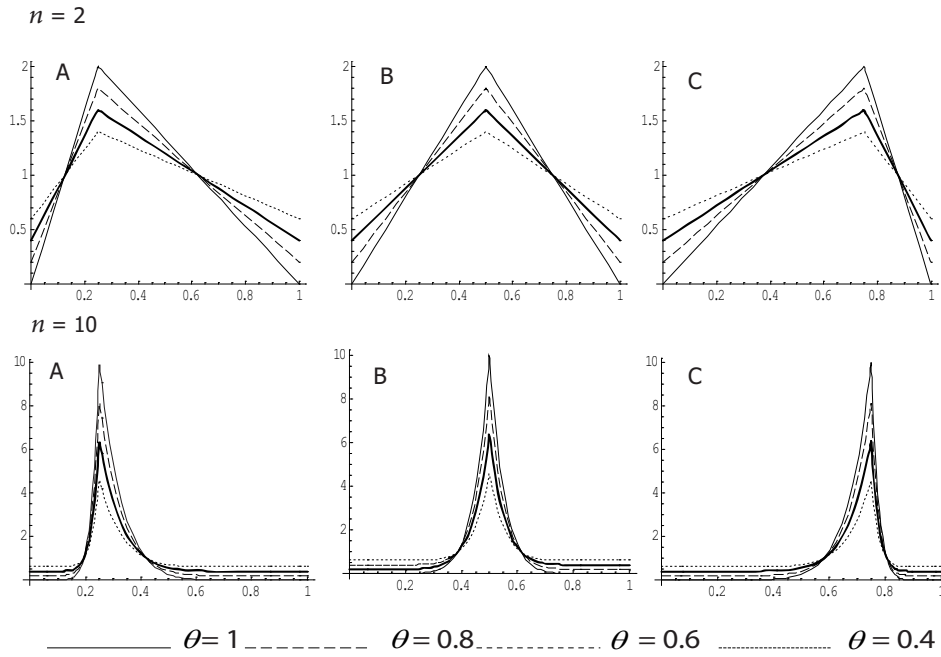


Figura 3.8: Función de densidad de la distribución U-STSP para $M = 0.25$ (A), $M = 0.5$ (B) y $M = 0.75$ (C).

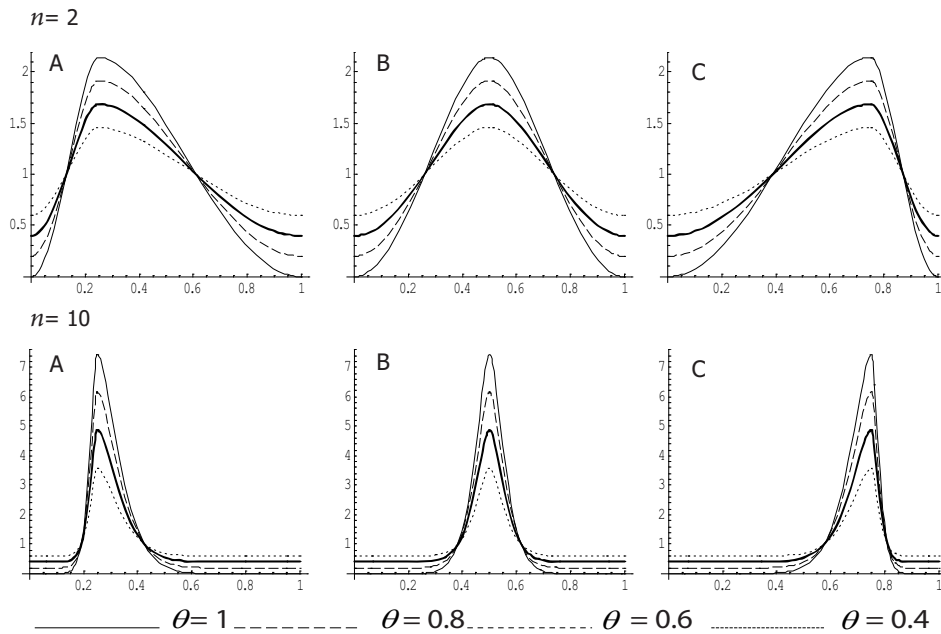


Figura 3.9: Función de densidad de la distribución U-SGBP para $M = 0.25$ (A), $M = 0.5$ (B) y $M = 0.75$ (C).

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

Además, es de señalar que, en el caso de considerar valores elevados para el parámetro n , las distribuciones presentan un apuntamiento más pronunciado, siendo destacable la distribución U-STSP, por obtener un coeficiente de curtosis mayor.

Distribución U-TSP	
Función de densidad	
$f(x p(. n, \theta)) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} \theta n \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} + (1-\theta) & a \leq x \leq m, \\ \theta n \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{n-1} + (1-\theta) & m \leq x \leq b. \end{cases}$	
Función de distribución	
$F(x P(. n, \theta)) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} \left[\theta \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} + (1-\theta) \right] & a \leq x \leq m, \\ 1 - \frac{b-x}{b-a} \left[\theta \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{n-1} + (1-\theta) \right] & m \leq x \leq b. \end{cases}$	
Distribución U-GBP	
Función de densidad	
$f(x p(. n, \theta)) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} \theta A \left[\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{2n} - 2 \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^n \right] + (1-\theta) & a \leq x \leq m, \\ \theta A \left[\left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{2n} - 2 \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^n \right] + (1-\theta) & m \leq x \leq b, \end{cases}$ <p>donde $A = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1}$.</p>	
Función de distribución	
$F(x P(. n, \theta)) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} \left[\theta \left\{ A \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{2n} - B \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^n \right\} + (1-\theta) \right] & a \leq x \leq m, \\ 1 - \frac{b-x}{b-a} \left[\theta \left\{ A \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{2n} - B \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^n \right\} + (1-\theta) \right] & m \leq x \leq b, \end{cases}$ <p>donde $A = \frac{n+1}{-3n-1}$ y $B = \frac{2(2n+1)}{-3n-1}$.</p>	

Cuadro 3.2: Expresiones de las funciones de densidad y de distribución asociadas a las distribuciones U-TSP y U-GBP.

La principal diferencia existente entre las distribuciones presentadas, es que la distribución U-SGBP, al igual que le sucedía a la distribución GBP, es derivable en su punto modal. Este hecho implica la igualdad en el crecimiento marginal de la función de densidad a izquierda y derecha del valor modal. Esta propiedad la diferencia de otras distribuciones aplicadas en ambiente de incertidumbre, como por ejemplo, la distribución triangular y la distribución trapezoidal CPR, entre otras.

Por último, considerando el cambio de variable $T = \frac{X-a}{b-a}$ y $M = \frac{m-a}{b-a}$, se describen las expresiones correspondientes a las funciones de densidad y de distribución de cada una de las distribuciones con dominio $[a, b]$, véase Cuadro 3.2. En este caso las distribuciones se denotarán por U-TSP y U-GBP.

3.2.2.1. Características Estocásticas de las distribuciones U-TSP y U-GBP

Con objeto de estudiar las principales características estocásticas de cada una de las distribuciones, se presentan a continuación las expresiones correspondientes al valor esperado y varianza de las distribuciones U-TSP y U-GBP, recogidas en el Cuadro 3.3. Para ello, teniendo en cuenta la información aportada por van Dorp y Kotz, [111], y haciendo uso de la relación existente entre los momentos centrados y no centrados, se describen las características mencionadas.

En diversos trabajos, Sasieni, [98] y Moitra, [80], se ha puesto de manifiesto la imposibilidad de determinar los cuatro parámetros de una distribución beta a partir de la información facilitada por el experto. Una posible solución a este hecho sería, entre otras, solicitar al experto mayor información sobre la confianza que aporta él a las estimaciones realizadas, recurrir a restricciones en la familia de distribuciones o, trabajar con la distribución beta clásica, Littlefield y Randolph, [95].

Así pues, centrando la atención en la última solución planteada, se realiza el estudio comparativo de las distribuciones U-TSP y U-GBP con la distribución U-BETA cuando, las tres distribuciones pertenecen a la familia de distribuciones clásicas.

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

Distribución U-STSP
Valor esperado
$E[T] = \frac{\theta(n-1)(2M-1) + n + 1}{2(n+1)}$
Varianza
$\text{var}[T] = \frac{1}{12} \left[1 + \frac{2\theta(n^2-1)(-2+An) - 3\theta(n-1)^2(n+2)B^2}{(n+1)^2(n+2)} \right],$ <p>donde $A = 6M^2 - 6M + 1$ y $B = 1 - 2M$.</p>
Distribución U-SGBP
Valor esperado
$E[T] = \frac{2 + 7n + 3n^2(3 - 3\theta + 6M\theta)}{2(n+2)(3n+1)}$
Varianza
$\text{var}[T] = \frac{36 + 288n + An^2 + Bn^3 + Cn^4 + Dn^5 + En^6}{12(n+2)^2(n+3)(2n+3)(3n+1)^2},$ <p>donde</p> $A = 809 + (120M^2 - 120M - 68)\theta,$ $B = 983 + (732M^2 - 732M - 242)\theta,$ $C = 581 + (1416M^2 - 1416M - 92)\theta - (972M^2 - 972M + 243)\theta^2,$ $D = 165 + (972M^2 - 972M + 780)\theta - (972M^2 - 972M + 243)\theta^2,$ $E = 18 + (216M^2 - 216M + 36)\theta - (216M^2 - 216M + 54)\theta^2.$

Cuadro 3.3: Características estocásticas de las distribuciones U-STSP y U-SGBP.

Como consecuencia, se toma $n = 3.02344$ para la distribución U-STSP, y $n = 2.74669$, en el caso de la distribución U-SGBP, véase García [31]. Luego, partiendo de los valores considerados, se tiene la expresión correspondiente a la varianza de la distribución U-CSTSP, (3.31) y de la distribución U-CSGBP (3.32).

Trabajando con las distribuciones clásicas, se observa que las expresiones,

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

recogidas en el Cuadro 3.3, se reducen de forma notable, dependiendo únicamente de los parámetros M y θ .

$$\text{var}[T] = \frac{1}{12} [1 + 3.63224(M - 0.9399)(M - 0.06002)\theta - 3.03506(M - 0.5)^2\theta^2], \quad (3.31)$$

$$\text{var}[T] = 0.2663(0.3129 + (1.1378M^2 - 1.1378M + 0.0563)\theta - (M^2 - M + 0.25)\theta^2). \quad (3.32)$$

Teniendo en cuenta la información aportada por los gráficos de la Figura 3.10, se observa que, al igual que sucedía con la distribución U-SGBC, la diferencia existente entre ambas varianzas es mínima. Sin embargo, a medida que disminuye la presencia de la distribución uniforme, la diferencia entre ambas varianzas es más notable.

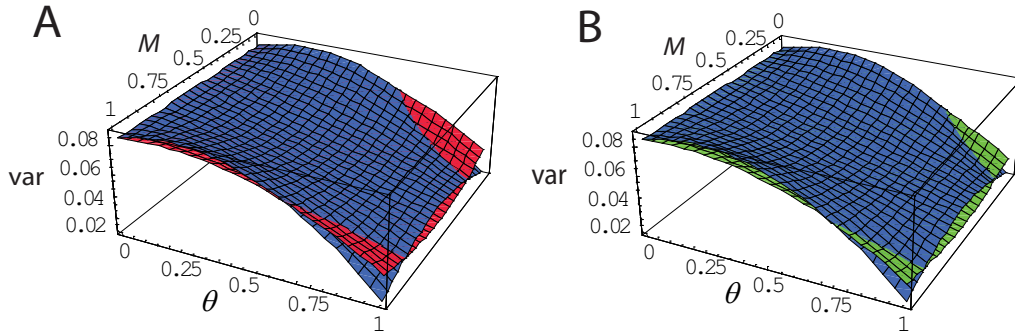


Figura 3.10: Varianza de las distribuciones U-CSTSP (roja) y U-CBETA (azul) (A), y U-CSGBP (verde) y U-CBETA (azul) (B).

Si se considera el caso de las distribuciones clásicas y simétricas, se obtiene que las distribuciones U-SCSTSP y U-SCSGBP, Figura 3.11, presentan menor incertidumbre que la distribución U-BETA, a medida que se incrementa el valor del parámetro θ . Así pues, partiendo de las características que debe verificar una distribución para su aplicación en ambiente de incertidumbre, será adecuado trabajar con valores del parámetro θ cercanos a cero, ya que en estos casos la distribución presenta máxima varianza y unas colas más pesadas.

Sin embargo, haciendo mayor hincapié en el estudio del coeficiente de curtosis, los resultados sufren un cambio significativo, ya que tanto la distribución U-

3.2. MIXTURA DE DISTRIBUCIONES

CSTSP como la distribución U-CSGBP presentan mayor apuntamiento, siendo únicamente superado por la distribución U-BETA cuando el parámetro θ toma aproximadamente valores superiores a 0.3, y la moda estandarizada se mueve cerca de los extremos de definición del intervalo, véase Figura 3.12.

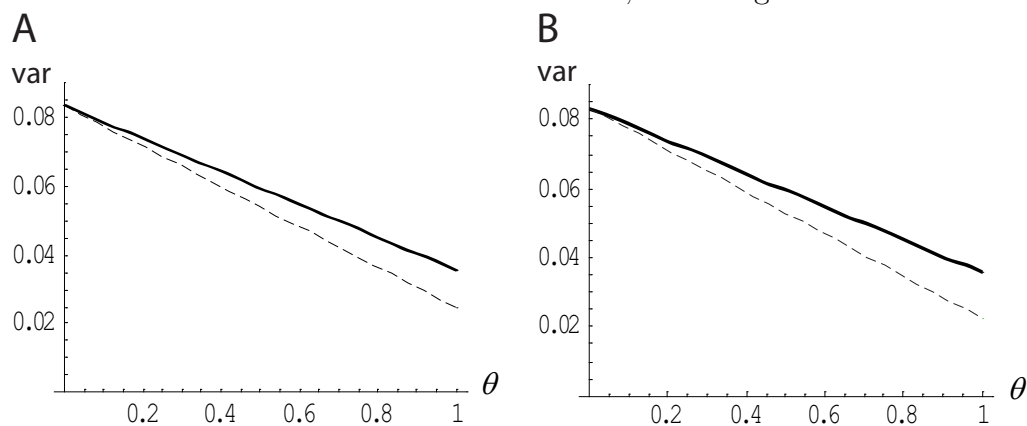


Figura 3.11: Varianza de las distribuciones U-SCSTSP (discontinua) y U-SCBETA (continua) (A), y U-CSGBP (discontinua) y U-SCBETA (continua) (B) .

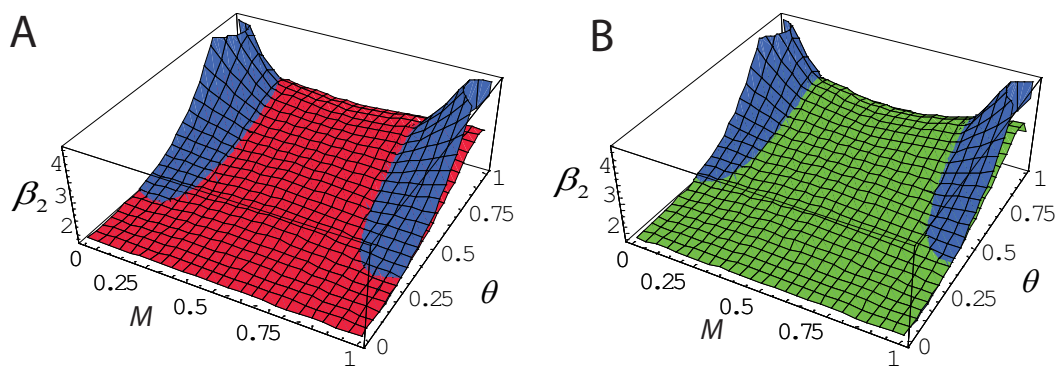


Figura 3.12: Coeficiente de curtosis de las distribuciones U-CSTSP (roja) y U-CBETA (azul) (A), y U-CSGBP (verde) y U-CBETA (azul) (B).

A partir de los resultados conseguidos, se proponen las distribuciones U-TSP y U-GBP como modelos alternativos para su aplicación en el PERT, por tener un comportamiento similar al de la distribución U-BETA con respecto a su varianza, y por asignar mayor probabilidad a los valores o sucesos raros (*outliers*).

3.2.3. Estudio comparativo de la varianza y coeficiente de curtosis de las distribuciones clásicas U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP.

Una vez presentadas las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP, comparadas siempre con la distribución U-CBETA, se muestra a continuación un análisis más completo sobre los valores obtenidos de la varianza y coeficiente de curtosis de todas las distribuciones. Se indicarán, según sus características de incertidumbre y apuntamiento, la distribución más adecuada para la estimación en *project management*.

En la Figura 3.13, se recogen los gráficos correspondientes a la varianza de cada una de las distribuciones construidas en el presente capítulo y la distribución U-BETA.

Centrando la atención en la Figura 3.13 (A), se observa que la diferencia existente entre cada uno de los gráficos es casi mínima. La distribución U-CBETA presenta mayor valor en varianza, siendo superada por la distribución U-STSP, cuando θ toma valores cercanos a uno y la moda estandarizada se aproxima a los extremos de su intervalo de definición.

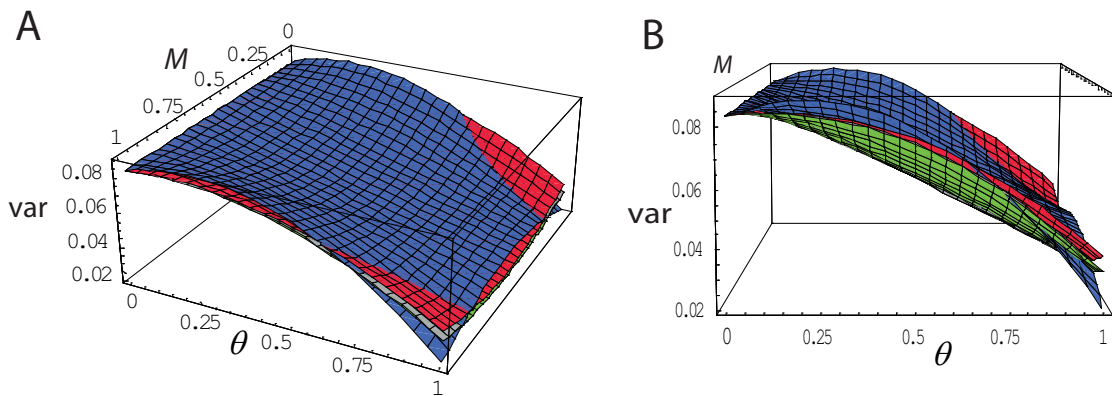


Figura 3.13: Varianza de las distribuciones U-CBETA (azul), U-CSGBC (gris), U-CSTSP (roja) y U-CSGBP (verde).

Con objeto de aportar al lector mayor información sobre el estudio de las varianzas, en la Figura 3.13 (B) se observa que, la distribución U-SGBP conduciría a resultados menos conservadores, por presentar la menor varianza.

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Sin embargo, considerando θ próximo a uno, y $M \in [0, 0.25] \cup [0.75, 1]$, se tiene que la distribución U-CBETA presenta la menor varianza.

Tratando de encontrar una distribución que presente unas colas más pesadas (*heavy tails*), se estudia el apuntamiento de todas las distribuciones, aprovechando la relación existente entre el apuntamiento y la presencia de colas pesadas.

Es por ello que, en la Figura 3.14 se muestra un estudio comparativo de los coeficientes de curtosis de las distribuciones que se han presentado a lo largo del capítulo.

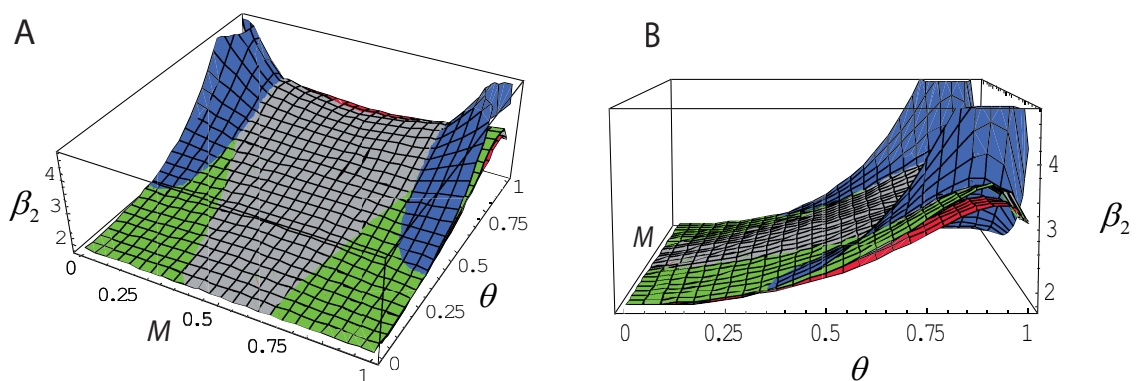


Figura 3.14: Coeficiente de curtosis de las distribuciones U-CBETA (azul), U-CSGBC (gris), U-CSTSP (roja) y U-CSGBP (verde).

Cuando la moda estandarizada toma valores cercanos a 0.5, la distribución U-CSGBC, presenta mayor apuntamiento, véase Figura 3.14 (A). Si $M \in [0, 0.3] \cup [0.7, 1]$, el coeficiente de curtosis de la distribución U-CSGBC es superado por los coeficientes de curtosis de las distribuciones U-CSGBP, si $\theta < 0.3$, y U-CBETA, en el caso de $\theta > 0.3$.

Como consecuencia de los resultados obtenidos, la distribución U-CSGBC se presenta como un modelo alternativo para su aplicación en la estimación del tiempo necesario para finalizar una actividad.

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

La estimación de los parámetros de la distribución beta ha sido un tema discutido durante años por diversos autores, entre otros encontramos los trabajos

presentados por Clark, [17], Grubbs, [38], Moder y Rogers, [78], Elmaghraby, [24], Keefer y Verdini, [57], Kamburowski, [55], Johnson, [53], Lau et al., [66], y Herrerías et al., [45].

Haciendo uso del método de los momentos, y utilizando las expresiones del valor esperado y varianza de la distribución beta estandarizada, (3.33) y (3.34), se consigue obtener las estimaciones de los parámetros p y q . Se ha de señalar que, el valor del parámetro M es conocido gracias a la información que ha facilitado el experto sobre los valores mínimo a , más probable m y máximo b , ya que $M = \frac{m-a}{b-a}$.

$$E[T] = \frac{1 + (p + q - 2)M}{p + q}, \quad (3.33)$$

$$\text{var}[T] = \frac{pq}{(p + q + 1)(p + q)^2}. \quad (3.34)$$

Además de la distribución beta otras distribuciones alternativas han sido propuestas para la estimación de la duración de una actividad. La distribución triangular fue utilizada en los trabajos presentados por MacCrimmon y Ryavec, [68], Megill, [76], Williams, [119] y Johnson, [53]. Por otro lado, Perry y Greig, [92], presentaron la elicitación de las distribuciones gamma, chi-cuadrado y la distribución lognormal, y en 2004, Abdelkader, [1] realiza el desarrollo con la distribución Weibull.

Con objeto de solventar los problemas existentes en la elicitación de la distribución beta, Hahn, [41], muestra métodos alternativos a partir de los cuales se consigue elicitar los parámetros de la distribución U-CBETA. Como consecuencia de la ausencia de información dentro del ámbito de incertidumbre, se recurre a la ayuda de un experto, siendo este el encargado de aportar la información referida a los valores mínimo, más probable y máximo. Así pues, partiendo de los valores periciales, y solicitando información adicional al experto sobre las estimaciones realizadas, se obtiene la estimación del parámetro θ .

El uso de los percentiles, desde el punto de vista del trabajo requerido a los expertos, ha sido resaltado por numerosos autores. Selvidge, [99], propone el uso de los percentiles 10 y 90, en lugar de los percentiles 1 y 99. Sin embargo, Davidson y Cooper, [21], realizan mayor hincapié en la utilización de los percentiles 5 y 95.

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Kotz y van Dorp, [63], presentan un ejemplo práctico usando dos y tres cuantiles, sugiriendo esta última opción como una técnica más fiable en las técnicas de elicitación. Posteriormente otros autores han sugerido la utilización de más de dos cuantiles. Alpert y Raihfa, [2], propusieron recurrir a cinco cuantiles, Selvidge, [99], selecciona siete cuantiles e incluso Lau et al., [66], llega a sugerir la utilización de nueve cuantiles.

En definitiva, se puede afirmar que, desde los inicios de la metodología PERT, el uso de los cuantiles ha sido considerado como una herramienta alternativa para la estimación directa de parámetros, véase Hampton et al., [40], Chesley, [16], Spetzler y Stael Von Holteín, [102] y Wallsten y Dudesco, [117]. Este método es considerado como uno de las herramientas más directas en la estimación de los parámetros de la distribución.

En el trabajo presentado por Kotz y van Dorp, [63], comentado anteriormente, se muestra un nuevo procedimiento de estimación de distribuciones unimodales continuas, centrando la atención en la elicitación de la distribución TSP con cuatro parámetros. Para ello, partiendo de un cuantil inferior, a_p , un cuantil superior, b_q , y el valor más probable, m , se recurre a la ayuda de un tercer cuantil, x_s , aportado también por el experto, tal que

$$a_p < x_s < b_q. \quad (3.35)$$

Con la ayuda de este procedimiento se consigue determinar, con mayor precisión, los parámetros de la distribución en ambiente de incertidumbre.

Así pues, utilizando como punto de referencia dicho trabajo, se realizará la estimación de cada una de las distribuciones que han sido construidas en el presente capítulo. La principal ventaja presentada por las distribuciones presentadas en este capítulo, con respecto a la utilizada por Hahn es que, además de ser elicitable utilizando los procesos descritos en su trabajo, todas ellas se caracterizan por tener una expresión cerrada para su función de distribución. Este hecho es de gran importancia ya que, como es conocido, uno de los principales inconvenientes presentados por la distribución beta, es la ausencia de una expresión para su función de distribución.

Antes de realizar la elicitación de cada una de las distribuciones será necesario

establecer un conjunto de proposiciones.

Por último, se ha de señalar que, utilizando un cuantil (p, a_p) , con $G(a_p) = p$, las distribuciones U-CGBC, U-CTSP y U-CGBP, pueden ser estimadas de una forma sencilla.

3.3.1. Elicitación de la distribución U-GBC

Con el objeto de utilizar la distribución U-GBC dentro del ámbito del PERT se recurre, entre otros, al método de elicitación, cuyo principal objetivo es describir la distribución asociada a unos datos empíricos utilizando, como punto de partida, los tres valores que habitualmente facilita el experto más dos cuantiles adicionales. Es por ello que, partiendo de la función de distribución asociada a la distribución U-SGBC, (3.36), y considerando los cuantiles (p, a_p) y (q, b_q) se realiza la estimación de θ .

$$G(t|M, P(y|n, \theta)) = \begin{cases} t \left[\theta \left\{ A \left(\frac{t}{M} \right)^{n+2} - B \left(\frac{t}{M} \right)^{n+3} \right\} + (1 - \theta) \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1 - t) \left[\theta \left\{ A \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{n+2} - B \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{n+3} \right\} + (1 - \theta) \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (3.36)$$

donde $A = \frac{3(n+4)}{n+6}$ y $B = \frac{2(n+3)}{n+6}$.

Así pues, utilizando la expresión (3.36) y recurriendo a los cuantiles (p, a_p) y (q, b_q) , se presenta el siguiente resultado que será la base del desarrollo de este proceso de elicitación.

Proposición 3.1 Sean (p, a_p) y (q, b_q) dos cuantiles verificando la condición $a_p \leq M \leq b_q$. Entonces, se tiene que

$$0 \leq G(a_p) = p \leq a_p \leq M \leq b_q \leq G(b_q) = q \leq 1, \quad (3.37)$$

siendo G la expresión correspondiente a la función de distribución asociada a la distribución U-SGBC.

Demostración 3.1 Para realizar la demostración de la proposición enunciada solamente bastará con sustituir, en primer lugar, a_p en la primera rama de la expresión de la función de distribución e igualar a p , y procediendo de manera similar, se utilizarán b_q y q .

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

- $0 \leq G(a_p) = p \leq a_p$.

$$0 \leq p = G(a_p) = a_p \left[\theta \left\{ \frac{3(n+4)}{n+6} \left(\frac{a_p}{M} \right)^{n+2} - \frac{2(n+3)}{n+6} \left(\frac{a_p}{M} \right)^{n+3} \right\} + (1-\theta) \right] \leq$$

$$\leq a_p \left[\theta \left\{ \frac{3(n+4)}{n+6} \left(\frac{M}{M} \right)^{n+2} - \frac{2(n+3)}{n+6} \left(\frac{M}{M} \right)^{n+3} \right\} + (1-\theta) \right] = a_p.$$

- $b_q \leq G(b_q) = q \leq 1$.

$$1 - (1 - b_q) \left[\theta \left\{ \frac{3(n+4)}{n+6} \left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^{n+2} - \frac{2(n+3)}{n+6} \left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^{n+3} \right\} + (1-\theta) \right] \geq$$

$$1 - (1 - b_q) \left[\theta \left\{ \frac{3(n+4)}{n+6} \left(\frac{1-M}{1-M} \right)^{n+2} - \frac{2(n+3)}{n+6} \left(\frac{1-M}{1-M} \right)^{n+3} \right\} + (1-\theta) \right] = b_q.$$

■

Sabiendo que $G(a_p) = p$ y $G(b_q) = q$ se describe la expresión (3.38), donde el parámetro θ viene determinado por los cuantiles considerados y el parámetro n .

$$\theta = \begin{cases} \frac{(a_p-p)(n+6)}{a_p(n+6)-a_p \left[3(n+4) \left(\frac{a_p}{M} \right)^{n+2} - 2(n+3) \left(\frac{a_p}{M} \right)^{n+3} \right]} & p \leq a_p \leq M, \\ \frac{(q-b_q)(n+6)}{(1-b_q)(n+6)-(1-b_q) \left[3(n+4) \left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^{n+2} - 2(n+3) \left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^{n+3} \right]} & M \leq b_q \leq q. \end{cases} \quad (3.38)$$

Así pues, en el caso de trabajar con la distribución clásica, donde $n = 0.97037$, y utilizando un cuantil se consigue elicitar de una forma sencilla la distribución U-CSGBC a partir de una de las dos ramas que se describen en (3.38).

Por otro lado, igualando las expresiones que determinan al parámetro θ , se obtiene la ecuación (3.39), siendo el parámetro n la incógnita. A partir de (3.39) se consigue elicitar el valor del parámetro n , y como consecuencia la elicitación de la distribución U-GBC no queda restringida al uso de la distribución clásica. Así pues, haciendo uso de las expresiones (3.38) y (3.39), se elicita la distribución U-SGBC.

$$\begin{aligned}
 & \frac{(a_p - p)(n + 6)}{a_p(n + 6) - a_p \left[3(n + 4) \left(\frac{a_p}{M} \right)^{n+2} - 2(n + 3) \left(\frac{a_p}{M} \right)^{n+3} \right]} = \\
 = & \frac{(q - b_q)(n + 6)}{(1 - b_q)(n + 6) - (1 - b_q) \left[3(n + 4) \left(\frac{1 - b_q}{1 - M} \right)^{n+2} - 2(n + 3) \left(\frac{1 - b_q}{1 - M} \right)^{n+3} \right]}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Debido a la complejidad que encierra la resolución de la expresión (3.39), se recurrirá a la aplicación de métodos numéricos no lineales. Como una primera aproximación a la solución se recurre a la representación gráfica. Para ello, se representa cada una de las ramas que describen al parámetro θ . Si ambas ramas se cortan, implicará la existencia de un valor o valores de n , sin embargo, en caso contrario, la ecuación (3.39) no tendrá ninguna solución.

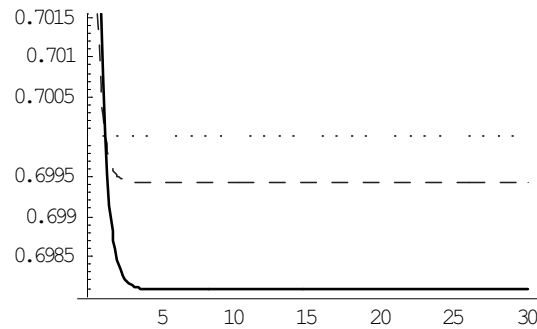


Figura 3.15: Primera rama (continua) y segunda rama (discontinua) de θ .

Utilizando, por ejemplo, los cuantiles $(p, a_p) = (0.01, 0.05)$ y $(q, b_q) = (0.985, 0.95)$, y recurriendo a la Figura 3.15, se consigue determinar el valor correspondiente al parámetro n , y como consecuencia, la posterior estimación del parámetro θ utilizando la expresión (3.38). Así pues, a partir de la información obtenida se describe la distribución U-SGBC. Sin embargo, considerando los cuantiles $(p, a_p) = (0.013, 0.05)$ y $(q, b_q) = (0.95, 0.80)$ los resultados no son satisfactorios, ya que el sistema no proporciona solución, véase Figura 3.16.

En tal caso, para solventar este problema, se propone recurrir a los procesos presentados por Hahn, [41], y elicitar el valor del parámetro θ de una forma directa. Así pues, a partir del valor estimado de θ , y utilizando algunas de las

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

ramas que describen a dicho parámetro, expresión (3.38), se obtiene la estimación del parámetro n .

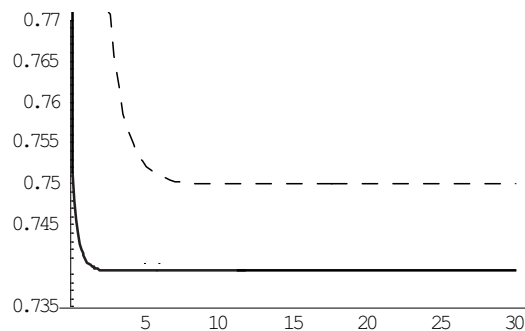


Figura 3.16: Primera rama (continua) y segunda rama (discontinua) de θ .

3.3.2. Elicitación de la distribución U-TSP

Para elicitar la distribución U-TSP se utiliza como principal herramienta la expresión correspondiente a la función de distribución. En la sección 3.2.2 se describió la función de distribución asociada a la distribución U-STSP, quedando definida por:

$$G(t|M, P(\cdot|n, \theta)) = \begin{cases} t \left[\theta \left(\frac{t}{M} \right)^{n-1} + (1 - \theta) \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1 - t) \left[\theta \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{n-1} + (1 - \theta) \right] & M \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3.40)$$

A partir de (3.40), y considerando dos cuantiles se presenta el siguiente resultado:

Proposición 3.2 Sean (p, a_p) y (q, b_q) dos percentiles tales que $a_p \leq M \leq b_q$, entonces se verifica que

$$0 \leq G(a_p) = p \leq a_p \leq M \leq b_q \leq G(b_q) = q \leq 1. \quad (3.41)$$

Demostración 3.2 Para realizar la demostración se comprobará, en primer lugar que $0 \leq G(a_p) = p \leq a_p \leq M$ y de forma análoga se verá que $M \leq b_q \leq G(b_q) = q \leq 1$.

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

• Para demostrar $0 \leq G(a_p) = p \leq a_p$, bastará con sustituir en la expresión (3.40), a_p , obteniendo:

$$0 \leq p = G(a_p) = a_p \left[\theta \left(\frac{a_p}{M} \right)^{n-1} + (1 - \theta) \right] \leq a_p \left[\theta \left(\frac{M}{M} \right)^{n-1} + (1 - \theta) \right] = a_p. \quad (3.42)$$

• $b_q \leq G(b_q) = q \leq 1$.

$$1 \geq q = G(b_q) = b_q \left[\theta \left(\frac{b_q}{M} \right)^{n-1} + (1 - \theta) \right] \geq b_q \left[\theta \left(\frac{M}{M} \right)^{n-1} + (1 - \theta) \right] = b_q. \quad (3.43)$$

■

En base al resultado obtenido, se describe la expresión (3.44), donde el parámetro θ viene determinado a partir de los dos cuantiles seleccionados y el parámetro n .

$$\theta = \begin{cases} \frac{1 - \frac{p}{a_p}}{1 - \left(\frac{a_p}{M}\right)^{n-1}} & p \leq a_p \leq M, \\ \frac{\frac{1-q}{1-b_q} - 1}{\left(\frac{1-b_q}{1-M}\right)^{n-1} - 1} & M \leq b_q \leq q. \end{cases} \quad (3.44)$$

Así pues, considerando la distribución U-CSTSP y un cuantil situado a izquierda o derecha del valor modal que satisfaga las restricciones de la proposición 3.2, se consigue estimar el valor del parámetro θ utilizando una de las dos expresiones contenidas en (3.44).

En el caso de no trabajar con la distribución clásica, tanto el parámetro n de la distribución U-STSP genérica, como el parámetro θ serán desconocidos. Para solventar este problema se tiene, igualando las dos ramas de la expresión (3.44), la expresión (3.45). Haciendo uso de esta expresión, y recurriendo a dos cuantiles, se estima el valor del parámetro n .

$$\frac{1 - \frac{p}{a_p}}{1 - \left(\frac{a_p}{M}\right)^{n-1}} = \frac{\frac{1-q}{1-b_q} - 1}{\left(\frac{1-b_q}{1-M}\right)^{n-1} - 1} \quad (3.45)$$

Una vez estimado el valor del parámetro n , y utilizando la expresión (3.44), se

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

obtendrá la estimación correspondiente del parámetro θ , quedando definida así la distribución U-STSP.

El principal inconveniente presentado por la igualdad (3.45), es que no siempre se obtiene solución para el parámetro n . Sin embargo, en el caso de presentar solución se obtendrá la elicitación de la distribución a partir de los percentiles considerados. Esta situación, dentro de la metodología PERT, es considerada como la más cercana a la realidad, Moskowitz et al., [82], Selvidge, [99], Alpert y Raihfa, [2], Davidson y Cooper, [21], Keefer y Verdini, [57], Lau y Somarajan, [64], Lau et al., [65], Lau et al., [66], Johnson, [54], Kotz y van Dorp, [63] y van Dorp et al., [113].

Como consecuencia de los resultados obtenidos, se concluye que la distribución U-STSP puede ser elicitada de una forma directa a partir de los dos cuantiles. Así pues, teniendo en cuenta esta información, se estiman los parámetros θ y n . Este hecho es de gran importancia, ya que, tal y como mostraron Kotz y Seier, [60], el parámetro n de la distribución STSP está asociado a la concentración y apuntamiento de la distribución, consiguiendo describir modelos con distintas intensidades en su apuntamiento y dispersión.

Por otro lado, si la expresión (3.45) no aportara ninguna solución, se recurre a la utilización de los métodos de elicitación alternativos. Para ello, utilizando uno de los métodos propuestos por Hahn, [41], se determina el valor del parámetro θ . Como consecuencia de la información obtenida, y haciendo uso de un cuantil (inferior o superior), combinado con la expresión (3.44), se obtiene la estimación del parámetro n , cuya expresión viene dada por:

$$n = 1 + \frac{\ln \left[1 - \frac{1 - \frac{p}{a_p}}{\theta} \right]}{\ln \left[\frac{a_p}{M} \right]} \quad \text{si } p \leq a_p \leq M, \quad (3.46)$$

$$n = 1 + \frac{\ln \left[1 - \frac{\frac{1-q}{1-b_q} - 1}{\theta} \right]}{\ln \left[\frac{1-b_q}{1-M} \right]} \quad \text{si } M \leq b_q \leq 1. \quad (3.47)$$

Ambas expresiones tendrán solución si $\theta > 1 - \frac{p}{a_p}$, para el caso de (3.46), y $\theta > 1 - \frac{1-q}{1-b_q}$ para la expresión (3.47).

Estos resultados son de gran interés ya que no se restringe el uso a la distribución U-STSP clásica, consiguiendo pues describir distribuciones con un mayor o menor apuntamiento para valores de n superiores o inferiores a 3.02344.

3.3.3. Elicitación de la distribución U-GBP

A la hora de presentar la elicitación de la distribución U-SGBP se parte, al igual que se ha realizado con las distribuciones U-SGBC y U-STSP, de la expresión correspondiente a su función de distribución. Por comodidad y para simplificar los cálculos se utiliza la función de distribución asociada a la distribución estandarizada en $[0, 1]$, (3.48).

$$G(t|M, P(\cdot|n, \theta)) = \begin{cases} t \left[\theta \left\{ A \left(\frac{t}{M} \right)^{2n} - B \left(\frac{t}{M} \right)^n \right\} + (1 - \theta) \right] & 0 \leq t \leq M, \\ 1 - (1 - t) \left[\theta \left\{ A \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{2n} - B \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^n \right\} + (1 - \theta) \right] & M \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (3.48)$$

donde $A = \frac{n+1}{-3n-1}$ y $B = \frac{2(2n+1)}{-3n-1}$. Considerando dos cuantiles cualesquiera se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.3 Sean (p, a_p) y (q, b_q) dos percentiles donde $a_p \leq M \leq b_q$, entonces se tiene

$$0 \leq G(a_p) = p \leq a_p \leq M \leq b_q \leq G(b_q) = q \leq 1. \quad (3.49)$$

Demostración 3.3 Para demostrar la proposición se realizará en primer lugar $0 \leq G(a_p) = p \leq a_p$, y de forma análoga se comprobará que $b_q \leq G(b_q) = q \leq 1$. Es por ello que, se considera en el primer caso el cuantil a_p , y para la segunda desigualdad el cuantil b_q . Luego, sustituyendo ambos cuantiles en la función de distribución (3.48) se tiene:

- $0 \leq G(a_p) = p \leq a_p$.

$$\begin{aligned} 0 \leq p = G(a_p) &= a_p \left[\theta \left\{ \frac{n+1}{-3n-1} \left(\frac{a_p}{M} \right)^{2n} - \frac{2(2n+1)}{-3n-1} \left(\frac{a_p}{M} \right)^n \right\} + (1 - \theta) \right] \leq \\ &\leq a_p \left[\theta \left\{ \frac{n+1}{-3n-1} \left(\frac{M}{M} \right)^{2n} - \frac{2(2n+1)}{-3n-1} \left(\frac{M}{M} \right)^n \right\} + (1 - \theta) \right] = a_p. \end{aligned}$$

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

$$\bullet b_q \leq G(b_q) = q \leq 1.$$

$$1 \geq q = G(b_q) =$$

$$1 - (1 - b_q) \left[\theta \left\{ \frac{n+1}{-3n-1} \left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^{2n} - \frac{2(2n+1)}{-3n-1} \left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^n \right\} + (1-\theta) \right] \geq$$

$$1 - (1 - b_q) \left[\theta \left\{ \frac{n+1}{-3n-1} \left(\frac{1-M}{1-M} \right)^{2n} - \frac{2(2n+1)}{-3n-1} \left(\frac{1-M}{1-M} \right)^n \right\} + (1-\theta) \right] = b_q.$$

■

Utilizando los resultados obtenidos en la proposición, se obtiene, despejando el parámetro θ de las ramas descritas en (3.48), la siguiente expresión para dicho parámetro:

$$\theta = \begin{cases} \frac{(a_p-p)(3n+1)}{a_p \left[\left(\frac{a_p}{M} \right)^n - 1 \right] \left[\left(\frac{a_p}{M} \right)^n (n+1) - 1 - 3n \right]} & p \leq a_p \leq M, \\ \frac{(b_q-q)(3n+1)}{(b_q-1) \left[\left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^n - 1 \right] \left[\left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^n (n+1) - 1 - 3n \right]} & M \leq b_q \leq q. \end{cases} \quad (3.50)$$

Así pues, considerando el caso particular de la distribución U-CSGBP, donde el parámetro n toma el valor 2.74669, y utilizando la expresión (3.50), se consigue elicitar de una forma sencilla la distribución U-CSGBP.

Igualando las expresiones correspondientes a θ , se obtiene una ecuación donde n es el único parámetro desconocido, ya que, tanto los cuantiles, como el valor de la moda estandarizada vienen definidos por la información que facilita el experto.

$$\frac{(a_p-p)(3n+1)}{a_p \left[\left(\frac{a_p}{M} \right)^n - 1 \right] \left[\left(\frac{a_p}{M} \right)^n (n+1) - 1 - 3n \right]} = \frac{(b_q-q)(3n+1)}{(b_q-1) \left[\left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^n - 1 \right] \left[\left(\frac{1-b_q}{1-M} \right)^n (n+1) - 1 - 3n \right]} \quad (3.51)$$

Es por ello que, a partir de (3.51) y utilizando dos cuantiles, se obtiene el valor del parámetro n , y como consecuencia, sustituyendo dicho valor en (3.50) se obtendría la estimación correspondiente al parámetro de la mixtura, θ . Hay que destacar que, al igual que sucede con las expresiones (3.39) y (3.45), no siempre esta ecuación presenta solución. Sin embargo, en el caso de obtener solución para el parámetro n , se conseguirá estimar el valor del parámetro θ utilizando la

3.3. ELICITACIÓN DE DISTRIBUCIONES

expresión (3.50). Como consecuencia, la distribución elicitada tendrá una relación directa con la situación real.

Al igual que en el caso de la elicitación de la distribución U-SGBC, la ecuación (3.51) presenta grandes dificultades en su resolución, y por ello se recurre al uso de la representación gráfica.

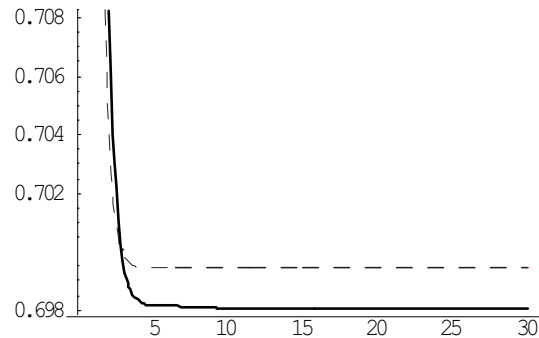


Figura 3.17: Primera rama (continua) y segunda rama (discontinua) de θ .

Considerando, por ejemplo, los cuantiles $(p, a_p) = (0.015, 0.05)$ y $(q, b_q) = (0.985, 0.95)$, se tiene como solución $n = 3$, realizando la representación gráfica recogida en la Figura 3.17 y haciendo uso de (3.50) se obtiene que $\theta = 0.7$. Así pues, a partir de la información obtenida se describe la distribución U-SGBP.

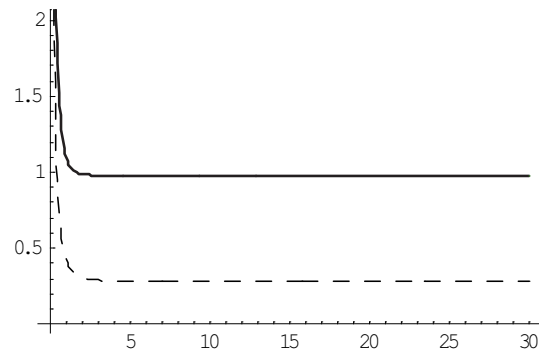


Figura 3.18: Primera rama (continua) y segunda rama (discontinua) de θ .

Sin embargo, partiendo de los cuantiles $(p, a_p) = (0.001, 0.05)$ y $(q, b_q) = (0.95, 0.93)$, se observa, en la Figura 3.18, que ambas gráficas no se cortan. Por tanto, en este caso el sistema no tendría solución, no consiguiendo así obtener la estimación de la distribución por este camino.

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

En el caso de que la ecuación (3.51) no aporte ningún resultado válido para el parámetro n , se hará uso de los métodos de elicitación del parámetro θ presentados en el trabajo de Hahn, [41], y como consecuencia a la información aportada por alguno de los métodos, se elicitó el valor del parámetro n . En el caso de ser $n > 2.74669$, la distribución U-SGBP presentaría un mayor apuntamiento que la distribución U-SGBP clásica y, en el caso de obtener un valor de θ próximo a cero entonces estaríamos ante una distribución con colas pesadas.

En definitiva, después de los resultados obtenidos se tiene que la elicitación de las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP, presenta algunas ventajas con respecto a la elicitación de la distribución U-BETA desarrollada por Hahn, [41].

Este hecho es debido a que, las distribuciones presentadas además de admitir los procesos de elicitación que Hahn utiliza en la estimación de la distribución U-BETA, las tres distribuciones presentan una expresión explícita para la función de distribución, característica de la cuál carece la distribución beta.

Otra de las principales ventajas presentadas por el método de elicitación desarrollado en el presente capítulo es que, a diferencia de los métodos mostrados por Hahn en la elicitación de distribuciones, [41], no es necesario recurrir al uso de las distribuciones clásicas, permitiéndonos estimar los valores correspondientes a los parámetros n y θ . Como consecuencia, se consigue describir distribuciones con mayor o menor dispersión, y con distintas intensidades en su apuntamiento. En definitiva, la aplicación de cualquiera de estos métodos permitirá describir una distribución que podrá ser utilizada como distribución subyacente en cada una de las tareas de la realización de una actividad, ajustando de una forma más precisa los datos empíricos.

Por tanto, a partir de los resultados obtenidos, se proponen a las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP como modelos alternativos para estimar el tiempo de ejecución de una actividad.

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

Teniendo en cuenta la relación existente entre la construcción de la distribución presentada por Hahn, [41], y las desarrolladas a lo largo del capítulo, se muestra un ejemplo práctico basado en los datos utilizados por Hahn en su trabajo, [41].

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

La aplicación esta basada en el estudio del comportamiento de la distribución rectangular-beta, denotada en la memoria por U-BETA, sobre el diagrama PERT recogido en la página 294 del texto desarrollado por Moder et al., [79]. El proyecto viene determinado por 29 actividades las cuales describen cada una de las tareas a realizar en el desarrollo del proyecto relacionado con un módulo electrónico, Figura 3.19.

La aplicación práctica realizada con los datos aportados por Moder et al., [79], consiste, fundamentalmente en la simulación de cada una de las tareas que componen el diagrama PERT haciendo uso de las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP. Debido a la escasez de información aportada por la red PERT se ha recurrido, en la aplicación, a dos escenarios. En primer caso, se ha trabajado con las distribuciones clásicas, conociendo así el valor del parámetro k para la distribución U-BETA y el parámetro n de las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP. Por último, se ha estudiado el comportamiento de las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP para $n = 5$ y $n = 10$.

En una primera fase de la aplicación se ha realizado un análisis comparativo entre los resultados mostrados por Hahn, [41], y los obtenidos con las distribuciones clásicas. Usando la información teórica desarrollada en las secciones 3.2.1 y 3.2.2 se tiene como resultados iniciales que las distribuciones asociadas a cada una de las tareas del grafo deben presentar un coeficiente de curtosis superior al de la distribución U-BETA.

En el Cuadro 3.4 se muestran las estimaciones asociadas a la función de distribución del tiempo total requerido para acabar la tarea obtenidas mediante el Método de Simulación de Monte Carlo. Como es conocido, el método Monte Carlo permite la resolución de problemas con una complicada solución por métodos exclusivamente analíticos o numéricos, pero que dependen de factores aleatorios o se pueden asociar a un modelo probabilístico. La generación de números aleatorios será la base que permitirá el cálculo de probabilidades. En estos métodos el error es aproximadamente $\frac{1}{\sqrt{N}}$, donde N es el número de pruebas. En el caso que nos ocupa, se ha considerado un millón de simulaciones, por lo que el error ascenderá aproximadamente a 0.001.

Tal y como se observa en el Cuadro 3.4 se tiene que el tiempo medio estimado en la ejecución de un proyecto es mayor cuando se trabaja con las distribuciones

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

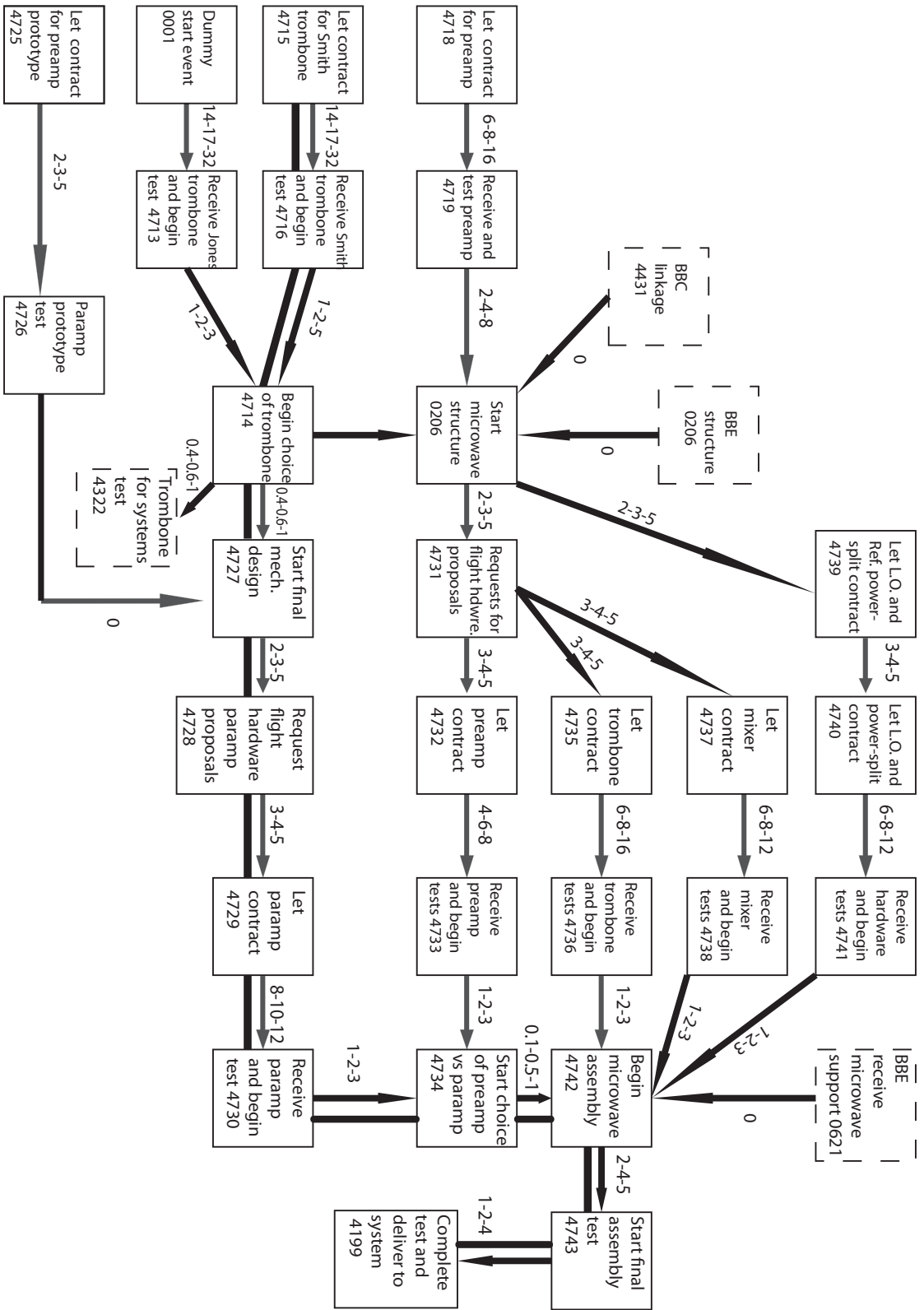


Figura 3.19: Reproducción de la red presentada en Moder et al.

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

U-GBC, U-TSP y U-GBP clásicas que cuando se recurre a la distribución U-BETA.

Centrando la atención en el estudio del apuntamiento se tiene que, cuando el parámetro θ toma los valores 0.25 y 1, las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP presentan un coeficiente de curtosis superior al de la distribución U-BETA. Sin embargo, habría que destacar que en el caso particular de asignarle a θ los valores 0.50 o 0.75, los resultados se modifican, siendo la distribución U-BETA más puntiaguda que el resto, excepto en el caso de la distribución U-GBP cuando $\theta = 0.50$. Este hecho puede venir dado por algún mecanismo de corrección de la distribución empírica de la variable aleatoria “tiempo para completar el proyecto”.

	Media	D.Típica	Asimetría	Curtosis
U-CBETA				
$\theta = 0.25$	51.4813	5.5331	0.2295	2.2407
$\theta = 0.50$	50.2038	5.1325	0.4644	2.5400
$\theta = 0.75$	48.9338	4.4778	0.6744	3.1197
$\theta = 1$	47.6505	3.4052	0.4768	2.9340
U-CSGBC				
$\theta = 0.25$	55.0480	5.6231	0.1363	2.0140
$\theta = 0.50$	53.1646	5.1904	1.0727	3.0366
$\theta = 0.75$	51.0848	3.8839	0.4804	2.2485
$\theta = 1$	47.8261	2.0019	-0.8323	2.0512
U-CSTSP				
$\theta = 0.25$	51.7728	5.4014	0.2098	2.2564
$\theta = 0.50$	50.8347	4.9622	0.4306	2.5066
$\theta = 0.75$	49.8727	4.3233	0.6298	2.9566
$\theta = 1$	48.9088	3.4053	0.6180	3.0385
U-CSGBP				
$\theta = 0.25$	51.7560	5.3862	0.2198	2.2701
$\theta = 0.50$	50.8197	4.9111	0.4360	2.5458

Continúa en la página siguiente

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

	<i>Continuación</i>			
	Media	D.Típica	Asimetría	Curtosis
$\theta = 0.75$	49.8128	4.2201	0.6480	3.0619
$\theta = 1$	48.7917	3.2099	0.5501	2.9760

Cuadro 3.4: Resumen Estadístico de las distribuciones U-CBETA, U-CSGBC, U-CSTSP y U-CSGBP.

Se ha de señalar que, los resultados proporcionados por cada una de las distribuciones varían en función de los valores asignados a cada uno de los parámetros que describen a la distribución. Aún así, los resultados con las distribuciones en estudio son relativamente parecidos ya que no existen diferencias significativas en las conclusiones estadísticas obtenidas.

Como se aprecia en las Figuras 3.20, 3.21, 3.22 y 3.23, utilizando la distribución U-BETA, la variable aleatoria “tiempo para completar el proyecto” presenta una dispersión mayor que si se trabaja con las U-STSP o U-SGBP.

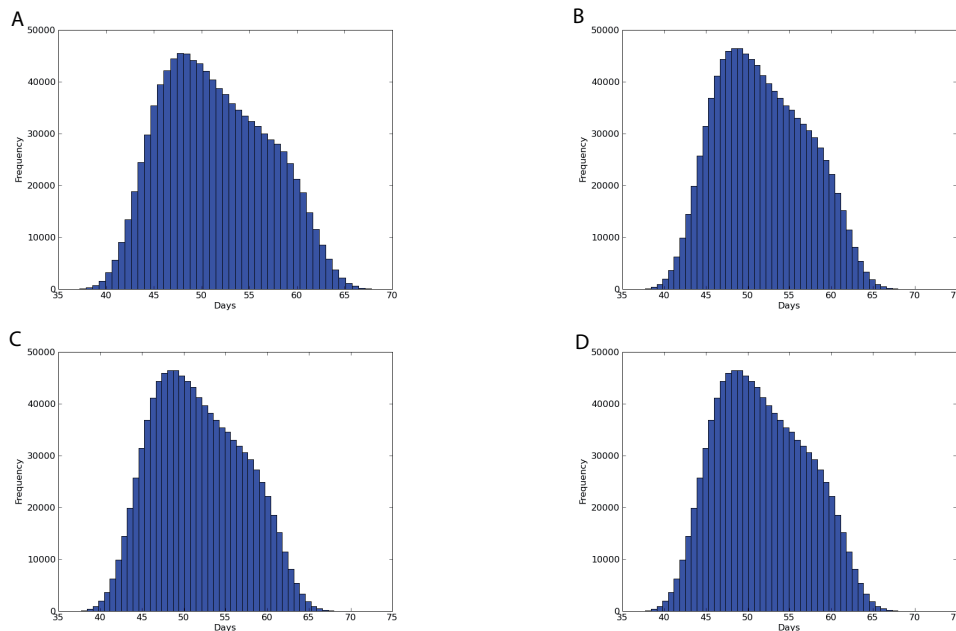


Figura 3.20: Distribuciones U-CBETA, (A), U-CSGBC, (B), U-CSTSP, (C), U-CSGBP, (D) con $\theta = 0.25$.

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

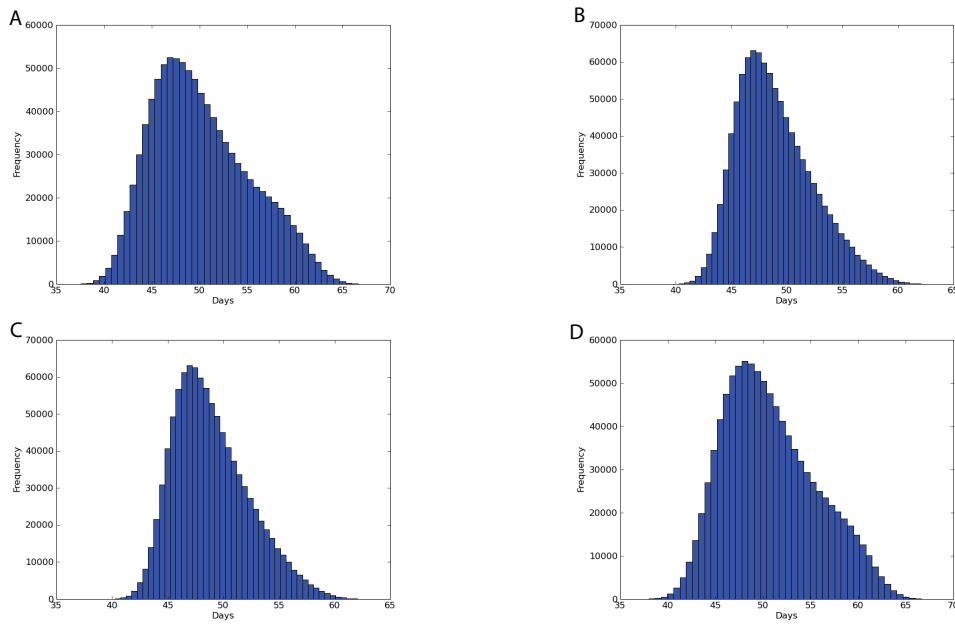


Figura 3.21: Distribuciones U-CBETA, (A), U-CSGBC, (B), U-CSTSP, (C), U-CSGBP, (D) con $\theta = 0.5$.

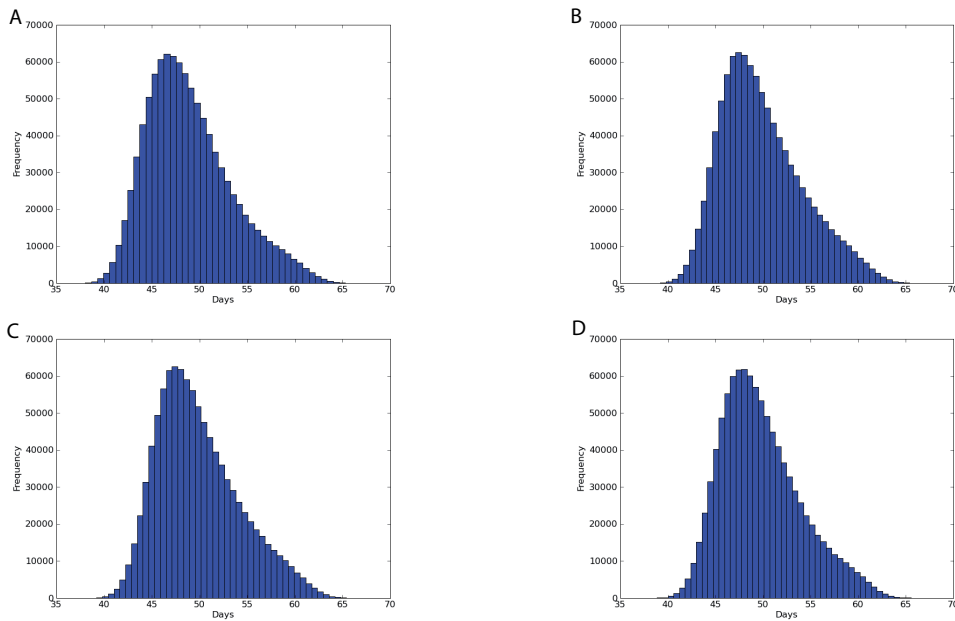


Figura 3.22: Distribuciones U-CBETA, (A), U-CSGBC, (B), U-CSTSP, (C), U-CSGBP, (D) con $\theta = 0.75$.

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

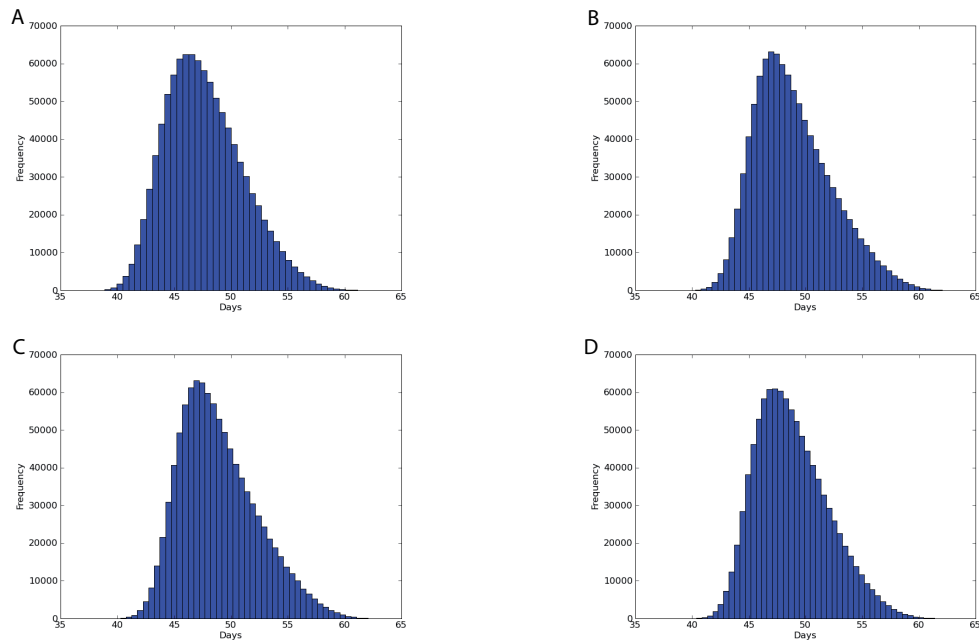


Figura 3.23: Distribuciones U-CBETA, (A), U-CSGBC, (B), U-CSTSP, (C), U-CSGBP, (D) con $\theta = 1$.

Se observa que, a medida que aumenta la presencia de la distribución uniforme, la distribución presenta una mayor varianza consiguiendo así concluir con resultados más conservadores.

Aunque los resultados obtenidos con las distintas distribuciones son realmente similares, lo cierto es que la principal ventaja que presentan las distribuciones U-SGBC, U-STSP y U-SGBP es que permite realizar la simulación en cada uno de los casos con distintos valores de n . Es por ello que, se presenta el estudio comparativo de la distribución U-BETA con las distribuciones U-SGBC, U-STSP y U-SGBP para los casos particulares de $n = 5$ y $n = 10$.

Recurriendo a la información plasmada en el Cuadro 3.5, el tiempo medio para finalizar el trabajo en las distribuciones U-SGBC, U-STSP y U-SGBP con $n = 5$ y $\theta = 0.25$ es mayor que el empleado con la distribución U-BETA, pero al igual que sucedía en el caso de las distribuciones clásicas se tiene máxima dispersión cuando se emplea la distribución presentada por Hahn, [41], con $\theta = 0.25$. Sin embargo, habría que considerar que, cuando se centra el estudio en el coeficiente de curtosis, se concluye que la distribución U-BETA presenta siempre

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

un apuntamiento inferior, coincidiendo estos resultados con los obtenidos en las secciones comentadas anteriormente.

	Media	D.Típica	Asimetría	Curtosis
U-BETA				
$\theta = 0.25$	51.4813	5.5331	0.2295	2.2407
$\theta = 0.50$	50.2038	5.1325	0.4644	2.5400
$\theta = 0.75$	48.9338	4.4778	0.6744	3.1197
$\theta = 1$	47.6505	3.4052	0.4768	2.9340
U-SGBC $n = 5$				
$\theta = 0.25$	53.6980	4.5472	0.4004	1.9233
$\theta = 0.50$	50.3071	4.6264	0.5545	1.8264
$\theta = 0.75$	47.2980	2.6735	0.0048	2.4929
$\theta = 1$	47.4987	1.8568	0.9460	3.2119
U-SGBC $n = 10$				
$\theta = 0.25$	51.0449	7.0164	0.3861	1.4961
$\theta = 0.50$	47.1576	4.5488	-0.2226	2.1638
$\theta = 0.75$	48.2307	3.4441	1.4714	3.4390
$\theta = 1$	45.6817	0.8722	0.1031	2.2614
U-STSP $n = 5$				
$\theta = 0.25$	51.4950	5.4035	0.3008	2.2623
$\theta = 0.50$	50.1773	4.8399	0.6439	2.7584
$\theta = 0.75$	48.9260	3.9648	1.0539	3.9490
$\theta = 1$	47.6652	2.4331	0.8578	3.7468
U-STSP $n = 10$				
$\theta = 0.25$	51.1871	5.4650	0.3765	2.2537
$\theta = 0.50$	49.6305	4.8769	0.8257	2.9110
$\theta = 0.75$	48.0442	3.7972	1.5465	5.2666
$\theta = 1$	46.4949	1.4074	1.1409	4.9847
U-SGBP $n = 5$				

Continúa en la página siguiente

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

	<i>Continuación</i>			
	Media	D.Típica	Asimetría	Curtosis
$\theta = 0.25$	51.4988	5.3813	0.2978	2.2680
$\theta = 0.50$	50.1786	4.8211	0.6590	2.7958
$\theta = 0.75$	48.9137	3.8980	1.0772	4.0903
$\theta = 1$	47.6271	2.2853	0.7548	3.5805
<hr/>				
U-SGBP $n = 10$				
$\theta = 0.25$	51.2018	5.4488	0.3708	2.2479
$\theta = 0.50$	49.6472	4.8383	0.8369	2.9563
$\theta = 0.75$	48.1318	3.7882	1.5338	5.2714
$\theta = 1$	46.5819	1.3927	0.9356	4.2718

Cuadro 3.5: Resumen estadístico de las distribuciones U-BETA, U-SGBC, U-STSP y U-SGBP.

Merece una especial atención, que estas distribuciones, además de destacar por su apuntamiento y su dispersión, consiguen describir colas más pesadas que la distribución U-BETA, asignando una mayor probabilidad de ocurrencia a los sucesos raros (*outliers*).

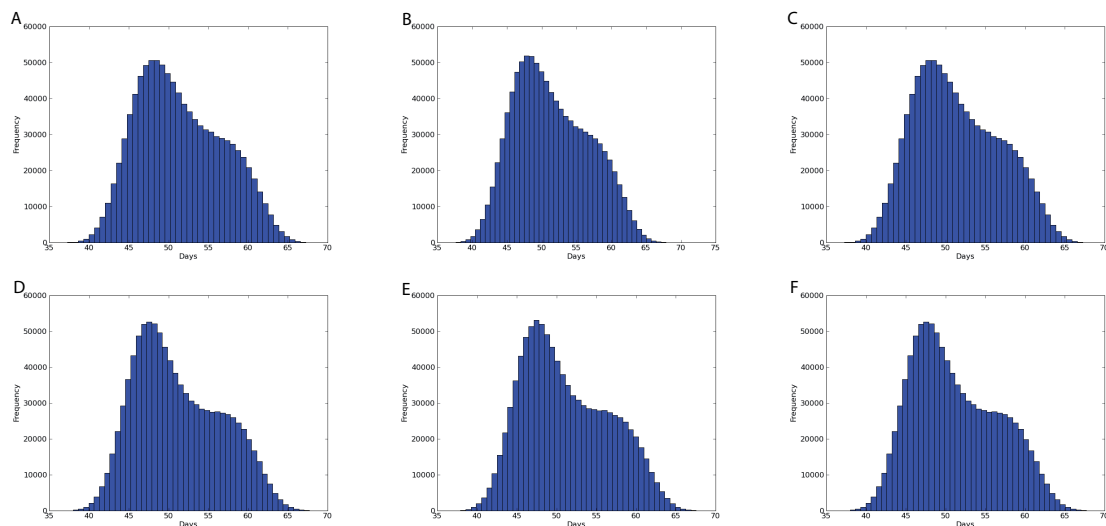


Figura 3.24: Distribuciones U-GBC con $n = 5$, (A), U-TSP con $n = 5$, (B), U-GBP con $n = 5$, (C), U-GBC con $n = 10$, (D), U-TSP con $n = 10$, (E), U-GBP con $n = 10$, (F) tomando $\theta = 0.25$.

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

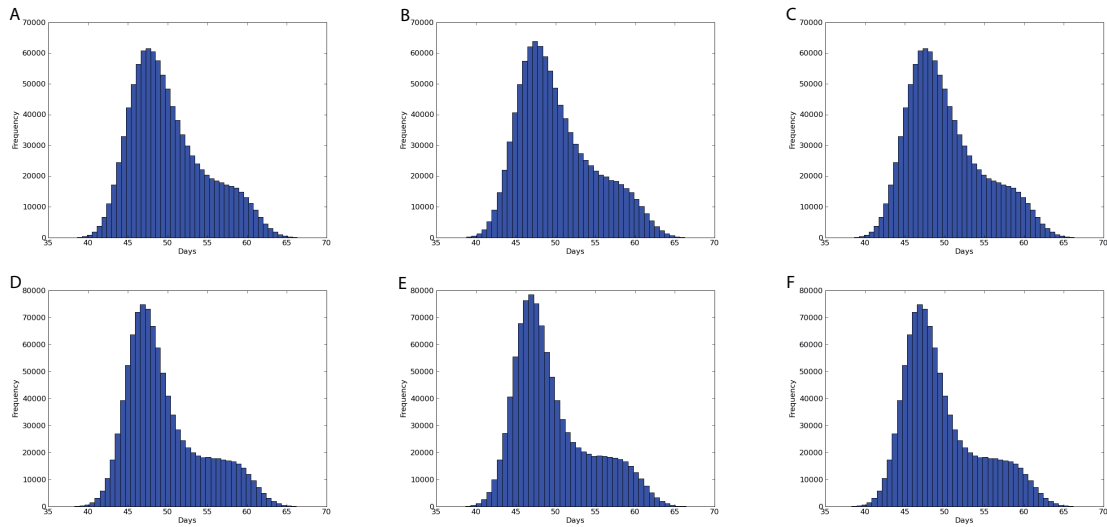


Figura 3.25: Distribuciones U-GBC con $n = 5$, (A), U-TSP con $n = 5$, (B), U-GBP con $n = 5$, (C), U-GBC con $n = 10$, (D), U-TSP con $n = 10$, (E), U-GBP con $n = 10$, (F) tomando $\theta = 0.5$.

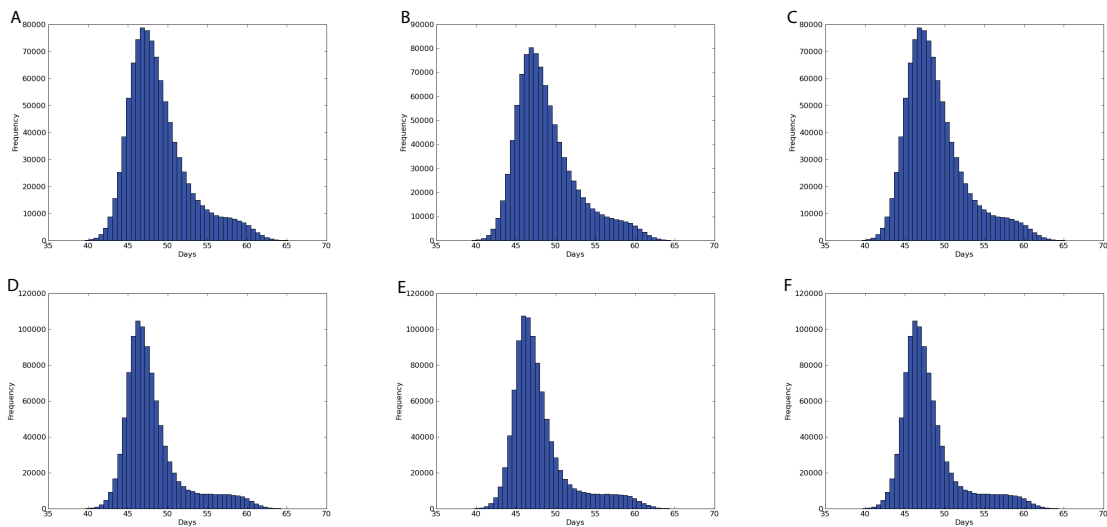


Figura 3.26: Distribuciones U-GBC con $n = 5$, (A), U-TSP con $n = 5$, (B), U-GBP con $n = 5$, (C), U-GBC con $n = 10$, (D), U-TSP con $n = 10$, (E), U-GBP con $n = 10$, (F) tomando $\theta = 0.75$.

Comparando las estimaciones correspondientes a la simulación realizada con la información aportada por Moder, [79], se tiene que el máximo tiempo medio

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

de ejecución de un trabajo se consigue con la distribución U-GBP con $n = 5$ y $\theta = 0.25$, siendo esta misma distribución la que presenta el apuntamiento más significativo cuando el parámetro n aumenta hasta 10 y $\theta = 0.75$. Luego, teniendo en cuenta los comentarios realizados, la distribución U-GBP salvaguarda los problemas existentes sobre los sucesos raros y el apuntamiento.

Recurriendo al estudio de las Figuras 3.24, 3.25 y 3.26 se observa que las representaciones asociadas a la variable aleatoria “tiempo para completar el proyecto” utilizando las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP adoptan formas muy similares entre ellas, tal y como se puso de manifiesto en el estudio de las estimaciones aportadas en el Cuadro 3.5.

Aunque siempre la distribución U-BETA mantenga una varianza más elevada, la diferencia existente con los datos aportados por las distribuciones presentadas no es muy notable.

Por otro lado, a partir de la información recogida en el Cuadro 3.6, se tiene que los intervalos de confianza, al 95 %, asociados al tiempo necesario para finalizar el trabajo (*job completion time*) siempre presentan una menor amplitud cuando se trabaja con las distribuciones U-SGBC, U-STSP y U-SGBP en lugar de recurrir a la distribución U-BETA. Este hecho conducen a que la utilización de estas distribuciones proporcionan un error de estimación inferior. Cuando se usa la distribución U-SGBP con $n = 10$ y $\theta = 0.75$ se obtiene el caso de menor error de estimación. Hay que notar que los intervalos donde se presenta la mínima amplitud siempre se presentan cuando el parámetro $\theta = 1$, es decir cuando desaparece la presencia de la distribución uniforme y se trabaja con las distribuciones beta, bicúbica, two-sided power y la distribución biparabólica.

Intervalo de confianza (95 %) $P(X \leq x) = 0.95$		
U-BETA		
$\theta = 0.25$	(42.214330, 62.173052)	60.9364
$\theta = 0.50$	(42.049886, 61.046126)	59.7035
$\theta = 0.75$	(41.997441, 59.412948)	57.7024
$\theta = 1$	(42.014557, 55.084394)	53.8345

Continúa en la página siguiente

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

		<i>Continuación</i>	
		Intervalo de confianza (95 %)	$P(X \leq x) = 0.95$
<hr/>			
U-CSGBC			
	$\theta = 0.25$	(45.9303, 64.7708)	62.0876
	$\theta = 0.50$	(47.3314, 64.8758)	63.5648
	$\theta = 0.75$	(45.9980, 58.9328)	56.8876
	$\theta = 1$	(43.9940, 49.8516)	48.1656
<hr/>			
U-SGBC $n = 5$			
	$\theta = 0.25$	(45.3342, 51.7841)	50.3524
	$\theta = 0.5$	(43.0476, 52.2852)	50.7657
	$\theta = 0.75$	(44.7215, 58.3959)	57.0908
	$\theta = 1$	(46.6315, 60.9704)	58.4765
<hr/>			
U-SGBC $n = 10$			
	$\theta = 0.25$	(43.1993, 61.0930)	60.3351
	$\theta = 0.50$	(38.6630, 54.3920)	53.4934
	$\theta = 0.75$	(45.7811, 56.0516)	49.6432
	$\theta = 1$	(44.2775, 47.3103)	46.2133
<hr/>			
U-CSTSP			
	$\theta = 0.25$	(42.638632, 62.170108)	60.9748
	$\theta = 0.50$	(42.842319, 61.210860)	59.9454
	$\theta = 0.75$	(43.166078, 59.752339)	58.2249
	$\theta = 1$	(43.568942, 56.630561)	55.3183
<hr/>			
U-STSP $n = 5$			
	$\theta = 0.25$	(42.671966, 62.126793)	60.9004
	$\theta = 0.50$	(42.878924, 60.894976)	59.5701
	$\theta = 0.75$	(43.328131, 59.246614)	57.4600
	$\theta = 1$	(44.009448, 53.484900)	52.3508
<hr/>			
U-STSP $n = 10$			
	$\theta = 0.25$	(42.581378, 62.003082)	60.8258
	$\theta = 0.50$	(42.806951, 60.751128)	59.4383
	$\theta = 0.75$	(43.353044, 59.015986)	57.1470

Continúa en la página siguiente

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

	<i>Continuación</i>	
	Intervalo de confianza (95 %)	$P(X \leq x) = 0.95$
$\theta = 1$	(44.474145, 49.960687)	49.2129
<hr/>		
U-CSGBP		
$\theta = 0.25$	(42.620266, 62.156856)	60.9588
$\theta = 0.50$	(42.889744, 61.187215)	59.8794
$\theta = 0.75$	(43.241512, 59.629098)	58.0411
$\theta = 1$	(43.646740, 55.896975)	54.7066
<hr/>		
U-SGBP $n = 5$		
$\theta = 0.25$	(42.627328, 62.055606)	60.8758
$\theta = 0.50$	(42.927811, 60.950006)	59.5861
$\theta = 0.75$	(43.358940, 59.149829)	57.3588
$\theta = 1$	(44.087576, 52.939577)	51.9158
<hr/>		
U-SGBP $n = 10$		
$\theta = 0.25$	(42.589944, 61.987921)	60.7700
$\theta = 0.50$	(42.842366, 60.743021)	59.4687
$\theta = 0.75$	(43.383941, 59.049202)	57.2426
$\theta = 1$	(44.490758, 49.894448)	49.2205

Cuadro 3.6: Intervalos de confianza y $P(X \leq x) = 0.95$.

Así pues, teniendo en cuenta la escasez de información aportada en el diagrama PERT, Figura 3.19, Hahn considera en su trabajo distintos valores para el parámetro θ , además de recurrir a la utilización de la distribución U-BETA clásica.

Como consecuencia a los resultados conseguidos con la distribución U-SGBC, y teniendo en cuenta su papel protagonista en la presente memoria, se muestra el gráfico correspondiente a la función de distribución de las distribuciones clásicas U-SGBC y U-BETA, recogido en la Figura 3.27. A continuación, en la Figura 3.28, se recoge el estudio comparativo de la función de distribución asociada a la distribución clásica U-BETA con las distribuciones U-CSTSP y U-CSGBP.

Como se observa en las Figuras 3.27 y 3.28, la función de distribución asociada a la distribución clásica U-BETA se mantiene siempre por encima del resto de distribuciones.

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

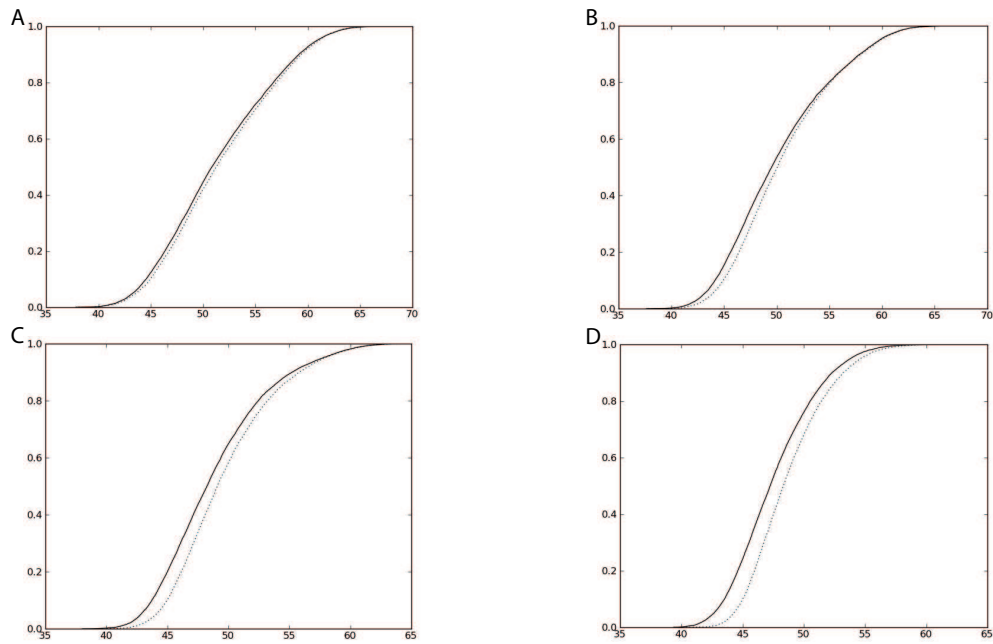


Figura 3.27: Función de distribución elicitada de las distribuciones clásicas U-BETA (continua) y U-SGBC (discontinua) para $\theta = 0.25$, **(A)**, $\theta = 0.5$, **(B)**, $\theta = 0.75$, **(C)** y $\theta = 1$, **(D)**.

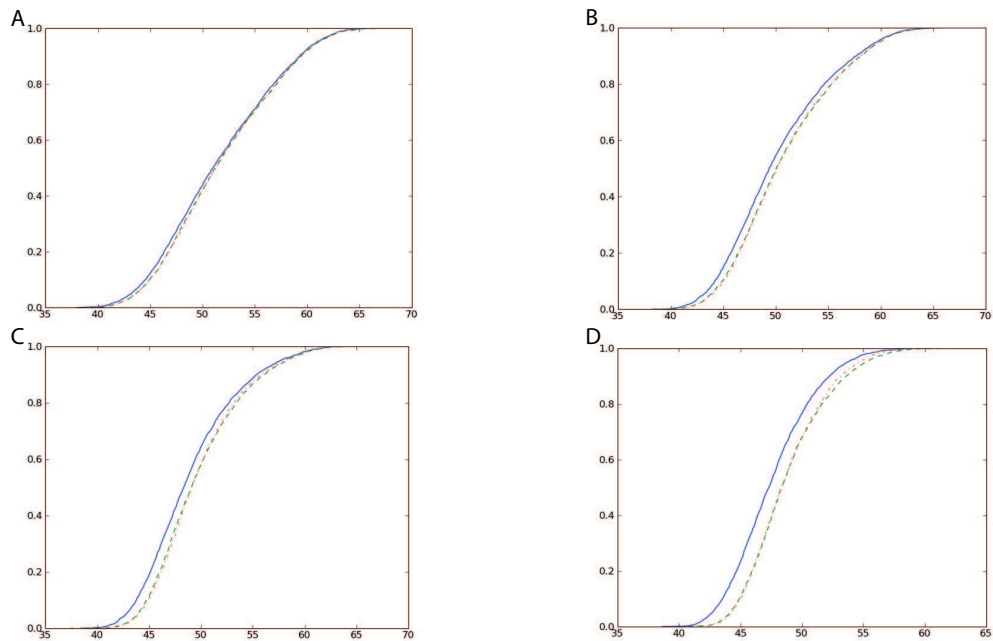


Figura 3.28: Función de distribución elicitada de las distribuciones clásicas U-CBETA (continua), U-CSTSP (verde) y U-CSGBP (roja) para $\theta = 0.25$, **(A)**, $\theta = 0.5$, **(B)**, $\theta = 0.75$, **(C)** y $\theta = 1$, **(D)**.

3.4. APLICACIÓN PRÁCTICA

Este hecho implica que para una misma probabilidad las distribuciones U-CSGBC, U-CSTSP y U-CSGBP, estiman un mayor tiempo de ejecución del proyecto siendo por tanto más prudentes a la hora de realizar estimaciones.

La principal característica diferenciadora de las distribuciones construidas con respecto a la distribución U-BETA, es que estas pueden ser elicítadas haciendo uso de dos cuantiles, consiguiendo así describir distintas distribuciones en función del parámetro θ y de n . Con el objeto de obtener conclusiones sobre las distribuciones mostradas y debido a la ausencia de información en el diagrama 3.19, se recurre a la utilización de distintos valores para el parámetro n . Debido a este hecho, se realiza la simulación del diagrama PERT utilizando los valores 5 y 10 para n .

Nótese que con la utilización de distintos valores para el parámetro n se han descrito distribuciones cuyas funciones de distribución se sitúan por debajo y por encima de la función de distribución asociada a la distribución U-BETA, véase Figura 3.29. En el caso de considerar $n = 5$ o $n = 10$ las funciones cortan a la función asociada a la distribución U-BETA, mientras que en el caso de trabajar con las distribuciones clásicas, estas siempre se mantienen por debajo, aportando un mayor tiempo de estimación en la ejecución del 95 % del total de la actividad, Figura 3.29.

En este ejemplo concreto la distribución U-SGBC es la que presenta un menor tiempo para la ejecución de la tarea. Si bien, se observa que no influye la presencia de la distribución uniforme, ya que el tiempo mínimo estimado se obtiene para $\theta = 1$, que como ha quedado establecido se traduce en el uso de la distribución bicúbica generalizada.

Es importante destacar que, el tiempo de finalización del trabajo estimado por la distribución presentada por Hahn, [41], siempre está comprendido entre los valores aportados por el resto de distribuciones presentadas. Así pues, con las distribuciones introducidas y variando los valores asignados a los parámetros θ y n , siempre se podrá describir una estimación para la duración de la finalización del trabajo, mayor o menor, a la aportada por la distribución U-BETA.

3.5. CONCLUSIÓN

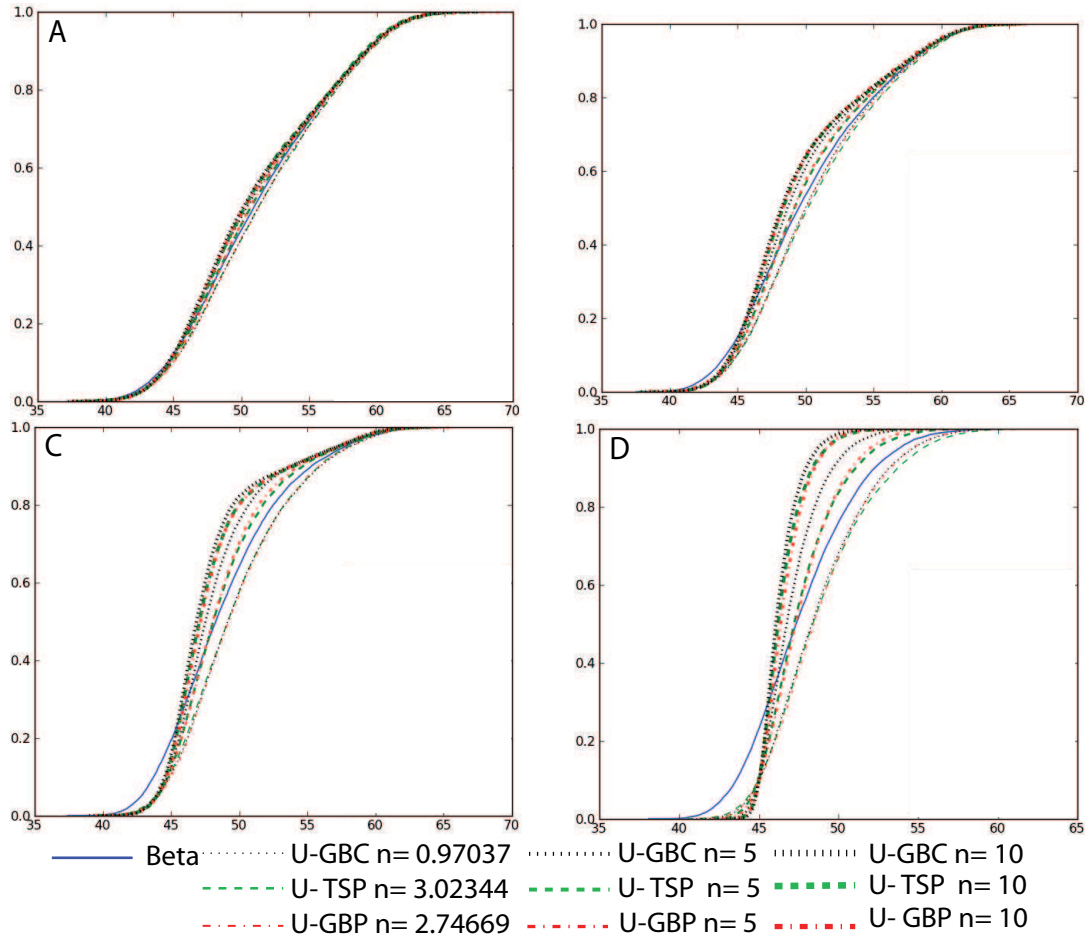


Figura 3.29: Función de distribución elicitada $\theta = 0.25$ (A), $\theta = 0.50$ (B), $\theta = 0.75$ (C), $\theta = 1$ (D).

3.5. CONCLUSIÓN

Con objeto de buscar distribuciones con máxima dispersión y colas pesadas, se ha mostrado en el presente capítulo la construcción de nuevas distribuciones, utilizando como referencia los estudios presentados por Hahn, [41]. Para ello, haciendo uso de la distribución uniforme y las distribuciones bicúbica generalizada, two-sided power y biparabólica generalizada, se han presentado las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP.

La idea fundamental de la utilización de estas tres distribuciones combinadas con la distribución uniforme surge de los resultados teóricos que aporta Hahn, [41].

3.5. CONCLUSIÓN

Con la construcción de la distribución U-BETA, Hahn describe una distribución con una función de densidad más flexible, caracterizada por la presencia de colas más pesadas. Este hecho es de gran interés, ya que se consigue así superar los problemas existentes al trabajar con sucesos anómalos situados en los extremos del intervalo de definición de la variable en estudio.

Es de destacar que la distribución beta, ha sido utilizada habitualmente en ambiente de incertidumbre por conducir a conclusiones más conservadoras. Por ello, teniendo en cuenta esta característica, es lógico pensar que al realizar la mixtura entre esta distribución y la distribución uniforme se siga manteniendo la máxima varianza. Sin embargo, centrandó la atención en el apuntamiento de la distribución beta, se tiene que esta presenta un menor valor para el coeficiente de curtosis, siendo este superado por el de las distribuciones GBC, TSP y GBP, cuando M está próximo a 0.5.

Al realizar el estudio comparativo de las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP, se observa, en la mayoría de las situaciones que la distribución U-BETA presenta un valor de la varianza más elevado. Sin embargo, para ciertos valores de los parámetros n y θ , la distribución U-TSP supera en varianza a la distribución U-BETA. Aún así, los resultados obtenidos con respecto a la varianza de las cuatro distribuciones son bastantes similares, no mostrando grandes diferencias.

Además de no existir conclusiones muy dispares en los valores que aporta la varianza de cada una de las distribuciones, es necesario destacar que cuando se pretende estudiar el apuntamiento o coeficiente de curtosis de las cuatro distribuciones, variando los parámetros n y θ , se tiene que la distribución U-GBC se encuentra en una mayor proporción por encima de las demás. Este hecho va directamente relacionado con la presencia de una colas más pesadas. Como consecuencia de los resultados obtenidos, la distribución U-GBC será adecuada para el estudio de la duración de un proyecto, consiguiendo así solventar los problemas existentes con los valores extremos.

Uno de los principales problemas que se pone de manifiesto en la utilización de la distribución beta, para aplicarla dentro del ámbito del PERT, es la carencia de una expresión analítica de la función de distribución, cerrando este hecho las puertas para su estimación mediante el uso de cuantiles.

3.5. CONCLUSIÓN

Es por ello que, Hahn, [41], propone solicitar más información al experto para poder así estimar el valor correspondiente al parámetro θ . En este proceso de elicitación Hahn solamente se limita a trabajar con la distribución beta clásica, ofreciendo únicamente la elicitación del parámetro θ .

Sin embargo, tal y como se puso de manifiesto en la sección 3.3, a la hora de utilizar las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP para el estudio de un *project management*, estas distribuciones pueden ser elicidadas utilizando, además de los métodos propuestos por Hahn, la alternativa planteada por Kotz y van Dorp, [63].

En el caso de trabajar con las distribuciones clásicas, solamente será necesario tener información adicional sobre el valor de un cuantil, a partir del cual, se conseguirá describir el valor estimado del parámetro θ .

Una de las características más importantes a destacar con la presentación de las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP, es que, a diferencia de la distribución U-BETA, no se limitan al uso de los valores clásicos para el parámetro n . Así pues, utilizando dos cuantiles, y aprovechando la existencia de una expresión cerrada para la función de distribución, se estiman los parámetros n y θ , mediante el uso de métodos numéricos.

Uno de los inconvenientes que conlleva la utilización de este sistema de ecuaciones es la posible carencia de solución. Aún así, recurriendo al método planteado por Hahn, y solicitando más información al experto se describe el valor estimado de θ , y como consecuencia se estima el valor del parámetro n utilizando las expresiones que relacionan ambos parámetros. Este hecho, nos permite elicitar de forma fácil y directa los parámetros θ y n , consiguiendo así describir distribuciones con colas más pesadas y un apuntamiento pronunciado.

Para la realización de la aplicación práctica del presente capítulo, se ha recurrido al ejemplo aportado por Moder et al., [79], siendo este el mismo ejemplo seleccionado por Hahn, [41], para realizar el estudio de la distribución U-BETA dentro de la metodología PERT. Debido a la escasez de información que muestra la red PERT de Moder et al., [79], se proponen distintas situaciones en las que se le asigna al parámetro θ los mismos valores que fueron considerados por Hahn, ($\theta = 0.25$, $\theta = 0.5$, $\theta = 0.75$, $\theta = 1$), y a n los valores 5, 10 y el valor clásico asociado a cada una de las distribuciones.

3.5. CONCLUSIÓN

Comparando los resultados de la distribución U-BETA con los aportados por las distribuciones clásicas U-GBC, U-TSP y U-GBP, se tiene que las distribuciones construidas en el presente capítulo estiman un mayor tiempo de ejecución en la realización del proyecto presentado por Moder et al., [79].

Sin embargo, tomando distintos valores para los parámetros n y θ , se observa que las distribuciones presentadas consiguen describir estimaciones de la variable aleatoria, tiempo empleado en la ejecución de un proyecto, superiores e inferiores a las aportadas por la distribución U-BETA. Así pues, utilizando los valores clásicos se observa que las distribuciones aportan una función de distribución situada por debajo de la asociada a la distribución U-BETA. Sin embargo, considerando $n = 5$ y $n = 10$, las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP, cortan a la distribución U-BETA, dejando bajo ellas un mayor área.

Analizando los intervalos de confianza construidos se tiene que las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP aportan mejores resultados, ya que el error de estimación en estos casos, es menor que los obtenidos con los de la distribución U-BETA. Luego, teniendo en cuenta la necesidad de trabajar con distribuciones definidas en un dominio acotado y que consigan modelar la incertidumbre presente en la metodología PERT, se han presentado las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP como nuevas alternativas para su aplicación en dicho ambiente.

CAPÍTULO 4

TRATAMIENTO DE LA CURTOSIS Y LOS RENDIMIENTOS DE LOS ACTIVOS FINANCIEROS

El comportamiento de los rendimientos de los activos financieros ha sido un tema abordado en la literatura debido a las características que encierran los mercados, Robert, [96], Osborne, [86], Mandelbrot, [72], Moore, [81], y Fama, [29].

Osborne, [86], mostró que los precios de los activos pueden ser considerados como un conjunto de decisiones que forman un equilibrio estadístico, con propiedades similares a las de un conjunto de partículas en mecánica estadística, siendo considerada la distribución normal como el modelo de descripción de dicho equilibrio.

El principal problema presentado en el modelo mostrado por Osborne, [86] era la suposición de que la varianza de las variaciones de las cotizaciones sobre un intervalo de tiempo se comportaba de forma constante. Este hecho, hizo que Praetz, [94] presentara una modificación sobre el modelo, ya que era contradictorio el hecho de que la varianza se mantuviera constante de un año a otro teniendo en cuenta los cambios que sufren los mercados financieros.

El punto de partida del estudio de la distribución de los rendimientos se remonta a principios del siglo XX, cuando Bachelier, [5], propuso un proceso ruido blanco normal o gaussiano para los rendimientos.

Dentro del estudio de los mercados financieros se distinguen dos líneas de investigación, en una de ellas se supone la existencia de un proceso estocástico y por otra, se recurre al conocimiento de la distribución que genera los datos.

Con respecto a la existencia de un proceso estocástico subyacente en la generación de los rendimientos se encuentran los estudios presentados por Clark, [18], Epps y Epps, [25], Mandelbrot y Taylor, [72], Press, [93], Praetz, [94], Westerfield, [118] y Upton y Shannon, [108].

A partir de los estudios propuestos por Bachelier, [5], se consideró que los rendimientos de los activos eran independientes e idénticamente distribuidos en el tiempo, siendo considerada, tradicionalmente, la distribución normal como el principal modelo probabilístico para estudiar el comportamiento de los rendimientos.

Este hecho fue aceptado hasta la década de los sesenta donde diversos autores mostraron estar en desacuerdo en las afirmaciones mantenidas al considerar la distribución normal como distribución subyacente, Mandelbrot, [71], Fama, [27], Press, [93], Praetz, [94], Blattber y Gonedes, [10], Smith, [101], Ball y Torous, [6], Kon, [58] y Gray y French, [37], entre otros.

Los principales problemas presentados por la distribución normal, al considerarla como modelo probabilístico para el ajuste de la distribución empírica de los datos eran, entre otros, la presencia de una curtosis constante igual a tres y unas colas más finas. En la Figura 4.1, se muestra el histograma correspondiente al valor BAS.DE perteneciente al índice bursátil DJ Eurostoxx 50 y, el ajuste obtenido utilizando como distribución subyacente, la distribución normal. Tal y como se observa, la distribución normal no consigue ajustar de una forma adecuada los rendimientos del activo considerado.

Aún así, algunos de los estudios aplicados en el análisis de la economía financiera descansan sobre el supuesto de normalidad, ya que varios de los modelos, que han sido empleados para dicho fin, se sustentan sobre una hipótesis de normalidad. Entre ellos se pueden enumerar los modelos media-varianza, Markowitz [73], o los modelos de valoración de opciones de Black-Scholes, [9].

Debido a los inconvenientes que se presentaban en la utilización de la distribución normal son varios los autores que proponen métodos alternativos para el estudio del comportamiento de los rendimientos de los activos financieros

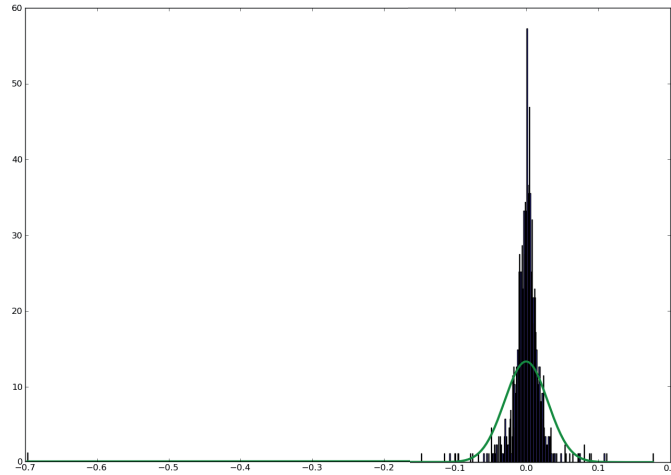


Figura 4.1: Histograma del valor BAS.DE ajustado con la distribución normal (verde)

Realizando una revisión sobre las distribuciones propuestas en la literatura encontramos, entre otras, la distribución *stable Paretian*. Esta distribución fue descrita por Lévy, [67], y más tarde desarrollada por Gnedenko y Kolmogorov, [35]. La familia de distribuciones *stable Paretian* tiene asociada como logaritmo de la función característica la expresión

$$\log f(t) = i\delta t - \gamma|t|^\alpha \left[1 + i\beta \left(\frac{t}{|t|} \right) w(t, \alpha) \right], \quad (4.1)$$

con $t \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ y

$$w(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \log |t| & \alpha = 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

La familia de distribuciones *stable Paretian* es una distribución tetraparamétri-

ca definida a partir de los parámetros δ , γ , β y α . El parámetro δ es el parámetro de localización, γ es el parámetro de escala y β indica el índice de asimetría, con valores comprendidos en el intervalo $[-1, 1]$. En el caso particular en el que el parámetro β toma el valor cero, la distribución es simétrica, si $0 < \beta \leq 1$ la distribución presenta asimetría positiva, siendo más pronunciada cuando el parámetro toma valores cercanos al extremo superior, y si $-1 \leq \beta < 0$, la distribución cambia su asimetría a negativa, presentando su máximo valor cuando β está próximo a -1. El parámetro α es el exponente característico de la distribución, tomando valores en $(0, 2]$. Cuando $0 < \alpha < 2$ la distribución presenta una colas más pesadas que la distribución normal aumentando a medida que α se aproxima a cero. Una de las características más destacables es la presencia de varianzas cuando el parámetro α toma su máximo valor, en caso contrario la distribución carece de varianzas, es decir, si $\alpha \in (0, 2)$ la distribución presenta varianzas infinitas.

La propiedad a resaltar de la distribución es que la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución *stable Paretian* es también una variable con distribución *stable Paretian*.

Fama y Roll, [28], señalaron que tanto la distribución normal como la distribución de Cauchy eran miembros de la familia de distribuciones *stable Paretian* simétrica ($\beta = 0$), ya que:

- si $\delta = \mu$, $\alpha = 2$ y $\gamma = \frac{\sigma^2}{2}$, la expresión se reduce a la función de densidad de la distribución normal,
- en el caso de considerar $\delta = \mu$, $\alpha = 1$ y γ tome el valor del rango semi-intercuartílico se describe la función de densidad de la distribución de Cauchy.

La distribución *stable Paretian* con $\alpha < 2$ fue considerada por varios autores como un modelo adecuado en el ajuste de los rendimientos financieros, entre otros se distinguen Fama, [26], Mandelbrot, [71], Fama, [28], Teichmoelle, [106] y Officer, [85]. Debido a la carencia de una expresión explícita de la función de densidad, la estimación de la distribución encierra algunas dificultades. Este hecho conlleva la utilización de métodos numéricos complejos para el ajuste. Es por ello, que Fama y Roll, [28] propusieron un proceso de estimación para conseguir así, describir los parámetros de la distribución.

Otra distribución ampliamente utilizada en el ajuste de los rendimientos financieros es la distribución t-Student. Fue propuesta por Praetz, [94], Blattberg y Gonedes, [10]. La distribución t-Student fue presentada como una nueva familia de distribuciones simétricas con características muy relevantes con respecto a la presencia de colas más pesadas que las descritas por la distribución normal, consiguiendo así asignar mayor probabilidad a las observaciones extremas. Desde el punto de vista práctico, es necesario señalar que, en el caso de que los grados de libertad de la distribución sean elevados entonces la distribución t-Student converge a una distribución normal, perdiendo algunas de las propiedades que la diferenciaba de la distribución normal.

La principal diferencia existente entre las distribuciones t-Student y *stable Paretian*, es la presencia de una expresión cerrada para la función de densidad asociada a la distribución t-Student, (4.3).

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \sqrt{\pi(v-2)\sigma^2}} \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{(v-2)\sigma^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad (4.3)$$

donde Γ es la función gamma, μ es el parámetro de localización coincidiendo con la esperanza de X cuando $v > 1$, σ es un parámetro de escala, siendo igual a la desviación típica de X si $v > 2$ y v es el parámetro de grados de libertad.

Además de las distribuciones consideradas, han sido propuestas distribuciones alternativas al uso de la distribución normal. La distribución logística se ha empleado en el ajuste de los rendimientos de los activos financieros por Smith, [101], Gray y French, [37] y Peiró, [90]. La función de densidad asociada a una distribución logística queda definida por la expresión:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x-\mu}{\alpha}}}{\alpha \left(1 + e^{\frac{x-\mu}{\alpha}}\right)^2}, \quad (4.4)$$

donde el parámetro μ hace referencia a la media de la variable X y $\alpha = \sqrt{3}\frac{\sigma}{\pi}$.

La propiedad más destacable presentada por la distribución logística es que, además de su gran similitud con la distribución normal, presenta colas más pesadas, consiguiendo así asignar una probabilidad mayor a los sucesos que se

describen en las colas o también conocidos como valores atípicos.

También es destacable la presencia de la distribución *exponential power*, por ser una distribución que presenta además de unas colas más pesadas, un apuntamiento más pronunciado al de la distribución gaussiana. Esta distribución ha sido tratada por varios autores como, por ejemplo, Hsu, [50], Gray y French, [37] y Peiró, [90]. La función de densidad asociada a dicha distribución viene descrita mediante la expresión:

$$f(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{x-\mu}{\alpha}\right|^{\left(\frac{2}{1+\beta}\right)}\right]}{2^{\left(\frac{3+\beta}{2}\right)}\alpha\Gamma\left(\frac{3+\beta}{2}\right)} \quad (4.5)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y β , con $-1 < \beta \leq 1$ son los parámetros de localización, dispersión y apuntamiento de la distribución respectivamente. Cuando el parámetro β toma valores en el intervalo $(0, 1]$ la distribución presenta su mayor apuntamiento, en el caso de que $\beta = 0$ la distribución *exponential power* se reduce a la expresión de la distribución normal.

En la década de los 70, Clark, [18], y Praetz, [94] consideran la distribución de los rendimientos como una mixtura de distribuciones. Praetz, [94] obtuvo la distribución t-Student como la mixtura entre la distribución normal y la distribución gamma invertida. Por otro lado, Madan y Seneta, [69] hicieron uso de la distribución obtenida al realizar la mixtura entre las distribuciones normal y gamma.

Con objeto de modelizar, de una forma adecuada, la curtosis presentada por los rendimientos, la construcción de distribuciones mediante el uso de mixturas alcanza un mayor protagonismo. Además de la distribuciones citadas anteriormente, ha sido utilizada la mixtura entre distribuciones normales, consiguiendo aportar mayor rango de curtosis y colas más pesadas a la distribución, Kon, [58]. A principios del siglo XXI, Pérez-Quirós y Timmermann, [91] presentan la mixtura entre la distribución gaussiana y la distribución t-Student, consiguiendo capturar los valores atípicos, (*outliers*), con un número reducido de grados de libertad.

Siguiendo esta línea, se mostrará en el presente capítulo las distribuciones beta, GBC, two-sided power y GBP, así como su mixtura con la distribución uniforme,

dentro del ámbito financiero analizando con más detalle las distribuciones GBC y U-GBC.

Teniendo en cuenta las características que encierran los histogramas asociados a los rendimientos de los activos financieros, se analiza con mayor profundidad los coeficientes de curtosis asociados a las distribuciones consideradas.

Para finalizar, y recurriendo a la información obtenida del índice bursátil DJ Eurostoxx 50, se presenta una aplicación práctica en la que se realiza el ajuste de los valores considerados con las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP.

4.1. DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO

Como característica principal en el estudio del comportamiento de los rendimientos de los activos financieros se tiene que en la mayoría de los casos la distribución empírica suele situar su valor modal en el cero y presenta poca o ninguna asimetría. Recurriendo al gráfico correspondiente al histograma, se observa que este presenta un apuntamiento muy pronunciado en cero, con poca asimetría y con unas colas más pesadas, véase Figura 4.1.

Los comentarios realizados conduce a plantear la idea de adaptar las distribuciones beta, bicúbica, two-sided power, bipolarabólica y la mixtura de estas con la uniforme al ámbito financiero. Para ello se recurrirá a las expresiones de las funciones de densidad y de distribución asociada a cada una de las distribuciones citadas, definidas todas ellas en el intervalo $[a, b]$, donde a es el valor mínimo y b el valor máximo, ambos aportados por un experto.

Así pues, en la sección 4.1.1 se realiza un estudio exhaustivo de la distribución bicúbica y la distribución U-GBC dentro del ámbito financiero estudiando utilizando sus principales características estocásticas. En la sección 4.1.2 se presentará, de forma resumida, las características más destacables de las restantes distribuciones enmarcándolas en el ámbito financiero para su posterior aplicación en el ajuste de los rendimientos de los activos.

4.1.1. Las distribuciones GBC y U-GBC en el ámbito financiero

4.1.1.1. La distribución bicúbica generalizada en el ámbito financiero

Para la adaptación de las distribuciones en el ámbito financiero se partirá de las expresiones de las distribuciones que han sido descritas en el segundo y tercer capítulo. Para ello recurriendo, en el caso de la distribución bicúbica generalizada, de la expresión (2.45), y teniendo en cuenta la reparametrización $a = -s$, $b = s$ y $m = 0$, se enmarca la distribución en el ambiente financiero.

Así pues, teniendo en cuenta las anotaciones realizadas, se tiene que la función de densidad de la distribución bicúbica en el ámbito financiero viene descrita por la siguiente expresión:

$$f(z) = \frac{1}{2s} \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6} \begin{cases} \left(\frac{z+s}{s}\right)^{2+n} - \frac{2}{3} \left(\frac{z+s}{s}\right)^{3+n} & -s \leq z \leq 0, \\ \left(\frac{s-z}{s}\right)^{2+n} - \frac{2}{3} \left(\frac{s-z}{s}\right)^{3+n} & 0 \leq z \leq s. \end{cases} \quad (4.6)$$

En el caso particular de considerar el valor cero para el parámetro n en la expresión (4.6), se describe la expresión correspondiente a la distribución bicúbica, introducida en la sección 2.1.

La función de distribución asociada a la expresión (4.6) viene dada por:

$$F(z) = \begin{cases} \frac{A}{2} \left[\left(\frac{z+s}{s}\right)^{n+3} B - \frac{2}{3} \left(\frac{z+s}{s}\right)^{n+4} C \right] & -s \leq z \leq 0, \\ 1 + \frac{A}{2} \left[\left(\frac{s-z}{s}\right)^{n+3} B - \frac{2}{3} \left(\frac{s-z}{s}\right)^{n+4} C \right] & 0 \leq z \leq s, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde $A = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6}$, $B = \frac{1}{n+3}$ y $C = \frac{1}{n+4}$.

Para tener una visión más general del comportamiento de la distribución bicúbica en el ámbito financiero se recoge en la Figura 4.2 la representación gráfica de la función de densidad (4.6), para distintos valores de los parámetros.

Tal y como se aprecia, la distribución disminuye su apuntamiento a medida que aumenta la amplitud del intervalo de definición de la variable aleatoria considerada. Además, teniendo en cuenta la información aportada por la Figura 4.2, se observa que al aumentar el valor del parámetro n , la distribución alcanza

en el origen de coordenadas su máxima ordenada, consiguiendo así describir distribuciones con un apuntamiento más elevado

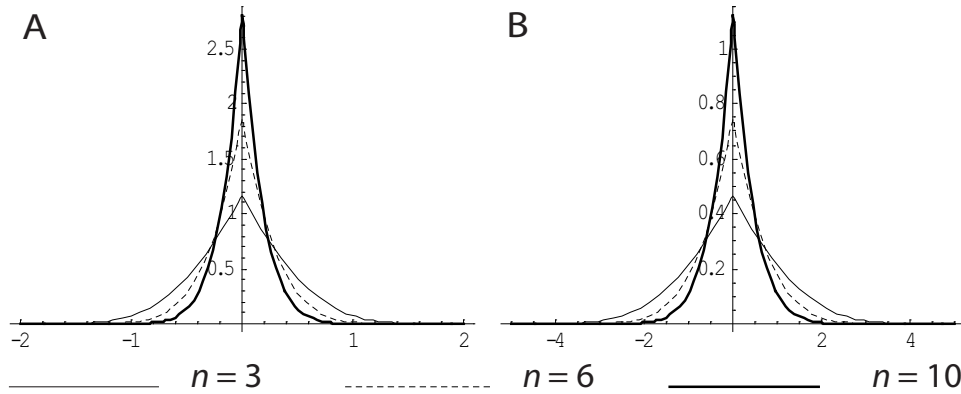


Figura 4.2: Función de densidad de la distribución GBC en el ámbito financiero con dominio de definición $[-2, 2]$, **(A)** y $[-5, 5]$, **(B)**.

Con objeto de aportar mayor información sobre la distribución bicúbica, se presentan a continuación sus principales características estocásticas. La reparametrización considerada, sobre los parámetros iniciales de la distribución, permite describir una distribución cuyo valor esperado y coeficiente de asimetría toman el valor cero.

$$E[Z] = 0, \tag{4.8}$$

$$\text{var}[Z] = \frac{2s^2(n+12)}{(n+5)(n+6)^2}, \tag{4.9}$$

$$\beta_1 = 0, \tag{4.10}$$

$$\beta_2 = \frac{6(n+5)(n+6)^2(n+18)}{(n+7)(n+8)(n+12)^2}. \tag{4.11}$$

Centrando la atención en el estudio del coeficiente de curtosis se observa que el apuntamiento asociado a la distribución únicamente depende del parámetro n . Este hecho, añadido con que la varianza depende de s y n , hace pensar en desarrollar un método alternativo de estimación. Para ello, utilizando la información muestral y las expresiones correspondientes a la varianza y coeficiente

de curtosis, se describe un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas a obtener son los parámetros a estimar de la distribución.

4.1.1.2. La distribución U-GBC en el ámbito financiero

Uno de los principales inconvenientes que implica el uso de la distribución normal en el ámbito financiero, además de presentar un coeficiente de curtosis inferior al descrito por los datos empíricos, es la presencia de unas colas delgadas, no consiguiendo así ajustar aquellos valores que se sitúan en los extremos del intervalo (*outliers*).

Por ello, partiendo de las conclusiones obtenidas en el tercer capítulo sobre el estudio de la distribución U-GBC, se presenta a continuación la adaptación de este modelo dentro del ámbito financiero para conseguir así, solventar los inconvenientes presentados por la distribución gaussiana.

Así pues, recurriendo a las transformaciones consideradas en el caso de la distribución bicúbica generalizada, se describe la expresión correspondiente a la función de densidad, (4.12), y la función de distribución, (4.13), asociada a la distribución U-GBC.

$$f(z) = \frac{1}{2s} \begin{cases} \theta A \left[\left(\frac{z+s}{s} \right)^{2+n} - \frac{2}{3} \left(\frac{z+s}{s} \right)^{3+n} \right] + (1-\theta) & -s \leq z \leq 0, \\ \theta A \left[\left(\frac{s-z}{s} \right)^{2+n} - \frac{2}{3} \left(\frac{s-z}{s} \right)^{3+n} \right] + (1-\theta) & 0 \leq z \leq s, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$F(z) = \begin{cases} \left(\frac{z+s}{2s} \right) \left[\theta \left(B \left(\frac{z+s}{s} \right)^{2+n} - C \left(\frac{z+s}{s} \right)^{3+n} \right) + (1-\theta) \right] & -s \leq z \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{s-z}{2s} \right) \left[\theta \left(B \left(\frac{s-z}{s} \right)^{2+n} - C \left(\frac{s-z}{s} \right)^{3+n} \right) + (1-\theta) \right] & 0 \leq z \leq s, \end{cases} \quad (4.13)$$

donde $A = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6}$, $B = \frac{3(n+4)}{n+6}$ y $C = \frac{2(n+3)}{n+6}$.

Utilizando la información arrojada por los gráficos recogidos en el Figura 4.3, se observa que el apuntamiento de la distribución va asociado al valor del parámetro n , ya que a medida que este aumenta la distribución presenta un coeficiente de curtosis más elevado.

Si se realiza el estudio comparativo entre los gráficos obtenidos con la

4.1. DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO

distribución GBC y los descritos por la distribución U-GBC, se observa, como principal diferencia existente entre ellos, la presencia de unas colas más pesadas en el caso de trabajar con la distribución resultante al realizar la mixtura. De esta manera, se consigue describir distribuciones que permiten el ajuste de los valores atípicos con mayor apuntamiento.

Este hecho, nos conduce a considerar a la distribución U-GBC como un modelo alternativo en el ajuste de los rendimientos de los activos financieros por presentar distintas intensidades en su apuntamiento y por asignar una mayor probabilidad a los valores extremos.

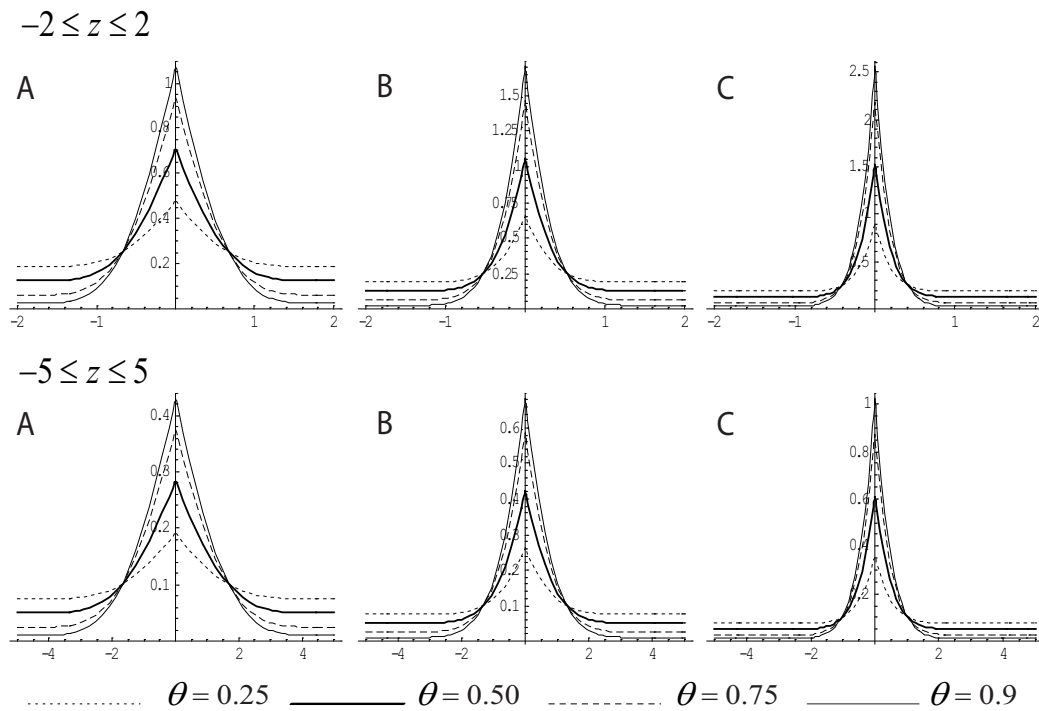


Figura 4.3: Función de densidad de la distribución U-GBC en el ámbito financiero para $n = 3$ (A), $n = 6$ (B) y $n = 10$ (C).

Analizando las características estocásticas asociadas a la distribución U-GBC dentro del ámbito financiero, se observa que la distribución presenta un valor esperado nulo, siendo además simétrica por tomar el coeficiente de asimetría el valor cero.

$$E[Z] = 0, \quad (4.14)$$

$$\text{var}[Z] = \frac{s^2[n^3 + 17n^2 + 96n + 180 - (n^3 + 17n^2 + 90n + 108)\theta]}{3(n+5)(n+6)^2}, \quad (4.15)$$

$$\beta_1 = 0, \quad (4.16)$$

$$\beta_2 = \frac{9(n+5)(n+6)^2(A - B\theta)}{5(n+7)(n+8)(C - D\theta)^2}. \quad (4.17)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= n^5 + 32n^4 + 407n^3 + 2572n^2 + 8076n + 10080, \\ B &= n^5 + 32n^4 + 407n^3 + 2572n^2 + 7956n + 7920, \\ C &= n^3 + 17n^2 + 96n + 180, \\ D &= n^3 + 17n^2 + 90n + 108. \end{aligned}$$

A modo de conclusión, señalar que la distribución U-GBC puede ser considerado como un modelo probabilístico para su aplicación en el ámbito financiero por presentar algunas de las características que se describen en los mercados financieros.

4.1.2. Otras distribuciones en el ámbito financiero

Como consecuencia a los resultados obtenidos en el estudio de las distribuciones beta, two-side power y biparabólica generalizada, así como los descritos por la mixtura de estas distribuciones con la distribución uniforme, se plantea la idea de enmarcarlas dentro del ámbito financiero para así poder ser utilizadas en la aplicación práctica que se presentará en la sección 4.3 del presente capítulo.

Utilizando el procedimiento mostrado en la adaptación de la distribución bicúbica generalizada y su mixtura con la distribución uniforme en el ámbito financiero, se presentan a continuación las expresiones correspondientes de las funciones de densidad y de distribución asociadas a cada una de la distribuciones.

4.1. DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO

Distribución beta	
F.densidad	$p(z k, s) = \frac{\Gamma(2+k)}{\Gamma(1+\frac{k}{2})\Gamma(1+\frac{k}{2})} \frac{(z+s)^{k/2}(s-z)^{k/2}}{(2s)^{k+1}}$
Distribución TSP	
F.densidad	$f(z) = \frac{n}{2} \begin{cases} \left(\frac{z+s}{s}\right)^{n-1} & -s \leq z \leq 0, \\ \left(\frac{s-z}{s}\right)^{n-1} & 0 \leq z \leq s. \end{cases}$
F.distribución	$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{z+s}{s}\right)^n & -s \leq z \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{s-z}{s}\right)^n & 0 \leq z \leq s. \end{cases}$
Distribución GBP	
F.densidad	$f(z) = \frac{A}{2s} \begin{cases} \left(\frac{z+s}{s}\right)^{2n} - 2 \left(\frac{z+s}{s}\right)^n & -s \leq z \leq 0, \\ \left(\frac{s-z}{s}\right)^{2n} - 2 \left(\frac{s-z}{s}\right)^n & 0 \leq z \leq s, \end{cases}$ donde $A = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1}$.
F.distribución	$F(z) = \begin{cases} A \left[\left(\frac{z+s}{s}\right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} - 2 \left(\frac{z+s}{s}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right] & -s \leq z \leq 0, \\ 1 - A \left[\left(\frac{s-z}{s}\right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} - 2 \left(\frac{s-z}{s}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right] & 0 \leq z \leq s, \end{cases}$ donde $A = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1}$.

Cuadro 4.1: Expresiones de las funciones asociadas a las distribuciones beta, TSP y GBP.

Con el objeto de no extendernos en las características estocásticas que presentan las distribuciones en el ámbito financiero, se muestra en el Anexo A las expresiones correspondientes al valor esperado, varianza, coeficiente de asimetría y de curtosis.

En la Figura 4.4, se recoge el estudio comparativo correspondiente a las funciones de densidad de cada una de las distribuciones consideradas. Se observa que la distribución two-sided power dentro del ámbito financiero se caracteriza por que presentar mejores resultados con respecto a su apuntamiento, cuando el dominio de definición de la variable es el intervalo $[-2, 2]$ y para valores de n elevados.

4.1. DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO

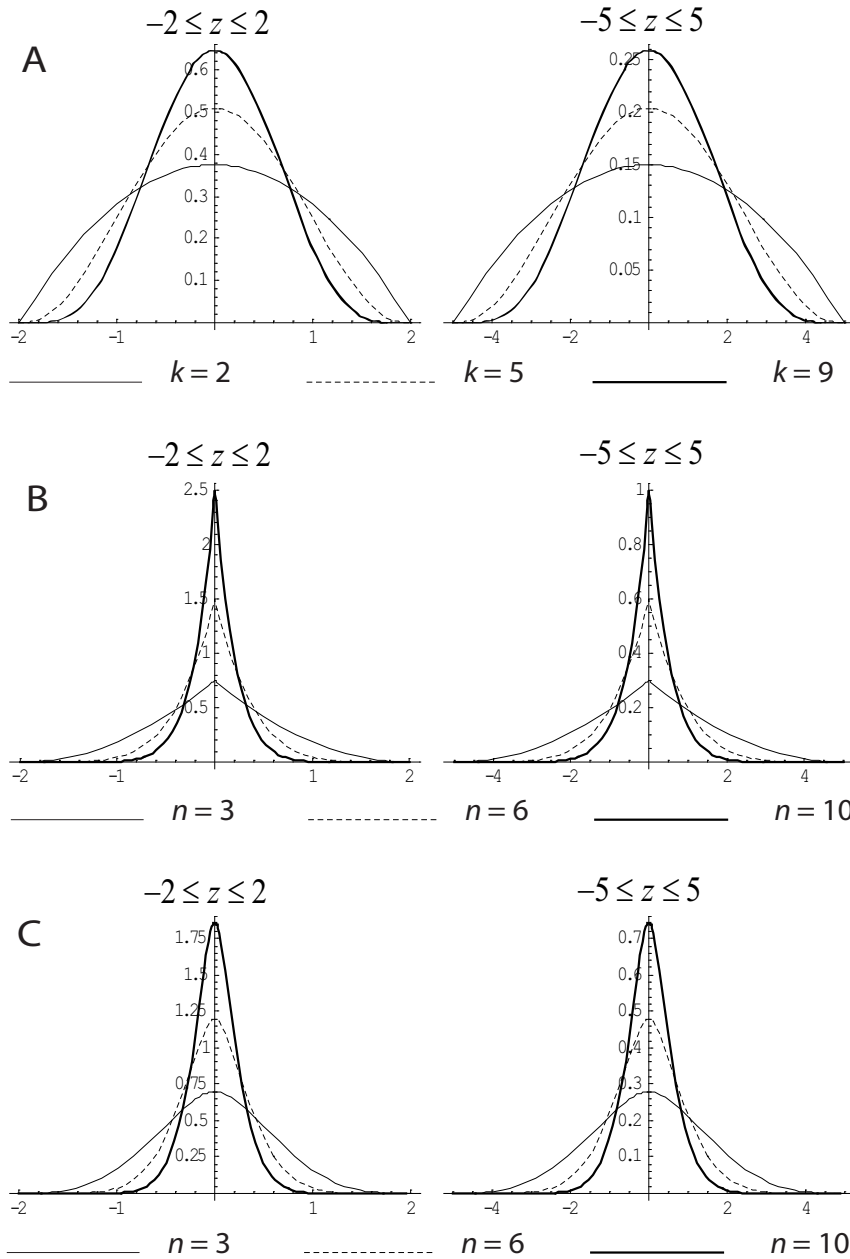


Figura 4.4: Función de densidad de las distribuciones beta (A), two-sided power (B) y GBP (C) en el ámbito financiero.

Sin embargo, centrando la atención en el estudio de las colas, se comprueba que la distribución beta consigue asignar mayor probabilidad a los sucesos situados en los extremos del intervalo de definición. En el caso particular de la distribución

4.1. DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO

GBP se observa que asigna una probabilidad a los sucesos extremos y presenta un coeficiente de curtosis con valores comprendidos entre los aportados por las distribuciones beta y TSP.

Así pues, teniendo en cuenta el comportamiento y las características presentadas por la distribución empírica, se seleccionará aquella distribución que tenga una mayor relación con los datos muestrales, para poder así realizar los ajustes tan deseados y entender por qué ocurren ciertos fenómenos en los mercados financieros.

Recurriendo al uso de las distribuciones mixturas se presentan en el Cuadro 4.2 las expresiones de sus funciones más características. En las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 se recogen los gráficos asociados a las funciones de densidad de las distribuciones financieras U-BETA, U-TSP y U-GBP.

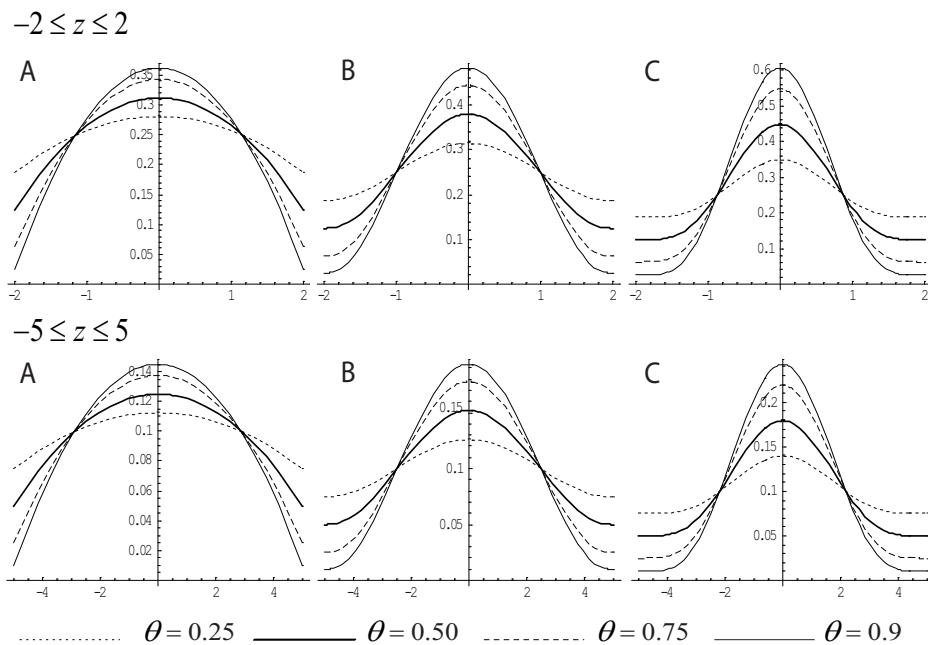


Figura 4.5: Función de densidad de la distribución U-BETA en el ámbito financiero para $n = 3$ (A), $n = 6$ (B) y $n = 10$ (C).

4.1. DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO

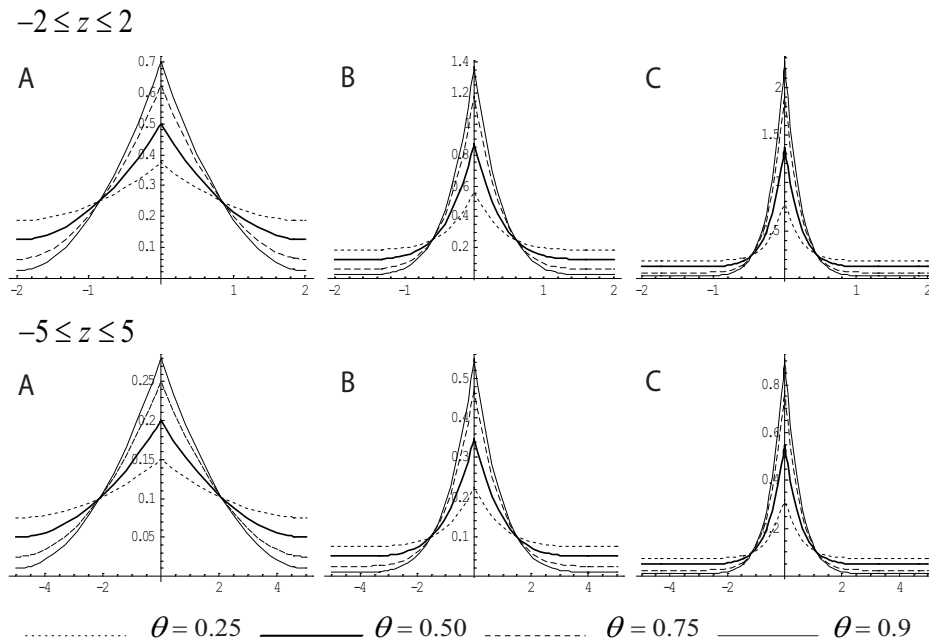


Figura 4.6: Función de densidad de la distribución U-TSP en el ámbito financiero para $n = 3$ (A), $n = 6$ (B) y $n = 10$ (C).

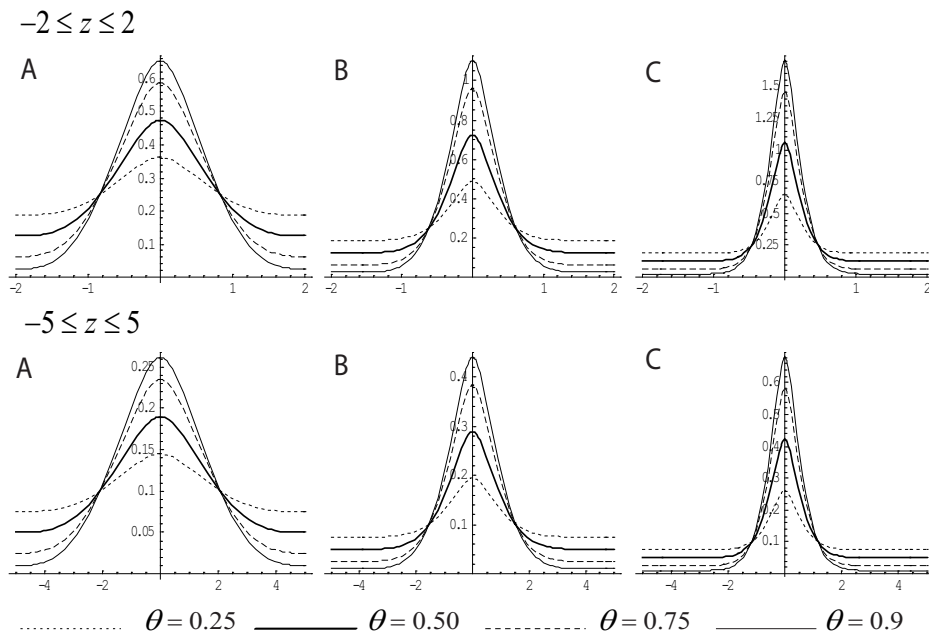


Figura 4.7: Función de densidad de la distribución U-GBP en el ámbito financiero para $n = 3$ (A), $n = 6$ (B), y $n = 10$ (C)

4.1. DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO

Distribución U-BETA	
F.densidad	$p(z \theta, k, s) = \theta \frac{\Gamma(2+k)}{\Gamma(1+\frac{k}{2})\Gamma(1+\frac{k}{2})} \frac{(z+s)^{k/2}(s-z)^{k/2}}{(2s)^{k+1}} + (1-\theta)\frac{1}{2s}.$
Distribución U-TSP	
F.densidad	$f(z) = \frac{1}{2s} \begin{cases} \theta n \left(\frac{z+s}{s}\right)^{n-1} + (1-\theta) & -s \leq z \leq 0, \\ \theta n \left(\frac{s-z}{s}\right)^{n-1} + (1-\theta) & 0 \leq z \leq s. \end{cases}$
F.distribución	$F(z) = \begin{cases} \frac{z+s}{2s} \left[\theta \left(\frac{z+s}{s}\right)^{n-1} + (1-\theta) \right] & -s \leq z \leq 0, \\ 1 - \frac{s-z}{2s} \left[\theta \left(\frac{s-z}{s}\right)^{n-1} + (1-\theta) \right] & 0 \leq z \leq s. \end{cases}$
Distribución U-GBP	
F.densidad	$f(z) = \frac{1}{2s} \begin{cases} \theta A \left[\left(\frac{z+s}{s}\right)^{2n} - 2 \left(\frac{z+s}{s}\right)^n \right] + (1-\theta) & -s \leq z \leq 0, \\ \theta A \left[\left(\frac{s-z}{s}\right)^{2n} - 2 \left(\frac{s-z}{s}\right)^n \right] + (1-\theta) & 0 \leq z \leq s, \end{cases}$ <p style="text-align: center;">donde $A = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1}$.</p>
F.distribución	$F(z) = \begin{cases} \frac{z+s}{2s} \left[\theta \left(A \left(\frac{z+s}{s}\right)^{2n} - B \left(\frac{z+s}{s}\right)^n \right) + (1-\theta) \right] & -s \leq z \leq 0, \\ 1 - \frac{s-z}{2s} \left[\theta \left(A \left(\frac{s-z}{s}\right)^{2n} - B \left(\frac{s-z}{s}\right)^n \right) + (1-\theta) \right] & 0 \leq z \leq s, \end{cases}$ <p style="text-align: center;">donde $A = \frac{n+1}{-3n-1}$ y $B = \frac{2(2n+1)}{-3n-1}$.</p>

Cuadro 4.2: Expresiones de las funciones de densidad y de distribución de las distribuciones U-BETA, U-TSP y U-GBP.

Partiendo de los valores considerados, en la representación gráfica de las funciones de densidad de cada una de las distribuciones presentadas, se tiene que la distribución U-TSP con $n = 10$ y $\theta = 0.9$ presenta un apuntamiento más pronunciado que las demás distribuciones. La principal diferencia existente entre ellas es la presencia de un coeficiente de curtosis menor o mayor en función del valor de los parámetros considerados.

Con respecto al estudio de las colas pesadas se tiene que la presencia del parámetro θ juega el mismo papel en todas las distribuciones consideradas, es decir,

las distribuciones U-BETA, U-TSP y U-GBP asignan la misma probabilidad a los sucesos situados en los extremos del intervalo independientemente del valor considerado para dicho parámetro.

4.2. TRATAMIENTO DE LA CURTOSIS

Teniendo en cuenta las características de apuntamiento y simetría presentadas por los rendimientos en los mercados financieros, se muestra, a continuación, el estudio comparativo de los coeficientes de curtosis de las distribuciones empleadas habitualmente en el ámbito financiero para el ajuste de los activos y las presentadas a lo largo de esta memoria.

Para ello se ha considerado el caso particular en el que las distribuciones son simétricas. Luego, partiendo de los coeficientes de curtosis de las distribuciones estandarizadas en $[0, 1]$ y asignando a M el valor 0.5, se describen las expresiones correspondientes a dicha característica estocástica.

$$\beta_{2_{normal}} = 3, \quad (4.18)$$

$$\beta_{2_{Laplace}} = 6, \quad (4.19)$$

$$\beta_{2_{beta}} = \frac{3(n+2)}{n+4}, \quad (4.20)$$

$$\beta_{2_{SGBC}} = \frac{6(n+5)(n+6)^2(n+18)}{(n+12)^2(n^2+15n+56)}, \quad (4.21)$$

$$\beta_{2_{STSP}} = \frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}, \quad (4.22)$$

$$\beta_{2_{SGBP}} = \frac{10206(2n^2+9n+9)AB}{(45n^4+186n^3+237n^2+96n+12)^2}, \quad (4.23)$$

$$A = (n+0.1496)(n^2+0.1126n+0.4467)(n^2+0.2787n+0.0347),$$

$$B = (n^2+2.9711n+7.0754)(n^2+7.869n+17.2061)$$

$$C = 2n^3 + 23n^2 + 85n + 100.$$

4.2. TRATAMIENTO DE LA CURTOSIS

En la Figura 4.8, se observa que el rango de curtosis que aportan, como máximo, las distribuciones consideradas, es de 6. Aún así, teniendo en cuenta los resultados mostrados por el gráfico cabe destacar los conseguidos con la distribución bicúbica, ya que este coeficiente de curtosis solamente se ve superado por el de la distribución de Laplace simétrica.

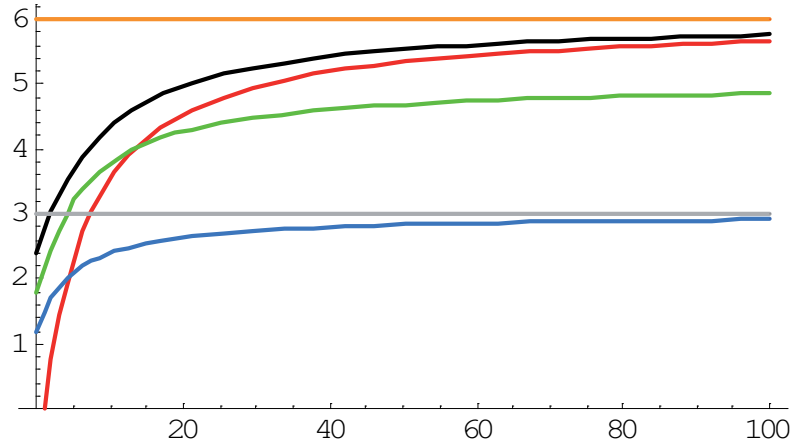


Figura 4.8: Coeficiente de curtosis de la distribución beta (azul), distribución normal (gris), distribución GBP (verde), distribución TSP (roja), distribución GBC (negra) y distribución de Laplace (naranja).

Luego, considerando las características que encierran los rendimientos de los activos financieros, se considerará aquella distribución que presente un comportamiento similar al adoptado por los datos muestrales.

Una vez presentados los coeficientes asociados a cada una de las distribuciones, se muestra, a continuación las expresiones asociadas a los coeficientes de curtosis de las distribuciones simétricas U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP.

$$\beta_{2_{U-BETA}} = \frac{(n+1)^4(n+2)^2(-0.1875 + A - 2B + C + D)}{[0.0833(n+1)^2(n+2) - 0.0833(n-1)(n+1)^2\theta]^2}, \quad (4.24)$$

$$A = \frac{1-\theta}{5},$$

$$B = \frac{0.5 + 0.125\theta(1-n)}{n+2},$$

$$C = \frac{6 + (n - 1)(4 + n - 0.25\theta(n + 1))}{2(n + 1)(n + 2)},$$

$$D = \frac{\theta\Gamma(4.5 + 0.5n)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(0.5 + 0.5n)\Gamma(5 + n)},$$

$$\beta_{2U-SGBC} = \frac{1.8[ABC - DEF\theta]}{(n + 7)(n + 8)[(n + 5)^2(n + 6)^2 - (n + 5)G\theta]^2}, \quad (4.25)$$

$$A = (n + 4.9651)(n + 5.0386)(n + 5.9412),$$

$$B = (n + 6.0557)(n + 7)(n + 8),$$

$$C = (n^2 + 9.9963n + 24.9828)(n^2 + 12.0031n + 36.0216),$$

$$D = (n + 1.7385)(n + 5.0020)(n + 5.9999)(n + 6.0001),$$

$$E = (n^2 + 9.9980n + 24.9902)(n^2 + 10.5567n + 44.8926),$$

$$F = n^2 + 19.7048n + 101.48,$$

$$G = (n + 1.6810)(n^2 + 15.3191n + 64.2495),$$

$$\beta_{2U-STSP} = \frac{9A(n + 1)[AB - (n - 1)(n + 6)(n^2 + 5n + 16)\theta]}{5B[A - (n + 4)(n - 1)\theta]^2}, \quad (4.26)$$

$$A = (n + 1)(n + 2),$$

$$B = (n + 3)(n + 4),$$

$$\beta_{2U-SGBP} = \frac{9(n + 3)(2n + 3)[A + B\theta(C + D + E + F)]}{5(n + 4)(n + 5)(2n + 5)[G + H\theta]^2}, \quad (4.27)$$

$$A = (n + 2)^4(n + 3)(n + 4)(n + 5)(2n + 3)(2n + 5)(3n + 1)^4,$$

$$B = 4n^2(n + 2)^3(3n + 1)^3,$$

$$C = -11.25(n + 1)(n + 3)^2(2n + 1)(2n + 3),$$

$$D = 7.5(2n + 1)(6n^4 + 51n^3 + 168n^2 + 257n + 158),$$

$$E = 15(2n + 1)(2n^4 + 17n^3 + 66n^2 + 131n + 104),$$

$$F = (n + 2)(12n^4 + 56n^3 + 149n^2 - 104n - 713),$$

$$G = (n + 2)^2(n + 3)(2n + 3)(3n + 1)^2,$$

$$H = 2n^2(n + 2)(3n + 1)(-3n^2 - 20.5n - 24.5).$$

4.2. TRATAMIENTO DE LA CURTOSIS

En los gráficos recogidos en la Figura 4.9 sobre los coeficientes de curtosis de las distribuciones mixtura, se observa que a medida que el parámetro θ toma valores más elevados, el recorrido del coeficiente aumenta considerablemente en los casos de las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP. Además, es de señalar que, en el caso particular de trabajar con $\theta = 0.99$, se obtiene que el coeficiente alcanza valores próximos a 160.

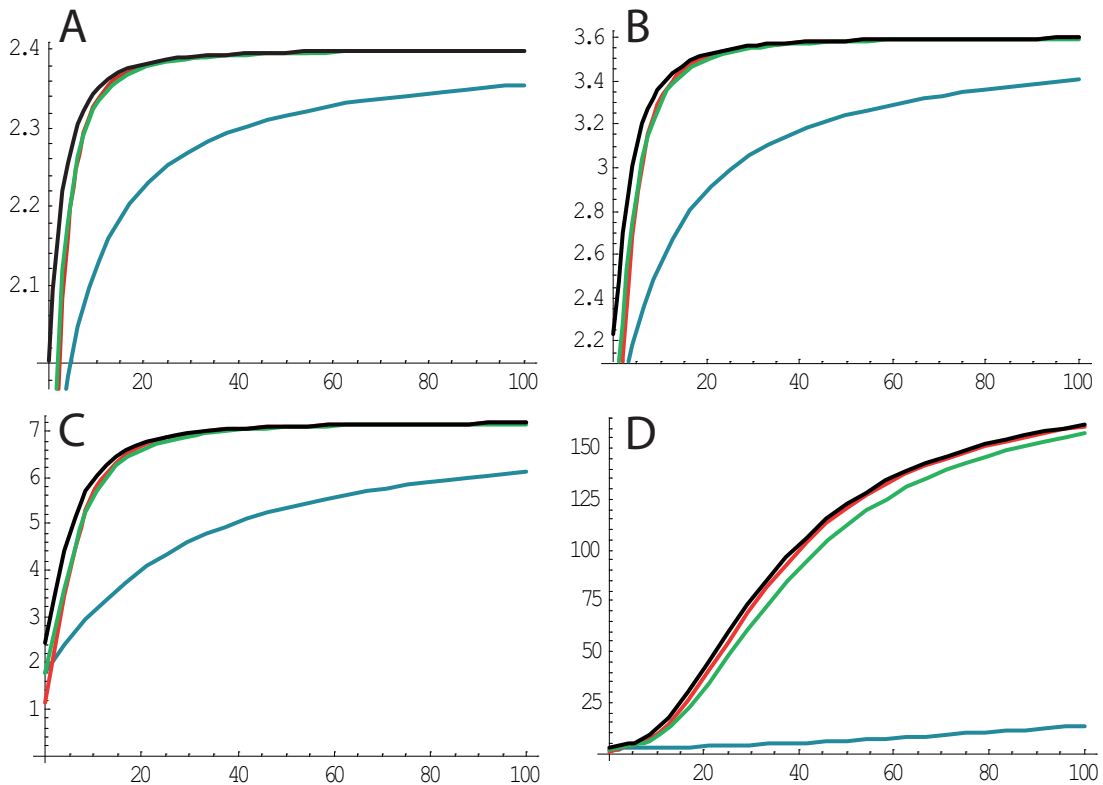


Figura 4.9: Coeficiente de curtosis de la distribución U-BETA (azul), distribución U-GBC (negra), distribución U-TSP (roja) y distribución U-GBP (verde) para $\theta = 0.25$ (A), $\theta = 0.5$ (B), $\theta = 0.75$ (C) y $\theta = 0.99$ (D).

Esta característica es de gran interés, ya que es habitual encontrar en los mercados financieros rendimientos con un apuntamiento muy pronunciado, siendo en ocasiones superior a 200 como sucede en algunos de los valores considerados en la realización de la aplicación práctica. Es por ello, que en la aplicación práctica se considerarán las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP, como las principales candidatas para la realización de los ajustes.

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

4.3.1. Estimación de las distribuciones

Los índices bursátiles cobran cada vez más importancia en los mercados financieros por su eficacia para valorar la evolución del mercado. Son considerados como un sistema de medición estadístico sobre los precios de las acciones que reflejan la evolución del conjunto de acciones más representativo de cada mercado, Miralles y Miralles [77].

A lo largo de la historia se han desarrollado numerosos índices bursátiles. El índice Dow Jones Industrial Average fue creado en 1884 y es considerado como uno de los índices más antiguos. Fue elaborado por la empresa Dow Jones y está formado por los treinta valores más importantes del mercado financiero, siendo uno de los índices bursátiles más empleados en la bolsa de New York. Hay que destacar que tanto Microsoft como Intel no pertenecen a este índice ya que forman parte del índice Nasdaq 100, índice de referencia en el sector tecnológico y que integra a las 100 mayores empresas de software, hardware y telecomunicaciones de Estados Unidos.

Entre los índices creados más recientemente se encuentra DJ Eurostoxx 50, establecido el 26 de febrero de 1998. Es un índice de referencia de la bolsa de la Eurozona y, a diferencia del índice Dow Jones, es un índice ponderado por capitalización bursátil, no teniendo el mismo peso las 50 empresas que lo forman.

Además de los índices comentados, se pueden encontrar el índice CAC 40, siendo este uno de los índices más importantes de la bolsa francesa y formado por los cuarenta valores con mayor capitalización y volumen del mercado francés.

Dentro del mercado español destaca la presencia del índice IBEX 35, formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en la Bolsa Española. Es un índice ponderado por capitalización bursátil, no teniendo todas las empresas que lo forman, el mismo peso, al igual que sucede con el DJ Eurostoxx 50.

Utilizando como referencia el índice DJ Eurostoxx 50, se realizará una aplicación práctica sobre los valores que lo componen. Teniendo en cuenta las particularidades que encierran los mercados financieros se realiza un estudio de las características estocásticas más destacables del DJ Eurostoxx 50, así como el

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

ajuste con cada una de las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP.



Figura 4.10: Evolución DJ Eurostoxx 50 desde mayo 2005 hasta marzo 2009.

Con el objeto de solventar el problema existente en el ajuste de rendimientos que presentan curtosis elevadas y mostrar los resultados que se pueden conseguir con las distribuciones mixturas, se seleccionará de entre las 50 empresas que intervienen en el índice DJ Eurostoxx 50 aquellas que muestren un apuntamiento significativo.

La muestra considerada en la realización de la aplicación práctica está constituida por los valores diarios de las 50 empresas. El periodo de recolección de los datos muestrales abarca desde mayo del 2005 a marzo del 2009. Durante el periodo considerado se ha tenido en cuenta la eliminación de los fines de semana y festivos, consiguiendo así describir muestras de tamaño 1000¹.

La variable de estudio, tal y como indica Fama [27], es

$$R_t = \ln \left(\frac{p_t}{p_{t-1}} \right) \quad (4.28)$$

donde p_t es el valor en el periodo t , con $t = 1, 2, \dots$ y \ln indica el logaritmo

¹Para los valores AH.AS y UNA.AS la muestra está formada por un número menor de datos y los valores EOA.DE y TEF.MC no se han incluido por la escasez de información. En el caso del valor FORA.AS el periodo de estudio va comprendido desde marzo del 2005 hasta enero del 2009.

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

neperiano. Por tanto, a partir de los valores obtenidos de los índices, se realiza el logaritmo neperiano del cociente del valor en un periodo t entre el valor del periodo anterior, $t - 1$.

En las Figuras 4.11 y 4.12 se presentan los gráficos correspondientes a la evolución de los valores BAS y FORA en el periodo seleccionado. En ellos se observa que, a mediados del año 2008, los valores considerados presentan un decrecimiento pronunciado, describiendo así rendimientos elevados (en valor absoluto) en el periodo comentado.

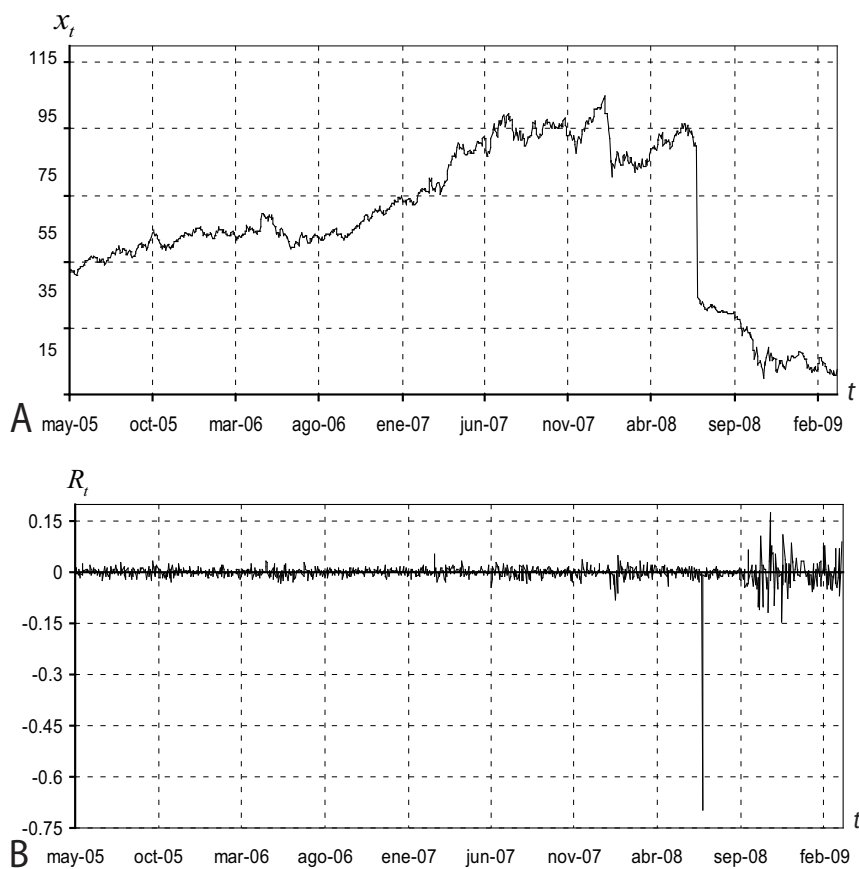


Figura 4.11: Evolución del valor BAS (A) y su diferencia logarítmica (B) desde mayo del 2005 hasta marzo del 2009.

Comparando las Figuras 4.11 y 4.12 con la evolución del DJ Eurostoxx 50, Figura 4.10, se tiene que el índice presentó una variación notable en dicho periodo

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

disminuyendo considerablemente. Esta época coincide con el inicio de la *recesión* de los mercados financieros.

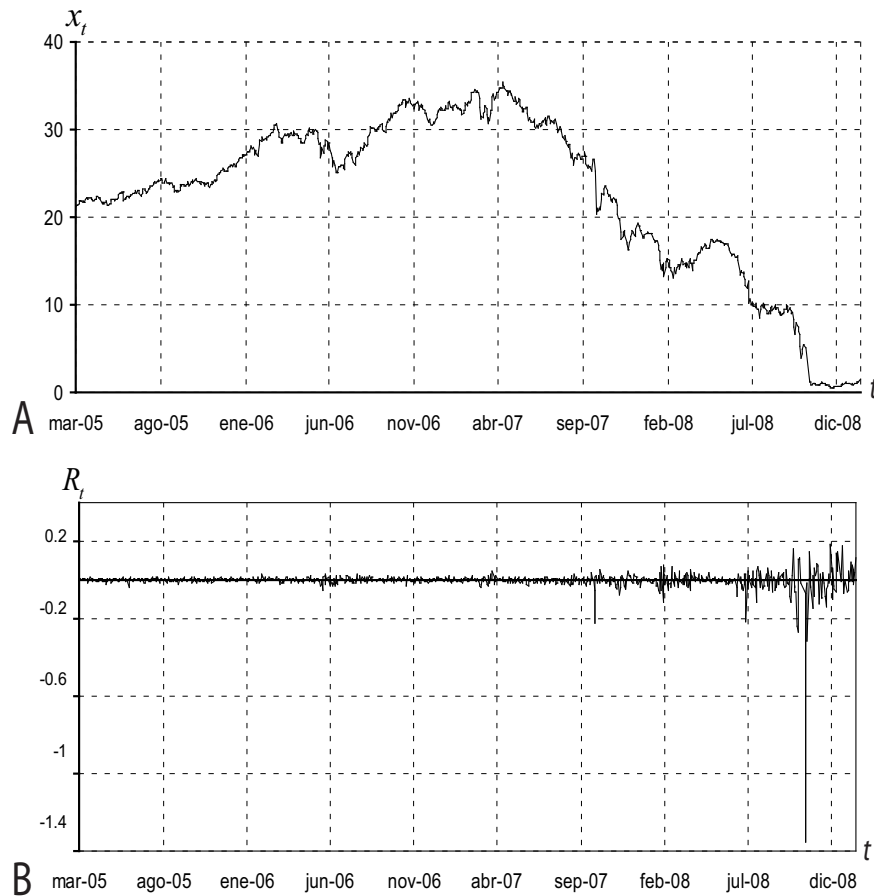


Figura 4.12: Evolución del valor FORA (A) y su diferencia logarítmica (B) desde marzo del 2005 hasta enero del 2009.

Tal y como es conocido, el histograma asociado a los rendimientos financieros además de presentar un apuntamiento muy pronunciado en su punto modal es habitual que presente poca o ninguna asimetría. Es por ello, que se presentará el estudio de simetría de cada uno de los valores extraídos del índice bursátil DJ Eurostoxx 50 haciendo uso del test de Wilcoxon.

Para realizar el estudio de los valores pertenecientes al índice DJ Eurostoxx 50 se muestra a continuación algunas de sus principales características como por ejemplo, el tamaño muestral seleccionado, su media, varianza, coeficientes de

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

asimetría y curtosis.

Valor	N	Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
AABA.AS	1000	0.0007	0.0001	0.8350	12.8770
ACA.PA	1000	-0.0011	0.0008	0.4651	11.3974
AGN.AS	1000	-0.0014	0.0013	0.3197	19.7918
AH.AS	392	-0.0002	0.0005	0.2351	5.3378
AI.PA	1000	-0.0001	0.0013	0.8118	302.1415
AIB.IR	1000	-0.0037	0.0029	-4.7290	82.7145
ALV.DE	1000	-0.0006	0.0007	0.9950	17.1758
BAS.DE	1000	-0.0008	0.0009	-12.4547	293.4912
BAY.DE	1000	0.0004	0.0004	-0.1907	8.1532
BBVA.MC	1000	-0.0008	0.0004	-0.0705	11.2882
BN.PA	1000	$-2 \cdot 10^{-5}$	0.0003	-0.0068	7.4199
BNP.PA	1000	-0.0007	0.0007	0.3666	14.5867
CA.PA	1000	-0.0004	0.0003	-0.4367	8.8683
ALU.PA	1000	-0.0021	0.0008	-0.4987	9.7726
CS.PA	1000	-0.0010	0.0045	0.1298	316.7535
DAI.DE	1000	-0.0004	0.0006	0.4374	13.0047
DBK.DE	1000	-0.0010	0.0009	0.3906	15.5404
DTE.DE	1000	-0.0005	0.0003	0.1885	16.2518
ELE.MC	1000	0.0002	0.0003	0.3511	11.5290
ENEL.MI	1000	-0.0007	0.0003	0.1367	21.1147
ENI.MI	1000	-0.0004	0.0004	0.9485	18.8679
FORA.AS	1000	-0.0027	0.0029	-15.9017	390.9969
FP.PA	1000	-0.0001	0.0004	0.4621	11.7210
FTE.PA	1000	-0.0003	0.0003	0.1127	9.0021
G.MI	1000	-0.0008	0.0002	-0.2276	7.3974

Continúa en la página siguiente

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

Continuación

Valor	N	Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
GLE.PA	1000	-0.0013	0.0008	-0.3049	10.2268
IBE.MC	1000	$-5 \cdot 10^{-5}$	0.0005	0.5307	15.4509
INGA.AS	1000	-0.0020	0.0013	-0.1178	21.8387
ISP.MI	1000	-0.0008	0.0006	-0.4707	17.3023
LG.PA	1000	-0.0007	0.0006	-0.3057	9.1848
MC.PA	1000	-0.0002	0.0004	0.2081	11.5826
MUV2.DE	1000	$1 \cdot 10^{-5}$	0.0003	0.4780	12.7557
NOA3.DE	1000	-0.0004	0.0006	1.9578	34.2367
OR.PA	1000	-0.0001	0.0003	0.3656	10.8900
PHIA.AS	1000	-0.0005	0.0004	0.0723	8.29238
REP.MC	1000	-0.0005	0.0004	-0.8359	12.5430
RNO.PA	1000	-0.0017	0.0008	-0.4287	9.3907
RWE.DE	1000	$6 \cdot 10^{-5}$	0.0003	0.2700	15.6040
SAN.MC	1000	-0.0007	0.0005	0.0326	12.3646
SAN.PA	1000	-0.0005	0.0003	0.2533	11.5897
SAP.DE	1000	-0.0001	0.0003	-0.4698	18.2892
SGO.PA	1000	-0.0008	0.0007	0.0783	12.1309
SIE.DE	1000	-0.0003	0.0006	-0.1245	19.0269
SZE.PA	1000	-0.0003	0.0010	-5.8425	112.9735
TIT.MI	1000	-0.0012	0.0004	0.2125	9.9263
UCG.MI	1000	-0.0017	0.0007	-0.2537	11.4591
UNA.AS	720	-0.0003	0.0003	-0.1524	6.3884
VIV.PA	1000	-0.0002	0.0003	0.3173	10.8092

Cuadro 4.3: Resumen estadístico de los valores del índice bursátil DJ Eurostoxx 50 donde $\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2}}$ y $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ son el coeficiente de asimetría y curtosis respectivamente.

Según el resumen estadístico muestral presentado, se tiene que algunos índices, tales como AI.PA, BAS.DE y FORA.AS, alcanzan un apuntamiento pronunciado.

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

Es destacable el hecho de que no hay valores que presenten curtosis inferiores a 3. Además, el 14% de los valores tienen un coeficiente comprendido entre 3 y 9 y el resto de valores presentan un coeficiente de curtosis superior a 9.

En el estudio de la propiedad de asimetría que verifican los rendimientos se recurre al test de Wilcoxon, permitiendo así saber si la distribución empírica presenta algún tipo de asimetría. Si el estadístico de contraste toma valores comprendidos entre -1.96 y 1.96 entonces se mantiene la hipótesis de simetría. Además, si el estadístico toma un valor superior a 1.96, la distribución presentará asimetría negativa y, si este es menor a -1.96, entonces la asimetría será positiva.

Valor	Estadístico	<i>p</i> -valor	Valor	Estadístico	<i>p</i> -valor
AABA.AS	2.068	0.039	G.MI	1.625	0.104
ACA.PA	-1.621	0.105	GLE.PA	1.371	0.170
AGN.AS	-1.521	0.128	IBE.MC	-0.098	0.922
AH.AS	0.665	0.506	INGA.AS	1.701	0.089
AI.PA	0.002	0.998	ISP.MI	0.725	0.468
AIB.IR	-2.360	0.018	LG.PA	0.694	0.488
ALV.DE	-1.384	0.167	MC.PA	0.649	0.516
ALU.PA	-2.242	0.025	MUV2.DE	0.618	0.537
BAS.DE	0.130	0.897	NOA3.DE	0.875	0.382
BAY.DE	1.288	0.198	OR.PA	-0.086	0.931
BBVA.MC	-1.356	0.175	PHIA.AS	1.181	0.238
BN.PA	0.090	0.928	REP.MC	0.012	0.990
BNP.PA	-1.126	0.260	RNO.PA	1.712	0.087
CA.PA	-0.480	0.631	RWE.DE	-0.619	0.536
CS.PA	-1.815	0.070	SAN.MC	0.745	0.456
DAI.DE	-0.591	0.554	SAN.PA	1.038	0.299
DBK.DE	-1.594	0.111	SAP.DE	0.108	0.914
DTE.DE	-1.187	0.235	SGO.PA	1.326	0.185

Continúa en la página siguiente

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

<i>Continuación</i>					
Valor	Estadístico	<i>p</i> -valor	Valor	Estadístico	<i>p</i> -valor
ELE.MC	0.396	0.692	SIE.DE	0.214	0.831
ENEL.MI	-1.121	0.262	SZE.PA	-0.473	0.636
ENI.MI	0.259	0.795	TIT.MI	2.418	0.016
FORA.AS	0.878	0.380	UCG.MI	2.068	0.039
FP.PA	0.316	0.752	UNA.AS	0.478	0.633
FTE.PA	0.320	0.749	VIV.PA	0.555	0.579

Cuadro 4.4: Test de Wilcoxon para el estudio de la asimetría.

Además del valor del estadístico de contraste asociado al test de Wilcoxon se ha presentado el *p*-valor del contraste realizado. Así pues, se puede concluir que la distribución es simétrica si su correspondiente *p*-valor toma valores superiores a 0.05, ya que en estos casos no se rechaza la hipótesis de simetría y, en caso contrario, se afirmará a un nivel de significación del 5 %, que existe algún tipo de asimetría.

De los 48 valores estudiados, se tiene que el 90 % de estos no rechazan la hipótesis de simetría a un nivel de significación del 5 %, el 4 % de ellos presenta asimetría positiva, y en el 6 % de los casos la asimetría es negativa.

C.Curtosis \ C. Asimetría	A.Negativa	Simétrica	A.Positiva
$k < 3$	0 %	0 %	0 %
$3 \leq k < 9$	0 %	100 %	0 %
$9 \leq k < 15$	14 %	82 %	4 %
$k \geq 15$	0 %	95 %	5 %

Cuadro 4.5: Resumen de los coeficientes de asimetría y de curtosis de los rendimientos.

Realizando el estudio comparativo de los coeficientes de asimetría y curtosis de los valores pertenecientes al índice DJ Eurostoxx 50 se tiene que el 100 % de los valores, cuyos coeficientes de curtosis varían entre 3 y 9, no presentan ningún tipo de asimetría. Para el caso en el que el coeficiente toma valores entre 9 y 15 el

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

14 % de los activos describen una asimetría negativa, el 4 % positiva y el resto son simétricos. Sin embargo, considerando el caso en el que el coeficiente de curtosis de los datos es superior a 15 entonces el porcentaje de valores simétricos aumenta con respecto al caso anterior siendo el 95 % de estos simétricos y solamente un 5 % presenta asimetría positiva.

Luego, teniendo en cuenta estos resultados se puede afirmar que, en la mayoría de los casos, la distribución empírica suele adoptar una forma simétrica y con un valor modal muy pronunciado.

Es por ello, que se realiza el ajuste de aquellos valores que presentan un coeficiente elevado utilizando las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP .

A la hora de realizar los ajustes de cada una de las distribuciones con los valores seleccionados, se han propuesto dos situaciones distintas en las cuales se consideran diferentes intervalos de definición para la variable en estudio. En un primer caso se ha tomado como dominio de definición de la variable el intervalo $[0, 1]$ y posteriormente se ha realizado el mismo proceso pero tomando como referencia el intervalo $[-s, s]$.

Como es conocido, en la primera situación los parámetros a estimar son M , n y θ . Sin embargo si se considera la segunda opción en lugar de estimar el parámetro M se recurre a la estimación del parámetro s que, además de formar parte en las expresiones correspondientes a las funciones características de cada una de las distribuciones, es el encargado de asignar menor o mayor amplitud al rango de definición de la variable.

El método empleado en la realización de los ajuste es uno de los más empleados dentro de dicho campo, el cuál consiste en minimizar el cuadrado de la diferencia existente entre la función de distribución empírica y la función de distribución asociada a cada una de las distribuciones, consiguiendo así obtener las estimaciones de los parámetros que describen cada una de las distribuciones.

Para tener una visión inicial de los ajustes realizados, se presenta el gráfico QQ Plot o gráfico cuantil-cuantil. En él se representan los cuantiles de la distribución teórica supuesta frente a los cuantiles de la distribución empírica. En un buen ajuste, la gran mayoría de estos puntos deberían situarse sobre la recta $y=x$.

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

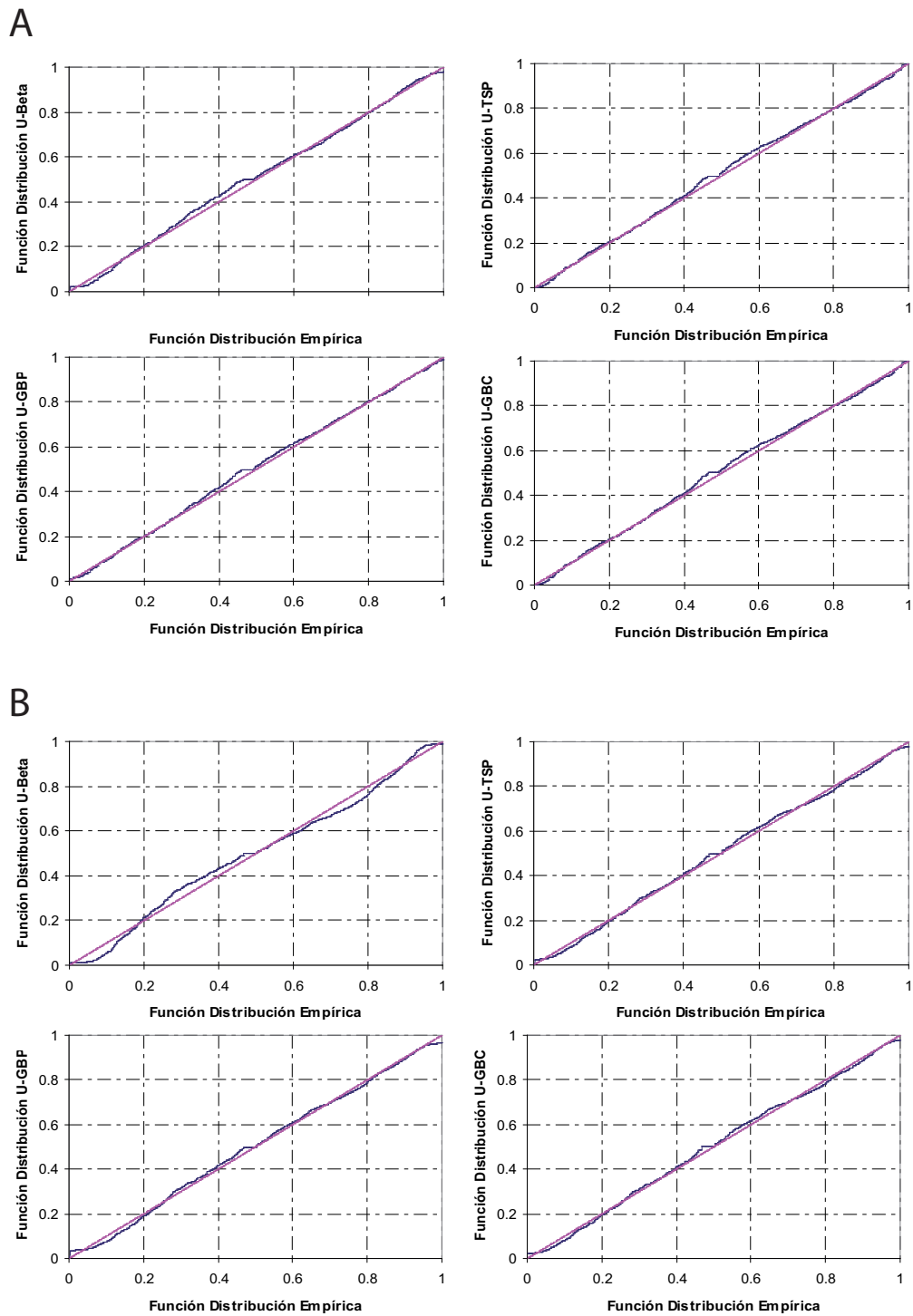


Figura 4.13: Gráfico QQ Plot del valor BAS (A) y FORA (B) con las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP .

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

La principal ventaja que presenta el uso del gráfico QQ Plot es la posibilidad de estudiar visualmente algunas de las características de los ajustes realizados, como por ejemplo:

- la presencia en la distribución de asimetría hacia la izquierda o derecha,
- o también el estudio de colas pesadas respecto de la distribución elegida.

De la Figura 4.13 se puede concluir, con los valores seleccionados, que la distribución U-BETA dentro del ámbito financiero parece presentar los peores resultados, ya que el gráfico formado por los valores de la función de distribución empírica y la función de distribución estimada (líneas azules) se encuentran más alejados de la recta $y = x$.

Centrando la atención en las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP se tiene que sus ajustes son mejores en el caso de considerar el valor FORA por presentar valores más cercanos a la bisectriz del primer cuadrante. El hecho de que el gráfico se despegue de la recta $y = x$ en 0.5, hace pensar que los ajustes realizados alcanzan un mayor apuntamiento que los presentados por los datos empíricos.

Teniendo en cuenta la información aportada por los gráficos QQ Plot se presenta, a continuación, un estudio más exhaustivo de la bondad de los ajustes realizados. Para ello se recurre al uso del test de Kolmogorov-Smirnov, siendo este uno de los test más utilizado para este propósito. El estadístico de contraste, $D_{KS}(F_0, \hat{F}_m)$, representa la máxima diferencia en valor absoluto existente entre la función de distribución empírica acumulada, \hat{F}_m , y la función de distribución teórica, F_0 , obtenida a partir de la distribución de probabilidad, y su expresión viene dada por:

$$D_{KS}(F_0, \hat{F}_m) = \max |F_0 - \hat{F}_m|. \quad (4.29)$$

Cuanto menor es la discrepancia existente entre ambas funciones de distribuciones entonces el estadístico será más pequeño y como consecuencia los ajustes realizados serán más adecuados.

En el caso particular de considera muestras con tamaños elevados se tiene que la expresión (4.30) da una aproximación excelente del p -valor asociado al

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

contraste, D'Agostino y Stephens, [20].

$$p \approx 2 \sum_{K=1}^3 (-1)^{k+1} e^{-2k^2 t^2}, \quad (4.30)$$

donde $t = \sqrt{m} D_{KS} (F_0, \hat{F}_m) \geq 1$ y m es el tamaño muestral.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos utilizando el contraste de Kolmogorov-Smirnov sobre los ajustes realizados con las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP al considerar los intervalos $[0, 1]$ y $[-s, s]$.

Valor	U-BETA	U-GBC	U-TSP	U-GBP
AGN.AS	0.136	0.204	0.202	0.302
AI.PA	0.644	0.658	0.655	0.910
AIB.IR	0.036	0.000	0.000	0.000
ALV.DE	0.071	0.007	0.006	0.004
BAS.DE	0.391	0.000	0.000	0.000
BNP.PA	0.441	0.787	0.768	0.929
DBK.DE	0.217	0.106	0.105	0.152
DTE.DE	0.163	0.161	0.130	0.197
ENEL.MI	0.003	0.000	0.000	0.000
ENI.MI	0.120	0.018	0.016	0.013
FORA.AS	0.041	0.000	0.000	0.000
IBE.MC	0.065	0.028	0.027	0.070
INGA.AS	0.150	0.754	0.750	0.572
ISP.MI	0.026	0.009	0.008	0.014
NOA3.DE	0.000	0.000	0.000	0.000
SAN.MC	0.111	0.086	0.086	0.096
SAP.DE	0.519	0.176	0.181	0.241
SIE.DE	0.418	0.486	0.481	0.680

Continúa en la página siguiente

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

<i>Continuación</i>				
Valor	U-BETA	U-GBC	U-TSP	U-GBP
SZE.PA	0.080	0.000	0.000	0.000

Cuadro 4.6: p -valor del test de Kolmogorov-Smirnov de los ajustes realizados en $[0,1]$ utilizando los valores diarios.

Valor	U-BETA	U-GBC	U-TSP	U-GBP
AGN.AS	0.032	0.198	0.198	0.198
AI.PA	0.680	0.658	0.679	0.961
AIB.IR	0.007	0.226	0.226	0.122
ALV.DE	0.066	0.320	0.315	0.466
BAS.DE	0.091	0.160	0.160	0.115
BNP.PA	0.255	0.572	0.514	0.665
DBK.DE	0.152	0.445	0.432	0.526
DTE.DE	0.070	0.327	0.317	0.389
ENEL.MI	0.020	0.020	0.020	0.020
ENI.MI	0.137	0.226	0.226	0.226
FORA.AS	0.017	0.257	0.257	0.200
IBE.MC	0.052	0.129	0.129	0.129
INGA.AS	0.006	0.614	0.541	0.446
ISP.MI	0.002	0.002	0.002	0.002
NOA3.DE	0.000	0.000	0.000	0.000
SAN.MC	0.095	0.095	0.095	0.095
SAP.DE	0.409	0.718	0.718	0.718
SIE.DE	0.222	0.935	0.935	0.970
SZE.PA	0.005	0.005	0.005	0.005

Cuadro 4.7: p -valor del test de Kolmogorov-Smirnov de los ajustes realizados en $[-s,s]$ utilizando los valores diarios.

Teniendo en cuenta los p -valores asociados al test de Kolmogorov-Smirnov en $[0, 1]$, se observa que la distribución que se comporta de una forma más

satisfactoria en el estudio de los ajustes de los rendimientos financieros es la distribución obtenida de realizar la mixtura entre la distribución beta y la distribución uniforme, ya que en un 74 % de los casos considerados presenta unos buenos ajustes. Sin embargo, centrando la atención en las demás distribuciones se tiene que solamente son eficaces para la mitad de los datos tomados en el caso de la distribución U-GBC y U-GBP y si se trabaja con la distribución U-TSP este porcentaje disminuye hasta un 47 %.

En el caso de trabajar dentro del ámbito financiero con la variable definida en $[-s, s]$ los resultados obtenidos con el test de Kolmogorov-Smirnov son bastantes significativos ya que se muestra un cambio importante en el comportamiento de las distribuciones. Luego, teniendo presente el rango donde fluctúa la variable, la distribución U-BETA muestra unos resultados menos llamativos que en el caso de los ajustes en $[0, 1]$, ya que el porcentaje de valores ajustados ha disminuido hasta el 58 %.

Por otro lado, son destacables los resultados conseguidos con las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP, ya que sus porcentajes han llegado a aumentar hasta en un 32 %, como es el caso de la distribución U-TSP.

Es destacable el hecho de que mientras que estas tres distribuciones no presentaban resultados satisfactorios en el ajuste de valores en $[0, 1]$, al considerar el intervalo $[-s, s]$, sus conclusiones varían de forma positiva, como sucede en el caso de los índices AIB.IR, ALV.DE, BAS.DE, ENI.MI y FORA.AS.

A propósito de los comentarios realizados, se presenta a continuación el estudio de los valores BAS.DE y FORA.AS, ya que estos son algunos de los valores que presentan los coeficientes de curtosis más elevados. En una primera fase se presenta las gráficas correspondientes al kernel de la función de densidad empírica de los valores, Figura 4.14 y su ajuste con la distribución U-GBC, Figura 4.15.

Como característica especial, se presenta por último el ajuste del valor AI.PA con la distribución U-GBP, ya que es el único índice que es ajustado por las cuatro distribuciones tanto en el intervalo $[0, 1]$ como en el intervalo del ámbito financiero, $[-s, s]$ y presenta un coeficiente de curtosis superior a 300.

El histograma asociado a los datos en estudio ha sido y es una herramienta habitualmente utilizada para describir de una forma gráfica el comportamiento de estos. El principal inconveniente que presenta la utilización del histograma

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

es que puede adoptar distintas formas dependiendo de la amplitud seleccionada. Varios autores han propuesto distintas expresiones que sirvan de guía a la hora de considerar la amplitud necesaria que describa de una forma más exhaustiva el comportamiento de los datos empíricos.

Es por ello, que durante varios años se han presentado distintos métodos de análisis de datos no paramétricos. Tomando como referencia el trabajo desarrollado por Izenman, [51], se presenta el kernel de la función de densidad empírica como una herramienta alternativa para el estudio del comportamiento de los datos muestrales.

El estimador kernel de la función de densidad f se define como

$$\hat{f}_h(x) = (nh^d)^{-1} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^d \quad (4.31)$$

donde $K(x) = k_{rs} (1 - |x|^r)^s I_{\{|x| \leq 1\}}$ y $k_{rs} = \frac{r}{2\beta(s+1, \frac{1}{r})}$ con $r > 0$ y $s \geq 0$.

Así pues, utilizando la expresión correspondiente al kernel de la función de densidad se describen los gráficos correspondientes a los datos asociados a los valores BAS.DE y FORA.AS, Figura 4.14.

Representando conjuntamente el kernel de la función de densidad empírica y la función de densidad estimada de la distribución U-GBC, se observa en la Figura 4.15 que las estimaciones conseguidas, haciendo uso del método de mínimos cuadrados, ajustan de una forma adecuada a los datos empíricos.

La diferencia existente entre ambos gráficos solamente se hace notable cuando los rendimientos toman valores cercanos a cero, ya que la función de densidad estimada alcanza un mayor apuntamiento que la kernel de la función de densidad empírica.

²El profesor van Dorp ha diseñado una hoja en el software Excel para la representación del polinomio kernel, que se ha adaptado a la aplicación concreta que se presenta, poniéndose a disposición del lector que lo solicite.

4.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

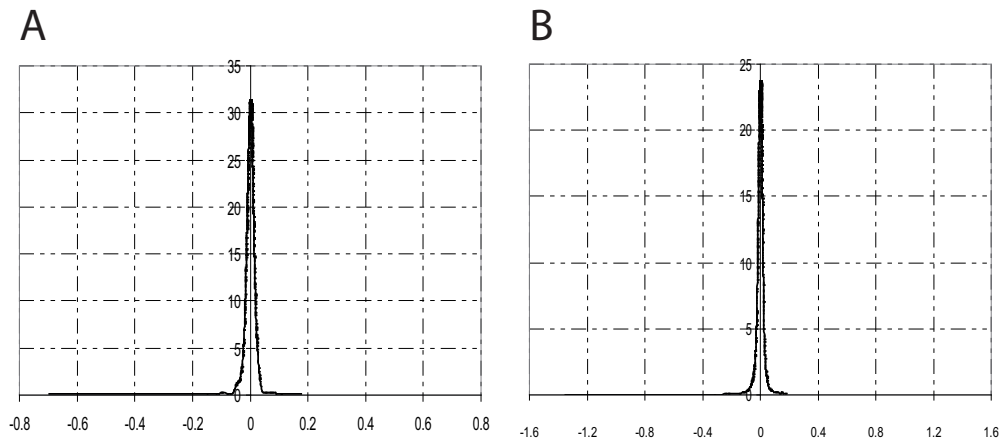


Figura 4.14: Kernel de la función de densidad empírica de los valores BAS (A) y FORA (B).

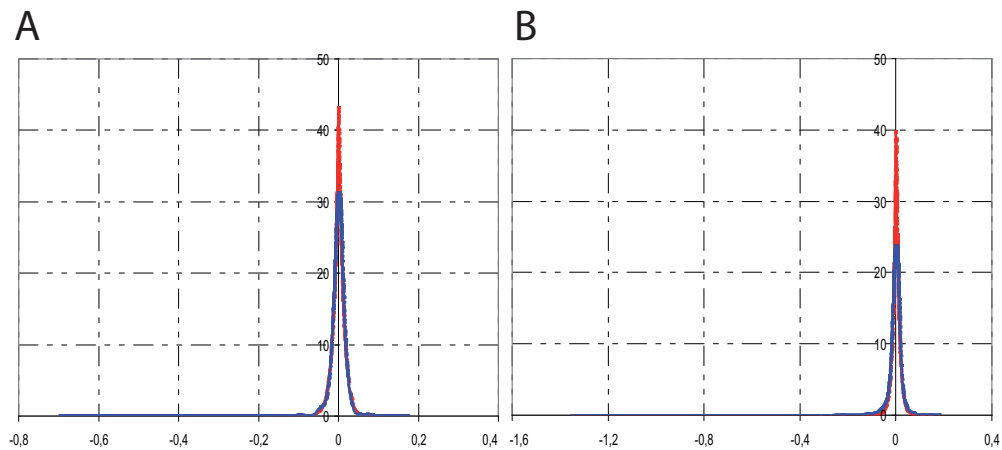


Figura 4.15: Ajuste de los valores BAS (A) y FORA (B) con la distribución U-GBC. Kernel de la función de densidad (azul) y función de densidad ajustada de la distribución U-GBC (roja).

Aún así, es destacable el hecho de que los ajustes realizados consiguen solventar el problema existente en la presencia de colas pesadas o valores extremos.

Además de los valores considerados, se muestra a continuación el ajuste obtenido con la distribución U-GBP del valor ALPA.

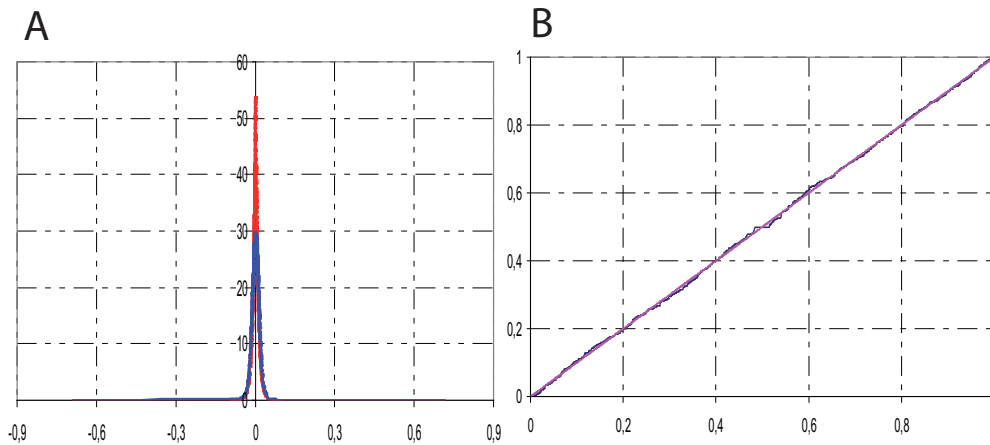


Figura 4.16: Representación gráfica del kernel de la función de densidad empírica (azul) y la función de densidad distribución U-GBP (roja) del valor AI.PA (A). Gráfico QQ Plot del ajuste realizado (B).

La característica que ha motivado el uso de este ejemplo, es que se trata de uno de los índices que es ajustado por las cuatro distribuciones obtenidas mediante el proceso de mixtura que se han planteado a lo largo del capítulo, cuando el intervalo de definición de la variable es $[0, 1]$ o $[-s, s]$. Se puede comprobar, utilizando la información muestral, que es uno de los valores que presenta un coeficiente de curtosis elevado, lo que lo hace aún más interesante.

La idea fundamental de seleccionar la distribución U-GBP para la realización del ajuste, se basa principalmente en la presencia del p -valor mayor cuando se ha realizado el estudio de la bondad del ajuste mediante el test de Kolmogorov-Smirnov.

Por último, se presenta la estimación de los parámetros obtenidos en el ajuste de los valores AI.PA, BAS.DE y FORA.AS pertenecientes al índice bursátil DJ Eurostoxx 50 utilizando cada una de las distribuciones con las que se ha trabajado a lo largo del capítulo todas ellas definidas en $[-s, s]$.

Para realizar las estimaciones de cada uno de los valores, siempre se ha considerado como punto de partida los valores mínimos (a) y máximos (b) de cada uno de ellos. En el caso del valor AI.PA se tiene que $a = -0.6877$ y $b = 0.7131$, para BAS.DE, $a = -0.6877$ y $b = 0.7131$ y en el caso del valor FORA.AS estos son

4.4. CONCLUSIÓN

$a = -0.6877$ y $b = 0.7131$. Así pues, haciendo uso de la información aportada por los valores se tiene que las estimaciones obtenidas para cada uno de los ejemplos seleccionados con las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP son:

	Valor		
	AI.PA	BAS.DE	FORA.AS
U-BETA	$\hat{s} = 1.0511$ $\hat{k} = 3315.70$ $\hat{\theta} = 0.9794$	$\hat{s} = 0.6970$ $\hat{k} = 3502.13$ $\hat{\theta} = 0.6504$	$\hat{s} = 1.3531$ $\hat{k} = 8203.55$ $\hat{\theta} = 0.9779$
U-GBC	$\hat{s} = 0.7144$ $\hat{n} = 60.7269$ $\hat{\theta} = 1$	$\hat{s} = 0.6977$ $\hat{n} = 59.0161$ $\hat{\theta} = 1$	$\hat{s} = 1.3531$ $\hat{n} = 112.6638$ $\hat{\theta} = 0.95$
U-TSP	$\hat{s} = 0.7369$ $\hat{n} = 63.8248$ $\hat{\theta} = 1$	$\hat{s} = 0.6970$ $\hat{n} = 60.2889$ $\hat{\theta} = 1$	$\hat{s} = 1.3531$ $\hat{n} = 113.7222$ $\hat{\theta} = 0.95$
U-GBP	$\hat{s} = 0.7525$ $\hat{n} = 80.0910$ $\hat{\theta} = 0.9933$	$\hat{s} = 0.6970$ $\hat{n} = 77.2634$ $\hat{\theta} = 0.9684$	$\hat{s} = 1.3531$ $\hat{n} = 146.0010$ $\hat{\theta} = 0.9214$

Cuadro 4.8: Estimación de los parámetros obtenidos en la utilización del método de mínimos cuadrados.

4.4. CONCLUSIÓN

El comportamiento de los cambios sufridos por los precios es una información importante para alguien que desee realizar trabajos empíricos en este área.

El modelo más empleado en el estudio de los factores que determinan los precios de los activos financieros se ha basado en suponer que los rendimientos de los activos son independientes y están idénticamente distribuidos en el tiempo, siendo la distribución normal utilizada habitualmente en la descripción del comportamiento de estos.

Realizando un estudio más profundo sobre el comportamiento de la distribución empírica de los rendimientos, se observa que estos presentan un apuntamiento más pronunciado al de la distribución normal y con unas colas más pesadas.

4.4. CONCLUSIÓN

El problema se plantea cuando hay que seleccionar la distribución más adecuada para realizar el ajuste, ya que las distribuciones que han sido utilizadas no suelen solventar los problemas de las colas pesadas, el gran apuntamiento y la presencia de valores atípicos (*outlier*), como pusieron de manifiesto en los trabajos desarrollados por Moore, [81], y Fama, [29].

Teniendo en cuenta el estudio realizado sobre los valores del índice bursátil DJ Eurostoxx 50, se ha comprobado que la mayoría de los rendimientos no suelen presentar ningún tipo de asimetrías y aproximadamente el 85 % muestran un coeficiente de curtosis superior a 9. Este hecho, hace pensar en recurrir a la utilización de distribuciones que tengan características similares a las presentadas por la distribución empírica.

Por ello, teniendo en cuenta los resultados mostrados por las distribuciones que surgen de realizar la mixtura entre las distribuciones beta, GBC, two-sided power y GBP con la distribución uniforme se plantea la idea de enmarcarlas dentro del ámbito financiero para mostrar a continuación sus ajustes utilizando los datos extraídos de DJ Eurostoxx 50.

La principal ventaja que presentan las distribuciones utilizadas en la aplicación práctica, es que la estimación de la distribución no es demasiado laboriosa ya que se ha utilizado el método de mínimos cuadrados, recurriendo a la utilización del software Excel, poniéndose a disposición del lector.

Según la información que aporta la realización del test de Kolmogorov-Smirnov, se observa que la presencia de la simetría en las distribuciones es una característica a destacar, pues el 90 % de los valores que pertenecen al índice seleccionado son simétricos.

Al considerar como intervalo de definición de la variable aleatoria $[-s, s]$, en lugar del intervalo $[0, 1]$, se tiene que las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP presenta una mejora considerable en los ajustes realizados.

Aún así, es destacable el hecho de que de todos los valores seleccionados con curtosis más notable, el 84 % de ellos quedan ajustados por alguno de los modelos presentados.

CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Para finalizar esta memoria, se presenta a continuación un breve resumen de las características más destacables que han sido obtenidas a lo largo de cada uno de los capítulos que componen el trabajo.

En un primer lugar, se han presentado algunos de los modelos probabilísticos empleados en el tratamiento del riesgo y la incertidumbre, indicando sus principales características. Utilizando como punto de partida los estudios presentados por van Dorp y Kotz, [111], se describe la herramienta generadora de distribuciones, siendo esta la base de la construcción de algunas de las distribuciones presentadas a lo largo de la memoria.

Así pues, recurriendo al sistema generador de van Dorp y Kotz, [111], se describen en el segundo capítulo las distribuciones bicúbica, biseno y la generalización de ambas a una rama. Estas distribuciones se diferencian de la distribución normal por venir definidas en un dominio acotado y presentar distintas intensidades en su asimetría. Con la introducción de un nuevo parámetro n , en la generalización, se describen distribuciones caracterizadas por presentar una mayor flexibilidad. Como consecuencia, se obtienen distribuciones que presentan un apuntamiento más pronunciado que las distribuciones bicúbica y biseno. Realizando el estudio comparativo de los valores esperados y las varianzas

de cada uno de los modelos probabilísticos empleados en la metodología PERT, se tiene que la distribución biseno verifica las propiedades deseables para ser considerada como una buena distribución en ambiente de incertidumbre, según los estudios presentados por Taha, [105] y desarrollados por Herrerías, [43]. Por otro lado, se ha presentado la generalización a dos ramas de la distribución bicúbica consiguiendo así, definir la distribución bicúbica a izquierda y derecha del valor modal con distintas funciones generadoras.

Con el objeto de estimar la duración total de un proyecto y la necesidad de tener en cuenta la existencia de *outliers*, se ha presentado en el tercer capítulo la construcción de mixtura de distribuciones, que surgen como combinación de dos distribuciones y la introducción del parámetro θ , con $0 \leq \theta \leq 1$. Para ello, partiendo de los estudios presentados por Hahn, [41], se describen las distribuciones resultantes de realizar la mixtura entre las distribuciones GBC, two-sided power y GBP con la distribución uniforme, así como sus características estocásticas. La principal ventaja presentada por las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP con respecto a la distribución U-BETA, es que estas pueden ser elicítadas mediante el uso de cuantiles. Este hecho se debe, principalmente, a la existencia de una expresión analítica de la función de distribución asociada a cada una de las distribuciones construidas en el capítulo. Con objeto de realizar el estudio comparativo entre las distribuciones construidas en esta memoria con la distribución U-BETA, se realiza una aplicación práctica basada en los datos recogidos en el libro de Moder et al., [79] y utilizados por Hahn, [41]. Como consecuencia a los resultados obtenidos, se observa que las distribuciones clásicas U-GBC, U-TSP y U-GBP presentan, con una probabilidad del 95%, mayor tiempo en la finalización total del proyecto. Teniendo en cuenta que las distribuciones presentadas no requieren el uso de los valores clásicos, se considera en dicha aplicación valores alternativos para el parámetro n . Tomando $n = 5$ y $n = 10$, los resultados obtenidos cambian con respecto a los descritos por las distribuciones clásicas. Este hecho es viene provocado porque las funciones de distribución de las distribuciones U-GBC, U-TSP y U-GBP, cortan a la función de distribución asociada a la distribución U-BETA. Como consecuencia las distribuciones construidas estiman tiempos inferiores a los aportados por la distribución U-BETA. Así pues, para distintos valores de los parámetros n y θ ,

las distribuciones construidas en el tercer capítulo describen estimaciones de la variable aleatoria, tiempo empleado en la ejecución de un proyecto, superiores e inferiores a los aportados por la distribución U-BETA.

Aprovechando las características de apuntamiento y la asignación de una mayor probabilidad a los valores atípicos, por parte de las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP, y teniendo en cuenta el comportamiento de los rendimientos de los activos financieros, se presenta en el cuarto capítulo las distribuciones dentro del ámbito financiero. Para ello, utilizando una reparametrización de los parámetros de las distribuciones beta, GBC, TSP, GBP, U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP, se enmarcan cada una de las distribuciones en el ambiente financiero, para su posterior aplicación en el ajuste de los rendimientos. Con los resultados obtenidos en la búsqueda de la distribución subyacente que explique el comportamiento de los rendimientos de los activos del índice bursátil DJ Eurostoxx 50, se tiene que las distribuciones U-BETA, U-GBC, U-TSP y U-GBP, presentan una gran capacidad de ajuste en aquellos casos en los que los datos empíricos presentan curtosis elevadas.

Futuras líneas de investigación

Como consecuencia a los estudios presentados en esta memoria se describen las siguientes líneas de investigación:

- Partiendo de los valores aportados por el experto y utilizando la información referida a la probabilidad de que X sea inferior al valor modal, desarrollar la elicitación de la distribución bicúbica generalizada, de una y dos ramas.
- Teniendo en cuenta los resultados presentados por la distribución biseno, estudiar con mayor profundidad sus características y su aplicación dentro del ámbito financiero.
- Buscar nuevos campos de aplicación de estas distribuciones, como puede ser su utilización en el VAN. Estas distribuciones pueden ser consideradas para la simulación de los flujos de cajas de una inversión.

- Haciendo uso del concepto de calibración, presentar métodos alternativos para la selección de modelos triparamétricos y tetraparamétricos dentro de la metodología PERT.

Merece una especial atención la última línea de investigación. Con objeto de mostrar al lector los estudios desarrollados en la selección de la distribución más adecuada para su aplicación dentro del ámbito del PERT, se presenta a continuación un resumen de los resultados conseguidos en este tema.

CALIBRACIÓN DE DISTRIBUCIONES EN EL PERT

La calibración de distribuciones se presenta como un método alternativo a los mostrados por Taha, [105], y desarrollados por Herrerías, [43] para seleccionar la distribución adecuada en el ámbito del PERT.

Como es conocido, uno de los principales problemas presentados por la distribución beta, en su estimación dentro del ambiente de incertidumbre, es describir la expresión correspondiente a su función de densidad. Este hecho viene provocado por ser una distribución tetraparamétrica determinada por los parámetros p , q , a y b . Luego, teniendo en cuenta que el experto solamente aporta la información referente a los valores mínimo, más probable y máximo se hace imposible su determinación sin la presencia de otras restricciones.

Con objeto de solventar el problema presentado por la distribución, se propone la situación de recurrir a más información por parte del experto, o describir ciertas hipótesis a partir de las cuales se obtengan las estimaciones correspondientes a cada uno de los parámetros. Son varios los autores que optan por el primer camino. Es por ello que se recurre a la confianza que el experto tiene depositada sobre el valor modal seleccionado. Dentro de esta línea se encuentran los trabajos realizados por Berny [8], Moitra [80], Chae y Kim, [15], Herrerías y Pérez [48], García et al., [32].

Para ello, el experto proporcionará un valor comprendido entre 0 y 1, indicando el cero una desconfianza absoluta y el 1 una seguridad total en la selección del valor modal. Como consecuencia, si el experto pone de manifiesto su aprensión en el valor seleccionado, entonces se puede explicar la verosimilitud de m mediante el uso de la distribución uniforme, caracterizándose por equiparar la confianza

del valor modal con la de cualquier punto situado en el intervalo (a, b) . Por el contrario, si el experto manifiesta su total confianza sobre el valor más probable seleccionado, entonces la distribución a considerar es la distribución degenerada de Dirac.

De acuerdo con los comentarios realizados, el experto facilitará los cuatro valores que permitirán la determinación de la distribución beta para su posterior aplicación en la metodología PERT. Generalizando esta situación a otras distribuciones se tiene, dependiendo del número de parámetros asociados a la distribución seleccionada, las siguientes situaciones:

- Si se trabaja con distribuciones triparamétricas, la distribución quedará determinada únicamente por los valores aportados por el experto, presentando una confianza asociada entre el 0% y 100%. Este hecho, permite seleccionar entre todas las distribuciones que son utilizadas en el PERT aquella que presente mayor confianza.
- En el caso de trabajar con distribuciones determinadas por cuatro parámetros, la información aportada por el experto acerca de su confianza en el valor modal, nos permitirá describir la distribución seleccionada. Como consecuencia a las estimaciones realizadas se nos plantea la siguiente cuestión
 - ¿Qué distribución es la más adecuada entre todas las seleccionadas?

Antes de dar respuesta a la pregunta planteada, nos vemos en la necesidad de conseguir obtener una cierta “cantidad” que vaya directamente relacionada con la confianza aportada por el experto sobre m . Para ello recurrimos al concepto de calibración.

La calibración de distribuciones ha sido un tema abordado por diversos autores, entre ellos encontramos los trabajos aportados por Matherson y Winkler, [74], Clemen y Winkler, [19] y Hora, [49].

En el trabajo presentado por Hora, [49], se considera la calibración como *solo un aspecto de la calidad de las distribuciones elicidadas*. Como consecuencia, realiza el estudio comparativo entre la función de distribución uniforme y la

función de distribución empírica. Si el experto ha realizado una buena calibración entonces se verifica que el área encerrada entre ambas es mínima, Figura 5.1.

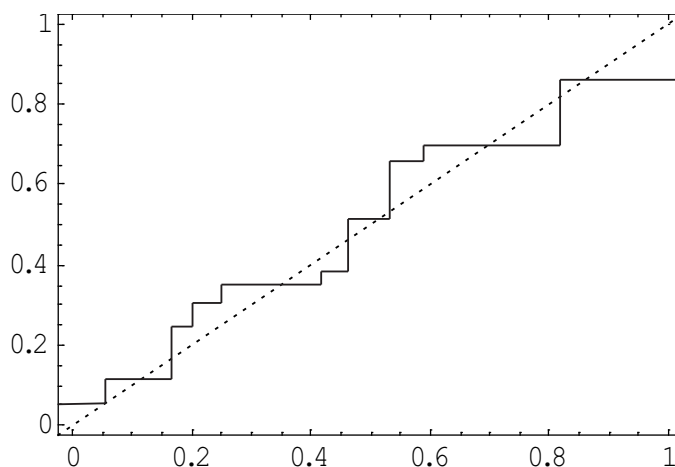


Figura 5.1: Gráfico de la calibración de un experto, Hora. Función de distribución uniforme (discontinua) y función de distribución empírica (continua).

Partiendo de que la gráfica asociada a la función de distribución de la distribución uniforme coincide con la bisectriz del primer cuadrante, es lógico pensar que la calibración tomará valores comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2}$. Con objeto de expresar la calibración en porcentajes se tiene que

$$c \% = \frac{A_D}{1/2} 100 \%, \quad (5.1)$$

siendo A_D el área encerrada entre ambas funciones de distribución y, $\frac{1}{2}$ es el área máxima que puede encerrar la distribución uniforme con cualquier distribución.

Este hecho es de gran interés ya que, si se compara la función de distribución asociada a un modelo probabilístico con, la bisectriz del primer cuadrante, se podrá establecer una relación directa entre el calibre y la confianza que aporta el experto. Así pues, si el área encerrada entre ambas funciones de distribución es mínima, entonces la similitud entre el modelo seleccionado y el uniforme es alta. Como consecuencia a este hecho, si la calibración toma valores cercanos a cero implica que la confianza aportada sobre el modelo es casi nula, por su semejanza a la distribución uniforme.

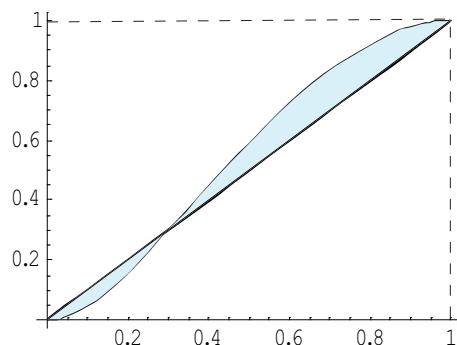
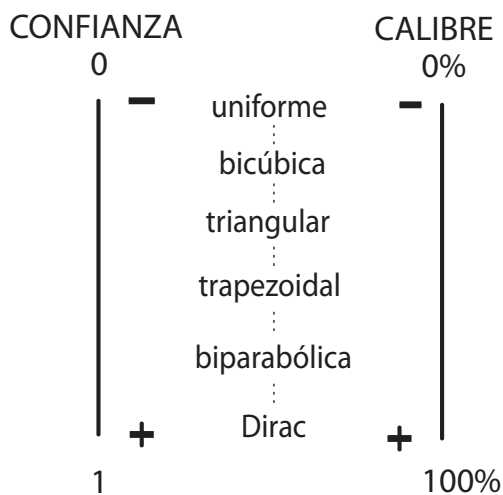


Figura 5.2: Función de distribución uniforme (línea gruesa) y función de distribución de una distribución continua (línea delgada).

Por tanto, teniendo en cuenta los comentarios realizados se describe la siguiente relación entre la confianza y el calibre.



Como consecuencia a la relación existente entre la calibración y la confianza, se busca enlazar los estudios presentados por Taha, [105], y desarrollados por Herrerías, [43], con los mostrados en este apartado.

En el caso de trabajar con distribuciones definidas a través de tres parámetros, se elegirá aquella distribución que presente el mayor calibre, ya que tal y como se ha comentado anteriormente a mayor calibre, mayor confianza.

Es por ello, que a continuación se muestra el estudio correspondiente a las

varianzas y calibres de algunas de las distribuciones que han sido tradicionalmente empleadas en el ámbito del PERT, así como algunas de las propuestas recientes, tales como la distribución bipolarabólica y, la construida en esta memoria, la distribución bicúbica.

Luego, recurriendo a las expresiones (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), y a las de las varianzas mostradas en esta memoria se describe la relación existente entre los estudios de Taha, [105], y los obtenidos en este trabajo:

$$A_{\text{biparabólica}} = \frac{2M^2 - 2M + 1}{8}, \tag{5.2}$$

$$A_{\text{bicúbica}} = \frac{2M^2 - 2M + 1}{5}, \tag{5.3}$$

$$A_{\text{triangular}} = \frac{2M^2 - 2M + 1}{6}, \tag{5.4}$$

$$A_{\text{CPR}} = \begin{cases} \frac{0.3333(M-1)(0.25+M^2)}{(M-1.5)(M+0.5)} & M < \frac{1}{2}, \\ \frac{-5.3333(M-1.5)(1.2932+M(-2.1439+M))(0.1933+M(M-0.3561))}{(3-2M)^2(1+2M)} & M > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Comparando las Figuras 5.3 y 5.4, se tiene que las distribuciones uniforme y bipolarabólica caracterizadas por presentar mayor valor en varianza, son las que muestran un menor calibre.

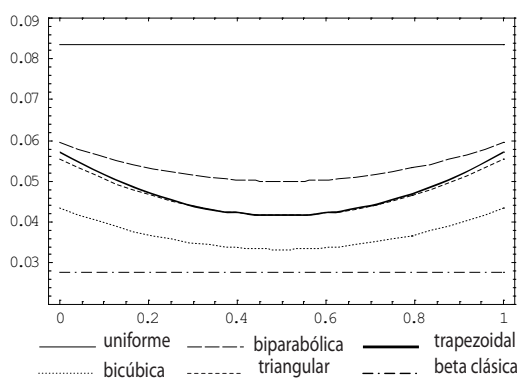


Figura 5.3: Representación gráfica de las varianzas.

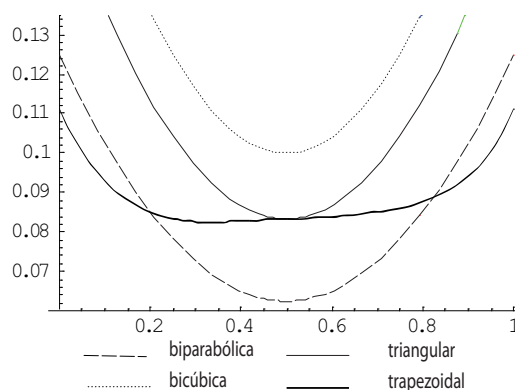


Figura 5.4: Representación gráfica de los calibres.

Luego, se tiene que a menor calibre, menor confianza y, por tanto la varianza

es mayor. Como consecuencia se tiene que a la hora de seleccionar el modelo que conduzca a resultados conservadores, se elegirá aquel que presente el menor calibre.

En el caso de enmarcar las distribuciones GBC, two-sided power y GBP dentro del ámbito de incertidumbre, se presenta el problema de que todas ellas vienen descritas a partir de cuatro parámetros. Este hecho, tal y como se ha comentado anteriormente, conlleva solicitar más información al experto sobre la confianza que tiene en el valor modal.

A la hora de describir las expresiones correspondientes a las áreas encerradas entre la función de distribución de cada una de las distribuciones mencionadas y la distribución uniforme se observa que todas ellas dependen únicamente del valor modal³, y del parámetro n .

$$A_{GBP} = \frac{3(2M^2 - 2M + 1)n^2}{2(n + 2)(3n + 1)}, \quad (5.6)$$

$$A_{GBC} = \frac{(2M^2 - 2M + 1)(n^2 + 9n + 12)}{2(n + 5)(n + 6)}, \quad (5.7)$$

$$A_{TSP} = \frac{n - 2Mn + 2M - 1}{2(n + 1)}. \quad (5.8)$$

Este hecho añadido a la idea de la relación existente entre la calibración y la confianza del experto, nos conduce a la expresión

$$c\% = \frac{A_D}{1/2} \times 100\% \Leftrightarrow 2A_D \times 100\% = p\% \Leftrightarrow A_D = \frac{p}{2} \quad (5.9)$$

donde A_D denota el área encerrada entre la función de distribución de cualquier distribución de tipo continuo y la distribución uniforme, y p es la confianza que el experto tiene en M .

Como consecuencia se tiene que, a partir de la información adicional aportada por el experto, p , y la expresión correspondiente al área encerrada entre las distribuciones, A_D , se obtiene la estimación correspondiente al parámetro n .

Así pues, una vez elicitada cada una de las distribuciones se recomendará como modelo subyacente del PERT aquel que aporte mayor valor en su varianza para

³ M hace referencia a la moda estandarizada en $[0, 1]$.

así no concluir con resultados optimistas, (Taha [105] y Herrerías [43]).

Con objeto de mostrar un ejemplo sobre la calibración se presenta la siguiente aplicación práctica.

Aplicación Práctica

Utilizando el diagrama PERT recogido en el trabajo de Moder et al., [79], y a partir del cual se ha realizado la aplicación práctica mostrada en el tercer capítulo, se ha considerado, de las 29 actividades que componen el diagrama, uno de los caminos donde el experto propone como estimaciones de a , m y b los siguientes valores:

$$a = 14, m = 17 \text{ y } b = 32.$$

Suponiendo que el experto asigna al valor más probable una confianza del 40 %, se tiene, utilizando la expresión (5.9) las estimaciones correspondiente al parámetro n en cada una de las distribuciones consideradas.

$$\frac{3(2M^2 - 2M + 1)n^2}{2(n + 2)(3n + 1)} = \frac{0.4}{2} \Rightarrow n = \begin{cases} 3.15897 \\ -0.262016 \end{cases}$$

$$\frac{(2M^2 - 2M + 1)(n^2 + 9n + 12)}{2(n + 5)(n + 6)} = \frac{0.4}{2} \Rightarrow n = \begin{cases} 1.32035 \\ -7.83725 \end{cases}$$

$$\frac{n - 2Mn + 2M - 1}{2(n + 1)} = \frac{0.4}{2} \Rightarrow n = 3.4831$$

Una vez calculado el valor correspondiente al cuarto parámetro nos hacemos la pregunta:

¿Qué distribución es la más adecuada para aplicarla dentro de la metodología PERT?

Para ello, recurriendo a la varianza asociada a cada una de las distribuciones se tiene los siguientes resultados, una vez sustituidas las estimaciones realizadas.

$$\text{Distribución GBC} \quad \text{var}[T \mid M = 0.1667, n = 1.32035] = 0.0377769,$$

$$\text{Distribución TSP} \quad \text{var}[T \mid M = 0.1667, n = 3.4831] = 0.0253469,$$

$$\text{Distribución GBP} \quad \text{var}[T \mid M = 0.1667, n = 3.15897] = 0.0541658.$$

Así pues, tal y como se observa en los resultados obtenidos, y haciendo uso de los estudios presentados por Taha, [105], y desarrollados por Herrerías, [43], se tiene que la distribución más adecuada para ser aplicable en el estudio de la duración de una actividad sería la distribución bipolarabólica generalizada con $M = 0.1667$ y $n = 3.15897$, por presentar el máximo valor en varianza.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Abdelkader Y.H.**, (2004). *Evaluating project completion times when activity times are Weibull distributed*. European Journal of Operational Research, 157, 3, pp. 704-715.
- [2] **Alpert M. y Raihfa H.**, (1982). *A progress report on the training of probability assessors, in Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Kahneman D. Slovic P. y Tversky, A. (Eds.), Cambridge University Press, New York, pp. 294-305.
- [3] **Altiok T. y Melamed B.**, (2001). *Simulation modeling and analysis with arena*. Cyber Research and enterprise technologies, pp. 46.
- [4] **Ayyangar A.S.K.**, (1941). *The triangular distribution*. Mathematics Student, 9, pp. 85-87.
- [5] **Bachelier L.**, (1900). *Théorie de la Speculation*. Annales Scientifiques de L' École Normale Superieure.
- [6] **Ball C.A. y Torous W.N.**, (1983). *A comparison of the stable and Student distribution as statistical models for stock prices*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 18, pp. 53-61.
- [7] **Banks J.**, (2000). *Introduction to simulations*. WSC 2000.

- [8] **Berny J.**, (1989). *A new distribution function for risk analysis*. Journal of the Operation Research Society, 40, pp. 1121-1127.
- [9] **Black F. y Scholes M.**, (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of political economy, 81, pp. 637-659.
- [10] **Blattberg R.C. y Gonedes N.J.**, (1974). *A comparison of the stable and Student distribution as statistical models for stock prices*. Journal of Business, 47, pp. 247-280.
- [11] **Caballer V.**, (1993). *Valoración agraria. Teoría y práctica*. Ediciones Pirámide, S.A. 4ª edición.
- [12] **Callejón J., Pérez E. y Ramos A.**, (1998). *La distribución trapezoidal como modelo probabilístico para la metodología PERT*. X reunión ASEPELT-ESPAÑA. Universidad de Castilla La Mancha. CD-ROM-Fichero g26.
- [13] **Canavos G.C.**, (1987). *Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos*. McGraw-Hill.
- [14] **Castrup H.**, (2001). *Distributions for Uncertainty Analysis*. Proc. International Dimensional Workshop.
- [15] **Chae K.C. y Kim S.**, (1990). *Estimating the mean and variance of PERT activity time using likelihood-ratio of the mode and the midpoint*. I.I.E. Transaction, 22, 3, pp. 198-203.
- [16] **Chesley G.R.**, (1975). *Elicitation of Subjective Probabilities a review*. The Accounting Review, 50, 2, pp. 325-337.
- [17] **Clark C.E.**, (1962). *The PERT model for the distribution of an activity times*. Operation Research, 10, pp. 405-406.
- [18] **Clark P.E.**, (1973). *A subordinate stochastic process model with finite variance for speculative prices*. Econometrica, 41, 1, pp. 135-155.

- [19] **Clemen R.T. y Winkler R.L.**, (1999). *Combining probability distributions form experts in risk analysis*. Risk Annual, 19, pp. 187-203.
- [20] **D'Agostino, R. y Stephens, M.**, (1986). *Goodness-of-Fit Techniques*, Marcel Dekker, Inc.
- [21] **Davidson L.B. y Cooper D.O.**, (1980). *Implementing effective risk analysis at Getty Oil Company*. Interfaces, 10, pp. 62-75.
- [22] **Dumas de Raully D.**, (1968). *L'estimation statistique*. Gauthier-Villars.
- [23] **Elderton W.P. y Johnson N.L.**, (1969). *Systems of frequency curves*. Cambridge University Press, London.
- [24] **Elmaghraby S.E.**, (1978). *Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models*. John Wiley & Sons, Ed. New York.
- [25] **Epps T.W. y Epps M.L.**, (1976). *The stochastic dependence of security price changes and transaction volumes: Implications for the mixture of distributions hypothesis*. Econometrica, 44, 2, pp. 305-321.
- [26] **Fama E.F.**, (1963). *Mandelbrot and the stable paretian hypothesis*. Journal of Business, 36, pp. 420-429.
- [27] **Fama E.**, (1965). *The behavior of stock market prices*. Journal of Business, 38, 1, pp. 34-105.
- [28] **Fama E.F. y Roll R.**, (1968). *Some properties of symmetric stable distributions*. Journal of American Statistical Association, 63, pp. 817-836.
- [29] **Fama E.**, (1976). *Foundations of Finance: Portfolio Decisions and Securities Prices*. New York: Basic Books, ISBN 0465024998.
- [30] **Gallagher C.**, (1987). *A note on PERT Assumptions*. Management Science, 33, 10, pp. 1360-1360.
- [31] **García C.B.**, (2007). Tesis doctoral. *Generalizaciones de la distribución biperabólica. Aplicaciones en el ámbito financiero y en el campo de la valoración*. Universidad de Granada.

- [32] **García J., Cruz S. y Andújar A.S.**, (1998). *La confiance de l'expert comme base pour particulariser la bêta du PERT*. Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa, 7, 1, pp. 47-56.
- [33] **García J., Cruz S. y García C.B.**, (2005). *The two-sided power distribution for the treatment of the uncertainty in PERT*. Statistical Methods and Applications, 14, 2, pp. 209-222.
- [34] **García C.B., García J. y Cruz S.**, (2009). *The generalized biparabolic distribution*. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 17, 3, pp. 377-396.
- [35] **Gnedenko B.V y Kolmogorow A.N.**, (1954). *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-Wesley Publishing Co.
- [36] **Golenko-Ginzburg D.**, (1988). *On the distribution of activity time in PERT*. Journal of the Operation Research Society, 39, 8, pp. 767-771.
- [37] **Gray J.B. y French D.W.**, (1990). *Empirical comparisons of distributional models for stock index returns*. Journal of Business Finance & Accounting, 17, pp. 451-459.
- [38] **Grubbs F.E.**, (1962). *Attempts to validate certain PERT Statistic or "Picking on PERT"*. Operation Research, 10, pp. 912-915.
- [39] **Gupta A.K. y Nadarajah S.**, (2004). *Handbook of beta distribution and its applications*. New York, Marcel Dekker.
- [40] **Hampton J.M., Moore P.G. y Thomas H.**, (1973). *Subjective probability and its measurement*. Journal of the Royal Statistical Society Ser A, 136, pp. 21-42.
- [41] **Hahn E.D.**, (2008). *Mixture densities for project management Activity times: A robust approach to PERT*. European Journal of Operational Research, 188, pp. 450-459.
- [42] **Herrerías J.M.**, (2002). Tesis doctoral. *Avances en la teoría general de valoración en ambiente de incertidumbre*. Universidad de Granada.

- [43] **Herrerías R.**, (1989). *Modelos probabilísticos alternativos para el Método PERT. Aplicación al Análisis de Inversiones*. Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, pp. 557-562.
- [44] **Herrerías R. y Calvente H.**, (1987). *Una ley de probabilidad para el estudio de los flujos de caja de una inversión*. Libro Homenaje al profesor Gonzalo Arnáiz Vellando. INE, Madrid, 279-296. Recogido en Herrerías, R. (2001, editor), pp. 119-127.
- [45] **Herrerías R., García J. y Cruz S.**, (2003). *A note on the reasonableness of PERT hypothesis*. Operations Research Letters, 31, 1, pp. 60-62.
- [46] **Herrerías R. y Miguel S.**, (1988). *Expresiones alternativas para la varianza de la distribución trapezoidal*. Actas de la II Reunión de ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Valladolid, 55-59. Recogido en Herrerías, R. (2001, ed.), pp. 129-133..
- [47] **Herrerías R., Palacios F. y Herrerías J.M.**, (2003). *Una variante práctica del método de valoración de las dos funciones de distribución*. IV Seminario ASEPELT: Programa, selección, control y valoración de proyectos. Editorial Universidad de Granada, ISBN 84-338-3108-9.
- [48] **Herrerías R. y Pérez E.**, (1991). *Estimación de una distribución como modelo para su utilización en el método PERT*. Actas de la V Reunión de ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Las Palmas de Gran Canarias. Recogido en Programación, selección y control de proyectos en ambiente de incertidumbre, Rafael Herrerías Pleguezuelo (2001), pp. 19-25.
- [49] **Hora S.C.**, (2004), *Probability Judgements for Continuous Quantities: Linear Combinations and Calibration*. Management Science, 50, 5, pp. 597-604.
- [50] **Hsu D.A.**, (1982). *A Bayesian robust detection of shift in the risk structure of stock market returns*. Journal of American Statistical Association, 77, 377, pp. 29-39.

- [51] **Izenman A.J.**, (1991). *Recent developments in nonparametric density estimation*. Journal of American Statistical Association, 86 (413), pp. 205-224.
- [52] **I-Tung Yang**, (2005). *Impact of budget uncertainty on project time-cost tradeoff*. IEEE Transactions on engineering management, 52, 2, pp. 167-174.
- [53] **Johnson D.**, (1997). *The triangular distribution as a Proxy for the beta distribution in risk analysis*. Statistician, 46, pp. 387-398.
- [54] **Johnson D.**, (1998). *The robustness of mean and variance approximations in risk analysis*. The journal of the Operation Research Society. Oxford, 49, 3, pp. 253-263.
- [55] **Kamburowski J.**, (1997). *New validations of PERT times*. Omega International Journal of Management Sciences, 25, 3, pp. 323-328.
- [56] **Keefer D.L. y Bodily S.E.**, (1993). *Three-point Approximations for Continuous Random Variables*, Management Science, 29, 5, pp. 595-609.
- [57] **Keefer D.L. y Verdini W.A.**, (1993). *Better estimation of PERT activity time parameters*, Management Science, 39, 9, pp. 1086-1091.
- [58] **Kon S.J.**, (1984). *Models of stock returns, A comparison*. Journal of Finance, 39, pp. 147-165.
- [59] **Kotz S.J. y Johnson N.L.**, (1985). *Moment ratio diagrams*. Encyclopedia of Statistical Sciences, 5, ed. S. Kotz, C.B. Read, N. Balakrishnan and B. Vidakovic, New York, pp. 602-604.
- [60] **Kotz S. y Seier E.**, (2007). *Kurtosis orderings for two-sided power distribution*. Brazilian Journal Probability and Statistics.
- [61] **Kotz S. y Van Dorp J.R.**, (2004). *Beyond Beta - Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. ISBN 981-256-45-3.

- [62] **Kotz S. y Van Dorp J.R.**, (2004). *Uneven two-sided power distributions with applications in econometric models*. Statistical Methods and Applications, 13, 3, pp. 285-313.
- [63] **Kotz S. y Van Dorp J.R.**, (2006). *A novel method for fitting unimodal continuous distributions on a bounded domain utilizing expert judgment estimates*. IIE Transactions, 38, pp. 421-436.
- [64] **Lau H. y Somarajan C.**, (1995). *A proposal on improved procedures for estimating task +/- time distributions in PERT*. European Journal of Operational Research, 85, pp. 39-52.
- [65] **Lau H., Lau A.H. y Ahang Y.**, (1996). *A simple and logical alternative for making PERT time estimates*. IIE Transactions, 28, 3, pp. 183-192.
- [66] **Lau H., Lau A.H. y Ho C.**, (1998). *Improved moment-estimation formulas using more than three subjective fractiles*. Management Science, 44, 3, pp. 346-350.
- [67] **Lévy P.**, (1925). *Calcul des Probabilités*. Gauthier-Villars.
- [68] **MacCrimmon C.A. y Ryavec C.A.**, (1964). *An analytical study of the PERT assumptions*. Operation Research, 12, 1, pp. 16-37.
- [69] **Madan D.B. y Seneta E.**, (1990). *The variance gamma (V.G.) model for share market returns*. Journal of Business, 63, pp. 511-524.
- [70] **Malcolm D.G, Roseboom J.H, Clark C.E. y Fawar W.**, (1959). *Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation*. Operation Research. 7, pp. 646-669.
- [71] **Mandelbrot B.**, (1963). *The variation of certain speculative prices*. Journal of Business, 36, 4, pp. 394-419.
- [72] **Mandelbrot B. y Taylor H.M.**, (1967). *On the distribution of stock price differences*. Operation Research, 15, 6, vpp. 1057-1062.

- [73] **Markowitz H.M.**, (1987). *Mean-Variance analysis in portfolio choice and capital markets*. Basil-Blackwell, Oxford.
- [74] **Matherson J.E. y Winkler R.L.**, (1976). *Scoring rules for continuous probability distributions*. Management Science, 22, pp. 1087-1096
- [75] **McLachlan G.J. y Basford K.E.**, (1988). *Mixture Models: Inference and Applications to Clustering*. New York.
- [76] **Megill R.E.**, (1984). *An introduction to Risk Analysis*. PennWell Books.
- [77] **Miralles Marcelo J.L. y Miralles Quiros J.L.**, (2006). *Nuevas perspectivas del mercado bursátil. El caso español*. Universia Business Review. Actualidad económica, 2T, N° 010, ISSN 1698-5117.
- [78] **Moder J.J. y Rodgeres E.G.**, (1968). *Judgement estimates of the moments of PERT type distributions*. Management Science, 15, 2, pp. B76-B83.
- [79] **Moder J.J., Phillips C.R. y Davis E.W.**, (1983). *Project Management with CPM, PERT and Precedence Diagramming, third ed.* Van Nostrand Reinhold, New York.
- [80] **Moitra S.D.**, (1990). *Skewness and the beta distribution*. Journal of the Operational Research Society 41, 10, pp. 953-961.
- [81] **Moore A.B.**, (1964). *Some characteristics of changes in common stock prices* in P.Cootner. The Random Character of Stock Market Prices. MIT Press, Cambridge.
- [82] **Moskowitz H. y Bullers W.I.**, (1979). *Modified PERT versus Fractile assessment of subjective Probability Distributions*. Organizational Behavior and Human Performance, 24, pp. 167-194.
- [83] **Nadarajah S.**, (2005), *On the two-sided power distribution*. Metrika, 61, 3, pp. 309-321.

- [84] **Navy**, (1958). *Special Project Office, Bureau of Naval Weapons*. PERT Summary Report, Phase I, National Technical Information Service AD - 735902.
- [85] **Officer R.R.**, (1972). *The distribution of stock returns*. Journal of the American Statistical Association, 67, 340, pp. 807-812.
- [86] **Osborne M.F.M.**, (1959). *Brownian Motion in the stock market*. Operation Research, 7, pp. 145-173.
- [87] **Pairman E. y Pearson K.**, (1919). *On corrections for the moment-coefficients of limited range frequency distributions when there are finite or infinite ordinates and any slopes at the terminals of the range*. Biometrika, 12, 3/4, pp. 231-258.
- [88] **Palacios F.**, (1997). *Modelización de la opinión del experto expresada en términos de valor pesimista, más verosímil y optimista. Propiedades del valor esperado y soluciones alternativas al PERT clásico*. Actas de la I reunión científica de programación, selección y control de proyectos celebrada en Almería, ASEPELT-ESPAÑA. Recogido en Programación, selección y control de proyectos en ambiente de incertidumbre, Rafael Herrerías Pleguezuelo (2001, ed.), pp. 89-110.
- [89] **Palacios F., Pérez E., Herrerías R. y Callejón J.**, (1999). *Estimación no paramétrica de la distribución del VAN en proyectos de inversión con tasas de descuento aleatorias*. Actas en CD-Rom de la XIII reunión ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Burgos. Recogido en Programación, selección y control de proyectos en ambiente de incertidumbre, Rafael Herrerías Pleguezuelo (2001, ed.), pp. 289-299.
- [90] **Peiró A.**, (1994). *The distribution of stock returns : international evidence*. Applied Financial Economics, 4, pp. 431-439.
- [91] **Pérez-Quirós G. y Timmermann A.**, (2001). *Business cycle asymmetries in stock returns: Evidence from higher order moments and conditional densities*. Journal of Econometrics, 103, pp. 259-306.

- [92] **Perry C. y Greig I.D.**, (1975). *Estimating the mean and variance of subjective distributions in PERT and decision analysis*. Management Science, 21, 12, pp. 1477-1480.
- [93] **Press S.J.**, (1967). *A compound events model for security prices*. Journal of Business, 45.
- [94] **Praetz P.D.**, (1972). *The distribution of share price changes*. Journal of Business, 45, pp. 49-55.
- [95] **Randolph P. y Littlefield T.J.**, (1987). *An answer to Sasieni's question on PERT times*. Management Science, 33, 10, pp. 1357-1359.
- [96] **Roberts H.V.**, (1959), *Stock Market 'Patterns' and Financial Analysis: Methodological Suggestions*. Journal of Finance, 4, pp. 1-10.
- [97] **Romero C.**, (1991). *Técnicas de programación y control de proyectos*. Pirámide.
- [98] **Sasieni M.W.**, (1986). *A note on PERT Times*. Management Sci, 32, pp. 1652-1953.
- [99] **Selvidge J.E.**, (1980). *Assessing the extremes of probability distributions by the fractile method*. Decision Sciences, 11, pp. 493-502.
- [100] **Simpson T.**, (1755), *A letter to he Right Honourable George Earls of Macclesfield, President of the Royal Society, on the advantage of taking the mean of a number of observations, in practical astronomy*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 49, pp. 82-93.
- [101] **Smith J.B.**, (1981). Tesis doctoral. *The probability distribution of market returns: A logistic hypothesis*. University of Utah.
- [102] **Spetzler C.S y Staël Von Holstein C.S.**, (1975). *Probability encoding in decision analysis*. Management Science, 22, 3, pp. 340-358.
- [103] **Stuart A. y Ord J.K.**, (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics*. Distribution Theory, 1, Wiley, New York.

- [104] **Suárez A.**, (1980). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Ediciones Pirámide. ISBN: 8436818997
- [105] **Taha H.A.**, (1981). *Investigación de operaciones*. Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A. México.
- [106] **Teichmoeller J.**, (1971). *A note on the distribution of stock price changes*. Journal of the American Statistical Association, 66, 1, pp. 282-284.
- [107] **Titterington D.M., Smith A.F.M. y Markov U.E.**, (1985). *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*. United Kingdom.
- [108] **Upton D.E. y Shannon D.S.**, (1979). *The Stable Paretian Distribution, Subordinated Stochastic Process, and Asymptotic Lognormality: An Empirical Investigation*, The Journal of Finance, 34, 4, pp. 1031-1039.
- [109] **Van Dorp J.R. y Kotz S.**, (2002). *A Novel Extension of the Triangular Distribution and its Parameter Estimation*. The Statistician, 51, 1, pp. 63-79.
- [110] **Van Dorp J.R. y Kotz S.**, (2002). *The Standard Two-Sided Power Distribution and its Properties: with Applications in Financial Engineering*. The American Statistician, 56, pp. 90-99.
- [111] **Van Dorp J.R. y Kotz S.**, (2003). *Generalizations of Two-Sided Power Distributions and their Convolution*. Communications in Statistics: Theory and Methods, 32, pp. 1703-1723.
- [112] **Van Dorp J.R. y Kotz S.**, (2003). *Generalized Trapezoidal Distributions*. Metrika, 58, Issue 1, pp. 85-97.
- [113] **Van Dorp J.R., Cruz S., García J. y Herrerías R.**, (2007). *An elicitation procedure for general trapezoidal distribution with an uniform central stage*. Decisión Análisis, 4, 3, pp. 156-166.
- [114] **Van Dorp J.R. y Mazzuchi T.A.**, (2003). *Parameter specification of the beta distribution and its Dirichlet extensions utilizing quantiles*. Beta

- distributions and its applications, ed. Gupta A.K. y Nadarajah S. 29, 1, pp. 1-37.
- [115] **Vāduva I.**, (1971). *Computer Generation of Random Variables and Vector Related to PERT Problems*, in B. Bereanu. Proceedings of the 4th conference on probability theory, pp. 381-395.
- [116] **Vose D.**, (1996), *Quantitative Risk Analysis: A guide to Monte Carlo simulation Modelling*. Wiley, New York.
- [117] **Wallsten T.S. y Budescu D.V.**, (1983). *Encoding subjective probabilities: A psychological and psychometric review*. Management Science, 29, 2, pp. 151-173.
- [118] **Westerfield R.**, (1977). *The distribution of common stock price change: An application of transactions time and subordinated stochastic models*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 5, pp. 743-765.
- [119] **Williams T.M.**, (1992). *Practical use of distributions in network analysis*. Journal of the Operations Research Society, 43, pp. 265-270.
- [120] **Wilson J. y Paxson D.E.**, (Julio 2002), *Unsteady ejector performance and experimental investigation using a resonance tube driver*. Available <http://grc.nasa.gov/GLTRS>. Joint Propulsion Conference, Indianapolis Indiana.
- [121] **Winston W.L.**, (1993), *Operations Research, Applications and Algorithms*. Pacific Grove, CA: Duxbury Press.
- [122] **Yu Chuen-Tao L.**, (1980). *Aplicaciones prácticas del PERT y el CPM*. Deusto.
- [123] **Yu Chuen-Tao L.**, (1989). *Aplicaciones practicas del PERT y CMP: Nuevos métodos de dirección para Planificación, Programación y Control de Proyectos*. Deusto.

ANEXO A

CARACTERÍSTICAS ESTOCÁSTICAS DE LAS DISTRIBUCIONES EN EL ÁMBITO FINANCIERO

A.1. Distribución Beta

$$E[Z] = 0, \tag{A.1}$$

$$\text{var}[Z] = \frac{s^2}{k+3}, \tag{A.2}$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 0, \tag{A.3}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3(k+3)}{k+5}. \tag{A.4}$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre los parámetros k y n , $k = n - 1$, se pueden expresar la varianza y el coeficiente de curtosis de la distribución beta por:

$$\text{var}[Z] = \frac{s^2}{n+2}, \quad (\text{A.5})$$

$$\beta_2 = \frac{3(n+2)}{n+4}. \quad (\text{A.6})$$

A.2. Distribución U-Beta

$$E[Z] = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{var}[Z] = \frac{s^2(3+k(1-\theta))}{3(k+3)} = \frac{s^2(3+(n-1)(1-\theta))}{3(k+3)}, \quad (\text{A.8})$$

$$\beta_1 = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\beta_2 = \frac{9(k+3)(15+k(k+8)(1-\theta))}{5(k+5)(3+k(1-\theta))^2} = \frac{9(n+2)(15+(n-1)(n+7)(1-\theta))}{5(n+4)(3+(n-1)(1-\theta))^2}. \quad (\text{A.10})$$

A.3. Distribución TSP

$$E[Z] = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{var}[Z] = \frac{2s^2}{(n+1)(n+2)}, \quad (\text{A.12})$$

$$\beta_1 = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\beta_2 = \frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}. \quad (\text{A.14})$$

A.4. Distribución U-TSP

$$E[Z] = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\text{var}[Z] = \frac{s^2[2 + 3n + n^2 + \theta(4 - 3n - n^2)]}{3(n+1)(n+2)}, \quad (\text{A.16})$$

$$\beta_1 = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\beta_2 = \frac{9(n+1)(n+2)[24 + n(n+5)(10 + 5n + n^2)(1 - \theta) + 96\theta]}{5(n+3)(n+4)[2 + n(n+3)(1 - \theta) + 4\theta]^2}. \quad (\text{A.18})$$

A.5. Distribución GBP

$$E[Z] = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\text{var}[Z] = \frac{3s^2(5n^2 + 9n + 2)}{(n+2)(n+3)(2n+3)(3n+1)}, \quad (\text{A.20})$$

$$\beta_1 = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\beta_2 = \frac{2(n+2)(n+3)(2n+3)(3n+1)(3n+5)(7n^2 + 19n + 4)}{(n+4)(n+5)(2n+5)(5n^2 + 9n + 2)^2}. \quad (\text{A.22})$$

A.6. Distribución U-GBP

$$E[Z] = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\text{var}[Z] = \frac{s^2[6n^4 + 41n^3 + 94n^2 + 81n + 18 - (6n^4 + 41n^3 + 49n^2)\theta]}{3(n+2)(n+3)(2n+3)(3n+1)}, \quad (\text{A.24})$$

$$\beta_1 = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\beta_2 = \frac{9(n+2)(n+3)(2n+3)(3n+1)[A + B(1 - \theta)]}{5C[D - (1 - \theta)E]^2}. \quad (\text{A.26})$$

donde

$$A = 3n^3(4663 - 4033\theta) + n^2(16699 - 8419\theta) + 9630n + 1800,$$

$$B = 12n^7 + 220n^6 + 1641n^5 + 6409n^4,$$

$$C = 2n^3 + 23n^2 + 85n + 100,$$

$$D = n^2(94 + 49\theta) + 81n + 18,$$

$$E = 6n^4 - 41n^3.$$

