

#7 6 3v

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Fecha 13/11/01
ENTRADA NUM. 4318

UNIVERSIDAD de GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS



BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 13378/03X
Nº Copia 1559288

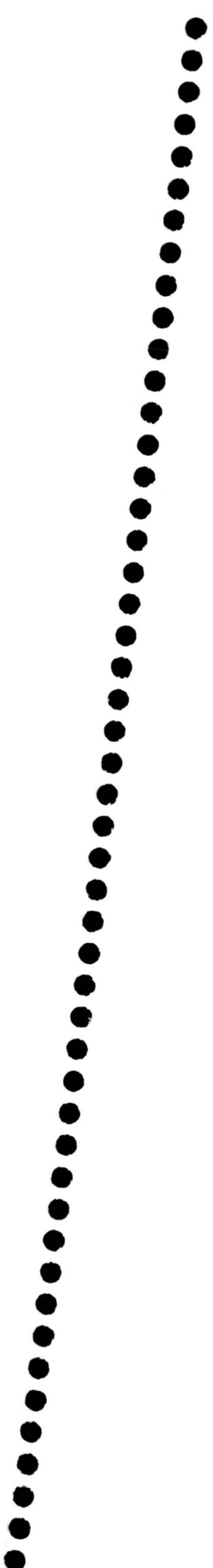
Departamento de Matemática Aplicada

CONSTRUCCIONES EN GEOMETRÍA HIPERBÓLICA Y TESELACIONES MEDIANTE GRUPOS N.E.C. POLIGONALES. ALGORITMOS DE AUTOMATIZACIÓN


TESIS DOCTORAL

Presentada por
Domingo Gámez Domingo

Granada, 2001



UNIVERSIDAD DE GRANADA
02 NOV. 2001
COMISION DE DOCTORADO



UNIVERSIDAD de GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS


Departamento de Matemática Aplicada

**CONSTRUCCIONES EN GEOMETRÍA
HIPERBÓLICA Y TESELACIONES
MEDIANTE GRUPOS N.E.C. POLIGONALES.
ALGORITMOS DE AUTOMATIZACIÓN**

TESIS DOCTORAL

Presentada por
Domingo Gámez Domingo

Granada, 2001



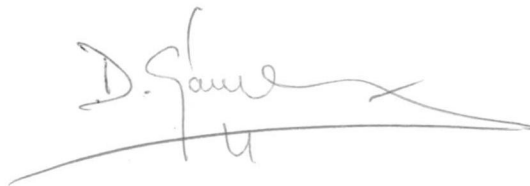
*A mi mujer Paqui, y a mis hijos
Juan de Dios y Amelia*

*A mis padres Juan de Dios y Dolores,
y a mi hermano Juan*

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

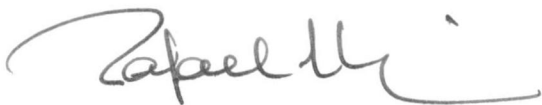
La presenta memoria ha sido realizada en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los Doctores D. Rafael Pérez Gómez y D. Ceferino Ruiz Garrido, profesores de la Universidad de Granada.

El Autor:



Fdo: Domingo Gámez Domingo

Vº Bº de los Directores:



Fdo: Rafael Pérez Gómez
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada



Fdo: Ceferino Ruiz Garrido
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Deseo dar las gracias a todas aquellas personas que me han apoyado en todo momento con su ánimo, estímulo e inestimable ayuda.

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a los directores de este trabajo, Dr. D. Rafael Pérez Gómez y Dr. D. Ceferino Ruiz Garrido de los Departamentos de Matemática Aplicada y, Geometría y Topología, respectivamente, por su generosa dedicación de tiempo, por su imprescindible ayuda, y por su infatigable labor de mejora continua de esta Memoria.

Quisiera también agradecerle al Director del Departamento de Matemática Aplicada, Dr. D. Miguel Pasadas Fernández, su inestimable ayuda, sin la cual no hubiera sido posible la parte correspondiente a la programación de este trabajo.

Al Dr. D. Victoriano Ramírez González, con el que he compartido durante años como secretario el trabajo en el Departamento, le doy las gracias por haberme animado continuamente a llevar a cabo esta Memoria.

A mis amigos del Departamento en la Escuela Universitaria de Arquitectura Técnica y muy especialmente a José Castellano, M^a Luisa Márquez, Ana Isabel Garralda, y Maribel Berenguer que han hecho con su continuo estímulo y ayuda mucho más agradable el trabajo. También, como no, a Manuel Ruiz porque con sus indicaciones y sugerencias ha contribuido a mejorar algún apartado de este trabajo.

Y por último, a mi familia por su empeño e ilusión en ver terminado este Proyecto.

Índice General

0	Introducción	i
1	Geometría hiperbólica plana	1
1.1	Introducción	1
1.2	Definición axiomática del plano hiperbólico	2
1.3	El semiplano de Poincaré: H^2	3
1.3.1	La métrica	3
1.3.2	Las geodésicas	4
1.3.3	Area de un dominio	10
1.4	Grupo de Transformaciones de \mathbb{C}^+	12
1.5	El espacio métrico H^2	14
1.5.1	Invarianza de ds bajo G	14
1.6	El grupo de isometrías $Iso(H^2)$	20
1.7	Clasificación de $Iso(H^2)$ atendiendo al estudio de puntos fijos	25
1.8	Descomposición de las isometrías de H^2 en producto de reflexiones	36

1.9	El disco de Poincaré: D^2	40
1.10	Expresión de las isometrías de D^2	46
1.11	Clasificación de $Iso(D^2)$ atendiendo al estudio de puntos fijos . . .	51
1.12	Otra expresión de la distancia entre dos puntos de D^2	53
1.12.1	El ángulo de paralelismo	55
2	Algoritmos de automatización en Geometría Hiperbólica	59
2.1	Introducción.	59
2.2	Construcción de la mediatriz	60
2.2.1	Problema 1	60
2.3	Reflexión	64
2.3.1	Problema 2	64
2.4	Construcción de la traslación	66
2.4.1	Problema 3	66
2.5	Traslación sobre una recta	68
2.5.1	Problema 4	69
2.6	Construcciones que involucran perpendicularidad	72
2.6.1	Problema 5	72
2.6.2	Problema 6	75
2.7	Construcción de la circunferencia	78
2.7.1	Problema 7	79

2.8	Construcción del horociclo	81
2.8.1	Problema 8	82
2.8.2	Problema 9	84
2.9	Construcción del hiperciclo	85
2.9.1	Problema 10	87
2.10	Traslación según una recta	90
2.10.1	Problema 11	90
2.10.2	Propiedades de la traslación	92
2.11	Construcciones relativas al giro	97
2.11.1	Problema 12	97
2.11.2	Problema 13	99
2.12	Construcciones relativas a la rotación límite	100
2.12.1	Problema 14	100
2.12.2	Problema 15	102
2.13	Construcciones relativas a las reflexiones sesgadas	103
2.13.1	Problema 16	103
2.13.2	Problema 17	107
3	Los cuadriláteros de Saccheri y Lambert	109
3.1	Introducción	109
3.2	Cuadriláteros birrectangulares	111

3.2.1	Cuadriláteros de Saccheri	114
3.3	Cuadriláteros trirrectangulares o de Lambert	118
3.3.1	Existencia del cuadrilátero de Lambert	122
3.4	Cuadriláteros de Lambert y Saccheri	129
4	Teselaciones del plano hiperbólico	131
4.1	Introducción	131
4.2	Grupos NEC	133
4.3	Región Fundamental	134
4.3.1	Regiones Fundamentales Poligonales	137
4.3.2	Area de una región fundamental para un grupo NEC	139
4.4	Teselaciones del plano hiperbólico	139
4.4.1	Grupos Triangulares	140
4.4.2	Teselaciones con polígonos	142
4.4.3	Cuadriláteros caleidoscópicos de Saccheri y Lambert para teselar	146
4.5	Grupos Bicolor	148
	Conclusiones	155
	Bibliografía	161
A	Paquete Hyperbol	167

B Manual de uso del package Hyperbol

185

Introducción

La aparición en el siglo XIX de la Geometría Hiperbólica dio origen a nuevas e importantes ramas de las Matemáticas, pero su implicación más significativa es que obligó a los matemáticos a revisar radicalmente la comprensión de la naturaleza de las Matemáticas y su relación con el mundo físico. La Geometría Hiperbólica fue la culminación de una larga serie de esfuerzos en el área de la Geometría Euclídea y surge a raíz del análisis e interpretación del V Postulado de Euclides: *Con respecto a un punto A y una recta r que no pase por A no hay más de una recta que pasa por A , en el plano Ar que no corta a r .*

Lobatchevski, en 1826, aceptó como hipótesis la aserción contraria al V Postulado de Euclides. Tomando esta proposición condicionalmente como axioma y después de añadir los restantes postulados de la Geometría Absoluta, analizó las consecuencias esperando llegar a una contradicción. Sin embargo, como tal contradicción no se detectaba, obtuvo dos conclusiones: La primera, que el V Postulado no se puede demostrar a partir de los demás postulados, es decir, es independiente del resto; y, la segunda, que sobre la base de la afirmación opuesta se puede desarrollar una nueva Geometría completamente lógica, tan rica y perfecta como la de Euclides, a pesar de que sus resultados están en desacuerdo con la imagen intuitiva del espacio. Todo esto implicaba un resultado general de enorme importancia: *Existe más de un geometría lógicamente concebible.* Así, ésta debe ser desarrollada no sólo como un esquema lógico arbitrario, sino como una teoría que abra nuevos caminos y métodos para las teorías físicas - no olvidemos la vital importancia que tuvo dicha geometría en la teoría de la relatividad, por ejemplo -.

Casi al mismo tiempo que Nicolai Ivanovich Lobatchevski (1793-1856), Janos Bolyai (1802-1860) y, anteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) llegaron al mismo resultado. H. Poincaré (1854-1912) desarrolló modelos concretos para esta Geometría.

En un intento unificador, F. Klein (1849-1925) desarrolló en su Programa de

Erlangen la teoría de que toda geometría conlleva un grupo de transformaciones tales que determinadas propiedades de los objetos (puntos, rectas, figuras, etc.) quedan invariantes. Este grupo debe actuar transitivamente sobre el espacio geométrico y, al realizar el cociente por el subgrupo de isotropía de uno de los puntos, se obtiene un conjunto cociente identificable con el propio espacio geométrico. De este modo se identifica el estudio de las geometrías al de los cocientes entre grupos. En la Geometría Euclídea el grupo en cuestión es el Grupo Métrico y en la Hiperbólica el grupo es el de las Isometrías Hiperbólicas.

Siguiendo con el espíritu de F. Klein, es interesante estudiar las propiedades de los objetos propios de una Geometría que quedan invariantes por la acción de ciertas transformaciones del grupo que, en general, formarán un subgrupo. En particular, la Geometría Euclídea tiene unas figuras que se llaman mosaicos y, dentro de ellos, están los llamados periódicos. Tienen interés por su relación con la cristalografía. Los elementos del Grupo Métrico que dejan invariantes a los mosaicos periódicos constituyen los llamados Grupos Cristalográficos.

El problema de la teselación de cualquier espacio también puede abordarse cuando en éste está establecida la Geometría Hiperbólica para modelizarlo. ¿Qué problemas se plantean desde este punto de vista?

Haciendo un paralelismo con las teselaciones euclídeas, citaremos, modo de ejemplo, sólo dos:

1º) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180° . Entonces, ¿qué teselaciones por polígonos pueden hacerse? ¿Cómo concebir una teselación hecha, por ejemplo, con triángulos equiláteros de ángulos interiores 0° ?

2º) ¿Cómo clasificar estas teselaciones? Es decir, ¿cuál es el equivalente hiperbólico a un grupo cristalográfico?

De este modo se estudian los grupos NEC (*non euclidean crystallographic*) que son grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico con espacio cociente compacto. Si sólo contienen isometrías que conservan la orientación, entonces son llamados grupos fuchsianos. Un grupo NEC tiene 4 tipos de movimientos del plano hiperbólico: rotaciones, traslaciones, reflexiones y reflexiones sesgadas. En un grupo fuchsiano sólo hay rotaciones y traslaciones.

Hasta aquí hemos hablado solamente de las Geometrías Euclídea e Hiperbólica, pero otras Geometrías han ido surgiendo con el discurrir de los tiempos. En el último cuarto del pasado siglo XX, W. Thurston, en la Universidad de Princeton,

comenzó a publicar sus clases a partir de 1976 bajo el título de *La Geometría y Topología en 3-variedades*. En estas publicaciones están las bases de la segunda etapa de la geometrización de la Topología. Amplía el número de Geometrías a ocho: esférica, euclídea, hiperbólica, producto de la esfera de dimensión dos por la recta real, producto del plano hiperbólico por la recta real, cubierta universal del espacio unitario tangente al plano hiperbólico, grupo de Heisenberg y geometría nihilpotente.

En esta Memoria hemos centrado nuestra atención en la Geometría Hiperbólica, abordando los problemas desde una perspectiva constructivista. Las construcciones, lugares geométricos e isometrías tienen lugar en el plano hiperbólico, por lo que deberíamos de escribir h-recta, h-curva, h-reflexión, etc., sin embargo, hemos optado por escribir recta, curva, reflexión, etc. para hacer más fluida su lectura. No obstante, si en alguna representación del plano hiperbólico surge un elemento euclídeo, se hará notar explícitamente.

En el análisis de la bibliografía preexistente sobre Geometría Hiperbólica se detecta una falta de sistematización, coherencia y unificación de resultados. Creemos que, en primer lugar, sería conveniente una organización sistemática de los mismos. Y, en segundo lugar, ofrecer una demostración entre las equivalencias de distintos puntos de vista que convergen en el mismo resultado, cuando fuese necesario. Es probable que esa dispersión de resultados citada anteriormente fuese fruto de la falta de herramientas adecuadas mediante las cuales se hiciese posible la visualización de los problemas planteados, aparentemente contrarios a los supuestos habituales. Esto exige la creación de una herramienta de dibujo que permita materializar construcciones geométricas necesarias para resolver ciertos problemas o visualizar situaciones abstractas. Para la Geometría de Euclides estas herramientas son la regla y el compás usuales. No nos cabe la menor duda en que el hecho fundamental de que la Geometría Hiperbólica, a pesar de haber sido creada en el siglo XIX, no haya tenido la aceptación y difusión necesarias, se debe en gran parte a la falta de esos medios. Con este fin hemos creado una herramienta de dibujo cuyo soporte informático es el software *Mathematica*, que ha dado lugar a una serie de módulos con los que se puede realizar cualquier dibujo o construcción geométrica, en los dos modelos de Poincaré del plano hiperbólico: el semiplano superior abierto denotado por H^2 y el disco unidad abierto denotado por D^2 . Con la creación y el uso de la informática, la Geometría Hiperbólica resulta más accesible y los resultados analíticos, así como las construcciones geométricas, se entienden mejor. En este sentido, esta Memoria, además de exponer algunos resultados obtenidos con el estudio de esta Geometría, también intenta poner en orden muchas ideas que en la mayoría de los trabajos consultados vienen obscuras y son difíciles de entender.

El trabajo invertido en realizar la programación con *Mathematica*, en principio, no resulta carente de contenido investigador. Con la utilización del ordenador se han originado en muchas ocasiones bastantes problemas y cuestiones que de otro modo no se hubieran planteado, por lo que ha supuesto una herramienta de trabajo indispensable en muchos apartados de esta Memoria. De modo expreso hay que reseñar que cuando se repetía una cierta situación en algunos problemas particulares, creados con algunos ejemplos concretos que son tratados con el ordenador, pasábamos a conjeturar que dicha información podría ser expresable como un teorema, por lo que intentábamos demostrarlo o bien buscar un contraejemplo. De aquí que el uso del ordenador y el consiguiente tratamiento informático de las cuestiones sometidas a estudio, han tenido bastante importancia en la investigación realizada.

Una vez llegados a este punto, se hace necesaria la descripción de los contenidos de cada uno de los capítulos que integran esta Memoria.

En el Capítulo 1 se introduce el plano hiperbólico axiomáticamente y se pasa a trabajar en los dos modelos de Poincaré del plano hiperbólico, H^2 y D^2 . Se continúa obteniendo que las transformaciones de Moebius de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1,$$

coinciden con el grupo de los automorfismos del semiplano superior abierto \mathbb{C}^+ . Asimismo, se obtiene una expresión de la distancia en H^2 en función de la razón doble de 4 puntos alineados. De este modo, las transformaciones de Moebius pasan a ser isometrías, ya que dejan invariante la razón doble. Las anteriores isometrías son las que conservan la orientación, denotadas por $Iso^+(H^2)$; las que no la conservan son denotadas por $Iso^-(D^2)$, y se obtienen por composición de las isometrías directas con una isometría fijada que no conserva la orientación. Tanto unas como otras conservan la magnitud de los ángulos. Las directas conservan la orientación del ángulo y las inversas cambian dicha orientación.

Tanto las isometrías directas como las inversas de H^2 , son definidas en función de los puntos fijos que dejan cada una de ellas, obteniéndose tanto sus expresiones analíticas como sus identificaciones matriciales: $Iso(H^2) \cong \mathfrak{R}/\{I, -I\}$.

Haciendo uso de los puntos fijos de las isometrías, realizamos una clasificación, clara y exhaustiva, de las isometrías de H^2 a partir de su traza. Todo esto se resume en el siguiente Teorema de Clasificación:

Sea $g \in Iso(H^2)$, entonces,

- 1.- g es una rotación si, y sólo si, $\det(g) = 1$ y $\text{tra}(g) > 2$.
- 2.- g es una rotación límite o la identidad si, y sólo si, $\det(g) = 1$ y $\text{tra}(g) = 2$.
- 3.- g es una traslación si, y sólo si, $\det(g) = 1$ y $\text{tra}(g) < 2$.
- 4.- g es una reflexión si, y sólo si, $\det(g) = -1$ y $\text{tra}(g) = 0$.
- 5.- g es una reflexión sesgada si, y sólo si, $\det(g) = -1$ y $\text{tra}(g) \neq 0$.

Posteriormente, mediante el enunciado y demostración de varias proposiciones, descomponemos las isometrías de H^2 en producto de reflexiones. Los resultados a los que nos referimos son:

1.- Sea $g \in \text{Iso}^+(H^2)$, entonces, g es un giro con centro en $A \in H^2$ si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_l respecto a dos rectas m y l distintas que pasan por A tal que $g = \sigma_m \sigma_l$.

2.- Sea $g \in \text{Iso}^+(H^2)$, $g \neq 1_{H^2}$, entonces, g es una rotación límite con centro en un punto P de la recta del infinito si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_l sobre dos rectas distintas y asíntoticas en P tal que $g = \sigma_m \sigma_l$.

3.- Sea $g \in \text{Iso}^+(H^2)$, entonces, g es una traslación sobre una recta l si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_n respecto de dos rectas distintas y ortogonales a l tal que $g = \sigma_m \sigma_n$.

4.- Sea $g' \in \text{Iso}^-(H^2)$, entonces, g' es una reflexión sesgada de recta de reflexión l si, y sólo si, existe una traslación g según l tal que $g' = g \sigma_l$.

El estudio de D^2 es abordado haciendo uso de la transformación de Cayley,

$$f_c(z) = \frac{z - i}{z + i} \quad (z \in \mathbb{C}^+).$$

De este modo se trasladan todos los resultados vistos en H^2 a D^2 . Es decir, la métrica, las geodésicas y las expresiones de las distintas isometrías, llegando a la clasificación de las isometrías de D^2 según sus puntos fijos.

En el Capítulo 2 se abordan los distintos problemas constructivos que se pueden presentar con el grupo de transformaciones del plano hiperbólico. Se deter-

minan los algoritmos que, posteriormente, fueron programados mediante el software *Mathematica*.

De esta forma se han creado las herramientas electrónicas de dibujo indispensables para poder visualizar ciertos modelos que pueden concebirse en el plano hiperbólico. La visualización es imprescindible en cualquier geometría, en ésta lo es mucho más por lo poco intuitivo de las situaciones que se presentan.

El trabajo con grupos de isometrías obliga a la determinación de la órbita de un punto por la acción de tal conjunto de transformaciones. Por tanto, también hemos implementado los algoritmos correspondientes para visualizar estos conjuntos de puntos. Así, se construyen las órbitas de las isometrías directas, tanto en H^2 como en D^2 , obteniendo otra expresión de la distancia en H^2 haciendo uso de la construcción de la circunferencia. En el estudio de las traslaciones según una recta, se obtienen una serie de propiedades relacionadas con el cuadrilátero de Saccheri, que se estudiarán posteriormente en el Capítulo 3.

Al final de la Memoria figura en el Apéndice A la programación realizada para la creación de los siguientes comandos: **Angulo**, **Cayley**, **Hcirc**, **HDdist**, **HDgiro**, **Hdist**, **HDhiperciclo**, **HDhorociclo1**, **HDhorociclo2**, **HDmediatriz**, **HDperp**, **HDperComun**, **HDrecta**, **HDreflexion**, **HDtraslacion**, **HDtrasrec**, **Hgiro**, **Hhiperciclo**, **Hmediatriz**, **Hhorociclo1**, **Hhorociclo2**, **Hperp**, **HperComun**, **Hrecta**, **Hreflexion**, **Htraslacion**, **Htrasrec**, **InCayley**. Todos estos comandos están acompañados de sus respectivos módulos para la realización de sus gráficas. Todas las gráficas que aparecen esta Memoria son ejemplos de la validez de los programas desarrollados.

Los cuadriláteros de Saccheri y Lambert dieron origen a la discusión sobre la existencia de Geometrías no Euclídeas. Su construcción en el plano hiperbólico a partir de unos datos dados, es un problema que necesita la utilización de ciertas isometrías, pero que no aparece en la literatura sobre el tema con algoritmos explícitos para su construcción con regla y compás hiperbólicos, quizá por no tener los medios constructivos adecuados. Este problema ha quedado solventado con el software descrito en el Capítulo 2.

El Capítulo 3, comienza con el estudio de cuadriláteros birrectangulares y, como caso particular, se construye el cuadrilátero de Saccheri utilizando, en un caso, la traslación de un punto según una recta que no lo contiene y, en otro, las expresiones de las razones trigonométricas del ángulo agudo φ . En ambos casos, dicho cuadrilátero es único salvo congruencias.

A continuación, se sigue con los cuadriláteros trirrectangulares o de Lambert, que se obtienen como intersección de dos clases de cuadriláteros birrectangulares, una con ángulos contiguos rectos y otra con ángulos opuestos rectos. Deducimos, al igual que en el estudio que hacíamos con los cuadriláteros birrectangulares, las relaciones entre los lados y el ángulo agudo. También se demuestra, a partir de dos números reales positivos que nos miden los dos lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, la condición necesaria y suficiente para que exista, salvo congruencias, un único cuadrilátero de Lambert. Dicho teorema es:

Sean $R > 0$, $\rho > 0$, la condición necesaria y suficiente para que exista un único cuadrilátero de Lambert, $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$, salvo congruencias, con los dos lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, $R = d(P, P')$ y $\rho = d(P, Q)$, es que $\tanh(\rho) \cosh(R) < 1$.

De la misma forma, dado un lado concreto y el ángulo agudo, demostramos, salvo congruencias, la existencia y unicidad del cuadrilátero de Lambert.

Este capítulo, también nos sirve de preámbulo para poder deducir, bajo qué condiciones se puede teselar el plano hiperbólico con estos tipos de cuadriláteros, utilizando el grupo generado por las reflexiones respecto a sus cuatro lados.

En el Capítulo 4 se presenta una definición de grupo NEC y su presentación canónica mediante los generadores. Definimos la región fundamental para un grupo NEC y comparamos ésta con la definición dada por Wilkie.([60])

Pasamos a teselar el plano hiperbólico con grupos triangulares, que nos abren el camino para utilizar los grupos poligonales, y demostramos cómo los polígonos con ángulos interiores de la forma $\frac{\pi}{n_i}$, con $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i > 2$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$ tal que $\sum_{i=1}^k \frac{\pi}{n_i} < (k-2)\pi$, teselan el plano hiperbólico y son regiones fundamentales con dichos grupos.

Basándonos en el estudio realizado en el Capítulo 3, demostramos cómo ciertos cuadriláteros de Saccheri y Lambert teselan el plano hiperbólico, exponiendo algunos ejemplos sobre dichas teselaciones.

Terminamos con el estudio de los grupos bicolor donde demostramos los dos siguientes teoremas:

- 1.- Sea (Γ, Γ') un grupo bicolor. Se verifica una y sólo una de las tres condi-

ciones siguientes:

- i) Γ y Γ' son fuchsianos.*
- ii) Γ es no fuchsiano y $\Gamma' = \Gamma^+$.*
- iii) Γ y Γ' son no fuchsianos y (Γ^+, Γ'^+) es un grupo bicolor.*

2.- Sea (Γ, Γ') un grupo bicolor, donde Γ es un grupo poligonal. Se verifica una y sólo una de las dos condiciones siguientes:

- i) Γ' es el subgrupo fuchsiano canónico de Γ ($\Gamma' = \Gamma^+$).*
- ii) El par (Γ^+, Γ'^+) formado por los grupos fuchsianos canónicos de Γ y Γ' respectivamente, es un grupo bicolor.*

Por último, exponemos algunos ejemplos de teselaciones bicolor utilizando triángulos y cuadriláteros de Saccheri y Lambert.

La Memoria se cierra con la exposición de las Conclusiones y Líneas de Investigación futuras a las que se ha llegado tras el trabajo de investigación realizado. Tras la Bibliografía figura el Apéndice A (mencionado anteriormente) y el Apéndice B que contiene las instrucciones efectivas para la obtención y visualización de las órdenes descritas en el Apéndice A.

Capítulo 1

Geometría hiperbólica plana

1.1 Introducción

Se reconoce el descubrimiento de la geometría no euclídea a Lobatchevsky, Bolyai y Gauss, si bien es cierto que Saccheri, Lambert, Wachter, Schweikart, Taurinus, Beltrami, Riemann, Poincaré y Klein, principalmente, hicieron aportaciones muy valiosas a dicha teoría. El problema de las paralelas suscitado por el V postulado de Euclides, se resistió hasta el 1826 cuando Lobatchevsky leyó un trabajo en la universidad de Kazán sobre los principios de la geometría, que incluía “una demostración rigurosa del teorema de las paralelas”. Tres años más tarde, publicó dicho matemático un artículo titulado *Sobre los principios de la geometría* que marca el nacimiento oficial de la geometría no euclídea, siendo este descubrimiento el paso más consecuente y revolucionario en matemáticas desde el tiempo de los griegos.

En 1872, en el famoso discurso inaugural de Erlangen, Félix Klein le da la vuelta a la noción misma de geometría al involucrar la teoría de grupos, mostrando cómo dicho concepto es una herramienta adecuada para caracterizar las diversas geometrías que habían aparecido: “una geometría es el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones”.

Nuestro objetivo en este capítulo es sentar las bases para trabajar en geometría hiperbólica plana. Para ello utilizaremos los dos modelos euclídeos de Poincaré del plano hiperbólico: H^2 y D^2 . Todas las construcciones, lugares geo-

métricos e isometrías se hacen en el plano hiperbólico, por lo que debería escribirse h-recta, h-curva, h-reflexión, etc. Sin embargo, para hacer más amable la lectura del texto, escribiremos recta, curva, reflexión, etc.. Por contra, si en alguna representación del plano hiperbólico surge un elemento euclídeo, se hará notar explícitamente.

1.2 Definición axiomática del plano hiperbólico

Comenzamos este apartado dando una definición axiomática del espacio en el que se desarrolla el contenido de esta memoria: el plano hiperbólico.

Definición 1.2.1 Sea X un espacio métrico con al menos un punto. Una recta en X es la imagen de una aplicación $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ que conserve la distancia.

Definición 1.2.2 Diremos que X es un plano hiperbólico si verifica los siguientes axiomas:

Axioma de incidencia Por dos puntos distintos de X pasa una única recta.

Axioma de reflexión Una recta en X , divide a éste en dos componentes conexas. Además existe una isometría, $\sigma : X \rightarrow X$, para la cual los puntos de la recta son fijos e intercambia las dos componentes conexas de su complemento.

Axioma de paralelismo Dados un punto A y una recta l de X , de modo que A no pertenezca a l , existe en la componente conexa de X determinada por l y A más de una recta que pasando por A no corta a l .

Este último axioma es independiente de los anteriores. Se prueba que si existe un plano hiperbólico X , entonces es único salvo isometrías ([34]).

Tenemos así una distinción muy clara entre dos geometrías, la euclídea y la hiperbólica, que derivan de la geometría absoluta al añadir sólo uno de los dos axiomas alternativos de paralelismo: el euclidiano o el hiperbólico ([12]).

Por lo tanto, teniendo en cuenta el principio de incertidumbre de Gödel, la geometría hiperbólica será consistente en tanto en cuanto lo sea la absoluta ya que está probada la independencia del axioma de las paralelas frente al resto. Además para trabajar con mayor comodidad en el plano hiperbólico, Poincaré creó dos modelos euclídeos del mismo, notados por H^2 y D^2 . Desde este punto de vista, los desarrollos que se hacen basados tanto en H^2 como en D^2 de la geometría hiperbólica son consistentes, en tanto en cuanto lo sea la geometría euclídea subyacente en ellos.

1.3 El semiplano de Poincaré: H^2

1.3.1 La métrica

Sea \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos, denotamos por \mathbb{C}^+ el semiplano superior abierto, es decir,

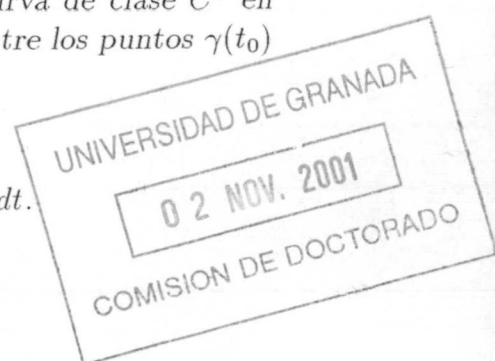
$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}.$$

El semiplano de Poincaré H^2 es un modelo del plano hiperbólico. Se obtiene considerando en \mathbb{C}^+ la métrica $ds = \frac{|dz|}{\text{Im}z}$ ([34]). Por tanto \mathbb{C}^+ con dicha métrica dará lugar a H^2 . Definida la métrica hiperbólica, podemos buscar las geodésicas (rectas) de H^2 para dicha métrica; es decir, los lugares geométricos que dan el "camino más corto" entre dos puntos. Vamos a demostrar que entre los lugares geométricos de H^2 de extremos z_0 y z_1 , aquél cuya longitud es mínima estará sobre una geodésica determinada por la semicircunferencia euclídea con centro en la frontera de H^2 y que pasa por z_0 y z_1 , si ambos tienen distinta parte real, o sobre la semirrecta euclídea ortogonal a dicha frontera que pasa por z_0 y z_1 si ambos tienen la misma parte real.

En efecto:

Proposición 1.3.1 Sea $\gamma = (x, y) : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow H^2$ una curva de clase C^2 en $[t_0, t_1]$, sin puntos múltiples y regular. Entonces, la longitud entre los puntos $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ de la curva γ , viene dada por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|dz(\gamma'(t))|}{\text{Im}(\gamma(t))} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt.$$



1.3.2 Las geodésicas

Determinemos las curvas que hacen mínima la longitud obtenida en la Proposición 1.3.1. Estas curvas denominadas geodésicas, se determinan con técnicas de geometría de Riemann a partir de los valores iniciales para un sistema de ecuaciones diferenciales de 2º orden ([14]), es decir dado un punto $A \in H^2$ y $\omega \in T_A(H^2)$, $\omega \neq 0$, y $t_2 \in \mathbb{R}$, existe una única geodésica parametrizada proporcionalmente a la longitud del arco, $\gamma(t)$, verificando que $\gamma(t_2) = A$ y $\gamma'(t_2) = \omega$. Para la determinación explícita de las geodésicas como lugares geométricos, consideramos el funcional

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt.$$

Hemos de encontrar las curvas $x = x(t), y = y(t)$ que hacen mínimo dicho funcional.

Sea $F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, x, y, p, q) = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{y}$.

Los extremales del funcional s son las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange ([50])

$$\begin{cases} F_x(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) - \frac{d}{dt} (F_p(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t))) = 0 \\ F_y(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) - \frac{d}{dt} (F_q(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t))) = 0 \end{cases}$$

Se tiene que

$$F_x = 0, F_p = \frac{p}{y\sqrt{p^2 + q^2}},$$

luego

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{x'(t)}{y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) = 0.$$

Por otro lado tenemos

$$F_y = -\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{y^2}, \quad F_q = \frac{q}{y\sqrt{p^2 + q^2}},$$

luego

$$-\frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y^2(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) = 0.$$

Así que el sistema que hay que resolver es

$$\begin{cases} \frac{x'(t)}{y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} = c \\ -\frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y^2(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Si se consideran curvas parametrizadas de la forma

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (r \cos t + k_1, r \sin t), \quad k_1 \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, \pi)$$

tenemos que,

$$x'(t) = -r \sin t, \quad y'(t) = r \cos t$$

y, por tanto,

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = r.$$

Sustituyendo en (1), queda

$$\begin{cases} \frac{-r \sin t}{r^2 \sin^2 t} = c \text{ luego, } c = -\frac{1}{r} \\ -\frac{r}{r^2 \sin^2 t} - \frac{d}{dt} \left(\frac{r \cos t}{r^2 \sin t} \right) = -\frac{1}{r \sin^2 t} + \frac{1}{r \sin^2 t} = 0. \end{cases}$$

Por tanto, estas curvas son soluciones del sistema (1).

Se puede comprobar que el sistema (1) tiene también las soluciones

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (k_2, t), \quad k_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Luego las curvas de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t + k_1 \\ y(t) = r \sin t \end{cases}, \quad k_1 \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, \pi), \quad (a)$$

y

$$\begin{cases} x(t) = k_2 \\ y(t) = t \end{cases}, \quad k_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (b)$$

son extremales del funcional s .

Por otra parte, F tiene derivadas parciales continuas de segundo orden con respecto a todas las variables y es positivamente homogénea de primer grado en p y q , o sea, existe $\lambda > 0$ tal que $\forall (x, y) \in H^2$ (dominio simplemente conexo),

$$F(t, x, y, \lambda p, \lambda q) = \lambda F(t, x, y, p, q).$$

Sea $F_1 = \frac{F_{pp} + F_{qq}}{p^2 + q^2}$, entonces

$$F_1(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) = \frac{1}{y(t) ((x'(t))^2 + (y'(t))^2)} > 0$$

ya que $y > 0$ y $x'(t) \neq 0$ ó $y'(t) \neq 0$.

En consecuencia, aplicando la condición de Legendre ([50]) cualquier extremal del funcional s es un mínimo para el mismo. Luego (a) y (b) minimizan este funcional, por lo que son geodésicas.

Comprobemos que estas curvas son todas las geodésicas de H^2 . Es fácil ver que reparametrizando las curvas (a) y (b), sus vectores tangentes toman todos los valores del plano tangente en cada punto de H^2 .

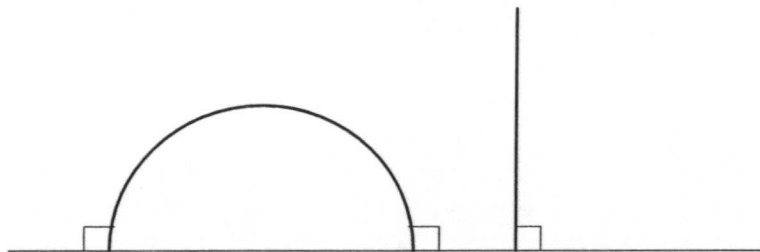
Por tanto, las rectas en H^2 son semicircunferencias euclídeas que se corresponden a la traza de la parametrización

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t + k_1 \\ y(t) = r \sin t \end{cases} \quad t \in (0, \pi), \quad (2)$$

con centro en la frontera de H^2 , y semirrectas euclídeas que se corresponden a la traza de la parametrización

$$\begin{cases} x(t) = k_2 \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3)$$

ortogonales a dicha frontera.



Observación 1.3.2 El axioma de incidencia se respeta con las rectas que acabamos de obtener.

Es natural definir el siguiente concepto.

Definición 1.3.3 La distancia entre dos puntos z_0 y z_1 de H^2 , $d(z_0, z_1)$, es la longitud s del arco de extremos z_0 y z_1 sobre la recta que pasa por z_0 y z_1 .

Definición 1.3.4 Dos rectas que se corten en H^2 se dice que son secantes; si lo hacen en un punto propio (real) o impropio (∞) de la recta del infinito, serán paralelas; en cualquier otro caso, serán ultraparalelas.

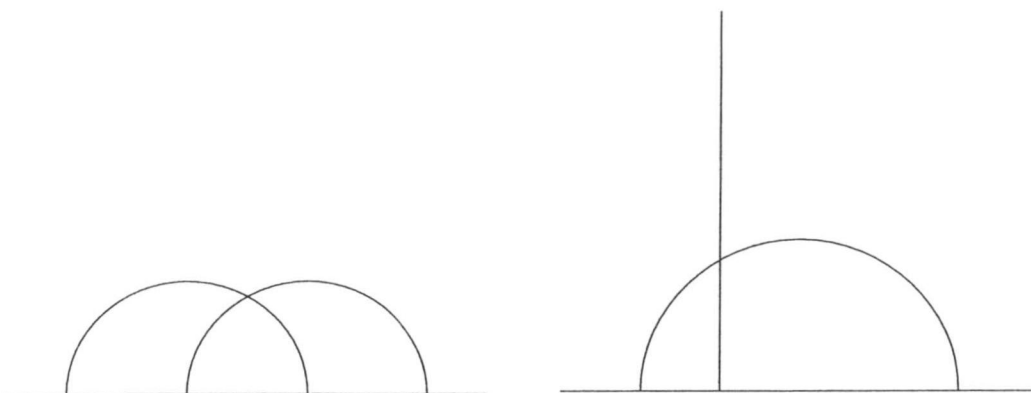


Figura 1.1: Rectas secantes



Figura 1.2: Rectas paralelas (I)



Figura 1.3: Rectas paralelas (II)

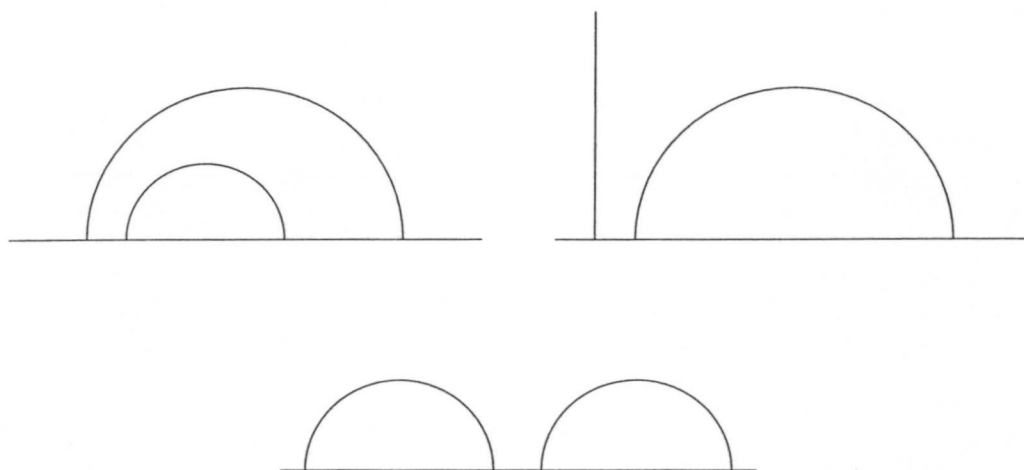


Figura 1.4: Rectas ultraparalelas

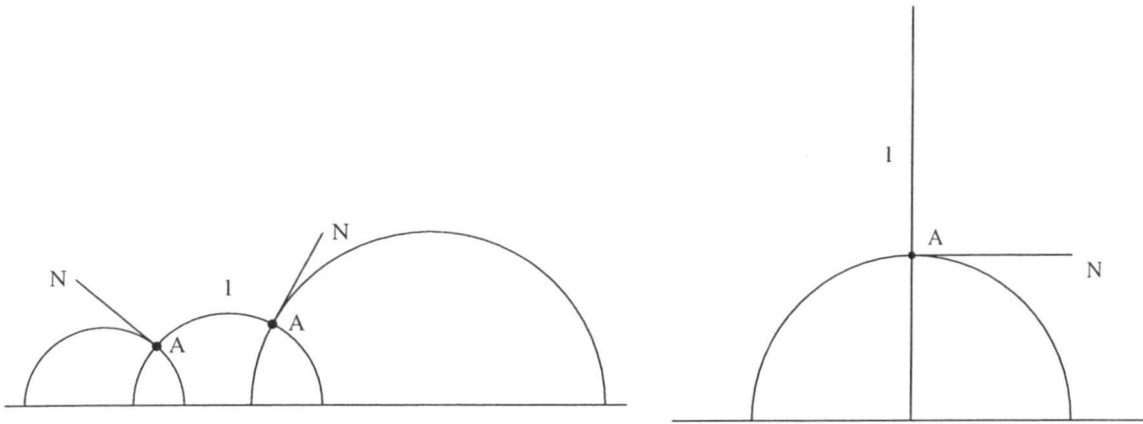
Se suelen distinguir las dos componentes conexas que determinan en H^2 el complemento de una geodésica como se indica en la Definición 1.3.6.

Definición 1.3.5 Llamaremos vector normal de una geodésica en H^2 en el punto (x, y) al vector

a) $\vec{N} = \left(\frac{x - k_1}{r}, \frac{y}{r} \right)$ si la geodésica viene dada por ecuaciones del tipo (2).

b) $\vec{N} = (1, 0)$, si la geodésica tiene ecuaciones del tipo (3).

Definición 1.3.6 Las dos componentes conexas del complemento de una geodésica l , se llaman semiplanos positivo y negativo de l , y se distinguen de la siguiente forma: una geodésica a través de un punto A de l que sea tangente al vector normal \vec{N} de l en el punto A , pasa desde el semiplano negativo al positivo de l cuando se recorre según la orientación del vector normal \vec{N} .



La figura de arriba ilustra la definición anterior.

Definición 1.3.7 La isometría que deja fijos los puntos de una geodésica l , e intercambia las dos componentes conexas de su complemento, se denomina reflexión respecto o sobre l y se denota por σ_l .

1.3.3 Area de un dominio

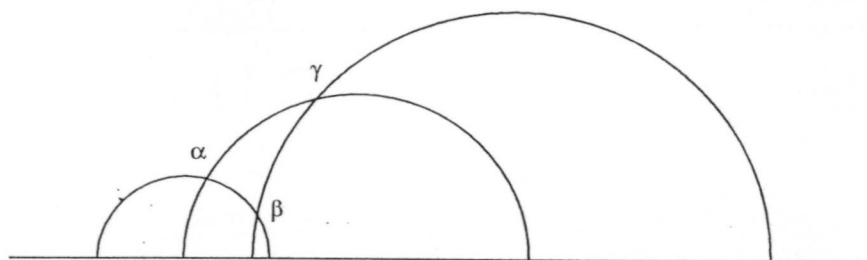
Si consideramos un subconjunto Ω conexo y acotado de H^2 , el área de dicho dominio viene dada por ([52]):

$$\int_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy.$$

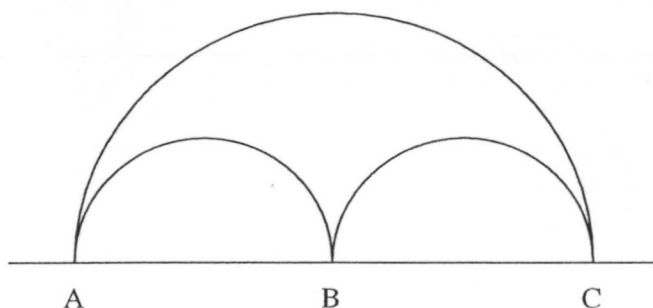
Hay que hacer notar que puesto que H^2 no posee un producto escalar intrínseco (nótese que ni siquiera tiene estructura de espacio vectorial), carece de sentido definir un concepto de ángulo intrínseco a H^2 . Por ello vamos a recurrir a la noción extrínseca de ángulo más simple: los ángulos se entenderán euclídeamente.

Es inmediato que el ángulo que forman dos geodésicas en un punto común de H^2 , coincide con el ángulo que forman sus vectores normales en dicho punto, y este ángulo se considera orientado.

De aquí se deduce que el área determinada por un triángulo geodésico cuyos lados están sobre rectas que son secantes dos a dos, de ángulos interiores α, β y γ , es $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, que no es más que un caso particular de la fórmula de Gauss-Bonnet ([13]).



De lo anterior se deduce que los triángulos de área máxima son aquellos que tienen $\alpha = \beta = \gamma = 0$.



En general, si tenemos un polígono en H^2 , definido por una poligonal cerrada de segmentos, con n vértices y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ángulos interiores a éstos vértices, el área asociada a dicho polígono viene dada por la expresión: $(n-2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$ ([52]).

1.4 Grupo de Transformaciones de \mathbb{C}^+

Un automorfismo en \mathbb{C}^+ es un morfismo biyectivo de \mathbb{C}^+ en sí mismo, holomorfo, cuya inverso es también holomorfo. El conjunto de todos los automorfismos de \mathbb{C}^+ , provisto de la composición de aplicaciones forma un grupo que notaremos por $\Gamma(\mathbb{C}^+)$. Queda determinado partiendo del estudio del grupo de transformaciones asociado a un abierto de la esfera de Riemann \mathbb{S}^2 .

La proyección estereográfica establece un difeomorfismo entre la esfera de Riemann sin el polo norte, $\mathbb{S}^2 - \{N\}$, y \mathbb{C} , y todos los resultados sobre la esfera que no afecten a N se trasladan al plano. En particular, \mathbb{C}^+ se corresponde con una semiesfera abierta en cuya frontera está el polo norte; y la recta real \mathbb{R} frontera de \mathbb{C}^+ en \mathbb{C} , se corresponde con la frontera de dicha semiesfera sin el polo norte. Por lo que podemos estudiar las transformaciones de \mathbb{C}^+ como transformaciones entre abiertos de \mathbb{S}^2 .

Los siguientes resultados se pueden consultar y ampliar en [9].

Lema 1.4.1 *Sea E un abierto de \mathbb{S}^2 y F un subgrupo del grupo $\Gamma(E)$ de todos los automorfismos de E . Si*

- a) F es transitivo en E , y
- b) existe $z_0 \in E$, cuyo grupo de isotropía (subgrupo de transformaciones que dejan fijo z_0) está contenido en F ,

entonces $F = \Gamma(E)$.

Este lema se utiliza para demostrar el siguiente:

Teorema 1.4.2 *La esfera de Riemann \mathbb{S}^2 no posee más automorfismos que las transformaciones de Moebius, es decir, aplicaciones de la forma*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Queda determinado así el grupo de automorfismos de \mathbb{S}^2 . Mediante la siguiente proposición se determina, de entre ellos, los que transforman el eje real en sí mismo.

Proposición 1.4.3 *El grupo de los automorfismos de la esfera de Riemann que transforman el eje real $y = 0$ en sí mismo, forma un subgrupo de transformaciones de la forma*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (4)$$

Como los coeficientes de (4) no están definidos más que salvo un factor de proporcionalidad real distinto de 0, se puede suponer en (4) que $ad - bc = \pm 1$.

Lema 1.4.4 *Entre las transformaciones*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = \pm 1,$$

las que transforman $y > 0$ en sí mismo son aquellas para las cuales $ad - bc = 1$.

DEMOSTRACIÓN

Basta notar que $\operatorname{Im}\left(\frac{ai + b}{ci + d}\right) > 0$. □

Lema 1.4.5 *El subconjunto de transformaciones*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

forma un subgrupo G de $\Gamma(\mathbb{C}^+)$. Cada transformación de G determina los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, salvo un factor de proporcionalidad igual a ± 1 .

Aplicando nuevamente el Lema 1.4.1, se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.4.6 *El grupo G precedente contiene todos los automorfismos del semiplano \mathbb{C}^+ , es decir $G = \Gamma(\mathbb{C}^+)$.*

En virtud de este teorema, cada automorfismo de \mathbb{C}^+ se prolonga a un automorfismo de \mathbb{S}^2 .

Estas transformaciones son conformes o, equivalentemente, conservan los ángulos; asimismo, transforman rectas euclídeas en rectas euclídeas y circunferencias euclídeas en circunferencias euclídeas.

1.5 El espacio métrico H^2

1.5.1 Invarianza de ds bajo G

Podemos identificar $H^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con un semiplano del plano proyectivo real \mathbb{P}^2 . Las transformaciones de Moebius, en general, son un caso particular de las proyectividades. Como los elementos de G son transformaciones de Moebius de la forma $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, con $ad - bc = 1$ y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, también son proyectividades. Dichas proyectividades sólo dejan invariante la razón doble, por lo que una expresión de la distancia que implique la presencia de la razón doble implica, a su vez, el que las transformaciones de Moebius anteriores son isometrías.

El concepto de orientación es inherente e imprescindible para el desarrollo de la geometría euclídea. Del mismo modo, al tratar de resolver diferentes problemas constructivos hiperbólicos, nos encontramos con la necesidad de la definición formal de este concepto. Por ejemplo, si intervienen giros, se necesita la determinación de ángulos orientados positiva y negativamente; si se trata de traslaciones, se necesita fijar la orientación positiva o negativa para la traslación de un punto sobre una recta.

Es por ello que necesitaremos de una definición formal, clara e inequívoca, de orientación para construir las herramientas informáticas necesarias, para la resolución constructiva de distintos problemas geométricos hiperbólicos. En consecuencia, dados tres puntos del plano hiperbólico, A, B y C , la *orientación* del ángulo $\angle ABC$

se entiende como su orientación euclídea. Si l es la recta determinada por A y B , y tomando U y V , $U \neq V$, como los puntos intersección de l con la recta del infinito, se pueden dar dos situaciones. Primera, si l es de la forma $x(t) = r \cos t + k_1$; $y(t) = r \sin t$ con $t \in (0, \pi)$, y si C es el centro de la semicircunferencia euclídea correspondiente a la recta l , la *orientación* de A a B es *positiva* si el ángulo $\angle ACB$ es positivo. Segunda, si l es de la forma $x(t) = k_2$; $y(t) = t$ con $t \in \mathbb{R}^+$, la *orientación* de $A(k, p)$ a $B(k, q)$ es *positiva* si $q > p$. En ambos casos, si la orientación de A a B no es positiva, se dice *negativa*.

Si $U(u, 0)$ y $V(v, 0)$ son puntos propios de la recta del infinito, consideramos:

- a) $u < v$, si la orientación de A a B es positiva,
- b) $u > v$, si la orientación de A a B es negativa.

Si U o V es impropio, consideramos:

- a) que el punto impropio es U , si la orientación de A a B es positiva,
- b) el punto impropio es V , si la orientación de A a B es negativa.

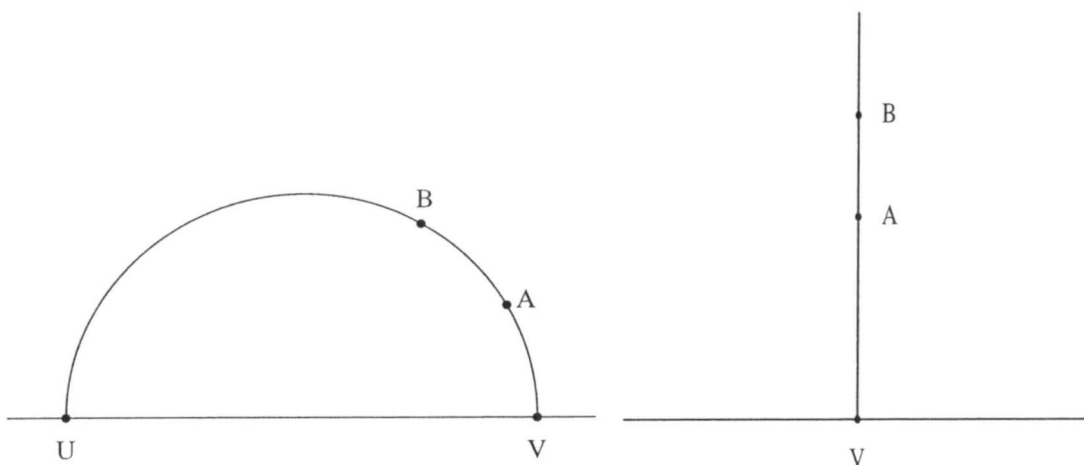
Proposición 1.5.1 a) *La identidad es una isometría que conserva la orientación de H^2 .*

b) *Las reflexiones respecto de rectas son isometrías de H^2 que invierten la orientación.*

Denotamos por $[X, Y, Z, T]$ la razón doble en el plano euclídeo de cuatro puntos.

Teorema 1.5.2 *La distancia entre dos puntos cualesquiera $A, B \in H^2$ viene dada por la expresión:*

$$d(A, B) = \ln[U, V, A, B].$$



Observaciones 1.5.3 a) $d(A, B)$ depende sólo de A y B ya que U y V están unívocamente determinados por A y B y la orientación de A a B .

b) $d(A, B) = d(B, A)$ ya que $d(B, A) = \ln[V, U, B, A]$.

La demostración de este teorema se sigue de los dos lemas siguientes.

Lema 1.5.4 Sean $A, B \in H^2$ cualesquiera, y C el centro de la semicircunferencia euclídea correspondiente a la recta determinada por los puntos A, B . Entonces:

$$d(A, B) = \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \text{ con } [\alpha, \beta] \subset (0, \pi),$$

siendo $\alpha = \angle VCA$, y $\beta = \angle VCB$. Para las rectas perpendiculares a \mathbb{R} se tiene que

$$d(A, B) = \ln \frac{q}{p}, \text{ con } [p, q] \subset \mathbb{R}^+,$$

siendo $A(k, p)$ y $B(k, q)$.

DEMOSTRACIÓN

Estas expresiones se siguen sustituyendo en ds las parametrizaciones dadas en la Sección 1.3, e integrando posteriormente. \square

Lema 1.5.5 Sean dos puntos cualesquiera $A, B \in H^2$ y U, V los puntos propios de la recta del infinito correspondientes a la recta determinada por A, B . Entonces:

$$\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\alpha} = \ln[U, V, A, B],$$

siendo $\alpha = \angle VCA$, y $\beta = \angle VCB$. Para las rectas perpendiculares a \mathbb{R} se tiene que

$$\ln \frac{q}{p} = \ln[U, V, A, B],$$

con $A(k, p)$ y $B(k, q)$ y U, V puntos de la recta del infinito, siendo uno de ellos impropio.

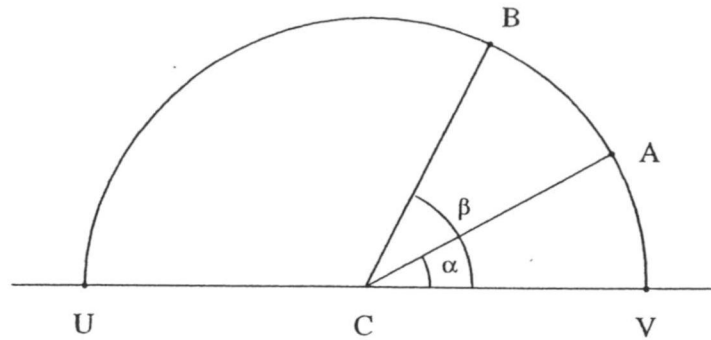
DEMOSTRACIÓN

Si llamamos u, v a las abscisas de U y V , respectivamente, r al radio de la semicircunferencia euclídea que contiene a A y B , $\alpha = \angle VCA$, $\beta = \angle VCB$, y ξ a la abscisa del centro C , los números complejos que representan a U, V, A y B son $u = \xi - r, v = \xi + r, A = \xi + re^{i\alpha}$ y $B = \xi + re^{i\beta}$, respectivamente, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} [U, V, A, B] &= \frac{\overline{UA} \cdot \overline{VB}}{\overline{UB} \cdot \overline{VA}} = \frac{(\xi + re^{i\alpha} - \xi + r)(\xi + re^{i\beta} - \xi - r)}{(\xi + re^{i\beta} - \xi + r)(\xi + re^{i\alpha} - \xi - r)} = \\ &= \frac{r(e^{i\alpha} + 1)r(e^{i\beta} - 1)}{r(e^{i\beta} + 1)r(e^{i\alpha} - 1)} = \frac{(e^{i\alpha} + 1)(e^{i\beta} - 1)}{(e^{i\alpha} - 1)(e^{i\beta} + 1)} \end{aligned}$$

Como

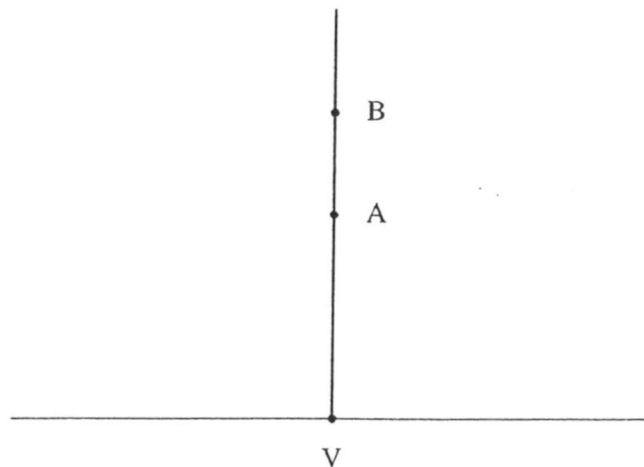
$$\begin{aligned} \frac{(e^{i\alpha} + 1)}{(e^{i\alpha} - 1)} &= \frac{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha + 1}{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha - 1} = \frac{(\cos \alpha + 1) + i \operatorname{sen} \alpha}{(\cos \alpha - 1) + i \operatorname{sen} \alpha} \cdot \frac{(\cos \alpha - 1) - i \operatorname{sen} \alpha}{(\cos \alpha - 1) - i \operatorname{sen} \alpha} = \\ &= \frac{-i \operatorname{sen} \alpha}{(1 - \cos \alpha)} = \frac{-i 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})^2} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$



Luego

$$[U, V, A, B] = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Si la recta es de la forma $x = k$, entonces si $V(k, 0)$, es $A(k, p)$ y $B(k, q)$ y evidentemente, $U = \infty$. Como $[U, V, A, B] = \frac{\overline{VB}}{\overline{VA}}$, resulta que $[U, V, A, B] = \frac{q}{p}$.



Las expresiones encontradas para la razón doble $[U, V, A, B]$ prueban el lema. \square

Para los casos límite en los que $B = U$ o $B = V$ la distancia $d(A, B) = \infty$ lo que se justifica porque, en general, $[X, Y, Z, X] = \infty$. En consecuencia, el eje de abscisas unión con el ∞ se puede interpretar como la recta del infinito del plano proyectivo asociado a $H^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Lema 1.5.6 1.- $d(A, B) = d(B, A)$.

2.- $d(A, B) \geq 0$.

3.- $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

4.- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. La igualdad se da, sólo si los puntos A , B y C están en la misma recta y el punto C está situado entre los puntos A y B

DEMOSTRACIÓN

La demostración de 1, 2 y 3 son evidentes, y para 4 véase [34] \square

Proposición 1.5.7 d es una métrica para H^2 .

Corolario 1.5.8 Las transformaciones de Moebius de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1,$$

son isometrías de H^2 .

1.6 El grupo de isometrías $Iso(H^2)$

En este apartado obtenemos la expresión analítica del grupo de isometrías de H^2 , y exponemos su identificación matricial. También damos nombre a todas y cada una de las isometrías que esencialmente existen.

Proposición 1.6.1 *Las isometrías de H^2 que conservan la orientación forman un grupo.*

Definición 1.6.2 Llamamos $Iso^+(H^2)$ al grupo de las isometrías que conservan la orientación, y se les denomina isometrías directas.

Proposición 1.6.3 ([38]) *El grupo $Iso^+(H^2)$ es:*

$$Iso^+(H^2) = \left\{ g : H^2 \rightarrow H^2 \mid g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Definimos a continuación los diversos tipos de movimientos de H^2 que conservan la orientación.

Definición 1.6.4 Una transformación elíptica o rotación es una isometría directa que deja fijo un único punto $A \in H^2$ denominado centro de la rotación.

Definición 1.6.5 Una transformación parabólica o rotación límite es una isometría directa que deja fijo un único punto P de la recta del infinito, denominado centro de la rotación límite.

Definición 1.6.6 Una transformación hiperbólica o traslación sobre una recta l , es una isometría directa que deja fijos dos puntos en la recta del infinito, que son los que se obtienen al intersecar la recta l , denominada recta de traslación, con la recta del infinito.

No definiremos más tipos de isometrías directas puesto que como probaremos más adelante, toda isometría directa o es la identidad o corresponde a uno de los tipos descritos anteriormente.

Denotamos por $SL(2, \mathbb{R})$ al conjunto

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

$SL(2, \mathbb{R})$ con el producto es un grupo.

Podemos establecer un epimorfismo de grupos de $SL(2, \mathbb{R})$ sobre $Iso^+(H^2)$ como sigue :

$$\zeta : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow Iso^+(H^2)$$

definido por

$$\zeta \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Obviamente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

tienen la misma imagen y las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

constituyen el núcleo de ζ .

El conjunto cociente $SL(2, \mathbb{R})/\{I, -I\}$ se denota por $PSL(2, \mathbb{R})$. $PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo y se le denomina grupo lineal proyectivo.

Existe un isomorfismo ϕ entre $PSL(2, \mathbb{R})$ y $Iso^+(H^2)$, el inducido por ζ .

El grupo $SL(2, \mathbb{R})$ está generado por $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ([19]), luego el grupo $PSL(2, \mathbb{R})$, está generado por las clases $\overline{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ y $\overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. Por tanto, mediante ϕ ,

$$Iso^+(H^2) = \langle \overline{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \rangle.$$

Cada generador puede asociarse a una transformación de H^2 , que conviene identificar. Sustituyendo en $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, queda:

a) Si $a = d = 1, c = 0$ y $\forall b \in \mathbb{R}$, $g(z) = z + b$, por lo que se trata de una rotación límite con centro en el punto impropio de la recta del infinito.

b) Si $a = d = 0, b = -1$ y $c = 1$, $g(z) = -\frac{1}{z}$, que es una rotación de ángulo π que deja invariante el punto $i = (0, 1)$ (antiinversión sobre la semicircunferencia euclídea en \mathbb{C}^+ de centro $(0, 0)$ y radio 1, es decir, sobre la recta unidad). Por tanto, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.6.7 *$Iso^+(H^2)$ está generado por rotaciones límite con centro en el punto impropio y rotaciones de ángulo π con centro en $(0, 1)$.*

Proposición 1.6.8 *Las isometrías de H^2 que no conservan la orientación son la composición de las isometrías directas, con una isometría fijada que no conserve la orientación.*

Es usual utilizar como isometría fijada que no conserva la orientación, la reflexión sobre el eje imaginario, $h(z) = -\bar{z}$ ([38]), para obtener las isometrías que no conservan la orientación a partir de las isometrías directas.

Definición 1.6.9 Llamamos $Iso^-(H^2)$ al conjunto de isometrías que no conservan la orientación.

Proposición 1.6.10 El conjunto $Iso^-(H^2)$ es:

$$Iso^-(H^2) = \left\{ g' : H^2 \rightarrow H^2 \mid g'(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'}, a', b', c', d' \in \mathbb{R}, a'd' - b'c' = -1 \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $g \in Iso^+(H^2)$ y $h(z) = -\bar{z}$. Entonces.

$$\begin{aligned} (g \circ h)(z) &= \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}; \text{ con } -ad + bc = -1 \\ (h \circ g)(z) &= \frac{-a\bar{z} - b}{c\bar{z} + d}; \text{ con } -ad + bc = -1 \end{aligned}$$

□

En la Definición 1.3.7 se introdujeron las reflexiones respecto de rectas, que son un tipo de isometrías que no conservan la orientación, además dejan fijos todos los puntos de la recta de reflexión.

Las restantes isometrías que no conservan la orientación se describen en la siguiente definición. Como veremos posteriormente, todas las isometrías que no conservan la orientación están incluidas en estos dos tipos.

Definición 1.6.11 Una reflexión sesgada de recta de reflexión l es una isometría que no conserva la orientación, que no deja ningún punto fijo en H^2 y deja fijos dos puntos en la recta del infinito, que son los que se obtienen al intersecar la recta l con la recta del infinito.

Proposición 1.6.12 *El grupo de todas las isometrías de H^2 coincide con:*

$$Iso(H^2) = Iso^+(H^2) \dot{\cup} Iso^-(H^2)$$

donde $\dot{\cup}$ denota la unión disjunta.

Por lo que hemos visto para $Iso^+(H^2)$, sus generadores dan lugar en $Iso^-(H^2)$ a:

a) Reflexiones sobre el eje imaginario compuestas con rotaciones límite con centro en el punto impropio, cuya expresión es $g'(z) = -\bar{z} + b'$,

b) Reflexiones sobre el eje imaginario compuestas con semigiros de centro el punto $(0, 1)$ (inversiones sobre la semicircunferencia euclídea en \mathbb{C}^+ de centro $(0, 0)$ y radio 1), cuya expresión es $g'(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, puede establecerse un isomorfismo entre $Iso(H^2)$ y el conjunto \mathfrak{R} de las matrices reales cuadradas de orden 2 con determinante ± 1 , cociente por el subconjunto $\{I, -I\}$.

$$\phi : Iso(H^2) \longrightarrow \mathfrak{R}/\{I, -I\}; \quad \phi(g) = \begin{cases} R \text{ con } |R| = 1 \text{ si } g \in Iso^+(H^2) \\ R \text{ con } |R| = -1 \text{ si } g \in Iso^-(H^2). \end{cases}$$

donde

$$\phi(g) = R = \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

queda determinado por

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ cuando } g \in Iso^+(H^2)$$

y por

$$g(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \text{ cuando } g \in Iso^-(H^2).$$

Cada clase de equivalencia $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ está formada por dos matrices, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, que tienen igual determinante pero trazas opuestas. Por tanto, el determinante de $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$, como determinante de una de sus clases está bien definido, mientras que llamaremos traza de $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ a $|a + d|$.

Definición 1.6.13 Dada una isometría $g \in Iso(H^2)$, la traza de g es la traza de $\phi(g)$ y el determinante de g es el determinante de $\phi(g)$.

Proposición 1.6.14 *El determinante de una isometría g en H^2 , es $+1$ ó -1 según que g conserve o invierta la orientación, respectivamente.*

1.7 Clasificación de $Iso(H^2)$ atendiendo al estudio de puntos fijos

Si consideramos el isomorfismo natural entre $Iso(H^2)$ y $\mathfrak{R}/\{I, -I\}$, la conjugación de isometrías equivale a la de matrices y el estudio de puntos fijos se equivale con el de invariantes algebraicos -determinante y traza- de las correspondientes matrices.

Puesto que dos isometrías son conjugadas si y sólo si tienen igual número de puntos fijos, y del mismo tipo, todo el estudio que realizaremos nos permitirá clasificar por conjugación las isometrías de H^2 .

Diremos que $z \in H^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \text{adh}(H^2)$, es un punto fijo bajo una isometría $g \in \text{Iso}(H^2)$ si $g(z) = z$.

Respecto a $\text{Iso}^+(H^2)$, tendremos los puntos fijos determinados por una ecuación de la forma siguiente:

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \text{ si, y sólo si, } cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (5)$$

Llamamos $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$. Por ser $ad - bc = 1$, se tiene que

$$\Delta = (a + d)^2 - 4 = (\text{tra}(g))^2 - 4.$$

Lema 1.7.1 Si $c = 0$ en la ecuación (5), entonces,

$$\text{tra}(g) = 2 \iff d = a = \pm 1.$$

DEMOSTRACIÓN

La condición suficiente es evidente.

Para la condición necesaria basta tener en cuenta que al ser $c = 0$ y $ad - bc = 1$ se tiene que $d = \frac{1}{a}$.

Por tanto,

$$\text{tra}(g) = |a + d| = \left| a + \frac{1}{a} \right| = \frac{a^2 + 1}{|a|} = 2.$$

Llegamos así a la ecuación $a^2 - 2|a| + 1 = 0$ cuya solución es $a = \pm 1$. \square

Lema 1.7.2 $c = 0$ en (5) si, y sólo si, g admite al punto impropio de la recta del infinito (∞) como punto fijo.

DEMOSTRACIÓN

Basta escribir g como $g(z) = \frac{az + b}{d}$ y observar que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty.$$

□

Proposición 1.7.3 Sea $g \in \text{Iso}^+(H^2)$, entonces,

g es una rotación si, y sólo si, $\text{tra}(g) < 2$.

DEMOSTRACIÓN

Observemos inicialmente que $c \neq 0$, ya que si $c = 0$, entonces

$$ad = 1$$

y

$$|a + d| = \left| a + \frac{1}{a} \right| = \frac{a^2 + 1}{|a|} \geq 2, \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Si g es una rotación, g deja fijo un único punto en H^2 , por lo que (5) ha de tener dos soluciones complejas (no reales), luego $|a + d| < 2$.

Recíprocamente, si $|a + d| < 2$, entonces de (5) obtenemos que

$$z = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{\sqrt{4 - (a + d)^2}}{2c}i,$$

por lo que la parte imaginaria de una de las dos raíces es positiva y la otra negativa. Así pues, g tiene un único punto fijo en H^2 , es decir, g es una rotación con centro dicho punto. □

Observación 1.7.4 Este tipo de isometría fija los elementos del haz de circunferencias ortogonales al haz de rectas que pasan por el punto fijo z . En la Sección 2.7 del Capítulo 2, se describe la construcción de las órbitas por la acción de dichas transformaciones, llamadas circunferencias.

Proposición 1.7.5 Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces

g es una rotación límite o la identidad si, y sólo si, $tra(g) = 2$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $c = 0$ en (5).

Si $b = 0$, entonces por el Lema 1.7.1

$$|a + d| = 2 \iff d = a = \pm 1 \iff g(z) = z; \quad \forall z \in H^2$$

Luego g es la identidad.

Si $b \neq 0$, entonces por verificarse que $ad = 1$ y por el Lema 1.7.1 tenemos que

$$|a + d| = 2 \iff d = a = \pm 1$$

o lo que es lo mismo, (5) no tiene solución en H^2 , y esto equivale a decir que g no admite puntos fijos en H^2 , es decir, por el Lema 1.7.2, g es una rotación límite con el punto impropio de la recta del infinito como centro.

Finalmente, si $c \neq 0$,

$$|a + d| = 2 \iff \Delta = 0,$$

es decir, (5) admite una única solución $z = \frac{a-d}{2c} \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, g tiene un único punto fijo $z = \frac{a-d}{2c}$ en la recta del infinito, y esto es lo mismo que afirmar que g es una rotación límite con centro en dicho punto. \square

Observación 1.7.6 Las circunferencias del haz de circunferencias euclídeas que pasan por un punto propio P de la recta del infinito y tangentes a ella en P son invariantes bajo las rotaciones límite con centro en P . Las rectas euclídeas paralelas a $y = 0$, son invariantes bajo la rotaciones límite con centro en el punto impropio de la recta del infinito. En la Sección 2.8 del Capítulo 2, se describe la construcción de las órbitas por la acción de dichas transformaciones, llamadas horociclos.

Proposición 1.7.7 *Dados tres puntos distintos P, Q, R , en la recta del infinito, existe una única rotación límite con centro en P que transforma Q en R .*

DEMOSTRACIÓN

Sean $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$, y $R(r, 0)$. En la situación general, basta con tomar una isometría

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con

$$a = \frac{p^2 - 2pr + qr}{(p - q)(p - r)}, \quad b = \frac{p^2(r - q)}{(p - q)(p - r)}, \quad c = \frac{q - r}{(p - q)(p - r)}, \quad d = \frac{p^2 - 2pq + qr}{(p - q)(p - r)},$$

de lo que se deduce que tal isometría es una rotación límite con centro en P y que lleva el punto Q a R .

Mientras que si Q es el punto impropio de la recta del infinito (∞), la rotación límite viene dada por

$$a = \frac{r}{r - p}, \quad b = \frac{p^2}{p - r}, \quad c = \frac{1}{r - p}, \quad d = \frac{2p - r}{p - r}.$$

Del mismo modo, si R es el punto impropio de la recta del infinito (∞), la rotación límite viene dada por

$$a = \frac{2p - q}{p - q}, \quad b = \frac{p^2}{q - p}, \quad c = \frac{1}{p - q}, \quad d = \frac{q}{q - p}.$$

Por último, si P es el punto impropio de la recta del infinito (∞), la rotación límite tiene la expresión

$$g(z) = z - q + r.$$

La unicidad de estas transformaciones está garantizada por la determinación unívoca de los coeficientes de la expresión de la rotación límite. \square

Proposición 1.7.8 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces*

g es una traslación si, y sólo si, $tra(g) > 2$.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos en primer lugar que $c = 0$.

Si $c = 0$, entonces $ad = 1$ y razonando como en la Proposición 1.7.3,

$$|a + d| \geq 2.$$

Por el Lema 1.7.1

$$|a + d| = 2 \iff d = a = \pm 1,$$

por lo que

$$|a + d| > 2 \text{ es equivalente a afirmar que } a \neq d.$$

Si g es una traslación (y $c = 0$), entonces g posee un único punto fijo propio en la recta del infinito, es decir, $(d - a)z - b = 0$ tiene una única solución real, por tanto $a \neq d$.

Recíprocamente, si $a \neq d$, como $(d-a)z - b = 0$, se tiene que $z = \frac{b}{d-a} \in \mathbb{R}$, por lo que hay un punto fijo propio en la recta del infinito y, por el Lema 1.7.2, ∞ también es fijo, por lo que se trata de una traslación sobre la recta $x = \frac{b}{d-a}$.

Si $c \neq 0$, tenemos las siguientes equivalencias:

g es una traslación si, y sólo si, g tiene dos punto fijos en la recta del infinito o lo que es lo mismo, (5) tiene dos soluciones reales, equivalentemente,

$$\Delta > 0 \iff |a + d| > 2.$$

Evidentemente, la dos soluciones reales de (5) son los puntos propios intersección de la recta de traslación con la recta del infinito. \square

Observación 1.7.9 Los elementos del haz de circunferencias euclídeas que pasan por los dos puntos propios fijos de la recta del infinito y las semirrectas euclídeas con origen en el punto $\left(\frac{b}{d-a}, 0\right)$, son invariantes bajo estas isometrías. En la Sección 2.9 del Capítulo 2, se describe la construcción de las órbitas por la acción de dicha transformación, llamadas hiperciclos.

Respecto a $Iso^-(H^2)$, tendremos:

$$z = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'} \text{ si, y sólo si, } c'z\bar{z} + d'z - a'\bar{z} - b' = 0. \quad (6)$$

Hagamos notar que el conjunto de puntos z que satisfacen la condición anterior es un lugar geométrico en el plano \mathbb{C} . El estudio de dicho lugar será la base de análisis para cada uno de los casos que siguen. Por lo tanto, conviene indicar que a diferencia con el caso de las isometrías directas, haremos un análisis de los casos posibles basándonos en consideraciones de carácter geométrico y no meramente algebraicas.

Lema 1.7.10 *Sea $g' \in Iso^-(H^2)$, si g' tiene un punto fijo en H^2 entonces se tiene que $tra(g') = 0$.*

DEMOSTRACIÓN

Sea $z = (x, y) \in H^2$ un punto fijo para g' . Por (6) se tiene que

$$c'(x^2 + y^2) + x(d' - a') - b' + y(d' + a')i = 0.$$

En particular $y(d' + a') = 0$ y, como $y \neq 0$, se tiene que $|a' + d'| = 0$. \square

Proposición 1.7.11 *Si $g' \in Iso^-(H^2)$, entonces*

$$g' \text{ es una reflexión si, y sólo si, } tra(g') = 0.$$

DEMOSTRACIÓN

La condición necesaria es evidente por el Lema 1.7.10.

Para la condición suficiente, partimos de que $a' = -d'$.

Si $c' = 0$, (6) se reduce a la igualdad

$$2Re(z)d' = b',$$

por lo que tenemos una recta

$$x = \frac{b'}{2d'}$$

de puntos fijos. Se trata, por tanto, de una reflexión sobre dicha recta.

Si $c' \neq 0$, como $|a' + d'| = 0$, el lugar geométrico (6) es una circunferencia euclídea en \mathbb{C} y tanto z como \bar{z} pertenecen a dicho lugar geométrico; luego el centro

ha de estar en un punto propio de la recta del infinito y esta semicircunferencia euclídea del semiplano \mathbb{C}^+ es una recta en H^2 . Así pues, g' deja fijos los puntos de la recta de ecuación (6), por lo que g' es una reflexión con la recta como eje. \square

Observación 1.7.12 Estas transformaciones son compatibles con lo expresado en el axioma de reflexión.

Proposición 1.7.13 Si $g' \in Iso^-(H^2)$, entonces

g' es una reflexión sesgada si, y sólo si, $tra(g') \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que g' es una reflexión sesgada, entonces (6) tiene una o dos raíces y además están en la recta del infinito. Luego $|a' + d'| \neq 0$ ya que si $|a' + d'| = 0$ entonces por la proposición anterior la ecuación (6) tendría infinitas soluciones.

Recíprocamente, supongamos que $|a' + d'| \neq 0$.

Consideremos en primer lugar que $c' = 0$. Si $z = (x, y)$ es fijo, ha de satisfacer que

$$(d' - a')x - b' = 0 \text{ y } (d' + a')y = 0.$$

Por tanto, el punto

$$\left(\frac{b'}{d' - a'}, 0\right), \forall b' \in \mathbb{R},$$

también es fijo (obsérvese que como $a'd' = -1$ es $a' \neq d'$).

Así pues, la recta de ecuación

$$x = \frac{b'}{d' - a'}$$

es globalmente invariante ya que para $g'(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{d'}$ es

$$g'\left(\frac{b'}{d' - a'}, y_1\right) = \left(\frac{b'}{d' - a'}, \frac{1}{d'^2}y_1\right).$$

Luego, g' es una reflexión sesgada.

Consideremos ahora $c' \neq 0$.

Sea $z = (x, y)$ un punto que cumple (6). Entonces,

$$(c'(x^2 + y^2), 0) + (d'x, d'y) + (-a'x, a'y) + (-b', 0) = (0, 0)$$

si, y sólo si,

$$\begin{cases} c'(x^2 + y^2) + x(d' - a') - b' = 0 \\ y \\ (d' + a')y = 0. \end{cases}$$

Por un lado, tenemos que

$$x^2 + y^2 + \frac{d' - a'}{c'}x - \frac{b'}{c'} = 0$$

es la ecuación de una circunferencia euclídea de centro $\left(\frac{-d' + a'}{2c'}, 0\right)$ y radio

$$r = \sqrt{\left(\frac{a' - d'}{2c'}\right)^2 + \frac{b'}{c'}}.$$

Nótese que el radicando es positivo, puesto que,

$$\left(\frac{a' - d'}{2c'}\right)^2 > -\frac{b'}{c'} \iff (a' - d')^2 > -4b'c' \iff (a' + d')^2 > 4(a'd' - b'c') = -4.$$

Luego

$$c'(x^2 + y^2) + x(d' - a') - b' = 0 \quad (7)$$

es una circunferencia euclídea cuyo centro está en un punto propio de la recta del infinito.

Por otro lado, $(d' + a')y = 0$, y como $a' + d' \neq 0$, entonces $y = 0$.

Luego (6) es la intersección de una circunferencia euclídea con centro en un punto propio de la recta del infinito y la recta del infinito, con lo que tenemos dos puntos fijos en \mathbb{R} para cada g' , cuya recta (7), es la semicircunferencia euclídea del semiplano superior que para g' es globalmente invariante, transformándose en ella misma, ya que si $z = (x, y)$ pertenece a la recta (7), se tiene que

$$g'(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'} = \frac{(a'x + b')(c'x + d') + c'a'y^2}{(c'x + d')^2 + c'^2y^2} + \frac{c'y(a'x + b') - a'y(c'x + d')}{(c'x + d')^2 + c'^2y^2}i$$

también pertenece a (7), pues sustituyendo en (7) x por $Re(g'(z))$ e y por $Im(g'(z))$ y teniendo en cuenta que $a'd' - b'c' = -1$ se llega a la expresión

$$-\frac{c'(x^2 + y^2) + x(d' - a') - b'}{c'^2(x^2 + y^2) + 2c'd'x + d'^2}$$

que claramente es cero por (7). Por tanto g' es una reflexión sesgada.

□

De la demostración de las dos proposiciones anteriores, se deduce la siguiente caracterización de las reflexiones.

Corolario 1.7.14 Sea $g' \in Iso^-(H^2)$, entonces

g' es una reflexión si, y sólo si, g' tiene al menos un punto fijo en H^2 .

Los resultados anteriores permiten obtener una nueva caracterización de todos y cada uno de los elementos de $Iso(H^2)$ que resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 1.7.15 *Sea $g \in Iso(H^2)$, entonces*

- 1.- g es una rotación si, y sólo si, $det(g) = 1$ y $tra(g) > 2$.
- 2.- g es una rotación límite o la identidad si, y sólo si, $det(g) = 1$ y $tra(g) = 2$.
- 3.- g es una traslación si, y sólo si, $det(g) = 1$ y $tra(g) < 2$.
- 4.- g es una reflexión si, y sólo si, $det(g) = -1$ y $tra(g) = 0$.
- 5.- g es una reflexión sesgada si, y sólo si, $det(g) = -1$ y $tra(g) \neq 0$.

1.8 Descomposición de las isometrías de H^2 en producto de reflexiones

En esta sección obtenemos las isometrías de H^2 como producto de reflexiones.

Proposición 1.8.1 ([34]) *Las isometrías de H^2 se obtienen como el producto de, a lo sumo, tres reflexiones.*

Corolario 1.8.2 *Las isometrías de H^2 que conservan la orientación son el producto de dos reflexiones.*

Proposición 1.8.3 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces, g es un giro con centro en $A \in H^2$ si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_l respecto a dos rectas m y l distintas que pasan por A tal que $g = \sigma_m \sigma_l$.*

DEMOSTRACIÓN

Para la condición necesaria, consideramos $B \neq A$, tal que $g(B) = B' \neq B$.

Sea m la recta perpendicular al segmento $\widehat{BB'}$ por su punto medio, esta recta se conoce con el nombre de mediatriz y la construiremos más adelante. Como B y B' equidistan de A , A es un punto de dicha mediatriz. La composición $\sigma_m g$ deja invariantes los puntos A y B e invierte la orientación, luego $\sigma_m g$ es la reflexión respecto de la recta l que pasa por A y B . Luego $g = \sigma_m \sigma_l$.

La condición suficiente es inmediata, ya que si g es el producto de dos reflexiones sobre rectas que pasan por A , entonces A es un punto fijo para g , y por lo tanto, es una rotación con centro en A . \square

Lema 1.8.4 ([47]) *Sea F_g el conjunto de puntos fijos de la isometría g , entonces para toda isometría h , se verifica que*

$$F_{hgh^{-1}} = h(F_g)$$

Observación 1.8.5 El lema anterior pone de manifiesto que la clasificación de las isometrías según el conjunto de sus puntos fijos, es invariante por conjugación respecto de cualquier isometría de H^2 .

Proposición 1.8.6 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, $g \neq 1_{H^2}$, entonces, g es una rotación límite con centro en un punto P de la recta del infinito si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_l sobre dos rectas distintas y asintóticas en P tal que $g = \sigma_m \sigma_l$.*

DEMOSTRACIÓN

Sea η una rotación límite que lleva P a $O(0,0)$, la cual existe por la Proposición 1.7.7 Consideramos $\tau = \eta g \eta^{-1}$ que es una rotación límite con centro en O , entonces τ tendrá una expresión de la forma

$$\tau(z) = \frac{az}{cz + d}$$

Como $z = 0$ es raíz doble de la ecuación (5), y τ no es la identidad, ha de verificarse que

$$a = d = \pm 1 \text{ y } c \neq 0,$$

pudiendo suponer que

$$\tau(z) = \frac{z}{cz + 1} \text{ con } c \neq 0.$$

Consideramos la reflexión $\sigma_{m'}$ respecto de la recta m' de ecuación $x = 0$, que tiene la expresión $\sigma_{m'}(z) = -\bar{z}$. Componiendo obtenemos que

$$\sigma_{m'}(\tau(z)) = \frac{-\bar{z}}{c\bar{z} + 1}.$$

Esta isometría invierte la orientación y deja invariante a O y a los puntos de la recta l' , de ecuación

$$cz\bar{z} + z + \bar{z} = 0,$$

por lo que es la reflexión $\sigma_{l'}$ respecto de dicha recta.

En consecuencia

$$\sigma_{m'}\tau = \sigma_{l'}$$

o bien

$$\tau = \sigma_{m'}\sigma_{l'}.$$

Conjugando con η^{-1} , tenemos

$$\eta^{-1}\tau\eta = g = \eta^{-1}\sigma_{m'}\sigma_{l'}\eta = (\eta^{-1}\sigma_{m'}\eta)(\eta^{-1}\sigma_{l'}\eta).$$

Por tanto,

$$\eta^{-1}\sigma_{m'}\eta \quad \text{y} \quad \eta^{-1}\sigma_{l'}\eta$$

son reflexiones respecto a las rectas

$$m = \eta^{-1}(m') \quad \text{y} \quad l = \eta^{-1}(l'),$$

por lo que

$$g = \sigma_m\sigma_l.$$

Recíprocamente, si $g = \sigma_m\sigma_l$, siendo σ_m y σ_l reflexiones sobre dos rectas distintas y asintóticas en P , entonces el único punto fijo es P por lo que g es una rotación límite. \square

Proposición 1.8.7 Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces, g es una traslación sobre una recta l si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_n respecto de dos rectas distintas y ortogonales a l tal que $g = \sigma_m\sigma_n$.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la condición necesaria tomamos un punto A de la recta de traslación l y sea $A' \neq A$ tal que $g(A) = A'$.

A' es también un punto de l , porque esta recta es fija globalmente. Sea m la mediatriz al segmento $\widehat{AA'}$, entonces,

$$(\sigma_m g)(A) = \sigma_m(A') = A,$$

por tanto A es un punto fijo para la isometría $\sigma_m g$ que invierte la orientación, luego por el Corolario 1.7.14, $\sigma_m g$ es una reflexión que denotamos por σ_n donde n es una recta que pasa por A . Además $\sigma_n(U) = V$ y $\sigma_n(V) = U$ siendo U y V los puntos intersección de la recta de traslación con la recta del infinito, (nótese que uno de ellos puede ser el punto impropio), es decir, los puntos fijos de la traslación g , por lo que σ_n deja fija a la recta l globalmente y por lo tanto n es ortogonal a l .

Por tanto $g = \sigma_m \sigma_n$.

La condición suficiente es inmediata ya que si $g = \sigma_m \sigma_n$ siendo σ_m y σ_n reflexiones respecto de dos rectas distintas y ortogonales a l , entonces g es una isometría directa que deja fija a la recta l globalmente, y deja fijos los puntos intersección de l con la recta del infinito. \square

Proposición 1.8.8 *Sea $g' \in Iso^-(H^2)$, entonces, g' es una reflexión sesgada de recta de reflexión l si, y sólo si, existe una traslación g según l tal que $g' = g\sigma_l$.*

DEMOSTRACIÓN

Sea l la recta globalmente invariante mediante g' . Consideremos $g'\sigma_l$ que es una isometría directa y que deja invariante los puntos intersección de la recta l con la recta del infinito, luego $g'\sigma_l$ es una traslación g según l , por lo que $g' = g\sigma_l$.

El recíproco es inmediato. \square

1.9 El disco de Poincaré: D^2

Otro modelo del plano hiperbólico dado por Poincaré es el del disco unidad abierto. Sea

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\},$$

la imagen de \mathbb{C}^+ por la transformación de Cayley $f_c : \mathbb{C}^+ \rightarrow D$, definida por

$$f_c(z) = \frac{z - i}{z + i}, \quad (z \in \mathbb{C}^+).$$

Dicha transformación induce un isomorfismo del grupo $\Gamma(\mathbb{C}^+)$ sobre el grupo $\Gamma(D)$ que es el conjunto de todos los automorfismos de D ([9]). En [9], se establece que,

$$\Gamma(D) = \left\{ g : D \rightarrow D ; g(z) = \frac{e^{i\theta}(z + z_0)}{1 + \overline{z_0}z}, \theta \in \mathbb{R}, |z_0| < 1 \right\}.$$

Proposición 1.9.1 Sea f_c la transformación de Cayley. Mediante f_c la métrica de H^2 se transforma en

$$ds = 2 \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

para el disco unidad abierto D .

DEMOSTRACIÓN

Sea $w = f_c(z)$, $z = x + iy$, $f_c(z) = a + bi$.

Como $w = \frac{z - i}{z + i}$, se tiene que $z = \frac{-i(w + 1)}{w - 1}$.

Por tanto

$$a = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2}, b = -\frac{2x}{x^2 + (y + 1)^2}$$

$$x = -\frac{2b}{(a - 1)^2 + b^2}, y = \frac{1 - a^2 - b^2}{(a - 1)^2 + b^2},$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db = \frac{4b(a - 1)da - 2((a - 1)^2 - b^2) db}{((a - 1)^2 + b^2)^2}$$

y

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db = \frac{2((a - 1)^2 - b^2) da + 4b(a - 1)db}{((a - 1)^2 + b^2)^2}.$$

Por lo que $dx^2 + dy^2 = 4 \frac{da^2 + db^2}{((a-1)^2 + b^2)^2}$, resultando que:

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = 2 \frac{\sqrt{da^2 + db^2}}{1 - a^2 - b^2}.$$

□

Luego la métrica en D es

$$ds = 2 \frac{\sqrt{da^2 + db^2}}{1 - a^2 - b^2}.$$

Dado que f_c es una aplicación biyectiva, la métrica recién definida en D , hace de f_c una isometría entre H^2 y D con dicha métrica. Así definimos D^2 como el disco unidad D con dicha métrica. Veremos en la siguiente sección las expresiones de las isometrías de D^2 transformando mediante f_c el grupo de isometrías de H^2 .

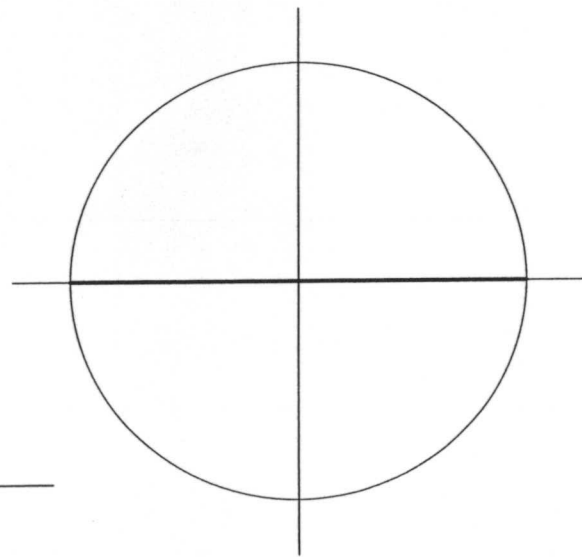
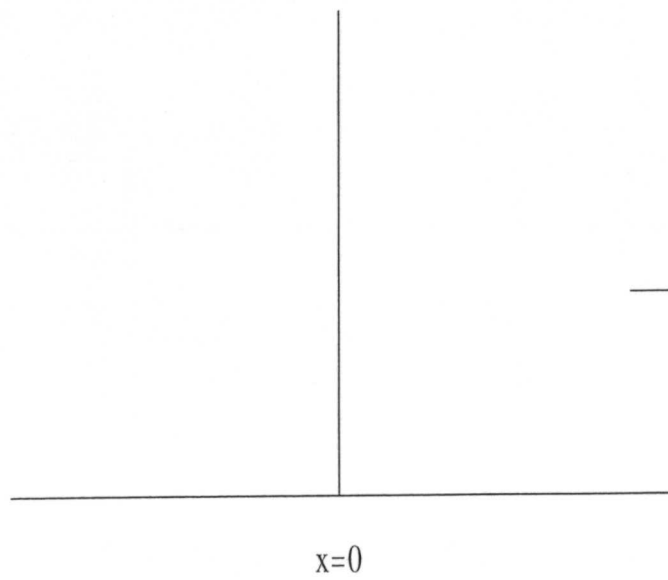
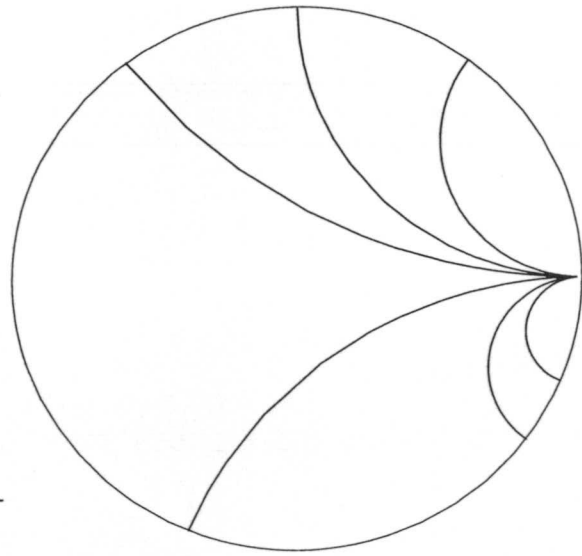
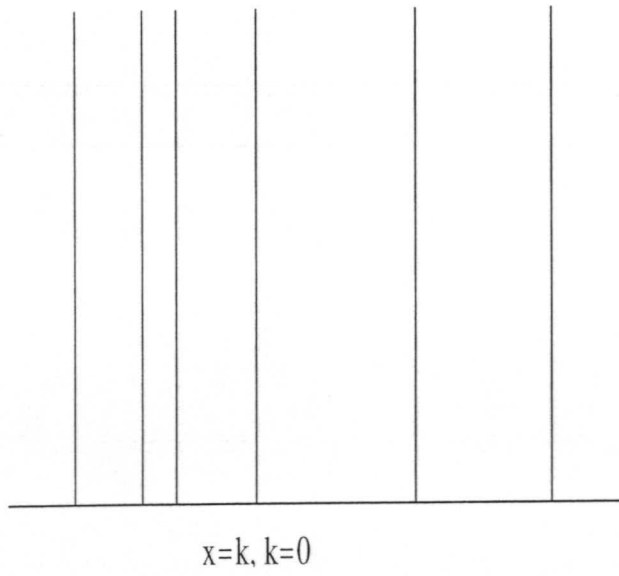
Corolario 1.9.2 La longitud de una curva $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t \in [t_0, t_1]$, de clase $C^1([t_0, t_1])$ en D^2 , viene dada por

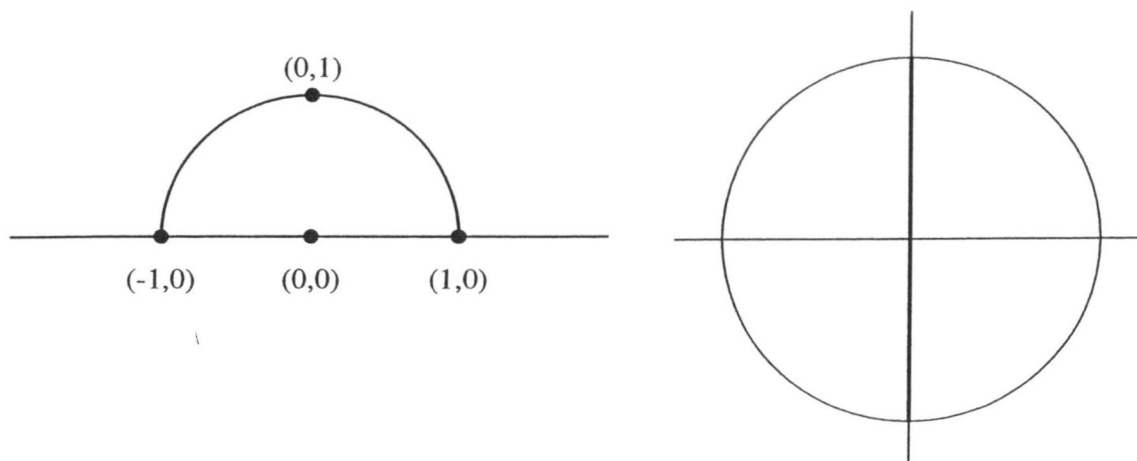
$$l = 2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{(1 - x^2(t) - y^2(t))} dt.$$

Por conservar f_c la distancia y los ángulos (f_c es conforme y los ángulos se están midiendo euclídeamente), como las geodésicas de H^2 son perpendiculares a la recta del infinito, sus transformados en D^2 han de ser perpendiculares a la frontera de D^2 ; y se puede comprobar que la imagen mediante f_c de $y = 0$ es la circunferencia euclídea de centro $(0, 0)$ y radio 1, \mathbb{S}^1 , excepto el punto $(1, 0)$, y $f_c(\infty) = 1$, $f_c(0) = -1$, $f_c(1) = -i$, $f_c(-1) = i$, $f_c(i) = 0$. Así que, f_c transforma:

1.— Las rectas perpendiculares a la recta del infinito excepto $x = 0$ en arcos de circunferencia euclídea ortogonales a \mathbb{S}^1 que pasan por $(1, 0)$; y $x = 0$, en el diámetro de \mathbb{S}^1 que pasa por $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

2.— La semicircunferencia euclídea perpendicular a la recta del infinito centrada en el origen y de radio 1 en el diámetro que pasa por $(0 - 1)$ y $(0, 1)$.





3.— Las semicircunferencias euclídeas perpendiculares a la recta del infinito de centro $(\xi, 0)$ con $\xi \neq 0$ que pasan por $(0, 1)$, en los diámetros distintos de $x = 0$, $y = 0$, ya que el radio de la semicircunferencia euclídea es $\sqrt{\xi^2 + 1}$ y al ser $U = (u, 0) = (\xi - \sqrt{\xi^2 + 1}, 0)$ y $V = (v, 0) = (\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}, 0)$, se tiene que:

$$f_c(U) = \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \frac{-2u}{u^2 + 1} \right)$$

pero

$$f_c(V) = \left(-\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \frac{2u}{u^2 + 1} \right)$$

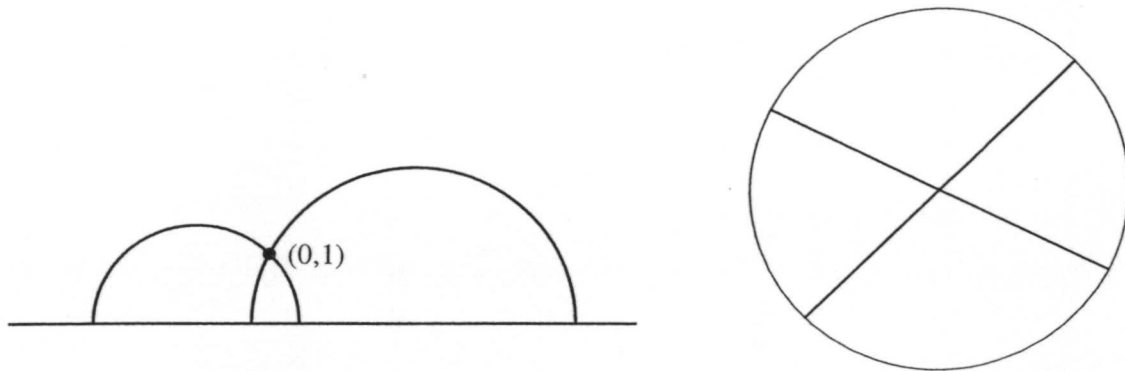
ya que al ser $f_c(V) = \left(\frac{v^2 - 1}{v^2 + 1}, \frac{-2v}{v^2 + 1} \right)$ se tiene en primer lugar que

$$-\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} = \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1} \iff 2(u^2v^2 - 1) = 0 \iff (\xi^2 - (\sqrt{\xi^2 + 1})^2) = 1$$

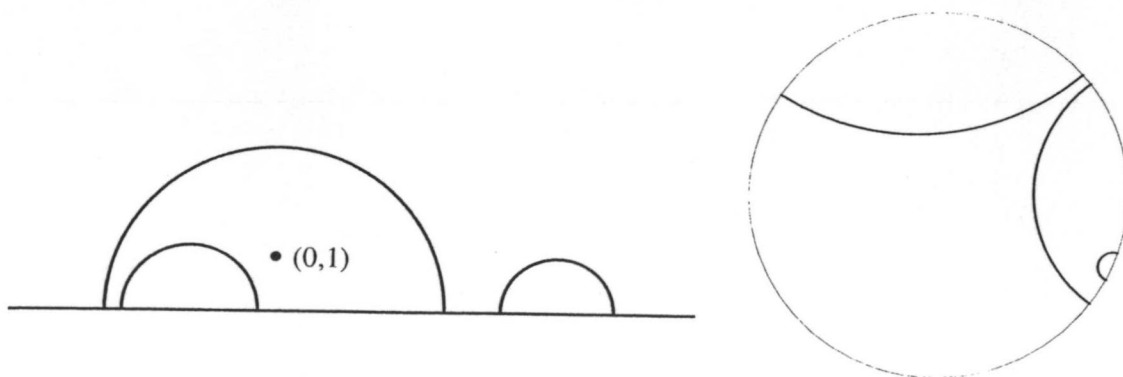
y que

$$\frac{2u}{u^2 + 1} = \frac{-2v}{v^2 + 1} \iff (u - v)(uv + 1) = 0$$

$$\iff uv + 1 = 0 \ (u \neq v) \iff (\xi - \sqrt{\xi^2 + 1})(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) + 1 = 0.$$



4.- Las semircunferencias euclídeas perpendiculares a la recta del infinito, no contempladas en 2 y 3, en arcos de circunferencias euclídeas perpendiculares a \mathbb{S}^1 .



Los arcos de circunferencias euclídeas perpendiculares a \mathbb{S}^1 tienen su concavidad hacia el origen de coordenadas y no pasan por él.

Como consecuencia las rectas son los arcos de semicircunferencias euclídeas ortogonales a \mathbb{S}^1 y los diámetros de \mathbb{S}^1 .

Si $\Omega \subset D^2$ acotado y conexo, se demuestra que su área es ([52])

$$4 \int_{\Omega} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2} dx dy.$$

1.10 Expresión de las isometrías de D^2

Basándose en el conocimiento de las isometrías de H^2 y el hecho de que f_c es una isometría, vamos a determinar las isometrías de D^2 .

Observamos que $h \in Iso(D^2)$ si, y sólo si, existe $j \in Iso(H^2)$ tal que se verifica $f_c \circ j = h \circ f_c$. Véase el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \xrightarrow{j} & H^2 \\ \downarrow f_c & & \downarrow f_c \\ D^2 & \xrightarrow{h} & D^2 \end{array}$$

Nótese que mediante la conmutatividad del diagrama se define de forma natural un isomorfismo entre $Iso(H^2)$ e $Iso(D^2)$.

Motivados por este hecho, realizamos la siguiente definición.

Definición 1.10.1 Diremos que una isometría s de D^2 es directa, cuando exista $g \in Iso^+(H^2)$ tal que $f_c \circ g = s \circ f_c$.

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \xrightarrow{g} & H^2 \\ \downarrow f_c & & \downarrow f_c \\ D^2 & \xrightarrow{s} & D^2 \end{array}$$

Al conjunto de isometrías directas de D^2 se le notará por $Iso^+(D^2)$.

Proposición 1.10.2 El conjunto $Iso^+(D^2)$ viene dado por

$$Iso^+(D^2) = \left\{ s : D^2 \longrightarrow D^2 \mid s(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta} = 1 \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN

Consideremos una isometría directa cualquiera $s \in Iso^+(D^2)$. Por tanto, sea

$$g \in Iso^+(H^2), g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ con } ad - bc = 1,$$

tal que

$$f_c \circ g = s \circ f_c.$$

Si llamamos w a $f_c(z)$, entonces $z = f_c^{-1}(w) = \frac{-i(w+1)}{w-1}$.

Así

$$s(w) = (f_c \circ g \circ f_c^{-1})(w) = (f_c \circ g) \left(\frac{-i(w+1)}{w-1} \right) = f_c \left(\frac{a \frac{-i(w+1)}{w-1} + b}{c \frac{-i(w+1)}{w-1} + d} \right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(a+d+i(b-c))w + \frac{1}{2}(a-d-i(b+c))}{\frac{1}{2}(a-d+i(b+c))w + \frac{1}{2}(a+d-i(b-c))} = \frac{\alpha w + \bar{\beta}}{\beta w + \bar{\alpha}},$$

siendo $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$.

Recíprocamente, si $s : D^2 \rightarrow D^2$ está definida como

$$s(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}} \text{ y } \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1,$$

entonces $s \in Iso^+(D^2)$, ya que existe $g \in Iso^+(H^2)$ con

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ y } ad - bc = 1,$$

siendo

$$a = \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta, \quad b = \operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta, \quad c = -\operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta, \quad d = \operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\beta$$

de forma que

$$s = f_c \circ g \circ f_c^{-1}.$$

□

De igual forma, vamos a definir y describir las isometrías de D^2 que no conservan la orientación.

Definición 1.10.3 Diremos que una isometría t de D^2 no conserva la orientación cuando exista $g' \in \operatorname{Iso}^-(H^2)$ tal que $f_c \circ g' = t \circ f_c$.

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \xrightarrow{g'} & H^2 \\ \downarrow f_c & & \downarrow f_c \\ D^2 & \xrightarrow{t} & D^2 \end{array}$$

Al conjunto de isometrías que no conservan la orientación se le notará por $\operatorname{Iso}^-(D^2)$.

Proposición 1.10.4 El conjunto $\operatorname{Iso}^-(D^2)$ viene dado por

$$\operatorname{Iso}^-(D^2) = \left\{ t : D^2 \rightarrow D^2 \mid t(z) = \frac{\gamma\bar{z} + \bar{\delta}}{\delta\bar{z} + \bar{\gamma}}; \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} = 1 \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea una isometría cualquiera $t \in Iso^-(D^2)$ y

$$g' \in Iso^-(H^2), g'(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'} \text{ con } a'd' - b'c' = -1$$

tal que

$$f_c \circ g' = t \circ f_c.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} t(w) &= (f_c \circ g' \circ f_c^{-1})(w) = (f_c \circ g') \left(\frac{-i(w+1)}{w-1} \right) = f_c \left(\frac{a' \frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} + b'}{c' \frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} + d'} \right) = \\ &= \frac{\frac{1}{2}((-a' + d') + i(b' + c'))\bar{w} + \frac{1}{2}((-a' - d') - i(b' - c'))}{\frac{1}{2}((-a' - d') + i(b' - c'))\bar{w} + \frac{1}{2}((-a' + d') - i(b' + c'))} = \frac{\gamma\bar{w} + \bar{\delta}}{\delta\bar{w} + \bar{\gamma}}, \end{aligned}$$

con $\gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} = 1$.

Recíprocamente, si $t : D^2 \rightarrow D^2$,

$$t(z) = \frac{\gamma\bar{z} + \bar{\delta}}{\delta\bar{z} + \bar{\gamma}} \text{ y } \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} = 1,$$

entonces $t \in Iso^-(D^2)$ ya que existe $g' \in Iso^-(H^2)$,

$$g'(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'}, \text{ con } a'd' - b'c' = 1,$$

siendo

$$a' = -\operatorname{Re}\gamma - \operatorname{Re}\delta, \quad b' = \operatorname{Im}\gamma + \operatorname{Im}\delta, \quad c' = \operatorname{Im}\gamma - \operatorname{Im}\delta, \quad d' = \operatorname{Re}\gamma - \operatorname{Re}\delta$$

tal que

$$t = f_c \circ g' \circ f_c^{-1}.$$

□

Proposición 1.10.5 *El grupo de todas las isometrías de D^2 , viene dado por:*

$$\operatorname{Iso}(D^2) = \operatorname{Iso}^+(D^2) \dot{\cup} \operatorname{Iso}^-(D^2).$$

En virtud del isomorfismo que existe entre $\operatorname{Iso}(H^2)$ e $\operatorname{Iso}(D^2)$, se tiene que $\operatorname{Iso}^+(D^2)$ está generado por rotaciones límite con centro en $(1, 0)$ y semigiros con centro en $(0, 0)$.

Los generadores de $\operatorname{Iso}^+(D^2)$ dan lugar en $\operatorname{Iso}^-(D^2)$ a: reflexiones sobre el eje de abscisas compuestas con semigiros con centro en $(0, 0)$ y reflexiones sobre el eje de abscisas compuestas con rotaciones límite con centro en $(1, 0)$.

Teniendo en cuenta cómo hemos deducido las expresiones de $\operatorname{Iso}^+(D^2)$ e $\operatorname{Iso}^-(D^2)$, se tiene que, para $\operatorname{Iso}(D^2)$, los generadores vienen dados por:

$$a) \quad s(z) = \frac{(1 + \frac{b}{2}i)z - \frac{b}{2}i}{\frac{b}{2}iz + (1 - \frac{b}{2}i)} \quad \text{que es la expresión de una rotación límite con centro}$$

en $(1, 0)$.

b) $s(z) = -z$ que es la expresión de un semigiro que deja fijo el origen de coordenadas.

c) $t(z) = -\bar{z}$ que es la expresión de una reflexión sobre el eje de abscisas compuesta con un semigiros que deja fijo el origen de coordenadas (reflexión sobre el eje de ordenadas).

$$d) t(z) = \frac{\frac{b'}{2}i\bar{z} + (-1 - \frac{b'}{2}i)}{(-1 + \frac{b'}{2}i)\bar{z} + (-\frac{b'}{2}i)}$$

que es la expresión de una reflexión sobre el eje de abscisas compuesta con una rotación límite con centro en $(1, 0)$.

1.11 Clasificación de $Iso(D^2)$ atendiendo al estudio de puntos fijos

En esta sección hacemos un estudio de las isometrías de D^2 atendiendo a los puntos fijos, basándonos en el estudio realizado en la Sección 1.7.

Sea $h \in Iso(D^2)$ y $j \in Iso(H^2)$ tal que $f_c \circ j = h \circ f_c$.

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \xrightarrow{j} & H^2 \\ \downarrow f_c & & \downarrow f_c \\ D^2 & \xrightarrow{h} & D^2 \end{array}$$

Entonces el conjunto de puntos fijos bajo la acción de h es:

$$F_h = \{f_c(f_c^{-1}(z)) : f_c^{-1}(z) \text{ es punto fijo de } j\} = f_c(F_j).$$

Pasemos a estudiar $Iso^+(D^2)$.

En la demostración de la Proposición 1.10.2, se obtuvo que:

$$a = \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta \text{ y } d = \operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\beta$$

donde

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ y } s(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}},$$

están relacionados por $f_c \circ g = s \circ f_c$, donde $g \in Iso^+(H^2)$ y $s \in Iso^+(D^2)$.

En particular, $tra(g)$ se relaciona con la parte real de α mediante la siguiente igualdad,

$$|a + d| = |\alpha + \bar{\alpha}| = 2 |Re\alpha|.$$

Por tanto, de este hecho, y de los resultados de la Sección 1.7, se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1.11.1 *Sea $s \in Iso^+(D^2)$, entonces:*

- 1.- *s es una rotación (transformación elíptica) si, y sólo si, $|Re\alpha| < 1$.*
- 2.- *s es una rotación límite (transformación parabólica) o la identidad si, y sólo si, $|Re\alpha| = 1$.*
- 3.- *s es una traslación (transformación hiperbólica) si, y sólo si, $|Re\alpha| > 1$.*

El estudio para $Iso^-(D^2)$ es completamente análogo.

Sean $t \in Iso^-(D^2)$ y $g' \in Iso^-(H^2)$ de forma que $f_c \circ g' = t \circ f_c$ donde

$$t(z) = \frac{\gamma\bar{z} + \bar{\delta}}{\delta\bar{z} + \bar{\gamma}} \text{ y } g'(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'},$$

en la demostración de la Proposición 1.10.4, obtuvimos

$$a' = -Re\gamma - Re\delta \text{ y } d' = Re\gamma - Re\delta.$$

Por tanto, $\text{tra}(g')$ se relaciona con la parte real de δ de la forma siguiente,

$$|a' + d'| = |-2\text{Re}\delta| = 2|\text{Re}\delta|.$$

De este hecho y de la Sección 1.7 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.11.2 Sea $t \in \text{Iso}^-(D^2)$, entonces:

- 1.- t es una reflexión si, y sólo si, $\text{Re}\delta = 0$.
- 2.- t es una reflexión sesgada si, y sólo si, $\text{Re}\delta \neq 0$.

1.12 Otra expresión de la distancia entre dos puntos de D^2

Dados $A, B \in H^2$ sabemos que $d(A, B) = \ln[U, V, A, B]$ (véase Teorema 1.5.2).

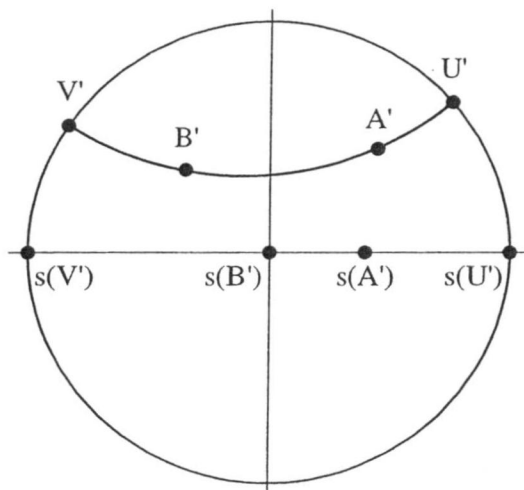
Transformamos mediante f_c la recta que contiene a A, B , obteniéndose la correspondiente recta en D^2 y las imágenes U', V', A' y B' de U, V, A y B , respectivamente. Mediante una isometría directa de D^2 nos llevamos A' al origen de coordenadas y B' a un punto sobre el eje real de coordenadas $(\rho, 0)$ ($0 < \rho < 1$), el punto U' al punto $(1, 0)$ y V' al punto $(-1, 0)$.

Por lo que:

$$d(A', B') = \ln[U', V', A', B'] = \ln[1, -1, 0, \rho] = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Determinemos ρ :

$$s(A') = 0 = \frac{\alpha A' + \bar{\beta}}{\beta A' + \bar{\alpha}} \iff \bar{\beta} = -\alpha A'.$$



$$s(B') = (\rho, 0) = \frac{\alpha B' + \bar{\beta}}{\beta B' + \bar{\alpha}} = \frac{\alpha(B' - A')}{\bar{\alpha}(1 - B'\bar{A}')},$$

por lo que

$$\rho = \left| \frac{B' - A'}{1 - B'\bar{A}'} \right|.$$

Luego

$$d(A', B') = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}, \text{ con } \rho = \left| \frac{B' - A'}{1 - B'\bar{A}'} \right|.$$

Análogamente a como hacíamos en H^2 , hemos de dar la siguiente definición.

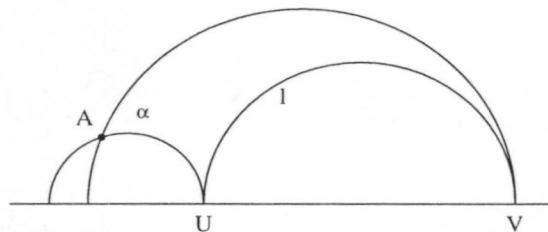
Definición 1.12.1 Sea l una recta en H^2 y $l' = f_c(l)$, su transformada en D^2 . Se definen los semiplanos positivo y negativo de l' como los transformados por f_c de los semiplanos positivo y negativo respectivamente de l .

1.12.1 El ángulo de paralelismo

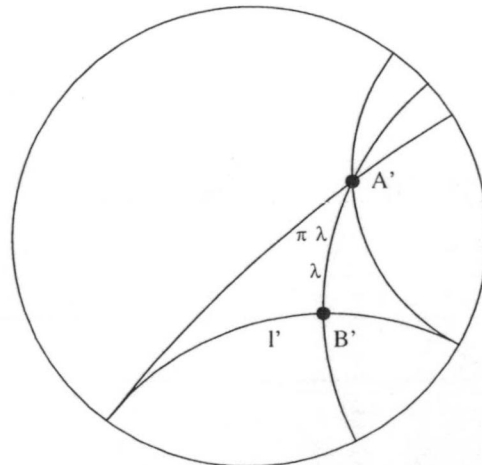
Sea H^2 , dada una recta l y un punto A exterior a ella, por A pasan dos rectas que unen A con los puntos del infinito U, V de la recta, respectivamente, lo que implica que por A pasan dos rectas paralelas a l , e infinitas ultraparalelas.

Observación 1.12.2 Esta afirmación es compatible con el axioma de paralelismo.

El ángulo que forman las paralelas entre sí es el doble del ángulo de paralelismo (ángulo que forma la recta perpendicular a l que pasa por el punto de corte A de las rectas paralelas) en A respecto de la recta l .



Equivalentemente, en D^2 , dada una recta l' y un punto exterior a ella A' , por A' pasan dos rectas paralelas a l' . El ángulo que forman las paralelas entre sí es el doble del ángulo de paralelismo en A' respecto de la recta l' .



Siguiendo el estudio que se realiza en [39], se prueba que estos ángulos dependen de la distancia del punto A' hasta la recta l' (esta distancia se mide por la longitud λ de la perpendicular $A'B'$ desde A' a l'). Para estudiar el ángulo de paralelismo como función de λ , $\Pi(\lambda)$, aplicamos una isometría, que lleve la recta perpendicular a l' al diámetro de modo que el punto A' se transforme en $A'' = (0, 0)$ y B' en $B'' = (\rho, 0)$. Entonces, las paralelas a l' se transforman en los radios de D . Luego la distancia de A'' a l'' es $\lambda = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$, de donde

$$\rho = \frac{e^\lambda - 1}{e^\lambda + 1} = \operatorname{tgh} \left(\frac{\lambda}{2} \right).$$

Sea C'' el centro de la circunferencia euclídea cuyo arco representa la recta l'' y $\overline{C''\mu} = r$, que es el radio. Como $\overline{A''\mu}$ es tangente a esta circunferencia euclídea, resulta que:

$$\overline{A''\mu}^2 + r^2 = \overline{A''C''}^2 \text{ y como } \overline{A''C''}^2 = (\overline{A''B''} + r)^2 \text{ resulta que}$$

$$\overline{A''\mu}^2 = \overline{A''B''}(\overline{A''B''} + 2r);$$

o sea, que $1 = \rho(\rho + 2r)$, de donde

$$r = \frac{1}{\operatorname{senh} \lambda}.$$

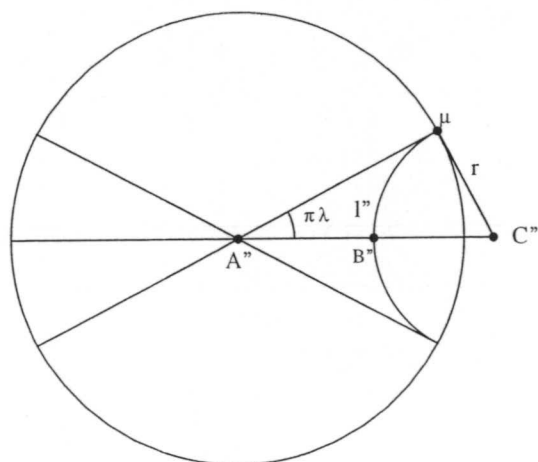
Finalmente del triángulo $A''\mu C''$, tenemos que

$$\Pi(\lambda) = \operatorname{arctg} \frac{\overline{C''\mu}}{\overline{A''\mu}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{senh} \lambda}.$$

De aquí se deduce que $\Pi(\lambda)$ es una función continua y decreciente de rango el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ y, además, $\Pi(\lambda) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ cuando $\lambda \rightarrow 0$, y $\Pi(\lambda) \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

1.12. Otra expresión de la distancia entre dos puntos de D^2

57





Capítulo 2

Algoritmos de automatización en Geometría Hiperbólica

2.1 Introducción.

Cualquier geometría exige la creación de unas herramientas de dibujo que permitan materializar las construcciones geométricas necesarias para resolver ciertos problemas o visualizar situaciones abstractas. La irrupción en el campo científico de los medios informáticos, ha hecho aparecer diferentes recursos computacionales para la resolución constructiva de algunos problemas geométricos hiperbólicos. Para resolver estos tipos de problemas, se presenta una herramienta electrónica cuyo soporte computacional es el software *Mathematica*. Está formada por una serie de módulos que permiten dibujar distintas construcciones hiperbólicas en los modelos de Poincaré para el plano hiperbólico, H^2 y D^2 ; por ejemplo, reflexiones, rotaciones, traslaciones, órbitas de un punto sometido a un conjunto de isometrías, etc.

En el Apéndice A se incluyen los algoritmos desarrollados y la programación de algunos módulos por su especial interés, tanto en H^2 como en D^2 . En www.mathsource.com se ofrece una galería de imágenes hiperbólicas en 2D y 3D cuya programación desconocemos. Su autor, Silvio Levy indica en *The Mathematica Journal* vol. 1 Automatic Escher que la programación es sencilla y fácil con *Mathematica*, aspectos que evidentemente no compartimos.

Las figuras que aparecen en esta Memoria han sido construidas utilizando las diferentes órdenes que aparecen en el Apéndice A, y que constituyen un *package*



para *Mathematica*.

Comenzamos con una definición y un teorema que nos será de utilidad posteriormente.

Definición 2.1.1 Diremos que dos figuras planas son congruentes, si para las correspondientes en H^2 o D^2 existen elementos, pertenecientes a $Iso(H^2)$ o $Iso(D^2)$, que permiten transformar una figura en la otra.

La congruencia es una relación de equivalencia.

Teorema 2.1.2 ([39]) *Dos triángulos con ángulos iguales son congruentes.*

Como quiera que las isometrías del plano hiperbólico son las reflexiones, traslaciones, rotaciones límite, giros y reflexiones sesgadas, es necesaria la construcción geométrica de la imagen de un punto del plano hiperbólico, tanto en H^2 como en D^2 , por la acción de cada una de ellas. Asimismo, y cuando tenga sentido, hay que resolver el problema inverso; es decir, dados dos puntos, determinar la isometría que transforme uno en otro. De aquí se deduce la necesidad de los siguientes problemas.

2.2 Construcción de la mediatriz

El concepto de mediatriz que se utiliza en geometría hiperbólica, es totalmente análogo a la noción euclídea, teniendo en cuenta lógicamente la métrica hiperbólica.

2.2.1 Problema 1

Dados dos puntos $A(a, b)$ y $B(c, d)$ del plano hiperbólico, determinar la mediatriz del segmento \widehat{AB} .

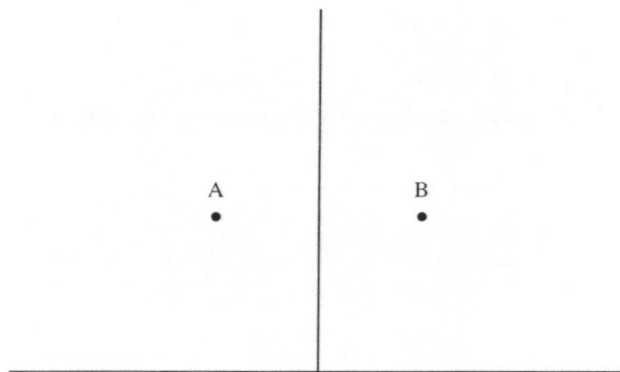
Observaciones 2.2.1 a) La mediatriz es también nombrada en la literatura sobre geometría hiperbólica como *arco bisector*.

b) La mediatriz actuará como eje de reflexión que transforma A en B , y viceversa.

Determinación en H^2

Según la posición de los puntos A y B podemos distinguir los siguientes casos.

1.- Los puntos $A(a, b)$ y $B(c, d)$ tienen igual ordenada.

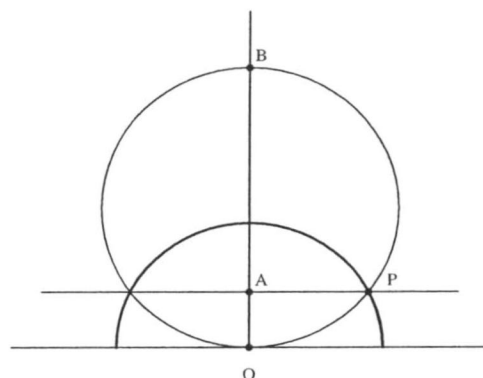


En este caso $A, B \in \mathbb{C}^+$ son equidistantes euclídeamente de la recta del infinito, la reflexión tiene por eje una semirrecta euclídea ortogonal a la recta del infinito. La ecuación de la mediatriz es

$$x = \frac{a + c}{2}.$$

2.- Los puntos $A(a, b)$ y $B(c, d)$ tienen igual abscisa. Supongamos que $d > b$.

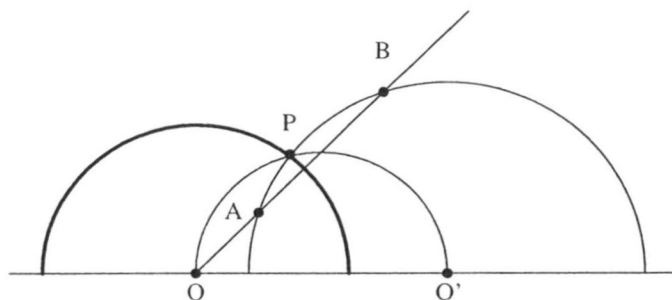
Para hallar la mediatriz de \widehat{AB} , hemos de determinar el círculo euclídeo de inversión respecto al cual B es el inverso de A , y viceversa; para ello, tomamos la recta que los contiene, siendo $O(a, 0)$, la intersección de ésta con la recta del



infinito. Construimos la circunferencia euclídea de diámetro \overline{OB} y la recta euclídea paralela a la recta del infinito que pasa por A , la intersección de esta recta con la circunferencia euclídea nos da dos puntos, sea P uno de ellos. Trazamos la semicircunferencia euclídea con centro en O y radio \overline{OP} y obtenemos el círculo euclídeo de inversión; es decir, la mediatriz, cuya ecuación es:

$$(x - a)^2 + y^2 = bd.$$

- 3.- Los puntos $A(a, b)$ y $B(c, d)$ son cualesquiera que no estén contemplados en los casos anteriores. El problema que hemos de resolver es: dados $A, B \in \mathbb{C}^+$, determinar el círculo euclídeo de inversión respecto al cual B es el inverso de A , y viceversa.



El centro del círculo euclídeo de inversión estará en la recta del infinito y para determinarlo utilizamos el método de los lugares geométricos.

Sea O' el centro de la semicircunferencia euclídea correspondiente a la recta que pasa por los puntos A y B . Si O es el punto intersección con $y = 0$ de la recta euclídea que pasa por A y B , construimos la recta cuyos puntos de intersección con $y = 0$ son O y O' , que corta a la recta determinada por A y B en un punto P .

Las coordenadas del punto P son

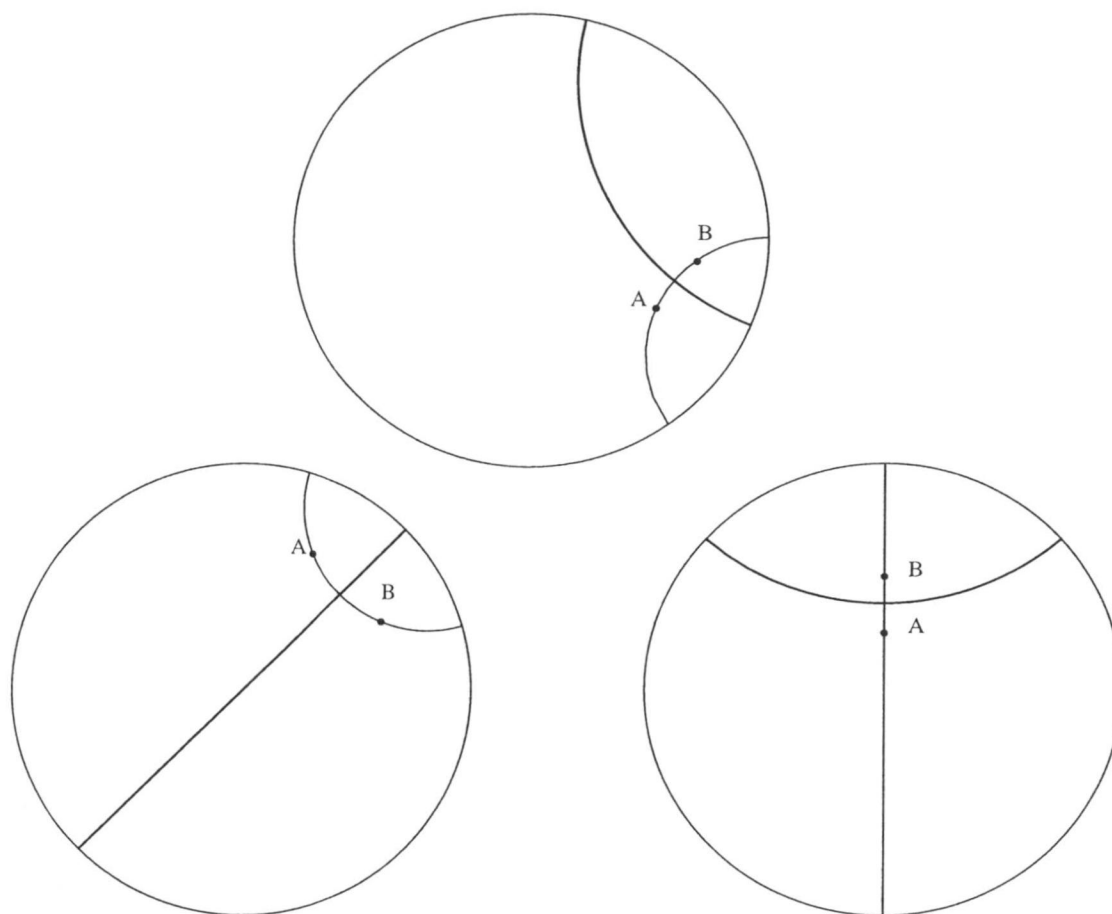
$$\left(\frac{ad + bc}{b + d}, \sqrt{\frac{bd((a - c)^2 + (b + d)^2)}{(b + d)^2}} \right).$$

Entonces O es el centro del círculo euclídeo de inversión. El radio viene determinado por la distancia euclídea de O a P . La ecuación de la mediatriz que obtenemos es

$$\left(x - \frac{ad - bd}{d - b} \right)^2 + y^2 = \frac{bd((a - c)^2 + (b - d)^2)}{(-b + d)^2}.$$

Determinación en D^2

Sean $A, B \in D^2$ y $f_c : H^2 \rightarrow D^2$ la transformación de Cayley. Sean $\tilde{A} = f_c^{-1}(A)$ y $\tilde{B} = f_c^{-1}(B)$. Entonces la mediatriz de \widehat{AB} en D^2 es la transformada por f_c de la mediatriz de $\widetilde{\widehat{AB}}$ en H^2 ya que f_c conserva distancias y ángulos, y por tanto, conserva puntos medios y rectas perpendiculares.



2.3 Reflexión

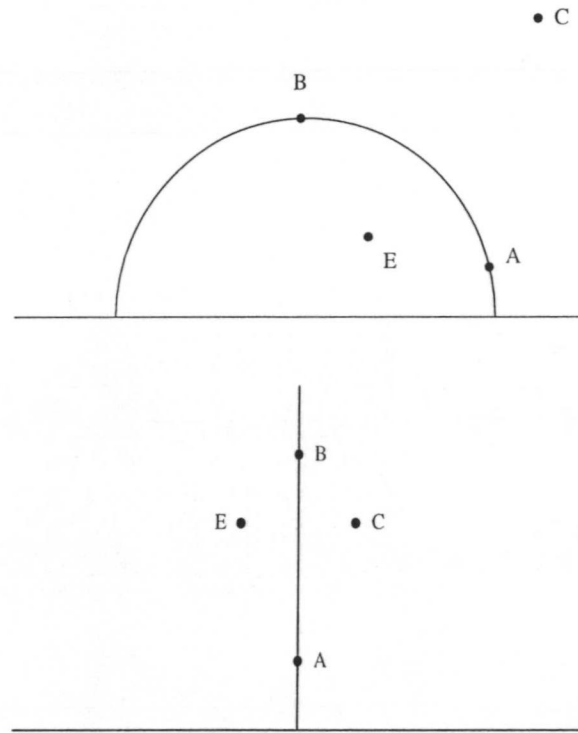
2.3.1 Problema 2

Dado un punto $C(p, q)$ y la recta determinada por $A(a, b)$ y $B(c, d)$, hallar el punto reflejado E de C , respecto de esta recta.

Determinación en H^2

Lógicamente, este nuevo problema es el inverso del anterior. Consiste en calcular el inverso de C respecto del círculo euclídeo de inversión ($a \neq c$) o recta euclídea

de inversión ($a = c$), dado por la recta determinada por A y B que constituye el eje de la reflexión.



El punto transformado E , en el primer caso, tiene coordenadas

$$\left(\frac{r^2(p-k)}{(p-k)^2 + q^2} + k, \frac{r^2q}{(p-k)^2 + q^2} \right),$$

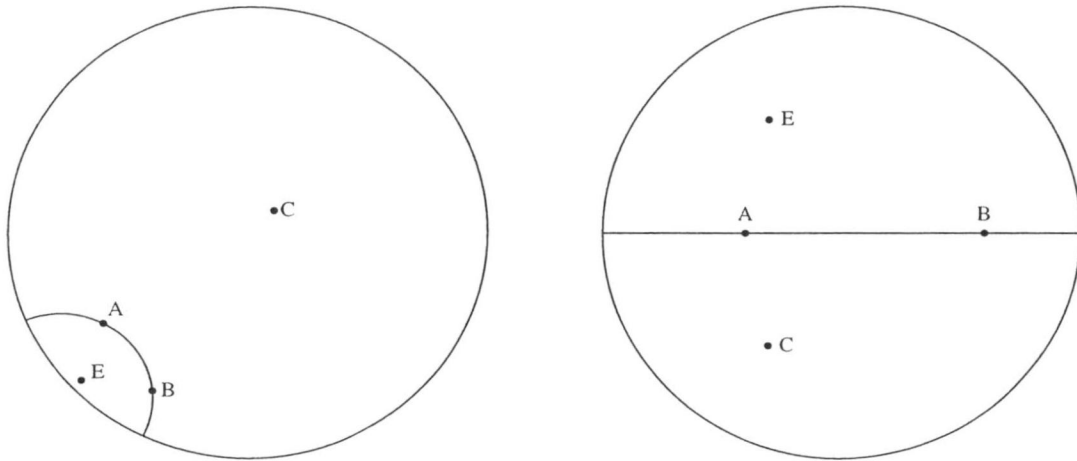
siendo $(k, 0)$ el centro del círculo euclídeo de inversión y r el radio.

En el segundo caso las coordenadas de E son

$$(2a - p, q).$$

Determinación en D^2

Razonando como en el Problema 1, consideremos la recta determinada por los puntos $A, B \in D^2$; sea $C \in D^2$, y $\tilde{A} = f_c^{-1}(A)$, $\tilde{B} = f_c^{-1}(B)$ y $\tilde{C} = f_c^{-1}(C)$. Si \tilde{E} es el reflejado de \tilde{C} respecto de la recta determinada por \tilde{A} y \tilde{B} en H^2 , entonces $E = f_c(\tilde{E})$ es el reflejado de C respecto de la recta determinada por A y B en D^2 , teniendo en cuenta las propiedades isométricas de f_c .

**2.4 Construcción de la traslación****2.4.1 Problema 3**

Dados dos puntos $A(a, b)$ y $B(c, d)$, determinar la traslación que transforma A en B .

Determinación en H^2

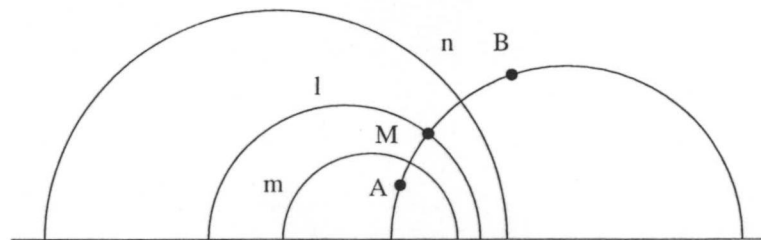
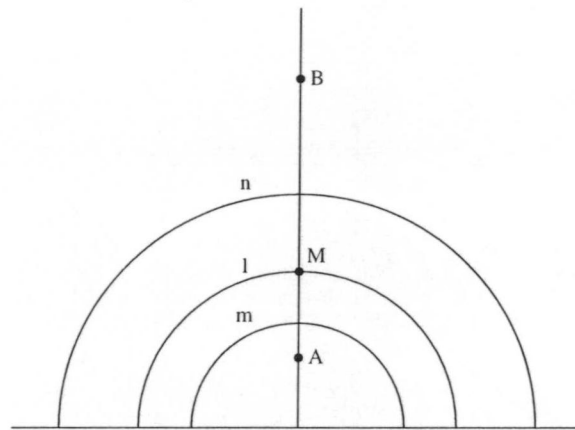
Sean $A, B \in H^2$, construimos la recta que contiene A y B y trazamos la mediatriz al segmento \widehat{AB} , denotada por l , que lo corta en el punto medio M , cuyas coordenadas son

$$(a, \sqrt{bd}) \text{ si } a = c.$$

y

$$\left(\frac{bc + ad}{b + d}, \sqrt{\frac{bd((a - c)^2 + (b + d)^2)}{(b + d)^2}} \right) \text{ si } a \neq c,$$

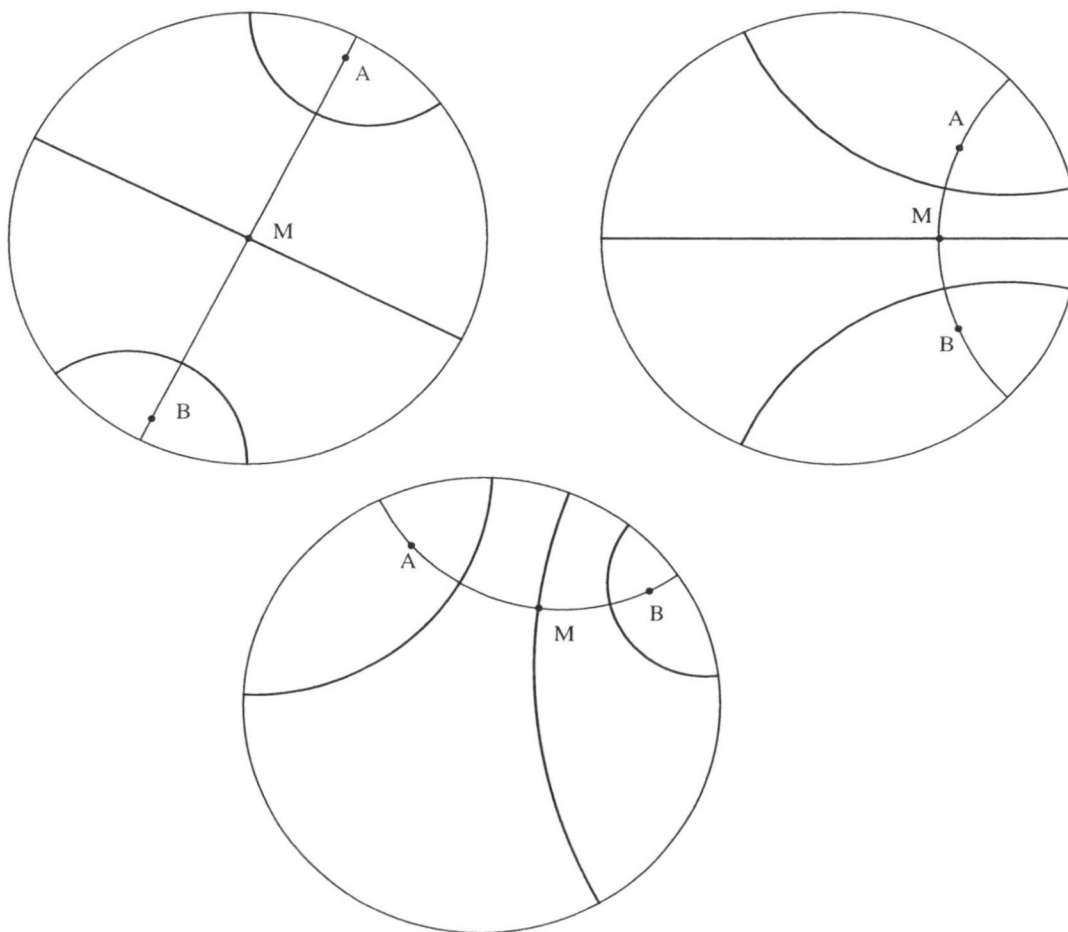
sin más que tener en cuenta las expresiones obtenidas en el Problema 1.



En los segmentos \widehat{AM} y \widehat{MB} repetimos el proceso, obteniéndose las mediatrices m y n de \widehat{AM} y \widehat{MB} , respectivamente. Estas mediatrices son ultraparalelas. El producto de las dos reflexiones según las mediatrices construidas anteriormente determina una traslación, siendo la distancia entre las dos mediatrices la mitad de la distancia entre A y B .

Determinación en D^2

Consideremos la recta determinada por $A, B \in D^2$, y los puntos $\tilde{A} = f_c^{-1}(A)$, $\tilde{B} = f_c^{-1}(B)$, y $M = f_c(\tilde{M})$, de H^2 , siendo \tilde{M} el punto medio del segmento $\tilde{A}\tilde{B}$ en H^2 . Las mediatrices de los segmentos \widehat{AB} , \widehat{AM} y \widehat{MB} de D^2 son las transformadas por f_c de las mediatrices de los segmentos $\widetilde{A\tilde{B}}$, $\widetilde{A\tilde{M}}$ y $\widetilde{M\tilde{B}}$ en H^2 .



2.5 Traslación sobre una recta

Dado el punto $A(a, b)$ perteneciente a una recta l , y un número real $R > 0$, el trasladado de A sobre l una distancia dada R y según una orientación considerada, es un punto A' de l tal que la orientación de A a A' es la dada y $d(A, A') = R$.

2.5.1 Problema 4

Dado el punto $A(a, b)$ perteneciente a una recta l , determinar el trasladado A' del punto A sobre l a una distancia dada R .

Determinación en H^2

Distinguiremos dos casos para construir una traslación en H^2 .

- 1.- Si la recta l tiene asociada la ecuación $x = a$, entonces si la orientación dada es positiva, teniendo en cuenta la expresión en paramétricas de l y la Proposición 1.3.1, se tiene que

$$R = \ln \left(\frac{b}{a} \right),$$

por lo que las coordenadas de A' son

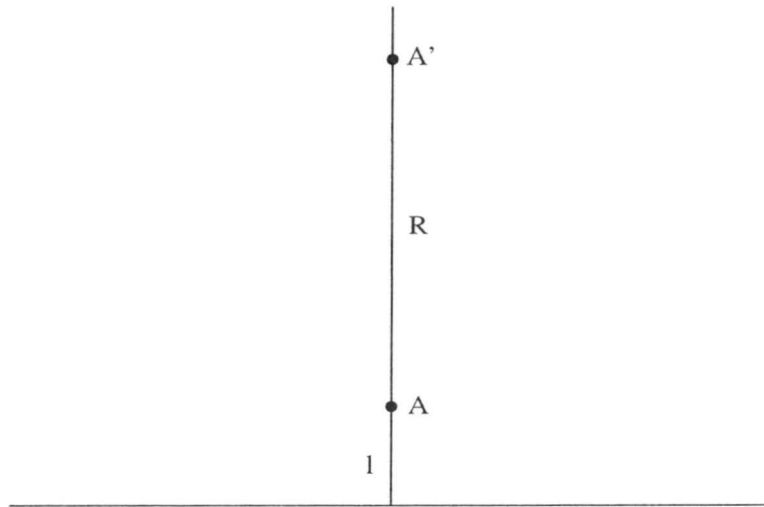
$$(a, be^R).$$

Si la orientación dada es negativa, las coordenadas de A' son

$$\left(a, \frac{b}{e^R} \right).$$

- 2.- Si l es la semicircunferencia euclídea con centro $O(k, 0)$ y radio r , β es la medida del ángulo $\angle VOA'$ y α es la medida del ángulo $\angle VOA$, considerando la expresión en paramétricas de l y la Proposición 1.3.1 se tiene que,

$$\beta = 2 \arctan \left(e^R \tan \frac{\alpha}{2} \right)$$



si la orientación dada es positiva; o

$$\beta = 2 \arctan(e^{-R} \tan \frac{\alpha}{2})$$

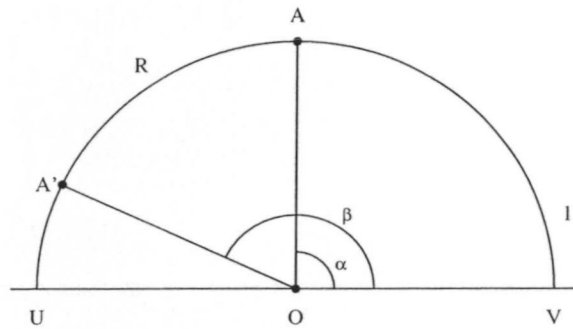
si la orientación dada es negativa.

El ángulo α viene dado por

$$\alpha = \arccos \frac{a - k}{r}$$

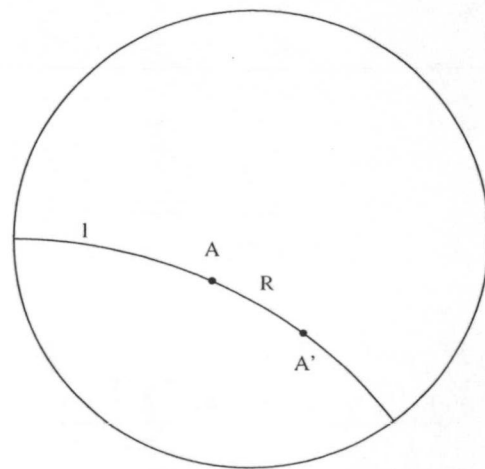
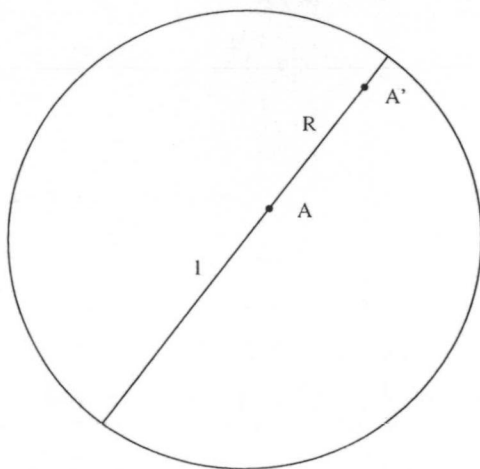
y las coordenadas del punto A' son

$$(r \cos \beta + k, r \operatorname{sen} \beta).$$



Determinación en D^2

Si consideramos que A es un punto de D^2 , l la recta que contiene a A y $R > 0$ un número real, el trasladado A' de A sobre l a una distancia R y según la orientación considerada se obtiene, trasladando $\tilde{A} = f_c^{-1}(A)$ una distancia R sobre la recta correspondiente a l en H^2 , según la orientación dada, obteniendo \tilde{A}' , y calculando su transformado mediante f_c , siendo f_c la transformación de Cayley.



2.6 Construcciones que involucran perpendicularidad

2.6.1 Problema 5

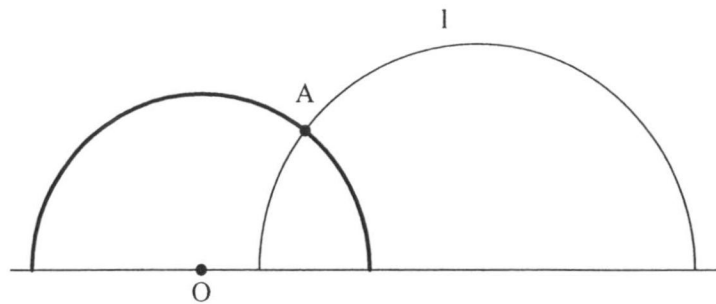
Dada una recta l , calcular la recta perpendicular a l por un punto cualquiera A perteneciente a ella.

Determinación en H^2

Calculamos el ángulo α que forma la recta euclídea tangente a la recta l en el punto $A(a, b)$ con $y = 0$.

Consideramos dos casos:

- 1.- $\alpha \neq 0$. Entonces la tangente de la recta perpendicular a l en el punto A forma un ángulo $\alpha + \frac{\pi}{2}$ con $y = 0$.



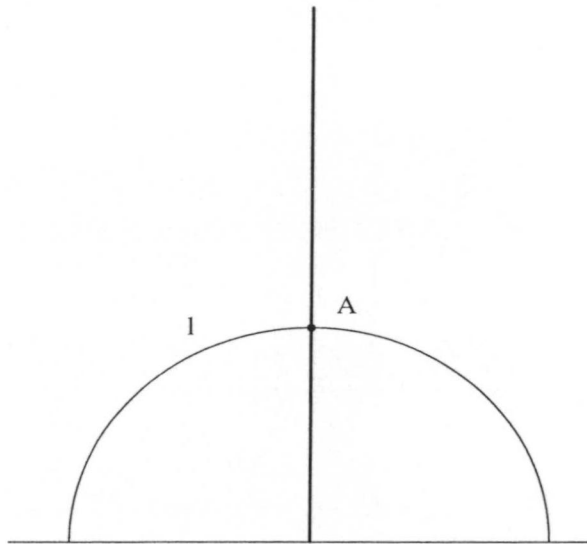
Imponiendo las condiciones de ortogonalidad a las rectas euclídeas tangentes, obtenemos que el centro O de la semicircunferencia euclídea perpendicular buscada es

$$\left(b \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + a, 0\right)$$

y el radio

$$b\sqrt{1 + \tan^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

2.- $\alpha = 0$. En este caso, la recta perpendicular buscada tiene de ecuación $x = a$.

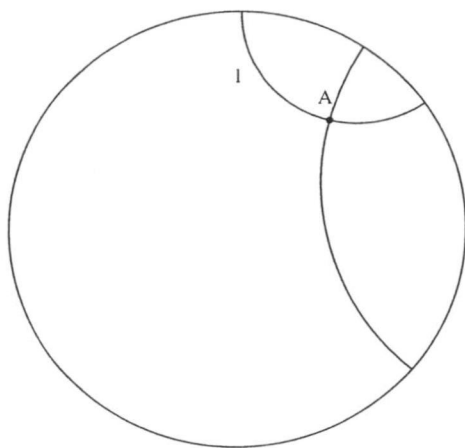


Determinación en D^2

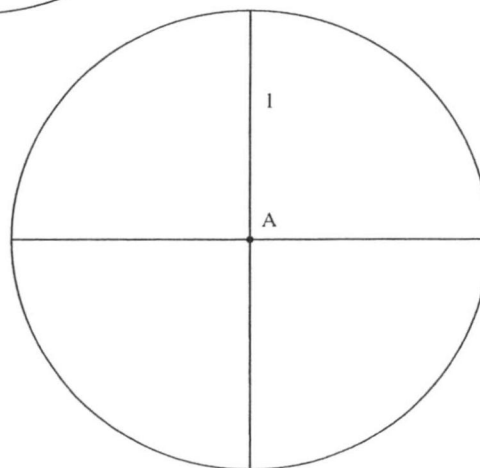
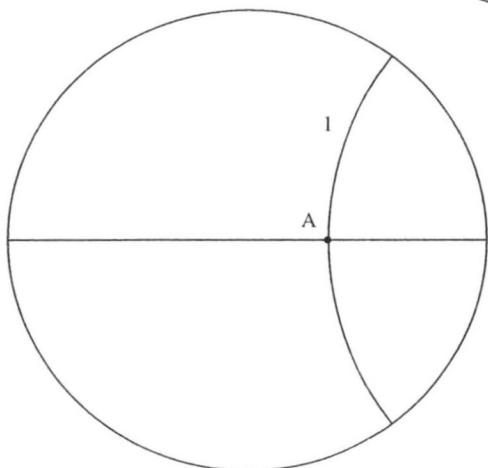
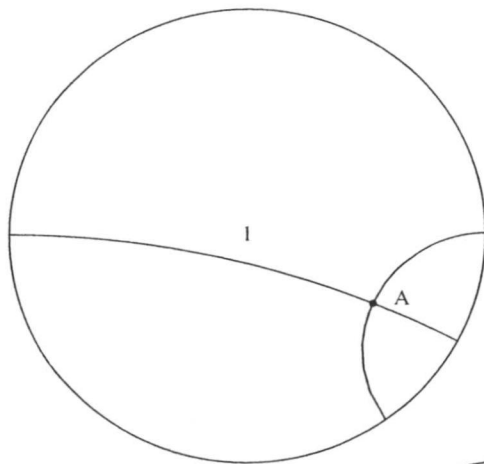
Sean los puntos $B, C \in D^2$, la recta l que pasa por ellos y un punto A cualquiera de la misma. Calculamos $f_c^{-1}(B) = \tilde{B}$, $f_c^{-1}(C) = \tilde{C}$ y $f_c^{-1}(A) = \tilde{A}$ y trazamos la recta que pasa por \tilde{A} y es perpendicular a la determinada por \tilde{B} y \tilde{C} , \tilde{l} en H^2 . Sea $\tilde{\alpha}$ el ángulo que forma la recta euclídea tangente a \tilde{l} en el punto \tilde{A} .

Distinguimos dos posibilidades:

- 1.- $\tilde{\alpha} \neq 0$. Si $(k_1, 0)$ y r_1 es el centro y el radio, respectivamente, de la semicircunferencia euclídea en \mathbb{C}^+ correspondiente a la recta perpendicular a \tilde{l} que pasa por \tilde{A} , la recta perpendicular a l por A en D^2 es el arco de circunferencia euclídea perpendicular a \mathbb{S}^1 en sus puntos $f_c(k_1 - r_1, 0)$, $f_c(k_1 + r_1, 0)$.



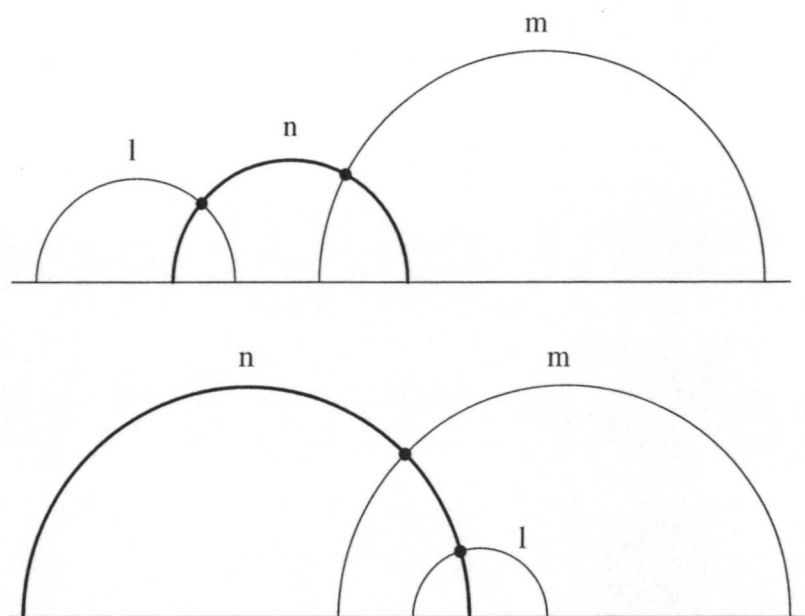
- 2.- $\tilde{\alpha} = 0$. La recta perpendicular a \tilde{l} por \tilde{A} tiene de ecuación $x = a$, luego la recta perpendicular a l por A es un arco de circunferencia euclídea que pasa por $(1, 0)$ y $f_c(a, 0) \in \mathbb{S}^1$ si $a \neq 0$, o la recta euclídea $y = 0$ si $a = 0$ (Véase la Sección 1.9).



2.6.2 Problema 6

Sean dos rectas ultraparalelas, l y m , calcular la única ([12]) recta n perpendicular a ambas.

Determinación en H^2



Sean $O_1(k_1, 0), r_1$ y $O_2(k_2, 0), r_2$ el centro y el radio de las semicircunferencias euclídeas correspondientes a l y m , respectivamente, con $k_2 \neq k_1$. El centro $O(k, 0)$ y el radio r de la semicircunferencia euclídeas correspondientes a n son

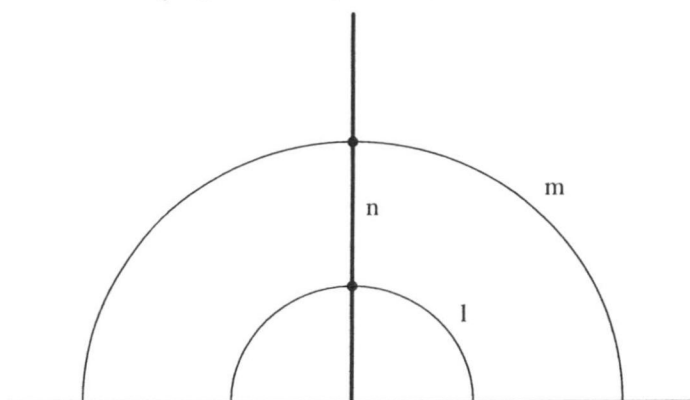
$$\left(\frac{k_2^2 - r_2^2 - k_1^2 + r_1^2}{2(k_2 - k_1)}, 0 \right)$$

y

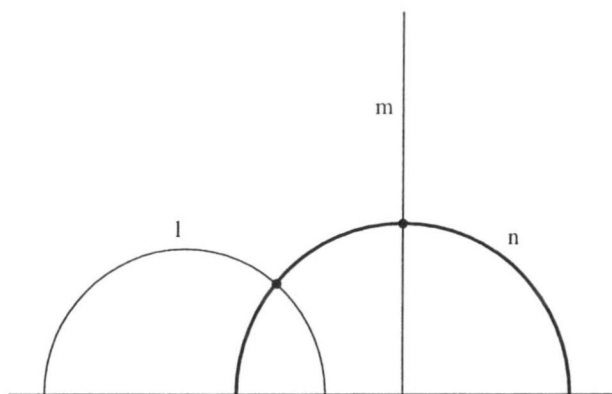
$$\sqrt{(k - k_1)^2 - r_1^2},$$

respectivamente, puesto que se verifica que

$$\begin{cases} r_1^2 + r^2 = (k - k_1)^2 \\ r_2^2 + r^2 = (k_2 - k)^2 \end{cases}$$



Si $k_2 = k_1$, entonces la recta perpendicular a l y m es la recta euclídea de ecuación $x = k_1$.



Sean $O_1(k_1, 0)$ y r_1 el centro y el radio, respectivamente, de la semicircunferencia euclídea correspondiente a l , y $x = a$ la recta euclídea correspondiente a m . El centro y el radio de la semicircunferencia euclídea correspondientes a n son, respectivamente,

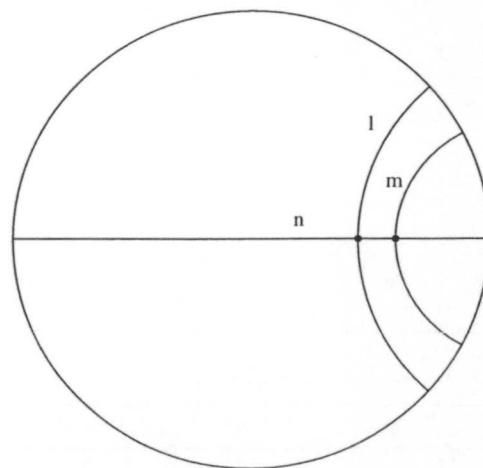
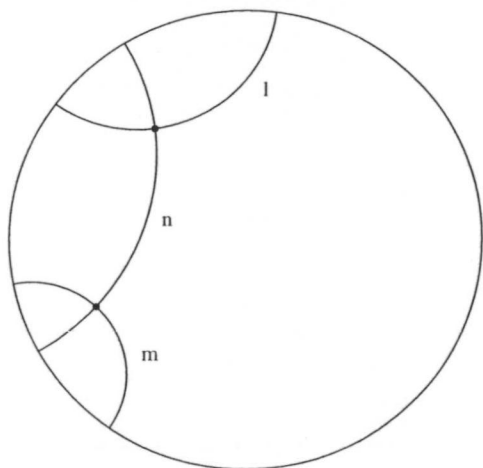
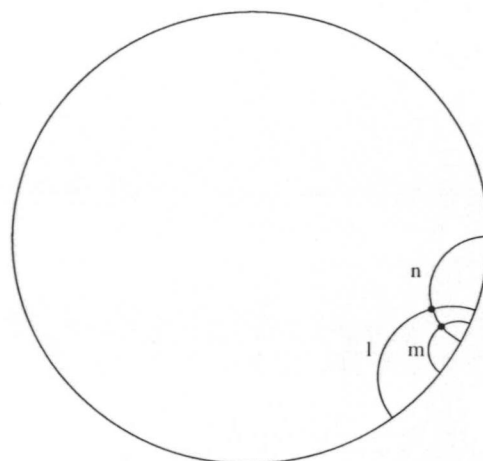
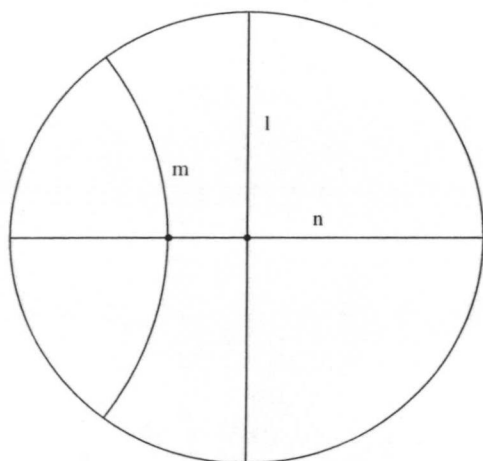
$$(a, 0)$$

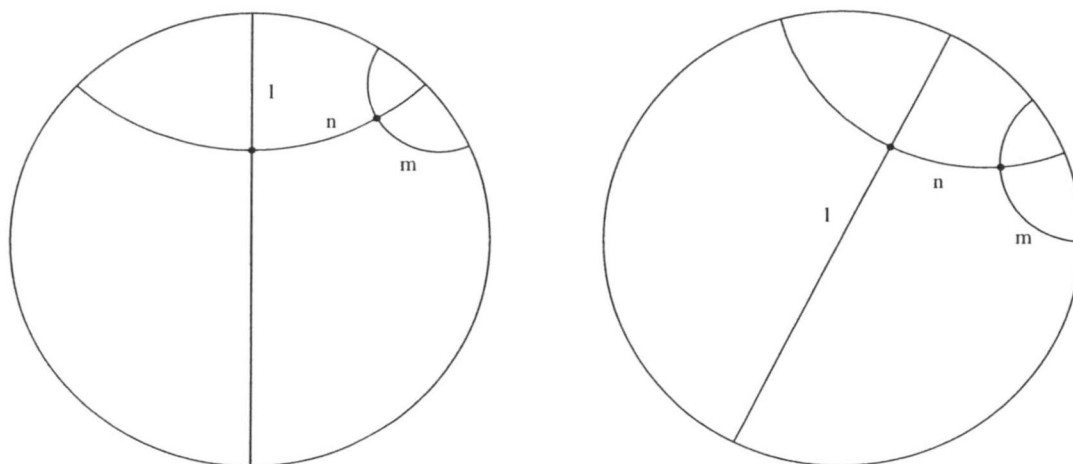
y

$$\sqrt{(a - k_1)^2 - r_1^2}.$$

Determinación en D^2

Sean l y m dos rectas ultraparalelas cualesquiera de D^2 y consideremos las correspondientes rectas \tilde{l} y \tilde{m} en H^2 . Calculamos la perpendicular común \tilde{n} , a \tilde{l} y \tilde{m} cuya imagen mediante f_c determina la perpendicular común n a l y m .





2.7 Construcción de la circunferencia

Definición 2.7.1 Una *circunferencia* se define como el conjunto de imágenes de un punto fijo Q perteneciente a H^2 (respectivamente, en D^2), mediante las reflexiones respecto de todas las rectas que pasan por un punto fijo dado A de H^2 (respectivamente, en D^2), denominado centro de la circunferencia.

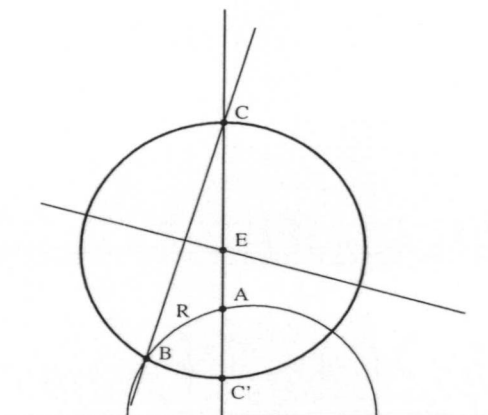
Observaciones a la definición

- a) Las circunferencias con centro en $A(a, b)$ son, por la propia definición, las órbitas para el grupo de isometrías elípticas con punto fijo en A (rotaciones con centro en A).
- b) La circunferencia es una circunferencia euclídea contenida en \mathbb{C}^+ (respectivamente, en D).
- c) Una circunferencia es una curva ortogonal a todas las rectas que pasan por A .

2.7.1 Problema 7

Dados el radio R y el centro $A(a, b)$, construir la circunferencia de centro A y radio R .

Determinación en H^2



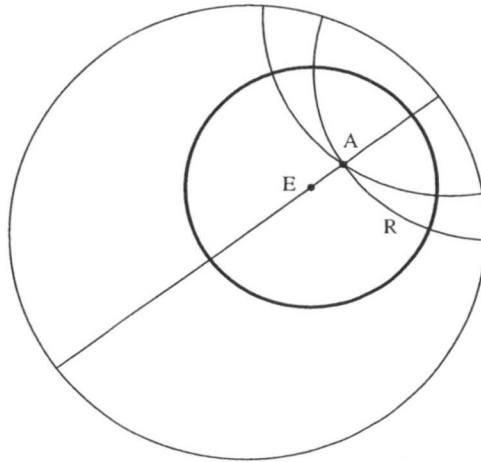
Trazamos la recta $x = a$, calculamos el punto C perteneciente a esta recta cuya ordenada es mayor que la del punto A y que dista R unidades de A , obteniendo $C(a, be^R)$. Consideramos una recta cualquiera que pase por A y, sobre dicha recta, calculamos un punto $B(c, d)$ que diste R unidades de A .

Por último, trazamos al segmento euclídeo \overline{BC} su mediatriz euclídea, cuya ecuación es

$$y - \frac{be^R + d}{2} = \frac{a - c}{d - be^R} \left(x - \frac{a + c}{2} \right).$$

La intersección de dicha mediatriz con $x = a$ da el centro E de la circunferencia euclídea buscado, cuyas coordenadas son

$$\left(a, \frac{d^2 - b^2 e^{2R} + (a - c)^2}{2(d - be^R)} \right). \quad (1)$$

Determinación en D^2 

Dados el radio R y el centro A en D^2 , sea $\tilde{A} = f_c^{-1}(A)$. Determinamos tres puntos que equidistan R de \tilde{A} , y a partir de sus imágenes por f_c , en D^2 , hallamos el centro E y el radio de la circunferencia euclídea contenida en D .

A continuación exponemos un resultado donde deducimos otra expresión de la distancia entre dos puntos de H^2 , utilizando la construcción de una circunferencia.

Proposición 2.7.2 Si $A(a, b)$ y $B(c, d)$ son dos puntos de H^2 , la distancia de A a B viene dada por

$$d(A, B) = \operatorname{argcosh} \left(\frac{b^2 + d^2 + (a - c)^2}{2bd} \right).$$

DEMOSTRACIÓN

Consideremos la circunferencia de centro A y radio $R = d(A, B)$. Sea el punto $C(a, be^R)$. Si considerásemos el punto C' sobre $x = a$ que dista R unidades de A y cuya ordenada es menor que la de A , entonces C' tendría de coordenadas (a, be^{-R}) .

El radio de la circunferencia euclídea es por tanto

$$\frac{be^R - be^{-R}}{2} = b \operatorname{senh}(R),$$

y la segunda coordenada del centro es

$$be^{-R} + \frac{be^R - be^{-R}}{2} = b \cosh(R).$$

Así pues, el centro eulídeo E tiene por coordenadas

$$(a, b \cosh(R)).$$

Por tanto, teniendo en cuenta (1),

$$b \frac{e^R + e^{-R}}{2} = \frac{d^2 - b^2 e^{2R} + (a - c)^2}{2(d - be^R)}.$$

Operando y simplificando se llega a

$$\frac{b^2 + d^2 + (a - c)^2}{bd} = e^R + e^{-R},$$

luego

$$\cosh(R) = \frac{b^2 + d^2 + (a - c)^2}{2bd}.$$

□

2.8 Construcción del horociclo

Definición 2.8.1 Al conjunto de imágenes de un punto fijo Q mediante las reflexiones respecto de todas las rectas que son asintóticas en un punto P de la recta del infinito, se le denomina *horociclo con centro en P* .

Observaciones a la definición

- a) Los horociclos son caracterizados, por la propia definición, como las órbitas para el grupo de transformaciones parabólicas (rotaciones límite) con punto fijo P perteneciente a la recta del infinito.
- b) El horociclo se obtiene a partir de la circunferencia como un caso límite. Se presentan los siguientes casos:

En H^2 : Si desplazamos el centro de la circunferencia a través de una recta dada hacia un punto propio de la recta del infinito (véase [45]), el horociclo es una circunferencia euclídea contenida en \mathbb{C}^+ y tangente al eje de abscisas en dicho punto. Si el centro se desplaza hacia el punto impropio de la recta del infinito, el horociclo es una recta euclídea contenida en \mathbb{C}^+ de ecuación $y = k$.

En D^2 : Si desplazamos el centro de la circunferencia a través de una recta dada hacia un punto de $fr(D^2)$, el horociclo es una circunferencia euclídea contenida en el disco unidad D tangente a \mathbb{S}^1 en dicho punto.

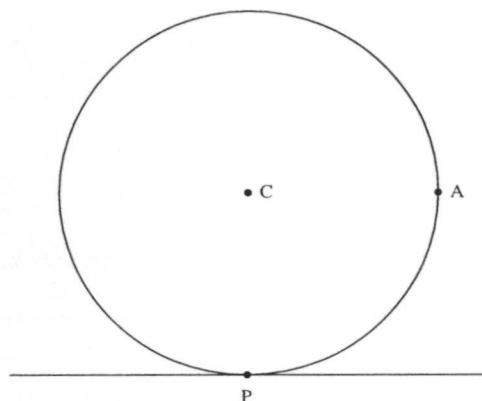
- c) Es fácil comprobar que el horociclo corta a todas las rectas del haz asintótico en P ortogonalmente, siendo la distancia entre dos horociclos con centro en P , la misma.

2.8.1 Problema 8

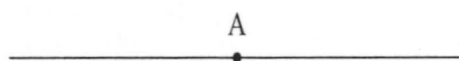
Dados los puntos $A(a, b)$ del plano hiperbólico y P de la recta del infinito, construir el horociclo que pasa por A y P .

Determinación en H^2

- 1.- Si $P(p, 0)$ es un punto propio de la recta del infinito, entonces el centro de la circunferencia euclídea es $C(p, q)$, siendo $q = \frac{(a-p)^2 + b^2}{2b}$, que coincide con su radio.

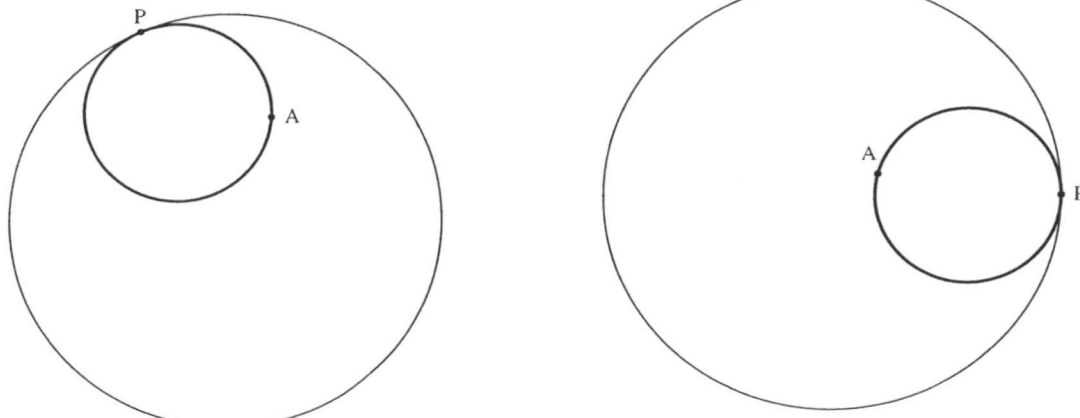


2.- Si P es el punto impropio, el horociclo que pasa por A con centro en P es la recta euclídea contenida en \mathbb{C}^+ de ecuación $y = b$.



Determinación en D^2

Sea $P(p, q) \in fr(D^2)$, hallamos $f_c^{-1}(A) = \tilde{A} \in H^2$, y $f_c^{-1}(P) = \tilde{P}$; \tilde{P} es un punto de la recta del infinito. A continuación construimos el horociclo en H^2 y mediante f_c obtenemos el horociclo en D^2 .



2.8.2 Problema 9

Dados dos puntos $A(a, b)$ y $B(c, d)$, calcular los dos horociclos que pasan por A y B .

Determinación en H^2

- 1.- Si $b \neq d$, teniendo en cuenta que la ecuación de la recta euclídea ortogonal al segmento euclídeo \overline{AB} y que pasa por su punto medio es

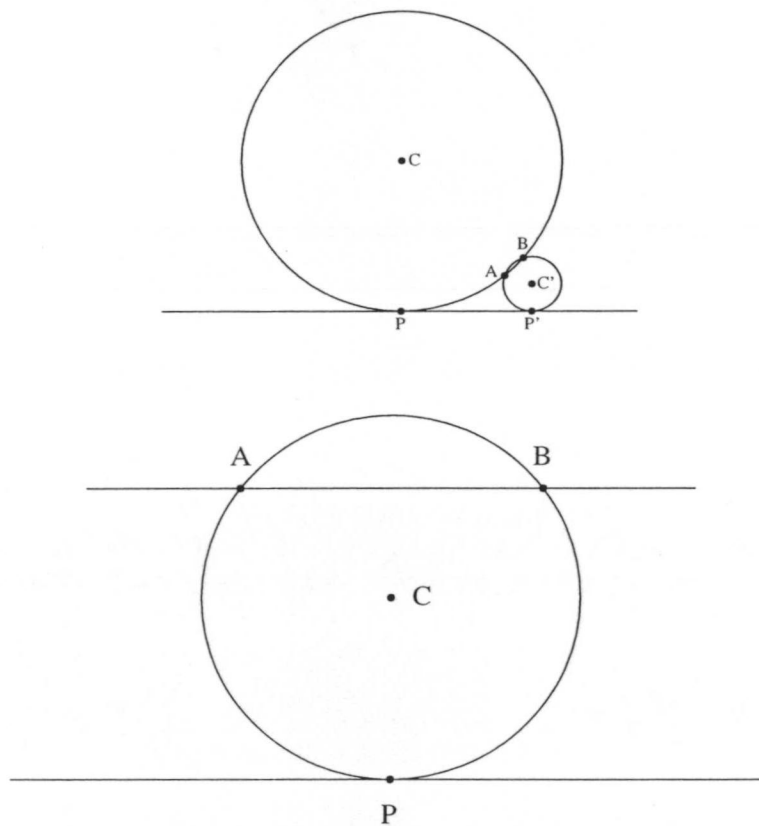
$$(c - a)x + (d - b)y - \frac{d^2 - b^2}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2} = 0$$

y que el punto A pertenece a las circunferencias euclídeas, la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (c - a)p + (d - b)q - \frac{d^2 - b^2}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2} = 0 \\ p^2 - 2ap + a^2 - 2bq + b^2 = 0 \end{cases}$$

cuyas incógnitas son p y q , determina los centros C y C' de tales circunferencias euclídeas.

- 2.- Si $b = d$, se obtiene el horociclo que es una circunferencia euclídea cuyo centro y radio vienen determinados por el sistema del apartado anterior haciendo $b = d$, y el horociclo que constituye la recta euclídea de ecuación $y = b$.

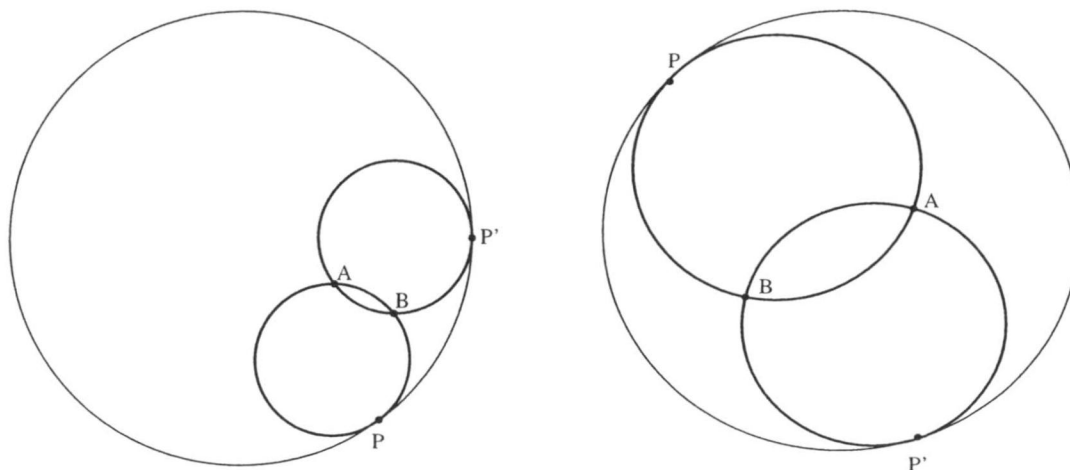


Determinación en D^2

Hallamos $f_c^{-1}(A) = \tilde{A}(\tilde{a}, \tilde{b})$, y $f_c^{-1}(B) = \tilde{B}(\tilde{c}, \tilde{d})$ y construimos los horociclos en H^2 . Posteriormente, mediante f_c obtenemos los correspondientes en D^2 .

2.9 Construcción del hiperciclo

Definición 2.9.1 Se define el *hiperciclo* determinado por un punto Q y una recta l del plano hiperbólico, como el conjunto de imágenes de Q mediante reflexiones respecto de todas las rectas ortogonales a l . La recta l se denomina recta de traslación (véase la Sección 2.10).



Observaciones a la definición

- a) Los hiperciclos son, por la propia definición, las órbitas del grupo de isometrías hiperbólicas que dejan invariantes los dos puntos de la intersección de la recta con la recta del infinito.
- b) Obviamente el punto Q pertenece al hiperciclo determinado por Q y una recta cualquiera l .
- c) En H^2 hay que tener en cuenta las dos situaciones siguientes:
 - 1) Si la recta de traslación corta a la recta del infinito en dos puntos propios, el hiperciclo es un arco de circunferencia euclídea que pasa por dichos puntos.
 - 2) Si la recta de traslación corta a la recta del infinito en un punto propio A y otro impropio, el hiperciclo es una semirrecta euclídea cuyo punto origen es A .
- d) Si consideramos D^2 , un hiperciclo es un arco de circunferencia euclídea que pasa por dos puntos de la recta del infinito determinados por la recta de traslación.
- e) Si el punto Q pertenece a la recta de traslación, el hiperciclo coincide con dicha recta.
- f) La distancia entre cualquier punto de la recta de traslación y el hiperciclo, medida sobre la recta ortogonal a la misma, es constante.
- g) Dos hiperciclos cualesquiera del mismo haz son "paralelos" en el sentido de que la distancia de uno de ellos al otro es constante.

2.9.1 Problema 10

Dados dos puntos A y B de la recta del infinito y un tercer punto C del plano hiperbólico, construir el único hiperciclo que pasa por A , B y C .

Determinación en H^2

- 1.- Si A y B son puntos propios de la recta del infinito de coordenadas $(a, 0)$ y $(b, 0)$, respectivamente, con $a < b$ y $C(c, d) \in H^2$, el hiperciclo que pasa por A , B y C es la intersección con \mathbb{C}^+ de la circunferencia euclídea cuyo centro E y radio r se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} (a-p)^2 + q^2 = r^2 \\ (b-p)^2 + q^2 = r^2 \\ (c-p)^2 + (d-q)^2 = r^2 \end{cases}.$$

El centro E tiene de coordenadas

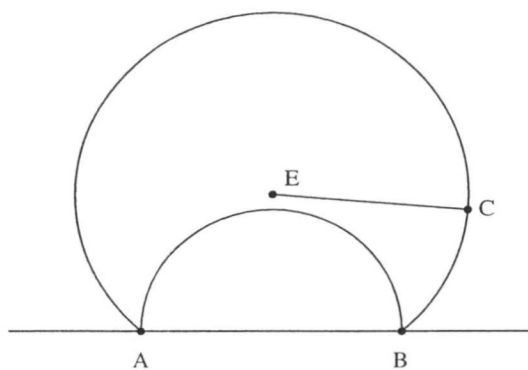
$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{(a-c)(b-c) + d^2}{2d} \right),$$

y su radio es

$$\frac{\sqrt{((a-c)^2 + d^2)((b-c)^2 + d^2)}}{2d}.$$

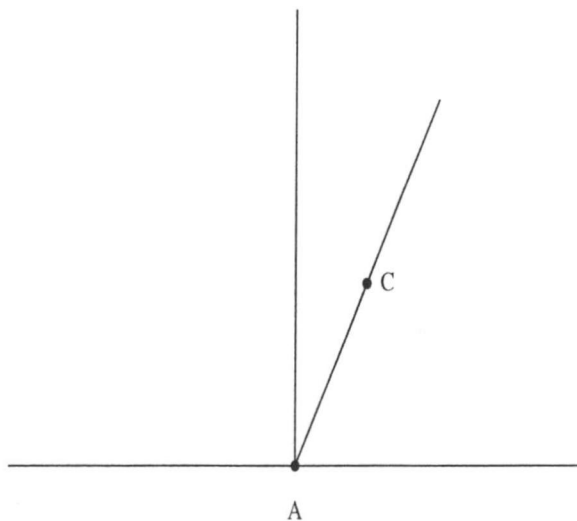
- 2.- Si $A(a, 0)$, B es impropio y $C(c, d) \in H^2$, el hiperciclo es la semirrecta euclídea de ecuación

$$y = \frac{d}{c-a}(x-a), \text{ si } c \neq a,$$



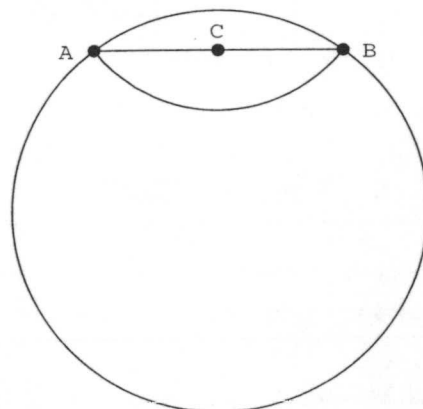
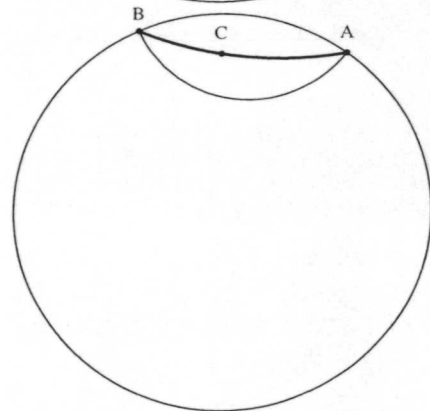
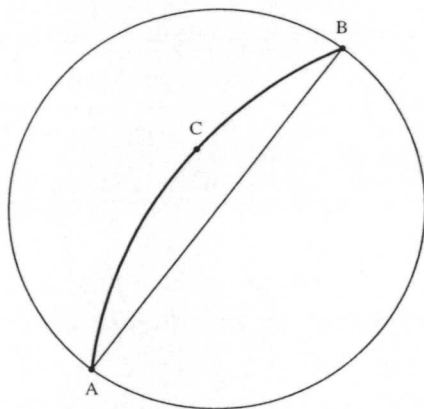
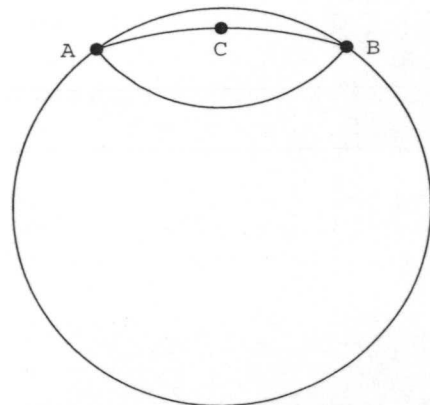
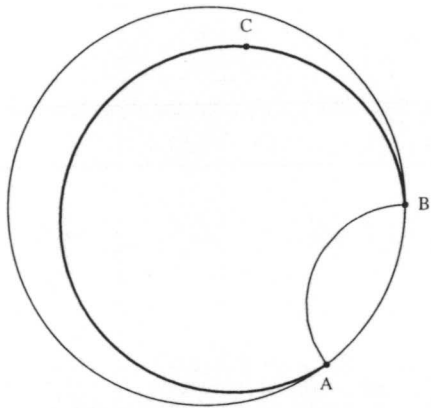
o

$$x = a, \text{ si } c = a.$$



Determinación en D^2

Sean $\tilde{A} = f_c^{-1}(A)$, $\tilde{B} = f_c^{-1}(B)$ y $\tilde{C} = f_c^{-1}(C)$ y σ el hipercirculo de H^2 determinado por \tilde{A} , \tilde{B} y \tilde{C} . Entonces $f_c(\sigma)$ es el hipercirculo de D^2 determinado por A , B y C .



2.10 Traslación según una recta

Definición 2.10.1 Dado un punto C , una recta l que no contiene a C , un número real $R > 0$, y una cierta orientación, el trasladado de C según la recta l a una distancia R , y con la orientación dada, es el punto C' de manera que se verifique:

- $d(C, l) = d(C', l)$;
- si A y B son las proyecciones ortogonales de C y C' sobre l , respectivamente, entonces $d(A, B) = R$;
- C y C' están en el mismo semiplano de la recta l ;
- la orientación de A a B es la dada.

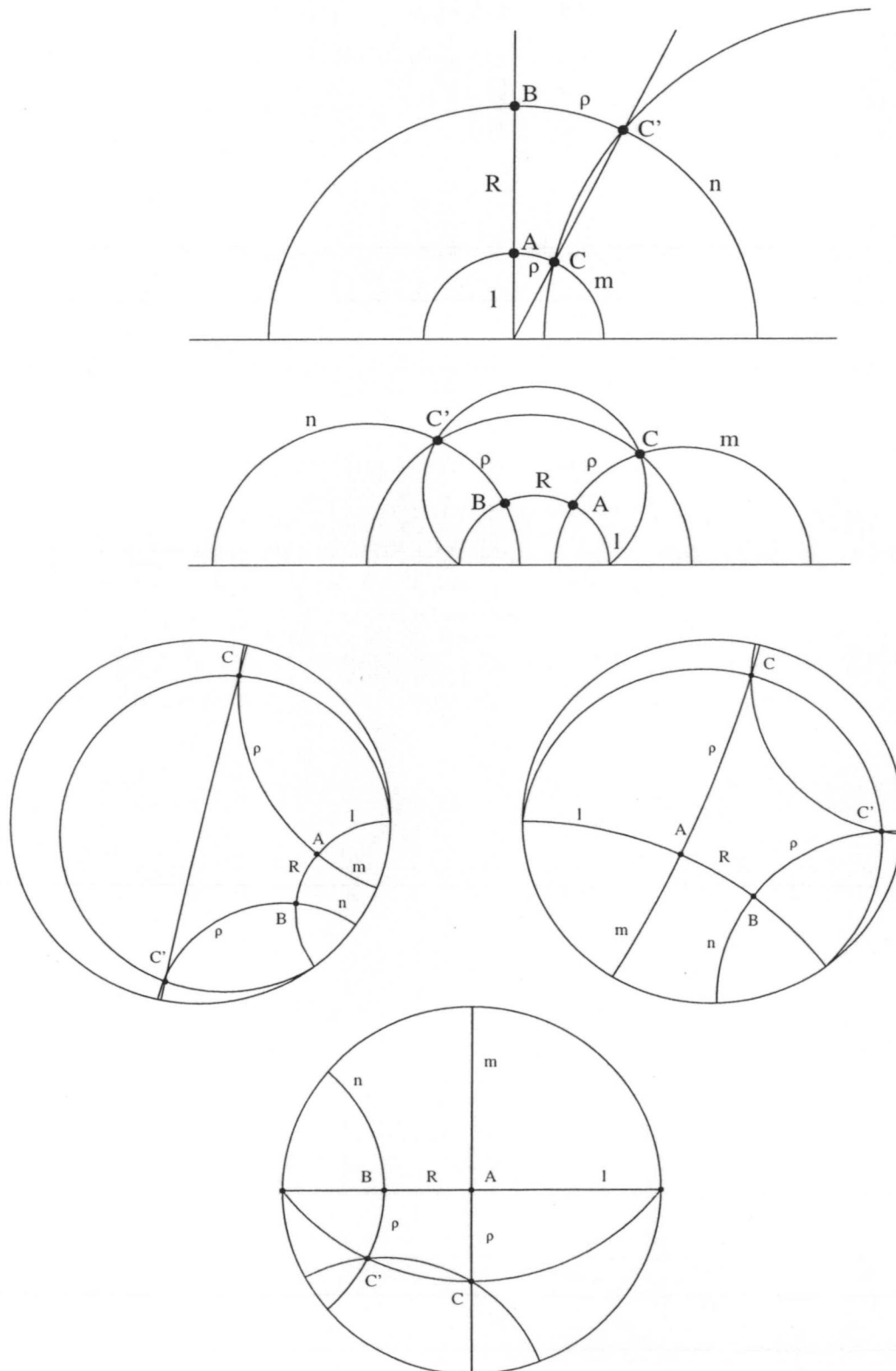
Observaciones 2.10.2 a) Para realizar la traslación, la medida R se toma sobre la recta l .

b) El cuadrilátero $\mathcal{S}(A, C, C', B)$ es el de *Saccheri* ([18],[23]). El cuadrilátero de Saccheri es aquel que tiene los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC'$ rectos y $\widehat{AC} = \widehat{BC'}$. Dibujando las diagonales y usando congruencia de triángulos, se ve fácilmente que $\angle C'CA = \angle BC'C$ por lo que ambos ángulos han de ser agudos.

2.10.1 Problema 11

Dado un punto $C(p, q)$, no incidente con la recta l , trasladar dicho punto a una distancia R (medida sobre l) según la recta l y una orientación dada.

Determinación en H^2 Para construir la traslación en H^2 , trazamos por el punto C la recta m perpendicular a l . La recta m es la que pasa por C y su reflejado respecto de l . Sea $A(a, b)$ la intersección de l y m ; y ρ la distancia de C a A . Asimismo, sea $B(c, d)$ el trasladado de A sobre l a una distancia R según la orientación dada, y n la recta perpendicular a l pasando por B . Por último, el trasladado C' de C se obtiene mediante la traslación del punto B una distancia ρ sobre la recta n de tal forma que C y C' estén en el mismo semiplano de l .

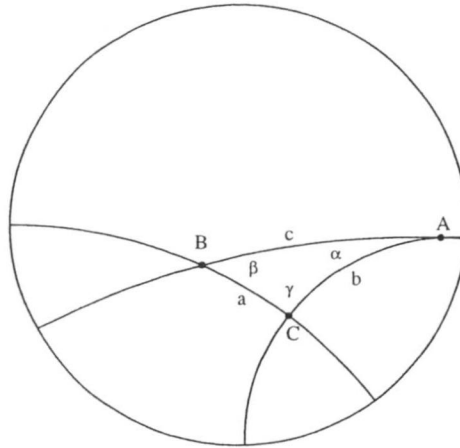
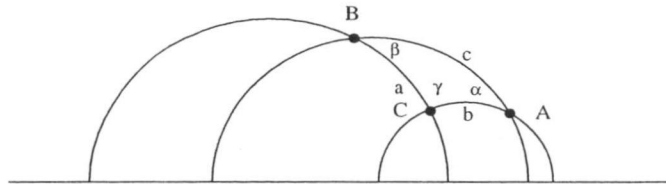


Determinación en D^2 Llamamos $\tilde{C} = f_c^{-1}(C) \in H^2$ y $\tilde{l} = f_c^{-1}(l)$ la recta en H^2 , trasladamos \tilde{C} una distancia R según \tilde{l} con la orientación considerada y obtenemos \tilde{C}' . La imagen de \tilde{C}' mediante f_c determina en D^2 el trasladado C' de C según l a una distancia R medida sobre l con la orientación dada.

2.10.2 Propiedades de la traslación

En este apartado deducimos la relación entre las longitudes de los lados del cuadrilátero de Saccheri, y concluimos con una importante propiedad sobre rectas ultra-paralelas.

Sea $\mathcal{T}(A, B, C)$ el triángulo en el plano hiperbólico de vértices los puntos A, B, C y tal que la longitud del segmento \widehat{AB} es igual a c , la longitud de \widehat{BC} es a , y la de \widehat{AC} es b , así como γ es el ángulo $\angle ACB$, β el $\angle ABC$ y α el $\angle BAC$. Entonces, se tienen los siguientes lemas cuyas demostraciones pueden consultarse en [47].



Lema 2.10.3 (*Ley de los senos*)

$$\frac{\operatorname{senh}(a)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\operatorname{senh}(b)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{senh}(c)}{\operatorname{sen}(\gamma)}.$$

Lema 2.10.4 (*1ª ley de los cosenos*)

$$\cos(\gamma) = \frac{\cosh(a) \cosh(b) - \cosh(c)}{\operatorname{senh}(a) \operatorname{senh}(b)}.$$

Lema 2.10.5 (*2ª ley de los cosenos*)

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}.$$

Proposición 2.10.6 Sean C' el trasladado de C según la recta l que no contiene a C , una distancia R , con una cierta orientación, $x = d(C, C')$ y $\rho = d(C, l) = d(C', l)$. Entonces

$$\cosh(x) = 1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho).$$

DEMOSTRACIÓN

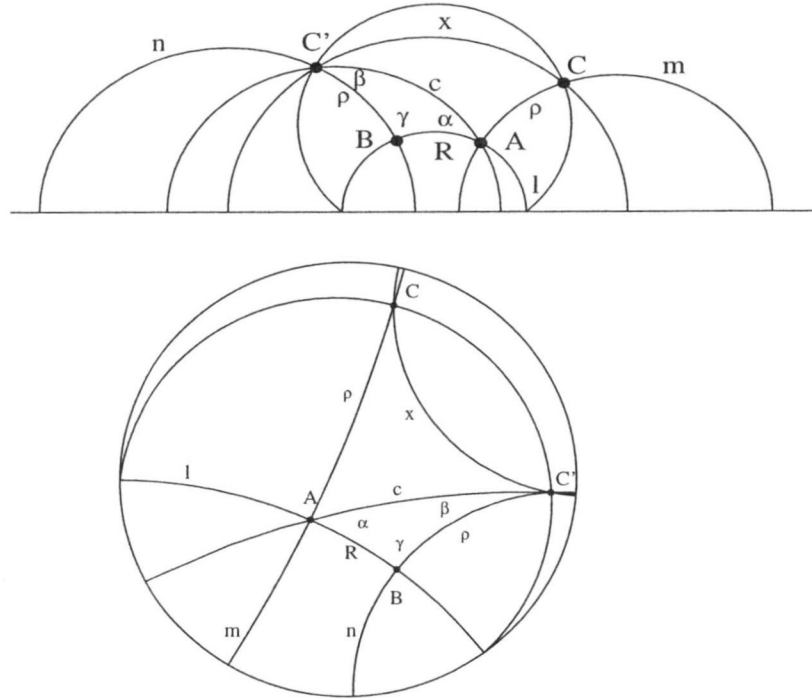
Sean A y B las proyecciones ortogonales de C y C' , respectivamente. Considerando el triángulo $\mathcal{T}(A, C', B)$, designaremos por c la longitud del segmento $\widehat{AC'}$, α el ángulo $\angle BAC'$, β el $\angle AC'B$ y $\gamma = \frac{\pi}{2}$ el $\angle C'BA$.

Por el Lema 2.10.4, se tiene que

$$\frac{\cosh(R) \cosh(\rho) - \cosh(c)}{\operatorname{senh}(R) \operatorname{senh}(\rho)} = 0, \quad (2)$$

luego

$$\cosh(c) = \cosh(R) \cosh(\rho). \quad (3)$$



Análogamente, del Lema 2.10.3 obtenemos que

$$\frac{\text{senh}(c)}{\text{sen}(\gamma)} = \frac{\text{senh}(\rho)}{\text{sen}(\alpha)},$$

de donde

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{senh}(\rho)}{\text{senh}(c)}. \tag{4}$$

Aplicando de nuevo el Lema 2.10.4 en el triángulo $\mathcal{T}(A, C, C')$, se sigue que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}(\alpha) = \frac{\cosh(c) \cosh(\rho) - \cosh(x)}{\text{senh}(c) \text{senh}(\rho)}.$$

Teniendo en cuenta (3) y (4) se obtiene que

$$\text{senh}(\rho) = \frac{\cosh(R) \cosh^2(\rho) - \cosh(x)}{\text{senh}(\rho)}.$$

Por tanto,

$$\cosh(x) = 1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho).$$

□

Corolario 2.10.7 *En las condiciones de la proposición anterior, se tiene:*

$$\cosh(x) > \cosh(R).$$

DEMOSTRACIÓN

Como $\cosh(\rho) > 1$, y $\cosh(R) > 1$, se tiene que

$$\cosh(R)(\cosh^2(\rho) - 1) > \cosh^2(\rho) - 1,$$

o lo que es lo mismo

$$1 + \cosh(R)(\cosh^2(\rho) - 1) - \cosh^2(\rho) > 0,$$

que es equivalente a

$$1 + \cosh(R) \cosh^2(\rho) - \cosh^2(\rho) > \cosh(R).$$

Por tanto

$$\cosh(x) > \cosh(R).$$

□

También obtenemos para rectas ultraparalelas la siguiente propiedad métrica.

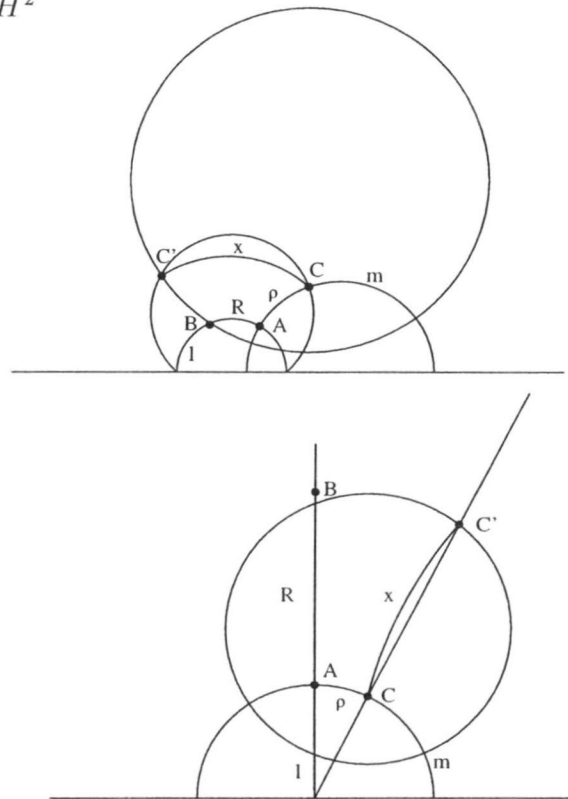
Corolario 2.10.8 *La distancia mínima entre dos rectas ultraparalelas se alcanza sobre la única perpendicular común.*

DEMOSTRACIÓN

Por el corolario anterior, $\cosh(x) > \cosh(R)$, por tanto $x > R$, al ser la función $\cosh(z)$ estrictamente creciente para $z > 0$. \square

Observación 2.10.9 El Problema 11 se puede resolver teniendo en cuenta la Proposición 2.10.6, mediante el siguiente algoritmo constructivo:

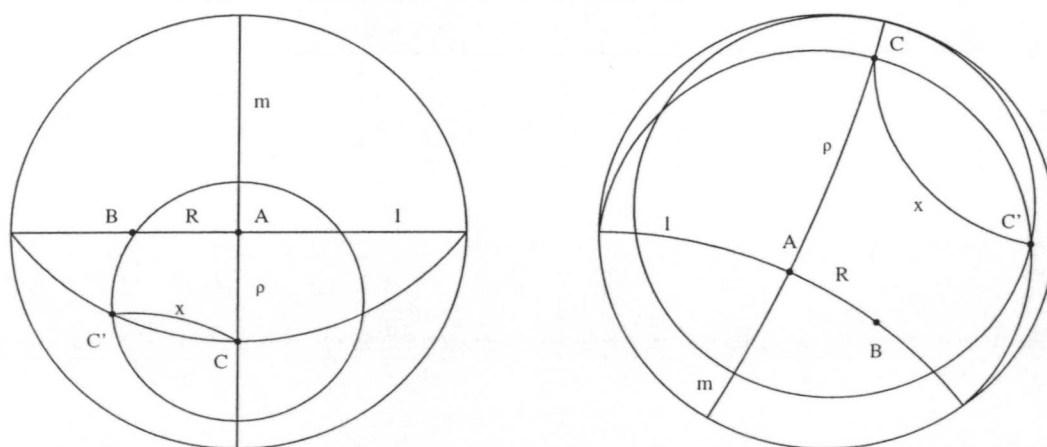
Determinación en H^2



Trazamos por el punto C la recta m perpendicular a l . Sea A la intersección de l y m , y $\rho = d(C, A)$. Asimismo, sea B el trasladado de A sobre la recta l una distancia R según la orientación dada. Construimos el hiperciclo correspondiente

a l que pasa por C . La intersección de éste con la circunferencia de centro C y radio $x = \operatorname{arccosh}(1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho))$ determina dos puntos. De estos, el trasladado de C según l una distancia R con una orientación dada, es aquel punto C' que se encuentra en el mismo semiplano de la recta m que el punto B .

Determinación en D^2



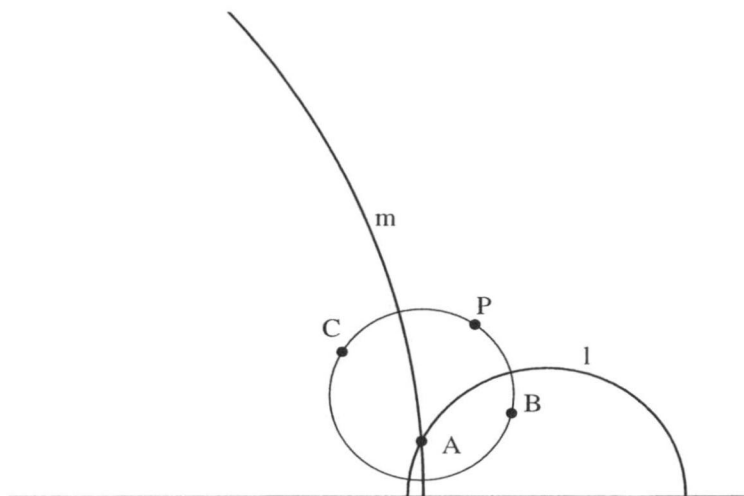
Llamamos $\tilde{C} = f_c^{-1}(C) \in H^2$ y $\tilde{l} = f_c^{-1}(l)$ la recta en H^2 , trasladamos \tilde{C} una distancia R según \tilde{l} con la orientación considerada y obtenemos \tilde{C}' , utilizando el mismo método que hemos expuesto anteriormente para H^2 . La imagen de \tilde{C}' mediante f_c determina en D^2 el trasladado C' de C según l a una distancia R medida sobre l con la orientación dada.

2.11 Construcciones relativas al giro

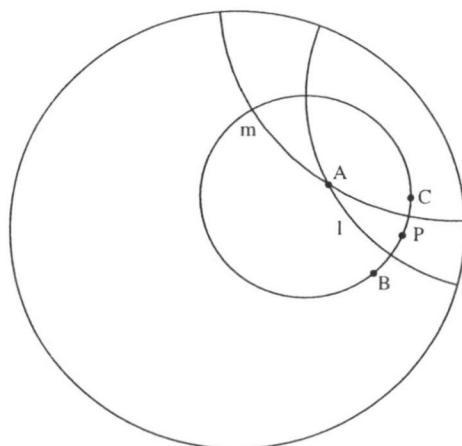
2.11.1 Problema 12

Dado un punto $A(a, b)$ y un ángulo $\alpha \in (-\pi, \pi]$, calcular el girado de un punto cualquiera B haciendo centro en A con ángulo α .

Determinación en H^2



Se traza una recta cualquiera l que pase por A , y tomamos un punto cualquiera B de H^2 . Calculamos el reflejado P del punto B respecto de la recta l . A continuación se construye la recta m , que pasa por A y forma un ángulo $\frac{\alpha}{2}$ con l . El punto C girado de B con ángulo α y centro A se obtiene como el reflejado de P respecto de la recta m .



Determinación en D^2 . Sean $A, B \in D^2$ y $\tilde{A} = f_c^{-1}(A)$, $\tilde{B} = f_c^{-1}(B)$ como en la figura anterior.

Sea \tilde{C} el girado de \tilde{B} con centro en \tilde{A} y ángulo α , en H^2 . Entonces, teniendo en cuenta las propiedades de f_c , $C = f_c(\tilde{C})$ es el girado de B con centro en A y ángulo α en D^2 ,

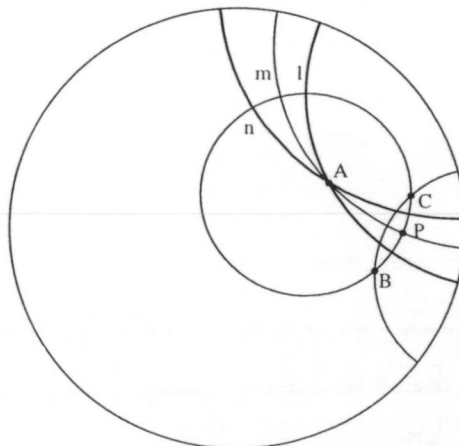
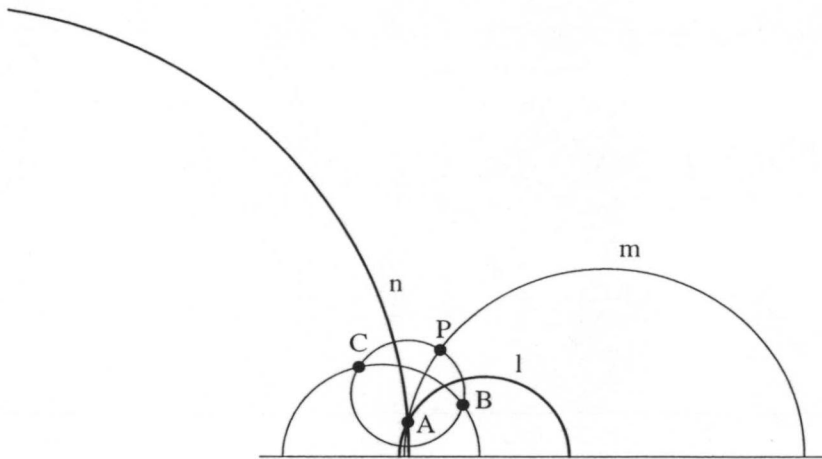
Obsérvese que, tal y como se indica en la Sección 2.7, el punto B y su girado C están situados en la circunferencia de centro A y radio $d(A, B)$.

2.11.2 Problema 13

Dados dos puntos B y C , calcular el giro que lleva B en C con centro en un punto A perteneciente a la mediatriz m del segmento \widehat{BC} .

Determinación en H^2 y D^2

Dados los puntos B y C , siempre existe el semigiro con centro en cualquier punto de la recta que pasa por B y C e infinitos giros con centro en cualquier punto de la mediatriz m .



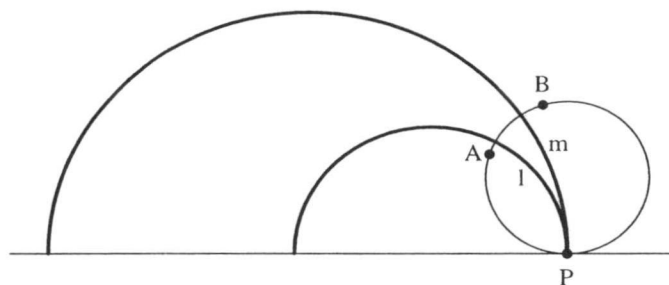
2.12 Construcciones relativas a la rotación límite

2.12.1 Problema 14

Dados dos puntos $A(a,b)$ y $B(c,d)$, construir la rotación límite que lleva uno en otro.

Determinación en H^2

- 1.- El centro de la rotación límite es un punto propio P de la recta del infinito.

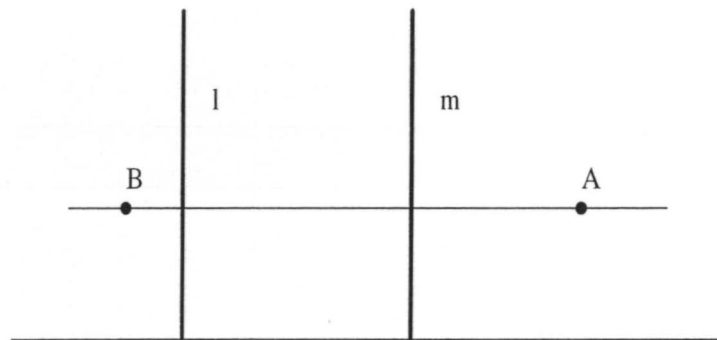


Si $b \neq d$, existen dos horociclos que pasan por A y B . Si $b = d$ existe sólo un horociclo que pasa por A y B . En cualquier caso, el problema se reduce a construir dos rectas, l y m , asintóticas en el punto P , centro del horociclo, de tal forma que reflejando el punto A respecto de l y después respecto de m , dicho punto se transforme en B .

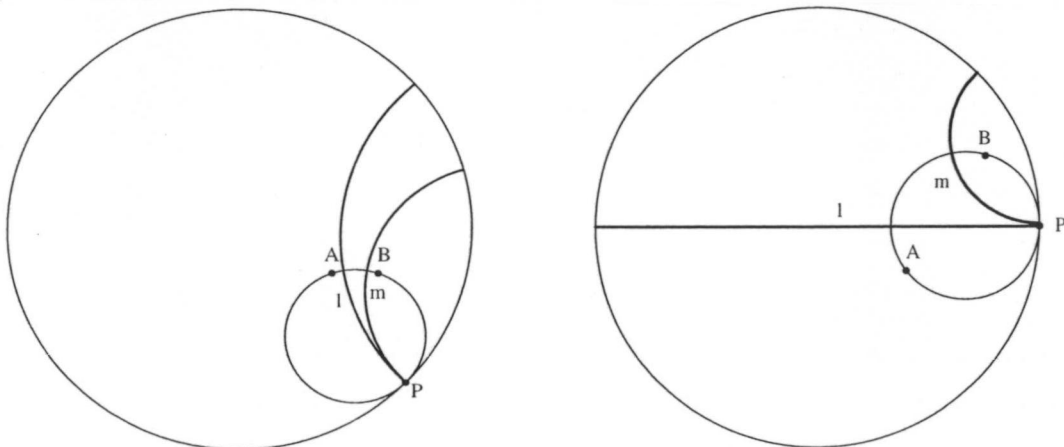
- 2.- El centro de la rotación límite es el punto impropio P de la recta del infinito.

En este caso, $b = d$.

Construimos dos rectas, l y m , asintóticas en el punto impropio tal que reflejando el punto A respecto de l y después respecto de m , dicho punto se transforme en B .



Determinación en D^2 . Sean $A, B \in D^2$, hallamos $f_c^{-1}(A) = \tilde{A}$ y $f_c^{-1}(B) = \tilde{B}$ y hacemos la construcción en H^2 . Posteriormente, via la transformación de Cayley f_c obtenemos la construcción en D^2 .

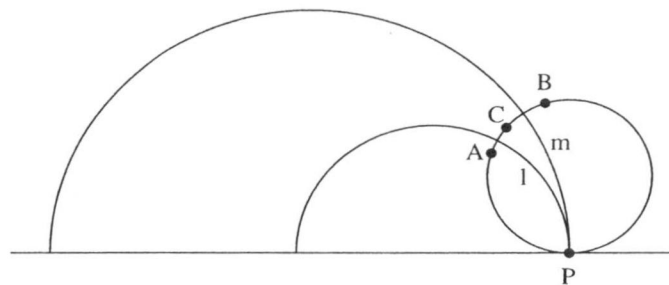


2.12.2 Problema 15

Dado un punto $A(a,b)$ y una rotación límite mediante dos rectas asintóticas l y m en un punto P de la recta del infinito, calcular su transformado B .

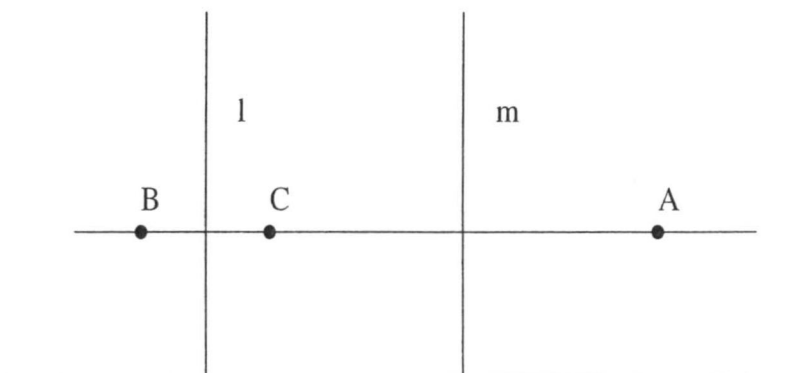
Determinación en H^2

- 1.- El centro de la rotación límite es un punto propio P de la recta del infinito.

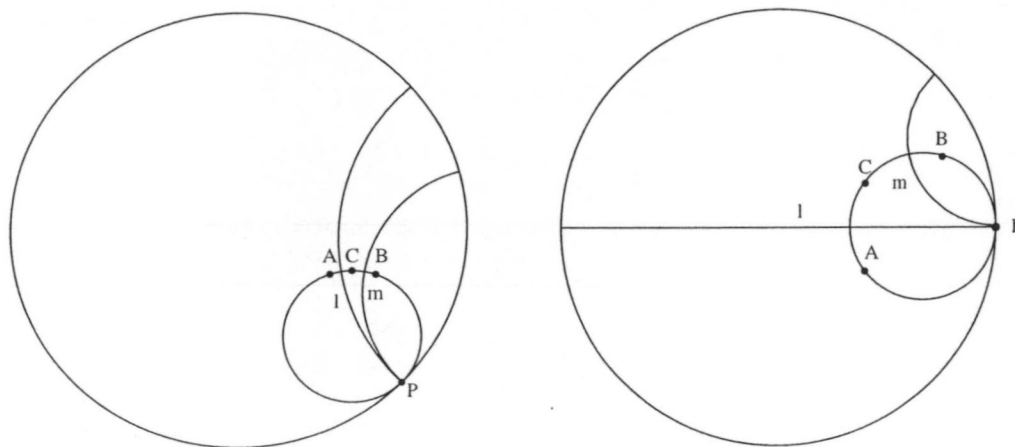


Calculamos el reflejado C de A respecto de l y, posteriormente, reflejamos C respecto de m , obteniéndose B .

- 2.- El centro es el punto impropio P de la recta del infinito.



Reflejamos A respecto de l obteniendo C y después calculamos el reflejado B de C respecto de m .

Determinación en D^2 

Sean $A \in D^2$, $\tilde{A} = f_c^{-1}(A)$ y $\tilde{l} = f_c^{-1}(l)$, $\tilde{m} = f_c^{-1}(m)$ las correspondientes rectas asintóticas en $\tilde{P} = f_c^{-1}(P)$ en H^2 . Si \tilde{B} es el transformado de \tilde{A} mediante la rotación límite en H^2 , $f_c(\tilde{B}) = B$ es el transformado de A en D^2 .

Obsérvese que, tal y como se indica en la Sección 2.8, los puntos A y B están situados en el horociclo de centro P .

2.13 Construcciones relativas a las reflexiones sesgadas

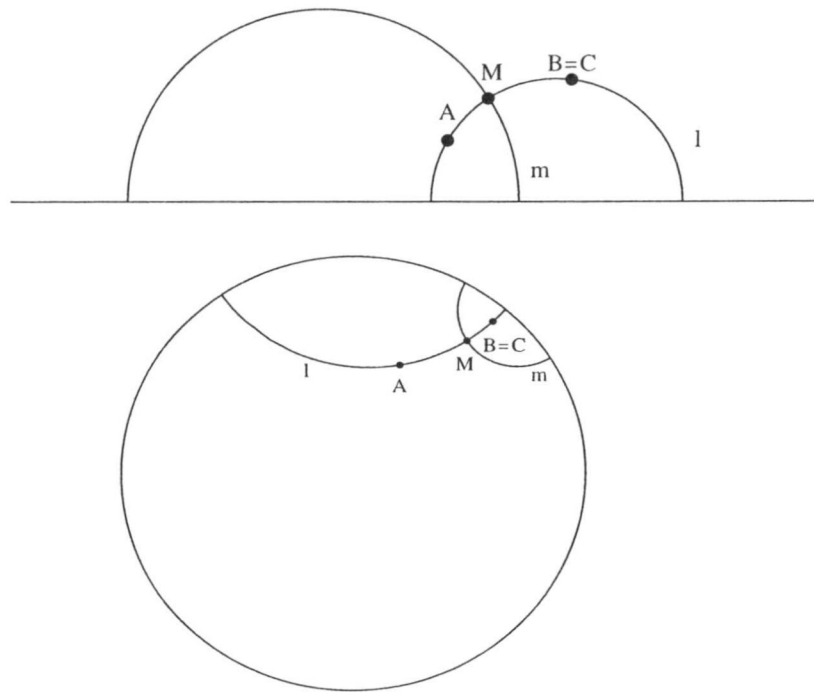
2.13.1 Problema 16

Dados dos puntos A, B y una recta cualquiera que pase por el punto medio del segmento \widehat{AB} , determinar la reflexión sesgada que lleva A en B .

Determinación en H^2 y D^2 . Sea l la recta que pasa por A y B . Se calcula el punto medio M del segmento \widehat{AB} . Trazamos una recta cualquiera m que pasa por M . Entonces se pueden dar distintos casos:

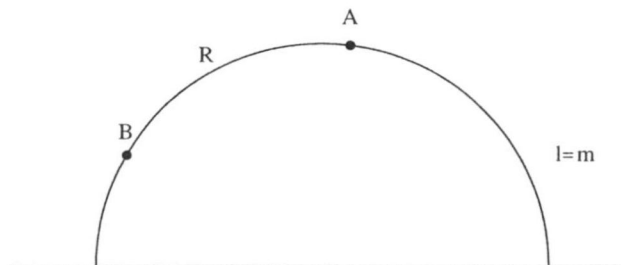
- 1.- Que m sea la mediatriz del segmento \widehat{AB} .

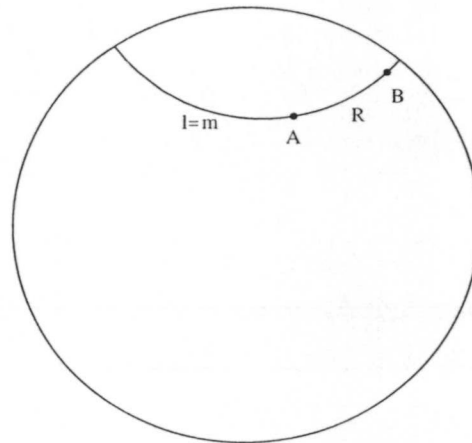
Entonces reflejamos A respecto de m obteniendo $C = B$ y trasladamos C una distancia $R = d(B, C) = 0$.



2.- Que m sea la recta l .

En este caso reflejamos A respecto de m obteniendo el mismo punto A y trasladamos A sobre m una distancia $R = d(A, B)$ según la orientación considerada.

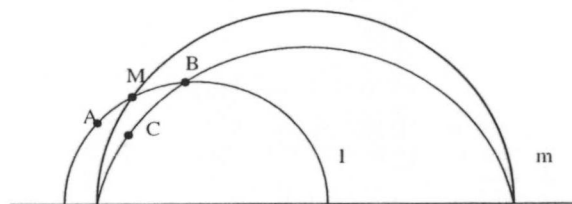
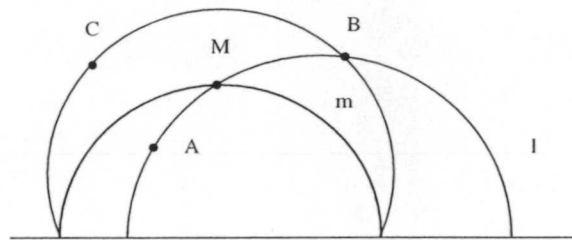


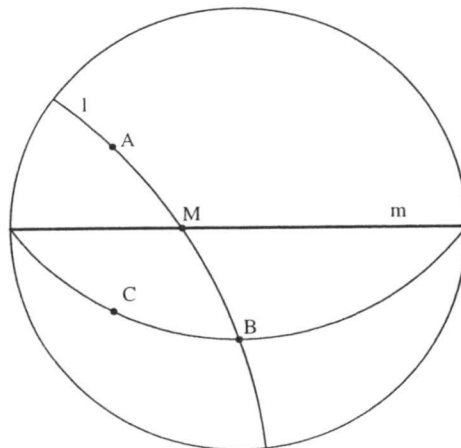
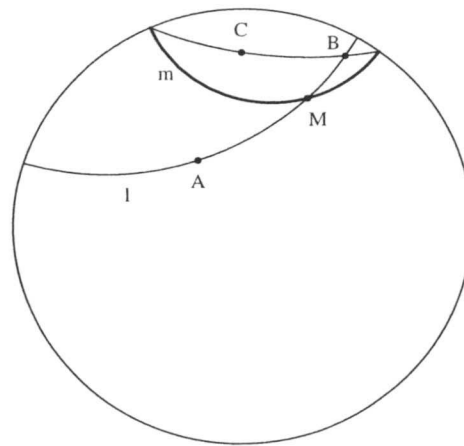
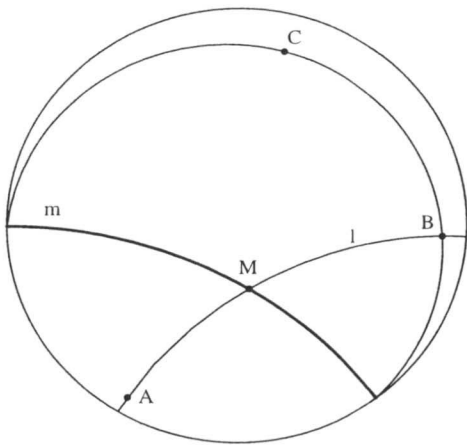
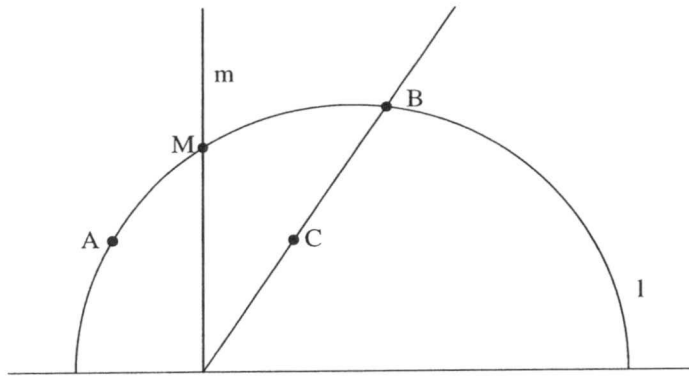


3.- Que m sea una recta cualquiera no contemplada en los dos casos anteriores.

Ahora reflejamos respecto de m el punto A obteniendo C . Por último trasladamos C según la recta m una distancia $x = d(C, B)$ según la orientación considerada, obteniendo la reflexión sesgada.

Hay que hacer notar que al pasar la recta m por el punto medio del segmento \widehat{AB} , las distancias de A a m y de B a m son iguales.

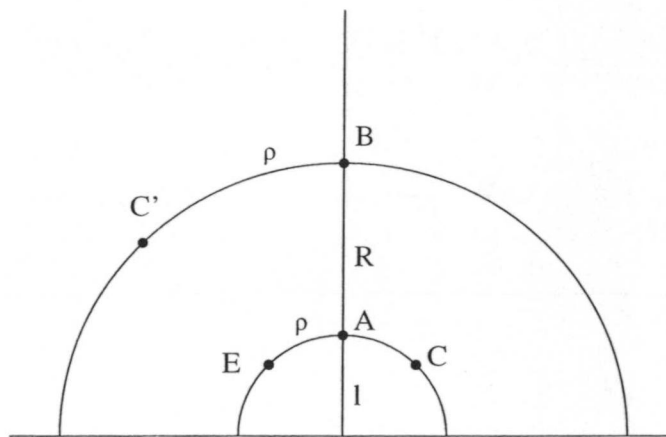
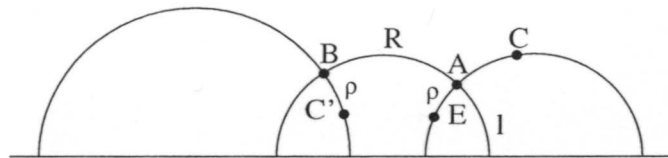


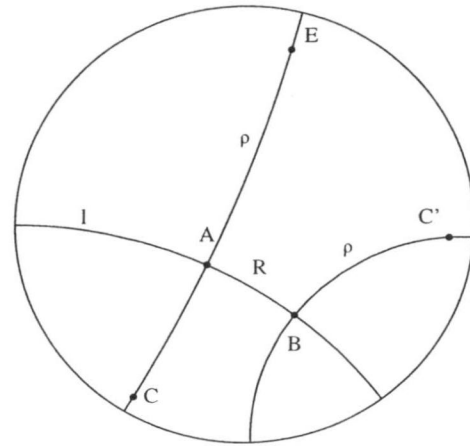
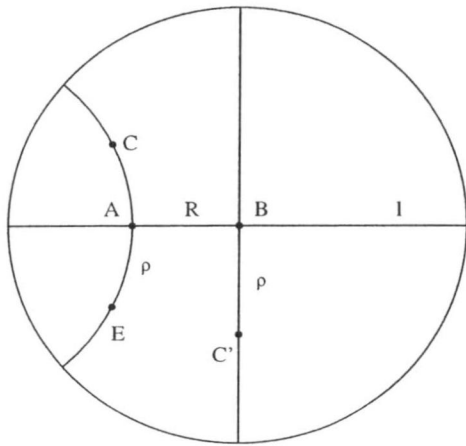


2.13.2 Problema 17

Dado un punto C no incidente con la recta de la reflexión, y una reflexión sesgada, (recta de la reflexión l y traslación según dicha recta con una longitud dada R y con una orientación dada), calcular el transformado C' de C .

Determinación en H^2 y D^2 . Calculamos el reflejado de C con respecto a l obteniendo el punto E y nos trasladamos según la recta l una distancia R (medida sobre l) con la orientación considerada.





Capítulo 3

Los cuadriláteros de Saccheri y Lambert

3.1 Introducción

Desde el tiempo de los griegos hasta principios del siglo XIX, hay dos líneas de aproximación al problema de las paralelas suscitado por el V postulado de Euclides. Una intenta deducir dicho postulado a partir de los otros nueve axiomas de Euclides, si esto fuera cierto se trataría de un teorema y estaría fuera de duda. Otra, reemplazar el V postulado por otro. La cuestión quedó resuelta con los trabajos de Lobatchevsky que marca el nacimiento oficial de las geometrías no euclídeas.

Uno de los más significativos esfuerzos lo hizo el matemático italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), profesor de la Universidad de Pavía. Partía de un cuadrilátero birrectangular, $ABCD$, donde $\angle DAB = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$. Dibujando las diagonales y teniendo en cuenta la congruencia de triángulos se ve fácilmente que $\angle ADC = \angle BCD$. A este cuadrilátero se le denomina *cuadrilátero de Saccheri*. El axioma de Euclides es equivalente a que $\angle ADC$ y $\angle BCD$ sean rectos. Saccheri considera las dos alternativas: la hipótesis del ángulo obtuso y la hipótesis del ángulo agudo. En la hipótesis primera llega enseguida a una contradicción. En la segunda no llega a ninguna contradicción, encontrando algunas conclusiones tan raras como la existencia de una recta perpendicular a un lado de un ángulo agudo, pero que no corta al otro lado. Muchos de sus resultados se han convertido en famosos teoremas de geometría no euclídea. Probó, que asumiendo la hipótesis del

ángulo agudo, dada una recta l y un punto que no esté sobre ella, podrían existir dos rectas de forma que no cortan a l ni tienen una perpendicular común con l , pero que se acercan asintóticamente (una en cada dirección). Este resultado se anticipó en un siglo a la teoría de las rectas paralelas de Lobatchevsky.

Confiando menos en la lógica y más en su intuición sobre la validez del V postulado de Euclides, se le ocurrieron ideas vagas relativas a las rectas asintóticas con una perpendicular común en el infinito para "probar" que la "hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa porque repugna a la naturaleza de la línea recta" y decide publicar su *Euclides ab ovni naevo vindicatus* (Milán 1733). El trabajo de Saccheri fue mucho más lejos que los anteriores en su intento de probar el V postulado, siendo el primero en vislumbrar el "extraño nuevo universo" que sería después abierto por los trabajos de Gauss, Bolyai, Lobatchevsky y otros.

El matemático suizo Johan Lambert (1728-1777) en su *Theory of Parallels*, adoptó una posición parecida a la de Saccheri. Lambert parte de un cuadrilátero trirectangular $ABCD$ donde $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \frac{\pi}{2}$ (no haciendo ninguna suposición concerniente a las longitudes de los lados). A este cuadrilátero se le denomina *cuadrilátero de Lambert*. Para el cuarto ángulo $\angle CDA$, Lambert presenta tres hipótesis, análogas a las que hiciera Saccheri, llegando a conclusiones similares, si bien los resultados a los que llega son más interesantes que los de Saccheri. Asumiendo la hipótesis del ángulo agudo, Lambert hace descubrimientos espectaculares sobre suma de ángulos, áreas, etc. Tanto Lambert como Schweikart y Taurinus, estaban convencidos de que el axioma de las paralelas de Euclides no se podía probar, es decir, es independiente de los restantes axiomas y que es posible adoptar un axioma alternativo que contradiga al de Euclides y construir así una geometría lógicamente consistente. Los tres, reconocen la existencia de una geometría no euclídea, pero se equivocan en un punto fundamental, a saber: que la geometría euclídea no es la única que describe las propiedades del espacio físico, dentro de la precisión que la experiencia humana puede garantizar.

La construcción de los cuadriláteros de Saccheri y Lambert en el plano hiperbólico a partir de unos datos dados, es un problema que necesita la utilización de ciertas isometrías, pero que no aparece en la literatura clásica con algoritmos explícitos para su construcción con regla y compás hiperbólicos, quizá por no tener los medios constructivos adecuados. Este problema ha quedado solventado con la aparición de los medios informáticos actuales.

En este capítulo se describe la construcción de los cuadriláteros de Saccheri y Lambert haciendo uso de isometrías, y se establecen condiciones necesarias y

suficientes para la existencia y unicidad de tales cuadriláteros.

3.2 Cuadriláteros birrectangulares

Comencemos con el estudio de los cuadriláteros que tienen dos de sus ángulos rectos. Estos pueden agruparse en dos clases, aquellos que tienen dos ángulos opuestos rectos y aquellos que tienen dos ángulos contiguos rectos. En ambos casos las proposiciones siguientes nos determinan las relaciones que existen entre las longitudes de sus lados.

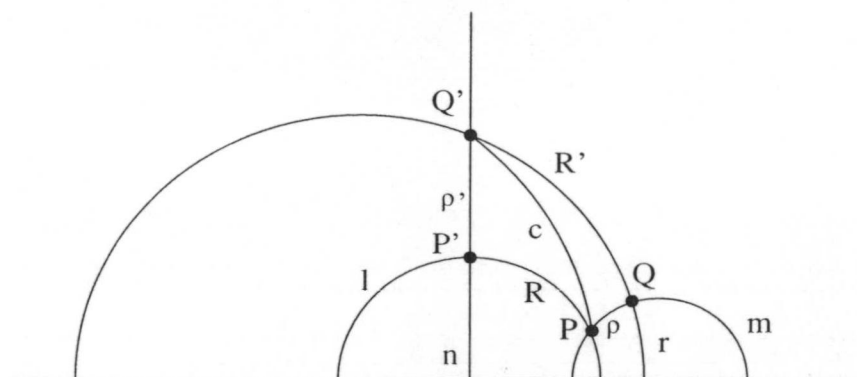
Proposición 3.2.1 (*Ángulos rectos opuestos*). Sean $\mathcal{C}(P, Q, Q', P')$ un cuadrilátero con ángulos opuestos $\angle Q'QP$ y $\angle PP'Q'$ iguales a $\frac{\pi}{2}$ y $R' = d(Q, Q')$, $\rho = d(P, Q)$, $\rho' = d(P', Q')$ y $R = d(P, P')$. Entonces,

$$\cosh(R') \cosh(\rho) = \cosh(R) \cosh(\rho').$$

DEMOSTRACIÓN

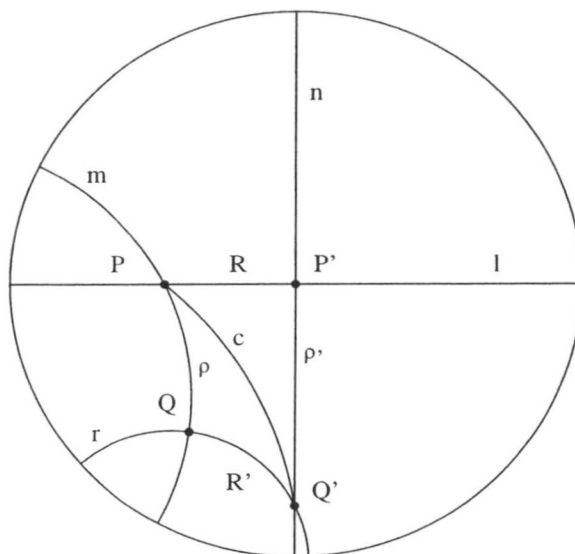
Consideramos el triángulo $\mathcal{T}(P, Q, Q')$ y designamos por c la longitud del segmento $\widehat{PQ'}$. Por el Lema 2.10.4, se tiene que:

$$\cosh(R') = \frac{\cosh(c)}{\cosh(\rho)}. \quad (1)$$



Aplicando de nuevo el Lema 2.10.4 en el triángulo $\mathcal{T}(P, Q', P')$

$$\cosh(c) = \cosh(R) \cosh(\rho'). \quad (2)$$



Teniendo en cuenta (1) y (2) se obtiene que

$$\cosh(R') = \frac{\cosh(R) \cosh(\rho')}{\cosh(\rho)}. \quad (3)$$

□

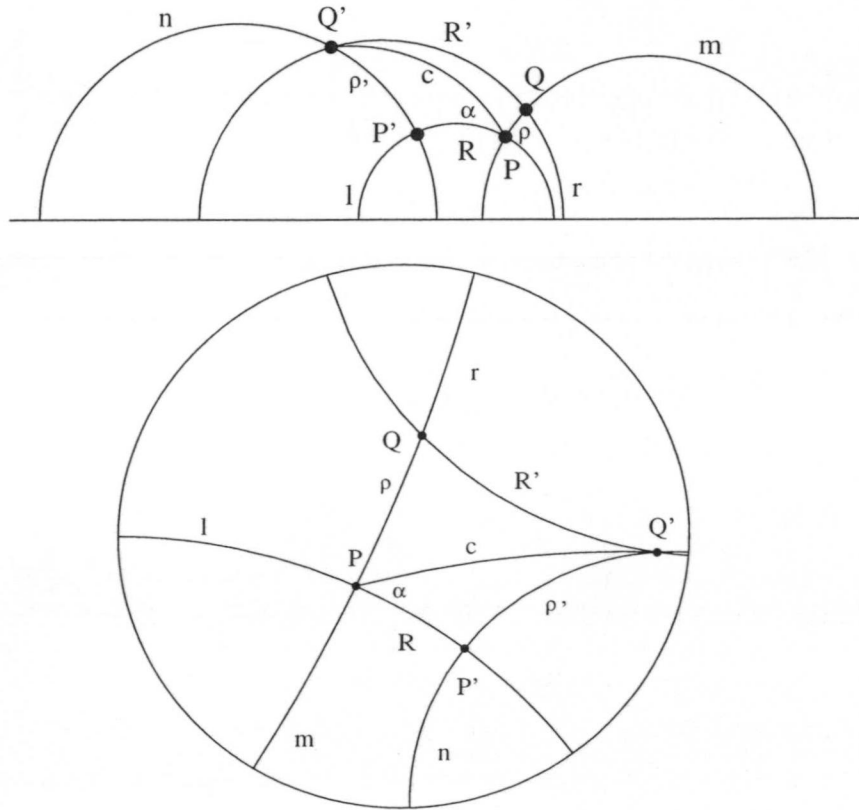
Proposición 3.2.2 (*Ángulos rectos contiguos*). Sea $\mathcal{C}(P, Q, Q', P')$ un cuadrilátero con ángulos contiguos $\angle PP'Q'$ y $\angle QPP'$ iguales a $\frac{\pi}{2}$, $R' = d(Q, Q')$, $\rho = d(P, Q)$, $\rho' = d(P', Q')$ y $R = d(P, P')$. Entonces,

$$\cosh(R') = \cosh(R) \cosh(\rho) \cosh(\rho') - \sinh(\rho) \sinh(\rho').$$

DEMOSTRACIÓN

Sea el triángulo $\mathcal{T}(P, Q', P')$, α el ángulo $\angle Q'PP'$ y c la longitud del segmento $\widehat{PQ'}$. Por el Lema 2.10.3, se tiene que

$$\sen(\alpha) = \frac{\sinh(\rho')}{\sinh(c)}. \quad (4)$$



Por el Lema 2.10.4, se sigue que

$$\cosh(c) = \cosh(R) \cosh(\rho'). \tag{5}$$

Aplicando de nuevo el Lema 2.10.4 en el triángulo $\mathcal{T}(P, Q, Q')$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\cosh(c) \cosh(\rho) - \cosh(R')}{\operatorname{senh}(c) \operatorname{senh}(\rho)}. \tag{6}$$

De (4), (5) y (6) se obtiene que

$$\cosh(R') = \cosh(R) \cosh(\rho) \cosh(\rho') - \operatorname{senh}(\rho) \operatorname{senh}(\rho'). \tag{7}$$

□

Para el caso particular $\rho = \rho'$, se obtiene el cuadrilátero de Saccheri, (Véase la Sección 2.10).

3.2.1 Cuadriláteros de Saccheri

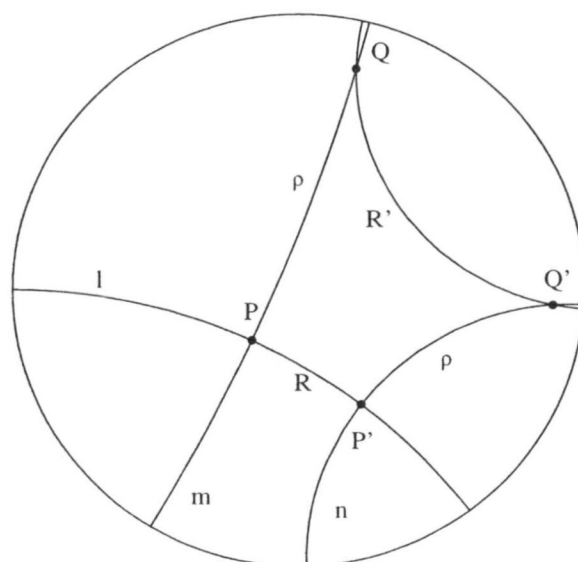
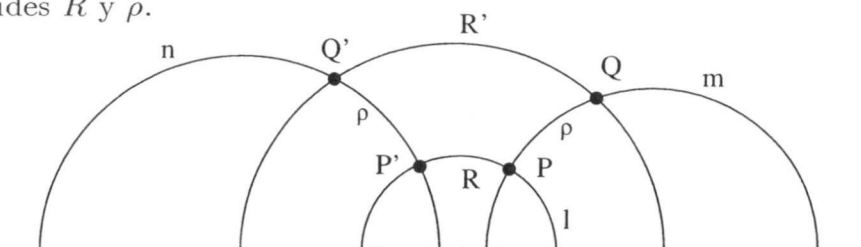
La construcción del cuadrilátero de Saccheri se puede resolver mediante la traslación de un punto según una recta que no lo contiene.

Teorema 3.2.3 *Dados dos números reales positivos R y ρ , existe salvo congruencias, un único cuadrilátero de Saccheri cuya base tiene longitud R , y lados coincidentes con la base de longitud ρ . La longitud del lado opuesto a la base es el número real R' tal que:*

$$\cosh(R') = 1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho).$$

DEMOSTRACIÓN

El cuadrilátero se construye fijando una recta cualquiera l y un punto del plano hiperbólico a una distancia ρ de l . A continuación se construye el trasladado de Q, Q' , según la recta l a R unidades, con cualquier orientación, como se indica en la Sección 2.10. El cuadrilátero $\mathcal{S}(P, P', Q', Q)$ es el de Saccheri determinado por las longitudes R y ρ .



Cualquier otro cuadrilátero de Saccheri con base de longitud R y lados coincidentes con la base de longitud ρ , es congruente con este mediante el movimiento rígido hiperbólico que lleva la base de dicho cuadrilátero sobre el segmento $\widehat{PP'}$ en la orientación adecuada.

La longitud del lado opuesto a la base está determinada en la Proposición 3.2.2 para el caso $\rho = \rho'$.

□

Por la construcción y la unicidad, salvo congruencias, los cuadriláteros de Saccheri tienen los dos ángulos opuestos a la base iguales y agudos ([18]).

Lema 3.2.4 Sea $\mathcal{S}(P, P', Q', Q)$ un cuadrilátero de Saccheri, de base R , lados coincidentes con la base ρ , y ángulos agudos φ . Entonces las razones trigonométricas de φ son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\varphi) &= \frac{\cosh(\rho)\operatorname{senh}(R)}{\operatorname{senh}(R')}, \\ \operatorname{cos}(\varphi) &= \frac{\cosh(\rho)(\cosh(R') - \cosh(R))}{\operatorname{senh}(R')\operatorname{senh}(\rho)}, \end{aligned}$$

siendo

$$R' = \operatorname{argcosh} (1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho)).$$

DEMOSTRACIÓN

Aplicando el Lema 2.10.3 en el triángulo $\mathcal{T}(P, Q, Q')$, el Lema 2.10.4 en $\mathcal{T}(P, Q', P')$, y (5), se tiene que

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\cosh(\rho)\operatorname{senh}(R)}{\operatorname{senh}(R')}.$$

Aplicando el Lema 2.10.4 en el triángulo $\mathcal{T}(P, Q, Q')$ y (5) se tiene que

$$\operatorname{cos}(\varphi) = \frac{\cosh(\rho)(\cosh(R') - \cosh(R))}{\operatorname{senh}(R')\operatorname{senh}(\rho)}.$$

□

Lema 3.2.5 Para todo $R > 0$ y φ con $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ existe un único $\rho > 0$ tal que

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\cosh(\rho)\operatorname{senh}(R)}{\operatorname{senh}(R')},$$

con

$$R' = \operatorname{argcosh} (1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho)).$$

DEMOSTRACIÓN

Se construye la función

$$F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(\rho) = -\operatorname{sen}(\varphi) + \frac{\cosh(\rho)\operatorname{senh}(R)}{\operatorname{senh}(R')}.$$

Derivando y simplificando se tiene

$$F'(\rho) = - \left(\frac{\cosh^2(\rho)(\cosh(R) - 1)}{2 + \cosh^2(\rho)(\cosh(R) - 1)} \right)^{3/2} \frac{\operatorname{senh}(\rho)\operatorname{senh}(R)}{\cosh^2(\rho)(\cosh(R) - 1)} < 0,$$

ya que $x, R, \rho > 0$. Luego F es estrictamente decreciente.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) &= \\ -\operatorname{sen}(\varphi) + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(\rho)\operatorname{senh}(R)}{\operatorname{senh}(\operatorname{argcosh}(1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho)))} &= \\ -\operatorname{sen}(\varphi) + 1 \end{aligned}$$

ya que

$$\cosh(\rho)\operatorname{senh}(R) \text{ tiende a } \operatorname{senh}(R) \text{ cuando } \rho \rightarrow 0^+$$

y $\operatorname{senh}(\operatorname{argcosh}(1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho)))$ tiende también a $\operatorname{senh}(R)$ cuando $\rho \rightarrow 0^+$. Además

$$-\operatorname{sen}(\varphi) + 1 > 0,$$

ya que $-1 < -\operatorname{sen}(\varphi) < 0$. Por tanto

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) > 0.$$

Asimismo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = -\operatorname{sen}(\varphi) + \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(\rho)\operatorname{senh}(R)}{\operatorname{senh}(R')}.$$

Para calcular el límite aplicamos la Regla de L'Hopital y simplificamos, obteniendo

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(R) \sqrt{2 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho)}}{2(1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho)) \sqrt{\cosh(R) - 1}}$$

Aplicando de nuevo la Regla de L'Hopital y simplificando

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(R)}{4\sqrt{(\cosh(R) - 1)(2 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho))}} = 0,$$

ya que el denominador tiende a $+\infty$ cuando $\rho \rightarrow +\infty$. Luego

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(\rho) \sinh(R)}{\sinh(R')} = 0$$

y por tanto

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} F(\rho) = -\text{sen}(\varphi) < 0.$$

La existencia y unicidad de ρ se sigue del Teorema de Bolzano y de la monotonía de F , respectivamente. \square

Observaciones 3.2.6 a) $\varphi = 0$ corresponde a $\rho = +\infty$.

b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ corresponde a $\rho = 0$.

c) Se puede tomar $\rho \in \mathbb{R}$ en cuyo caso existen dos soluciones, una positiva y otra negativa.

Como consecuencia de los dos lemas anteriores se tiene el siguiente:

Teorema 3.2.7 Para cada $R > 0$ y $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, existe un único cuadrilátero de Saccheri, salvo congruencias, con base R y ángulos agudos φ .

DEMOSTRACIÓN

Aplicando el Lema 3.2.5, se obtiene un único $\rho > 0$ que verifica que

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\cosh(\rho)\operatorname{senh}(R)}{\operatorname{senh}(R')}.$$

El cuadrilátero de Saccheri de base R y lado ρ , es el buscado. Por el Lema 3.2.4, los ángulos agudos de este cuadrilátero son iguales a φ . \square

3.3 Cuadriláteros trirrectangulares o de Lambert

El cuadrilátero de Lambert se define como aquél que tiene tres ángulos rectos y necesariamente el cuarto ángulo, ϕ , ha de ser agudo, pues la suma de los ángulos ha de ser menor que 360° . Se obtiene como intersección de las dos clases de cuadriláteros vistas anteriormente en las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.2. Para dicho cuadrilátero obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1 *Sea $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ un cuadrilátero de Lambert cuyos lados son $\rho = d(P, Q)$, $\rho' = d(P', Q')$ y $R = d(P, P')$. Entonces,*

$$\tanh(\rho') = \cosh(R) \tanh(\rho).$$

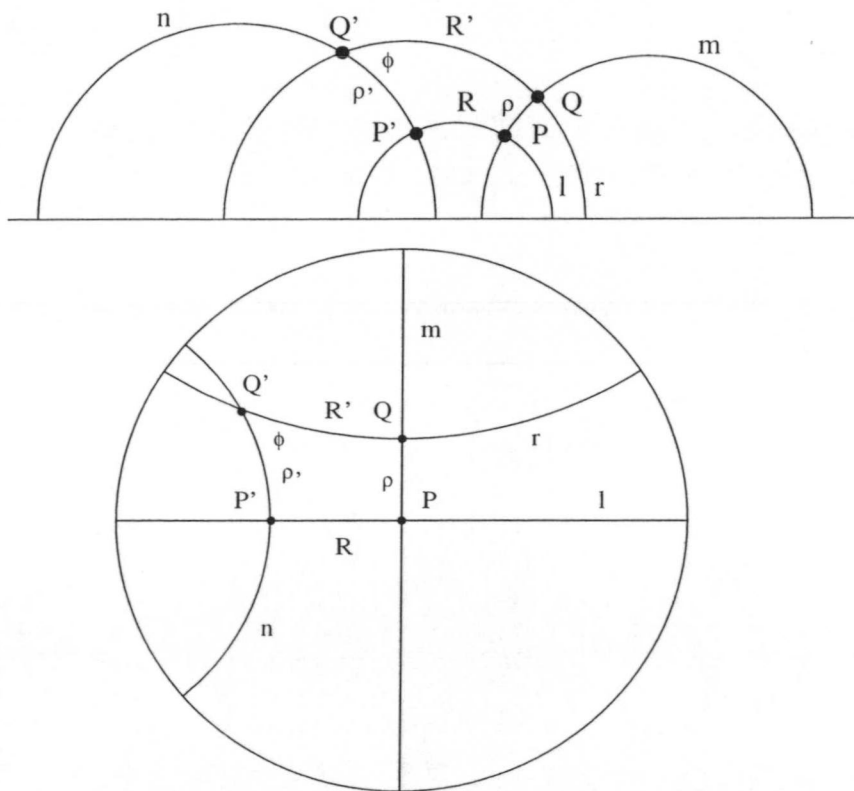
DEMOSTRACIÓN

Sea $R' = d(Q, Q')$, de (3) y (7) se tiene que

$$\cosh(R) \cosh(\rho) \cosh(\rho') - \operatorname{senh}(\rho)\operatorname{senh}(\rho') = \frac{\cosh(R) \cosh(\rho')}{\cosh(\rho)}.$$

Multiplicando por $\cosh(\rho)$ en ambos miembros

$$\cosh(R) \cosh^2(\rho) \cosh(\rho') - \cosh(\rho)\operatorname{senh}(\rho)\operatorname{senh}(\rho') = \cosh(R) \cosh(\rho'),$$



y agrupando, se tiene que

$$\cosh(R) \cosh(\rho')(\cosh^2(\rho) - 1) = \cosh(\rho) \sinh(\rho) \sinh(\rho').$$

Sustituyendo $\cosh^2(\rho) - 1$ por $\sinh^2(\rho)$ y simplificando, se obtiene

$$\cosh(R) \cosh(\rho') \sinh(\rho) = \cosh(\rho) \sinh(\rho'),$$

de donde se concluye que

$$\tanh(\rho') = \cosh(R) \tanh(\rho). \tag{8}$$

□

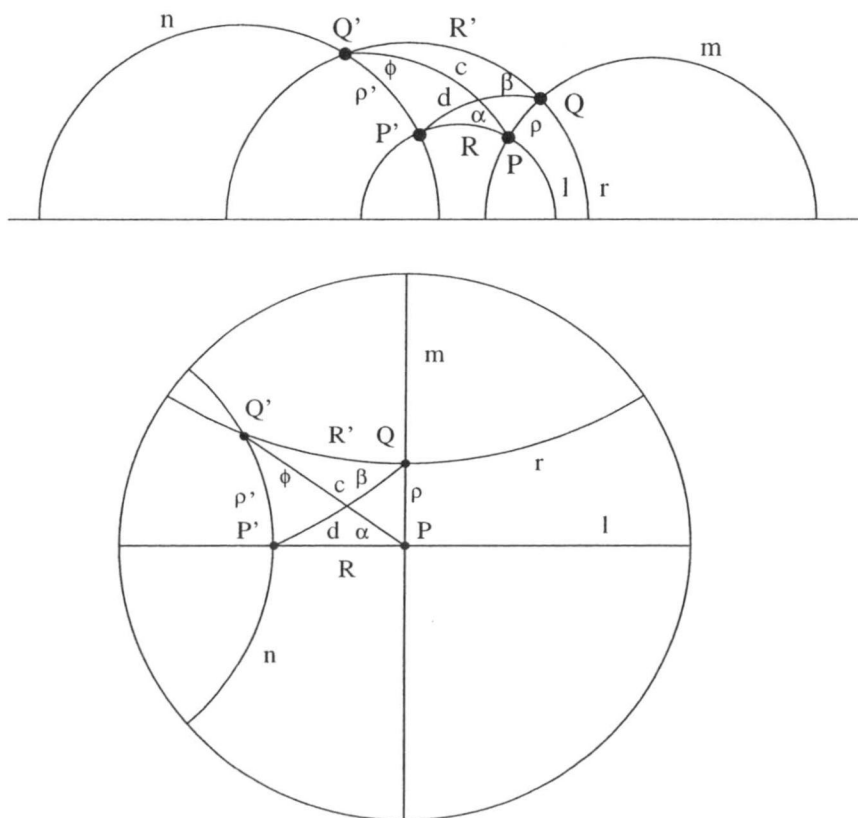
Proposición 3.3.2 Sea $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ un cuadrilátero de Lambert, con lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, $\rho = d(P, Q)$ y $R = d(P, P')$. Entonces las razones trigonométricas del ángulo agudo $\phi = \angle P'Q'Q$ son:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\phi) = \cosh(\rho) \sqrt{1 - (\cosh(R) \tanh(\rho))^2} \\ \operatorname{cos}(\phi) = \sinh(\rho) \sinh(R) \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN

Consideramos el triángulo $\mathcal{T}(P', Q, Q')$ y designamos por c la longitud del segmento $\widehat{PQ'}$, d la longitud del segmento $\widehat{P'Q}$, α el ángulo $\angle Q'PP'$, β el ángulo $\angle Q'QP'$, $R' = d(Q, Q')$ y $\rho' = d(P', Q')$. Aplicando el Lema 2.10.3, se tiene

$$\text{sen}(\phi) = \frac{\text{senh}(d)\text{sen}(\beta)}{\text{senh}(\rho')} \tag{9}$$



Aplicando el Lema 2.10.4 en el triángulo $\mathcal{T}(P, Q, P')$, se tiene

$$\text{cosh}(d) = \text{cosh}(R) \text{cosh}(\rho), \tag{10}$$

y

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \text{sen}(\beta) = \frac{\text{cosh}(d) \text{cosh}(\rho) - \text{cosh}(R)}{\text{senh}(d)\text{senh}(\rho)}. \tag{11}$$

De (10), (11) y simplificando se tiene que

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\cosh(R)\operatorname{senh}(\rho)}{\operatorname{senh}(d)},$$

sustituyendo en (9) y aplicando la Proposición 3.3.1

$$\operatorname{sen}(\phi) = \frac{\cosh(R)\operatorname{senh}(\rho)}{\operatorname{senh}(\rho')} = \frac{\cosh(\rho)}{\cosh(\rho')}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\cosh^2(\rho')} = 1 - \tanh^2(\rho')$, y (8)

$$\operatorname{sen}(\phi) = \cosh(\rho)\sqrt{1 - (\cosh(R)\tanh(\rho))^2}.$$

Por otro lado, aplicando el Lema 2.10.3 en el triángulo $\mathcal{T}(P, Q, Q')$

$$\operatorname{senh}(R') = \operatorname{senh}(c)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{senh}(c)\cos(\alpha). \quad (12)$$

Del Lema 2.10.4 en el triángulo $\mathcal{T}(P', P, Q')$ se tiene que

$$\cos(\alpha) = \frac{\cosh(R)\cosh(c) - \cosh(\rho')}{\operatorname{senh}(R)\operatorname{senh}(c)}. \quad (13)$$

De (12), (13), (5) y simplificando

$$\operatorname{senh}(R') = \operatorname{senh}(R)\cosh(\rho'). \quad (14)$$

Considerando el triángulo $\mathcal{T}(P', Q, Q')$ y aplicando nuevamente el Lema 2.10.4

$$\cos(\phi) = \frac{\cosh(R')\cosh(\rho') - \cosh(d)}{\operatorname{senh}(R')\operatorname{senh}(\rho')}. \quad (15)$$

Aplicando (3), (8), (10) y (14) en (15) y simplificando se obtiene

$$\cos(\phi) = \frac{1}{\operatorname{senh}(R)\operatorname{senh}(\rho)} \left(1 - \frac{\cosh^2(\rho)}{\cosh^2(\rho')}\right).$$

Como $\frac{1}{\cosh^2(\rho')} = 1 - (\cosh(R) \tanh(\rho))^2$ y $\cosh^2(R) - 1 = \sinh^2(R)$, operando y simplificando se concluye que

$$\cos(\phi) = \sinh(\rho)\sinh(R).$$

□

Observación 3.3.3 En la proposición anterior se ha visto cómo el ángulo ϕ queda totalmente determinado a partir de los dos lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, ρ y R . Del mismo modo, los dos lados antes mencionados, ρ y R , determinan por la proposiciones anteriores todos los elementos de $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ ($R' = d(Q, Q')$, $\rho' = d(P', Q')$, $c = d(P, Q')$, $d = d(P', Q)$ y ángulo agudo ϕ).

Corolario 3.3.4 Sea $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ un cuadrilátero de Lambert con la descripción anterior. Entonces se verifica que $\rho' > \rho$, $R' > R$ y $c > d$.

DEMOSTRACIÓN

Teniendo en cuenta que $\cosh(R) > 1$ y (8), se llega a que $\tanh(\rho') > \tanh(\rho)$ y por lo tanto $\rho' > \rho$. Ya que $\rho' > \rho$, se tiene que $\cosh(\rho') > \cosh(\rho)$, luego $\frac{\cosh(\rho')}{\cosh(\rho)} > 1$. Por (3) se concluye que $\cosh(R') > \cosh(R)$, y por tanto $R' > R$. Análogamente, como $\cosh(\rho') > \cosh(\rho)$ y teniendo en cuenta (2) y (10) se llega a que $\cosh(c) > \cosh(d)$, y por tanto $c > d$. □

3.3.1 Existencia del cuadrilátero de Lambert

Hemos visto como en un cuadrilátero de Lambert podemos determinar todos sus elementos a partir de las longitudes de los dos lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, o bien a partir de la longitud de uno de estos lados y el ángulo agudo. Pero, ¿es posible construir un cuadrilátero de Lambert a partir de cantidades R y ρ dadas? ¿Es posible construir un cuadrilátero de Lambert a partir de un segmento de longitud R , con ángulo agudo ϕ dado? A continuación damos la respuesta a estas cuestiones.

Lema 3.3.5 *Dados $R > 0$, $\rho > 0$, verificándose que $\tanh(\rho) \cosh(R) < 1$, entonces existe un único $\rho' > 0$ tal que $\tanh(\rho') = \tanh(\rho) \cosh(R)$.*

DEMOSTRACIÓN

Se sigue de que la función tangente hiperbólica es estrictamente creciente y toma todos los valores del intervalo abierto $(0, 1)$ cuando el arco hiperbólico es estrictamente positivo. \square

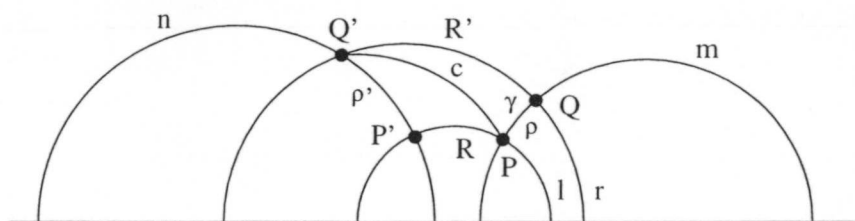
Teorema 3.3.6 *Sean $R > 0$, $\rho > 0$, la condición necesaria y suficiente para que exista un único cuadrilátero de Lambert, salvo congruencias, $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ con los dos lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, $R = d(P, P')$ y $\rho = d(P, Q)$, es que $\tanh(\rho) \cosh(R) < 1$.*

DEMOSTRACIÓN

La condición necesaria se sigue de la Proposición 3.3.1

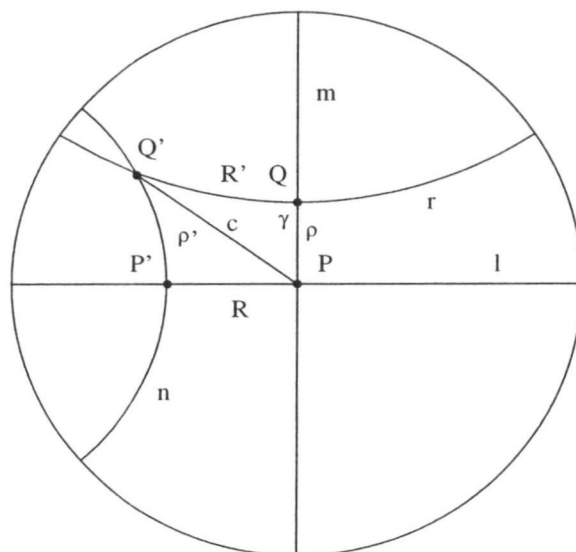
Veamos la condición suficiente.

Por el Lema 3.3.5, existe un único $\rho' > 0$ tal que $\tanh(\rho') = \tanh(\rho) \cosh(R)$.



El cuadrilátero se construye fijando una recta cualquiera l , y tomamos dos puntos cualesquiera, P, P' sobre dicha recta a una distancia R . A continuación se trazan por P y P' , las perpendiculares a l , m y n , respectivamente. Se construyen: el trasladado Q de P sobre la recta m a ρ unidades, con cualquier orientación, y el trasladado Q' , de P' sobre la recta n a ρ' unidades, con una cierta orientación, de tal forma que Q y Q' estén en el mismo semiplano determinado por l . Llamando R' a la distancia entre Q y Q' , se tiene por la Proposición 3.2.2 que

$$\cosh(R') = \cosh(R) \cosh(\rho) \cosh(\rho') - \sinh(\rho) \sinh(\rho'). \quad (16)$$



Para que este cuadrilátero sea de Lambert, hemos de demostrar que el ángulo $\gamma = \angle Q'QP$ es recto. Designando por c la longitud del segmento $\widehat{PQ'}$ y aplicando el Lema 2.10.4 en el triángulo $\mathcal{T}(P, Q', P')$

$$\cosh(c) = \cosh(R) \cosh(\rho') \quad (17)$$

y al triángulo $\mathcal{T}(P, Q, Q')$, se tiene que

$$\cos(\gamma) = \frac{\cosh(R') \cosh(\rho) - \cosh(c)}{\sinh(R') \sinh(\rho)}$$

por lo que tendremos que comprobar que

$$\cosh(R') \cosh(\rho) - \cosh(c) = 0.$$

En efecto, teniendo en cuenta (16) y (17), se obtiene que

$$\cosh(R') \cosh(\rho) - \cosh(c) = \sinh(\rho)(\cosh(R) \cosh(\rho') \sinh(\rho) - \cosh(\rho) \sinh(\rho')).$$

Como $\sinh(\rho) \neq 0$ y $\tanh(\rho') = \cosh(R) \tanh(\rho)$ se tiene que

$$\cosh(R) \cosh(\rho') \sinh(\rho) - \cosh(\rho) \sinh(\rho') = 0.$$

Por tanto $\gamma = \frac{\pi}{2}$. El cuadrilátero de Lambert $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ es único, salvo congruencias, por la determinación de todos sus elementos a partir de R y ρ . \square

Lema 3.3.7 Dados $R > 0$ y ϕ con $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, existe un único $\rho > 0$ tal que

$$\operatorname{sen}(\phi) = \cosh(\rho)\sqrt{1 - (\cosh(R)\tanh(\rho))^2}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\rho_R > 0$ tal que $\tanh(\rho_R) = \frac{1}{\cosh(R)}$. Se construye la función

$$F : (0, \rho_R) \longrightarrow \mathbb{R}, F(\rho) = -\operatorname{sen}(\phi) + \cosh(\rho)\sqrt{1 - (\cosh(R)\tanh(\rho))^2}$$

Derivando y simplificando se tiene

$$F'(\rho) = -\frac{\operatorname{senh}(\rho)\operatorname{senh}^2(R)}{\sqrt{1 - (\cosh(R)\tanh(\rho))^2}} < 0$$

ya que $\rho > 0$ y $R > 0$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) &= -\operatorname{sen}(\phi) + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(\cosh(\rho)\sqrt{1 - (\cosh(R)\tanh(\rho))^2} \right) = \\ &= -\operatorname{sen}(\phi) + 1 > 0, \end{aligned}$$

ya que $-1 < -\operatorname{sen}(\phi) < 0$. Y también

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_R} F(\rho) = -\operatorname{sen}(\phi) < 0,$$

ya que

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_R} \left(\cosh(\rho)\sqrt{1 - (\cosh(R)\tanh(\rho))^2} \right) = 0.$$

La existencia y unicidad del $\rho \in (0, \rho_R)$ buscado, se sigue del Teorema de Bolzano y de la monotonía de F , respectivamente. \square

Teorema 3.3.8 Dados $R > 0$ y ϕ con $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, existe un único cuadrilátero de Lambert, $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$, salvo congruencias, con lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, $R = d(P, P')$ y $\rho = d(P, Q)$.

DEMOSTRACIÓN

Por el Lema 3.3.7 se obtiene un único $\rho > 0$ que verifica que

$$\text{sen}(\phi) = \cosh(\rho)\sqrt{1 - (\cosh(R)\tanh(\rho))^2}$$

R y ρ verifican que $\cosh(R)\tanh(\rho) < 1$, luego por el Teorema 3.3.6 existe un único cuadrilátero de Lambert $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ con lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, $R = d(P, P')$ y $\rho = d(P, Q)$. Por el Lema 3.3.5, el ángulo agudo de este cuadrilátero es igual a ϕ . \square

Analicemos los dos teoremas anteriores. Fijada la longitud R de uno de los lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, para que exista el cuadrilátero de Lambert $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$, de lado R , hemos de tomar el otro lado de longitud ρ con la condición $0 < \cosh(R)\tanh(\rho) < 1$, lo que nos dice que ρ ha de variar entre 0 y $\rho_R > 0$, tal que $\tanh(\rho_R) = \frac{1}{\cosh(R)}$.

Según va variando ρ también varía el ángulo agudo ϕ , de manera que al aumentar ρ disminuye ϕ y al disminuir ρ aumenta ϕ .

En los casos extremos, para $\rho = 0$, no existe cuadrilátero de Lambert pues las rectas l y r son coincidentes. Para el caso $\rho = \rho_R$, que se corresponde con $\phi = 0$, las rectas n y r son paralelas lo que se corresponde con $\rho' = R' = +\infty$.

Tomando ρ con $\tanh(\rho)\cosh(R) > 1$, en el Teorema 3.3.6, las rectas n y r son ultraparalelas, y por tanto no existe cuadrilátero de Lambert.

Para $\phi = \frac{\pi}{2}$ por la Proposición 3.3.2, $\rho = \rho'$, observando la relación (8) deducimos que si $\rho, \rho' \neq 0$ entonces $R = 0$ o equivalentemente si $R \neq 0$ entonces $\rho = \rho' = 0$ y no existe cuadrilátero.

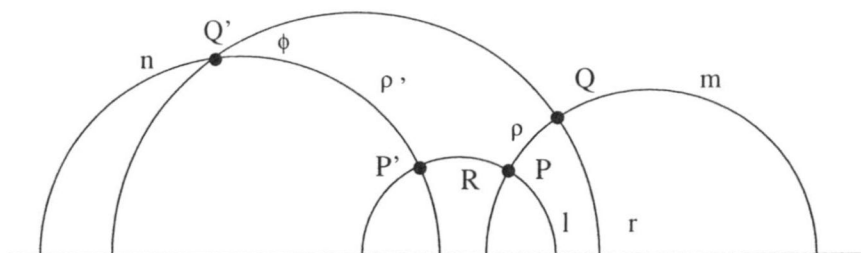


Figura 3.1: $0 < \tanh(\rho)\cosh(R) < 1$ en H^2

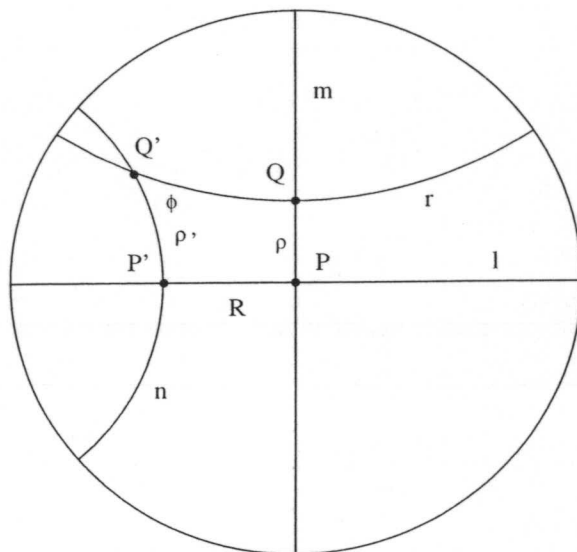


Figura 3.2: $0 < \tanh(\rho) \cosh(R) < 1$ en D^2

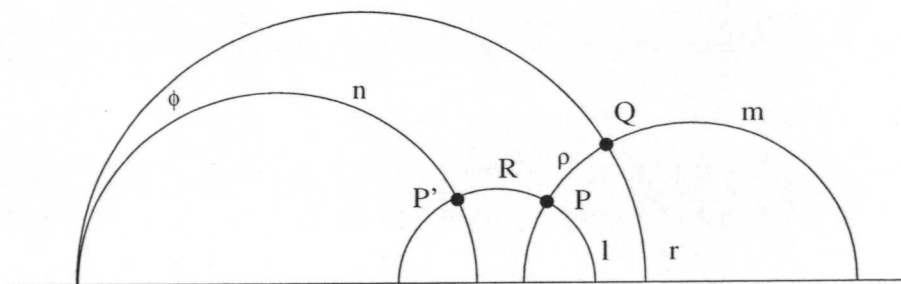


Figura 3.3: $\tanh(\rho) \cosh(R) = 1$ en H^2

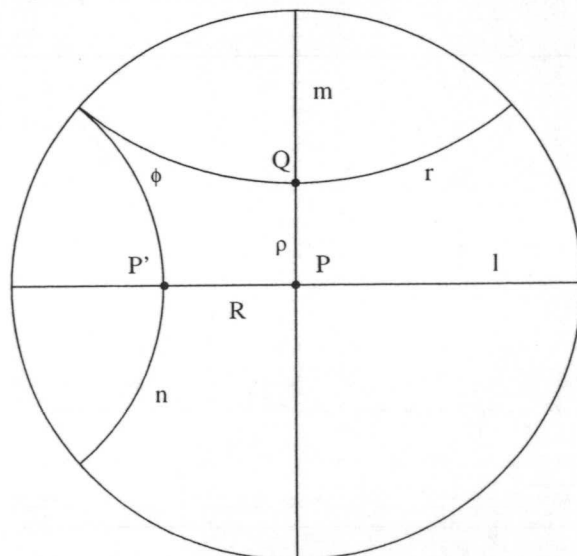


Figura 3.4: $\tanh(\rho) \cosh(R) = 1$ en D^2

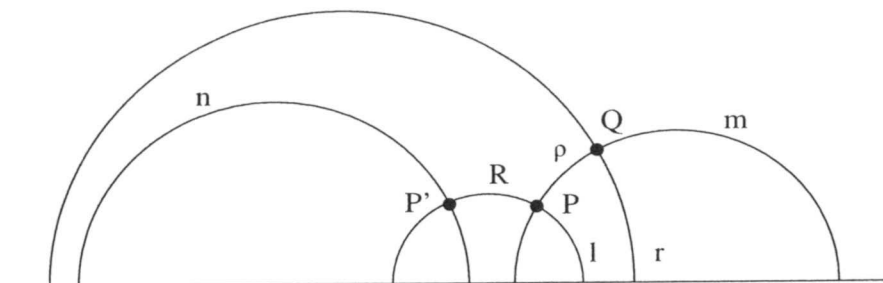


Figura 3.5: $\tanh(\rho) \cosh(R) > 1$ en H^2

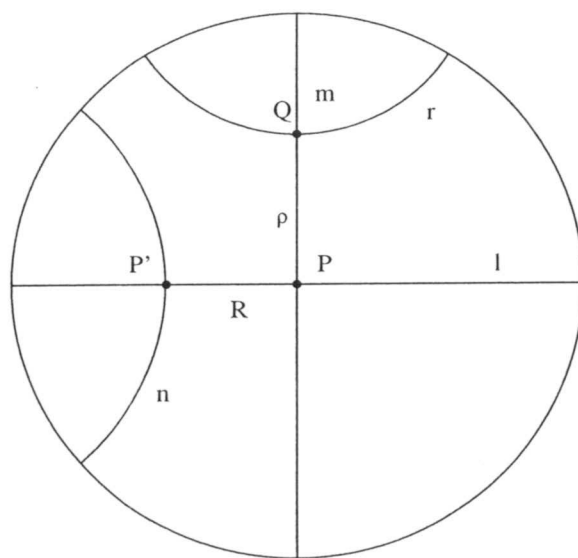
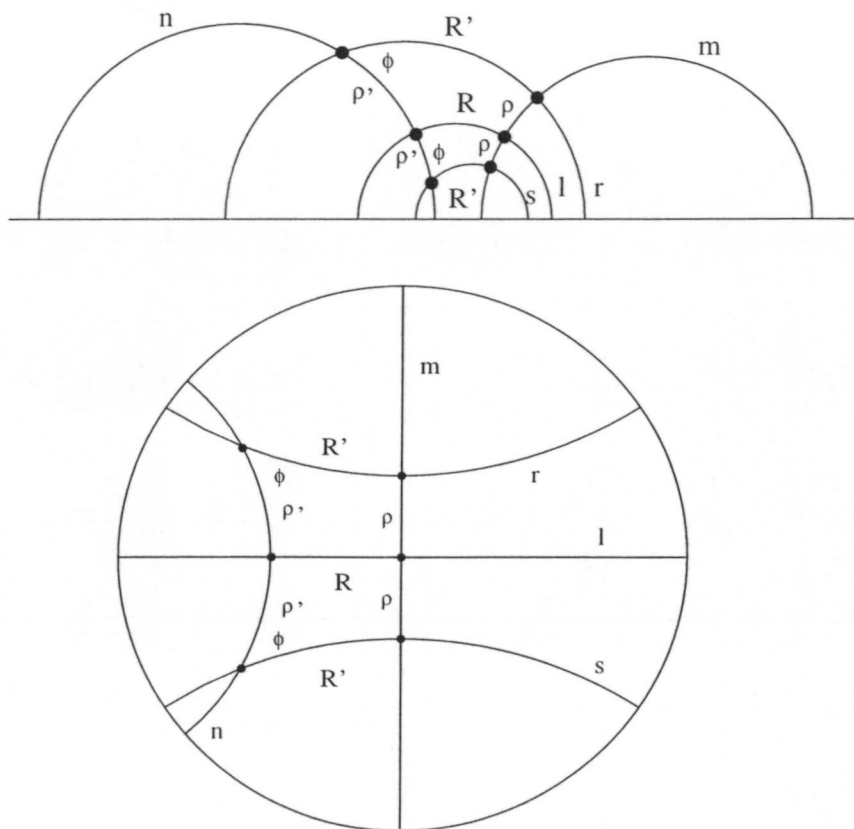


Figura 3.6: $\tanh(\rho) \cosh(R) > 1$ en D^2

3.4 Cuadriláteros de Lambert y Saccheri

En la construcción del Teorema 3.3.6, puede tomarse la longitud ρ en dos direcciones sobre la recta m perpendicular a l , que contiene al lado de longitud R , dando lugar a dos cuadriláteros de Lambert simétricos respecto a l . Como en el otro extremo del lado de longitud R , los ángulos también son rectos, los lados de longitud ρ' , en ambas construcciones, están sobre la misma recta n . En consecuencia, la unión de estos dos cuadriláteros de Lambert es un cuadrilátero de Saccheri, es decir, tiene dos ángulos rectos contiguos y dos agudos iguales([18]).



Recíprocamente, si en un cuadrilátero de Saccheri trazamos la única perpendicular común a la base y al lado opuesto, obtenemos dos cuadriláteros de Lambert congruentes mediante la reflexión respecto de la perpendicular común.



Capítulo 4

Teselaciones del plano hiperbólico

4.1 Introducción

Un grupo que actúa propia y discontinuamente en un espacio, en general, define un dominio que le caracteriza del mismo modo que lo hace el cociente del espacio bajo la acción del grupo, el cual recibe el nombre de caleidoscopio. El centro de nuestro interés es el caso concreto del plano hiperbólico bajo la acción de los grupos NEC (*non euclidean crystallographic groups*) que son subgrupos del grupo de isometrías no euclídeas que actúan propia y discontinuamente sobre el plano hiperbólico ([60]). Comenzaremos estudiando los grupos poligonales, que son un caso particular de los NEC, para teselar el plano hiperbólico usando teselas con forma poligonal y reflexiones en los lados de dichos polígonos como generadores del grupo, y continuaremos con el estudio de los grupos bicolor, viendo algunos ejemplos de teselaciones con dichos grupos.

Sea X el plano hiperbólico con la topología inducida por la métrica hiperbólica. Los modelos que utilizaremos serán H^2 y D^2 .

Sea Γ un subgrupo de $Iso(X)$.

Definición 4.1.1 La acción de Γ sobre X es la aplicación natural

$$\Phi : \Gamma \times X \longrightarrow X$$

dada por

$$\Phi(\gamma, z) = \gamma(z).$$

Proposición 4.1.2 *La acción de Γ sobre X verifica:*

$$1.- \Phi(\vartheta, \Phi(\gamma, z)) = \Phi(\vartheta \circ \gamma, z).$$

$$2.- \Phi(1_X, z) = z.$$

Definición 4.1.3 Para cada $z \in X$ se llama órbita de z por la acción de Γ sobre X al conjunto

$$\Theta = \{\gamma(z) : \gamma \in \Gamma\}.$$

Definición 4.1.4 Para cada $z \in X$, se llama isotropía de z en Γ al subgrupo de Γ

$$\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(z) = z\}.$$

La acción de un subgrupo Γ sobre X da lugar a la siguiente relación:

$$\forall z, w \in X, z \sim w \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : w = \gamma(z),$$

Proposición 4.1.5 *La anterior relación \sim es una relación de equivalencia en X , cuyas clases de equivalencia son las órbitas de los elementos de X por la acción de Γ .*

Definición 4.1.6 El conjunto cociente X/\sim se denota $\Gamma \backslash X$ y se denomina espacio de las órbitas.

Definición 4.1.7 Un grupo Γ se dice que actúa de forma propiamente discontinua sobre X , si dado cualquier compacto C de X , el conjunto $\Gamma_C = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(C) \cap C \neq \emptyset\}$ es finito.

Proposición 4.1.8 *Si Γ actúa de forma propiamente discontinua sobre X , entonces, para todo z perteneciente a X , Γ_z es finito.*

DEMOSTRACIÓN

Basta observar que el conjunto $\{z\}$ es compacto y que $\Gamma_{\{z\}} = \Gamma_z$. □

La acción propiamente discontinua de un grupo de isometrías de X queda caracterizada por el siguiente teorema.

Teorema 4.1.9 ([38]) *Un subgrupo Γ de $Iso(X)$ es un subgrupo discreto de $Iso(X)$ con la topología compacta abierta si y sólo si Γ actúa de forma propiamente discontinua sobre X .*

Observación 4.1.10 A partir de este teorema es usual que se diga que un grupo que actúa de forma propiamente discontinua sobre X , también actúa discretamente sobre X .

4.2 Grupos NEC

Definición 4.2.1 Sea Γ un subgrupo de $Iso(X)$, se dice que Γ es un *grupo NEC*, (grupo cristalográfico no euclídeo), si es discreto y el espacio de las órbitas es compacto.

Proposición 4.2.2 *Si Γ es un grupo NEC entonces, sus giros tienen ángulos múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, y no contiene rotaciones límite.*

DEMOSTRACIÓN

Si los ángulos no fuesen múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, las órbitas de X no serían discretas y por tanto X no sería discreto. Por otra parte, si en un subgrupo Γ hay rotaciones límite, entonces el espacio de las órbitas $\Gamma \backslash X$ no sería compacto. \square

Analicemos la descomposición de los subgrupos Γ de $Iso(X)$ en términos de la partición, $Iso(X) = Iso^+(X) \dot{\cup} Iso^-(X)$. Llamaremos $\Gamma^+ = \Gamma \cap Iso^+(X)$ y $\Gamma^- = \Gamma \cap Iso^-(X)$, resultando que Γ^+ es un subgrupo normal de Γ , de índice 1 ó 2, según que Γ^- sea vacío o no. Resulta, por tanto, que $\Gamma = \Gamma^+ \dot{\cup} \Gamma^-$.

Definición 4.2.3 Un grupo NEC Γ se dice *fuchsiano* si es un subgrupo de $Iso^+(X)$; es decir, $\Gamma = \Gamma^+$ o bien $\Gamma^- = \emptyset$.

Definición 4.2.4 Un grupo NEC Γ que tiene elementos de $Iso^-(X)$ se le llama *grupo NEC propio*.

Definición 4.2.5 Sea Γ un grupo NEC propio, al grupo fuchsiano Γ^+ , subgrupo de índice 2 de Γ , se le denomina *subgrupo fuchsiano canónico de Γ* .

Los grupos NEC son clasificados de acuerdo con su signatura ([60]) que tiene la forma:

$$(g; \pm; [m_1, \dots, m_r], \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}) \quad (a)$$

donde los números m_i (periodos), n_{ij} (ciclos-periodos) son enteros mayores o iguales que 2, y g, r, k son enteros no negativos. Si el signo de la signatura es " + " y $k = 0$ obtenemos los grupos fuchsianos. Esta signatura determina una presentación canónica del grupo Γ dada por los generadores:

$$\begin{array}{ll} (i) & x_i \quad i = 1, \dots, r \\ (ii) & e_i \quad i = 1, \dots, k \\ (iii) & c_{ij} \quad i = 1, \dots, k \quad j = 0, \dots, s_i \\ (iv) & a_i, b_i \quad i = 1, \dots, g \quad (\text{si el signo es } +) \\ (v) & d_i \quad i = 1, \dots, g \quad (\text{si el signo es } -). \end{array}$$

y las relaciones:

$$\begin{array}{ll} x_i^{m_i} = 1 & \\ e_i^{-1} c_{i0} e_i c_{is_i} = 1 & \\ (c_{i,j-1})^2 = (c_{i,j})^2 = (c_{i,j-1} c_{i,j})^{n_{ij}} = 1 & \\ x_1 \dots x_r e_1 \dots e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 & (\text{si el signo es } +) \\ x_1 \dots x_r e_1 \dots e_k d_1^2 \dots d_g^2 = 1 & (\text{si el signo es } -) \end{array}$$

Las isometrías x_i son elípticas, las e_i son generalmente hiperbólicas, las a_i, b_i son hiperbólicas, las c_{ij} son reflexiones y las d_i son reflexiones sesgadas.

Para la signatura con signo + (respectivamente, de signo -), $\Gamma \backslash X$ es una superficie orientable (respectivamente no orientable) de género g y a la que se le han quitado k discos ([55]).

4.3 Región Fundamental

Para realizar teselaciones es importante considerar regiones fundamentales para un grupo NEC. Estas regiones son las teselas más pequeñas que permiten teselar utilizando la acción de un grupo NEC sobre ellas. Para ello establecemos la siguiente definición.

Definición 4.3.1 Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C. Se dice que F es una región fundamental para Γ si se verifica

- i) para todo $z \in X$ existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(z) \in F$
- ii) si $z \in F$ tal que $\gamma(z) \in F$, con $\gamma \neq 1$, entonces $z, \gamma(z) \in fr(F)$
- iii) $F = adh(int(F))$.

Wilkie ([60]) establece otra definición de región fundamental que aparece en ([17],[40]).

Definición 4.3.2 Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C. Se dice que F es una región fundamental de Wilkie para Γ si se verifica:

- $i^*) \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = X$
- $ii^*) \gamma(int(F)) \cap int(F) = \emptyset, \gamma \neq 1$
- $iii^*) \text{área}(fr(F)) = 0$.

Veamos cual es la relación entre ambas definiciones.

Proposición 4.3.3 Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C., entonces,

$$\forall z \in X, \exists \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma(z) \in F \iff \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = X.$$

DEMOSTRACIÓN

La condición necesaria se comprueba fácilmente, pues

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) \subset X.$$

Por otro lado si $z \in X$, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(z) \in F$, por lo que $z \in \gamma^{-1}(F)$, con lo cual

$$X \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F).$$

Para demostrar la condición suficiente, tomamos $z \in X$ cualquiera, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $z \in \gamma(F)$.

Luego $z = \gamma(z')$ con $z' \in F$. Ya que $z' = \gamma^{-1}(z)$, se tiene que existe $\gamma^{-1} \in \Gamma$ tal que $\gamma^{-1}(z) \in F$.

□

Veamos la relación entre *ii*) y *ii**)

Evidentemente *ii*) es equivalente a afirmar que para todo $z \in \text{int}(F)$ no existe $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$ tal que $\gamma(z) \in F$.

Demostremos en primer lugar el siguiente lema.

Lema 4.3.4 *Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C., entonces,*

$$\forall z \in \text{int}(F) \quad \nexists \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1 \text{ tal que } \gamma(z) \in F \iff \gamma(\text{int}(F)) \cap F = \emptyset, \gamma \neq 1.$$

DEMOSTRACIÓN

Condición necesaria.

Sea $z \in \gamma(\text{int}(F))$ y $z \in F$, entonces $z = \gamma(z')$ con $z' \in \text{int}(F)$. Pero $\gamma(z') \in F$, con lo que se llega a una contradicción.

Condición suficiente.

Sea $z \in \text{int}(F)$, si existe $\gamma \in \Gamma$ con $\gamma(z) \in F$, como $\gamma(z) \in \gamma(\text{int}(F))$, se tendría que $\gamma(\text{int}(F)) \cap F \neq \emptyset$, contradicción. □

Proposición 4.3.5 *Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C. entonces,*

$$\gamma(\text{int}(F)) \cap F = \emptyset, \gamma \neq 1 \implies \gamma(\text{int}(F)) \cap \text{int}(F) = \emptyset, \gamma \neq 1.$$

La demostración es inmediata. \square

En relación con la implicación en el otro sentido de la proposición anterior, veamos la siguiente

Proposición 4.3.6 *Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C., entonces,*

$$\gamma(\text{int}(F)) \cap \text{int}(F) = \emptyset, \gamma \neq 1 \text{ y } F = \text{adh}(\text{int}(F)) \implies \gamma(\text{int}(F)) \cap F = \emptyset, \gamma \neq 1.$$

DEMOSTRACIÓN

Utilizaremos el método de reducción al absurdo.

Sea $z \in \gamma(\text{int}(F)) \cap F$. Ya que $z \in \gamma(\text{int}(F))$ existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $z = \gamma(z')$, con $z' \in \text{int}(F)$.

Entonces, como $F = \text{adh}(\text{int}(F))$, se verifica que, para todo entorno de z , $U(z)$, $U(z) \cap \text{int}(F) \neq \emptyset$. Como $\text{int}(F)$ es entorno de z' , $\gamma(\text{int}(F))$ es un entorno de z , por tanto $\gamma(\text{int}(F)) \cap \text{int}(F) \neq \emptyset$. \square

Luego para demostrar la condición suficiente de la Proposición 4.3.5, hay que exigirle al conjunto F que coincida con $\text{adh}(\text{int}(F))$. Veamos que si omitimos esta exigencia entonces no tiene por qué verificarse dicha implicación.

Consideremos una región fundamental F , en el sentido de Wilkie para un grupo NEC, Γ . Sea $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(\text{int}(F)) \cap \text{int}(F) = \emptyset$ y sean $z \in \gamma(\text{int}(F))$ y el conjunto $F' = F \cup \{z\}$ con $z \in \text{aisl}(F')$.

Evidentemente $\text{int}(F') = \text{int}(F)$ y F' es una región fundamental en el sentido de Wilkie. Sin embargo existe $z' \in \text{int}(F')$ tal que $\gamma(z') = z \in \text{fr}(F') \subset F'$, luego la condición *ii*) de la Definición 4.3.1 no se verifica.

Observación 4.3.7 En la definición de región fundamental que exponemos, eliminamos los casos de regiones que tengan puntos aislados, que se correspondan con otros puntos de la región fundamental considerada.

4.3.1 Regiones Fundamentales Poligonales

Sea Γ un grupo NEC con signature

$$(g; \pm; [m_1, \dots, m_r], \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}) \quad (a)$$

Vamos a considerar regiones fundamentales que sean polígonos hiperbólicos R con lados etiquetados ([55]):

$$\zeta_1, \zeta'_1, \dots, \zeta_r, \zeta'_r, \varepsilon_1, \gamma_{10}, \dots, \gamma_{1s_1}, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_k, \gamma_{k0}, \dots, \gamma_{ks_k}, \varepsilon'_k, \alpha_1, \beta'_1, \alpha'_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta'_g, \alpha'_g, \beta_g$$

o

$$\zeta_1, \zeta'_1, \dots, \zeta_r, \zeta'_r, \varepsilon_1, \gamma_{10}, \dots, \gamma_{1s_1}, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_k, \gamma_{k0}, \dots, \gamma_{ks_k}, \varepsilon'_k, \delta_1, \delta_1^*, \dots, \delta_g, \delta_g^*$$

según sea el signo de (a) + o – respectivamente.

Los lados de R son identificados por:

$$\begin{aligned} x_i(\zeta'_i) &= \zeta_i & i &= 1, \dots, r \\ e_i(\varepsilon'_i) &= \varepsilon_i & i &= 1, \dots, k \\ c_{ij}(\gamma'_{ij}) &= \gamma_{ij} & i &= 1, \dots, k \quad j = 0, \dots, s_i \\ a_i(\alpha'_i) &= \alpha_i, \quad b_i(\beta'_i) = \beta_i & i &= 1, \dots, g \\ d_i(\delta'_i) &= \delta_i & i &= 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Denotando el ángulo entre dos lados λ y μ por $\angle\lambda, \mu$, los ángulos de R son:

$$\begin{aligned} \angle\zeta_i, \zeta'_i &= \frac{2\pi}{m_i} & i &= 1, \dots, r \\ \angle\varepsilon_i, \gamma_{i0} + \angle\gamma_{is_i}, \varepsilon'_i &= \pi & i &= 1, \dots, k \\ \angle\gamma_{i,j-1}, \gamma_{ij} &= \frac{\pi}{n_{ij}} & i &= 1, \dots, k \quad j = 1, \dots, s_i. \end{aligned}$$

La suma de los ángulos que quedan es 2π ; es decir, la suma de los ángulos del polígono es

$$2\pi + k\pi + \sum_{i=1}^r \frac{2\pi}{m_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \frac{\pi}{n_{ij}}.$$

4.3.2 Area de una región fundamental para un grupo NEC

Proposición 4.3.8 *El área de una región fundamental para un grupo NEC, Γ , denotada por $|\Gamma|$, queda determinada por su signatura, y viene dada por:*

$$|\Gamma| = 2\pi \left(\alpha g + k - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}} \right) \right),$$

donde $\alpha = 2$ para el signo $+$ de la signatura y $\alpha = 1$ para el signo $-$.

DEMOSTRACIÓN

Esta proposición es una aplicación directa del Teorema de Gauss-Bonnet ([13]). \square

En relación con lo anterior se puede demostrar que: Γ existe si y sólo si $|\Gamma| > 0$ ([61]).

4.4 Teselaciones del plano hiperbólico

Definición 4.4.1 Sea Γ un grupo NEC, una Γ -teselación del plano hiperbólico, X , de región fundamental F es un conjunto de regiones $\{F_i\}_{i \in I}$ tales que:

- 1) $\bigcup_{i \in I} F_i = X$
- 2) $int(F_i) \cap int(F_j) = \emptyset$ para $i \neq j$
- 3) $\forall i \in I, \exists \gamma \in \Gamma : F_i = \gamma(F)$.

De la condición 1) se deduce que el número de regiones que forman una teselación es necesariamente infinito.

En el estudio de subgrupos de grupos NEC, así como en las teselaciones de X , es importante la siguiente proposición:

Proposición 4.4.2 ([43],[56]) *Sea Γ un grupo NEC y Γ' un subgrupo de Γ de índice p ($|\Gamma : \Gamma'| = p$). Sea F^Γ una región fundamental para Γ . Entonces Γ' tiene una región fundamental $F^{\Gamma'}$ que resulta de la unión de p réplicas congruentes de F^Γ y además $|\Gamma| \cdot p = |\Gamma'|$.*

Observación 4.4.3 A partir de F^Γ la región fundamental que se obtiene para Γ' es de la forma

$$F^{\Gamma'} = \bigcup_{i=1}^p \gamma_i F^\Gamma,$$

donde las isometrías $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ se han elegido adecuadamente en cada una de las clases de Γ/Γ' . Es decir $F^{\Gamma'}$ puede construirse a partir de F^Γ uniéndole por el borde $p - 1$ copias $\gamma_i F^\Gamma$ de forma sucesiva. Es más, si F^Γ es conexa, pueden elegirse los $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ de forma que $F^{\Gamma'}$ sea conexa ([43]).

A continuación haremos un estudio de los grupos poligonales, que son aquellos que están generados por reflexiones en los lados del polígono y, como caso particular, estudiaremos los triangulares, pues facilitan la comprensión del caso más general.

4.4.1 Grupos Triangulares

Sean $l, m, n \in \mathbb{N}$; $l, m, n \geq 2$.

Sean Δ el triángulo de ángulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$, y L, M y N los lados del triángulo Δ opuestos a $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$, respectivamente.

Sean σ_L, σ_M y σ_N las reflexiones sobre L, M y N , respectivamente.

El subgrupo de $Iso(X)$ generado por σ_L, σ_M y σ_N lo denotamos por $T(l, m, n)$ y se le llama grupo triangular. Se verifica que Δ es una región fundamental para $T(l, m, n)$ ([38]).

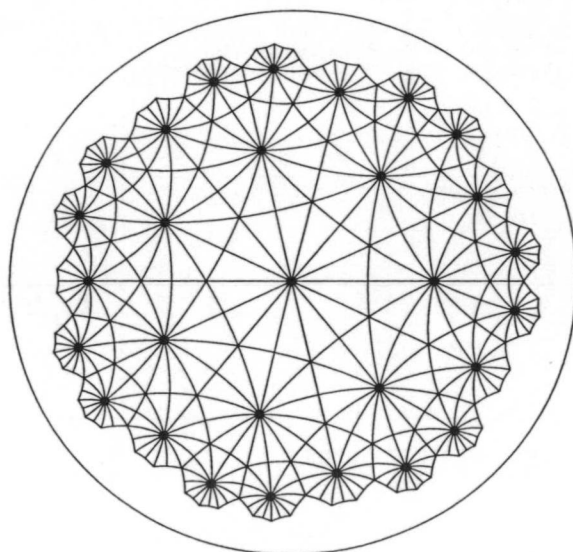
Teorema 4.4.4 *Las imágenes de Δ bajo la acción de los distintos elementos de $T(l, m, n)$ constituye un T -teselación de X . Además, $T(l, m, n)$ está definido por las relaciones:*

$$\sigma_L^2 = \sigma_M^2 = \sigma_N^2 = 1; \quad (\sigma_L \sigma_M)^n = (\sigma_M \sigma_N)^l = (\sigma_N \sigma_L)^m = 1$$

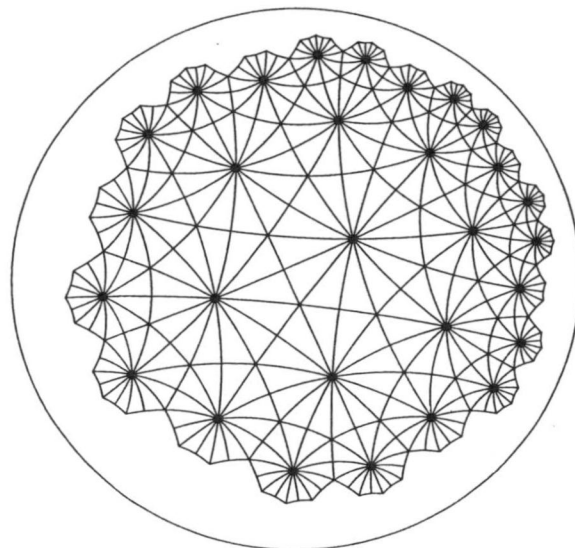
y su signatura es $(0; +; [-]; \{l, m, n\})$.

Observación 4.4.5 (Construcción de un triángulo rectángulo). Sean los ángulos $\alpha > 0, \beta \geq 0$ tal que $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Sean O, Q, P tres puntos de D^2 definido por sus coordenadas $z_0 = 0, z_Q = x_Q$ y $z_P = x_P + iy_P$ donde $x_Q = (\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha)/\rho$, $x_P = (\cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta))/\rho$, $y_P = (\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta))/\rho$ y $\rho = (\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha)^{1/2}$. Entonces O, Q, P son los vértices de un triángulo con ángulos $\alpha, \frac{\pi}{2}, \beta$, respectivamente para O, Q, P .

A continuación mostramos una teselación de D^2 a partir de triángulos OQP , para $\alpha = \frac{\pi}{7}$ y $\beta = \frac{\pi}{3}$ o sea bajo la acción del subgrupo $T(7, 2, 3)$, realizado con *Mathematica*, que se corresponde con el modelo estudiado por Klein y Fricke.



Si hacemos una traslación de la región fundamental triangular, obtenemos la teselación que se muestra en la figura siguiente.



Teorema 4.4.6 Sea $T'(l, m, n)$ el subgrupo fuchsiano canónico de índice dos del grupo triangular $T(l, m, n)$, entonces $T'(l, m, n)$ está generado por $\tau = \sigma_L \sigma_M$ y $\nu = \sigma_M \sigma_N$ y definido por las relaciones:

$$\tau^n = \nu^l = (\tau\nu)^m = 1$$

y su signatura es $(0; +; [l, m, n]; \{-\})$.

4.4.2 Teselaciones con polígonos

Nos planteamos el problema de teselar el plano hiperbólico con polígono dados.

Lema 4.4.7 ([2]) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ números reales con $0 \leq \alpha_i < \pi$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces existe un polígono hiperbólico convexo R con ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ si y sólo si $\sum_{i=1}^k \alpha_i < (k-2)\pi$. El polígono tiene las siguientes propiedades,

- a) los ángulos bisectores de R son concurrentes en un punto O , y
- b) existe un disco inscrito con centro en O que toca todos los lados de R .

Teorema 4.4.8 ([40]) *Sea Γ un grupo NEC, entonces existe un polígono convexo R que es una región fundamental para Γ .*

El siguiente teorema puede considerarse como teorema inverso del anterior en el caso de que el grupo sea el de las reflexiones en los lados de un polígono.

Teorema 4.4.9 *Sea R un polígono convexo de k lados y ángulos interiores $\frac{\pi}{n_i}$ con $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \geq 2$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, con vértices P_i y lados determinados por los segmentos $\widehat{P_{i-1}P_i}$ donde $P_0 = P_k$, verificándose que $\sum_{i=1}^k \frac{\pi}{n_i} < (k-2)\pi$. Sea σ_i la reflexión en la recta que contiene al segmento $\widehat{P_{i-1}P_i}$, para cada $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces se verifica que el grupo Γ generado por las reflexiones $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ (grupo poligonal) es un grupo NEC. Además R es una región fundamental para Γ , con signatura $(0; +; [-]; \{(n_1, n_2, \dots, n_k)\})$, y cuya presentación viene dada por las relaciones siguientes*

$$\sigma_i^2 = 1, \forall i = 1, 2, \dots, k,$$

$$(\sigma_{i-1}\sigma_i)^{n_{i-1}} = 1, \forall i = 1, 2, \dots, k \text{ con } \sigma_0 = \sigma_k \text{ y } n_0 = n_k.$$

DEMOSTRACIÓN

El grupo Γ generado por $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ es un grupo numerable que puede obtenerse como $\Gamma = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Gamma_m$ donde cada Γ_m es el conjunto de isometrías hiperbólicas que se obtienen por composición sucesiva de m reflexiones o menos del sistema generador $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ (Γ_0 es la identidad). Cada uno de los subconjuntos Γ_m de Γ es finito, por lo que Γ es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos.

En consecuencia, la órbita de cualquier punto x , del plano hiperbólico, mediante Γ será finita o numerable. Veremos que las órbitas no pueden ser finitas, por lo que serán infinito-numerables y discretas. Es más, cada órbita tendrá algún punto en el polígono de partida R , por lo que el espacio de órbitas será un cociente de R y, en consecuencia, compacto.

En efecto, consideremos la familia de subconjuntos compactos $\{\gamma(R) : \gamma \in \Gamma\}$ formada por polígonos isométricos al de partida. Las reflexiones respecto de los

lados de cualquiera de los polígonos $\gamma(R)$ es un elemento de Γ , ya que si L es la recta que pasa por los vértices $\gamma(P_{i-1})$ y $\gamma(P_i)$ de $\gamma(R)$, la isometría de Γ , $\gamma\sigma_i\gamma^{-1}$ es la reflexión respecto de L , pues es inversa y deja fijos todos los puntos de L . Además, si $\gamma \in \Gamma_m$ entonces $\gamma\sigma_i\gamma^{-1} \in \Gamma_{2m+1}$ y $\gamma\sigma_i \in \Gamma_{m+1}$. Esta familia podemos obtenerla como unión de familias finitas de polígonos: $\bigcup_{m=0}^{\infty} \{\gamma(R) : \gamma \in \Gamma_m\}$.

Sea T_m el subespacio del plano hiperbólico que recubre el conjunto $\{\gamma(R) : \gamma \in \Gamma_m\}$, $T_m = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_m} \gamma(R)$. Resulta que $\{\gamma(R) : \gamma \in \Gamma\}$ recubre el conjunto $T = \bigcup_{m=0}^{\infty} T_m = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(R)$.

Cada subconjunto T_m es compacto, ya que se obtiene como el precedente al que se le han unido un número finito de polígonos isométricos a R .

Por construcción tenemos la sucesión de compactos encajados

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_{m-1} \subset T_m \subset \dots \subset T \quad (*)$$

que no puede estacionarse, puesto que si $T_{m-1} = T_m$ resultaría que $T_{m-1} = T_m = \dots = T$ y T sería compacto y por tanto cerrado. Pero como veremos a continuación T es abierto, y por conexión T tendría que ser todo el plano hiperbólico que no es compacto. Por lo tanto la sucesión (*) no puede estacionarse.

Para ver que T es abierto, consideremos un punto x de T , existen un entero m y un punto $y \in R$ y un elemento $\gamma \in \Gamma_m$ tales que $x = \gamma(y)$. Si x es interior a $\gamma(R)$, x es interior a T_m y a T . Además $\gamma(R)$ es un entorno compacto de x . Si x está en la frontera de $\gamma(R)$, pero en el interior del segmento $\gamma(P_{i-1})\gamma(P_i)$, utilizando la recta L que los contiene, la unión de los polígonos $\gamma(R) \cup \sigma_L \gamma(R)$ es un entorno compacto de x contenido en T_{m+1} y en T . Por último, si x es un vértice de $\gamma(R)$, $x = \gamma(P_i)$, uniendo los $2n_i$ polígonos que concurren en $\gamma(P_i)$, los cuales se obtienen de aplicar sucesivamente las reflexiones respecto de los dos lados de $\gamma(R)$ que concurren en x , obtenemos un entorno compacto de x contenido en T_{m+2n_i} y en T . Luego todos los puntos de T son interiores y, por tanto, T es abierto.

Como la sucesión (*) no se estaciona, la diferencia entre T_m y T_{m+1} es al menos de un polígono isométrico a R , $\gamma(R) \in T_{m+1}$, por lo que (*) no sólo no se

estaciona sino que crece indefinidamente en área.

Con esas ideas, podemos construir un entorno abierto, $U(\gamma(R))$, de cada punto de uno de los polígonos $\gamma(R)$, uniendo a $\gamma(R)$ todos los adyacentes mediante las reflexiones respecto a sus lados, y todos los concurrentes con él en los vértices, mediante giros de ángulo $\frac{2\pi}{n_i}$ y centro $\gamma(P_i)$ aplicados a $\gamma(R)$ y a su reflejado concurrente. $U(\gamma(R))$ está formado por un número finito de polígonos isométricos a R mediante reflexiones consecutivas de R respecto de sus lados, por lo que existe un $n > m + 1$ tal que $U(\gamma(R)) \subset T_n \subset T$. Este entorno del polígono $\gamma(R)$, tiene la particularidad de contener un disco en la métrica, de radio igual al menor de los lados del polígono $\gamma(R)$. En efecto, llamamos ε_0 a la longitud de ese lado menor. El disco abierto de radio ε_0 , centrado en cualquiera de los puntos de $\gamma(R)$ está contenido en $U(\gamma(R))$ y por tanto en T . Con esta construcción, si y es un punto en la $\text{adh}(T)$ y consideramos un disco abierto de radio $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ centrado en él, dicho disco tendrá un punto x de T y, por la desigualdad triangular de la distancia, todo punto z del disco centrado en y y radio ε , estará en el disco de centro x y radio ε_0 . En particular, $y \in T$. En consecuencia, T es cerrado y también abierto, luego por conexión, todo el plano hiperbólico.

El plano hiperbólico queda así recubierto por $\{\gamma(R) : \gamma \in \Gamma\}$ y además toda órbita tiene algún punto de R . De este hecho deducimos que la órbita de cada punto es discreta, ya que Γ es discreto y con espacio de órbitas compacto (cociente del polígono de partida).

Por la propia construcción, R es una región para el grupo Γ , que resulta ser una región fundamental para dicho grupo. La comprobación del hecho de que $\gamma(\text{int}(R)) \cap \text{int}(R) \neq \emptyset$ entonces, $\gamma = 1$, requiere técnicas específicas de espacios recubridores como las utilizadas en [41]. \square

Además de la propia construcción se deduce el teorema siguiente:

Teorema 4.4.10 *La familia $\{\gamma(R) : \gamma \in \Gamma\}$ constituye una Γ -teselación de X .*

Observación 4.4.11 La realización directa de la teselación $\{\gamma(R) : \gamma \in \Gamma\}$ a partir del polígono R y de las reflexiones respecto de sus lados, no requiere la utilización de espacios recubridores, tal y como se hace en [41], aunque sí son necesarios para completar la prueba.

Definición 4.4.12 A la teselación descrita en el teorema anterior se le denomina $\langle n_1, n_2, \dots, n_k \rangle$ -teselación geométrica estándar de X ([16]).

4.4.3 Cuadriláteros caleidoscópicos de Saccheri y Lambert para teselar

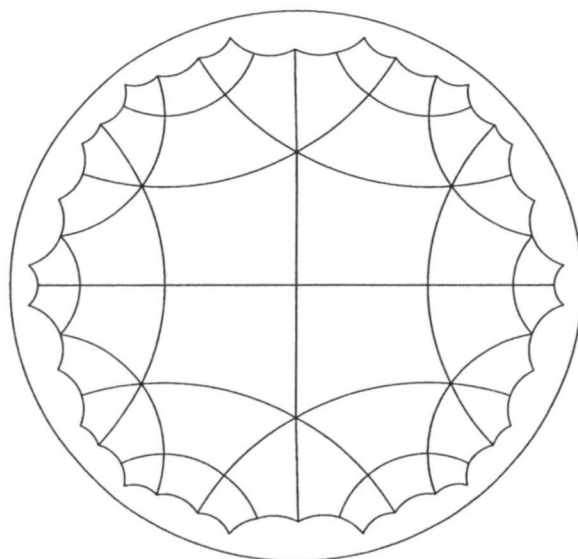
Nos planteamos la determinación de los cuadriláteros de Saccheri y Lambert que teselan.

Teorema 4.4.13 *Para cada $R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, existe un único cuadrilátero de Saccheri con base R y ángulos agudos $\varphi = \frac{\pi}{n}$, salvo congruencias, que tesela el plano hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN

La existencia de un tal cuadrilátero de Saccheri es una consecuencia directa del Teorema 3.2.7 para $\varphi = \frac{\pi}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Este cuadrilátero tesela el plano hiperbólico mediante reflexiones en sus lados ya que tienen ángulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}$. \square

Ejemplo gráfico Como ejemplo que ilustra esta situación, mostramos a continuación una teselación del disco de Poincaré mediante un cuadrilátero de Saccheri para $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $R = 1$, $\rho \simeq 1.047$ (Lema 3.2.5), utilizando el software *Mathematica*.



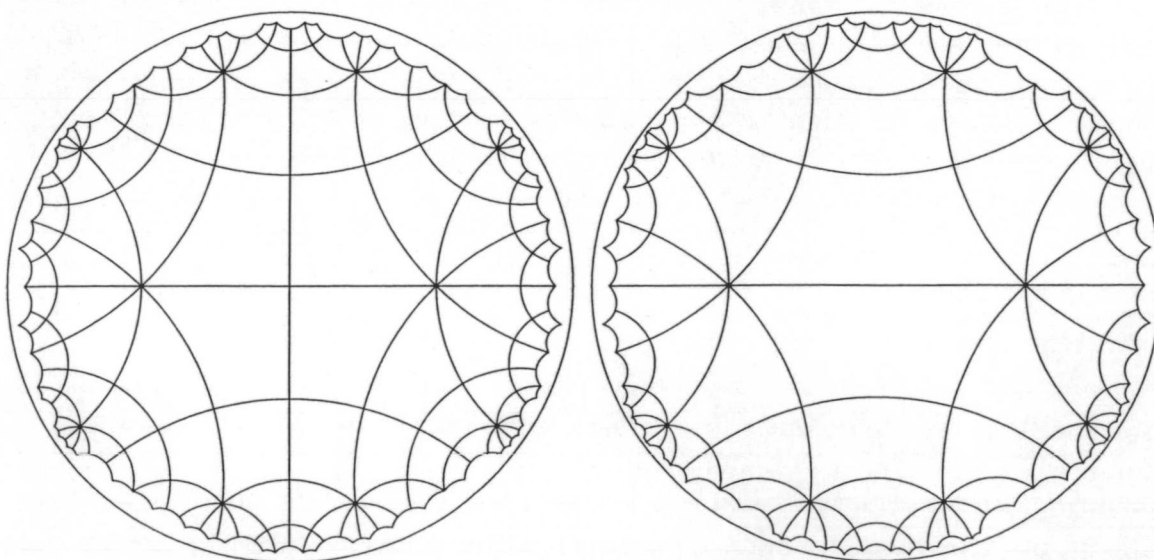
Teorema 4.4.14 *Para cada $R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, existe un único cuadrilátero de Lambert $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ con un lado comprendido entre los tres ángulos rectos,*

$R = d(P, P')$ y ángulo agudo $\phi = \frac{\pi}{n}$, salvo congruencias, que tesela el plano hiperbólico.

DEMOSTRACIÓN

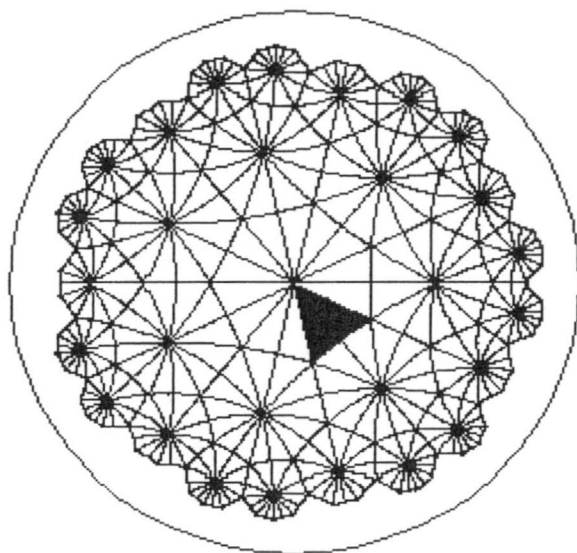
Aplicando el Teorema 3.3.8 para $\phi = \frac{\pi}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, se prueba la existencia y unicidad, salvo congruencias, del cuadrilátero de Lambert. Estos cuadriláteros teselan el plano hiperbólico mediante reflexiones en sus lados ya que los ángulos son de la forma $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}$. \square

Ejemplo gráfico Como ejemplo que ilustra esta situación, mostramos a continuación dos teselaciones del disco de Poincaré, utilizando el software *Mathematica*, una mediante un cuadrilátero de Lambert para $\phi = \frac{\pi}{4}$, y $R \simeq 0.672034$ ($\rho \simeq 0.864996$, $\rho' \simeq 1.30364$, $R' \simeq 1.15586$) (Teorema 3.3.7), y otra mediante el cuadrilátero de Saccheri que se obtiene por la unión del cuadrilátero de Lambert anterior y su reflejado respecto de la recta que contiene al segmento de longitud R o ρ . El cuadrilátero de Saccheri que se obtiene es la unión de tres triángulos de los utilizados por Echer para su obra *Ángeles y demonios* ([4]).



Observación 4.4.15 Si tomamos el polígono de 7 lados con ángulos interiores $\frac{2\pi}{3}$, con él podemos teselar X , como se muestra en la figura. El grupo que genera las

reflexiones respecto de sus lados mantiene invariante esta tesselación, pero la región fundamental para este grupo no es el propio polígono, sino un trozo de él, como se muestra en la figura.



4.5 Grupos Bicolor

Como hemos visto en el ejemplo gráfico anterior, podemos obtener la tesselación por cuadriláteros de Saccheri a partir de la tesselación por cuadriláteros de Lambert, utilizando como nueva región fundamental la unión de un cuadrilátero y su reflejado respecto a la recta que contiene uno de sus lados. Este hecho se materializa en que el grupo que tesela con cuadriláteros de Saccheri es un subgrupo de índice 2 del que lo hace con cuadriláteros de Lambert.

Si la tesela de Lambert hubiese tenido dos caras de diferente color, por ejemplo, una blanca y otra negra, la tesela de Saccheri sería bicolor, una mitad blanca y otra mitad negra.

Se han desarrollado diversas teorías para la realización de teselados en estructuras multicolores de los que el ejemplo descrito es un caso muy particular. Estas teorías están íntimamente ligadas al estudio de pares de subgrupos, donde uno está incluido en otro, con índice relativo finito. Precisamente ese índice relativo entre los subgrupos, representa el número de colores utilizado ([43]).

Como estamos utilizando grupos NEC generados por reflexiones respecto de

los lados de un polígono, aparecen de modo natural los subgrupos de índice 2 resultantes de suprimir uno de los generadores mencionados. Por ello, nos limitaremos a los grupos bicolor, desarrollando un software específico para esta situación.

Definición 4.5.1 Llamaremos *grupo bicolor o dicromático* del plano hiperbólico a un par de grupos (Γ, Γ') , siendo:

- i) Γ un grupo NEC,
- ii) Γ' un subgrupo NEC de Γ de índice 2.

Observación 4.5.2 Por ser Γ' de índice 2 en Γ , se tiene que:

- a) Γ' es normal en Γ ,
- b) Γ/Γ' es isomorfo al grupo S_2 de permutaciones de grado 2,
- c) el área de una región fundamental para Γ' es el doble del área de una región fundamental para Γ , y
- d) dado un grupo bicolor (Γ, Γ') , la terna $(\Gamma, \Gamma', \Gamma/\Gamma')$ es un grupo bicolor en el sentido de ([43]).

Consideremos una región fundamental para Γ' , $F^{\Gamma'}$, formada por dos réplicas congruentes de una región fundamental para Γ . Coloreamos una réplica de blanco y otra de negro. Al aplicar Γ' sobre $F^{\Gamma'}$ teselamos X en blanco y negro. Los elementos de Γ' transforman los blancos en blancos y los negros en negros, mientras que los elementos de $\Gamma - \Gamma'$ transforman todos los blancos en negros y todos los negros en blancos. A este tipo de teselación se le denomina *Teselación Bicolor Hiperbólica*.

Teorema 4.5.3 Sea (Γ, Γ') un grupo bicolor. Se verifica una y sólo una de las tres condiciones siguientes:

- i) Γ y Γ' son fuchsianos.
- ii) Γ es no fuchsiano y $\Gamma' = \Gamma^+$.
- iii) Γ y Γ' son no fuchsianos y (Γ^+, Γ'^+) es un grupo bicolor.

DEMOSTRACIÓN.

Claramente $\Gamma'^+ \subset \Gamma^+ \subset \Gamma$ y por otro lado $\Gamma'^+ \subset \Gamma' \subset \Gamma$.

Supongamos que no se verifica *i*), necesariamente Γ es no fuchsiano, ya que si Γ es fuchsiano, todo subgrupo suyo también lo sería y entonces Γ' sería fuchsiano.

Por tanto $|\Gamma : \Gamma^+| = 2$. Ahora bien como $|\Gamma : \Gamma'| = 2$, en virtud de que

$$|\Gamma : \Gamma'^+| = |\Gamma : \Gamma^+| \cdot |\Gamma^+ : \Gamma'^+| = |\Gamma : \Gamma'| \cdot |\Gamma' : \Gamma'^+| \quad (1)$$

se tiene que

$$|\Gamma^+ : \Gamma'^+| = |\Gamma' : \Gamma'^+|. \quad (2)$$

a) Si Γ' es fuchsiano, entonces

$$\Gamma' = \Gamma'^+ \quad (3)$$

y por (2)

$$|\Gamma^+ : \Gamma'^+| = 1,$$

es decir

$$\Gamma^+ = \Gamma'^+. \quad (4)$$

De (3) y (4) se sigue que

$$\Gamma' = \Gamma^+$$

y por tanto se verifica *ii*).

b) Si Γ' es no fuchsiano entonces

$$|\Gamma' : \Gamma'^+| = 2$$

y de (1) se sigue que

$$|\Gamma^+ : \Gamma'^+| = 2$$

por lo que se verifica *iii*).

Evidentemente las tres condiciones son excluyentes entre sí. \square

En el caso de que Γ sea un grupo poligonal, necesariamente Γ es no fuchsiano, por lo que no se puede dar el apartado *i*) del teorema anterior, por lo que se tiene el siguiente

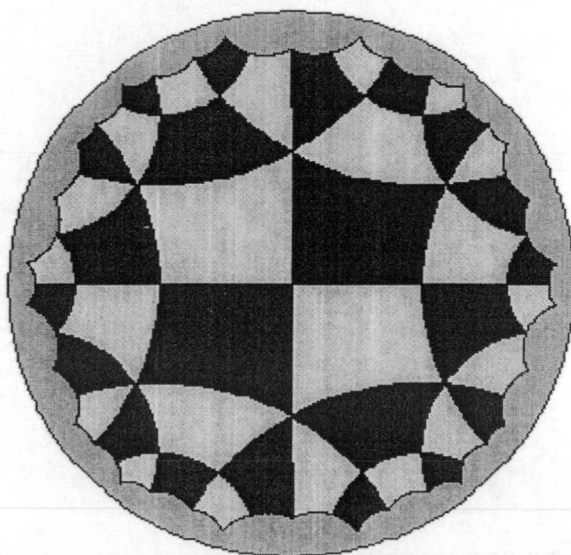
Teorema 4.5.4 *Sea (Γ, Γ') un grupo bicolor, donde Γ es un grupo poligonal. Se verifica una y sólo una de las dos condiciones siguientes:*

i) Γ' es el subgrupo fuchsiano canónico de Γ ($\Gamma' = \Gamma^+$).

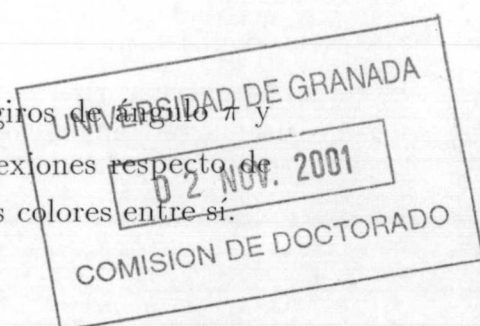
ii) El par (Γ^+, Γ'^+) formado por los grupos fuchsianos canónicos de Γ y Γ' respectivamente, es un grupo bicolor.

A continuación mostramos unos ejemplos gráficos con teselaciones bicolor.

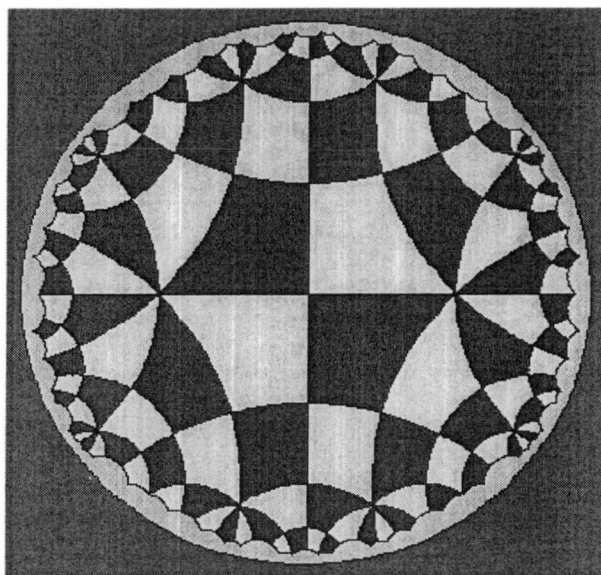
Ejemplo 1 La región fundamental del grupo Γ es un cuadrilátero de Saccheri con ángulos agudos $\varphi = \frac{\pi}{3}$, que contiene giros de ángulos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{3}$.



El subgrupo Γ' que deja invariante los colores contiene giros de ángulo $\frac{2\pi}{3}$. Γ' es el subgrupo fuchsiano canónico de Γ . Las reflexiones respecto de los lados de los cuadriláteros de Saccheri intercambian los colores entre sí.



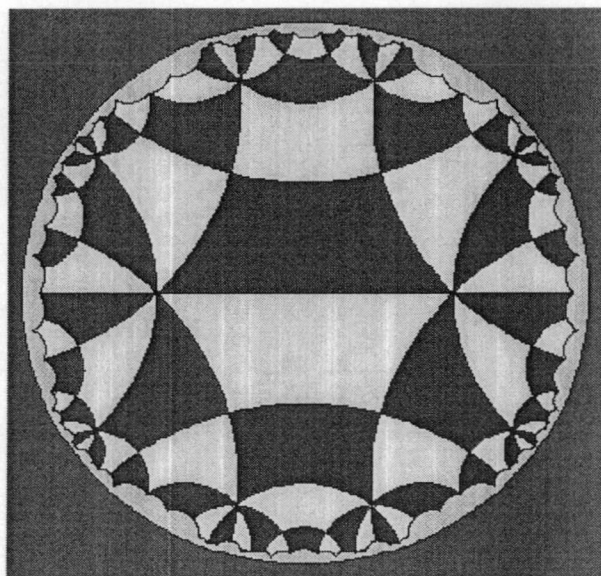
Ejemplo 2 Análogamente con el cuadrilátero de Lambert de ángulo $\varphi = \frac{\pi}{4}$, que se muestra en la figura, se tesela el disco mediante el par de grupos (Γ, Γ') , donde Γ está generado por las reflexiones respecto a los lados del cuadrilátero. Estas reflexiones intercambian los colores, por lo que Γ' contiene los giros de ángulo π y $\frac{\pi}{2}$. Γ' es el subgrupo fuchsiano canónico de Γ .



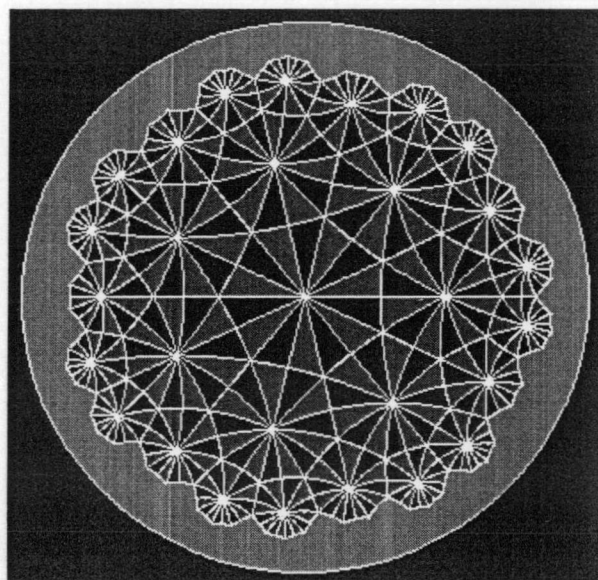
Para Γ' se obtiene una región fundamental formada por dos cuadriláteros contiguos, que nos da un cuadrilátero de Saccheri con $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 3 Al teselar con el cuadrilátero de Saccheri, podemos hacer un mosaico bicolor en el que uno de los anteriores giros de ángulo π intercambia los colores. Por la simetría de los cuadriláteros de Saccheri, hay unas reflexiones respecto de las rectas que los divide en dos cuadriláteros de Lambert, que deja invariante todo el teselado y su color.

El subgrupo Γ' de isometrías que dejan invariante el teselado siguiente, incluido el color, tiene índice 2 en el grupo Γ de las isometrías que dejan invariante las teselas pero no, necesariamente, el color. Sin embargo, Γ' no es el subgrupo fuchsiano canónico de Γ , ya que ambos contienen reflexiones respecto de rectas.

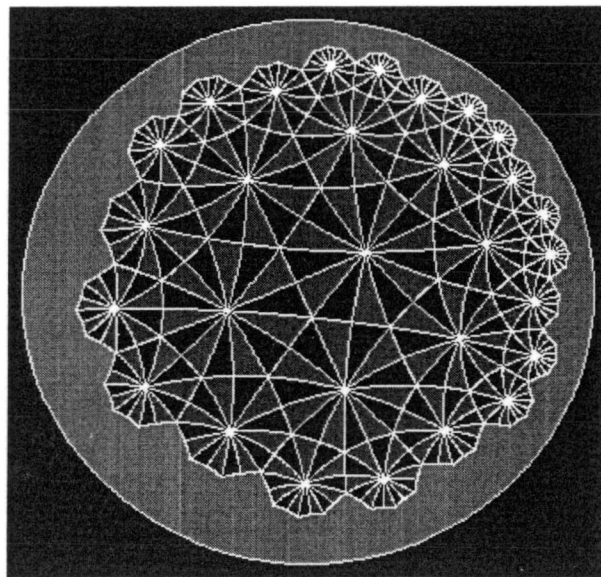


Ejemplo 4 En este ejemplo consideramos teselaciones cuyo grupo NEC es el grupo triangular $T(7, 2, 3)$. Para colorear se utiliza su subgrupo fuchsiano canónico $T'(7, 2, 3)$. La región fundamental de $T(7, 2, 3)$ es un triángulo con un vértice en el centro del disco de Poincaré que le corresponde un ángulo $\frac{\pi}{7}$.



Se puede observar como las reflexiones intercambian los colores de los triángulos, mientras que los giros de ángulos $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{3}$ y π , intercambian triángulos del mismo color.

A modo de curiosidad, hemos realizado una teselación del plano hiperbólico con ayuda de nuestro paquete informático *hiperbol* utilizando el mismo grupo bicolor $(T(7, 2, 3), T'(7, 2, 3))$ a partir de un triángulo que no está colocado en el centro del disco de Poincaré.



Conclusiones

Una vez presentado detalladamente todos y cada uno de los aspectos contemplados en nuestra investigación en los cuatro capítulos precedentes, se hace necesaria una síntesis de los resultados más importantes que han sido obtenidos y que forman las aportaciones principales contenidas en esta Memoria. Lo hacemos en forma de conclusiones.

Para la determinación de las curvas que hacen mínima la longitud obtenida en la Proposición 1.3.1 hemos utilizado el funcional

$$F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ donde } F(t, x, y, p, q) = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{y} .$$

Estas curvas son todas las geodésicas de H^2 , y son semicircunferencias euclídeas con centro en la frontera de H^2 , y semirrectas euclídeas ortogonales a dicha frontera.

Dentro de la clasificación de las isometrías atendiendo al estudio de puntos fijos, se ha obtenido el siguiente resultado:

Teorema 1.7.15 *Sea $g \in Iso(H^2)$, entonces*

- 1.- *g es una rotación si, y sólo si, $\det(g) = 1$ y $\text{tra}(g) > 2$.*
- 2.- *g es una rotación límite o la identidad si, y sólo si, $\det(g) = 1$ y $\text{tra}(g) = 2$.*
- 3.- *g es una traslación si, y sólo si, $\det(g) = 1$ y $\text{tra}(g) < 2$.*
- 4.- *g es una reflexión si, y sólo si, $\det(g) = -1$ y $\text{tra}(g) = 0$.*
- 5.- *g es una reflexión sesgada si, y sólo si, $\det(g) = -1$ y $\text{tra}(g) \neq 0$.*

Este resultado es seguido de las Proposiciones 1.8.3 a 1.8.8 en las que se sistematiza y clasifican los resultado sobre descomposición de isometrías.

La clasificación análoga a la presentada en el Teorema 1.7.15, para D^2 , se consigue mediante los Teoremas 1.11.1 y 1.11.2. Cabe reseñar el enfoque dado a la misma como herramienta clarificadora sobre el particular.

Teorema 1.11.1 *Sea $s \in Iso^+(D^2)$, entonces:*

- 1.- *s es una rotación (transformación elíptica) si, y sólo si, $|Re\alpha| < 1$.*
- 2.- *s es una rotación límite (transformación parabólica) o la identidad si, y sólo si, $|Re\alpha| = 1$.*
- 3.- *s es una traslación (transformación hiperbólica) si, y sólo si, $|Re\alpha| > 1$.*

Teorema 1.11.2 *Sea $t \in Iso^-(D^2)$, entonces:*

- 1.- *t es una reflexión si, y sólo si, $Re\delta = 0$.*
- 2.- *t es una reflexión sesgada si, y sólo si, $Re\delta \neq 0$.*

Las proposiciones 2.7.2 y 2.10.6, y sus respectivos corolarios, aportan resultados interesantes sobre la distancia hiperbólica y las longitudes de los lados de cuadriláteros de Saccheri, respectivamente.

Una aportación principal de nuestra investigación es el establecimiento de los algoritmos de automatización para la Geometría Hiperólica como se muestra en el Apéndice A.

Sobre cuadriláteros de Saccheri y Lambert se han obtenido dos resultados interesantes para cada uno de ellos - Teoremas 3.2.3, 3.2.7, 3.3.6 y 3.3.8 -, con los que se demuestra su existencia y unicidad, salvo congruencias, a partir de las longitudes de dos lados no paralelos o de la longitud de un lado y un ángulo.

Teorema 3.2.3 *Dados dos números reales positivos R y ρ , existe salvo congruencias, un único cuadrilátero de Saccheri cuya base tiene longitud R , y lados coincidentes con la base de longitud ρ . La longitud del lado opuesto a la base es el número real R' tal que:*

$$\cosh(R') = 1 + (\cosh(R) - 1) \cosh^2(\rho).$$

Teorema 3.2.7 Para cada $R > 0$ y $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, existe un único cuadrilátero de Saccheri, salvo congruencias, con base R y ángulos agudos φ .

Teorema 3.3.6 Sean $R > 0$, $\rho > 0$, la condición necesaria y suficiente para que exista un único cuadrilátero de Lambert, salvo congruencias, $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ con los dos lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, $R = d(P, P')$ y $\rho = d(P, Q)$, es que $\tanh(\rho) \cosh(R) < 1$.

Teorema 3.3.8 Dados $R > 0$ y ϕ con $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, existe un único cuadrilátero de Lambert, $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$, salvo congruencias, con lados comprendidos entre los tres ángulos rectos, $R = d(P, P')$ y $\rho = d(P, Q)$.

En el estudio de las teselaciones periódicas, tienen especial interés las regiones fundamentales para un grupo NEC. Estas regiones son las teselas más pequeñas que permiten teselar utilizando la acción de un grupo NEC sobre ellas. Para ello, establecemos la siguiente definición:

Definición 4.3.1 Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C. Se dice que F es una región fundamental para Γ si se verifica:

- i) para todo $z \in X$ existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(z) \in F$
- ii) si $z \in F$ tal que $\gamma(z) \in F$, con $\gamma \neq 1$, entonces $z, \gamma(z) \in fr(F)$
- iii) $F = adh(int(F))$.

Conviene hacer notar que esta definición mejora las utilizadas en [17], [40] y [60], en el sentido de que eliminamos los casos de regiones "patológicas" como aquellas que tengan puntos aislados que se corresponden con otros de la región fundamental considerada. Esto se justifica mediante las proposiciones 4.3.3 y 4.3.6.

Proposición 4.3.3 Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C., entonces,

$$\forall z \in X, \exists \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma(z) \in F \iff \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = X.$$

Proposición 4.3.6 Sea $F \subset X$ cerrado y Γ un grupo N.E.C., entonces,

$$\gamma(\text{int}(F)) \cap \text{int}(F) = \emptyset, \gamma \neq 1 \text{ y } F = \text{adh}(\text{int}(F)) \implies \gamma(\text{int}(F)) \cap F = \emptyset, \gamma \neq 1.$$

En las teselaciones con grupos poligonales, enunciamos y demostramos el Teorema 4.4.9 que se puede considerar el inverso del Teorema 4.4.8 expuesto en [40], cuando el grupo es el anteriormente mencionado. Tiene especial interés el método de demostración utilizado que se basa en el recubrimiento del plano hiperbólico mediante una familia de conjuntos encajados construidos a partir de uniones finitas de conjuntos, quedando las órbitas de los puntos contenidas en el recubrimiento.

Teorema 4.4.9 *Sea R un polígono convexo de k lados y ángulos interiores $\frac{\pi}{n_i}$ con $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \geq 2$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, con vértices P_i y lados determinados por los segmentos $\widehat{P_{i-1}P_i}$ donde $P_0 = P_k$, verificándose que $\sum_{i=1}^k \frac{\pi}{n_i} < (k-2)\pi$. Sea σ_i la reflexión en la recta que contiene al segmento $\widehat{P_{i-1}P_i}$, para cada $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces se verifica que el grupo Γ generado por las reflexiones $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ (grupo poligonal) es un grupo NEC. Además R es una región fundamental para Γ , con signatura $(0; +; [-]; \{(n_1, n_2, \dots, n_k)\})$, y cuya presentación viene dada por las relaciones siguientes*

$$\sigma_i^2 = 1, \forall i = 1, 2, \dots, k,$$

$$(\sigma_{i-1}\sigma_i)^{n_{i-1}} = 1, \forall i = 1, 2, \dots, k \text{ con } \sigma_0 = \sigma_k \text{ y } n_0 = n_k.$$

En los teoremas 4.4.13 y 4.4.14 indicamos los cuadriláteros de Saccheri y Lambert que teselan el plano hiperbólico.

Teorema 4.4.13 *Para cada $R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, existe un único cuadrilátero de Saccheri con base R y ángulos agudos $\varphi = \frac{\pi}{n}$, salvo congruencias, que tesela el plano hiperbólico.*

Teorema 4.4.14 *Para cada $R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, existe un único cuadrilátero de Lambert $\mathcal{L}(P, Q, Q', P')$ con un lado comprendido entre los tres ángulos rectos, $R = d(P, P')$ y ángulo agudo $\phi = \frac{\pi}{n}$, salvo congruencias, que tesela el plano hiperbólico.*

Terminamos exponiendo los dos resultados más importantes que hemos obtenido relacionados con los grupos bicolor y damos ejemplos concretos de teselaciones bicolors.

Teorema 4.5.3 *Sea (Γ, Γ') un grupo bicolor. Se verifica una y sólo una de las tres condiciones siguientes:*

- i) Γ y Γ' son fuchsianos.*
- ii) Γ es no fuchsiano y $\Gamma' = \Gamma^+$.*
- iii) Γ y Γ' son no fuchsianos y (Γ^+, Γ'^+) es un grupo bicolor.*

Teorema 4.5.4 *Sea (Γ, Γ') un grupo bicolor, donde Γ es un grupo poligonal. Se verifica una y sólo una de las dos condiciones siguientes:*

- i) Γ' es el subgrupo fuchsiano canónico de Γ ($\Gamma' = \Gamma^+$).*
- ii) El par (Γ^+, Γ'^+) formado por los grupos fuchsianos canónicos de Γ y Γ' respectivamente, es un grupo bicolor.*

Los resultados hasta aquí expuestos nos abren el camino desde donde esperamos hacer nuevas aportaciones investigando en los siguientes problemas:

- (1) Son conocidos los calidoscopios que se obtienen en cualquier geometría pasando al cociente por medio de un grupo discreto. En particular en el plano euclídeo, si se consideran los grupos cristalográficos, se obtienen por identificación de puntos de la frontera de las regiones fundamentales los distintos calidoscopios. Por ejemplo para un grupo de tipo $p1$ el calidoscopio resultante es un toro, para $p2$, $p4$ y $p6$ esferas topológicas, para los de tipo cm banda de Moebius, para los pm anillos, para los pg botellas de Klein etc...

En nuestro caso sustituyendo la Geometría Euclídea por la Hiperbólica y los grupos cristalográficos por los NEC obtendríamos los correspondientes calidoscopios dando lugar a toros con k agujeros, infinitas superficies de Klein, etc... Además estas superficies podrían aproximarse mediante splines simpliciales que serían cuasiteselaciones de dicha superficie (véase [59]).

- (2) Queda abierto todo el estudio relativo a grupos NEC k -cromáticos (véase [43]).
- (3) Queda también abierto el estudio sobre teselaciones con grupos NEC distintos

de los tratados en esta Memoria.

Bibliografía

- [1] ALLEN B.S. *Constructing kaleidoscopic tiling polygons in the hyperbolic plane*. Am. Math. Mon. **107**, 689-719, 2000.
- [2] BEARDON A.F. *Hyperbolic polygons and fuchsian groups*. J. London Math. Soc. (2) **20**, pp.:247-255 (1979).
- [3] BENEDETTI R. y PETRONIO C. *Lectures on hiperbolic geometry*. Springer-Verlag. Berlin, 1992.
- [4] BENNETT, C.D. *A paradoxical view of Escher's angels and devils*. Math. Intell, **22**, n° 3, 39-46, 2000.
- [5] BERGER M. *Geometrie*. Cedic. París 1977
- [6] BONOLA, R. *Non-euclidean geometry*. Dover Publications, Inc., New York, 1912.
- [7] BORSUK K. y SZMIELEW W. *Foundations of geometry*. North-Holland publishing company. Amsterdam 1960.
- [8] BUJALANCE E., COSTA A., GROMADZKIS G. y SINGERMAN D. *Automorphisms groups of complex doubles of Klein surfaces*. Glasgow Math. J. **36** (1994), pp.: 313-330.
- [9] CARTAN H. *Teoría elemental de funciones analíticas de una o varias variables*. Selecciones científicas. Madrid, 1968.
- [10] CASTILLO ET AL. *Mathematica*. Paraninfo. Madrid, 1994.
- [11] COSTA A. y MARTINEZ E. *Planar hyperelliptic Klein surfaces and fundamental regions of N.E.C. groups*. London Math. Society 173 (1992), pp.: 57-65
- [12] COXETER H.S.M. *Fundamentos de geometría*. Limusa-Wiley, S.A. México, 1971.

- [13] DO CARMO M.P. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad. Madrid, 1990
- [14] DO CARMO M.P. *Riemannian Geometry*. Birkhauser. Boston, 1993
- [15] DYCK W. *Gruppentheoretische Studien*. Math. Ann. 20, (1882), pp.:1-45.
- [16] EDMONDS A., EWING J. y KULKARNI R. *Torsion free subgroups of fuchsian groups and tessellations of surfaces*. Inventiones Mathematicae 69 (1982), pp.: 331-346.
- [17] ETAYO J., MARTINEZ E. *Hiperbolic polygons and NEC groups*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 104 (1988), pp.: 261-272.
- [18] FABER R.L. *Foundations of euclidean and non-euclidean geometry*. Pure and Applied Mathematics. Vol. 73. New York, 1983.
- [19] FENCHEL W. *Elementary geometry in hiperbolic space*. Walter de Gruyter. Berlin 1989.
- [20] FEUER R.D. *Torsion-free subgroups of triangle groups*. Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), pp.:235-240.
- [21] GÁMEZ D., PASADAS M., PÉREZ R. y RUIZ C. *Hyperbolic plane tessellations*. Proceedings of the VI Journées Zaragoza-Pau de Mathematiques Appliquées et Statistique, pp.: 257-264, Jaca, 1999.
- [22] GÁMEZ D., PASADAS M., PÉREZ R. y RUIZ C. *Regla y compas hiperbólicos electrónicos para teselar*. Proceedings del I Encuentro de Matemáticos Andaluces, Vol. 2, pp.:467-474, Sevilla, 2000.
- [23] GÁMEZ D., PASADAS M., PÉREZ R. y RUIZ C. *The Saccheri quadrilateral, translations and tessellations in the hyperbolic plane*. Pendiente de publicación.
- [24] GÁMEZ D., PASADAS M., PÉREZ R. y RUIZ C. *The Lambert quadrilateral and tessellations in the hyperbolic plane*. Pendiente de publicación.
- [25] GÁMEZ D., PASADAS M., PÉREZ R. y RUIZ C. *Orbits in the hyperbolic plane*. Proceedings of the VII Journées Zaragoza-Pau de Mathematiques Appliquées et Statistique. Aceptado para su publicación, Jaca, 2001.
- [26] GERSTENHABER M. *On the algebraic structure of discontinuous groups*. Proc.of Am. Math. Soc. 4 (1953), pp.:745-750.

- [27] GHYS E. ET AL. *Sur les groupes hiperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics, Vol. 83. E. Ghys, P. de la Harpe (Editors). Birkhäuser Boston (1990).
- [28] GREENBERG L. *Discrete groups of motions*. Canad. J. Math. 12 (1960), pp.:415-426.
- [29] GREENBERG L. *Maximal Fuchsian groups*. Bull Amer. Math. Soc. 69 (1963), pp.:569-573.
- [30] HOARE A. H., KARRAS A. y SOLITAR D. *Subgroups of N.E.C. groups*. Com. on Pure and Appl. Math. 26 (1973), pp.:731-744.
- [31] HOROWITZ R. *Characters of free groups represented in the two dimensional special linear group*. Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972), pp.:635-649.
- [32] HOWARD A., HOARE M., KARRAS A. y SOLITAR D. *Subgroups of finite index of fuchsian groups*. Math. Zeitschrift 120 (1971), pp.: 289-298.
- [33] HOWARD A., HOARE M., KARRAS A. y SOLITAR D. *Subgroups of infinite index in fuchsian groups*. Math. Zeitschrift 125 (1972), pp.: 59-69.
- [34] IVERSEN B. *Hiperbolic geometry*. Cambridge university press. Cambridge, 1992.
- [35] LEVISON N. y REDHEFER R.M. *Curso de variable compleja*. Editorial Reverté s.a. Barcelona 1981.
- [36] MACBEATH A. *The classification of non euclidean plane crystallographic groups*. Canad. J. Math. 19 (1967), pp.: 1192-1205.
- [37] MACBEATH A. y HOARE A. H. *Groups of hiperbolic cristallographic*. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), pp.:236-249.
- [38] MAGNUS W. *Non euclidean tesslations and their groups*. Academic Press. New York, 1974.
- [39] MARKUSHEVICH A. *Teoría de las funciones analíticas*. Mir. Moscú, 1978. Vol. 1.
- [40] MARTÍNEZ E. *Convex fundamental regions for NEC groups*. Arch. Math. 47 (1986), pp.: 457-464.
- [41] MILNOR J. *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p,q,r)$* . En Knots groups, and 3-manifolds. Papers dedicated to the memory of R. H. Fox (Ed. L.P. Neuwirth). Princeton University Press, 1975.

- [42] NEUMANN P., STOY G. , y THOMPSON E. *Groups and geometry*. Oxford University Press. Oxford, 1994.
- [43] PÉREZ GÓMEZ R. *Espacios Cromáticos*. Tesis Doctoral. Granada,1992.
- [44] POINCARÉ H. *Theorie des groupes fuchsians*. Acta Mathematica 1 (1882), pp.:1-62.
- [45] RAMSAY A., y RICHTMYER R. *Introduction to hiperbolic geometry*. Springer-Verlag. New York, 1995.
- [46] RAMÍREZ ET AL. *Matemáticas con Mathematica*. Proyecto Sur. Granada, 1996. Vol, 1,2 y 3.
- [47] RATCLIFE J. G. *Foundations of hiperbolic manifolds*. Springer Verlag. New York, 1994. Vol. 149.
- [48] RHAN G. *Sur les polygones générateurs de groupes fuchsians*. L'Enseignement mathem.. Vol. XVII, fasc.1.(1971). pp.:49-61.
- [49] RIGBY, J.F. *Precise colourings of regular triangular tilings*. Math. Intell. **20**, nº 1, 4-11, 1998.
- [50] SAGAN, H. *Introduction to the Calculus of Variations*. Dover Publications Inc., New York. 1992.
- [51] SANTALÓ L. A. *Geometrías no euclidianas*. Editorial universitaria. Buenos Aires 1976.
- [52] SIEGEL C. L. *Topics in complex function theory*. Wiley-Interscience. New York, 1971. Vol. 2
- [53] SIEGEL C. L. *Discontinuous groups*. Annals of Math. 44 (1943), pp.: 647-689.
- [54] SINGERMAN D. *Subgroups of Fuchian groups and finite permutations groups*. Bull London Math. Soc. 2 (1970), pp.:319-323.
- [55] SINGERMAN D. *On the structure of non-Euclidean crystallographic groups*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 76 (1974), pp.:233-240.
- [56] SINGERMAN D. *Non-euclidean crystallographic groups and Riemann surfaces*. Ph.D. Thesis, University of Birmingham, (1969).
- [57] STILLWELL J. *Sources of hiperbolic geometry*. Board. Providence, 1996.

- [58] THURSTON W. *The geometry and topology of 3-manifolds*. Preprint Princeton, 1976-79.
- [59] WALLNER J., y POTTMANN H. *Spline Orbifolds*. Vanderbilt University Press, Nashville, TN (1997), pp.:445-464.
- [60] WILKIE H. C. *On non-euclidean crystallographic groups*. Math.Z. 91 (1966), pp.:87-102.
- [61] ZIESCHANG H., VOGT E., y COLDEWEY H.D.. *Surfaces and planar discontinuous groups*. Lectures Notes in Math. Vol 835. Springer-Verlag. 1980.

Apéndice A

Paquete Hyperbol


```

(* :Título: Hyperbol *)

(* :Autores: Domingo Gámez, Miguel Pasadas, Rafael Pérez,
            Ceferino Ruiz *)

(* :Resumen:
Este paquete provee a Mathematica de funciones para el cálculo de las
ecuaciones y gráficas de los distintos movimientos en el plano
hiperbólico *)

(* :Nota: El package debe almacenarse en la carpeta de packages
            Geometry *)

(* :Contexto: Geometry`Hyperbol` *)

(* :Package Version: 1.0 *)

(* :Copyright: Copyright 2001, D. Gámez, M. Pasadas, R.
Pérez, C. Ruiz. *)

(* :Keywords: hyperbolic plane, isometry, orbit, tessellation, polygonal
group, NEC group, constructive problem *)

(* :Fuente: Tesis Doctoral de Domingo Gámez*)

(* :Mathematica Version: 4.0 *)

BeginPackage["Geometry`Hyperbol`"]

(** Two dimensions **)

Angulo::usage =
"Angulo[{v1,v2},{w1,w2}] da el ángulo medido desde {v1,v2} hasta
{w1,w2} medido en el sentido contrario a las agujas del reloj"

Cayley::usage =
"Cayley[{x,y}] da las coordenadas del transformado por la aplicación
de Cayley del punto {x,y} de H2 en D2"

GrHcirc::usage =
"GrHcirc[{a,b},dis] genera como elemento gráficos la circunferencia
de centro {a,b} y radio dis en H2. Para visualizarla debe usarse la
estructura Show[GrHcirc[{a,b},dis],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDcirc::usage =
"GrHDcirc[{a,b},dis] genera como elemento gráficos la circunferencia
de centro {a,b} y radio dis en D2. Para visualizarla debe usarse la
estructura Show[GrHDcirc[{a,b},dis],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDhiperciclo::usage =
"GrHDhiperciclo[{a,b},{c,d},{e,f}] genera como elemento gráfico el hiperciclo
que pasa por los puntos {a,b} y {c,d} de la recta del infinito y el punto

```

```

{e,f} en D2. Para visualizarlo debe usarse la estructura
Show[GrHDhiperciclo[{a,b},{c,d},{e,f}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDhorociclo1::usage =
"GrHDhorociclo1[{a,b},{p,q}] genera como elemento gráfico el
horociclo que pasa por el punto {a,b} y el punto de la recta del infinito
{p,q} en D2. Para visualizarlo debe usarse la estructura
Show[GrHDhorociclo1[{a,b},{p,q}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDhorociclo2::usage =
"GrHDhorociclo2[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico los dos
horociclos que pasan por los puntos {a,b} y {c,d} de D2. Para visualizarlos
debe usarse la estructura
Show[GrHDhorociclo2[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDmediatriz::usage =
"GrHDmediatriz[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la mediatriz
del segmento que une los puntos {a,b} y {c,d} de D2. Para visualizarla debe
usarse la estructura
Show[GrHmediatriz[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDperp::usage =
"GrHperp[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la perpendicular a
la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} pasando por el punto {a,b} en D2.
Para visualizarla debe usarse la estructura
Show[GrHDperp[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDrecta::usage =
"GrHDrecta[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la recta en D2
que une los puntos {a,b} y {c,d}. Para visualizarla debe usarse la estructura
Show[GrHDrecta[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDsegmento::usage =
"GrHDsegmento[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico el segmento
en D2 que une los puntos {a,b} y {c,d}. Para visualizarla debe usarse la
estructura Show[GrHDsegmento[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHDtraslacion::usage =
"GrHDtraslacion[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico dos rectas
tales que la composición de las reflexiones respecto de las mismas
produce la traslación de {a,b} a {c,d} en D2. Para visualizarlas debe
usarse la estructura
Show[GrHDtraslacion[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHiperp::usage =
"GrHiperp[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico el hiperp
que pasa por los puntos de abscisas a y b de la recta del infinito y el punto
{c,d} en H2. Si b es Infinity el hiperp es una recta euclídea. Para
visualizarlo debe usarse la estructura
Show[GrHiperp[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

```

```

GrHmediatriz::usage =
"GrHmediatriz[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la mediatriz
del segmento que une los puntos {a,b} y {c,d} de H2. Para visualizarla debe
usarse la estructura
Show[GrHmediatriz[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHorociclo1::usage =
"GrHorociclo1[{a,b},p] genera como elemento gráfico el horociclo que
pasa por el punto {a,b} y el punto de la recta del infinito de abscisa p en
H2. Para visualizarlo debe usarse la estructura
Show[GrHorociclo1[{a,b},p],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHorociclo2::usage =
"GrHorociclo2[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico los dos
horociclos que pasan por los puntos {a,b} y {c,d} de H2. Para visualizarlos
debe usarse la estructura
Show[GrHorociclo2[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHperp::usage =
"GrHperp[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la perpendicular a
la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} pasando por el punto {a,b} en H2.
Para visualizarla debe usarse la estructura
Show[GrHperp[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHrecta::usage =
"GrHrecta[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la recta en H2
que une los puntos {a,b} y {c,d}. Para visualizarla debe usarse la estructura
Show[GrHrecta[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHsegmento::usage =
"GrHsegmento[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico el segmento en
H2 que une los puntos {a,b} y {c,d}. Para visualizarla debe usarse la
estructura Show[GrHsegmento[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

GrHtraslacion::usage =
"GrHtraslacion[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico dos rectas
tales que la composición de las reflexiones respecto de las mismas
produce la traslación de {a,b} a {c,d} en H2. Para visualizarlas debe
usarse la estructura
Show[GrHtraslacion[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]"

Hcirc::usage =
"Hcirc[{a,b},dis] da la lista formada por el centro euclídeo, radio
euclídeo y ecuación de la circunferencia de centro {a,b} y
radio dis en H2."

HDcirc::usage =
"HDcirc[{a,b},dis] da la lista formada por el centro euclídeo, radio
euclídeo y ecuación de la circunferencia de centro {a,b} y
radio dis en D2."

```

HDdist::usage =
 "HDdist[{a,b},{c,d}] da la distancia entre los puntos {a,b} y {c,d} en D2.
 El signo de esta distancia indica el el sentido para llevar {a,b} sobre \
 {c,d}"

HDgiro::usage =
 "HDgiro[{a,b},al,{c,d}] da las coordenadas del punto obtenido mediante un
 giro de centro {a,b} y ángulo al radianes del punto {c,d} de D2"

Hdist::usage =
 "Hdist[{a,b},{c,d}] da la distancia entre los puntos {a,b} y {c,d} de H2. El
 signo de esta distancia indica el el sentido para llevar {a,b} sobre {c,d}"

HDhiperciclo::usage =
 "HDhiperciclo[{a,b},{c,d},{e,f}] da el centro, el radio y los ángulos del
 arco de circunferencia correspondiente al hiperciclo que pasa por los
 puntos {a,b} y {c,d} de la recta del infinito y el punto {e,f} de D2."

HDhorociclo1::usage =
 "HDhorociclo1[{a,b},{p,q}] da la lista formada por el centro, el radio y la
 ecuación de la circunferencia euclídea correspondiente al
 horociclo que pasa por el punto {a,b} y el punto de la recta del infinito
 {p,q} en D2. "

HDhorociclo2::usage =
 "HDhorociclo2[{a,b},{c,d}] da la lista formada por el centro,
 el radio y la ecuación de las circunferencia euclídea
 correspondientes a los dos horociclo que pasan por los puntos
 {a,b} y {c,d} en D2. "

HDmediatriz::usage =
 "Hmediatriz[{a,b},{c,d}] da la ecuación de la mediatriz del segmento
 que une los puntos {a,b} y {c,d} de D2"

HDperp::usage =
 "HDperp[{a,b},{c,d}] da dos puntos de la recta perpendicular
 a la recta que une {a,b} y {c,d} pasando por el
 punto {a,b} en D2."

HDperpComun::usage =
 "HDperpComun[{a,b},{c,d},{e,f},{g,h}] da dos puntos de la recta
 perpendicular común a las rectas que unen los puntos {a,b}, {c,d}
 y {e,f},{g,h}, respectivamente, en D2."

HDrecta::usage =
 "HDrecta[{a,b},{c,d}] da la ecuación de la recta de D2 que une
 los puntos {a,b} y {c,d}"

HDreflexion::usage =
 "HDreflexion[{e,f},{a,b},{c,d}] da las coordenadas del punto
 reflejado de {e,f} respecto de la recta que une los puntos

{a,b} y {c,d} de D2"

HDtraslacion::usage =

"HDtraslacion[{a,b},{c,d}] da las ecuaciones de las rectas tales la composición de las reflexiones respecto de las mismas produce la traslación que transforma {a,b} en {c,d} en D2"

HDtrasrec::usage =

"HDtrasrec[{a,b},{c,d},dis] da las coordenadas del trasladado del punto {a,b} una distancia igual a dis sobre la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} en D2. El signo de dis indica el sentido de traslación sobre la recta"

Hgiro::usage =

"Hgiro[{a,b},al,{c,d}] da las coordenadas del punto obtenido mediante un giro de centro {a,b} y ángulo al radianes del punto {c,d} de H2"

Hiperciclo::usage =

"Hiperciclo[a,b,{c,d}] da el centro, el radio y los ángulos del arco de circunferencia correspondiente al hiperciclo que pasa por los puntos de abscisas a y b de la recta del infinito y el punto {e,f} de D2. Si b es Infinity da como centro, radio y ángulos, valores nulos."

Hmediatriz::usage =

"Hmediatriz[{a,b},{c,d}] da la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos {a,b} y {c,d} de H2"

Horociclo1::usage =

"Horociclo1[{a,b},p] da el radio y la ecuación euclídea del horociclo que pasa por el punto {a,b} y el punto de la recta del infinito de abscisa p en H2. Si p=Infinity entonces el radio es igual a cero."

Horociclo2::usage =

"Horociclo2[{a,b},{c,d}] da el centro, el radio y la ecuación euclídea de los dos horociclos que pasan por {a,b} y {c,d} en H2. Si uno de ellos es una recta el radio es 0."

Hperp::usage =

"Hperp[{a,b},{c,d}] da la abscisa del centro y el radio de la recta perpendicular a la recta que une {a,b} y {c,d} pasando por el punto {a,b} en H2. Si el radio es 0 se entenderá la recta vertical que pasa por la abscisa del centro dada."

HperpComun::usage =

"HperpComun[{a,b},{c,d},{e,f},{g,h}] da la abscisa del centro y el radio de la recta perpendicular común a las rectas que unen los puntos {a,b}, {c,d} y {e,f},{g,h}, respectivamente, en H2"

Hrecta::usage =

"Hrecta[{a,b},{c,d}] da la ecuación de la recta de H2 que une



```

los puntos {a,b} y {c,d}"

Hreflexion::usage =
"Hreflexion[{e,f},{a,b},{c,d}] da las coordenadas del punto
reflejado de {e,f} respecto de la recta que une los puntos
{a,b} y {c,d} de H2"

Htraslacion::usage =
"Htraslacion[{a,b},{c,d}] da las ecuaciones de las rectas tales
la composición de las reflexiones respecto de las mismas produce
la traslación que transforma {a,b} en {c,d} en H2"

Htrasrec::usage =
"Htrasrec[{a,b},{c,d},dis] da las coordenadas del trasladado
del punto {a,b} una distancia igual a dis sobre la recta que
une los puntos {a,b} y {c,d} en H2. El signo de dis indica el
sentido de traslación sobre la recta"

InCayley::usage =
"InCayley[{a,b}] da las coordenadas del transformado por la
aplicación de Cayley del punto {a,b} de D2 en H2"

Begin["`Private`"]

Angulo[{v1_, v2_}, {w1_, w2_}] :=
Module[{al, be},
  If[v1 == 0. ,
    If[v2 > 0, alsegmento = N[Pi/2], al = N[-Pi/2]],
    al = N[Abs[ArcTan[v2/v1]]]];
  Which[v1 < 0. && v2 > 0. , al = N[Pi/2 + al],
    v1 < 0. && v2 < 0. , al = N[Pi + al], v1 > 0. && v2 < 0. ,
    al = N[3Pi/2 + al]];
  If[w1 == 0. , If[w2 > 0, be = N[Pi/2], be = N[-Pi/2]],
    be = N[Abs[ArcTan[w2/w1]]]];
  Which[w1 < 0. && w2 > 0. , be = N[Pi/2 + be],
    w1 < 0. && w2 < 0. , be = N[Pi + be], w1 > 0. && w2 < 0. ,
    be = N[3Pi/2 + be]]; be - al]

Cayley[{x_,y_}] := {(x^2+y^2-1)/(x^2+(y+1)^2), -2x/(x^2+(y+1)^2)}

GrHcirc[{a_,b_},dis_]:=
Show[Graphics[{Circle[Hcirc[{a,b},Abs[dis]][[1]],
  Hcirc[{a,b},Abs[dis]][[2]]}],AspectRatio->Automatic,
  DisplayFunction->Identity]

GrHdcirc[{a_,b_},dis_]:=
Show[Graphics[{Circle[
  HDcirc[{a,b},dis][[1]],HDcirc[{a,b},dis][[2]]}],
  AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity]

```

```

GrHDhiperciclo[{a_,b_},{c_,d_},{e_,f_}]:=Module[{p,pp},
  p=HDhiperciclo[{a,b},{c,d},{e,f}];If[p[[2]]!=0,
  pp=Circle[p[[1]],p[[2]],{p[[3]],p[[4]]}],pp=Line[{{a,b},{c,d}}];
  Show[Graphics[pp],DisplayFunction->Identity]

GrHDhorociclo1[{a_,b_},{p_,q_}]:=Show[Graphics[{Circle[{0,0},1],
  Circle[HDhorociclo1[{a,b},{p,q}][[1]],
  HDhorociclo1[{a,b},{p,q}][[2]]}],
  DisplayFunction->Identity];

GrHDhorociclo2[{a_,b_},{c_,d_}]:=
  Show[Graphics[{Circle[{0,0},1],
  Circle[HDhorociclo2[{a,b},{c,d}][[1,1]],
  HDhorociclo2[{a,b},{c,d}][[1,2]]],
  Circle[HDhorociclo2[{a,b},{c,d}][[2,1]],
  HDhorociclo2[{a,b},{c,d}][[2,2]]}],
  DisplayFunction->Identity];

GrHDmediatriz[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=
  Module[{a,b,c,d,g},{a,b}=InCayley[{ad,bd}];
  {c,d}=InCayley[{cd,dd}];
  Which[b==d,
    g=ParametricPlot[Evaluate[Cayley[{(a+c)/2,t}],
      {t,0.00000001,300}],DisplayFunction->Identity],
  a==c,
    g=ParametricPlot[Evaluate[Cayley[{Sqrt[(b d)] Cos[t]+a,
      Sqrt[(b d)] Sin[t]}],{t,0,Pi},
      DisplayFunction->Identity],True,
  g=ParametricPlot[Evaluate[
    Cayley[{Sqrt[(b d (a^2+b^2-2 a c+c^2-2 b d+d^2))/(-b+
      d)^2] Cos[t]- (b c-a d)/(-b+d),
      Sqrt[(b d (a^2+b^2-2 a c+c^2-2 b d+d^2))/(-b+
      d)^2] Sin[t}]],
      {t,0,Pi}],DisplayFunction->Identity]];
  Show[g,AspectRatio->Automatic]

GrHDperp[{a_,b_},{c_,d_}]:=Module[{k,r},{k,r}=Hperp[InCayley[{a,b}],
  InCayley[{c,d}]];
  Show[GrHDrecta[{a,b},Cayley[{k+r,0}],DisplayFunction->Identity]];

(*GrHDrecta[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=Module[{a,b,c,d,r,p},
  If[{cd,dd}!={1.,0.},{a,b}=InCayley[{ad,bd}];{c,d}=InCayley[{cd,dd}],
  {a,b}=InCayley[{ad,bd}];{c,d}={0.9999999999,0.}];
  If[a!=c,r=Sqrt[b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2 (-a+c)))^2];
  p=ParametricPlot[Evaluate[Cayley[{r Cos[t]-
    (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2 (-a+c)),r Sin[t]}],{t,0,pi},
    DisplayFunction->Identity],
  p=ParametricPlot[Evaluate[Cayley[{a,t}],
    {t,0.0000000001,300}],DisplayFunction->Identity]];p*)

(*GrHDrecta[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=

```



```

Module[{a,b,c,d,p1,p2,p3,p4,al,be,cen,r,rdis,cendis,dif,e,f,g,alme,pme},
p1={ad,bd};p2={cd,dd};
If[p2=={1.,0.},p1={cd,dd};p2={ad,bd}];
If[p1=={1.,0.},{c,d}=InCayley[p2];{a,b}={c,d+1},{a,b}=InCayley[p1];
{c,d}=InCayley[p2]];
p3={0.,0.};
If[(p2[[1]]-p1[[1]]) (p3[[2]]-p1[[2]])==
(p2[[2]]-p1[[2]]) (p3[[1]]-p1[[1]]),
p4=Solve[{(x-p1[[1]]) (p2[[2]]-p1[[2]]) ==
(y-p1[[2]]) (p2[[1]]-p1[[1]]), x^2+y^2==1},{x,y}];
p1={x,y}/.p4[[1]];p2={x,y}/.p4[[2]];
p=Line[{p1,p2}],
If[a!=c,
cen={-(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)),0};
r=Sqrt[(b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2)];
p3=Cayley[cen+{r,0.}];p4=Cayley[cen-{r,0.}],
p3=Cayley[{a,b+1}];p4=Cayley[{a,b+2}];
];If[p3==p1 || p3==p2,pas=p3;p3=p4;p4=pas];
{e,f,g}=LinearSolve[{p1[[1]],p1[[2]],1.},
{p2[[1]],p2[[2]],1.},{p3[[1]],p3[[2]],1.}],
{-p1[[1]]^2-p1[[2]]^2,-p2[[1]]^2-p2[[2]]^2,
-p3[[1]]^2-p3[[2]]^2};
cendis={-e/2,-f/2};rdis=Sqrt[(e/2)^2+(f/2)^2-g];
dif=p3-cendis;
al=ArcTan[dif[[2]]/dif[[1]]];
If[dif[[1]]<0,al=al+Pi];
dif=p4-cendis;
be=ArcTan[dif[[2]]/dif[[1]]];
If[dif[[1]]<0,be=be+Pi];
If[al>be,al=al-2Pi];
alme=(al+be)/2;pme=rdis {Cos[alme],Sin[alme]}+cendis;
If[Sqrt[pme.pme]>1,pas=al;al=be;be=pas];
If[al>be,al=al-2Pi];
p=Circle[cendis,rdis,{al,be}];
];Show[Graphics[p],DisplayFunction->Identity]]*)

GrHDrecta[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=Module[{a,b,c,d,r},
If[ad==1. && bd==0.,{c,d}=InCayley[{cd,dd}];{a,b}={c,d+1},
If[cd==1. && dd==0.,{a,b}=InCayley[{ad,bd}];{c,d}={a,b+1},
{c,d}=InCayley[{cd,dd}];{a,b}=InCayley[{ad,bd}]]];
If[a!=c,r=Sqrt[b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2];
r=ParametricPlot[Evaluate[Cayley[{r Cos[t]-
(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)),r Sin[t]}]],{t,0,pi},
DisplayFunction->Identity],
r=ParametricPlot[Evaluate[Cayley[{a,t}]],
{t,0.000000001,300},DisplayFunction->Identity];r]

GrHDsegmento[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=Module[{a,b,c,alpha,
bet,d,r,rr,pas},{a,b}=InCayley[{ad,bd}];
{c,d}=InCayley[{cd,dd}];
If[a!=c,r=Sqrt[(b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2)];

```

```

alpha=ArcTan[b/(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))]];
bet=ArcTan[d/(c+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))]];
If[alpha<0,alpha=alpha+Pi];If[bet<0,bet=bet+Pi];
If[alpha>bet,pas=alpha;alpha=bet;bet=pas];
rr=ParametricPlot[Evaluate[Cayley[{r Cos[t]-
(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)),r Sin[t]}]],{t,alpha,bet},
DisplayFunction->Identity,PlotPoints->30],
rr=ParametricPlot[Evaluate[Cayley[{a,t}]],
{t,d,b},DisplayFunction->Identity,
PlotPoints->30]];rr]

GrHDtraslacion[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=
Module[{hm1,hm2,m,a,b,c,d},
{a,b}=InCayley[{ad,bd}];{c,d}=InCayley[{cd,dd}];
If[a!=c&&b!=d,m={(b c+a d)/(b+d),
Sqrt[1/(b+d)^2(b d (a^2+b^2-2 a c+c^2+2 b d+d^2))]}];
If[b==d,m={(a+c)/2,1/2 Sqrt[a^2+2 b^2-2 a c+c^2+2 d^2.]}];
If[a==c,m={a,Sqrt[b d]}];
Show[{GrHDmediatriz[Cayley[{a,b}],Cayley[m]],
GrHDmediatriz[Cayley[m],Cayley[{c,d}]]},
DisplayFunction->Identity]]

GrHiper ciclo[a_,b_,{c_,d_}]:=
Module[{pp,e,r,al,be,g},pp=Hiper ciclo[a,b,{c,d}];
If[b!=Infinity,e=pp[[2]];r=pp[[3]];al=pp[[4]];be=pp[[5]];
g=Circle[e,r,{al,be}],
If[c!=a,g=Line[{a,0.},{2c,d(2c-a)/(c-a)}]],
g=Line[{a,0.},{a,2d}]]];
Show[Graphics[g],DisplayFunction->Identity]]

GrHmediatriz[{a_,b_},{c_,d_}]:=Module[{g},
Which[b==d,g=Line[{(a+c)/2,0},{(a+c)/2,7}],
a==c,g=Circle[{a,0},Sqrt[(b d)},{0,Pi}],True,
g=Circle[{- (b c-a d)/(-b+d),0},
Sqrt[((b d (a^2+b^2-2 a c+c^2-2 b d+d^2))/(-b+d)^2)},{0,Pi}]];
Show[Graphics[g],AspectRatio->Automatic,
DisplayFunction->Identity]]

GrHorociclo1[{a_,b_},p_]:=If[p!=Infinity,Show[Graphics[
Circle[{p,Horociclo1[{a,b},p][[2]}],
Horociclo1[{a,b},p][[2]]]],DisplayFunction->Identity],
Show[Graphics[Line[{a-3,b},{a+3,b}]]],
DisplayFunction->Identity]];

GrHorociclo2[{a_,b_},{c_,d_}]:=
Show[Graphics[{Circle[
Table[Horociclo2[{a,b},{c,d}][[1,i]},{i,1,2}],
Horociclo2[{a,b},{c,d}][[1,2]]],
If[b==d,Line[{a-1,b},{c+1,d}]],
Circle[Table[
Horociclo2[{a,b},{c,d}][[2,i]},{i,1,2}],
Horociclo2[{a,b},{c,d}][[2,2]]]]]]];

```

```

DisplayFunction->Identity];

GrHperp[{a_,b_},{c_,d_]:=Module[{k,r},{k,r}=Hperp[{a,b},{c,d}];
Show[GrHrecta[{a,b},{k+r,0}],DisplayFunction->Identity]];

GrHrecta[{a_,b_},{c_,d_]:=Module[{g},
If[a!=c,g=Circle[{-(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)),0},
Sqrt[(b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2)],{0,Pi}],
g=Line[{a,0},{a,Max[{b,d}]+3}]];Show[Graphics[g],
AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity]]

GrHtraslacion[{a_,b_},{c_,d_]:=Module[{hm1,hm2,m},
If[a!=c&&b!=d,m={(b+c+a*d)/(b+d),
Sqrt[1/(b+d)^2(b*d(a^2+b^2-2*a*c+c^2+2*b*d+d^2))]}];
If[b=d,m={(a+c)/2,1/2*Sqrt[a^2+2*b^2-2*a*c+c^2+2*d^2.]}];
If[a=c,m={a,Sqrt[b*d]}];Show[GrHmediatriz[{a,b},m],
GrHmediatriz[m,{c,d}],
AspectRatio->Automatic,PlotRange->All,DisplayFunction->Identity]]

GrHsegmento[{a_,b_},{c_,d_]:=Module[{alpha,
bet,r,rr,pas},
If[a!=c,r=Sqrt[(b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2)];
alpha=ArcTan[b/(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c))];
bet=ArcTan[d/(c+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c))];
If[alpha<0,alpha=alpha+Pi];If[bet<0,bet=bet+Pi];
If[alpha>bet,pas=alpha;alpha=bet;bet=pas];
rr=ParametricPlot[Evaluate[{r Cos[t]-
(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)),r Sin[t]}],{t,alpha,bet},
DisplayFunction->Identity,PlotPoints->30],
rr=ParametricPlot[Evaluate[{a,t},
{t,d,b}],DisplayFunction->Identity,
PlotPoints->30]];rr]

Hcirc[{a_,b_},dis_]:=Module[{p,r,cen,pb,pc},
pb=Htrasrec[{a,b},{a+1,b},dis];
pc=Htrasrec[{a,b},{a,b+1},dis];
cen={a,(pb[[2]]^2-pc[[2]]^2+(a-
pb[[1]]^2)/(2(pb[[2]]-pc[[2]]))};
r=pc[[2]]-cen[[2]];
p={"x"-cen[[1]]^2+("y"-cen[[2]]^2==r^2;
{cen,r,p}}]

HDcirc[{a_,b_},dis_]:=
Module[{p,r,cen,pc,a1,pa,pap,d1,pbd,pcd},
{a1,b1}=InCayley[{a,b}];
pbp=Htrasrec[{a1,b1},{a1+1,b1},dis];
pcp=Htrasrec[{a1,b1},{a1,b1+1},dis];
pap=Htrasrec[{a1,b1},{a1,b1+1},-dis];
pc=Cayley[pcp];pb=Cayley[pbp];pa=Cayley[pap];
cen={x,y}/.Solve[{(y-1/2(pb[[2]]+
pc[[2]))(pc[[2]]-pb[[2]))==-(pc[[1]]-

```

```

pb[[1]]) (x-1/2 (pb[[1]]+pc[[1]])),
(y-1/2 (pa[[2]]+pc[[2]])) (pc[[2]]-
pa[[2]])==-(pc[[1]]-pa[[1]]) (x-1/2 (pa[[1]]+
pc[[1]]))}][[1]];
r=Sqrt[(pb[[1]]-cen[[1]])^2+(pb[[2]]-cen[[2]])^2];
p={"x"-cen[[1]]^2+"y"-cen[[2]]^2==r^2;{cen,r,p}}

HDdist[{a_,b_},{c_,d_]:=Hdist[InCayley[{a,b}],InCayley[{c,d}]]

HDgiro[{a_,b_},alpha_,{c_,d_}]:=
Module[{p,a1,b1,c1,d1,r,pgp,pg},
{a1,b1}=InCayley[{a,b}];
{c1,d1}=InCayley[{c,d}];
pgp=Hgiro[{a1,b1},alpha,{c1,d1}];
pg=Cayley[pgp];r=Sqrt[(c-a)^2+(d-b)^2];p=pg;p]

HDhiperciclo[{a_,b_},{c_,d_},{e_,f_}]:=
Module[{cen,r,al,be,p,q,sal,pas,alme,pme},
If[(c-a)(f-b)!(e-a)(d-b),cen={x,y}/.Solve[{(y-1/2 (d+f)) (f-d)==
-(e-c) (x-1/2 (c+e)),
(y-1/2 (b+f)) (f-b)==-(e-a) (x-1/2 (a+e))}][[1]];
r=Sqrt[(c-cen[[1]])^2+(d-cen[[2]])^2];
If[a==0,If[b>0,al=Pi/2//N,al=-Pi/2//N],al=ArcTan[b/a]];
If[a<0 ,al=al+Pi//N];
If[a>0 && b<0,al=al+2Pi//N];
If[c==0,If[d>0,be=Pi/2//N,be=-Pi/2//N], be=ArcTan[d/c]];
If[c<0 ,be=be+Pi//N];
If[c>0 && d<0,be=be+2Pi//N];If[al<be,p={a,b};q={c,d},
p={c,d};q={a,b}];
If[(q[[1]]-cen[[1]])==0,If[(q[[2]]-cen[[2]])>0,al=Pi/2//N,
al=-Pi/2//N],
al=ArcTan[(q[[2]]-cen[[2]])/(q[[1]]-cen[[1]])];
If[(q[[1]]-cen[[1]])<0 ,al=al+Pi//N];
If[(q[[1]]-cen[[1]])>0 && (q[[2]]-cen[[2]])<0,al=al+2Pi//N];
If[(p[[1]]-cen[[1]])==0,If[(p[[2]]-cen[[2]])>0,al=Pi/2//N,
al=-Pi/2//N],
be=ArcTan[(p[[2]]-cen[[2]])/(p[[1]]-cen[[1]])];
If[(p[[1]]-cen[[1]])<0 ,be=be+Pi//N];
If[(p[[1]]-cen[[1]])>0 && (p[[2]]-cen[[2]])<0,be=be+2Pi//N];
If[al>be,al=al-2Pi];
alme=(al+be)/2;pme={r Cos[alme],r Sin[alme]}+cen;
If[Sqrt[pme.pme]>1,pas=al,al=be;be=pas];If[al>be,al=al-2Pi];
sal={cen,r,al,be},sal={c,d,0.,0.,0.}]]

HDhorociclo1[{a_,b_},{p_,q_}]:=
Module[{pp,qq,rr,r,x,y,cen,rd,ec},
If[{p,q}!={1.,0.},pp=InCayley[{p,q}][[1]];qq=InCayley[{a,b}];
r=Horociclo1[qq,pp][[2]];rr=Cayley[{pp+r,r}],
rr=Cayley[InCayley[{a,b}]+{1.,0.}]];
cen={x,y}/.Solve[{(y-1/2 (q+rr[[2]])) (rr[[2]]-q)==

```

```

      -(rr[[1]]-p) (x-1/2 (p+rr[[1]])),
      (y-1/2 (b+rr[[2]])) (rr[[2]]-b)==
      -(rr[[1]]-a) (x-1/2 (a+rr[[1]]))}][[1]];
rd=Sqrt[(p-cen[[1]])^2+(q-cen[[2]])^2];
ec=("x"-cen[[1]])^2+("y"-cen[[2]])^2==rd^2;{cen,rd,ec}]

HDhorociclo2[{a_,b_},{c_,d_}]:=
Module[{pp,qq,hor,aa,bb,cen1,rd1,cen2,rd2},pp=InCayley[{a,b}];
qq=InCayley[{c,d}];hor=Horociclo2[pp,qq];If[hor[[2,2]]==0,
aa=Cayley[{hor[[1,1]],hor[[1,2]]}+{hor[[1,2]],0.}];
bb=Cayley[pp+{1.,0.}],
aa=Cayley[{hor[[1,1]]+hor[[1,2]],hor[[1,2]]}];
bb=Cayley[{hor[[2,1]]+hor[[2,2]],hor[[2,2]]}];
cen1={x,y}/.Solve[{(y-1/2 (d+aa[[2]])) (aa[[2]]-d)==
-(aa[[1]]-c) (x-1/2 (c+aa[[1]])),
(y-1/2 (b+aa[[2]])) (aa[[2]]-b)==
-(aa[[1]]-a) (x-1/2 (a+aa[[1]]))}][[1]];
rd1=Sqrt[(c-cen1[[1]])^2+(d-cen1[[2]])^2];
ec1=("x"-cen1[[1]])^2+("y"-cen1[[2]])^2==rd1^2;
cen2={x,y}/.Solve[{(y-1/2 (d+bb[[2]])) (bb[[2]]-d)==
-(bb[[1]]-c) (x-1/2 (c+bb[[1]])),
(y-1/2 (b+bb[[2]])) (bb[[2]]-b)==
-(bb[[1]]-a) (x-1/2 (a+bb[[1]]))}][[1]];
rd2=Sqrt[(c-cen2[[1]])^2+(d-cen2[[2]])^2];
ec2=("x"-cen2[[1]])^2+("y"-cen2[[2]])^2==rd2^2;
{{cen1,rd1,ec1},{cen2,rd2,ec2}}]

Hdist[{a_,b_},{c_,d_}]:=Module[{k,al,be,dis},
If[a==c,dis=Log[d/b],k=- (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2 (-a+c));
r=Sqrt[(c-k)^2+d^2];be=ArcCos[(c-k)/r];
al=ArcCos[(a-k)/r];dis=Log[Tan[be/2]/Tan[al/2]];dis]

HDmediatriz[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=
Module[{a,b,c,d,p,r},{a,b}=InCayley[{ad,bd}];
{c,d}=InCayley[{cd,dd}];
Which[b==d,p=HDrecta[Cayley[{(a+c)/2,1}],
Cayley[{(a+c)/2,2}]],a==c,
p=HDrecta[Cayley[{a-Sqrt[(b d)],0}],
Cayley[{a+Sqrt[(b d)],0}]],True,
r=Sqrt[((b d (a^2+b^2-2 a c+c^2-2 b d+d^2))/(-b+d)^2)];
p=HDrecta[Cayley[{- (b c-a d)/(-b+d)-r,0}],
Cayley[{- (b c-a d)/(-b+d)+r,0}]]];p]

HDperp[{a_,b_},{c_,d_}]:=
Module[{p,q,k1,r1,p1,q1},p=InCayley[{a,b}];
q=InCayley[{c,d}];{k1,r1}=Hperp[p,q];p1=Cayley[{k1-r1,0.}];
q1=Cayley[{k1+r1,0.}];{p1,q1}]

HDperpComun[{a_,b_},{c_,d_},{e_,f_},{g_,h_}]:=
Module[{p1,q1,p2,q2,k,r,p,q},p1=InCayley[{a,b}];q1=InCayley[{c,d}];
p2=InCayley[{e,f}];q2=InCayley[{g,h}];
{k,r }=HperpComun[p1,q1,p2,q2];

```

```

p=Cayley[{k-r,0.}];q=Cayley[{k+r,0.}];{p,q}

HDrecta[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=
Module[{a,b,c,d,p1,p2,p3,p4,p,r,e,f,g,pas},p1={ad,bd};p2={cd,dd};
If[{cd,dd}=={1.,0.},p1={cd,dd};p2={ad,bd}];
{c,d}=InCayley[p2];
If[p1!={1.,0.},{a,b}=InCayley[p1},{a,b}={c,d+1.}];
If[a!=c,
r=Sqrt[(b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2)];
p3=Cayley[{- (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c))+r,0}];

If[((a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2+1==r^2,p4={0.,0.};

If[r==0,p=Print["x==",0],
p=("y"(p3[[1]]-p4[[1]])==(p3[[2]]-p4[[2]]) ("x"-p4[[1]])+
p4[[2]] (p3[[1]]-p4[[1]]))),

p4=Cayley[{- (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)),r}];
{e,f,g}=
LinearSolve[{{p1[[1]],p1[[2]],1},{p2[[1]],p2[[2]],
1},{p4[[1]],p4[[2]],1}},{-p1[[1]]^2-
p1[[2]]^2,-p2[[1]]^2-p2[[2]]^2,-p4[[1]]^2-
p4[[2]]^2}];
p=Chop[("x"+e/2)^2+("y"+f/2)^2== -g+(e/2)^2+(f/2)^2]],

If[a!=0.,
p3={1.,0.};{e,f,g}=
LinearSolve[{{p1[[1]],p1[[2]],1},{p2[[1]],
p2[[2]],1},{p3[[1]],p3[[2]],1}},{
-p1[[1]]^2-p1[[2]]^2,-p2[[1]]^2-
p2[[2]]^2,-p3[[1]]^2-p3[[2]]^2}];
p=Chop[("x"+e/2)^2+("y"+f/2)^2== -g+(e/2)^2+(f/2)^2],
p=Print["y==",0]]

];Chop[p]]

HDreflexion[{e_,f_},{a_,b_},{c_,d_}]:=
Cayley[Hreflexion[InCayley[{e,f}],InCayley[{a,b}],
InCayley[{c,d}]]];

HDtraslacion[{ad_,bd_},{cd_,dd_}]:=
Module[{hm1,hm2,m,a,b,c,d},{a,b}=InCayley[{ad,bd}];
{c,d}=InCayley[{cd,dd}];
If[a!=c&&b!=d,m={ (b c+a d)/(b+d),
Sqrt[1/(b+d)^2(b d (a^2+b^2-2 a c+c^2+2 b d+d^2))]};
If[b==d,m={ (a+c)/2,1/2 Sqrt[a^2+2 b^2-2 a c+c^2+2 d^2.]};
If[a==c,m={a,Sqrt[b d]};
hm1=HDmediatriz[Cayley[{a,b}],Cayley[m]];
hm2=HDmediatriz[Cayley[m],Cayley[{c,d}]];
{Print["rectas de h-reflexion en el disco:"];Print[hm1];
Print[hm2]};]

```

```

HDtrasrec[{a_,b_},{c_,d_},dis_]:=
  Cayley[Htrasrec[InCayley[{a,b}],InCayley[{c,d}],dis]]

Hgiro[{a_,b_},al_,{c_,d_}]:=
  Module[{k,r,t,t1,k1,r1,p1,t2,k2,r2,p2},
    If[a!=c,
      k=- (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c));r=Sqrt[(c-k)^2+d^2];
      t=ArcTan[(k-a)/b],t=N[Pi/2];
      If[t<0,t=t+N[Pi]];
      t1=t+al/4.;
      If[t1>N[Pi],t1=t1-N[Pi]];
      If[N[t1]!=N[Pi/2],k1=b Tan[t1]+a;r1=Sqrt[(a-k1)^2+b^2],
        k1=a;r1=0.];
      t2=t1+al/2.;
      If[t2>N[Pi],t2=t2-N[Pi]];
      If[N[t2]!=N[Pi/2],k2=b Tan[t2]+a;r2=Sqrt[(a-k2)^2+b^2],
        k2=a;r2=0.];
      If[r1!=0,p1=Hreflexion[{c,d},{a,b},{k1-r1,0.}],
        p1=Hreflexion[{c,d},{a,b},{a,0.}]];
      If[r2!=0,p2=Hreflexion[p1,{a,b},{k2-r2,0.}],
        p2=Hreflexion[p1,{a,b},{a,0.}]];
      p2]

Hiperciclo[a_,b_,{c_,d_}]:=
  Module[{al,be,ga,e,r,ech,pas},If[b!=Infinity,
    If[((a-c)(d-c)+d^2)/(2d)>0,
      e={(a+b)/2,((a-c)(b-c)+d^2)/(2d)};
      r=Sqrt[((a-c)^2+d^2)((b-c)^2+d^2)]/(2d);
      ga=ArcTan[(d(b-a))/((a-c)(b-c)+d^2)];
      al=ga-Pi/2;be=3Pi/2-ga,
      e={(a+b)/2,((a-c)(b-c)+d^2)/(2d)};
      r=Sqrt[((a-c)^2+d^2)((b-c)^2+d^2)]/(2d);
      al=ArcTan[-((a-c)(b-c)+d^2)/(d(b-a))];
      be=Pi-al];
    ech= (("x"-e[[1]])^2+("y"-e[[2]])^2==r^2),
    If[c!=a,ech=(0.+ "y"==d/(c-a) ("x"-a)),ech=(0.+ "x"==a)];e=0.;r=0.;
    al=be=0];{ech,e,r,al,be}]

Hmediatriz[{a_,b_},{c_,d_}]:=Module[{p},
  Which[b==d,p=Print["x==", (a+c)/2],a==c,p= ("x"-a)^2+"y"^2==b d,
  True,
  p= ("x"+(b c-a d)/(-b+d))^2+
  "y"^2==(b d (a^2+b^2-2 a c+c^2-2 b d+d^2))/(-b+d)^2];
  p]

Horociclo1[{a_,b_},p_]:=Module[{e,ecp},
  If[p!=Infinity,e=(a^2+b^2+p^2-2a p)/(2 b),e=0];
  If[e!=0,ecp={p,e, ("x"-p)^2+("y"-e)^2==e^2}];If[e!=0,ecp,Print["y==",b]]]

Horociclo2[{a_,b_},{c_,d_}]:=Module[{p,sol,ch1,ch2,pp},
  sol=Solve[{(c-a)x+(d-b)y-(c^2-a^2)/2-(d^2-b^2)/2==0,

```

```

x^2-2a x+a^2-2b y+b^2==0},{x,y}];
If[Dimensions[sol][[1]]==2,ch1={x,y}/.sol[[1]];ch2={x,y}/.sol[[2]];
pp={Horociclo1[{a,b},ch1[[1]],Horociclo1[{a,b},ch2[[1]]]},
ch1={x,y}/.sol[[1]];
pp={Horociclo1[{a,b},ch1[[1]]},{0.,0.,"y"+0.==b}}];pp]

Hperp[{a_,b_},{c_,d_]:=Module[{k,r,k1,r1,t,t1},
If[a!=c,k=- (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2 (-a+c));r=Sqrt[(c-k)^2+d^2];
t=ArcTan[(k-a)/b],t=Pi/2];If[t<0,t=t+Pi];
t1=t+Pi/2;
If[N[t1]!=N[Pi/2],k1=b Tan[t1]+a;
r1=Sqrt[(a-k1)^2+b^2],k1=a;r1=0];{k1,r1}]

HperpComun[{a_,b_},{c_,d_},{e_,f_},{g_,h_}]:=
Module[{k,r,k1,k2,r1,r2},k1=- (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c));
r1=Sqrt [(a-k1)^2+b^2];k2=- (e^2+f^2-g^2-h^2)/(2(-e+g));
r2=Sqrt [(e-k2)^2+f^2];
k=(k2^2-r2^2-k1^2+r1^2)/(2k2-2k1);r=Sqrt [(k-k1)^2-r1^2];{k,r}]

Hrecta[{a_,b_},{c_,d_]:=Module[{p},If[a!=c,
p=Chop[("x"+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2+"y"^2==
b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2(-a+c)))^2],p=Print["x==",a]];p]

Hreflexion[{e_,f_},{a_,b_},{c_,d_}]:=
Module[{p,xx,yy,cen,rr},If[a!=c,
cen=- (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2 (-a+c));
rr=b^2+(a+(a^2+b^2-c^2-d^2)/(2 (-a+c)))^2;
xx=Sqrt[((e-cen)^2+f^2)];yy=rr/xx;p=1/xx(yy {e-cen,f})+
{cen,0},p={2 a-e,f}];p]

Htraslacion[{a_,b_},{c_,d_}]:=
Module[{hm1,hm2,m},If[a!=c&&b!=d,m={ (b c+a d)/(b+d),
Sqrt[1/(b+d)^2(b d (a^2+b^2-2 a c+c^2+2 b d+d^2))]};
If[b==d,m={ (a+c)/2,1/2 Sqrt[a^2+2 b^2-2 a c+c^2+2 d^2.]};
If[a==c,m={a,Sqrt[b d]}];hm1=Hmediatriz[{a,b},m];
hm2=Hmediatriz[m,{c,d}];
{Print["rectas de h-reflexión:"];Print[hm1];Print[hm2]};
]

Htrasrec[{a_,b_},{c_,d_},dis_]:=
Module[{al,be,p,r,k},If[a==c,p={a,b E^dis},
k=- (a^2+b^2-c^2-d^2)/(2 (-a+c));r=Sqrt[(c-k)^2+d^2];
al=ArcCos[(a-k)/r];be=2 ArcTan[E^dis Tan[al/2]];
p={r Cos[be]+k,r Sin[be]};p]

InCayley[{a_,b_}]:={-2b/((a-1)^2+b^2),(1-a^2-b^2)/((a-1)^2+b^2)}

End[]

EndPackage[ ]

```




Apéndice B

Manual de uso del package Hyperbol

MANUAL DE USO DEL PACKAGE HYPERBOL

A continuación, y en el orden en el que aparecen a lo largo de esta memoria, damos ejemplos de uso de las distintas órdenes del package así como las descripciones que aparecen cuando se pregunta por cada una de ellas.

```
<< Geometry`Hyperbol`
```

```
? Angulo
```

```
Angulo[{v1,v2},{w1,w2}] da el ángulo medido desde {v1,v2} hasta  
{w1,w2} medido en el sentido contrario a las agujas del reloj
```

```
Angulo[{1., 0.}, {0., 1.}]
```

```
1.5708
```

```
? Cayley
```

```
Cayley[{x,y}] da las coordenadas del transformado  
por la aplicación de Cayley del punto {x,y} de H2 en D2
```

```
Cayley[{0., 1.}]
```

```
{0., 0.}
```

```
? InCayley
```

```
InCayley[{a,b}] da las coordenadas del transformado  
por la aplicación de Cayley del punto {a,b} de D2 en H2
```

```
InCayley[{0., 0.}]
```

```
{0., 1.}
```

```
? Hdist
```

```
Hdist[{a,b},{c,d}] da la distancia entre los puntos {a,b} y {c,d} de H2. El  
signo de esta distancia indica el el sentido para llevar {a,b} sobre {c,d}
```

```
Hdist[{2., 1.}, {3., 4.}]
```

```
-1.45057
```

```
? HDdist
```

```
HDdist[{a,b},{c,d}] da la distancia entre los puntos {a,b} y {c,d} en D2. El  
signo de esta distancia indica el el sentido para llevar {a,b} sobre {c,d}
```

```
HDdist[{0.1, 0.4}, {-0.2, 0.3}]
```

-0.728083

?Hrecta

Hrecta[{a,b},{c,d}] da la ecuación de la recta de H2 que une los puntos {a,b} y {c,d}

Hrecta[{1., 1.}, {1.1, 2.1}]

$$(-18.1 + x)^2 + y^2 == 293.41$$

?GrHrecta

GrHrecta[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la recta en H2 que une los puntos {a,b} y {c,d}. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHrecta[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 1.}]},
{PointSize[0.03], Point[{1., 2.}]}}], GrHrecta[{1., 1.}, {1., 2.}],
DisplayFunction -> \$DisplayFunction, AspectRatio -> 1];



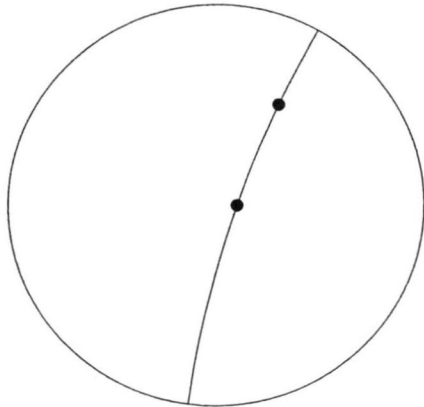
?HDrecta

HDrecta[{a,b},{c,d}] da la ecuación de la recta de D2 que une los puntos {a,b} y {c,d}

HDrecta[{1., 0.}, {0., 0.8}]

$$(-0.5 + x)^2 + (-0.4 + y)^2 == 0.41$$

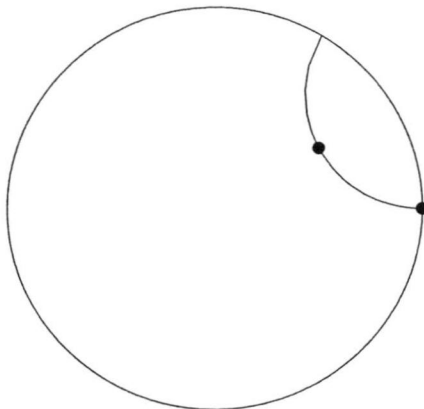
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.1, 0.}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0.3, 0.5]}}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
  GrHDirecta[{0.1, 0.}, {0.3, 0.5}], PlotRange -> All,
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```



? GrHDirecta

GrHDirecta[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la recta en D2 que une los puntos {a,b} y {c,d}. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHDirecta[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.5, 0.3]}},
  {PointSize[0.03], Point[{1., 0.}]}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
  GrHDirecta[{1., 0.}, {0.5, 0.3}], PlotRange -> All,
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```



```
v = {1., 0.}
```

```
v == {1., 0.}
```

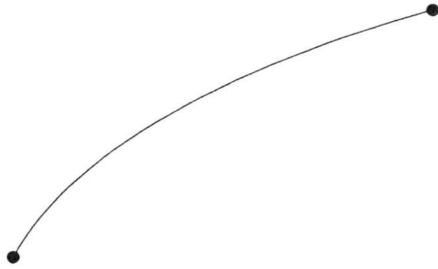
```
{1., 0.}
```

```
True
```

```
? GrHsegmento
```

GrHsegmento[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico el segmento en H2 que une los puntos {a,b} y {c,d}. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHsegmento[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

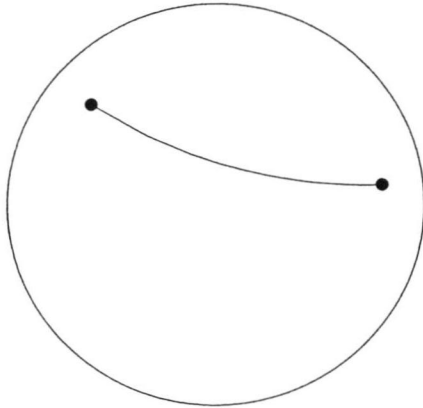
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 1.}]},  
  {PointSize[0.03], Point[{3., 4.}]}}],  
  GrHsegmento[{1., 1.}, {3., 4.}], DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```



```
? GrHDsegmento
```

GrHDsegmento[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico el segmento en D2 que une los puntos {a,b} y {c,d}. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHDsegmento[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{-0.6, 0.5}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0.8, 0.1}]}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
  GrHDsegmento[{-0.6, 0.5}, {0.8, 0.1}], DisplayFunction->
  $DisplayFunction, PlotRange->All, AspectRatio->Automatic];
```



?Hmediatriz

Hmediatriz[{a,b},{c,d}] da la ecuación de la
mediatriz del segmento que une los puntos {a,b} y {c,d} de H2

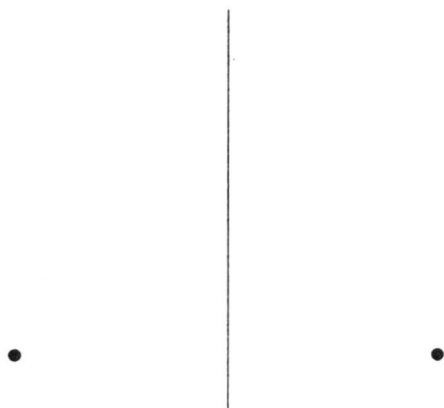
```
Hmediatriz[{1., 1.}, {2., 2.}]
```

$(0. + x)^2 + y^2 == 4.$

?GrHmediatriz

GrHmediatriz[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico
la mediatriz del segmento que une los puntos {a,b} y {c,d}
de H2. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[
GrHmediatriz[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]


```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 1.]}},
  {PointSize[0.03], Point[{2., 1.]}]}],
  GrHmediatriz[{1., 1.}, {2., 1.}], DisplayFunction->$DisplayFunction,
  PlotRange->All, AspectRatio->1];
```



? HDmediatriz

Hmediatriz[{a,b},{c,d}] da la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos {a,b} y {c,d} de D2

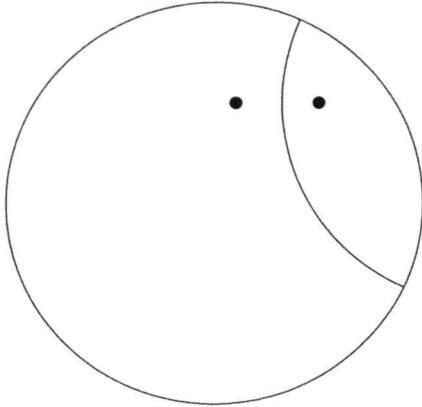
HDmediatriz[{0.1, 0.1}, {0.2, 0.2}]

$$(-1.73333 + x)^2 + (-1.73333 + y)^2 == 5.00889$$

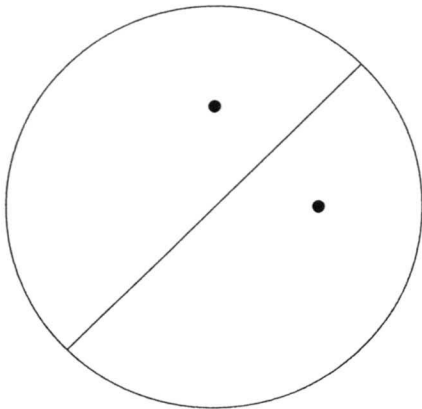
? GrHDmediatriz

GrHDmediatriz[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la mediatriz del segmento que une los puntos {a,b} y {c,d} de D2. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHmediatriz[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.5, 0.5]}},
  {PointSize[0.03], Point[{0.1, 0.5]}}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
  GrHDmediatriz[{0.5, 0.5}, {0.1, 0.5}], DisplayFunction ->
  $DisplayFunction, PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic];
```



```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.5, 0.}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0., 0.5]}}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
  GrHDmediatriz[{0.5, 0.}, {0., 0.5}], DisplayFunction ->
  $DisplayFunction, PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic];
```



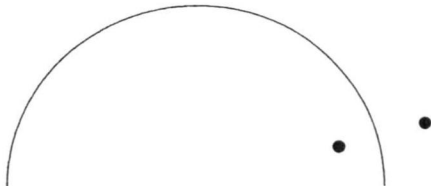
?Hreflexion

Hreflexion[{e,f},{a,b},{c,d}] da las coordenadas del punto reflejado de {e,f} respecto de la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} de H2

```
Hreflexion[{1., 1.}, {2., 1.}, {2., 2.}]
```

```
{3., 1.}
```

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 1.}]},
  {PointSize[0.03], Point[Hreflexion[{1., 1.}, {2., 1.}, {1., 3.}]}}],
  GrHrecta[{2., 1.}, {1., 3.}], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic];
```

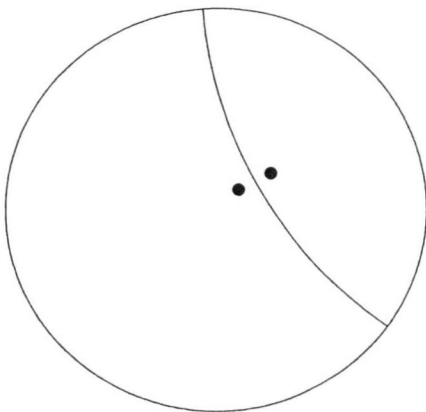


? HDreflexion

HDreflexion[{e,f},{a,b},{c,d}] da las coordenadas del punto reflejado de {e,f} respecto de la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} de D2

```
HDreflexion[{0.1, 0.1}, {0.2, 0.1}, {0.2, 0.2}]
{0.295837, 0.103997}
```

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.1, 0.1}]}, {PointSize[0.03],
  Point[HDreflexion[{0.1, 0.1}, {0.2, 0.1}, {0.1, 0.3}]}],
  Circle[{0., 0.}, 1.}], GrHDrecta[{0.2, 0.1}, {0.1, 0.3}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, PlotRange -> All,
  AspectRatio -> Automatic];
```

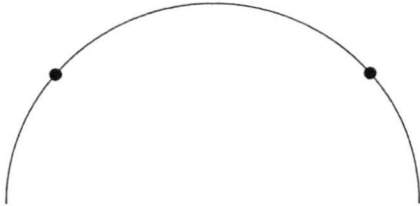


? Htrasrec

Htrasrec[{a,b},{c,d},dis] da las coordenadas del trasladado del punto {a,b} una distancia igual a dis sobre la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} en H2. El signo de dis indica el sentido de traslación sobre la recta

```
Htrasrec[{4., 2.}, {1., 3.}, 2.]
{-0.680974, 1.98319}
```

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{4., 2.]}},
  {PointSize[0.03], Point[Htrasrec[{4., 2.}, {1., 3.}, 2.]}}],
  GrHrecta[{4., 2.}, {1., 3.}], AspectRatio -> Automatic];
```



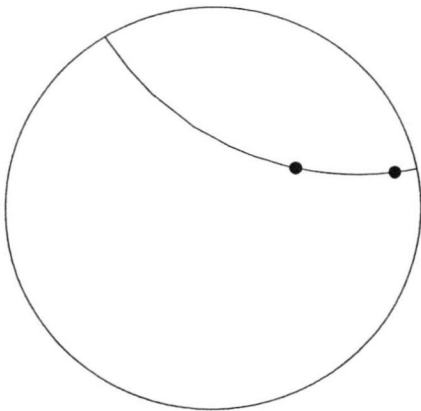
?HDtrasrec

HDtrasrec[{a,b},{c,d},dis] da las coordenadas del trasladado del punto {a,b} una distancia igual a dis sobre la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} en D2. El signo de dis indica el sentido de traslación sobre la recta

```
HDtrasrec[{0.4, 0.2}, {0.1, 0.3}, 2.]
```

```
{0.874147, 0.178848}
```

```
Show[
  Graphics[{{Circle[{0., 0.}, 1.], {PointSize[0.03], Point[{0.4, 0.2}]},
    {PointSize[0.03], Point[HDtrasrec[{0.4, 0.2}, {0.1, 0.3}, 2.]}}],
  GrHDrecta[{0.4, 0.2}, {0.1, 0.3}],
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



?Hcirc

Hcirc[{a,b},dis] da la lista formada por el centro euclídeo, radio euclídeo y ecuación de la circunferencia de centro {a,b} y radio dis en H2.

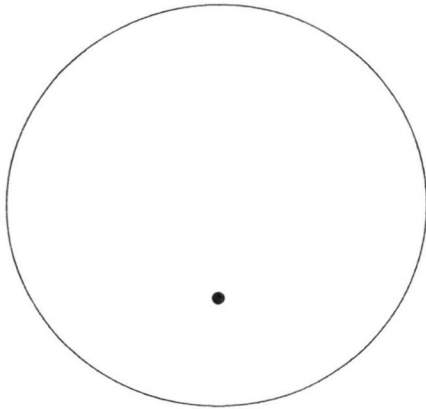
```
Hcirc[{1., 1.}, 1.]
```

```
{{1., 1.54308}, 1.1752, (-1. + x)^2 + (-1.54308 + y)^2 == 1.3811}
```

?GrHcirc

GrHcirc[{a,b},dis] genera como elemento gráficos la circunferencia de centro {a,b} y radio dis en H2. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHcirc[{a,b},dis],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 1.}]}}],  
GrHcirc[{1., 1.}, 1.], DisplayFunction->$DisplayFunction,  
PlotRange->All, AspectRatio->Automatic];
```



?HDcirc

HDcirc[{a,b},dis] da la lista formada por el centro euclídeo, radio euclídeo y ecuación de la circunferencia de centro {a,b} y radio dis en D2.

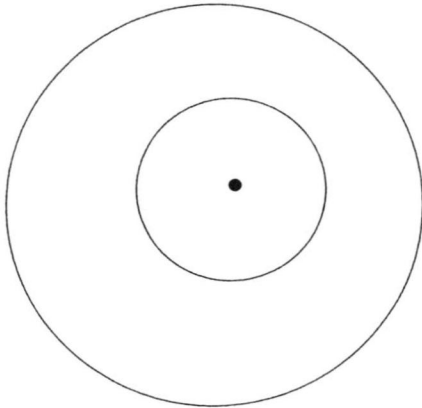
```
HDcirc[{0.1, 0.1}, 1.]
```

```
{{0.0789821, 0.0789821}, 0.454817,  
(-0.0789821 + x)2 + (-0.0789821 + y)2 == 0.206859}
```

?GrHDcirc

GrHDcirc[{a,b},dis] genera como elemento gráficos la circunferencia de centro {a,b} y radio dis en D2. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHDcirc[{a,b},dis],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[
  {{PointSize[0.03], Point[{0.1, 0.1]}}, Circle[{0., 0.}, 1.]}},
  GrHDCirc[{0.1, 0.1}, 1.], DisplayFunction->$DisplayFunction,
  PlotRange->All, AspectRatio->Automatic];
```



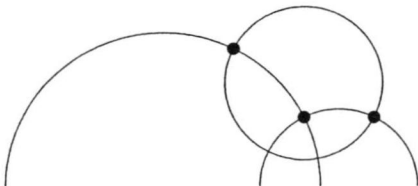
?Hgiro

Hgiro[{a,b},al,{c,d}] da las coordenadas del punto obtenido mediante un giro de centro {a,b} y ángulo al radianes del punto {c,d} de H2

```
Hgiro[{0., 1.}, Pi/2., {1., 1.}]
```

```
{-1., 2.}
```

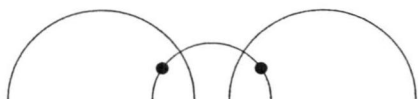
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0., 1.]}},
  {PointSize[0.03], Point[{1., 1.]}},
  {PointSize[0.03], Point[Hgiro[{0., 1.}, Pi/2., {1., 1.}]}}}],
  GrHcirc[{0., 1.}, Hdist[{1., 1.}, {0., 1.}]},
  GrHrecta[{0., 1.}, {1., 1.}],
  GrHrecta[{0., 1.}, Hgiro[{0., 1.}, Pi/2., {1., 1.}]},
  DisplayFunction->$DisplayFunction, AspectRatio->Automatic];
```



?HDgiro

HDgiro[{a,b},al,{c,d}] da las coordenadas del punto obtenido mediante un giro de centro {a,b} y ángulo al radianes del punto {c,d} de D2


```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 1.}]},
  {PointSize[0.03], Point[{4., 1.}]}}],
  GrHtraslacion[{1., 1.}, {4., 1.}], GrHrecta[{1., 1}, {4., 1.}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



? HDtraslacion

HDtraslacion[{a,b},{c,d}] da las ecuaciones de las rectas tales la composición de las reflexiones respecto de las mismas produce la traslación que transforma {a,b} en {c,d} en D2

```
HDtraslacion[{0.1, 0.1}, {0.4, 0.1}]
```

rectas de h-reflexion en el disco:

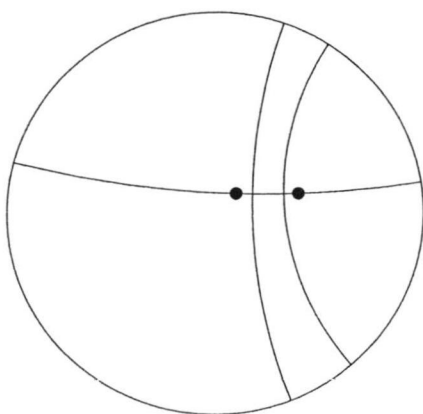
$$(-2.87434 + x)^2 + (-0.0580238 + y)^2 == 7.26518$$

$$(-1.65857 + x)^2 + (-0.120692 + y)^2 == 1.76543$$

? GrHDtraslacion

GrHDtraslacion[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico dos rectas tales que la composición de las reflexiones respecto de las mismas produce la traslación de {a,b} a {c,d} en D2. Para visualizarlas debe usarse la estructura Show[GrHDtraslacion[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.1, 0.1}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0.4, 0.1}]}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
  GrHDtraslacion[{0.1, 0.1}, {0.4, 0.1}],
  GrHDrecta[{0.1, 0.1}, {0.4, 0.1}], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



? Hperp

Hperp[{a,b},{c,d}] da la abscisa del centro y el radio de la recta perpendicular a la recta que une {a,b} y {c,d} pasando por el punto {a,b} en H2. Si el radio es 0 se entenderá la recta vertical que pasa por la abscisa del centro dada.

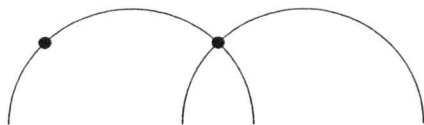
```
Hperp[{1., 1.}, {-1., 1.}]
```

```
{2., 1.41421}
```

? GrHperp

GrHperp[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la perpendicular a la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} pasando por el punto {a,b} en H2. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHperp[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 1.}]},  
  {PointSize[0.03], Point[{-1., 1.}]}}], GrHperp[{1., 1.}, {-1., 1.}],  
  GrHrecta[{1., 1.}, {-1., 1.}], DisplayFunction->$DisplayFunction,  
  AspectRatio->Automatic, PlotRange->All];
```



? HDperp

HDperp[{a,b},{c,d}] da dos puntos de la recta perpendicular a la recta que une {a,b} y {c,d} pasando por el punto {a,b} en D2.

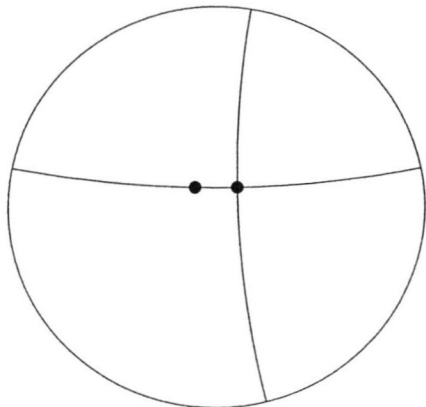
```
HDperp[{0.1, 0.1}, {-0.1, 0.1}]
```

```
{{0.164479, 0.986381}, {0.242707, -0.9701}}
```

? GrHDperp

GrHDperp[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico la perpendicular a la recta que une los puntos {a,b} y {c,d} pasando por el punto {a,b} en D2. Para visualizarla debe usarse la estructura Show[GrHDperp[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[
  Graphics[{Circle[{0., 0.}, 1.], {PointSize[0.03], Point[{0.1, 0.1]}},
    {PointSize[0.03], Point[{-0.1, 0.1}]}]},
  GrHDperp[{0.1, 0.1}, {-0.1, 0.1}], GrHDirecta[{0.1, 0.1}, {-0.1, 0.1}],
  DisplayFunction->$DisplayFunction,
  AspectRatio->Automatic, PlotRange->All];
```



?Horociclo1

Horociclo1[{a,b},p] da el radio y la ecuación euclídea del horociclo que pasa por el punto {a,b} y el punto de la recta del infinito de abscisa p en H2. Si p=Infinity entonces el radio es igual a cero.

Horociclo1[{1., 2.}, 2.]

{2., 1.25, (-2. + x)² + (-1.25 + y)² == 1.5625}

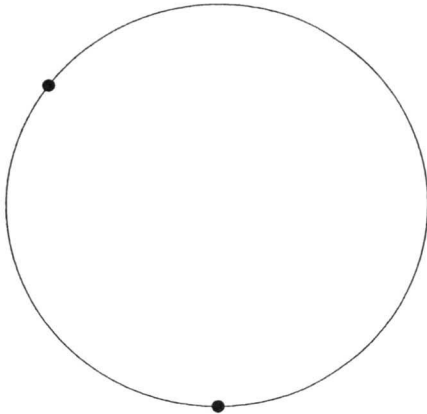
Horociclo1[{1., 2.}, Infinity]

y==2.

?GrHorociclo1

GrHorociclo1[{a,b},p] genera como elemento gráfico el horociclo que pasa por el punto {a,b} y el punto de la recta del infinito de abscisa p en H2. Para visualizarlo debe usarse la estructura Show[GrHorociclo1[{a,b},p],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 2.]}},
  {PointSize[0.03], Point[{2., 0.]}]}], GrHorociclo1[{1., 2.}, 2.],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];
```



```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 2.]}]}],
  GrHorociclo1[{1., 2.}, Infinity],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];
```



? HDhorociclo1

HDhorociclo1[{a,b},{p,q}] da la lista formada por el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia euclídea correspondiente al horociclo que pasa por el punto {a,b} y el punto de la recta del infinito {p,q} en D2.

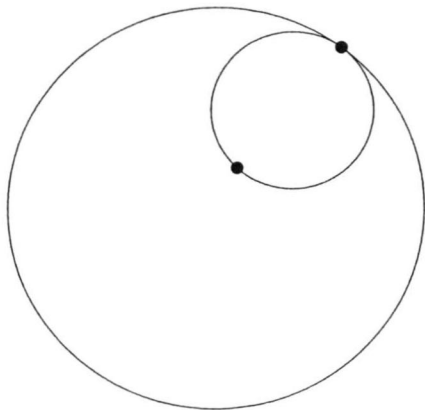
```
HDhorociclo1[{0.1, 0.2}, {0.6, 0.8}]
```

```
{{0.365385, 0.487179}, 0.391026,
  (-0.365385 + x)2 + (-0.487179 + y)2 == 0.152901}
```

? GrHDhorociclo1

GrHDhorociclo1[{a,b},{p,q}] genera como elemento gráfico el horociclo que pasa por el punto {a,b} y el punto de la recta del infinito {p,q} en D2. Para visualizarlo debe usarse la estructura Show[GrHDhorociclo1[{a,b},{p,q}], DisplayFunction -> \$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.1, 0.2]}},
  {PointSize[0.03], Point[{0.6, 0.8]}}}],
  GrHdhorociclo1[{0.1, 0.2}, {0.6, 0.8}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];
```



? Horociclo2

Horociclo2[{a,b},{c,d}] da el centro, el radio y la ecuación euclídea de los dos horociclos que pasan por {a,b} y {c,d} en H2. Si uno de ellos es una recta el radio es 0.

Horociclo2[{1., 2.}, {2., 3.}]

```
{{2.4641, 1.5359, (-2.4641 + x)2 + (-1.5359 + y)2 == 2.35898},
  {-4.4641, 8.4641, (4.4641 + x)2 + (-8.4641 + y)2 == 71.641}}
```

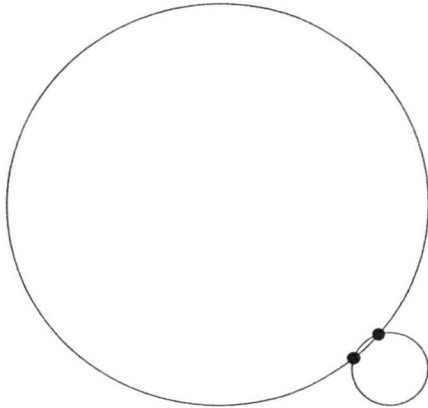
Horociclo2[{1., 2.}, {2., 2.}]

```
{{1.5, 1.0625, (-1.5 + x)2 + (-1.0625 + y)2 == 1.12891},
  {0., 0., 0. + y == 2.}}
```

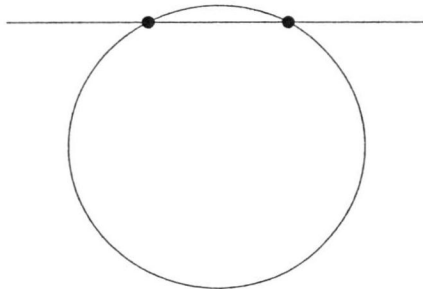
? GrHorociclo2

GrHorociclo2[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico los dos horociclos que pasan por los puntos {a,b} y {c,d} de H2. Para visualizarlos debe usarse la estructura Show[GrHorociclo2[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 2.}]},
  {PointSize[0.03], Point[{2., 3.}]}}],
  GrHorociclo2[{1., 2.}, {2., 3.}], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AspectRatio -> Automatic];
```



```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{1., 2.}]},
  {PointSize[0.03], Point[{2., 2.}]}}],
  GrHorociclo2[{1., 2.}, {2., 2.}], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AspectRatio -> Automatic];
```



?HDhorociclo2

HDhorociclo2[{a,b},{c,d}] da la lista formada por el centro, el radio y la ecuación de las circunferencia euclídea correspondientes a los dos horociclo que pasan por los puntos {a,b} y {c,d} en D2.

```
HDhorociclo2[{0.1, 0.2}, {0.3, 0.4}]
```

```
{{{-0.0775713, 0.577571}, 0.417243,
  (0.0775713 + x)2 + (-0.577571 + y)2 == 0.174092}, {{0.522295, -0.0222949},
  0.477229, (-0.522295 + x)2 + (0.0222949 + y)2 == 0.227748}}
```

```
HDhorociclo2[Cayley[{1., 2.}], Cayley[{2., 2.}]]
```

```
{{{0.232558, -0.55814}, 0.395349,  
  (-0.232558 + x)2 + (0.55814 + y)2 == 0.156301},  
  {{0.666667, 0.}, 0.333333, (-0.666667 + x)2 + (0. + y)2 == 0.111111}}
```

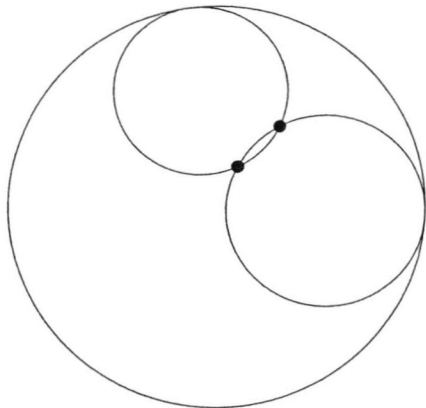
```
HDhorociclo2[Cayley[{1., 2.}], Cayley[{2., 3.}]]
```

```
{{{0.5, -0.485844}, 0.302831, (-0.5 + x)2 + (0.485844 + y)2 == 0.0917067},  
  {{0.5, 0.235844}, 0.447169, (-0.5 + x)2 + (-0.235844 + y)2 == 0.19996}}
```

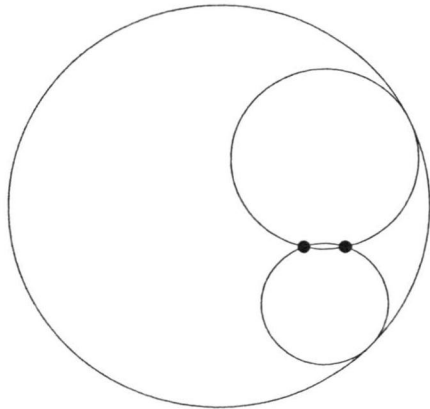
```
? GrHDhorociclo2
```

```
GrHDhorociclo2[{a,b},{c,d}] genera como elemento gráfico  
  los dos horociclos que pasan por los puntos {a,b} y {c,d}  
  de D2. Para visualizarlos debe usarse la estructura Show[  
  GrHDhorociclo2[{a,b},{c,d}],DisplayFunction->$DisplayFunction]
```

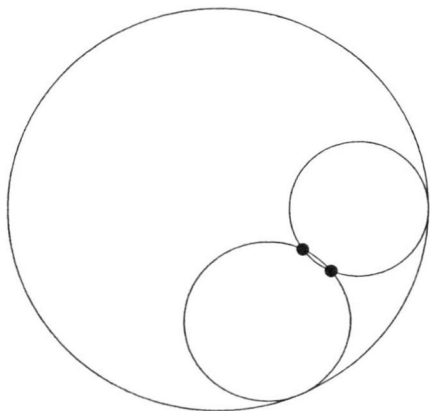
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.1, 0.2]}},  
  {PointSize[0.03], Point[{0.3, 0.4]}}}],  
  GrHDhorociclo2[{0.1, 0.2}, {0.3, 0.4}],  
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];
```



```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[Cayley[{1., 2.}]}}],
  {PointSize[0.03], Point[Cayley[{2., 3.}]}}}],
GrHDhorociclo2[Cayley[{1., 2.}], Cayley[{2., 3.}]},
DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];
```



```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[Cayley[{1., 2.}]}}],
  {PointSize[0.03], Point[Cayley[{2., 2.}]}}}],
GrHDhorociclo2[Cayley[{1., 2.}], Cayley[{2., 2.}]},
DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];
```



? HperpComun

HperpComun[{a,b},{c,d},{e,f},{g,h}] da la abscisa del centro y el radio de la recta perpendicular común a las rectas que unen los puntos {a,b}, {c,d} y {e,f},{g,h}, respectivamente, en H2

```
p = HperpComun[{2., 1.}, {3., 2.}, {-3., 2.}, {-1., 1.}]
```

```
{0.555556, 2.61996}
```

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{2., 1.}]},
  {PointSize[0.03], Point[{3., 2.}]}, {PointSize[0.03],
  Point[{-3., 2.}]}, {PointSize[0.03], Point[{-1., 1.}]}}],
GrHrecta[{2., 1.}, {3., 2.}], GrHrecta[{-3., 2.}, {-1., 1.}],
GrHrecta[{p[[1]] - p[[2]], 0.}, {p[[1]] + p[[2]], 0.}],
AspectRatio → Automatic,
DisplayFunction → $DisplayFunction, PlotRange → All];
```

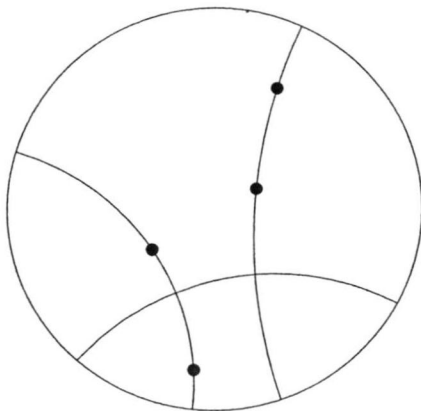


? HDperpComun

HDperpComun[{a,b},{c,d},{e,f},{g,h}] da dos puntos de la recta perpendicular común a las rectas que unen los puntos {a,b}, {c,d} y {e,f},{g,h}, respectivamente, en D2.

```
p = HDperpComun[{0.2, 0.1}, {0.3, 0.6}, {-0.3, -0.2}, {-0.1, -0.8}]
{{-0.660593, -0.750745}, {0.883078, -0.469227}}
```

```
Show [
Graphics[{{Circle[{0., 0.}, 1.], {PointSize[0.03], Point[{0.2, 0.1}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0.3, 0.6}]}, {PointSize[0.03],
  Point[{-0.3, -0.2}]}, {PointSize[0.03], Point[{-0.1, -0.8}]}}],
GrHDrecta[{0.2, 0.1}, {0.3, 0.6}], GrHDrecta[{-0.3, -0.2},
  {-0.1, -0.8}], GrHDrecta[p[[1]], p[[2]]],
DisplayFunction → $DisplayFunction, PlotRange → All,
AspectRatio → Automatic];
```



?Hiper ciclo

Hiper ciclo[a,b,{c,d}] da el centro, el radio y los ángulos del arco de circunferencia correspondiente al hiper ciclo que pasa por los puntos de abscisas a y b de la recta del infinito y el punto {e,f} de D2. Si b es Infinity da como centro, radio y ángulos, valores nulos.

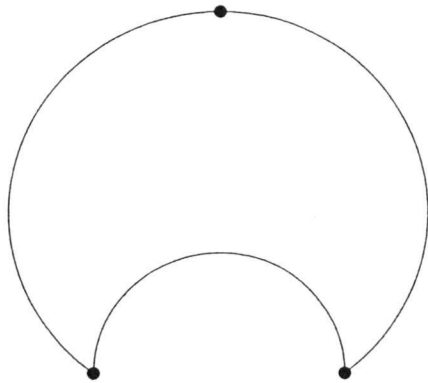
Hiper ciclo[-1., 1., {0., 3.}]

```
{(0. + x)2 + (-1.33333 + y)2 == 2.77778,  
{0., 1.33333}, 1.66667, -0.927295, 4.06889}
```

?GrHiper ciclo

GrHiper ciclo[{a,b,{c,d}] genera como elemento gráfico el hiper ciclo que pasa por los puntos de abscisas a y b de la recta del infinito y el punto {c,d} en H2. Si b es Infinity el hiper ciclo es una recta euclídea. Para visualizarlo debe usarse la estructura Show[GrHiper ciclo[a,b,{c,d}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

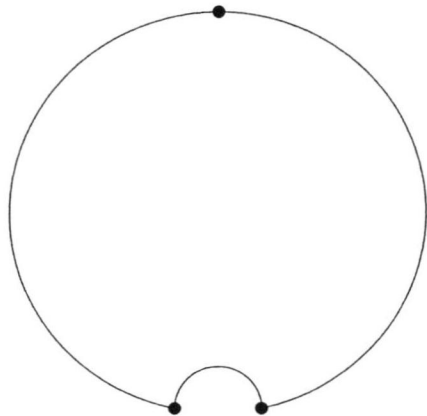
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{-1., 0.}]}, {PointSize[0.03],  
Point[{1., 0.}]}, {PointSize[0.03], Point[{0., 3.}]}}],  
GrHrecta[{-1., 0.}, {1., 0.}], GrHiper ciclo[-1., 1., {0., 3.}],  
DisplayFunction -> $DisplayFunction,  
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



Hiper ciclo[-2., 2., {0., 19.}]

```
{(0. + x)2 + (-9.39474 + y)2 == 92.2611,  
{0., 9.39474}, 9.60526, -1.36104, 4.50264}
```

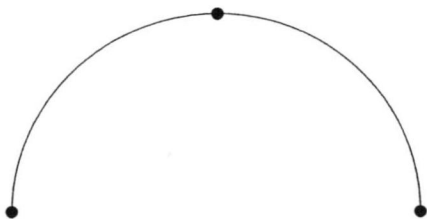
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{-2., 0.}]}, {PointSize[0.03],
  Point[{2., 0.}]}, {PointSize[0.03], Point[{0., 19.}]}}],
  GrHrecta[{-2., 0.}, {2., 0.}], GrHiper ciclo[-2., 2., {0., 19.}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



```
Hiper ciclo[-1., 1., {0., 1.}]
```

```
{(0. + x)2 + (0. + y)2 == 1., {0., 0.}, 1., 0., 3.14159}
```

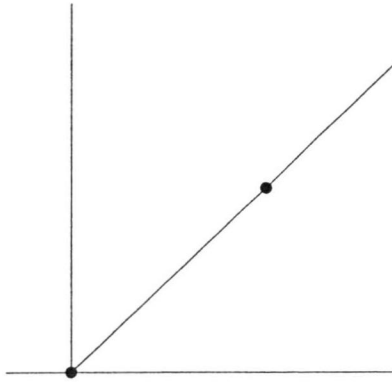
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{-1., 0.}]}, {PointSize[0.03],
  Point[{1., 0.}]}, {PointSize[0.03], Point[{0., 1.}]}}],
  GrHrecta[{-1., 0.}, {1., 0.}], GrHiper ciclo[-1., 1., {0., 1.}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



```
Hiper ciclo[-1., Infinity, {2., 3.}]
```

```
{0. + y == 1. (1. + x), 0., 0., 0, 0}
```

```
Show[Graphics[{Line[{{-2., 0.}, {4., 0.}], {PointSize[0.03],
  Point[{-1., 0.}], {PointSize[0.03], Point[{2., 3.}]}}],
  GrHrecta[{-1., 0.}, {-1., 3.}], GrHiper ciclo[-1., Infinity, {2., 3.}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



```
Hiper ciclo[-1., Infinity, {-1., 3.}]
```

```
{0. + x == -1., 0., 0., 0, 0}
```

```
Show[Graphics[
  {Line[{{-2., 0.}, {0., 0.}], {PointSize[0.09], Point[{-1., 0.}],
    {PointSize[0.09], Point[{-1., 3.}]}}],
  GrHrecta[{-1., 0.}, {-1., 3.}], GrHiper ciclo[-1., Infinity, {-1., 3.}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



?HDhiperciclo

HDhiperciclo[{a,b},{c,d},{e,f}] da el centro, el radio y los ángulos del arco de circunferencia correspondiente al hiperciclo que pasa por los puntos {a,b} y {c,d} de la recta del infinito y el punto {e,f} de D2.

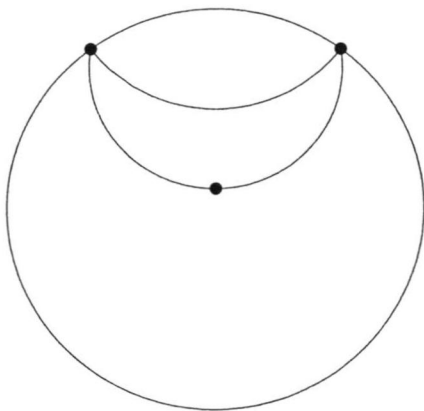
```
HDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}, {0., 0.8}]
```

```
{{-0.6, 0.8}, 0., 0., 0.}
```

```
?GrHDhiperciclo
```

GrHDhiperciclo[{a,b},{c,d},{e,f}] genera como elemento gráfico el hiperciclo que pasa por los puntos {a,b} y {c,d} de la recta del infinito y el punto {e,f} en D2. Para visualizarlo debe usarse la estructura Show[GrHDhiperciclo[{a,b},{c,d},{e,f}],DisplayFunction->\$DisplayFunction]

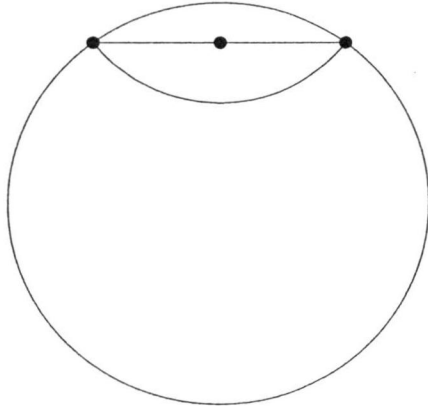
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.6, 0.8}]},  
  {PointSize[0.03], Point[{-0.6, 0.8}]},  
  {PointSize[0.03], Point[{0., 0.1}]}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],  
GrHDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}, {0., 0.1}],  
GrHDrecta[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}], DisplayFunction->$DisplayFunction,  
AspectRatio->Automatic, PlotRange->All];
```



```
HDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}, {0., 0.1}]
```

```
{{0., 0.707143}, 0.607143, -3.29514, 0.153544}
```

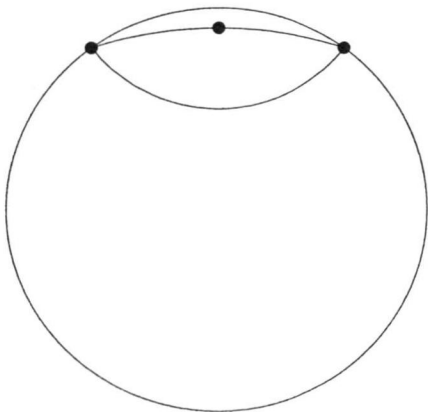
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.6, 0.8}]},
  {PointSize[0.03], Point[{-0.6, 0.8}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0., 0.8}]}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
GrHDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}, {0., 0.8}],
GrHDrecta[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



```
HDhiperciclo[{-0.6, 0.8}, {0.6, 0.8}, {-0.1, 0.}]
```

```
{{0., 0.61875}, 0.626779, -3.43496, 0.293367}
```

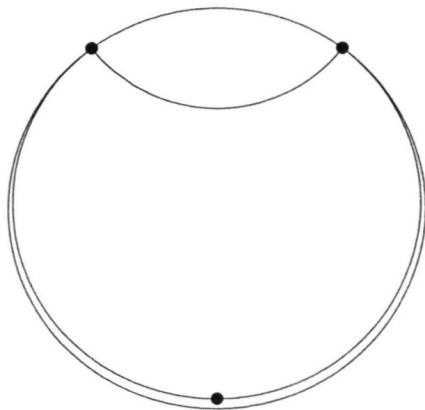
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{-0.6, 0.8}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0.6, 0.8}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0., 0.9}]}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
GrHDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}, {0., 0.9}],
GrHDrecta[{-0.6, 0.8}, {0.6, 0.8}], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



```
HDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}, {0., -0.95}]
```

```
{{0., 0.0278571}, 0.977857, -4.05179, 0.910202}
```

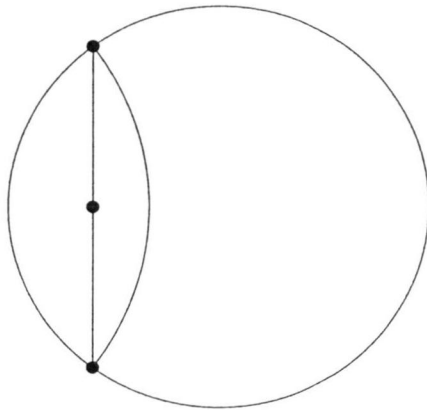
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.6, 0.8]}},  
  {PointSize[0.03], Point[{-0.6, 0.8]}},  
  {PointSize[0.03], Point[{0., -0.95]}}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],  
GrHDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}, {0., -0.95}],  
GrHDrecta[{0.6, 0.8}, {-0.6, 0.8}], DisplayFunction -> $DisplayFunction,  
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



```
HDhiperciclo[{-0.6, 0.8}, {0.6, 0.8}, {0., 0.1}]
```

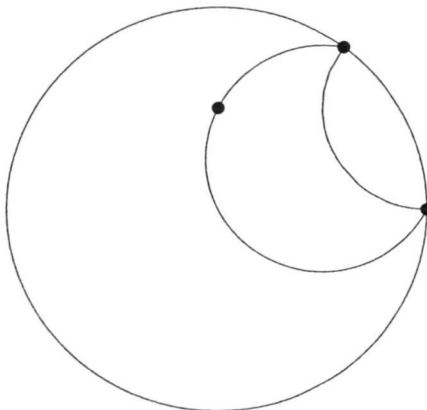
```
{{0., 0.707143}, 0.607143, -3.29514, 0.153544}
```

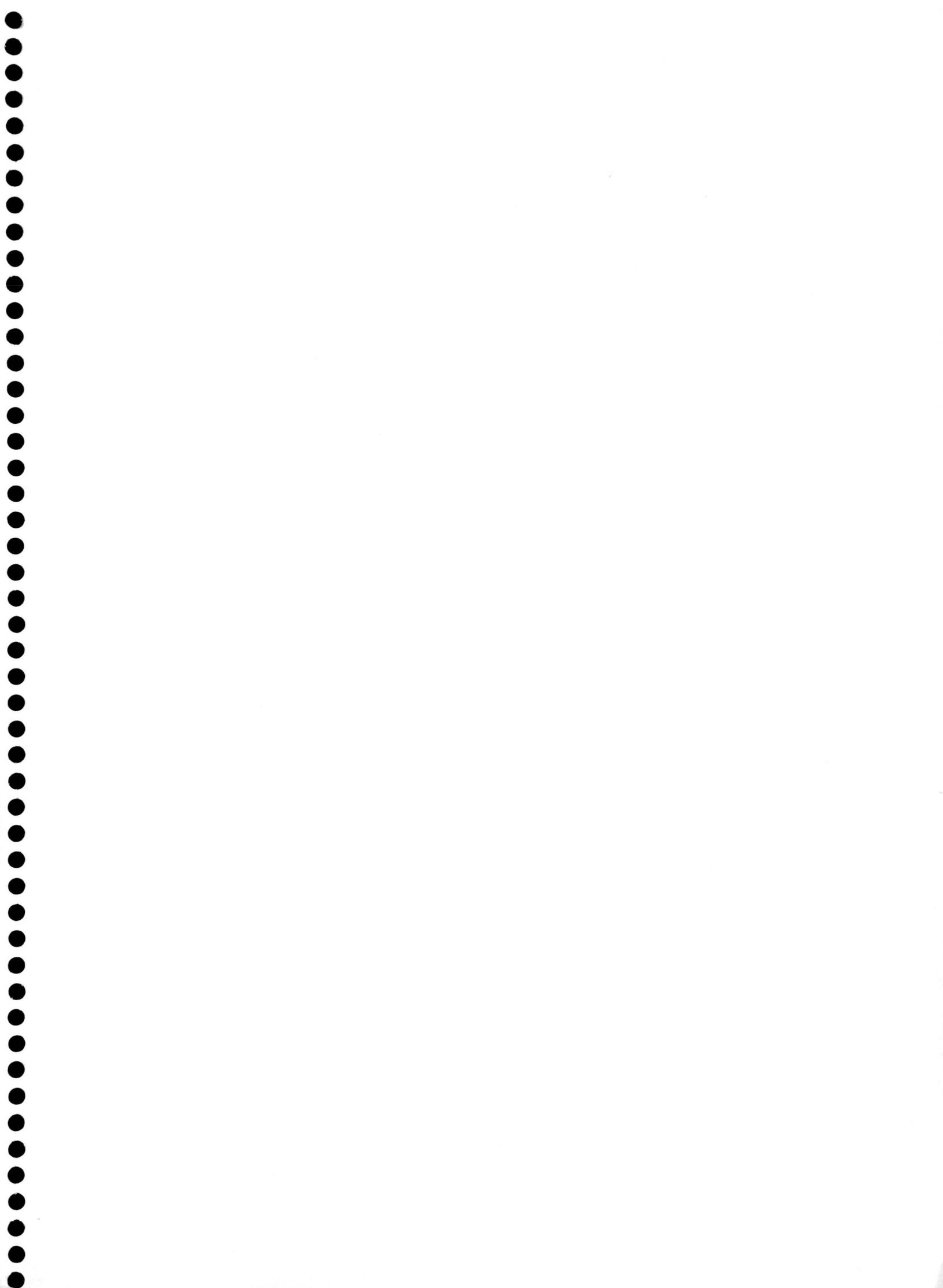
```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{-0.6, 0.8}]},
  {PointSize[0.03], Point[{-0.6, -0.8}]},
  {PointSize[0.03], Point[{-0.6, 0.}]}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
GrHDhiperciclo[{-0.6, 0.8}, {-0.6, -0.8}, {-0.6, 0.}],
GrHDrecta[{-0.6, 0.8}, {-0.6, -0.8}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction,
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```



```
HDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {1., 0.}, {0., 0.5}]
{{0.5, 0.25}, 0.559017, 1.39094, 5.81954}
```

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{0.6, 0.8}]},
  {PointSize[0.03], Point[{1., 0.}]},
  {PointSize[0.03], Point[{0., 0.5}]}, Circle[{0., 0.}, 1.]}],
GrHDhiperciclo[{0.6, 0.8}, {1., 0.}, {0., 0.5}],
GrHDrecta[{0.6, 0.8}, {1., 0.}], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```







Biblioteca Universitaria de Granada



01066774