PROBLEMAS Y ALGORITMOS
DE
PROGRAMACION ENTERA DIFUSA

MEMORIA QUE PRESENTA

FRANCISCO HERRERA TRIGUERO

PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS (SECCION INFORMATICA)

MAYO 1991

DIRECTOR

DR. D. JOSE LUIS VERDEGAY GALDEANO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

FACULTAD DE CIENCIAS UNIVERSIDAD DE GRANADA

PROBLEMAS Y ALGORITMOS
DE
PROGRAMACION ENTERA DIFUSA

FRANCISCO HERRERA TRIGUERO

La memoria titulada "**Problemas y Algoritmos de Programación Entera Difusa**" que presenta Francisco Herrera Triguero, para optar al grado de DOCTOR en Ciencias (Sección Informática), ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Dr. D. Jose Luis Verdegay Galdeano, Catedrático del Departamento en el que se ha realizado la memoria.

Granada, Mayo de 1991.

Fdo: Francisco Herrera Triguero

Fdo: Dr. D. Jose Luis Verdegay Galdeano

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi agradecimiento

A **Jose Luis Verdegay**, sin cuyas ideas, dirección y entusiasmo esta memoria jamás habría visto la luz. Muy especialmente quisiera agradecerle el estímulo que me ha aportado en todo momento, y en especial en aquellos que fueron difíciles.

A todos los miembros de la línea de investigación en Razonamiento Aproximado e Inteligencia Artificial en la que me integro, por la ayuda que me han prestado desde el principio.

A los demás miembros del Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada, por el apoyo y amistad que me han demostrado a lo largo de estos años.

INDICE

INTRODUCCION

GENERAL

1. PRESENTACION

En las tres últimas décadas la Programación Entera (PE) ha pasado a través de distintas etapas, ayudada siempre por el reconocimiento de que en su dominio de actuación se engloba una amplia variedad de importantes y novedosas aplicaciones. Dos de los hitos mas notables en los desarrollos logrados en este campo, han sido los enfoques debidos a los planos de corte y a los métodos "branch and bound". Concebidos como estrategias generales de solución, estos enfoques se han aplicado a problemas de diversas áreas, entre las que figuran la teoría de números, la teoría de grupos, la lógica, el analisis convexo, y en general la Inteligencia Artificial [33, 74, 77].

Centrándonos en el terreno de la Inteligencia Artificial, notemos que el razonamiento que se efectúa en dominios del mundo real tales como la comprension del lenguaje natural, el reconocimiento de imagenes o el diagnostico, lleva asociada la necesidad de manejar conocimiento de naturaleza incierta e incompleta, en el sentido de que las reglas y los hechos en una cierta base de conocimientos pueden ser incompletos o vagos.

En general, el razonamiento puede considerarse como el proceso de encontrar la combinación de valores que satisfagan mejor un cierto sistema de restricciones. En un sistema de producción las restricciones son las reglas, y la referida combinación de valores la memoria usada con las proposiciones que se hayan aceptado. Lo mismo que ocurre en estos modelos de sistemas de produccion, los de la PE proporcionan métodos para representar y satisfacer sistemas de restricciones. Pero, además, los modelos de PE proporcionan un adecuado marco para tratar problemas en los que es necesario mezclar algun tipo de conocimiento simbólico, con otro de características mas cuantitativas.

Se ha demostrado que este enfoque es muy eficaz en situaciones en las que, en un cierto sistema, hay que razonar en presencia de conocimiento no-monótono, ya que para poder realizar inferencias es necesario considerar todo el conocimiento disponible. El procesamiento en bloque que caracteriza a los métodos de resolución de los problemas de PE, proporciona exactamente ese ambiente global que se requiere para razonar con tal conocimiento no-monótono.

Aunque desde el punto de vista del razonamiento clásico, es decir, del que hace uso del Modus Ponens tradicional, se han desarrollado algunos modelos de PE orientados a resolver determinados tipos de situaciones como las anteriormente descritas [12, 31, 57, 76, 77, 78, 79], cuando el contexto que se considera supone la existencia de cierta vaguedad, la aplicación de métodos de PE necesita poder disponer de estos, de manera que esa vaguedad vaya incorporada de modo natural entre los elementos que definan el modelo que tratemos de formular, es decir, se necesita disponer de modelos de Programación Entera Difusa (PED).

A pesar de su importancia, en la literatura especializada existen pocas contribuciones al tema de PED [24, 35, 41, 85], quizás debido a cierta polémica que existe sobre su aplicabilidad. El centro de las discusiones se refiere a lo siguiente. Supuesto construido y resuelto un modelo discreto de esa naturaleza, ¿qué sentido tiene decir que el valor de una variable es, por ejemplo, alrededor de siete, si a la hora de implementar la solución, ese valor se debe concretar sin ambiguedades debido al carácter entero de las variables?. Este es un planteamiento que tiene pruebas concluyentes a su favor, ya que las soluciones que producen los modelos existentes no tienen la naturaleza integro-difusa que se busca. Pero por contra también hay que explicar que los métodos de resolución que se han empleado, por estar básicamente inspirados en técnicas propias de la PLE, estaban destinados sin remedio a producir ese tipo de soluciones de características ajenas a las del problema en cuestión.

Desde luego el estudio y formalización de modelos de PED tiene perfecto sentido por cuanto, si reconocemos nuestras expresiones en términos linguísticos, es normal el uso de frases como: la capacidad es de unas 200 plazas, recibiremos alrededor de 50 piezas, etc., que reflejan la posibilidad y la necesidad, si se dicen en un contexto de optimización discreta, de proponer modelos y métodos que vengan a resolver tal tipo de situaciones de planteamiento impreciso.

Desde esta posición, esta memoria esta dedicada a formular y resolver modelos de PED, como paso previo de su aplicabilidad en la resolución de problemas concretos. Por tanto, a continuación introducimos el problema general de la PE para, a partir de él, dar una clasificación de modelos de PED que nos servirá en todo lo que sigue como base para los métodos que mas adelante desarrollaremos.

2. EL PROBLEMA GENERAL DE PE

Recordemos que un problema de decisión en el que teniendo que optimizar una función objetivo, las variables de decisión cuantificables que participan en él, están restringidas a tomar sólo valores enteros, se llama un problema de PE. Así, un problema de PE puede estar restringido o no, y tanto sus restricciones, como la función objetivo, ser lineales o no lineales, aunque debido a la naturaleza discreta que tiene el conjunto de soluciones, formalmente, cualquier problema de PE debe entenderse como no lineal. No obstante, considerando los métodos de resolución de este tipo de problemas, diremos que es lineal cuando relajando la condición de integridad, el problema resultante lo sea, siendo no lineal en cualquier caso contrario.

Por tanto, un problema general de PE se plantea en los siguientes terminos,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z = f(x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i,\ i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \\
&\qquad\qquad x_j \geq 0,\ j \in N = \{1, 2, \dots, n\} \\
&\qquad\qquad x_j \in \mathbf{N},\ j \in I \subseteq N
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Si $I = N$, es decir, todas las variables están sometidas a ser enteras, al problema se le llama **Problema Entero Puro.** En otro caso, si $I \subset N$, se habla de **Problema Entero Mixto.**

Muchos modelos prácticos restringen las variables enteras a solo tomar valores 0-1. Tales variables se utilizan para representar decisiones, condiciones lógicas, restricciones disjuntas, regiones no convexas, etc.. La condición de integridad ahora se concreta en que $x_j \in \{0,1\}$, y entonces se habla de **Programación Booleana**. Como antes, si $I = N$, se tiene un **Problema Booleano Puro**, mientras que si $I \subset N$ se tiene un **Problema Booleano Mixto**, estando permitidas todas las combinaciones que se puedan imaginar.

De todas las posibilidades que se pueden considerar a partir de esta definición general, los avances más considerables se han realizado para el caso de funciones lineales, tanto en el objetivo como en las restricciones, es decir, para problemas del tipo

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z = \sum_{j \in N} c_j x_j \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i \in M \\
&\qquad\qquad x_j \geq 0,\ j \in N \\
&\qquad\qquad x_j \in \mathbf{N},\ j \in I \subseteq N
\end{aligned}
\tag{2}
$$

La forma del problema anterior es la más general posible dado que, cualquier otro problema lineal siempre puede escribirse como él. Por otro lado hay que notar que, si obviamos las condiciones de integridad, es un problema convencional de Programación Lineal (PL), con lo que los métodos de resolución de este tipo de problemas habrán de buscar un óptimo, entre todos los puntos enteros contenidos en el espacio de soluciones del problema continuo. Este es un hecho importante porque, en contra de lo que pudiera parecer natural al tener un espacio de soluciones más limitado, los problemas enteros entrañan, por lo general, más complejidad que los continuos a la hora de resolverlos, lo que básicamente se debe a que las condiciones de integridad destruyen las buenas propiedades que tiene el espacio continuo de soluciones, en particular la convexidad. Por eso, casi todos los algoritmos enteros, se han desarrollado enfocandolos a convertir el espacio discreto en su equivalente continuo.

A continuación nos dedicamos a presentar el desarrollo de la memoria.

3. RESUMEN

El trabajo que presentamos lleva por titulo Problemas y Algoritmos de Programación Entera Difusa, y lo que se pretende con él es estudiar modelos de PED, así como los algoritmos que pueden resolverlos, como paso previo para poder aplicarlos en contextos en los que sea necesario tratar problemas con variables enteras y cierta vaguedad en su planteamiento, así como al problema del razonamiento en sistemas basados en conocimiento impreciso.

La memoria esta dividida en cuatro capítulos. En el primero, se presentan todos aquellos conceptos y métodos básicos que se van a necesitar en el resto. Este es el caso, por un lado, de las formas de comparar números difusos y de los modelos convencionales de PLD, y por otro, de los métodos de resolución de problemas de PE y de PE parametrica.

La necesidad de tener que estudiar algoritmos de PE parametrica se deriva del siguiente hecho. El que aparezca cierta vaguedad en el planteamiento de algún problema de PE, tiene que deberse a que el decisor (o experto) no posea una información exacta y precisa sobre los elementos que toman parte en el problema. Si, por tanto, él admite darle a su problema un planteamiento difuso, es lógico tambien admitir que la solución que este dispuesto a obtener, tenga la misma naturaleza que los datos de partida, es decir, que sea difusa. Una forma usualmente empleada para la obtención de una solución tal, es mediante el uso del Teorema de Representación de Conjuntos Difusos, [49]. Su aplicación en problemas de Programación Matemática, implica la aparición de modelos auxiliares que son parametricos (el parametro, como es obvio, indica el nivel en el que se esta resolviendo el problema) lo que justifica, en este caso concreto, el estudio previo de métodos de resolución de problemas de PE parametrica.

En el capítulo segundo se aborda la clasificación de los problemas de Programación Entera Difusa y el estudio del problema de Programación Lineal Entera con variables integro-difusas, que solo tiene carta de naturaleza en este contexto de optimización discreta al permitir que las variables puedan tomar valores casi enteros, bastante enteros o no exactamente enteros. Tras la introducción formal del modelo, se da un método de resolución basado en la técnica branch and bound, a partir del cual obtenemos una solución difusa. La aplicación del algoritmo se ilustra con un ejemplo.

Los problemas de PE en los que, primero las restricciones, y luego los coeficientes de la función objetivo son difusos, se estudian en el tercer capítulo. Se comienza analizando la aplicabilidad de los métodos clásicos de corte y de la técnica branch and bound al caso de restricciones difusas para, posteriormente, dar un algoritmo que resuelve este tipo de problemas, en el caso puro, proporcionando una solución difusa. Tambien, con la misma filosofia de resolución, se estudia el caso mixto. En la tercera sección de este capítulo, se plantea la resolución de problemas de PE con costos imprecisamente establecidos, es decir, definidos por números difusos, a partir de dos métodos diferentes:

a) enfocandolos como problemas multiobjetivo lineales con coeficientes intervalares, que permiten obtener soluciones eficientes, y

b) haciendo uso directo de la aritmetica intervalar.

El cuarto capítulo enfoca los problemas booleanos. Como ya antes comentamos, en este caso no tiene sentido suponer que las variables tengan una naturaleza integro-difusa. Por tanto, de modo paralelo al caso de la PED, se consideran dos grandes tipos distintos de situaciones:

a) cuando las restricciones son imprecisas, y

b) cuando los coeficientes del objetivo estan vagamente expresados.

En el primer caso, se propone un método de resolución, que se compara con otro ya existente en la literatura, y se demuestra como la solución difusa que proporciona el que presentamos engloba, como valor particular, la deducida por el otro enfoque. Posteriormente, en el caso de costos difusos, se hace un planteamiento paralelo al del correspondiente caso del capítulo tercero, es decir, se resuelve el problema dando un método basado en el Teorema de Representacion, y otro usando métodos de comparación de números difusos.

La memoria termina con un resumen de los objetivos alcanzados y de las lineas abiertas para futuras investigaciones, así como con un apéndice bibliográfico en el que se recopilan las más destacadas contribuciones a la materia que se ha estudiado.

CAPITULO I:

MODELOS AUXILIARES PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION ENTERA DIFUSA

1. INTRODUCCION

Dedicaremos este primer capítulo al estudio de las herramientas que serán utilizadas a lo largo de la misma.

Comienza la primera parte de éste, estudiando la definición de conjunto y número difuso, para pasar a describir los métodos de comparación para éstos últimos, que serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo.

Para avanzar hacia los modelos que queremos estudiar, pasaremos a describir los modelos de PLD. A continuación será necesario esbozar los más destacados métodos de resolución existentes para los distintos problemas convencionales de PE. Posteriormente estudiaremos métodos de resolución para problemas de Programación Lineal Discreta Paramétrica resueltos en la literatura, y problemas con coeficientes intervalares en la función objetivo.

2. METODOS DE COMPARACION DE NUMEROS DIFUSOS

Un concepto básico es el de número difuso. Desde el punto de vista de que un número difuso es un conjunto difuso en **R**, podemos decir que la noción de número difuso se introduce en 1965 en el célebre trabajo de L.A. Zadeh: Fuzzy Sets.

2.1. INTRODUCCION AL CONCEPTO DE CONJUNTO DIFUSO

Sea **X** un conjunto cuyos elementos notaremos por x, y sea **A** un subconjunto de X. La pertenencia de un elemento x de **X** al conjunto **A** viene dada por la función característica

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } x \in A \\ 0 & \text{si y solo si } x \notin A \end{cases}$$

$\{0,1\}$ es el llamado conjunto valoración.

Si el conjunto valoración es el intervalo real $[0,1]$, **A** se denomina un conjunto difuso (Zadeh, 1965) y μ_A mide el grado de pertenencia del elemento x a **A**. **A** se caracteriza por el conjunto de pares

$$\mathbf{A} = \{(x,\mu_A(x)),\ x \in \mathbf{X}\}$$

Evidentemente un c.d. **A** es cualquier punto del hipercubo unitario.

Dos conjuntos difusos **A** y **B** se consideran iguales (**A** = **B**) si y solo si:

$$\forall\ x \in \mathbf{X},\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

Definición 1.1. Dado un conjunto difuso **A**, llamamos α-corte de dicho conjunto, al conjunto ordinario

$$A_\alpha = \{x \in \mathbf{X} /\ \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{con} \quad \alpha \in [0,1]$$

Claramente se ve como los conjuntos A_α, $\alpha \in [0,1]$ constituyen una sucesión decreciente. Si $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2} \quad \forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$.

También es inmediato que $A_0 = \mathbf{X}$, por lo que de ahora en adelante nos referiremos al intervalo $(0,1]$.

Teorema de Representación 1.2. (Negoita y Ralescu, 1975) Si **A** es un conjunto difuso y A_α sus α-cortes $\alpha \in [0,1]$, se verifica que:

$$A = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha A_\alpha$$

entendiendo esta notación formal como la igualdad entre las funciones de pertenencia de ambos conjuntos. Si $\mu_{A_\alpha}(x)$ nota la función característica de A_α, caso particular de la función de pertenencia

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si y sólo si } x \in A_\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función de pertenencia del conjunto difuso **A** puede expresarse en términos de las funciones características de sus α-cortes según la fórmula

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \min(\alpha, \mu_{A_\alpha}(x))$$

Definición 1.3. Un conjunto difuso es convexo si solo si sus α-cortes son convexos.

Una definición equivalente a la convexidad es que **A** es convexo si sólo si

$$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbf{X},\quad \forall\ \lambda \in [0,1] \qquad \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

Definición 1.4. Se define la altura de un conjunto difuso

$$\mathrm{hgt}(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

Definición 1.5. Un conjunto difuso se dice normalizado si solo si $\exists\ x \in \mathbf{X}$ en el que $\mu_A(x) = 1$.

Esta definición implica que en los conjuntos difusos normalizados

$$hgt(A) = 1.$$

2.2. NUMEROS DIFUSOS

En lo sucesivo, la definición de número difuso que emplearemos, será la debida a Dubois y Prade, [21] y la aritmética, la correspondiente a tal definición.

Un número difuso A, es un conjunto μ_A de la recta real, convexo, normalizado y tal que

a) $\exists\ x_o \in \mathbf{R}/\ \mu_A(x_o) = 1$, que suele llamarse moda, y

b) μ_A es continua a trozos.

Todo número difuso está pues caracterizado por una función de pertenencia

$$\mu_A : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$$

y toda función como la anterior engendra un número difuso donde, $\forall\ x \in \mathbf{R}$, $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia de x al número difuso **A**.

Notaremos por $N_D(\mathbf{R})$ al conjunto de los números difusos sobre **R** y al conjunto de las funciones de pertenencia sobre **R**, F(**R**), por tanto nos podemos referir al hablar de número difuso tanto al elemento **A** $\in N_D(\mathbf{R})$ como a $\mu_A \in F(\mathbf{R})$.

Un número difuso M, se dice que es del tipo L - R, si y solo si su función de pertenencia μ_A es de la forma

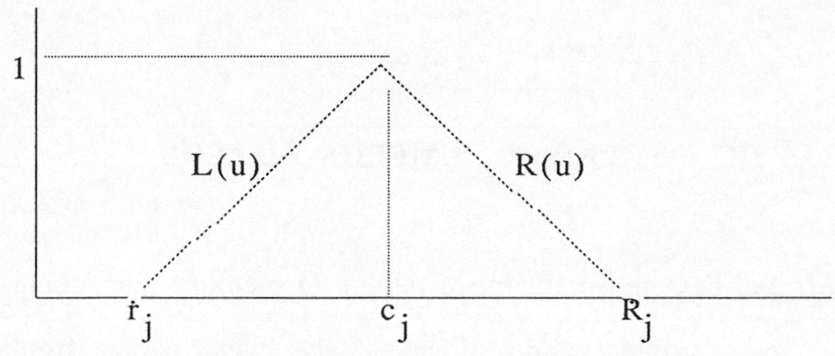
$$\mu_M(x) = \begin{cases} L[(m-x)\ /\ \alpha] & \text{para } x \leq m,\ \alpha > 0 \\ R[(x-m)\ /\ \beta] & \text{para } x \geq m,\ \beta > 0 \end{cases}$$

donde m es la moda de M y $\alpha(\beta)$ la amplitud por la izquierda (derecha), L y R representan una función a la izquierda y derecha de m respectivamente, L no decreciente y R no creciente.

Como es evidente, según sean las funciones L y R, obtendremos distintos tipos de números difusos.

Para simplificar los cálculos en cuanto a la aplicación de métodos de comparación, consideraremos números difusos trapezoidades o bíen triangulares lineales y normalizados, cuya función de pertenencia analítica y gráficamente es la siguiente. Dado $\underset{\sim}{c}_j = (r_j, c_j, R_j)$

$$\forall\ u \in \mathbf{R} \qquad \mu_{c_j}(u) = \begin{cases} (u-r_j)/(c_j-r_j) & r_j \leq u \leq c_j \\ (R_j-u)/(r_j-c_j) & c_j \leq u \leq R_j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$



Puesto que a lo largo de esta memoria siempre nos moveremos en el contexto de la Teoría de Conjuntos Difusos, suprimiremos la palabra **difuso** para evitar repetirla constantemente, cuando no ocasione duda en el contexto.

En [26] podemos encontrar la función de pertenencia, que corresponde al número $\sum_j \tilde{c}_j x_j$, con $x_j \in \mathbf{R}$.

Proposición 1.6. Si $\tilde{y} = \sum_j \tilde{c}_j x_j = \tilde{c}x$ es una expresión lineal, en la que los $\tilde{c}_j$, j= 1, ..., n son números con funciones de pertenencia lineales y $x_j \geq 0$, j = 1, ..., n, entonces la función de pertenencia de $\tilde{y}$ es

$$\mu(z) = \begin{cases} (z\text{-}rx)/(cx\text{-}rx) & \text{si } x > 0 \text{ y } rx \leq z \leq cx \\ (Rx\text{-}z)/(Rx\text{-}cx) & \text{si } x > 0 \text{ y } cx \leq z \leq Rx \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde $r = (r_1, ..., r_n)$, $c = (c_1, ..., c_n)$ y $R = (R_1, ..., R_n)$.

Además definiremos los vectores d y d' para su posterior uso de la forma: d = R-c y d' = c-r , de modo que dx y d'x representan los márgenes laterales (derecha e izquierda respectivamente) de $\tilde{c}x$.

2.3. FORMAS DE COMPARAR NUMEROS DIFUSOS

Como se sabe, hay un amplísimo catálogo de métodos para comparar dos números, que a su vez, provienen de diversos enfoques para afrontar el problema. Excelentes recopilaciones de dichos métodos, pueden encontrarse en [7, 8, 29].

En esta memoria, utilizaremos las formas de comparar números, sólo como un medio, para analizar la repercusión que, en un problema de Programación Lineal Discreta con costos difusos, tiene el empleo de diferentes métodos de comparación. Desde este punto de vista, no es nuestro objetivo recoger aquí todas las formas posibles que hay para la comparación. Por tanto del catálogo de métodos de comparación existentes hemos seleccionado aquellos que, estando suficientemente contrastados en la literatura, nos han parecido más apropiados, para el tema concreto que estudiamos. A su vez daremos el resultado de aplicar los mismos a las combinaciones lineales de números anteriormente estudiadas.

2.3.1. METODOS BASADOS EN LA DEFINICION DE UNA FUNCION ORDENADORA

Estos métodos consisten en la definición de una función de comparación F, función del conjunto A en **R**, donde existe un orden natural.

Supuesto F: A $\longrightarrow$ **R**, es tal que si

$$F(A^i) < F(A^j) \Rightarrow A^i \text{ es menor que } A^j$$

$$F(A^i) > F(A^j) \Rightarrow A^i \text{ es mayor que } A^j$$

$$F(A^i) = F(A^j) \Rightarrow A^i \text{ es igual que } A^j$$

a. Indice de Chang (Chang 1981)

Chang propone como índice

$$F(\underset{\sim}{u}_j) = \int_{S_j} z\, \mu_{u_j}(z)\, dz$$

siendo S_j el soporte de $\underset{\sim}{u}_j$.

Para los números $\tilde{cx}$ el valor de la función de comparación es el siguiente:

$$F(\tilde{cx}) = \frac{dx + d'x}{6} (3\ cx + dx - d'x)$$

Si $\tilde{cx}$ es simétrico, es decir, si d'x = dx, se obtiene $F(\tilde{cx}) = dx \cdot ax$.

b. Indices de Yager (Yager, 1978, 1981)

Yager ha propuesto diferentes funciones ordenadoras, donde no es necesario suponer las hipótesis de normalidad o convexidad. Se restringe al intervalo [0,1].

b.1. Primer Indice de Yager

Se define como

$$F_1(\tilde{u}_j) = \frac{\int_{S_j} g(z)\, \mu_{\tilde{u}_j}(z)\, dz}{\int_{S_j} \mu_{\tilde{j}}(z)\, dz}$$

donde g(z) es una medida de la importancia del valor z.

Si g(z) = z, este índice representa la abscisa del centro de gravedad del número $\tilde{u}_j$.

Para los números $\tilde{cx}$ el valor de la función de comparación es el siguiente:

Si g(z) = z

$$F_1(\tilde{cx}) = cx + 1/3\ (dx - d'x)$$

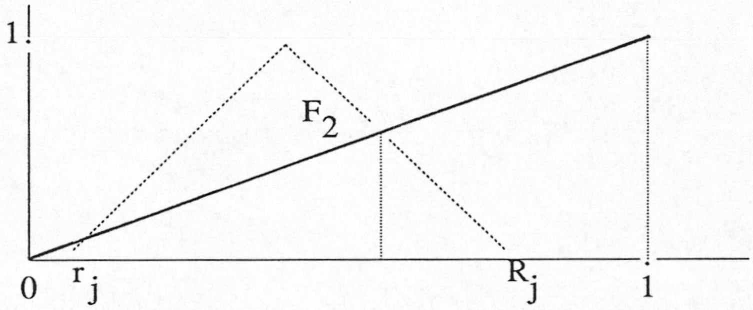
Si el número $\tilde{cx}$ es simétrico se obtiene $F_1(\tilde{cx}) = cx$.

b.2. Segundo Indice de Yager

Se define por

$$F_2(\underset{\sim}{u}_j) = \max_{z \in S_j} \min \left(z, \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(z)\right)$$

que mide la consistencia del número $\underset{\sim}{u}_j$ cuyo soporte está contenido en el intervalo [0,1], con el conjunto difuso lineal $\underset{\sim}{z}$, con función de pertenencia $\mu_{\underset{\sim}{z}}(z) = z$.



Para los números triangulares $\underset{\sim}{cx}$ el valor de la función de comparación es:

$$F_2(\underset{\sim}{cx}) = Rx/(dx + 1)$$

b.3. Tercer Indice de Yager

Se define como

$$F_3\,(\underset{\sim}{u}_j) = \int_0^1 M(U_j^{\alpha})\; d\alpha$$

donde U_j^{α} es el α-corte de $\underset{\sim}{u}_j$, y $M(U_j^{\alpha})$ es el valor medio de los elementos de U_j^{α}.

Para los números $\underset{\sim}{cx}$ el valor de la función de comparación es el siguiente:

$$F_3(\underset{\sim}{cx}) = cx + 1/4\ (dx\ -d'x)$$

Si el número $\underset{\sim}{cx}$ es simétrico se obtiene $F_3(\underset{\sim}{cx}) = cx$.

c. Relación de Adamo (Adamo, 1980)

Utilizando el concepto de α-corte, Adamo define un índice de α-preferencia, dado por

$$F_{\alpha}\ (\underset{\sim}{u}_j) = \max\ \{z\ /\ \mu_{u_j}(z) \geq \alpha\}$$

para un α dado, $\alpha \in [0,1]$.

Para los números triangulares $\underset{\sim}{cx}$ el valor de la función de ordenación es el siguiente:

$$F_{\alpha}(\underset{\sim}{cx}) = cx + dx(1-\alpha) \quad \forall\ \alpha \in [0,1]$$

d. Indice promedio (González, 1987)

El indice promedio se define por medio de un proceso de integración de una función paramétrica que representa la posición de cada α-corte en la recta real.

Para números triangulares $\underset{\sim}{cx}$, se reduce a

$$V_t^{\lambda}\ (\underset{\sim}{cx}) = cx + (cx\text{-}rx)/(t+1) + \lambda(Rx\text{-}rx)/(t+1)$$

donde el parámetro λ es un grado de optimismo-pesimismo, que debe ser seleccionado por el decisor. Un decisor optimista debería pensar en un alto valor de λ, ($\lambda = 1$), un decisor pesimista deberá pensar en un bajo valor de λ, ($\lambda = 0$).

En [30] se interpretó esta forma de comparar números, como una comparación de valores medios sobre los números difusos, donde el parámetro t permite seleccionar distintos valores medios (t = 1 elige el valor medio definido por Dubois y Prade en [23]).

2.3.2. METODOS BASADOS EN LA COMPARACION DE ALTERNATIVAS

Estos métodos, consisten en obtener el conjunto difuso de las alternativas optimales:

$$\tilde{O} = \{i, \mu_{\tilde{O}}(i)\}, \quad \mu_{\tilde{O}}(i) = \mu_{\tilde{O}}(A^i), \ A^i \in A.$$

donde $\mu_{\tilde{O}}(i)$ representa el grado con el cual la alternativa i-ésima puede ser considerada la mejor.

a. Método de Jain (Jain, 1976, 1977)

Este método está basado en la comparación de alternativas optimales. Para determinar el conjunto difuso de las alternativas optimales, se obtiene en primer lugar, el soporte de la unión de los números considerados, que notaremos por

$$S = \bigcup_j \operatorname{Sop} \underset{\sim}{u}_j$$

Sea z_{max} = Sup S, el conjunto maximizante de S, es evaluado como

$$\underset{\sim}{u}_{max} = \{z, \mu_{max}(z)\}, \quad z \in S$$

donde $\mu_{max}(z) = \left(\dfrac{z}{z_{max}} \right)^k, \quad k > 0$

por último

$$\mu_{\tilde{O}}(j) = \operatorname{hgt}\,(\underset{\sim}{u}_j \cap \underset{\sim}{u}_{max}) = \operatorname{Sup}_z \,(\mu_{u_j}(z) \wedge \mu_{max}(z)) \quad \forall\ z \in \mathbf{R}$$

Notemos que tal como Jain define $\mu_{max}(\cdot)$ trabaja con números normalizados, además supone I = [0,1]. Esto no supone falta de generalidad puesto que cuando se tengan números con soporte fuera del intervalo I, bastará trasladarlos al mismo.

b. Indices de Dubois y Prade (Dubois y Prade, 1980)

Dubois y Prade proponen cuatro índices que describen la posición relativa de dos números $\underset{\sim}{u}_i$ y $\underset{\sim}{u}_j$. Aquí describiremos solo dos de ellos.

b.1. Grado de posibilidad de Dominancia de $\underset{\sim}{u}_i$ sobre $\underset{\sim}{u}_j$

$$PD\,(\underset{\sim}{u}_i) = \operatorname{Poss}\,(\underset{\sim}{u}_i \geq \underset{\sim}{u}_j) = \operatorname{Sup}_z \ \min \left(\mu_{u_i}(z), \operatorname{Sup}_{v \leq z} \mu_{u_j}(v) \right)$$

$$= \operatorname{Sup}_{\substack{z,v \\ z \geq v}} \left(\mu_{u_i}(z), \mu_{u_j}(v) \right)$$

Para los números triangulares $\underset{\sim}{cx}$ el valor de la posibilidad es el siguiente.

Sean $\underset{\sim}{cx}$ y $\underset{\sim}{cy}$

$$R(\underset{\sim}{cx}, \underset{\sim}{cy}) = \text{Poss}\ (\underset{\sim}{cx} \geq \underset{\sim}{cy}) = \begin{cases} 0 & \text{si } Rx \leq ry \\ \dfrac{Rx - ry}{dx + d'y} & \text{si } cy > cx \text{ y } Rx > ry \\ 1 & \text{si } cy \leq cx \end{cases}$$

b.2. Grado de Necesidad de Dominancia de $\underset{\sim}{u_i}$ sobre $\underset{\sim}{u_j}$

$$ND\ (\underset{\sim}{u_i}) = \text{Nec}\ (\underset{\sim}{u_i} \geq \underset{\sim}{u_j}) = \inf_{z}\ \sup_{\substack{v \\ v\leq z}}\ \max\ (1 - \mu_{u_i}(z), \mu_{u_j}(v))$$

Para los números $\underset{\sim}{cx}$ el valor de la posibilidad es el siguiente.

Sean $\underset{\sim}{cx}$ y $\underset{\sim}{cy}$

$$R(\underset{\sim}{cx}, \underset{\sim}{cy}) = \text{Nec}\ (\underset{\sim}{cx} \geq \underset{\sim}{cy}) = \begin{cases} 0 & \text{si } cx \leq ry \\ \dfrac{cx - ry}{d'x + d'y} & \text{si } cx > ry \text{ y } cy > rx \\ 1 & \text{si } cy \leq rx \end{cases}$$

3. PROGRAMACION LINEAL DIFUSA

La PLD es uno de los temas más profundamente estudiados en la literatura especializada en conjuntos difusos. En lo que sigue introduciremos los tres tipos más importantes de modelos [70, 15, 16], es decir, los que presentan un conjunto difuso de restricciones, los que tienen coeficientes imprecisos en la función objetivo, y los que tienen los valores de la matriz tecnológica vagamente definidos.

3.1. PL CON RESTRICCIONES DIFUSAS

Consideramos el caso en el que un decisor asume que puede haber cierta tolerancia en el cumplimiento de las restricciones. Para cada restricción esta suposición se puede representar de la forma

$$a_i x \lesssim b_i, \ i = 1,2, ..., m,$$

y modelarla por medio de una función de pertenencia

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i x \leq b_i \\ f_i(a_i x) & \text{si } b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si } a_i x \geq b_i + d_i \end{cases}$$

Estas funciones expresan que el decisor tolera violaciones en cada restricción hasta un valor b_i+d_i, $i = 1, ..., m$. Por otra parte, las funciones

f_i se asumen no decrecientes y continuas, para la desigualdad $\tilde{<}$.

La funcione μ_i se define para cada $x \in X$ y da el grado de cumplimiento de la i-ésima restricción para $x \in X$.

El problema asociado se representa de la siguiente forma

$$
\begin{array}{l}
\text{Max: } z = cx \\
\text{s.a:} \\
\qquad Ax \;\tilde{<}\; b, \\
\qquad x \geq 0
\end{array}
\tag{1.1}
$$

Este problema fué formalmente descrito en [67, 83]. Para su resolución hay diferentes aproximaciones [67, 70, 83]. En particular, haciendo uso del teorema de representación para conjuntos difusos [49], en [70] se demostró que se puede obtener una solución difusa de (1.1) que contiene como valores particulares las soluciones obtenidas en [67, 83]. Esta solución difusa se obtiene de la solución del siguiente problema de PL paramétrica

$$
\begin{array}{l}
\text{Max: } z = cx \\
\text{s.a:} \\
\qquad Ax \leq g(\alpha), \\
\qquad x \geq 0, \; \alpha \in (0,1]
\end{array}
\tag{1.2}
$$

donde el vector $g(\alpha)$ se define como la función inversa de las funciones f_i, $i = 1, ..., m$. Obviamente, la linealidad de (1.1) se conserva.

3.2. PL CON COSTOS DIFUSOS

Consideramos un problema de PL con objetivo difuso, esto es,

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = \tilde{c}x \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{1.3}$$

donde $\tilde{c}$ es un vector n-dimensional de números, $\underset{\sim}{c_j} \in F(\mathbf{R})$, $F(\mathbf{R})$ es el conjunto de los números difusos en la recta real, caracterizados por su función de pertenencia. En particular estas funciones de pertenencia se supondrán de la forma

$$\mu_j : \mathbf{R} \longrightarrow (0,1], \quad j \in N$$

$$\mu_j(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq r_j \text{ ó } u \geq \underline{c}_j \\ h_j(u) & \text{si } r_j \leq u \leq \underline{c}_j \\ g_j(u) & \text{si } \bar{c}_j \leq u \leq R_j \\ 1 & \text{si } u \geq R_j \end{cases}$$

donde $h_j(\cdot)$ y $g_j(\cdot)$ son funciones continuas estrictamente crecientes y decrecientes, respectivamente, tales que, $h_j(\underline{c}_j) = g_j(\bar{c}_j) = 1$, $\forall\ j \in N$.

Existe una gran gama de funciones h_j y g_j, lineales, exponenciales, logarítmicas, parabólicas cóncavas y convexas, etc. Se suelen considerar números trapezoidales con funciones $h_j(.)$ y $g_j(.)$ lineales. Así para el número $(r_j, \underline{c}_j, \bar{c}_j, R_j)$ estas funciones vendrán dadas de la forma:

$$\forall\ u \in \mathbf{R} \qquad h_j(u) = \begin{cases} (u-r_j)/(\underline{c}_j - r_j) & r_j \le u \le \underline{c}_j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$g_j(u) = \begin{cases} (R_j-u)/(R_j-\bar{c}_j) & \bar{c}_j \le u \le R_j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{1.4}$$

Para resolver (1.3) hay diferentes aproximaciones [15, 59, 68]. En [18] se demuestra que el método propuesto en [15] da un contexto formal para encontrar la solución de (1.3). La solución difusa de este problema se puede obtener de la solución del siguiente problema paramétrico multiobjetivo

$$\begin{aligned} \text{Max:}\ & z = [c^1x,\ c^2x,\ \ldots,\ c^{2^n}x] \\ \text{s.a:}\ & \\ & Ax \le b,\ x \ge 0, \\ & c^k{}_j \in \{h_j^{-1}(1-\alpha),\ g_j^{-1}(1-\alpha)\} \\ & \alpha \in [0,1],\ k = 1,\ \ldots,\ 2^n \end{aligned} \tag{1.5}$$

3.3. PL CON NUMEROS DIFUSOS EN LA MATRIZ TECNOLOGICA

El modelo más general es aquel donde se consideran los coeficientes de la matriz tecnológica como números difusos y se consideran restricciones difusas. Se describe de la forma

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad \tilde{a}_i x \ \tilde{<}\ \tilde{b}_i,\ i \in M, \qquad (1.6) \\ &\qquad x \geq 0, \end{aligned}$$

donde para cada $i \in M$, $\tilde{a}_i = (\tilde{a}_{i1}, ..., \tilde{a}_{in})$. Si $T(\mathbf{R})$ es el conjunto de números difusos reales, entonces $\tilde{a}_{ij} \in T(\mathbf{R})$, $j \in N = \{1, ..., n\}$, $\tilde{b}_i \in T(\mathbf{R})$ y $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}^n$.

Como el decisor conoce con falta de precisión los valores de $\tilde{a}_i$ y $\tilde{b}_i$ en cada restricción de (1.6), puede permitir alguna violación en el cumplimiento de cada una de ellas, $\tilde{t}_i$. En [16] se propone un método de resolución para el modelo general (1.6). La aproximación consiste en la sustitución del conjunto de restricciones de (1.6) por el siguiente conjunto difuso convexo:

$$\tilde{a}_i x \ \boxed{\leq}\ \tilde{b}_i + \tilde{t}_i(1-\alpha),\ i \in M,\ \alpha \in (0,1]$$

donde $\tilde{t}_i$ es un número fijado por el decisor que nos da la violación tolerada en la restricción, y $\boxed{\leq}$ es una relación entre tales números. Así el problema (1.6) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad \tilde{a}_i x \ \boxed{\leq}\ \tilde{b}_i + \tilde{t}_i(1-\alpha),\ i \in M, \qquad (1.7) \\ &\qquad x \geq 0,\ \alpha \in (0,1] \end{aligned}$$

En [9], la solución al problema originalmente planteado se obtiene por particularización, en el problema auxiliar, de la relación $\boxed{\leq}$ para cada diferente método de comparación de números difusos.

4. METODOS DE RESOLUCION PARA PROBLEMAS DE PE

Antes de entrar a describir el funcionamiento de los diversos métodos que existen para resolver problemas de PE, necesitamos saber la forma en que vamos a agrupar tales problemas, puesto que de esta agrupación se deducirá la clasificación de los métodos.

Una primera forma de clasificar los algoritmos sería distinguiendo, de un lado, aquellos que no trataran mas que problemas en los que todas las variables fueran enteras y, por otro, los que consideraran problemas con variables enteras o mixtas. A su vez, dentro de cada una de estas dos clases, podrían destacarse los algoritmos que no tuvieran en cuenta mas que variables booleanas, {0,1}, de aquellos que aceptaran cualquier variable entera. Sin embargo, con esta forma de operar no conseguiriamos aunar los distintos enfoques de resolución de problemas de PE, sino una clasificación de los mismos independiente del enfoque de resolución seguido.

Para evitar ese efecto, y de cara a la construcción de métodos que sirvan a nuestros propósitos más adelante, describiremos las lineas maestras de las tres grandes clases de enfoques convencionales para la resolución de problemas de PE: los métodos de truncadura o corte (planos de corte), los de enumeración explícita (branch and bound) y los de enumeración implícita. Otro tipo de enfoques, como los de particionamiento de Benders o los basados en la estructura teórica de grupo, no los citaremos porque no tienen el carácter fundamental de los anteriores, sino que son un poco más especializados, [27, 66].

4.1. METODOS DE CORTE

Estos métodos (también llamados de truncadura) buscan reestructurar el espacio de soluciones factibles imponiendo algunas restricciones, especialmente diseñadas, al espacio original, de modo que el punto factible óptimo requerido se exprese como un auténtico punto extremo del espacio solución modificado. La idea que se persigue es que estas restricciones adicionales eliminen sistemáticamente, recortandolas, las porciones del espacio solución que no vayan a incluir nunca un punto factible. El primer algoritmo de truncadura finito lo desarrolló Gomory en 1958 para el problema entero puro, demostrando como los sucesivos cortes pueden construirse sistemáticamente desde la tabla del algoritmo simplex del problema continuo correspondiente. Mas adelante extendió este método para, definitivamente, establecer tres algoritmos de corte. La característica común de los cortes que se usan es que los algoritmos asociados son todos de tipo dual, es decir, tales que la solución al problema no se conoce hasta que el algoritmo termina.

Mas concretamente, consideremos un problema entero puro y su correspondiente versión continua (exenta de cualquier condición de integridad).

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s.a:} & \\ & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i \in M \\ & x_j \geq 0, \; j \in N \end{array} \tag{1.8}$$

Supongamos que hemos obtenido la solución optimal de este último problema. Tendremos

$$z = \bar{c}_o - \sum_{j \in NB} \bar{c}_j x_j \qquad (1.9)$$

$$x_i = x_i^* - \sum_{j \in NB} \alpha_{ij} x_j \qquad i \in M \qquad (1.10)$$

$$x_i,\ x_j \geq 0,\ i \in M,\ j \in NB \qquad (1.11)$$

donde NB es el conjunto de índices de variables no básicas.

Evidentemente, la solución continua estará dada por,

$$x_i = x_i^* \geq 0,\ i \in M \qquad (1.12)$$

$$x_j = 0,\ j \in NB \qquad (1.13)$$

$$z = \bar{c}_o \qquad (1.14)$$

y lo que interesa es que todas las variables sean enteras. Para ello multiplicando (1.10) por $h \neq 0$, nos queda

$$hx_i + \sum_{j \in NB} h\ \alpha_{ij} x_j = hx_i^* \qquad (1.15)$$

Entonces, si $x_i \geq 0$, tenemos

$$[h]x_i + \sum_{j \in NB} [h\alpha_{ij}]x_j \leq hx_i^* \qquad (1.16)$$

y como queremos que todas las variables sean enteras, el primer miembro de (1.16) debe ser entero. Por tanto, el primer miembro de (1.16) no puede superar la parte entera del segundo, por lo que

$$[h]x_i + \sum_{j\in NB} [h\alpha_{ij}]x_j \leq [hx_i^*] \tag{1.17}$$

Si, ahora, multiplicamos (1.10) por [h] y le restamos (1.17), nos queda

$$\sum_{j\in NB} ([h]\alpha_{ij} - [h\alpha_{ij}])x_j \geq [h]x_i^* - [hx_i^*] \tag{1.18}$$

que es la restricción fundamental, o corte.

Según el modo en que se use (1.18), se obtienen una gran variedad de cortes distintos y, consecuentemente, de algoritmos de planos de corte. Al respecto, no entraremos en más detalles por ahora, pero lo haremos más adelante.

4.2. METODOS DE ENUMERACION EXPLICITA

Se basan en el uso de arboles de enumeración, y con generalidad suelen llamarse Metodos Branch and Bound (de ramificación y acotación).

El típico enfoque Branch and Bound se describe como sigue: Sea S un conjunto arbitrario. Supongamos que asociada a cada elemento de S hay una función (objetivo) valuada real $z:S \longrightarrow \mathbf{R}$ que ordena los elementos s_i de S. El problema es determinar, en terminos de z, el mejor elemento $s^* \in S$, es decir, resolver el problema

$$\text{Max } \{z(s_i) \ / \ s_i \in S\}$$

Como el número de elementos de S puede ser tan grande que haga inútil la enumeración, aqui es donde el Principio General Branch and Bound se muestra eficaz. Según el, para la resolución de un problema se supone que:

1) Existe un conjunto T que contiene al S, y una función valuada real $w{:}T \longrightarrow \mathbf{R}$ que extiende z, es decir, $w(t_j) = z(t_j)$, $\forall t_j \in S$.

2) Puede definirse una regla de ramificación, que se construye para generar una familia de subconjuntos $\{T^k\}$ del subconjunto $T^k \subseteq T$, es decir,

$$B(T^k) = \{T_1^k, \ldots, T_q^k\}, \; |T^k| \geq 2$$

dado que

$$\bigcup_{i=1}^{q} T_i^k = T^k - \{t_{jk}\}$$

estando los t_{jk} definidos por

$$w^k = w(t_{jk}) = \mathrm{Max}\ \{w(t_j)/t_j \in T^k\}$$

3) T, w y B deben relacionarse de modo que permitan determinar facilmente, para cada $T^k \subseteq T$, una cota superior del valor del objetivo para cualquier $t_j \in T^k$.

Con estos ingredientes básicos el método Branch and Bound progresa desde la solución continua del correspondiente problema inicial, ramificandolo conforme indica B, segun se vayan imponiendo las sucesivas restricciones de integridad, con lo que van apareciendo los respectivos subconjuntos (subproblemas) T^k. Un subconjunto T^k, generado por B, se llama activo si no ha sido examinado. Entonces, para acelerar el proceso, también se determina una cota inferior $\underline{z}$ en un $s_j \in S$ optimal, como el valor de w asociado a cualquier $t_j \in S$. Asi, $\underline{z}$ puede usarse para no considerar todos los subconjuntos activos T^k cuyo valor optimal w^k no llegue a igualar a $\underline{z}$, es decir, dado

$$\bar{w} = \text{Max } \{w^k / T^k \text{ activo}\}$$

se dejan para posterior inspección aquellos T^k tales que $\underline{z} < w^k < \bar{w}$. Ahora bien, todos los T^k con $w^k \leq \underline{z}$, se podran desechar directamente.

Entre las realizaciones de los métodos Branch and Bound destaca el algoritmo de Lang-Doig para problemas enteros, al que más adelante nos referiremos.

4.3. METODOS DE ENUMERACION IMPLICITA

Reciben este nombre una clase de algoritmos especificamente diseñados para el caso en que las variables tienen que tomar, exclusivamente, valores cero o uno.

Consideremos un problema booleano

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & z = \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \\ & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in M \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \end{aligned} \tag{1.19}$$

para resolverlo, los algoritmos de busqueda enumeran, implícita o explícitamente, los 2^n posibles vectores 0-1. Igual que en los métodos Branch and Bound, un método de enumeración implícita puede relacionarse con un arbol compuesto por nodos y ramas. Ahora, un nodo corresponde a un valor 0-1 de x. Una rama une dos nodos que son mutuamente accesibles, el uno desde el otro, en una etapa si se aplica la regla de ramificación del algoritmo. Los dos nodos difieren en el estado de una de las variables dado que, cada variable, puede encontrarse en uno solo de los tres posibles siguientes estados: fijada en el valor 1, fijada en el 0, o libre (sin fijar todavía).

La definición de nuevos nodos aquí se hace fijando alguna variable en el valor 1 (realizando lo que se llama una etapa progresiva), y se vuelven a revisar (etapas regresivas) despues de haber fijado alguna de las variables en el valor 0. Las reglas de ramificación son, relativamente, rígidas ya que se sigue un único camino a lo largo de todo el arbol construido hasta que, en su último nodo, no queden variables libres.

Entonces, se realizan una o más etapas regresivas hasta que se revisa algun nodo para, a partir de él, comenzar la creación de nuevos nodos. Si se define el nivel de un nodo como el número de variables que tienen valor 1, el proceso enumerativo puede implementarse manteniendo la pista de aquellas variables que estan fijadas en cero, y arrastrando el valor que tenia el nivel cuando se la fijó.

Notemos x^u un nodo x cuando tiene u variables fijadas en uno. La enumeración, generalmente, comienza en el punto x^o con todas las variables libres, y el método básico es el siguiente:

1) Se fijan todas las variables libres x_k de x^u (inicialmente tenemos $x^u = x^o$) en el valor 1.

2) Se resuelve el subproblema que queda con las restantes variables libres tomadas como continuas.

3) Se fija x_k en el valor 0 (o se elimina x_k del nivel u), y

4) Se repite el proceso para el nuevo problema en el que aparece x_k fijada en el valor cero.

Este enfoque básico implica un estado general en el proceso de búsqueda en el que hay u variables fijadas en 1, otras c estan fijadas en 0, y hemos de resolver el subproblema entero correspondiente a las restantes $l = n - (u+c)$ variables libres. Resolver tal subproblema significa enumerar, implícita o explícitamente, cada uno de los 2^l puntos x que tienen esas u y c variables en uno y cero, respectivamente. El método mas conocido para realizar este tipo de enumeración implícita es el llamado Algoritmo de Balas.

Conocidos los tres enfoques de resolución más destacados, hay que resaltar la notable conexión existente entre dos de ellos. En efecto, desde el punto de vista teórico puede decirse que los métodos de planos de corte han recibido la mayor atención, aunque desde una perspectiva generosa la distinción entre métodos de planos de corte y métodos branch and bound es difícil. En realidad, el branch and bound puede verse como un método de cortes provisionales. Desde el punto de vista práctico, los métodos de propósito general más efectivos son los que hacen uso del branch and bound, entendido en su sentido más genérico, de modo que la colección de cortes provisionales se obtiene simplemente restringiendo variables enteras para obtener cotas superiores e inferiores.

La teoría de los planos de corte se ha usado para mejorar el enfoque branch and bound básico, principalmente generando los cortes a imponer antes de iniciar el proceso branch and bound (incluso, en algunos casos, justo antes de seleccionar la siguiente rama). Pero esto entendido desde una perspectiva teórica porque, sin embargo, cuando hay que resolver un problema, los cortes que suelen usarse son aquellos que son más faciles de generar y obtener.

De cualquier modo, como con los métodos de corte y los Branch and Bound podemos resolver cualquiera de los distintos problemas de PE que podamos plantear, ya sean booleanos, enteros mixtos o enteros puros, en lo sucesivo consideraremos solo estos dos grandes enfoques de resolución de problemas de PE.

A continuación pasamos a estudiar métodos para resolver problemas de PE paramétricos, es decir, problemas en los que algunos de los elementos que intervienen en el problema dependen de un parámetro.

5. METODOS DE RESOLUCION PARA PROBLEMAS DE PE PARAMETRICA

Si la PE presenta inconvenientes computacionales en comparación con la PL, los problemas de PE paramétrica tienen más dificultades de cara a su resolución. No obstante pueden encontrarse en la literatura especializada algunas contribuciones a este tema, [2, 4, 5, 6, 28, 34, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 48, 52, 56, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 69, 73]. Aquí describiremos diversos métodos correspondientes a:

1) Problemas de Programación Lineal Entera con función objetivo paramétrico, este método será válido tanto para problemas puros como para problemas mixtos, además será de igual forma válido para problemas de Programación Lineal Entera y Booleana.

2) Métodos para resolver problemas de PLE Mixta con el vector de márgenes de la derecha paramétrico, de la forma $b + d(1-\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$. Aquí debemos distinguir diferentes métodos para Programación Lineal Entera y Booleana. Por último,

3) Un método de resolución de problemas de PL con los coeficientes de la función objetivo tomando valores en intervalos, para ello se hace uso de la aritmética intervalar.

5.1. PLE CON FUNCION OBJETIVO PARAMETRICA

Consideramos el problema $P(\alpha)$,

$$\begin{aligned} \text{Max: } & (F + G\alpha)x \\ \text{s.a: } & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \geq 0, \ x_j \in \mathbf{N}, \\ & \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{1.20}$$

Asumimos que $P(\alpha)$ tiene solución factible para todo $\alpha \in [0,1]$. Llamemos $z(\alpha)$ a la solución de $P(\alpha)$. Entonces $z(\alpha)$ es una función lineal a trozos, y convexa en α para $0 \leq \alpha \leq 1$, [28].

Nos detendremos en él debido a que este modelo se obtendrá al desarrollar los problemas de Programación Discreta con costos difusos. Seguiremos el método propuesto en [37] para su resolución de este problema.

Definimos $x(\alpha_1)$ como el valor optimal para $P(\alpha)$ cuando $\alpha = \alpha_1$, y se define

$$z(\alpha, x(\alpha_1)) = \text{Max } \{(F+G\alpha)x \ / \ Ax \leq b, \ x_j \in \mathbf{N}, \ x = x(\alpha_1)\}$$

Ademas si $x(\alpha_1)$ y $x(\alpha_2)$ son las soluciones de $P(\alpha)$ para α_1 y α_2 respectivamente con $\alpha_1 < \alpha_2$ y $z(\alpha_2,x(\alpha_1)) = z(\alpha_2,x(\alpha_2))$ entonces $x(\alpha_1)$ es la solución optimal de $P(\alpha)$ para todo $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$.

La convexidad de $z(\alpha)$ se puede utilizar para definir funciones en α, las cuales sean cota superior y cota inferior de $z(\alpha)$, $z^s(\alpha)$ y $z^i(\alpha)$ respectivamente. Así para aquél rango de α para el cual coincidan la cota superior e inferior, $z(\alpha)$ coincide con ambas.

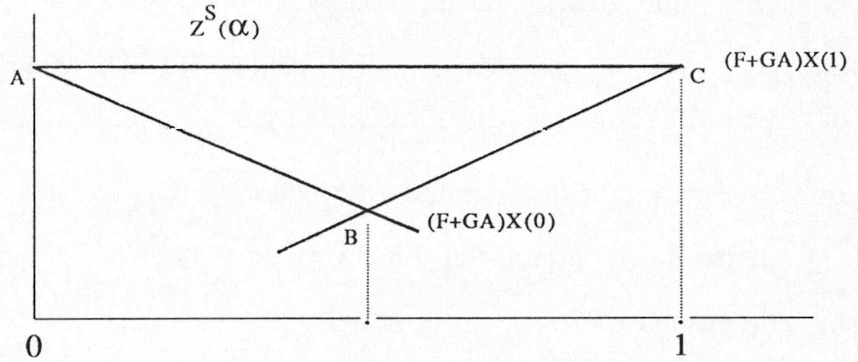


FIG. 1

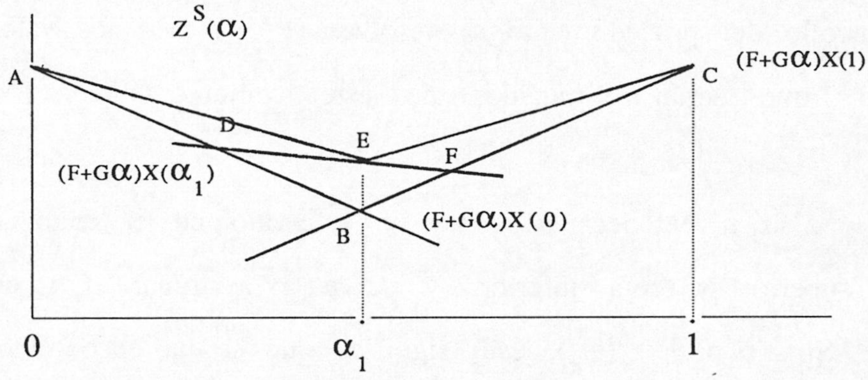


FIG.2

En primer lugar se resuelve P(0). La linea AB de la Fig. 1 nos representa $z(\alpha,x(0)) = (F+G\alpha)x(0)$. Se resuelve P(1) y la línea BC nos representa $z(\alpha,x(1)) = (F+G\alpha)x(1)$. Entonces por la convexidad, ABC nos representa $z^i(\alpha)$, mientras que la línea recta que une los puntos A y C nos representa la cota superior $z^S(\alpha)$.

A continuación se resuelve $P(\alpha_1)$ donde α_1 se define como el punto intersección B. Dada una nueva solución, el vector $x(\alpha_1)$, que produce la recta $z(\alpha,x(\alpha_1))$, representada en la Fig. 2 por la línea DEF, ahora la función cota inferior vendrá dada por ADEFC y la función cota superior por AEC.

A continuación se resuelve el problema $P(\alpha_2)$, donde α_2 es el punto intersección D. Si ocurre que $z(\alpha_2)$ coincide con D entonces $z^i(\alpha) = z^S(\alpha) = z(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0,\alpha_1]$, y por tanto tenemos identificadas las soluciones optimales en el intervalo $[0,\alpha_1]$.

Este procedimiento opera con un conjunto de valores $\{\alpha_i\}$ en los cuales hay que resolver el problema de Programación Entera y otro conjunto de valores $\{\alpha_j\}$ para los cuales ha sido resuelto $P(\alpha_j)$.

Para cada elemento del conjunto $\{\alpha_j\}$, valores de α y que actuan como vértices de la función cota inferior, $z^i(\alpha)$, el conjunto $\{z(\alpha_j)\}$ contiene los correspondientes máximo valores de $z(\cdot)$. Las soluciones optimales se almacenarán en el conjunto $\{x(\alpha_j)\}$.

En el desarrollo del procedimiento se resolverá $P(\alpha_k)$ para los valores α_k del conjunto $\{\alpha_i\}$, que serán eliminados de este conjunto al ser resuelto el problema.

Si $z(\alpha_k) = z^S(\alpha_k)$, entonces se tiene un intervalo en el cual coinciden la función cota superior y cota inferior, y se pasa a tomar otro elemento de conjunto $\{\alpha_i\}$. Si $z(\alpha_k) \neq z^S(\alpha_k)$, esto significa que se ha encontrado un nuevo vector optimal $x(\alpha_k)$. La intersección de la recta $z(\alpha,x(\alpha_k))$ con la parte de $z^i(\alpha)$ que queda a la izquierda y derecha de α_k define nuevos valores α_k' y α_k'' respectivamente, que pasan a formar parte del conjunto $\{\alpha_i\}$.

Se ha estudiado en [37] que el promedio de problemas a resolver es 2n-1, cuando n es el número de diferentes soluciones optimales encontradas para $\alpha \in [0,1]$. El algoritmo queda como sigue:

Algoritmo

Paso 0. Resolver P(0) y P(1). Inicializar

$$z^S(\alpha) = z(0) + (z(1)-z(0))\alpha, \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Meter $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ en $\{\alpha_j\}$. Meter $x(0)$ y $x(1)$ en $\{x(\alpha_j)\}$.

Si $z(1,x(0)) = z(1,x(1))$ entonces Ir al paso 7.

Sea α_k tal que $z(\alpha,x(0)) = z(\alpha,x(1))$

$$z^i(\alpha) = \begin{cases} z(\alpha_k,x(0)) & \text{si } \alpha\in[0,\alpha_k] \\ z(\alpha_k,x(1)) & \text{si } \alpha\in[\alpha_k,1] \end{cases}$$

Meter α_k en $\{\alpha_i\}$.

Paso 1. Si el conjunto $\{\alpha_i\}$ es vacío el análisis está finalizado. Ir al Paso 7.

Paso 2. Coger $\alpha_k = \min\{\alpha_i\}$ y resolver $P(\alpha_k)$.

Paso 3. Si $z(\alpha_k) = z^s(\alpha_k)$ entonces Ir al paso 1.

si no Meter α_k en $\{\alpha_j\}$ y $x(\alpha_k)$ en $\{x(\alpha_j)\}$.

Paso 4. Sea $\alpha^s = \min\{\alpha_j / \alpha_j > \alpha_k\}$.

Si $z(\alpha^s,x(\alpha_k)) = z(\alpha^s,x(\alpha^s))$ entonces $\alpha_k'' = \alpha^s$

si no Calcular el valor α_k'' el cual verifica $z(\alpha,x(\alpha_k)) =$

$= z(\alpha,x(\alpha^s)) = z^s(\alpha_k'')$. Poner α_k'' en el conjunto $\{\alpha_i\}$.

Paso 5. Sea $\alpha^i = \max\{\alpha_j / \alpha_j < \alpha_k\}$.

Si $z(\alpha^i,x(\alpha_k)) = z(\alpha^i,x(\alpha^i))$ entonces $\alpha_k' = \alpha^i$

si no Calcular el valor α_k' el cual verifica $z(\alpha,x(\alpha_k)) =$

$z(\alpha,x(\alpha^i)) = z^s(\alpha_k')$. Poner α_k' en el conjunto $\{\alpha_i\}$.

Paso 6. Actualizar $z^s(\alpha)$ y $z^i(\alpha)$.

$$z^s(\alpha) = z(\alpha_k) + (\alpha_k-\alpha)(z(\alpha^i)-z(\alpha_k))/(\alpha_k-\alpha^i) \quad \forall\alpha\in[\alpha^i,\alpha_k]$$

$$z^S(\alpha) = z(\alpha_k) + (\alpha_k-\alpha)(z(\alpha^S)-z(\alpha_k))/(\alpha_k-\alpha^S) \quad \forall\alpha\in[\alpha_k,\alpha^S]$$

$$z^i(\alpha) = z(\alpha,x(\alpha_k)) \quad \forall\alpha\in[\alpha_k',\alpha_k'']$$

Paso 7. $z(\alpha) = z^S(\alpha)$ y el conjunto de puntos optimales es $\{x(\alpha_j)\}$.

Paso 8. Fin.

5.2. PLE MIXTA CON VECTOR DE LA DERECHA PARAMETRICO

Supongamos que tenemos que resolver el siguiente problema $P(\alpha)$

$$\begin{aligned}
\text{Max: } & z(\alpha) = cx + hy \\
\text{s.a: } & \\
& a_i x + q_i y \leq b_i + d_i(1-\alpha),\ i \in \mathbf{M} \\
& x_l \geq 0,\quad l \in L \\
& y_j \geq 0,\quad y_j \in \mathbf{N},\ j \in J \\
& \alpha \in [0,1]
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Como antes, nos detendremos en este algoritmo porque será utilizado para resolver problemas que provienen del estudio de modelos de PLE Mixta con restricciones difusas. Para su resolución, seguiremos el método propuesto en [37].

Se define

$$z(\alpha) = \text{Max } \{cx+hy/\ Ax + Qy \leq b + d(1-\alpha),\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y_j\in\mathbf{N},\ j\in J,\ \alpha\in[0,1]\}$$

Cambios en α modifican el espacio de soluciones. Si un valor de α no permite solución factible, entonces $z(\alpha)$ tomará el valor $-\infty$. Asumimos que $P(\alpha)$ tiene solución factible en α_1, definimos $x(\alpha_1)$ e $y(\alpha_1)$ como valores optimales de x e y respectivamente.

Se define

$$z(\alpha, y(\alpha_1)) = \text{Max } \{cx/ \ Ax \leq b + d(1-\alpha) - Qy, \ x\geq 0, \ y = y(\alpha_1), \ \alpha\in[0,1]\}$$

que es monótona no creciente en α.

Si $y(\alpha_1)$ no permite una solución factible en α_2, entonces $z(\alpha_2,y(\alpha_1)) = -\infty$. $z(\alpha,y(\alpha_1))$ es el valor optimal solución del problema lineal cuando α se cambia, con $y(\alpha_1)$ fijo, y es una función sobre los valores de α, lineal a trozos, convexa que permite una solución factible. Así $z(\alpha)$ será continua sobre el rango de α para el cual $y(\alpha_1)$ es optimal. Sin embargo, $z(\alpha)$ puede tener discontinuidades de salto donde $y(\cdot)$ cambia.

Puede obtenerse una cota superior sobre los valores de $z(\alpha)$ de la siguiente forma. En primer lugar consideremos que la relación, $z(\alpha_1) \geq z(\alpha_1, y(\alpha_2))$, que es siempre verdad y de poca utilidad si $y(\alpha_2)$ es infactible en α_1 porque entonces $z(\alpha_1, y(\alpha_2)) = -\infty$. Sin embargo, como $d \geq 0$, y si $\alpha_2 > \alpha_1$, $P(\alpha_2) \subset P(\alpha_1)$, entonces $z(\alpha_1) \geq z(\alpha_1,y(\alpha_2)) \geq z(\alpha_2)$, y si $P(\alpha)$ tiene solución factible en α_2, entonces $y(\alpha_2)$ será factible en α_1, [28].

Desafortunadamente, aquí no existe un resultado general comparable a la convexidad de $z(\alpha)$ en el problema anterior que nos permita asegurar que $P(\alpha)$ se puede resolver para todo α, $0 \leq \alpha \leq 1$. El algoritmo se desarrolla de forma análoga al anteriormente dado para el problema (1.20).

Si $y(\alpha_1) = y(\alpha_2)$ asumimos que $y(\alpha_1)$ es optimal para todo $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

El algoritmo a aplicar se seguirá del siguiente análisis: Asumimos que $P(\alpha)$ tiene una solución factible para todo α, tal que $0 \leq \alpha \leq 1$, lo que proporciona una acotación sobre $z(\alpha)$ para $0 \leq \alpha \leq 1$. (Fig 3.) ya que $z(\alpha) \geq z(\alpha, y(\alpha_1))$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$.

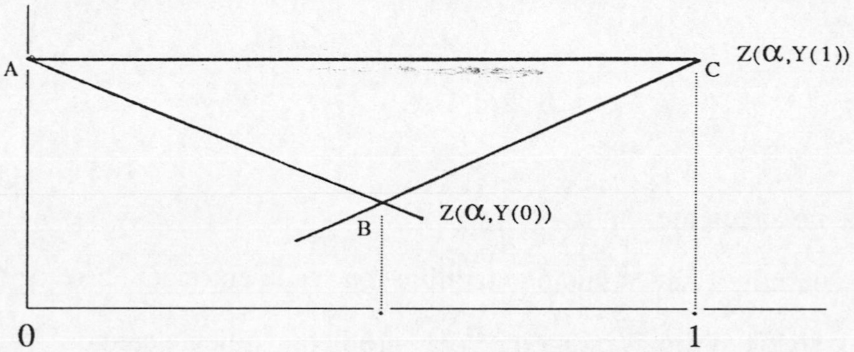


FIG. 3

la línea AB representa z(α,y(0)) y la línea BC representa z(α,y(1)). La línea AC acota superiormente a z(α) y ABC nos da una cota inferior de z(α).

A continuación se resuelve el problema para α_1, donde α_1 es el valor de α en el cual $z(\alpha_1, y(0)) = z(\alpha, y(1))$, y se realiza un análisis paramétrico del problema de PL fijado $y = y(\alpha_1)$.

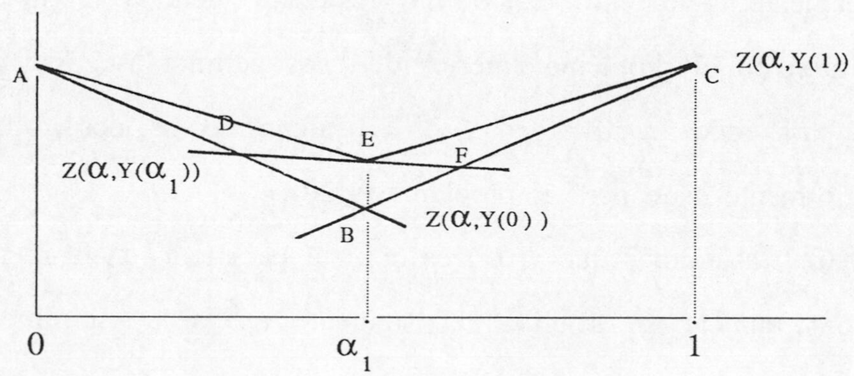


FIG.4

La línea DEF nos indica los valores de $z(\alpha,y(\alpha_1))$. Ahora AEC nos da una cota superior de $z(\alpha)$ y ADEFC una cota inferior de la misma. El procedimiento continuará hasta que cota superior e inferior coincidan definiendo $z(\alpha)$ para $0 \leq \alpha \leq 1$. Cuando esto ocurra el problema estará resuelto.

Así el procedimiento a utilizar opera con dos conjuntos de valores de α. Un conjunto $T = \{\alpha_i\}$, que contiene valores para los cuales se tiene que resolver el problema de Programación Lineal Entera Mixta, y el otro conjunto $R = \{\alpha_j\}$ que contiene valores para los cuales el problema de PLEM ha sido resuelto.

En el procedimiento algunos valores $\bar{\alpha}$ se van eliminando de T, y el problema entero mixto se resuelve para los mismos. Entonces se fijan las variables enteras $y(\bar{\alpha})$, y se hace el análisis paramétrico del problema lineal.

El conjunto T se inicializa con los valores de $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. Los siguientes valores de α_i se calculan como aquellos que, dados los $y(\alpha_1)$ e $y(\alpha_2)$ encontrados anteriormente en el procedimiento, ocurre que $z(\alpha_i, y(\alpha_1)) = z(\alpha_i, y(\alpha_2))$. El procedimiento opera eligiendo el siguiente valor para el cual resolvemos el problema de PLEM como $\bar{\alpha} = \max \{\alpha_i\}$. El algoritmo es el siguiente:

Algoritmo

Paso 0. Introducir $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ en el conjunto T.

Paso 1. Si T es vacio entonces Ir al paso 8

Paso 2. Sacar $\bar{\alpha} = \max \{\alpha_i\}$

Definir $\alpha^S = \min \{\alpha_j / \alpha_j > \bar{\alpha}\}$

Utilizar como base la información de $P(\alpha^S)$ y $z(\alpha, y(\alpha^S))$ como cota inferior sobre $z(\alpha)$.

Paso 3. Si $y(\bar{\alpha}) = y(\alpha^S)$ entonces Ir al paso 1.

Paso 4. Definir $\alpha^i = \max \{\alpha_j / \alpha_j < \bar{\alpha}\}$

Si $y(\bar{\alpha}) = y(\alpha^i)$ entonces Ir al paso 1.

Paso 5. Realizar un análisis paramétrico del problema de PL para $0 \leq \alpha \leq 1$ con variables enteras fijadas $y(\bar{\alpha})$.

Poner $\bar{\alpha}$ en el conjunto R.

Paso 6. Determinar el valor α_i' tal que $z(\alpha_i', y(\bar{\alpha})) = z(\alpha_i', y(\alpha^S))$.

Poner α_i' en el conjunto T.

Paso 7. Determinar el valor α_i'' tal que $z(\alpha_i'', y(\bar{\alpha})) = z(\alpha_i'', y(\alpha^i))$.

Poner α_i'' en el conjunto T. Ir al paso 1.

Paso 8. FIN.

En el paso 6 es posible que $z(\alpha_i', y(\bar{\alpha})) \neq z(\alpha_i', y(\alpha^S))$ para todo α_i', $\bar{\alpha} \leq \alpha_i' \leq \alpha^S$. Esto ocurre si $y(\bar{\alpha})$ se hace infactible cuando α crece desde $\bar{\alpha}$. Entonces α_i' se toma como el valor de α justo después de ser infactible $y(\bar{\alpha})$, es decir, como el valor

$$\min_{\bar{\alpha} \leq \alpha_i' \leq \alpha^S} \{\alpha_i' / z(\alpha_i', y(\bar{\alpha})) = -\infty\}$$

Similarmente en el paso 7, si $z(\alpha'', y(\bar{\alpha})) \neq z(\alpha'', y(\alpha^i))$ para todo α_i'', $\alpha^i \leq \alpha_i'' \leq \bar{\alpha}$, entonces α_i'' se define como

$$\max_{\alpha^i \leq \alpha_i'' \leq \bar{\alpha}} \{\alpha_i'' / z(\alpha_i'', y(\bar{\alpha})) = -\infty\}$$

5.3. PLB MIXTA CON VECTOR DE LA DERECHA PARAMETRICO

Consideremos la resolución del siguiente problema de Programación Lineal Booleana Mixto paramétrico, P(α)

$$
\begin{aligned}
\text{Min: } & z = cx + hy \\
\text{s.a:} & \\
& a_i x + q_i y \geq b_i - d_i(1-\alpha),\ i \in M \\
& x_l \geq 0,\ l \in L = \{1, 2, \ldots, n_1\}, \\
& y_j \in \{0,1\},\ j \in J = \{1, 2, \ldots, n_2\},\ N = J + L, \\
& \alpha \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Por los mismos motivos anteriores, a continuación estudiamos un algoritmo, desarrollado en [52], que nos permite obtener la solución del problema (1.22). Se aplicará una estrategia Branch-and-Bound para su resolución. Se descenderá de un nodo a otro en el arbol asociado al método Branch-and-Bound añadiendo exactamente una variable adicional con valor fijado 0-1 y así se genera un subproblema mediante estrategias de acotación.

Veamos a continuación el problema $P_k(\alpha)$ asociado a un nodo K. Se formula como sigue:

$$
\begin{aligned}
\text{Min: } & z_k(\alpha) = cx + \sum_{j \in F_k} h_j y_j + \sum_{j \in S_k^1} h_j \\
\text{s.a:} & \\
& a_i x + \sum_{j \in F_k} h_{ij} y_j \geq b_i - \sum_{j \in S_k^1} h_{ij} - d_i(1-\alpha),\quad i \in M \\
& x_l \geq 0,\quad l \in L, \\
& y_j \in \{0,1\},\ j \in J \\
& \alpha \in T_k
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

donde

S_k^1 es el conjunto de índices de las variables 0-1 fijadas a uno.

S_k^0 es el conjunto de índices de las variables 0-1 fijadas a cero.

F_k es el conjunto de índices de la variables 0-1 libres.

T_k es el conjunto rango del parámetro α para el que se considera el problema $P_k(\alpha)$.

En el nodo raiz, nodo 0, lógicamente tendremos el problema inicial y los conjuntos anteriores tienen los valores:

$$S_0^1 = \varnothing = S_0^0 , \quad F_0 = J, \quad T_0 = [0,1]$$

Como ocurre en los algoritmos-Branch-and-Bound para PE, para resolver el problema $P_k(\alpha)$ se relajarán las condiciones 0-1 sobre las variables y_j, $j \in F_k$. Así se considera el siguiente problema relajado, $\bar{P}_k(\alpha)$, cuya diferencia con $P_k(\alpha)$ es que las variables libres 0-1 del problema, $y_j \in F_k$, pasan a ser variables acotadas en el intervalo [0,1], $0 \leq y_j \leq 1$. Este problema relajado es un problema de programación lineal paramétrico para el cual es fácil obtener su solución paramétrica y ésta será una cota inferior de la solución buscada para $P_k(\alpha)$, puesto que $\bar{P}_k(\alpha)$ es una relajación de $P_k(\alpha)$. Más concretamente, $\bar{P}_k(\alpha)$ es el siguiente problema

$$\begin{array}{ll}
\text{Min:} & cx + \sum_{j \in F_k} h_j y_j + \sum_{j \in S_k^1} h_j \\
\text{s.a:} & \\
& a_i x + \sum_{j \in F_k} h_{ij} y_j \geq b_i - \sum_{j \in S_k^1} h_{ij} - d_i(1-\alpha) \quad i \in M \\
& x_l \geq 0, \quad l \in L, \\
& 0 \leq y_j \leq 1, \quad j \in J \\
& \alpha \in T_k
\end{array} \tag{1.24}$$

Si llamamos $\text{Cotainf}_k(\alpha)$ a la solución de $\bar{P}_k(\alpha)$ tenemos que

$$\text{Cotainf}_k(\alpha) \leq z_k(\alpha) \quad \forall \alpha \in T_k$$

que implica que la función $\text{Cotainf}_k(\alpha)$ puede utilizarse como cota inferior para $z_k(\alpha)$.

También podemos obtener una cota superior a la solución de $P_k(\alpha)$, $z_k(\alpha)$, de la siguiente forma: Se considera una solución parcial del subvector y de variables 0-1, notémosla $\bar{y}^r$. Así se tiene el problema $PS_r(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \text{Min: } & z(\alpha) = cx + h\bar{y}^r = s^r(\alpha) \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \geq b - Q\bar{y}^r - d(1-\alpha), \\ & x_l \geq 0, \ l \in L, \\ & \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{1.25}$$

y se define

$$\text{Cotasup}^r(\alpha) = \begin{cases} s^r(\alpha) & PS_r(\alpha) \text{ tiene solución factible} \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función $\text{Cotasup}^r(\alpha)$ puede definirse para cada uno de los 2^{n_2} vectores $\bar{y}^1 = (0, ..., 0)$, $\bar{y}^2 = (1, ..., 0)$,..., $\bar{y}^{2^{n_2}} = (1, ..., 1)$.

Por tanto

$$z_k(\alpha) = \min_{r \in R} \text{Cotasup}^r(\alpha)$$

donde $R = \{1, ..., 2^{n_2}\}$.

Utilizando esta propiedad, se define una cota superior, Cotasup(α), de la siguiente forma. Si tenemos soluciones parciales para $\bar{y}^r$, $i \in \bar{R}$ ($\bar{R} \in R$), entonces

$$z(\alpha) \leq \underset{r \in \bar{R}}{\mathrm{Min}}\ \mathrm{Cotasup}^r(\alpha) = \mathrm{Cotasup}(\alpha).$$

Notemos $xy_{cs}(\alpha) \in \mathbf{R}^n$ a los valores de las variables (x,y) asociadas a la función cota superior de z(α), Cotasup(α).

El procedimiento a seguir para el problema P(α), es como sigue:

(i) Si existe algún rango de α para el cual $\mathrm{Cotainf}_k(\alpha) \geq \mathrm{Cotasup}(\alpha)$, el correspondiente rango de α puede eliminarse de T_k y si $T_k = \varnothing$, el nodo es desechado.

(ii) Después del test (i), si $T_k \neq \varnothing$ y existe algún rango de α para el cual la solución de $\bar{P}_k(\alpha)$ es solución factible de $P_k(\alpha)$, entonces el correspondiente rango de α se elimina de T_k y se actualiza la función cota superior, Cotasup(α), para el correspondiente rango. Si $T_k = \varnothing$ el nodo K es desechado.

El algoritmo Branch-and-bound es el siguiente:

Algoritmo

Paso 0. $F_0 = \{1, ..., n_2\}$, $S_0^1 = S_0^0 = \varnothing$ y T_0=(0,1].

Paso 1. Resolver $\bar{P}_0$.

Si existe algún rango para el cual $\bar{P}_0(\alpha)$ no tiene solución factible, se elimina este de T_0.

Si T_0 es vacío, entonces P(α) no tiene solución factible para $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ir al paso 10.

Paso 2. Si existe algún rango α para el cual la solución de $\bar{P}_0(\alpha)$ es factible para $P_0(\alpha)$, entonces el correspondiente rango de α es eliminado de T_0 y se construye la función Cotasup(α) y los valores asociados de $xy_{cs}(\alpha)$.

Si T_0 es vacío, entonces se ha obtenido la solución optimal de $P(\alpha)$ para $0 < \alpha < 1$, en otro caso, seguir en el siguiente paso.

Paso 3. Construir la cota superior inicial Cotasup(α) de la soluciones factibles enteras conocidas $\forall\alpha\in T_0$ y sus valores asociados $xy_{cs}(\alpha)$.

Paso 4. Seleccionar una variable 0-1, $y_s \in F_k$, y generar dos nodos (1) y (2) como sigue:

(1) Para $y_s = 1$, $S_1^1 = \{s\}$, $S_1^0 = \varnothing$, $F_1 = \{1, 2, ..., n_2\} \backslash \{s\}$ y $T_1 = T_0$.

(2) Para $y_s = 0$, $S_2^1 = \varnothing$, $S_1^0 = \{s\}$, $F_2 = \{1, 2, ..., n_2\} \backslash \{s\}$ y $T_1 = T_0$.

Sea el conjunto de nodos candidatos o regiones activas $N = \{1,2\}$ y $n=2$.

Paso 5. Si el conjunto de nodos candidatos es vacío, la función cota superior Cotasup(α) es la solución optimal obtenida, $z(\alpha)$, junto con sus valores asociados $xy_{cs}(\alpha)$. Ir al paso 10.

En otro caso, se selecciona un nodo k del conjunto N y se borra el nodo de N.

Paso 6. Resolver $\bar{P}_k(\alpha)$.

Si existe algún rango de α para el cual $\bar{P}_k(\alpha)$ es infactible, lo eliminamos de T_k.

Si T_k es vacío se vuelve al paso 5.

Paso 7. Si existe algún rango de α para el cual $\text{Cotainf}_k(\alpha) \geq \text{Cotasup}(\alpha)$, se elimina el correspondiente rango de T_k.

Si T_k es vacío se vuelve al paso 5.

Paso 8. Si existe algún rango de α para el cual la solución de $\bar{P}_k(\alpha)$ es solución factible de $P_k(\alpha)$, entonces eliminamos éste de T_k, y actualizamos la función cota superior $\text{Cotasup}(\alpha)$.

Si T_k es vacío se vuelve al paso 5.

Paso 9. Se selecciona una variable 0-1 y_s, y se generan dos nodos como sigue:

(n+1) Para $y_s = 1$, $S^1_{n+1}=S^1_k \cup \{s\}$, $S^o_{n+1}=S^o_k$, $F_{n+1}= F_k \backslash \{s\}$, $T_{n+1}=T_k$

(n+2) Para $y_s = 0$, $S^1_{n+2}=S^1_k$, $S^o_{n+2}=S^o_k \cup \{s\}$, $F_{n+2}= F_k \backslash \{s\}$, $T_{n+2}=T_k$

El conjunto de nodos candidatos $N = N \cup \{n+1,n+2\}$, $n = n+2$ y se vuelve al paso 5.

Paso 10. Fin.

5.4. PL CON COEFICIENTES INTERVALARES EN LA FUNCION OBJETIVO

Consideremos un problema de Programación Lineal donde cada coeficiente de la función objetivo es un intervalo. Estudiaremos un método de resolución del mismo propuesto en [36], que hace uso de la aritmética intervalar. Las demostraciones de los resultados que se muestran las omitiremos, pueden verse en [36].

El problema de partida tiene la siguiente forma

$$\text{Max: } z = \sum_{j\in N} A_j x_j$$
$$\text{s.a:}$$
$$\sum_{j\in N} a_{ij}\, x_j \le b_i,\ i \in M \tag{1.26}$$
$$x_j \ge 0,\ j \in N$$

donde A_j son intervalos, en los que varían los respectivos coeficientes. Notaremos por P al problema y por X el conjunto de puntos optimales.

Notemos los intervalos de la forma, $A_j = [a_j^i, a_j^s]$. Estos también pueden notarse por su centro y su amplitud

$$A_j = \langle a_j^c, a_j^w\rangle = \{c_j \ / \ a_j^c - a_j^w \le c_j \le a_j^c + a_j^w,\ c_j \in \mathbf{R}\}$$

donde a_j^c es el centro del intervalo y a_j^w es la amplitud de A_j, y se calculan de la siguiente forma:

$$a_j^c = (a_j^i + a_j^s)/2 \qquad a_j^w = (a_j^s - a_j^i)/2$$

La aritmética intervalar, [1, 47], se basa en la siguiente definición.

Definición 1.7. Sea $\odot \in \{+, -, \cdot, /\}$ una operación binaria sobre **R**. Si A y B son intervalos cerrados, entonces se define una operación binaria sobre el conjunto de intervalos cerrados de la siguiente forma:

$$A \odot B = \{a \odot b /\ a \in A,\ b \in B\} \tag{1.27}$$

para la división se asume que $B \neq \emptyset$.

Puesto que vamos a utilizar operaciones sobre intervalos, se muestra a continuación las que necesitamos haciendo uso de la anterior representación.

$$A_j + B_j = [a_j^i, a_j^s] + [b_j^i, b_j^s] = [a_j^i+b_j^i, a_j^s+b_j^s]$$

$$A_j + B_j = \langle a_j^c, a_j^w\rangle + \langle b_j^c, b_j^s\rangle = \langle a_j^c+b_j^c, a_j^w+b_j^w\rangle$$

$$\forall\ k\in \mathbf{R},\quad kA_j = k[a_j^i, a_j^s] = \begin{cases} [ka_j^i(\alpha), ka_j^s(\alpha)] & k\geq 0 \\ [ka_j^s(\alpha), ka_j^i(\alpha)] & k<0 \end{cases}$$

$$kA_j = k\langle a_j^c, a_j^w\rangle = \langle ka_j^c, ka_j^w\rangle$$

Es importante destacar que como el objetivo tiene coeficientes intervalares, la naturaleza de la relación de orden que induzca debe ser consonante con la de los coeficientes.

A continuación se definen relaciones de orden que representan la preferencia entre los intervalos. Estas se definirán para su empleo en problemas donde se maximiza una función.

En primer lugar se da una relación de orden haciendo uso de los extremos inferior y superior de los intervalos.

Definición 1.8. Se define la relación de orden $\leq_i$ entre dos intervalos $A = [a^i, a^s]$ y $B = [b^i, b^s]$ como

$$\begin{aligned} &A \leq_i B \quad \text{sii} \quad a^i \leq b^i \quad \text{y} \quad a^s \leq b^s \\ &A <_i B \quad \text{sii} \quad A\leq_i B \quad \text{y} \quad A\neq B. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Esta relación de orden representa la preferencia por la alternativa con más altos extremos inferior y superior. De esta definición se obtienen las siguientes propiedades para $\leq_i$.

(i) Si $A \leq_i B$ entonces $a^c \leq b^c$ donde a^c y b^c son los centros de los intervalos A y B respectivamente.

(ii) Si $a^i = a^s$ y $b^i = b^s$, entonces $\leq_i$ se reduce a la relación de orden $\leq$ conocida en la recta real.

También está claro que la relación de orden $\leq_i$ es de orden parcial. Por lo tanto habrá pares de intervalos que no se pueden comparar por la relación $\leq_i$. Por ejemplo si $A = [50, 125]$ y $B = [85, 115]$, entonces ni $A \leq_i B$ ni $B \leq_i A$. En este caso se suele preferir B. En orden a representar esta intuición se define la siguiente relación de orden para los centros y amplitudes de los intervalos.

Definición 1.9. Se define la relación de orden $\leq_c$ entre $A = \langle a^c, a^w \rangle$ y $B = \langle b^c, b^w \rangle$ como sigue

$$\begin{aligned} &A \leq_c B \text{ sii } a^c \leq b^c \text{ y } a^w \geq b^w \\ &A <_c B \text{ sii } A \leq_c B \text{ y } A \neq B. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Por tanto el centro y la amplitud de un intervalo se consideran como los valores esperados y la incertidumbre asociada a un intervalo respectivamente. Así, esta relación de orden representa la preferencia por alternativas con mayor valor esperado y menos incertidumbre asociada. Esta relación de orden es también una relación de orden parcial y es claro que tiene las siguientes propiedades.

i) Si $A \leq_c B$ entonces $a^i \leq b^i$ donde a^i y b^i son los extremos inferiores de A y B respectivamente.

ii) Si $a^w = b^w = 0$ entonces $\leq_c$ se reduce a la relación $\leq$ definida en la recta real.

Las relaciones $\leq_i$ y $\leq_c$ no son conflictivas entre si, en el sentido de que no hay parejas de intervalos A y B tales que $A \neq B$ y $A \leq_i B$ y $B \leq_c A$. Este resultado viene datdo por la siguiente proposición.

Proposición 1.10. Dados dos intervalos A y B si ocurre que $A \leq_i B$ y $B \leq_c A$ entonces $A = B$.

A continuación estudiaremos el problema (1.26) haciendo uso de las relaciones anteriormente definidas. Se definirá una relación de preferencia entre intervalos y puesto que para cada solución factible $x \in X$ tenemos asociado un intervalo definido de la forma

$$Z(x) = \sum_{j \in N} x_j A_j \tag{1.30}$$

se definirá la solución para P, como la solución puntual que tiene asociado el intervalo no dominado. Para ello definiremos una relación de orden intervalar.

Definición 1.11. Sea $x^* \in X$. x^* es una solución optimal para P si y solo si no existe $x' \in X$ tal que satisfaga

$$Z(x^*) <_i Z(x') \quad \text{ó} \quad Z(x^*) <_c Z(x') \tag{1.31}$$

Para simplificar esta definición, tenemos la siguiente relación de orden.

Definición 1.12. Se define la relación de orden $\leq_{ic}$ como

$$A \leq_{ic} B \text{ sii } a^i \leq b^i \text{ y } a^c \leq b^c$$
$$A <_{ic} B \text{ sii } A \leq_{ic} B \text{ y } A \neq B. \tag{1.32}$$

y para ella tenemos

Proposición 1.13. Se verifican las dos siguientes propiedades

i) $A \leq_{ic} B$ sii $A \leq_i B$ o $A \leq_c B$,

ii) $A <_{ic} B$ sii $A <_i B$ o $A <_c B$.

A partir de esta proposición, la definición 1.11 se puede simplificar de la siguiente forma.

Definición 1.14. Sea $x^* \in X$, x^* es una solución optimal para P si y solo si no existe $x' \in X$ tal que satisfaga

$$Z(x^*) <_{ic} Z(x'). \tag{1.33}$$

Recordemos que el intervalo A_j se notaba por $<a_j^c, a_j^w>$. Podemos calcular el extremo de la izquierda y el centro del intervalo $Z(x)$, supuesto $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \geq 0$, de la forma

$$z^i(x) = (a_1^c\, x_1 + ... + a_n^c\, x_n) - (a_1^w\, x_1 + ... + a_n^w\, x_n)$$
$$z^c(x) = a_1^c\, x_1 + ... + a_n^c\, x_n \tag{1.34}$$

Así el conjunto de soluciones para el problema (1.26) definido como

$$S' = \{x \in X / \text{ no existe } x' : Z(x) <_{ic} Z(x') \}$$

se puede obtener como la solución optimal de Pareto para el siguiente problema multiobjetivo:

$$\text{Max} \left\{ z' = (z^i(x), z^c(x)) : x \in X \subset \mathbf{R}^n \right\} \qquad (1.35)$$

CAPITULO II:

CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS DE PED. VARIABLES DIFUSAS EN PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL ENTERA

1. INTRODUCCION

Comenzaremos este capítulo dando una clasificación de los problemas de Programación Entera Difusa, para pasar posteriormente a estudiar los problemas de PLE con variables integro-difusas, que sólo tienen sentido en este contexto de optimización discreta.

2. CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS DE PED

Recordemos que en PLD los distintos modelos que se plantean, desde un punto de vista atomizado, son los siguientes,

a) Problemas con restricciones difusas, en los que el decisor permite que el cumplimiento de tales restricciones sea flexible, en el sentido de estar dispuesto a tolerar cierto margen de violación que el mismo establece.

b) Problemas con un objetivo difuso, caracterizados porque la información que se tiene sobre los coeficientes de la función objetivo es de tipo impreciso, lo que conduce a considerarlos definidos mediante números difusos, y

c) Problemas con un conjunto de restricciones definido por coeficientes imprecisos, tanto en la matriz tecnologica como en el lado de la derecha, con un origen similar al del caso anterior.

Naturalmente, se permiten todas las combinaciones posibles de estas tres situaciones, aunque de cara a diseñar métodos de solución, es mas conveniente esta clasificación.

Por su parte, cuando pensamos en problemas de PED, los tres anteriores casos tienen perfecto sentido, sin embargo surge una situación nueva si consideramos la posibilidad de que las variables que toman parte en el problema sean casi enteras, o dicho de otro modo, tengan valores lo mas enteros posible. Por tanto, desde un punto de vista formal y paralelo al de la PLD, tenemos dos grupos distintos de problemas de PED, según que sean propiamente enteros o booleanos, y diferentes modelos dentro de cada uno de ellos.

a) Dentro del grupo de problemas de PED propiamente dichos, podemos considerar los siguientes modelos.

a.1. Problemas de PLED, en los cuales las variables toman valores casi enteros, esto es, son problemas con variables restringidas a tomar valores tan enteros como sea posible. Su planteamiento formal sería el siguiente

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i \in M \\ &x_j \geq 0, \ j \in N \\ &x_j \in F(\mathbf{N}), \ j \in I \subseteq N \end{aligned} \qquad (2.1)$$

donde todos los elementos que toman parte en el problema son convencionales, pero ahora $x_j \in F(\mathbf{N})$, siendo $F(\mathbf{N})$ el conjunto de números difusos enteros con soporte en **R**, lo cual significa que el decisor esta dispuesto a permitir alguna violación en el cumplimiento de las condiciones de integridad, es decir, considera que en el problema las variables son tales que si tienen valores enteros, su grado de satisfacción será máximo, pero si se apartan de un valor entero en el óptimo, está dispuesto a considerarlo, siempre que la desviación no supere ciertos márgenes. Una referencia a esta clase de problemas se puede encontrar en [24].

a.2. Problemas de PLED con restricciones imprecisas. De forma similar al caso convencional, estos problemas pueden describirse como sigue

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\quad \sum_{j\in N} a_{ij}x_j \lesssim b_i,\ i \in M \\ &\quad x_j \geq 0,\ j \in N \\ &\quad x_j \in \mathbf{N},\ j \in I \subseteq N \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{N}$ es el conjunto de números enteros, $c \in \mathbf{R}^n$ y a_{ij}, $b_i \in \mathbf{R}$, $i \in M$, $j \in N$. El símbolo $\lesssim$ significa que el decisor permite alguna violación sobre el grado de cumplimiento de la restricción, es decir, se consideran restricciones difusas definidas por funciones de pertenecia

$$\mu_i \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow (0,1],\ i \in M \tag{2.3}$$

que respectivamente dan el grado con el que $x \in \mathbf{R}^n$ cumple la i-esima restricción.

a.3. Problemas de PLED con coeficientes imprecisos en la función objetivo, es decir, con coeficientes definidos por números difusos. El problema se puede describir como sigue

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = \sum_{j\in N} \tilde{c}_j x_j \\ &\text{s.a:} \\ &\quad \sum_{j\in N} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i \in M \\ &\quad x_j \geq 0,\ j \in N \\ &\quad x_j \in \mathbf{N},\ j \in I \subseteq N \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde la novedad, con respecto a (2.2), es que todos los $\underset{\sim}{c}_j$ son números difusos, es decir, $\underset{\sim}{c}_j \in T(\mathbf{R})$, $j \in N$, siendo $T(\mathbf{R})$ el conjunto de los números difusos trapezoidales, es decir, se tienen funciones de pertenencia

$$\mu_j : \mathbf{R} \longrightarrow (0,1],\ j \in N \tag{2.5}$$

que expresan la falta de precisión que tiene el decisor sobre los respectivos valores de los coeficientes.

a.4. Problemas de PLED con números difusos como coeficientes de la matriz técnológica, y en los coeficientes de la derecha del conjunto de restricciones. Asi, se tiene

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\sum_{j \in N} \underset{\sim}{a}_{ij} x_j \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{b}_i,\ i \in M \\ &x_j \geq 0,\ j \in N \\ &x_j \in \mathbf{N},\ j \in I \subseteq N \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $\underset{\sim}{a}_{ij}$, $\underset{\sim}{b}_i \in T(\mathbf{R})$ y $c \in \mathbf{R}^n$. El símbolo $\underset{\sim}{<}$ significa, al igual que en (2.2), que el decisor permite alguna flexibilidad en el cumplimiento de las restricciones. Así, se consideran las siguientes funciones de pertenencia

$$\forall\ \underset{\sim}{b}_i,\ i \in M,\ \mu_i : \mathbf{R} \longrightarrow (0,1] \tag{2.7}$$

$$\forall\ \underset{\sim}{a}_{ij},\ (i,j) \in MxN,\ \mu_{ij} : \mathbf{R} \longrightarrow (0,1] \tag{2.8}$$

$$\forall\ i \in M,\ \mu^i : T(\mathbf{R}) \longrightarrow (0,1] \tag{2.9}$$

donde las μ^i son las correspondientes a (2.3) en el problema (2.2).

Como en el caso de la PLD, ahora también se podrían considerar los problemas deducidos de las posibles combinaciones de estos cuatro modelos elementales. Pero para establecer métodos de resolución, sólo supondremos estos tipos.

b) El siguiente grupo de problemas de PED son aquellos en los que las variables sólo toman los valores 0 ó 1, es decir, los de PL Booleana Difusa (PLBD).

Como se sabe, el problema clásico de Programación Booleana consiste en

$$\begin{aligned} &\text{Max: } x = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad Ax \leq b \\ &\qquad x_j \in \{0,1\},\ j \in N \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sobre él podemos tener en cuenta las mismas posibilidades que, para los problemas de PE convencionales, hemos considerado en la sección anterior. Sin embargo conviene hacer alguna precisión.

Suponer una naturaleza difusa a las variables en (2.10), es lo mismo que permitir al problema que pierda su carácter booleano, por cuanto aquellas tomarían valores en el intervalo [0,1] y, consecuentemente, se trataría de problemas convencionales de PL con variables acotadas, que no necesitan técnicas especiales para resolverlos. Así, en este caso, solo consideraremos tres problemas canónicos, y como el significado de los elementos difusos que pueden tomar parte en ellos es el mismo que en los anteriores, sólo describiremos el correspondiente modelo. No detallaremos el caso de problemas con variables enteras (no 0-1) y variables booleanas conjuntamente ya que, como es bién conocido, toda variable entera puede expresarse como combinación de variables booleanas. Así se tiene:

b.1. Problemas de PLBD con restricciones imprecisas

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\sum_{j\in N} a_{ij}x_j \underset{\sim}{<} b_i,\ i \in M \\ &x_j \in \{0, 1\},\ j \in N \end{aligned} \tag{2.11}$$

b.2. Problemas de PLBD con los coeficientes de la función objetivo definidos por números difusos

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = \sum_{j\in N} \underset{\sim}{c}_j x_j \\ &\text{s.a:} \\ &\sum_{j\in N} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i \in M \\ &x_j \in \{0, 1\},\ j \in N \end{aligned} \tag{2.12}$$

y finalmente,

b.3. Problemas de PLBD con números difusos como coeficientes de la matriz técnológica y en los coeficientes de la derecha de las restricciones

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\sum_{j\in N} \underset{\sim}{a}_{ij}x_j \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{b}_i,\ i \in M \\ &x_j \in \{0, 1\},\ j \in N \end{aligned} \tag{2.13}$$

Hay que destacar que en estos dos grupos de problemas, y en cada caso, a su vez podemos considerar dos posibilidades, según que todas las variables que participen en ellos deban ser enteras o no, es decir, al igual que en el caso clásico, según que $I = N$ o $I \subset N$, podríamos considerar los respectivos modelos puros o mixtos.

3. PLE CON VARIABLES DIFUSAS

3.1. INTRODUCCION Y FORMALIZACION DEL PROBLEMA

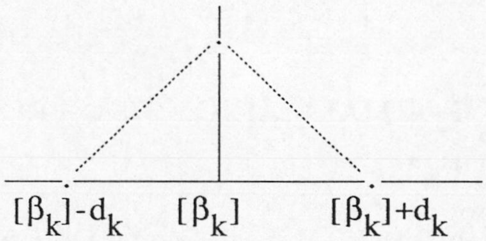
En el campo de la Programación Lineal Entera Difusa aparece un nuevo tipo de problemas, en relación con la Programación Lineal Difusa, al permitir que las variables puedan tomar valores casi enteros, bastante enteros o no exactamente enteros. La situación que consideramos ahora, es un poco mas general que la inicialmente planteada, ya que vamos a permitir la existencia de variables continuas, enteras y casi enteras, en el sentido que acabamos de comentar. Este problema ya fué estudiado por primera vez en [24].

Partimos del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max: } & z = \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s.a: } & \\ & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i \in M \\ & x_j \geq 0, \ j \in N \\ & x_j \in \mathbf{N}, \ j \in L \subseteq N \\ & x_j \in F(\mathbf{N}), \ j \in J \subseteq N \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde J es un subconjunto de índices para las variables enteras difusas y L el conjunto de índice para las variables que tienen que ser enteras.

Para la formalización de (2.14), el decisor tendrá, de acuerdo con sus requerimientos, que establecer lo que entiende porque x_k sea entera difusa, es decir, tendrá que definir una función de pertenencia que exprese el margen en el que está dispuesto a tolerar violaciones en la integridad de x_k. Supuesto el valor $x_k^* = \beta_k$, gráficamente se puede interpretar como



(2.15)

donde d_k es la amplitud que el decisor está dispuesto a tolerar en el cumplimiento de que x_k sea entera en el anterior valor.

Según esto, podemos definir la función de pertenencia asociada a una variable entera-difusa, $\forall\ j \in J$, de la forma:

$$\mu_j(x) = \begin{cases} (x_j - [x_j])/d_j & \text{si } [x_j] \le x_j \le [x_j] + d_j \\ 1 & \text{si } x_j = [x_j] \\ ([x_j] - x_j)/d_j & \text{si } [x_j] - d_j \le x_j \le [x_j] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.16}$$

suponiendo las funciones de pertenencia como las expresiones lineales utilizadas usualmente.

Así, es claro que para resolver el problema de PLED (2.14), se pueden considerar las funciones de pertenencia (2.16).

Notando por $\underset{\sim}{X}$ el conjunto de soluciones factibles para el problema (2.14),

$$\underset{\sim}{X} = \{x \in \mathbf{R}^n / \ Ax \le b,\ \mu_X(x) > 0,\ x_j \ge 0,\ x_k \in \mathbf{N},\ k \in L\}$$

donde $\mu_X(x) = \inf\ \{\mu_j(x),\ j \in J\}$, los α-cortes pueden expresarse de la siguiente

$$X(\alpha) = \{\ x \in \mathbf{R}^n \ / \ Ax \le b,\ \mu_X(x) \ge \alpha,\ x_j \ge 0,\ x_k \in \mathbf{N},\ k \in L\} \qquad \forall\ \alpha \in (0,1]$$

y $X_j(\alpha)$ notará el α-corte correspondiente a la j-ésima variable casi-entera,

$$X_j(\alpha) = \{x\in \mathbf{R}^n \ / \ Ax\leq b,\ \mu_j(x)\geq\alpha,\ x_i\geq 0,\ i\in N,\ x_k\in \mathbf{N},\ k\in L\} \quad \forall\ \alpha\in(0,1],$$

con lo cual,

$$X(\alpha) = \bigcap_{j\in J} X_j(\alpha) \quad \forall\ \alpha\in(0,1]$$

Así, queda claro que (2.14) se puede escribir como

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = \sum_{j\in N} c_j x_j \\ \text{s.a:} & \\ & x\in X(\alpha) \\ & \forall\ \alpha\in(0,1] \end{array} \tag{2.17}$$

problema de Programación Lineal Entera Paramétrico que notaremos $P(\alpha)$.

En lo que sigue notaremos $x(\alpha)$ como la solución optimal de $P(\alpha)$ y $z(\alpha) = cx(\alpha)$. Notando

$$S(\alpha) = \{x\in R^n / \ cx = \text{Max}\ \{cy,\ y\in X(\alpha)\}\},\ \forall\ \alpha\in(0,1],$$

definiremos una solución difusa para el problema (2.14), [53].

Definición 2.1. La solución difusa para el problema (2.14), $\tilde{S}$, es el conjunto difuso con función de pertenencia:

$$\lambda(x) = \begin{cases} \displaystyle\sup_{x\in S(\alpha)} \alpha & x\in \bigcup_{\alpha} S(\alpha) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.18}$$

Para obtener una solución difusa para el problema (2.14) diseñaremos un algoritmo que nos permita obtener la solución para el problema (2.17).

3.2. METODO DE RESOLUCION

Para la resolución del problema (2.14), consideraremos el problema relajado en cuanto a la naturaleza entera y casi-entera de las variables,

$$
\begin{aligned}
\text{Max:}\quad & z = \sum_{j\in N} c_j x_j \\
\text{s.a:}\quad & \\
& \sum_{j\in N} a_{ij} x_j \le b_i,\ i \in M \\
& x_j \ge 0,\ j \in N
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

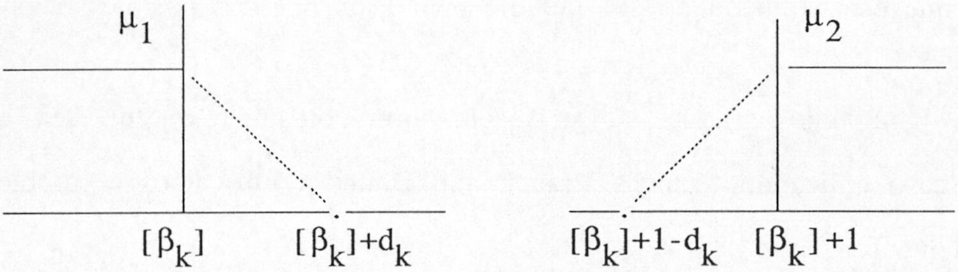
a partir de su solución optimal pasaremos a estudiar la solución optimal de (2.14).

Supongamos resuelto (2.19) y sea x_k una variable de naturaleza casi-entera, $k \in J$, y sea $x_k^* = \beta_k$ el valor obtenido en el óptimo de (2.19). Sabemos que una condición necesaria para que x_k sea entera es que se satisfaga una de las dos siguientes restricciones: $x_k \le [\beta_k]$ ó $x_k \ge [\beta_k]+1$, y sobre esta condición necesaria radica el fundamento del método diseñado para resolver el problema (2.14).

Debido a la naturaleza difusa de la variable x_k, las anteriores condiciones necesarias, podemos sustituirlas por las dos siguientes, de carácter difuso,

$$
\begin{aligned}
& x_k \underset{\sim}{<} [\beta_k] \\
\text{ó}\quad & \\
& x_k \underset{\sim}{>} [\beta_k] + 1
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

gráficamente representadas como sigue



(2.21)

Nótese que ésto es consonante con la figura (2.15).

De (2.20) siguiendo el método habitual de resolución de problemas de PLD, consideramos la verificación de

$$\mu_1(\cdot) \geq \alpha \quad \text{y} \quad \mu_2(\cdot) \geq \alpha \tag{2.22}$$

que se puede expresar como

$$\begin{array}{ll} x_k \leq [\beta_k] + d_k(1-\alpha) & \alpha \in (0,1] \\ \text{ó} & \\ x_k \geq [\beta_k] + 1 - d_k(1-\alpha) & \alpha \in (0,1] \end{array} \tag{2.23}$$

expresión que generaliza las condiciones necesarias expresadas al comienzo.

De este modo, para la obtención de una solución para el problema (2.14), utilizaremos relajaciones del problema (2.17) como problemas intermedios, y para el estudio de estas relajaciones aplicaremos las técnicas Branch and Bound, que fueron introducidas en la sección 4.2, Capítulo I.

Así, notemos $T(\alpha)$, la región factible del problema (2.19), e $I_{T(\alpha)}$ el conjunto de valores de α, para los cuales está definida $T(\alpha)$, $I_{T(\alpha)} \subset [0,1]$.

Resuelto este problema, si la solución optimal obtenida, x^*, es entera, en cualquier intervalo de optimaliad, $\alpha \in I_{x(T(\alpha))}$, ésta será la solución optimal de $P(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in I_{x(T(\alpha))}$, puesto que cualquier condición necesaria de la forma (2.23) se verificará.

Puede que esta solución no sea factible para $P(\alpha)$ por dos posibles razones:

1) Que para una variable x_j, $j \in L$, el valor obtenido, x_j^*, no sea entero, en este caso aplicando técnicas Branch and Bound ramificamos el problema de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
x_j &\le [x_j^*] && \forall\ \alpha \in I_n = I_{x(T(\alpha))} \\
x_j &\ge [x_j^*]+1 && \forall\ \alpha \in I_n = I_{x(T(\alpha))}
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

donde I_n es el conjunto de valores de α, donde la solución obtenida no es optimal para $P(\alpha)$. De esta forma tenemos las regiones activas

$$T_1(\alpha) = T(\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R}^n / \ x_j \le [x_j^*]\}$$

$$T_2(\alpha) = T(\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R}^n / \ x_j \ge [x_j^*]+1\}$$

2) Que para una variable casi-entera x_k, $k \in J$, el valor obtenido, x_k^*, no sea factible en un subintervalo de valores de α, $I_n \subseteq I_{x(T(\alpha))}$. Aquí, la ramificación a seguir proviene de (2.20),

$$
\begin{aligned}
x_k &\le [x_k^*(\alpha)]+d_k(1-\alpha) && \forall\ \alpha \in I_n \\
x_k &\ge [x_k^*(\alpha)]+1-d_k(1-\alpha) && \forall\ \alpha \in I_n
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

y tenemos las regiones activas siguientes:

$$T_1(\alpha) = T(\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R}^n / \ x_k \le [x_k^*(\alpha)]+d_k(1-\alpha)\} \qquad I_{T_1(\alpha)} = I_n$$

$$T_2(\alpha) = T(\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R}^n / \ x_k \ge [x_k^*(\alpha)]+1-d_k(1-\alpha)\} \qquad I_{T_2(\alpha)} = I_n$$

Obtenidas estas regiones activas $T_1(\alpha)$ y $T_2(\alpha)$, se resuelven los problemas asociados mediante técnicas Branch and Bound. Al resolver los dos problemas obtenidos se considera la solución optimal para la región $T(\alpha)$ como la mejor de ambas soluciones. Si al resolver el problema definido en cada una de estas dos regiones la solución que se obtiene no es factible para $P(\alpha)$, se volverá a ramificar el problema hasta que las soluciones obtenidas sean factibles.

A continuación desarrollamos más detalladamente esta técnica.

Definimos una función característica asociada a cada una de las variables enteras x_j, $j \in L$.

$$\delta_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j^* = [x_j^*] \\ 0 & \text{si } x_j^* \neq [x_j^*] \end{cases}$$

y definimos las funciones

$$\zeta(x) = \bigcap_{j \in L} \delta_j(x)$$

y

$$\Lambda(x) = \min\ (\mu_X(x),\ \zeta(x))$$

Si la solución optimal para el problema (2.19), x^*, verifica que $\Lambda(x) = 1$, entonces x^* solución factible para $P(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in I_{x(T(\alpha))}$.

Si $\Lambda(x) = 0$ y $\zeta(x) = 0$, existe una variable x_j, $j \in L$, tal que $x_j^* \neq [x_j^*]$, y por tanto se aplica la ramificación (2.24), $\forall\ \alpha \in I_n$.

Si $\Lambda(x) = \eta$, $0 < \eta < 1$, x^* es una solución factible para $P(\alpha)$ en el intervalo $(0,\eta]$, intervalo que notaremos I_f, y no será optimal para $P(\alpha)$ en el intervalo $(\eta,1]$, intervalo que hemos notado I_n.

Como se ha indicado, I_f es la región de valores de α para los que la solución obtenida es factible para el problema $P(\alpha)$. Ahora hay que estudiar la optimalidad del la solución para $P(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in I_f$. Así mismo habría que estudiar la ramificación y acotación de la técnica Branch and Bound $\forall \alpha \in I_n$.

Para ello supongamos un problema con región factible cualquiera $T(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in I_{T(\alpha)}$,

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = c\,x \\ \text{s.a:} \\ \qquad T(\alpha) \\ \qquad \forall \alpha \in I_{T(\alpha)} \end{array} \tag{2.26}$$

y cuya solución sea $x(T(\alpha))$, $\forall\ \alpha \in I_{x(T(\alpha))}$ (intervalo de valores de α para el cual existe solución optimal para el problema (2.26)).

$$I_f = \{\alpha \in I_{x(T(\alpha))} \ / \ \Lambda(x(T(\alpha)) \geq \alpha\}$$

$$I_n = \{\alpha \in I_{x(T(\alpha))} \ / \ \Lambda(x(T(\alpha)) < \alpha\}$$

Suponemos al comienzo del algoritmo una COTA INFERIOR de $z(\alpha)$, $\underline{z}(\alpha)$, que es inicializada con el valor $z(\alpha) = -\infty$, y que irá tomando el valor de la mejor solución obtenida para α en cada momento, y $\underline{x}(\alpha)$ cl valor dc la variablc asociada a $\underline{z}(\alpha)$.

Para el intervalo $I_{x(T(\alpha))}$, para el cual $x(T(\alpha))$ es optimal para (2.26), se define $w(\alpha) = cx(T(\alpha))$, $\forall\ \alpha \in I_{x(T(\alpha))}$. Este es el valor optimal de la función objetivo para el problema (2.26).

Se estudia el intervalo I_w para el que la función objetivo, $w(\alpha)$, es mayor que $\underline{z}(\alpha)$ y factible para $P(\alpha)$

$$I_w = \{\ \alpha \in I_f \ / \ w(\alpha) > \underline{z}(\alpha)\ \}$$

En este intervalo de valores de α, $x(T(\alpha))$ es la mejor solución obtenida hasta el momento, con lo que cambiará la cota inferior en dicho intervalo, $\underline{z}(\alpha) = w(\alpha)$

y $\underline{x}(\alpha) = x(T(\alpha))$ $\forall$ $\alpha \in I_w$ como mejor solución obtenida para $P(\alpha)$ hasta ese momento.

Además, incluiremos la siguiente condición de acotación que nos permitirá no realizar ciertas ramificaciones. Definimos el intervalo I_r como

$$I_r = \{\alpha \in I_n \ / \ w(\alpha) \geq \underline{z}(\alpha) \}$$

Queda claro que para todo valor de α que pertenezca a I_n - I_r, no debemos realizar ramificaciones puesto que la solución que obtengamos será menor que $w(\alpha)$, y por tanto menor que $\underline{z}(\alpha)$ (mejor solución optimal encontrada para $P(\alpha)$ hasta el momento).

En este intervalo I_r aplicamos una de las reglas de ramificación ya estudiadas (si $\zeta(x(T(\alpha))$ = 0 la regla (2.24) y en otro caso la regla (2.25)). Todo esto puede formalizarse en el siguiente algoritmo.

Algoritmo

Paso O. Asignamos $\underline{z}(\alpha)=-\infty$, $\underline{x}(\alpha)=(\underline{x}_1(\alpha),...,\underline{x}_n(\alpha))$ $\underline{x}_k(\alpha)=-\infty$ k=1,...,n, $\forall$ $\alpha \in (0,1]$

Paso 1. Resolvemos el problema relajado

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & z = \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i \in M \\ & x_j \geq 0, \ j \in N \end{aligned}$$

sea x^* su solución optimal, $I_{x(T(\alpha))} = (0,1]$.

Paso 2. Se define $\eta = \Lambda(x)$, $w(\alpha) = cx^*$

$$\underline{z}(\alpha)=cx^* \ , \quad \underline{x}(\alpha) = x^* \ , \quad \forall\alpha\in(0,\eta], \ I_n = (\eta,1].$$

Ir al paso 5.

Paso 3. Estudiamos la factibilidad de $x^*(T(\alpha))$ para $P(\alpha)$ $\forall\alpha\in I_{x_{T(\alpha)}}$.

Sea I_f intervalo en el cual es factible para $P(\alpha)$ e I_n intervalo en el cual no es factible para $P(\alpha)$.

Paso 4. Si $I_f \neq \emptyset$ entonces $I_w = \{ \alpha\in I_f \ / \ w(\alpha) > \underline{z}(\alpha) \}$

$$\underline{z}(\alpha) = w(\alpha) \ \text{y} \ \underline{x}(\alpha) = \bar{x}^*(T(\alpha)) \quad \forall\alpha\in I_w$$

Paso 5. Si $I_n \neq \emptyset$ entonces sea $I_r = \{\alpha\in I_n / \ w(\alpha) > \underline{z}(\alpha)\}$, aplicamos la regla de ramificación en $T(\alpha)$ $\forall$ $\alpha\in I_r$, creando dos regiones activas $T_1(\alpha)$, $T_2(\alpha)$.

$I_{T_1(\alpha)} = I_r \quad I_{T_2(\alpha)} = I_r$

Paso 6. Si existen regiones activas $T'(\alpha)$ entonces se resuelve el problema asociado.

Si no tiene solución factible volver al paso 6,

en otro caso sean $x(T(\alpha))$, $I_{x_{T(\alpha)}}$, $w(\alpha) = cx(T(\alpha))$, $\forall$ $\alpha\in I_{x_{T(\alpha)}}$. Ir al paso 3.

Paso 7. $x(\alpha)=\underline{x}(\alpha)$ y $z(\alpha)=\underline{z}(\alpha)$

Paso 8. Fin.

La aplicación de este algoritmo a problemas de PLE con variables difusas se ilustra con el siguiente ejemplo.

3.3. EJEMPLO

$$
\begin{aligned}
\text{Max: } & z = 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{s.a: } & \\
& -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\
& 4x_2 + 3x_3 \leq 2 \\
& x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3 \\
& x_i \geq 0 \\
& x_1,\ x_2 \text{ y } x_3 \text{ casi enteras}
\end{aligned}
$$

tomando como holguras $d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.3$ y $d_3 = 0.3$.

Paso 0. $\underline{z}(\alpha)=-\infty$, $\underline{x}_k(\alpha)=-\infty$ $k=1, \ldots, n$

Paso 1. Resolvemos

$$
\begin{aligned}
\text{Max: } & z = 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{s.a: } & \\
& -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\
& 4x_2 + 3x_3 \leq 2 \\
& x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución optimal: $x^* = (5.3333,\ 3,\ 3.3333)$

Paso 2. $\eta=0$, $T(\alpha) = \{x\in \mathbf{R}^3 \ / \ Ax\leq B,\ x_i\geq 0\}$, $I_n = (0,1]$

$\bar{x}^*(T(\alpha)) = (5.33,\ 3,\ 3.33)$ $\quad I_{x_{T(\alpha)}} = (0,1]$

Paso 5. Aplicamos la Regla de ramificación para x_1, $I_r = (0,1]$:

$$T_1(\alpha) = T(\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R}^3 \;/\; x_1 \leq 5 + 0.3\ (1-\alpha)\ \} \quad I_{T_1(\alpha)} = (0,1]$$

$$T_2(\alpha) = T(\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R}^3 \;/\; x_1 \geq 6 - 0.3\ (1-\alpha)\ \} \quad I_{T_2(\alpha)} = (0,1]$$

Paso 6. Sea $T_1(\alpha)$, $I_{T_1(\alpha)} = (0,1]$. Resolvemos $\bar{P}(T_1(\alpha))$

$$\bar{x}^*(T_1(\alpha)) = (5.3\text{-}0.3\alpha,\ 2.9458\text{-}0.1287\alpha,\ 3.328558\text{-}0.042858\alpha)$$

$$I_{x_{T_1(\alpha)}} = (0,1]$$

Paso 3. $I_f = \varnothing$, $I_n = (0,1]$

Paso 5. Aplicamos la Regla de ramificación para x_2, $I_r = (0,1]$:

$$T_3(\alpha) = T_1(\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R}^3 \;/\; x_2 \leq 2 + 0.3(1-\alpha)\} \quad I_{T_3(\alpha)} = (0,1]$$

$$T_4(\alpha) = T_1(\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R}^3 \;/\; x_2 \geq 3 - 0.3(1-\alpha)\} \quad I_{T_4(\alpha)} = (0,1]$$

Paso 6. Sea $T_2(\alpha)$ $I_{T_2(\alpha)} = (0,1]$. Resolvemos $\bar{P}(T_2(\alpha))$

No tiene solución factible $\forall \alpha \in I_{T_2(\alpha)}$

Paso 6. Sea $T_3(\alpha)$ $I_{T_3(\alpha)} = (0,1]$. Resolvemos $\bar{P}(T_3(\alpha))$

$$\bar{x}^*(T_3(\alpha)) = (5.1\text{-}0.1\alpha,\ 2.3\text{-}0.3\alpha,\ 2.4\text{-}0.4\alpha) \quad I_{x_{T_3(\alpha)}} = (0,1]$$

Paso 3. $I_f = (0,1]$, $I_n = \varnothing$

Paso 4. $w(\alpha) = 24.8 - 1.8\alpha \quad \forall\alpha\in I_f$

$I_w = \{ \alpha\in I_f \ / \ w(\alpha) > \underline{z}(\alpha) \} = (0,1]$

$\underline{z}(\alpha) = 24.8 - 1.8\alpha \quad \forall\alpha\in I_w$

$\underline{x}(\alpha) = (5.1\text{-}0.1\alpha,\ 2.3\text{-}0.3\alpha,\ 2.4\text{-}0.4\alpha) \quad \forall\alpha\in I_w$

Paso 6. Sea $T_4(\alpha)$ $I_{T_4(\alpha)}= (0,1]$. Resolvemos $\bar{P}(T_4(\alpha))$

$\bar{x}^*(T_4(\alpha)) = (5.3\text{-}0.3\alpha,\ 2.9857\text{-}0.128571\alpha,\ 3.3286\text{-}0.042858\alpha)$

$I_{x_{T_4(\alpha)}} = (0,1]$

Paso 3. $I_f = \varnothing$, $I_n = (0,1]$

Paso 5. Aplicamos la Regla de ramificación para x_3, I_r=(0,1]:

$T_5(\alpha) = T_4(\alpha) \cap \{x\in \mathbf{R}^3 \ / \ x_3 \leq 3 + 0.3(1\text{-}\alpha)\}$ $I_{T_5(\alpha)}= (0,1]$

$T_6(\alpha) = T_4(\alpha) \cap \{x\in \mathbf{R}^3 \ / \ x_3 \geq 4 - 0.3(a\text{-}\alpha)\}$ $I_{T_6(\alpha)}= (0,1]$

Paso 6. Sea $T_5(\alpha)$ $I_{T_5(\alpha)}= (0,1]$. Resolvemos $\bar{P}(T_4(\alpha))$

$\bar{x}^*(T(\alpha)) = (5.3\text{-}0.3\alpha,\ 2.975\text{-}0.225\alpha,\ 3.3\text{-}0.3\alpha)$

$I_{x_{T_5(\alpha)}} = (0,0.5278]$

Paso 3. $I_f = (0,0.5278]$, $I_n=\varnothing$

Paso 4. $w(\alpha) = 28.775 - 2.025\alpha \quad \forall \alpha \in I_f$

$I_w = \{ \alpha \in I_f \ / \ w(\alpha) > \underline{z}(\alpha) \} = (0,0.5278]$

$\underline{z}(\alpha) := 28.775 - 2.025\alpha \quad \forall \alpha \in I_w$

$\underline{x}(\alpha) := (5.3-0.3\alpha, \ 2.975-0.225\alpha, \ 3.3-0.3\alpha) \quad \forall \alpha \in I_w$

Paso 6. Sea $T_6(\alpha)$ $I_{T_6(\alpha)}=(0,1]$. Resolvemos $\bar{P}(T_6(\alpha))$

No tiene solución factible $\forall \alpha \in I_{T_6(\alpha)}$

Paso 6. No quedan regiones activas

Paso 7. $x(\alpha)=\underline{x}(\alpha)$ y $z(\alpha) := \underline{z}(\alpha)$

$$z(\alpha) = \begin{cases} 28.775 - 2.025\alpha & \forall \alpha \in (0,0.5278] \\ 24.8 - 1.8\alpha & \forall \alpha \in I = (0.5278,1] \end{cases}$$

$$x(\alpha) = \begin{cases} (5.3-0.3\alpha, \ 2.975-0.225\alpha, \ 3.3-0.3\alpha) & \forall \alpha \in (0,0.5278] \\ (5.1-0.1\alpha, \ 2.3-0.3\alpha, \ 2.4-0.4\alpha) & \forall \alpha \in (0.5278,1] \end{cases}$$

Paso 8. Fin.

La solución difusa para este problema es:

$$\underset{\sim}{S} = \{ (5.3-0.3\alpha, \ 2.975-0.225\alpha, \ 3.3-0.3\alpha) \ / \ \alpha \in (0,0.5278], \\ (5.1-0.1\alpha, \ 2.3-0.3\alpha, \ 2.4-0.4\alpha) \ / \ \alpha \in (0.5278,1] \}$$

CAPITULO III:

PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL ENTERA DIFUSA

1. INTRODUCCION

Como se sabe, el problema clásico de Programación Lineal Entera consiste en

$$\begin{array}{ll} \text{Max: } z = \sum_{j \in N} c_j x_j & \\ \text{s.a:} & \\ \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \le b_i, \ i \in M & \\ x_j \ge 0, \ j \in N & \\ x_j \in \mathbf{N}, \ j \in I \subseteq N & \end{array} \tag{3.1}$$

recordemos que si I = N tenemos un problema de **Programación Lineal Entera Puro (PLE)** y si $I \subset N$ se trata de un problema de **Programación Lineal Entera Mixto (PLEM).**

Como ya hemos estudiado, se pueden obtener diferentes problemas de PLED en sus formas canónicas de acuerdo a la naturaleza imprecisa de los componentes que en el mismo tomen parte.

A continuación estudiamos los problemas de PLE con restricciones difusas y posteriormente los problemas de PLE con costos difusos.

2. PLE CON RESTRICCIONES DIFUSAS

Consideremos un problema general de PED con restricciones difusas

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z = f(x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad g_i(x) \lesssim b_i,\ i \in M \\
&\qquad x_j \geq 0,\ j \in N \\
&\qquad x_j \in \mathbf{N},\ j \in I \subseteq N
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

El caso en que las restricciones son difusas ya ha sido estudiado en [24]. Para resolver el problema, se introducen modificaciones que afectan a la función objetivo para, finalmente obtener una solución puntual, cuya naturaleza parece no estar acorde con la vaguedad que de partida se supone en (3.2). En lo que sigue presentaremos un método que proporcione una solución difusa para dicho problema.

Dos métodos han recibido la máxima atención para la resolución de problemas de PE: Métodos de Corte y Métodos Branch and Bound. Ambos métodos utilizan la noción de problema relajado, es decir, un problema con iguales restricciones pero donde las variables son continuas. Así para resolver (3.2) intentamos seguir un camino paralelo al del caso clásico (3.1).

2.1. METODOS DE CORTE EN PROBLEMAS DE PE CON RESTRICCIONES DIFUSAS

Supongamos la versión de (3.2) mas general que podamos plantear, es decir, incluyendo variables enteras y continuas.

$$
\begin{aligned}
\text{Max:} \quad & z = cx \\
\text{s.a:} \quad & \\
& \sum_{j\in N} a_{ij}x_j \lesssim b_i,\ i \in M \\
& x_j \geq 0,\ j \in N \\
& x_j \in \mathbf{N},\ j \in I \subset N
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Supondremos tambien, como es usual, que las funciones de pertenencia son lineales, es decir, $\forall x \in \mathbf{R}^n$,

$$
\mu_i(x) \equiv \mu_i(a_i x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i \\ [(b_i + d_i] - a_i x]/d_i & \text{si } b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i + d_i \end{cases}
$$

donde a_i representa la fila i-esima de la matriz tecnologica.

Para resolver (3.3), seguiremos un camino paralelo al del caso clásico, [66]. Para ello, primero supondremos su versión continua

$$
\begin{aligned}
\text{Max:} \quad & z = cx \\
\text{s.a:} \quad & \\
& \sum_{j\in N} a_{ij}x_j \lesssim b_i,\ i \in M \\
& x_j \geq 0,\ j \in N
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

que es un problema convencional de PLD. Entonces, se puede demostrar, [70], que una solución difusa para el mismo se obtiene resolviendo el problema de PL paramétrica,

$$
\begin{aligned}
\text{Max:} \quad & z = cx \\
\text{s.a:} \quad & \\
& \sum_{j\in N} a_{ij}x_j \leq b_i + d_i(1-\alpha),\ i \in M \\
& x_j \geq 0,\ \alpha \in (0,1]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Ahora, a partir de la solución optimal de (3.5) es cuando comienza el proceso para encontrar una solución entera al problema inicial (3.3). La primera aproximación, trivial, consistiría en suponer que la solución de (3.5), verifica los requisitos de integridad que exigimos. Naturalmente, suponemos que no es este el caso. Entonces, dado que de partida suponemos un problema entero mixto, la solución entera de (3.3) la vamos a encontrar a partir del corte mixto de Gomory, [66].

Sea $x_k(\alpha)$, $k \in I$, una variable que tiene que ser entera, y que en la solución optimal de (3.5) es básica. Su ecuación será

$$x_k(\alpha) = \beta_k(\alpha) - \sum_{j \in NB} f_{kj} x_j \tag{3.6}$$

donde x_j, $j \in NB$, son las variables no básicas asociadas. Entonces (3.6) puede expresarse como

$$x_k(\alpha) - [\beta_k(\alpha)] = f_k(\alpha) - \sum_{j \in NB} f_{kj} x_j \tag{3.7}$$

de donde, finalmente, puede llegarse a la siguiente expresión del corte mixto

$$\sum_{j \in J^-} (f_k(\alpha) f_{kj} / (1 - f_k(\alpha)) x_j - \sum_{j \in J^+} f_{kj} x_j \leq -f_k(\alpha) \tag{3.8}$$

donde

$$J^+(J^-) = \{j \ / \ f_{kj} > 0 \ (f_{kj} < 0)\}$$

Entonces, desde un punto de vista completamente teórico, la sucesiva imposición de esta restricción a la solución optimal de (3.5), nos conducirá a la solución difusa optimal del problema inicial (3.3). No obstante, este método no está carente de dificultades, que en el caso convencional, es decir, en ausencia de parámetros no aparecían. Comentemos estas dificultades sobre el siguiente ejemplo.

$$
\begin{aligned}
\text{Max: } & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a: } & \\
& x_1 + x_2 \lesssim 5 \\
& -x_1 + x_2 \lesssim 0 \\
& 6x_1 + 2x_2 \lesssim 21 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0 \\
& x_1 \in \mathbf{N}
\end{aligned}
$$

con funciones de pertenencia, convenientemente definidas, en cada una de las restricciones dadas por

$$\mu_1(x) = 6 - x_1 - x_2;\ \mu_2(x) = 1 + 2x_1 - 2x_2;\ \mu_3(x) = 8 - 2x_1 - (2/3)x_2$$

Asi, (3.5) toma la forma

$$
\begin{aligned}
\text{Max: } & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a: } & \\
& x_1 + x_2 \leq 5 + (1-\alpha) \\
& -x_1 + x_2 \leq 0 + 0.5(1-\alpha) \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 + 3(1-\alpha) \\
& x_1,\ x_2 \geq 0,\ \alpha \in (0,1]
\end{aligned}
$$

cuya solución optimal es,

$$x_1(\alpha) = [11 + (1-\alpha)]/4; \quad x_2(\alpha) = [9 + 3(1-\alpha)]/4,\ \forall\alpha\in(0,1]$$

Como queremos que x_1 sea entera, (3.8) toma la expresión,

$$-[6 + 2(1-\alpha)]/[1 + (1-\alpha)]x_3 - x_5 \leq -3 - (1-\alpha) \tag{3.9}$$

que es la nueva restricción que hemos de imponer para seguir la optimización, hasta obtener un valor entero para x_1. Ahora bien,

1) La imposición de (3.9) como restricción, al aparecer α en el primer miembro, supone parametrizar la matriz tecnológica, lo que conlleva, [25], riesgos

como que las funciones que expresan la dependencia paramétrica no sean ni lineales ni continuas, que la región de admisibilidad del parametro no sea convexa, etc.

2) En ningún caso se tienen garantías de que la parte fraccionaria $f_k(\alpha)$ no sea mayor que uno (no hay mas que pensar en problemas en los que las holguras de las restricciones tengan valores considerables). Por tanto, esto llevaría a tener que realizar un analisis previo, sobre α, estudiando los rangos en los que $f_k(\alpha) \leq 1$, lo que podria producir una enorme ramificación de problemas si, ademas, tenemos en cuenta que esto sería para cada variable que tuviese que ser entera.

Por tanto, se impone estudiar la obtención de una solución difusa para el problema, asi como sus propiedades, a partir de métodos de PE mixta paramétrica.

Pasemos ahora al caso en que todas las variables han de ser enteras. Tenemos,

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \lesssim b_i, \; i \in M \\ &\qquad\qquad x_j \geq 0, x_j \in \mathbf{N}, \; j \in N \end{aligned} \tag{3.10}$$

con funciones de pertenencia usuales.

Su resolución se enfoca, como antes, resolviendo su versión continua, (3.5), a partir de cuya solución optimal deberemos comenzar a imponer los correspondientes cortes, si no estamos en el óptimo entero directamente. Para este caso, el corte empleado es el conocido con el nombre de corte fraccionario. Usando la misma notación que en el caso mixto, puede demostrarse que la ecuación de este corte, si hemos elegido como variable fuente la x (α), es

$$- \sum_{j \in NB} f_{kj} x_j \leq - f_k(\alpha) \qquad (3.11)$$

donde, para proseguir la optimización, hay que introducir una variable de holgura sobre la que, precisamente, se pivota.

En comparación con (3.8), hay que observar como aquí la parametrización solo afecta al segundo miembro de la ecuación del hiperplano de corte, lo que supone que la reoptimización hacia valores enteros no va a presentar alguno de los inconvenientes comentados en el problema mixto. Veamos esto sobre el siguiente ejemplo.

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = 2x_1 + 5x_2 \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad 2x_1 - x_2 \lesssim 9 \\ &\qquad 2x_1 + 8x_2 \lesssim 31 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0, \; x_1, x_2 \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

con funciones de pertenencia, convenientemente definidas, en cada una de las restricciones dadas por

$$\mu_1(x) = 4 - 2/3x_1 + 1/3 - x_2; \; \mu_2(x) = 35/4 - 1/2x_1 - 2x_2$$

Así, (3.5) toma la forma

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = 2x_1 + 5x_2 \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad 2x_1 - x_2 \leq 9 + 3(1-\alpha) \\ &\qquad 2x_1 + 8x_2 \leq 31 + 4(1-\alpha) \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

cuya solución optimal es,

$$x_1(\alpha) = [103 + 28(1-\alpha)]/18; \; x_2(\alpha) = [176 + 8(1-\alpha)]/72, \; \forall \alpha \in (0,1]$$

Como queremos que x_1 sea entera, hay que realizar un análisis previo, sobre α, estudiando los rangos en los que $f_k(\alpha) \leq 1$, de este modo, (3.11) toma las siguientes expresiones

$$-4/9\ x_3 - 1/18\ x_4 \leq -\ [-23 + 28(1-\alpha)]/18 \qquad 0 < \alpha \leq 5/28$$

$$-4/9\ x_3 - 1/18\ x_4 \leq -\ [-5 + 28(1-\alpha)]/18 \qquad 5/28 < \alpha \leq 23/28$$

$$-4/9\ x_3 - 1/18\ x_4 \leq -\ [13 + 28(1-\alpha)]/18 \qquad 23/28 < \alpha \leq 1$$

con lo cual, dependiendo del valor de α, tendríamos tres distintos cortes para la primera restricción, de modo que el problema inicial quedaría dividido a su vez en tres subproblemas.

Esto nos puede producir una enorme ramificación de problemas si, además, tenemos en cuenta que esto sería para cada variable que tuviese que ser entera.

Por tanto como antes, se impone estudiar la obtención de una solución difusa para el problema, así como sus propiedades, a partir de métodos de PLE paramétrica.

2.2. METODOS BRANCH AND BOUND EN PROBLEMAS DE PE CON RESTRICCIONES DIFUSAS

Como ya se dijo, la realización mas importante de la técnica Branch and Bound en relación con los problemas de PE, es el conocido algoritmo de Lang y Doig, [66], que sirve tanto para problemas enteros puros, como para enteros mixtos, y sigue fielmente las etapas del enfoque general Branch and Bound que vimos en la sección 4.2, Capítulo I. A pesar de esta generalidad, debido a que el problema entero mixto difuso presenta mas inconvenientes que el puro, ahora consideraremos que todas las variables han de ser enteras y, naturalmente, difusas las restricciones, es decir, partimos del problema

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & z = cx \\ \text{s.a:} \quad & \\ & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \lesssim b_i, \; i \in M \\ & x_j \geq 0, \; x_j \in \mathbb{N}, \; j \in N \end{aligned} \tag{3.12}$$

Los elementos que definimos en la sección 4.2, Capítulo I, son los siguientes: S es el conjunto difuso de restricciones (incluidas las de integridad), T es el correspondiente conjunto continuo (difuso) de restricciones y w es idéntica a z, pero pudiendo tomar valores continuos las variables.

El algoritmo de Lang y Doig, igual que los métodos de corte, empieza resolviendo el problema continuo (3.5). Su solución da una cota superior para todos los elementos de S y si, como suponemos, el óptimo no es entero, comienza la ramificación. Para ello se selecciona una variable x_k, con valor no entero en el óptimo del problema (3.5). Supongamos que $x_k = x_k^*(\alpha)$. La ramificación de T se efectua imponiendo como condición necesaria para la integridad de x_k que

$$x_k \leq [x_k^*(\alpha)] \quad \text{ó} \quad x_k \geq [x_k^*(\alpha)] + 1 \tag{3.13}$$

siendo $w([x_k^*(\alpha)])$ y $w([x_k^*(\alpha)] + 1)$ cotas superiores para todos los enteros $x_k < [x_k^*(\alpha)])$ y $x_k > [x_k^*(\alpha)] + 1$, respectivamente. Esas cotas superiores (la fase de acotación del algoritmo) se calculan resolviendo los problemas lineales paramétricos

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & w = cx \\ \text{s.a:} \quad & \\ & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i + d_i(1-\alpha), \; i \in M \\ & x_j \leq [x_k^*(\alpha)] \\ & x_j \geq 0, \; \alpha \in (0,1] \end{aligned} \tag{3.14}$$

y

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } w = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad \sum_{j\in N} a_{ij}x_j \le b_i + d_i(1-\alpha),\ i \in M \\
&\qquad x_j \ge [x_k^*(\alpha)] + 1 \\
&\qquad x_j \ge 0,\ \alpha\in (0,1]
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

a partir de los cuales se continua el proceso hasta conseguir la solución entera difusa optimal en alguna de las ramas que vamos abriendo.

Incluso para problemas de pequeña dimensión, ya en el caso convencional, este algoritmo produce un alto número de ramificaciones. Ni que decir tiene que con el planteamiento impreciso que estamos considerando, dependiendo las soluciones de un parámetro, el correspondiente árbol que describe el proceso puede llegar a tener un número de ramas tan formidable que haga, prácticamente, intratable el problema por este método y, por tanto, al igual que ocurría con el caso del problema difuso mixto, tendremos que ir hacia el uso de algoritmos, aún, más especiales que éste.

Al respecto, proponemos enfocar la resolución de (3.12) a partir del problema Entero paramétrico que obtendremos sustituyendo tales restricciones difusas, por sus correspondientes α-cortes (en la misma forma que los problemas normales de PLD), para así obtener una solución difusa del mismo.

Estudiaremos tanto el problema de PED Puro como el problema de PED Mixto enfocando la resolución de ambos a partir de sus α-cortes, obteniendo un problema paramétrico asociado y la solución difusa de los mismos.

2.3. RESOLUCION DEL MODELO DE PED PURO

Consideremos un modelo general de Programación Entera Difusa Puro

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = f(x) \\ &\text{s.a:} \\ &\quad g_i(x) \underset{\sim}{<} b_i,\ i \in M \\ &\quad x_j \geq 0,\ j \in N \\ &\quad x_j \in \mathbf{N},\ j \in N \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para cada restricción, notamos

$$\underset{\sim}{X}_i = \{x \in \mathbf{R}^n / \ g_i(x) \underset{\sim}{<} b_i,\ x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbf{R},\ j \in N\}$$

Entonces, el conjunto de restricciones es representado por

$$\underset{\sim}{X} = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

y (3.16) puede ser escrito como

$$\text{Max } \{z = f(x) / \ x \in \underset{\sim}{X}\} \tag{3.17}$$

Como es bién conocido, la naturaleza difusa de las restricciones de (3.16) implica que para cada restricción se tiene una función de pertenencia μ_i: $\mathbf{R}^n \longrightarrow (0,1]$ $\forall i \in M$, que nos da el grado de cumplimiento con el que cada $x \in \mathbf{R}^n$ satisface la correspondiente restricción,

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g_i(x) \leq b_i \\ f_i(g_i(x)) & \text{si} \quad b_i \leq g_i(x) \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si} \quad g_i(x) \geq b + d_i \end{cases}$$

f_i continua y monótona no creciente en **R**, donde el valor d_i, $i\in M$, es el margen con el que el decisor permite que la i-ésima restricción sea violada. Podemos suponer f_i funciones lineales, en [17] es demostrado que la utilización de estas funciones no altera el intervalo en el cual está localizada la solución al problema.

Así, es claro que un α-corte, $\forall\alpha\in(0,1]$, del conjunto de restricciones se escribe de la forma:

$$X(\alpha) = \{x\in \mathbf{R}^n \ / \ \mu_X(x) \geq \alpha\}$$

donde $\forall\ x\in\mathbf{R}^n$, $\mu_X(x) = \inf\ \{\mu_i(x),\ i\in M\}$.

$X_i(\alpha)$ notará un α-corte de la i-ésima restricción, $\forall i\in M$.

Entonces, $\forall\alpha\in(0,1]$

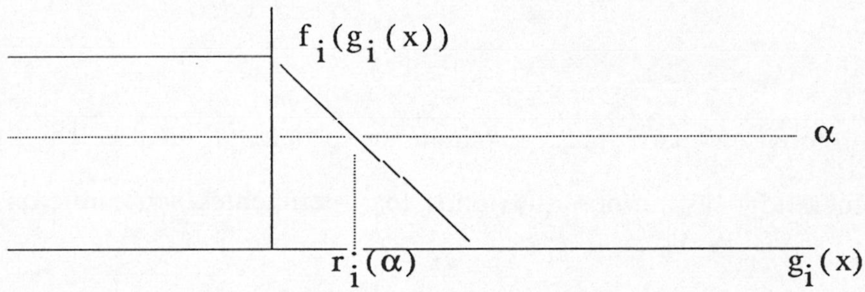
$$X(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{m} X_i(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{m} \{x\in\mathbf{R}^n / \ \mu_i(x) \geq \alpha,\ x_j\geq 0,\ x_j\in\mathbf{N},\ j\in N\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \{x\in\mathbf{R}^n / \ f_i[g_i(x)] \geq \alpha,\ x_j\geq 0,\ x_j\in\mathbf{N},\ j\in N\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \{x\in\mathbf{R}^n / \ g_i(x) \leq f_i^{-1}(\alpha),\ x_j\geq 0,\ x_j\in\mathbf{N},\ j\in N\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \{x\in\mathbf{R}^n / \ g_i(x) \leq r_i(\alpha),\ x_j\geq 0,\ x_j\in\mathbf{N},\ j\in N\}$$

con $r_i(\alpha) = f_i^{-1}(\alpha)$ univocamente determinada



Así, queda claro que (3.16) se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = f(x) \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad g_i(x) \le r_i(\alpha),\ i \in M \\ &\qquad x_j \ge 0,\ j \in N \\ &\qquad x_j \in \mathbf{N},\ j \in N,\ \alpha \in (0, 1] \end{aligned} \tag{3.18}$$

modelo similar al obtenido en [70] para el problema de Programación Lineal Difusa, y que nos permite estudiar (3.16) como un problema de Programación Entera Paramétrico.

Ahora notando, $\forall \alpha \in (0,1]$,

$$S(\alpha) = \{y \in \mathbf{R}^n / \ f(y) = \text{Max } f(x),\ x \in X(\alpha)\},$$

definimos una solución difusa para el problema (3.16),a partir de [53].

Definición 3.1. La solución difusa para el problema (3.16) es un conjunto difuso con función de pertenencia

$$\lambda(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in S(\alpha)} \alpha & x \in \bigcup\limits_{\alpha} S(\alpha) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{3.19}$$

Consideremos en particular, el siguiente problema de PLED, en el cual, sin falta de generalidad asumimos que todos los coeficientes son números enteros,

$$\begin{aligned} \text{Max: } & z = cx \\ \text{s.a: } & \\ & a_i x \lesssim b_i, \quad i \in M \\ & x_j \in \mathbf{N}, \; j \in N \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde las funciones de pertenencia de las restricciones se toman como funciones lineales

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad a_i x \le b_i \\ [(b_i + d_i) - a_i x]/d_i & \text{Si} \quad b_i \le a_i x \le b_i + d_i \\ 0 & \text{Si} \quad a_i x \ge b_i + d_i \end{cases}$$

Por tanto, (3.20) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \text{Max: } & z = cx \\ \text{s.a: } & \\ & a_i x \le b_i + d_i(1-\alpha), \quad i \in M \\ & x_j \in \mathbf{N}, \; \alpha \in (0,1], \; j \in N \end{aligned} \tag{3.21}$$

problema de Programación Lineal Entera Paramétrico convencional, que no está resuelto en la literatura especializada.

En lo que sigue, para cada valor fijado $\alpha \in (0,1]$, el problema se notará por $P(\alpha)$, su solución optimal por $x(\alpha)$ y $z(\alpha) = cx(\alpha)$.

Para estudiar un método que nos permita obtener una solución difusa de (3.20) utilizaremos $P(\alpha)$, $\forall\alpha\in(0,1]$, como problema intermedio. $[x]$ notará la parte entera de x. Así, si $\{x\}$ nota el valor fraccional de $x \in \mathbf{R}$, entonces $x = [x] + \{x\}$, $0 \leq \{x\} < 1$. A continuación demostraremos una serie de resultados que son necesarios para resolver (3.21).

Proposición 3.2. Sea $x(\alpha')$ una solución optimal entera para $P(\alpha')$ para algún valor fijado $\alpha'\in(0,1]$. Entonces

$$\lambda(x(\alpha')) = \min\ \{\mu_i(x(\alpha')),\ i\in M\}$$

donde $\lambda(\cdot)$ es la función de pertenencia de la solución difusa definida en (3.18).

Demostración. Notemos

$$\theta = \min\ \{\mu_i(x(\alpha')),\ i\in M\}$$

Entonces, $\theta \geq \alpha'$ y $X(\theta) \subseteq X(\alpha')$. Como

$$cx(\alpha') = \mathrm{Max}\ \{cx/\ x\in X(\alpha')\}$$

y $x(\alpha') \in X(\theta) \subseteq X(\alpha')$, se sigue que

$$cx(\alpha') = \mathrm{Max}\ \{cx/\ x\in X(\theta)\}$$

Además, como $\forall\alpha > \theta$ se tiene $x(\alpha') \notin X(\alpha)$, entonces

$$\lambda(x_{\alpha'}) = \theta = \min\ \{\mu_i(x(\alpha')),\ i\in M\} \qquad \blacksquare$$

Corolario 3.3. Sea $x(\alpha')$ solución optimal entera para $P(\alpha')$ para algún valor fijado $\alpha'\in(0,1]$ y sea $\theta = \lambda(x(\alpha'))$. Entonces $x(\alpha')$ es la solución optimal para $P(\alpha)$ $\forall\alpha\in[\alpha',\theta]$.

Demostración. $\forall\alpha\in[\alpha',\theta]$ se tiene $X(\theta) \subseteq X(\alpha) \subseteq X(\alpha')$. Por lo tanto, como $x(\alpha') \in X(\theta)$ y

$$cx(\alpha') = \text{Max } \{cx/\ x\in X(\alpha')\}$$

entonces $cx(\alpha')= \text{Max } \{cx/\ x\in X(\alpha)\}\ \forall\alpha\in[\alpha',\theta]$. ∎

Nota. De este corolario se obtiene que

$$\forall\alpha\in[\alpha',\theta],\ x(\alpha') = x(\alpha)$$

y en particular, si $\alpha' \neq \alpha$, $\lambda(x(\alpha')) = \lambda(x(\alpha)) = \theta$.

A continuación definiremos unos parámetros que necesitaremos para posteriores resultados.

Cosideremos $\forall\alpha\in(0,1]$,

$$l_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \max_i \{b_i+d_i(1-\alpha)\}=0 \\ \min_i \Big\{\{b_i+d_i(1-\alpha)\}:\ \{b_i+d_i(1-\alpha)\}\neq 0\Big\} & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea $d' = \max_i \{d_i\}$, y notemos $\Delta\alpha = l_\alpha/d'$. Entonces, es evidente que

$$d_i\cdot\Delta\alpha \leq 1,\quad \forall\ i\in M.$$

Lema 3.4. Si $\{b_i+d_i(1-\alpha)\}\neq 0$, entonces $[b_i+d_i(1-\alpha)] = [b_i+d_i(1 - (\alpha+\Delta\alpha))]$.

Demostración. En efecto, utilizando la anterior notación, es claro que

$$1 > \{b_i+d_i(1-\alpha)\}- d_i\cdot\Delta\alpha= \{b_i+d_i(1-\alpha)\}- d_i\cdot l_\alpha/d' \geq$$

$$\geq \{b_i+d_i(1-\alpha)\} - d_i \cdot 1_\alpha/d_i = \{b_i+d_i(1-\alpha)\} - 1_\alpha \geq 0$$

y por tanto

$$[b_i+d_i(1-\alpha)] = [b_i+d_i(1-\alpha) - d_i \cdot \Delta\alpha] = [b_i+d_i(1 - (\alpha+\Delta\alpha))] \qquad \blacksquare$$

Proposición 3.5. Sea $\theta = \lambda(x(\theta)) \in (0, 1)$, y $\alpha' = \theta+\Delta\theta$, con $\Delta\theta$ como anteriormente hemos definido. Consideremos $\alpha'' = \lambda(x(\alpha'))$. Entonces $x(\alpha')$ es la solución optimal para $P(\alpha)$ $\forall\alpha \in (\theta, \alpha'']$.

Demostración. Consideremos $(\theta,\alpha'']$ dividido en dos subintervalos: (θ,α') y $[\alpha', \alpha'']$. Vamos a demostrar la proposición en cada uno de ellos. En el segundo subintervalo la demostración es inmedianta por el corolario anterior.

En el primer subintervalo, sea $\beta \in (\theta, \alpha')$ y $x(\beta)$ la solución optimal 0-1 para $P(\beta)$. Si $\beta' = \lambda(x(\beta))$, entonces $\beta' \geq \beta > \theta$.

Como $\beta' = \lambda(x(\beta))$, $\exists i \in M$ tal que se verifica

$$a_i x(\beta) = b_i + d_i(1-\beta') < b_i + d_i(1-\theta)$$

siendo $a_i x(\beta)$ un número entero.

Además, de la naturaleza entera de los coeficientes,

$$[b_i + d_i(1-\beta')] = b_i + d_i(1-\beta')$$

Entonces hay dos posibilidades:

a) $[b_i + d_i(1-\theta)] = b_i + d_i(1-\theta)$.

Pero como por la naturaleza entera de los coeficientes se tiene

$$b_i + d_i(1-\beta') < b_i + d_i(1-\theta)$$

y $d_i \cdot \Delta\theta \leq 1$, entonces

$$b_i + d_i(1-\beta') \leq b_i + d_i(1-\theta) - d_i \cdot \Delta\theta = b_i + d_i(1 - (\theta+\Delta\theta)) =$$

$$= b_i + d_i(1-\alpha') \Rightarrow \beta' \geq \alpha'$$

b) $[b_i+d_i(1-\theta)] \neq b_i+d_i(1-\theta)$.

Pero como

$$d_i \cdot \Delta\theta \leq \{b_i+d_i(1-\theta)\}$$

entonces

$$b_i + d_i(1-\beta') \leq [b_i + d_i(1-\theta)] + \{b_i + d_i(1-\theta)\} - d_i \cdot \Delta\theta =$$

$$= b_i+d_i(1-\alpha') \Rightarrow \beta' \geq \alpha'$$

Puesto que $\beta' \geq \alpha'$ y $\alpha' > \beta$, entonces $\alpha' \in [\beta,\beta']$. Así, como por el corolario, $x(\beta)$ es la solución optimal para $P(\omega)$, $\forall\omega \in [\beta,\beta']$. Por tanto, $x(\beta)$ es también la solución optimal para $P(\alpha')$, así, $cx(\beta) = cx(\alpha')$, resulta que $x(\alpha')$ es la solución optimal para $P(\omega)$, $\forall\omega \in [\beta, \beta']$.

Por lo tanto, $x(\alpha')$ es la solución optimal para $P(\beta)$, $\forall\beta \in (\theta,\alpha')$, y así, finalmente, $x(\alpha')$ es la solución optimal para $P(\alpha)$, $\forall\alpha \in (\theta,\alpha'']$. ■

Los anteriores resultados nos permiten construir un algoritmo para resolver el problema (3.21), que se usará como problema intermedio de cara a la obtención de la solución difusa de (3.20). Junto con ellos, utilizaremos el corte fraccionario de Gomory, (3.11), siguiendo el análisis postóptimo realizado para este problema en [34]. En éste, se supone la violación de la desigualdad por un valor fijo no paramétrico.

Así, incorporando a la derecha el parámetro Ω y siguiendo la notación y resultados de [34] el corte queda de la siguiente forma:

$$- \sum_{j \in NB} f_{kj} x_j + S = - f_k(\Omega)$$

$$-f_k(\Omega) = - f_k - \{B_k^{-1}\}\Omega + \delta, \qquad \delta = [f_k + \{B_k^{-1}\}\Omega]$$

donde B es una base del problema lineal,

$$Y = B^{-1}A, \quad \bar{x}_k = B^{-1} \cdot b, \quad f_k = \{\bar{x}_k\}$$

donde k es el índice de la correspondiente fila inicial en la cual se produce un corte, y S es una variable de holgura introducida en la restricción.

Se notará

$$\bar{V}^t = \{\bar{x}_k\}, \quad V^t = \{B_k^{-1}\}, \quad \delta^t = [\bar{V}^t + V^t d^t], \quad d^t = \left(\Omega_1,...,\Omega_m, \delta^1,...,\delta^{t-1}\right)$$

El algoritmo trabaja como sigue: Se resuelve P(α') para α'=0. Se calcula el intervalo en el cual se mantiene la solución $(\alpha_1,\theta]$. Utilizando idénticos pivotes y cortes que los utilizados para resolver P(α') se resuelve P(α) para $\alpha = \theta + \Delta\theta$. Si la solución no es optimal aplicamos nuevos cortes al conjunto de restricciones hasta que obtenga la solución optimal. Cuando el cálculo de la solución factible con estos cortes es optimal, calculamos el intervalo en el cual se mantiene la solución y repetimos la operación hasta que $\theta = 1$.

El intervalo de valores de α para el cual x(α) es solución para P(α) se notará como $I_{x(\alpha)}$. Está claro que $I_{x(\alpha)} \subseteq (0,1]$.

El algoritmo queda como sigue.

Algoritmo

Paso 0. Tomar $\alpha = 0 = \alpha_1$.

Paso 1. Resolver $P(\alpha)$, supuestos r cortes, para cada corte t, t=1, ..., r, salvamos $\bar{V}^t = \{\bar{x}_k\}$ y $V^t = \{B_k^{-1}\}$ donde k es el índice de la correspondiente fila inicial. Sea $x(\alpha)$ la solución optimal para $P(\alpha)$.

Paso 2. Sea $\theta = \lambda(x(\alpha)) = \min\ \{\mu_i(x(\alpha)),\ i \in M\}$.
Entonces $x(\alpha)$ es la solución optimal para $P(\alpha)$ $\forall \alpha \in (\alpha_1,\ \theta]$

Paso 3. Si $\theta = 1$ entonces Ir al paso 4.
$\alpha_1 = \theta,\ \Omega = -\ (\theta + \Delta\theta\ -\alpha)\cdot d$.
Para cada corte t se calcula recursivamente δ^t, $\delta^t = [\bar{V}^t + V^t \cdot d^t]$.
Se calcula la solución $x'(\theta+\Delta\theta) = B_\alpha^{-1}\cdot b_\alpha + B_\alpha^{-1}\cdot d_r$ donde B_α^{-1} es la base optimal de $P(\alpha)$ incluyendo todos los r cortes, b_α es el correspondiente vector de la derecha y $d_r = d^{r+1}$.
Sea $\alpha = \theta+\Delta\theta$, $x(\alpha) = x'(\theta+\Delta\theta)$.
Si $x(\alpha)>0$ y es entera entonces Ir al paso 2.
Ir al paso 1 utilizando $x(\alpha)$ como solución inicial para aplicar nuevos cortes.

Paso 4. Fin.

Estudiamos a continuación la convergencia del algoritmo.

En cuanto al paso 1 tenemos asegurada la convergencia en la búsqueda de solución para $P(\alpha)$. Veamos a continuación que existen un número finito de valores de α distintos para los cuales hay que resolver $P(\alpha)$ y por tanto un número finito de pasos en el algoritmo.

Sea $\alpha' \neq 1$, la solución asociada verifica que $\exists$ $i \in M$ tal que

$$a_i x(\alpha') = b_i + d_i\ (1-\alpha') = t_i(\alpha') \in \mathbf{N}$$

para otro valor $\alpha'' \neq \alpha'$ con solución asociada $x(\alpha'')$ $\exists$ $k \in M$ tal que

$$a_k x(\alpha'') = b_k + d_k\ (1-\alpha'') = t_k(\alpha'') \in \mathbf{N}$$

de modo que o bién $i \neq k$ ó $t_i(\alpha') \neq t_k(\alpha'')$.

Para cada $j \in M$ existen a lo más $[d_i]+1$ valores enteros posibles entre b_i y $b_i + d_i$ con lo cual el número máximo de valores enteros posibles será

$$t = \sum_{i=1}^{m} ([d_i]+1)$$

y así el máximo número posible de pasadas del algoritmo con $\alpha' \neq 0$ será t. Lo cual nos garantiza la convergencia del algoritmo.

2.3.1. EJEMPLO

Consideremos el ejemplo estudiado con anterioridad

$$\begin{array}{l} \text{Max: } z = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a:} \\ \quad 2x_1 - x_2 \ \tilde{\leq}\ 9 \\ \quad 2x_1 + 8x_2 \ \tilde{\leq}\ 31 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbf{N} \end{array}$$

siendo $d_1 = 3$ y $d_2 = 4$ los márgenes que el decisor tolera en el cumplimiento de cada restricción. $P(\alpha)$ queda de la forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z = 2x_1 + 5x_2 \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad 2x_1 - x_2 \leq 9 + 3(1-\alpha) \\
&\qquad 2x_1 + 8x_2 \leq 31 + 4(1-\alpha) \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0 \\
&\qquad x_1, x_2 \in \mathbf{N} \\
&\qquad \alpha \in (0, 1]
\end{aligned}
$$

Aplicando el algoritmo se tiene la siguiente solución

$x(0) = (5, 3)$, $z(0) = 25$ $\quad I_{x(0)} = (0, .25]$

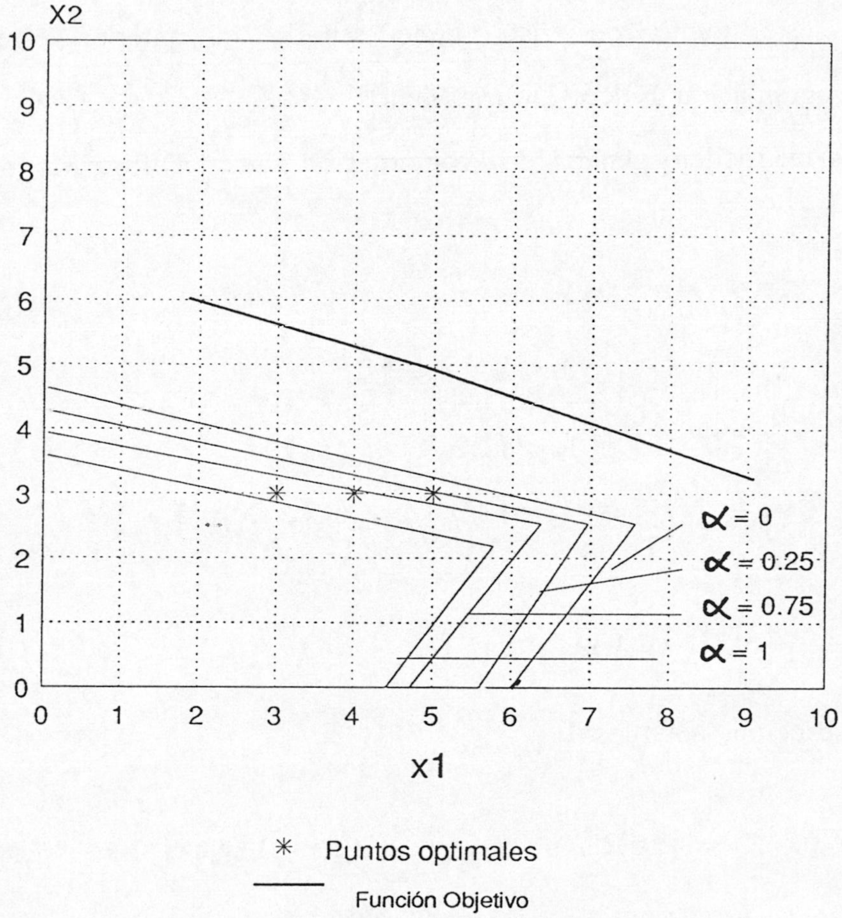
$x(.312) = (4, 3)$ $\quad z(.312) = 23$ $\quad I_{x(.312)} = (.25, .75]$

$x(.936) = (3, 3)$ $\quad z(.936) = 21$ $\quad I_{x(.936)} = (.75, 1]$

y la solución difusa obtenida finalmente, es el conjunto difuso

$$\underset{\sim}{S} = \{(5, 3)/.25, (4, 3)/.75, (3, 3)/1\}$$

En el siguiente gráfico se ve como varía la región factible en función del parámetro α que nos va indicando el grado de pertenencia de las soluciones factibles al conjunto $\underset{\sim}{X}$. En él se puede observar la región a la cual pertenecen las soluciones optimales y como se mantienen optimales para las variaciones de α en los correspondientes intervalos $I_{x(\alpha)}$.



S = {(5,3)/0.25, (4,3)/0.75, (3,3)/1}

2.4. RESOLUCION DEL MODELO DE PED MIXTO

Como se sabe, en muchos problemas de Programación Entera ocurre que no todas las variables son enteras, sino que hay problemas que, junto a las variables enteras existen variables reales, estos son los problemas de Programación Entera Mixtos. Desde este punto de vista tiene sentido el anterior estudio a los problemas de Programación Entera Difusa Mixtos.

Consideremos un modelo general de Programación Entera Difusa Mixto

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z = f(x) + h(y) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad g_i(x) + t_i(y) \underset{\sim}{<} b_i, \ i \in M, \\
&\qquad x_l \geq 0 \quad l \in L = \{1,2, \dots, n_1\}, \\
&\qquad y_j \in \mathbf{N}, \ j \in J = \{1,2, \dots, n_2\}, \ \ N = J + L
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

suponemos $l=1,\dots,n_1$, $j=1, \dots, n_2$, $n_1+n_2=n$.

Para cada restricción, notamos

$$\underset{\sim}{X_i} = \{x \in \mathbf{R}^n / \ g_i(x)+t_i(y) \underset{\sim}{<} b_i, \ x_l \geq 0, \ y_j \in \mathbf{N}\}$$

Entonces, el conjunto de restricciones se representa por

$$\underset{\sim}{X} = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

Suponiendo similares funciones de pertenencia que en el problema puro para representar la restricción difusa y realizando un estudio paralelo mediante los α-corte de (3.22), es claro, que un α-corte del conjunto de restricción es de la forma:

$$X(\alpha) = \{v \in \mathbf{R}^n \ / \ \mu_X(v) \geq \alpha\} \quad \forall \ \alpha \in (0,1]$$

donde $\forall u \in \mathbf{R}^n$, $\mu_X(u) = \inf \{\mu_i(u), \ i \in M\}$.

Por lo tanto,

$$X(\alpha) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n / \ g_i(x)+t_i(y) \geq r_i(\alpha) \ i \in M, \ x_l \geq 0 \ l \in L, \ y_j \in \mathbf{N} \ j \in J\}$$

y (3.22) se puede expresar en la forma

$$\begin{array}{l} \text{Max:} \ z(\alpha) = f(x) + h(y) \\ \text{s.a:} \\ \quad g_i(x) + t_i(y) \leq r_i(\alpha) \quad i \in M, \\ \quad x_l \geq 0, \ l \in L, \\ \quad y_j \in \mathbf{N}, \ j \in J \\ \quad \alpha \in (0,1] \end{array} \tag{3.23}$$

problema que notaremos $P(\alpha)$, $\forall \alpha \in (0,1]$. Así mismo, notando

$$S'(\alpha) = \{(x',y') \in \mathbf{R}^n / \ z((x',y')) = \text{Max } f(x)+h(y), \ (x,y) \in X(\alpha)\}$$

definimos una solución difusa de (3.22), de acuerdo con [53].

Definición 3.6. La solución difusa para (3.22) es un conjunto difuso con función de pertenencia

$$\lambda(v) = \begin{cases} \displaystyle\sup_{v \in S'(\alpha)} \alpha & v \in \bigcup_{\alpha} S'(\alpha) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

En particular, para el problema de Programación Lineal Entera Difusa

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z = cx + hy \\
&\text{s.a:} \\
&\quad a_i x + q_i y \lesssim b_i,\ i \in M \\
&\quad x_l \geq 0,\quad l \in L, \\
&\quad y_j \in \mathbf{N},\ j \in J
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

el problema paramétrico asociado, P(α), es de la forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z(\alpha) = cx + hy \\
&\text{s.a:} \\
&\quad a_i x + q_i y \leq b_i - d_i(1-\alpha),\ i \in M \\
&\quad x_l \geq 0,\quad l \in L \\
&\quad y_j \in \mathbf{N},\ j \in J \\
&\quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

En la sección 5.2, Capítulo I, se presentó un algoritmo propuesto en [37], que nos permite obtener la solución optimal para este problema, y así obtener la solución difusa de (2.24). Por tanto, no insistiremos más en los detalles del método de resolución que se considera, y lo ilustraremos con los siguientes ejemplos.

2.4.1. EJEMPLOS

EJEMPLO 1

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z = 2x_1 + 5x_2 \\
&\text{s.a:} \\
&\quad 2x_1 - x_2 \lesssim 9 \\
&\quad 2x_1 + 8x_2 \lesssim 31 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0,\ x_2 \in \mathbf{N}
\end{aligned}
$$

siendo $d_1 = 3$ y $d_2 = 4$. El problema paramétrico asociado, P(α), queda de la forma:

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } z = 2x_1 + 5x_2 \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad 2x_1 - x_2 \leq 9 + 3(1-\alpha) \\
&\qquad 2x_1 + 8x_2 \leq 31 + 4(1-\alpha) \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0 \\
&\qquad x_2 \in \mathbf{N}, \\
&\quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo se tiene la siguiente solución:

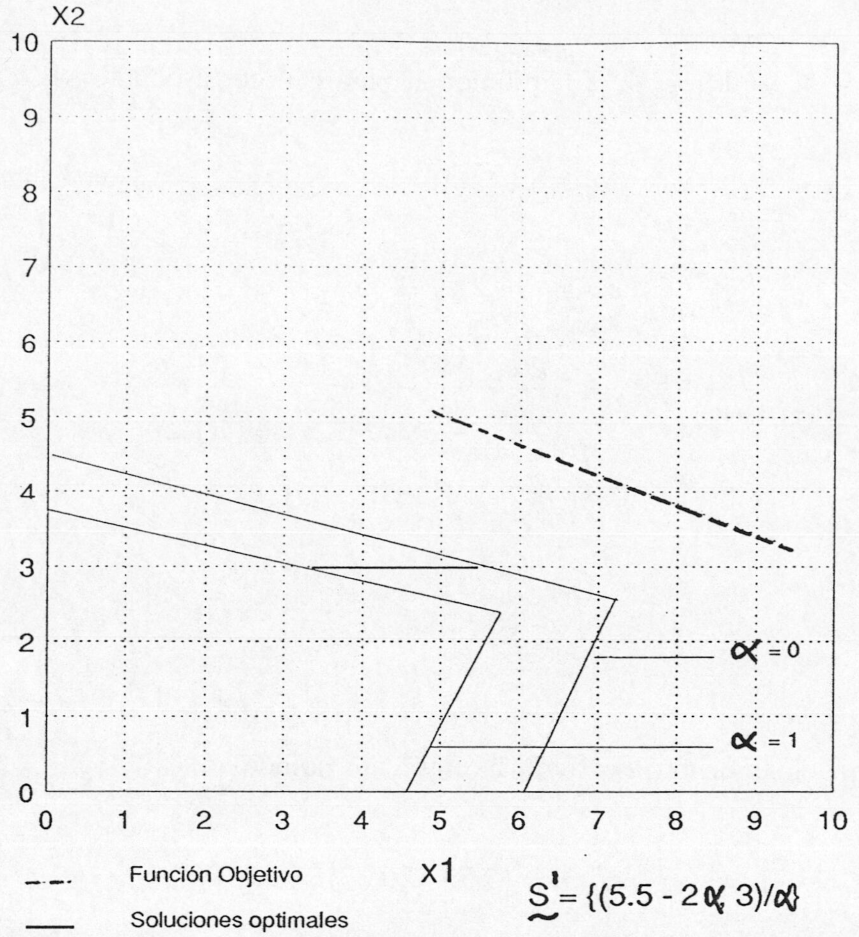
$$x(\alpha) = (5.5 - 2\alpha,\ 3) \qquad \alpha \in (0,1]$$

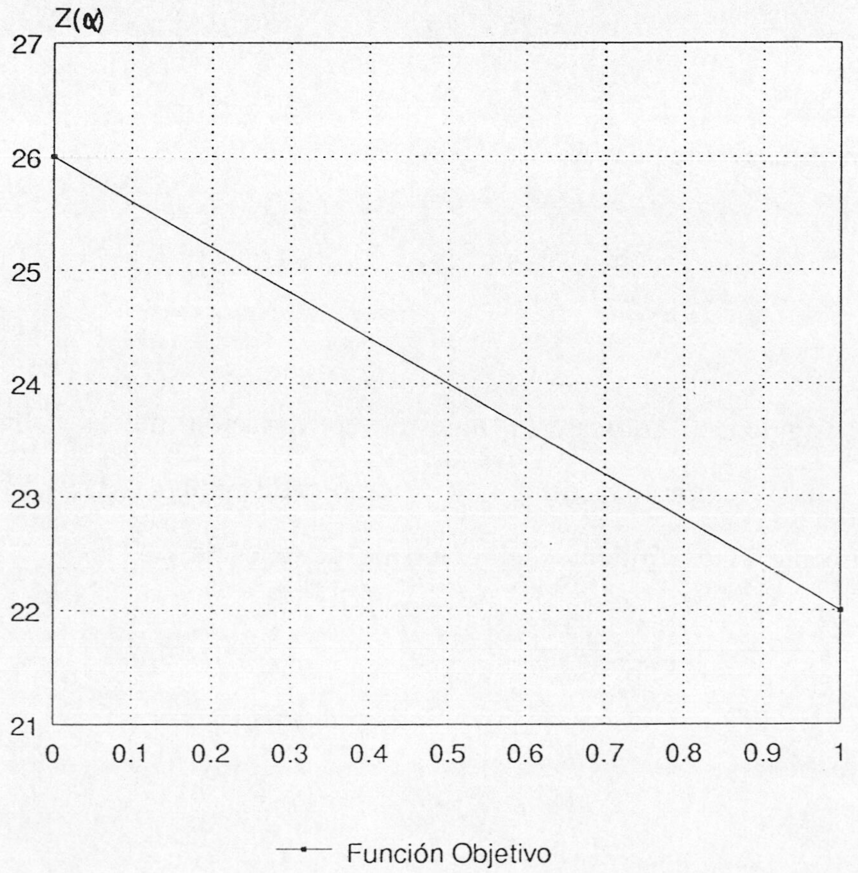
$$z(\alpha) = 26 - 4\alpha \qquad \alpha \in (0,1]$$

y la solución difusa obtenida es:

$$\tilde{S}' = \{(5.5 - 2\alpha,\ 3)/\alpha,\ \alpha \in (0,1]\}$$

En las siguientes gráficas se muestra la variación de la solución optimal de acuerdo a la región factible, y como disminuye la función objetivo proporcionalmente al crecimiento del grado de pertenencia α.





$z(\alpha) = 26 - 4\alpha$

EJEMPLO 2

$$
\begin{aligned}
\text{Max: } & z = 2x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a:} & \\
& 2x_1 - x_2 \lesssim 9 \\
& 2x_1 + 8x_2 \lesssim 31 \\
& x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 \in \mathbf{N}
\end{aligned}
$$

siendo $d_1 = 3$ y $d_2 = 4$.

El problema paramétrico asociado, $P(\alpha)$, queda de la forma:

$$
\begin{aligned}
\text{Max: } & z = 2x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a:} & \\
& 2x_1 - x_2 \leq 9 + 3(1-\alpha) \\
& 2x_1 + 8x_2 \leq 31 + 4(1-\alpha) \\
& x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 \in \mathbf{N},\ \alpha \in (0,1]
\end{aligned}
$$

Aplicando el algoritmo se tiene la siguiente solución:

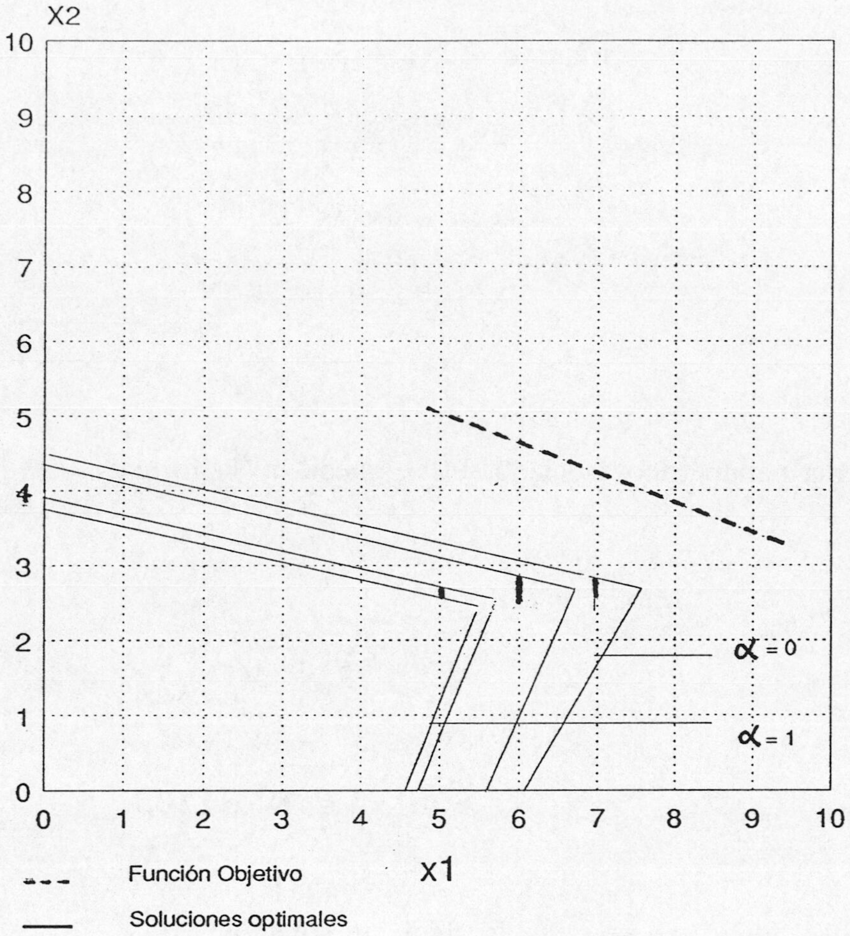
$$
x(\alpha) = \begin{cases} (7,\ 2.625 - 0.5\alpha), & \alpha \in (0,\ 0.1786] \\ (6,\ 2.875 - 0.5\alpha), & \alpha \in (0.1786,\ 0.8214] \\ (5,\ 3.125 - 0.5\alpha), & \alpha \in (0.8214,\ 1] \end{cases}
$$

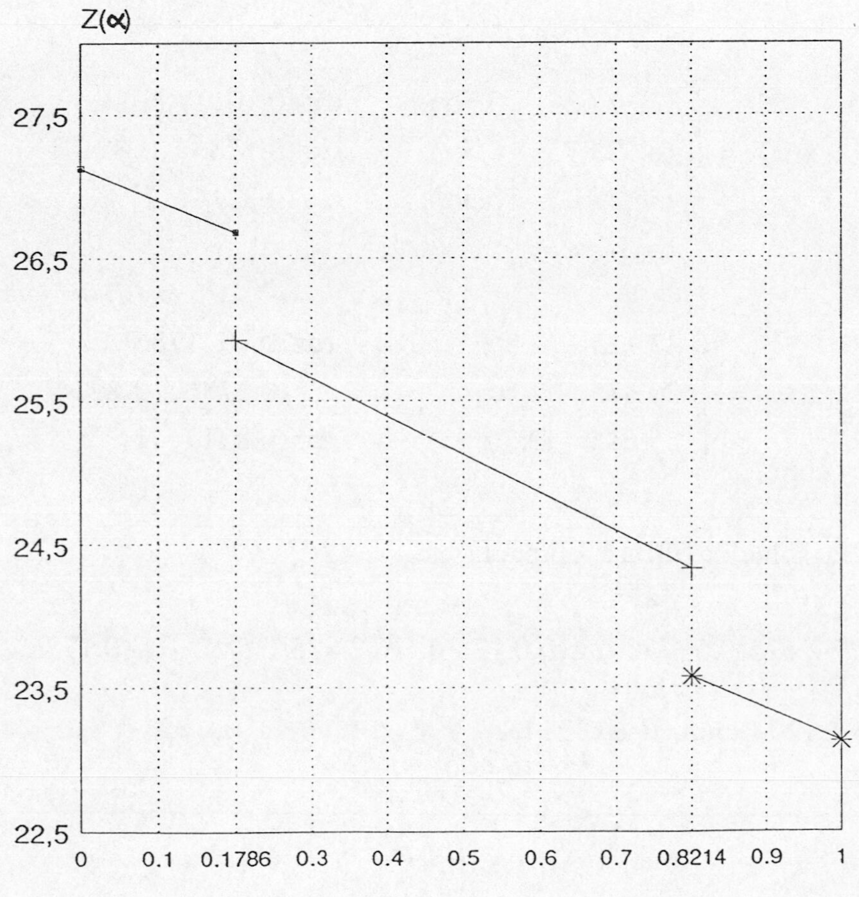
$$
z(\alpha) = \begin{cases} 27.125 - 2.5\alpha, & \alpha \in (0,\ 0.1786] \\ 26.375 - 2.5\alpha, & \alpha \in (0.1786,\ 0.8214] \\ 25.625 - 2.5\alpha & \alpha \in (0.8214,\ 1] \end{cases}
$$

de modo que la solución difusa obtenida es:

$$
\tilde{S}' = \{(7,2.625-0.5\alpha)/\alpha\ \ \alpha \in (0,0.1786],\ (6,2.875-0.5\alpha),\ \alpha \in (0.1786,0.8214],
$$
$$
(5,3.125-0.5\alpha), \alpha \in (0.8214,1]\}
$$

A continuación vemos esta solución gráficamente.





3. PROBLEMAS DE PLE CON COSTOS DIFUSOS

3.1. FORMULACION DEL PROBLEMA

Como ya se ha indicado, existen problemas de optimización donde el decisor desconoce con exactitud los coeficientes del parametro **c** que toman parte en el problemaa, es decir, tiene un conocimiento vago sobre los mismos. En esta situación se pueden considerar los coeficientes representados como números difusos, lo cual nos va a permitir modelar este problema como un problema de PLE con Costos Difusos.

A continuación formularemos dicho problema y diseñaremos procedimientos que nos permitan resolverlo.

Este problema se puede escribir como sigue:

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = \sum_{j\in N} \underset{\sim}{c}_j x_j \\ \text{s.a:} & \\ & \sum_{j\in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i \in M \\ & x_j \in \mathbf{N}, \; j \in N, \; N = \{1,2,...,n\} \end{array} \tag{3.26}$$

donde a_{ij}, $b_i \in \mathbf{R}$, el conjunto de restricciones es convencional y $\underset{\sim}{c}_j \in F(\mathbf{R})$, siendo $F(\mathbf{R})$ el conjunto de números difusos en la recta real. Así se tiene la función de pertenencia

$$\mu_j : \mathbf{R} \longrightarrow (0,1], \quad j \in N \tag{3.27}$$

que expresa la falta de precisión sobre los valores de los coeficientes que tiene el decisor. Estas funciones ya han sido estudiadas en la sección 3.2, Capítulo I.

Así, el problema de PLE con costos difusos se puede escribir como sigue

$$\underset{\sim}{\text{Max}} \left\{ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \;/\; x \in X \right\} \tag{3.29}$$

siendo

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \;/\; A\,x \leq b,\ x_j \geq 0,\ \ x_j \in \mathbf{N} \right\}$$

donde '$_\sim$' implica la existencia de n funciones de pertenencia; eventualmente algunas de estas funciones pueden ser funciones características clásicas porque el correspondiente coeficiente no sea difuso.

Para estudiar este problema de PLED haremos uso del teorema de representación, que nos permitirá obtener una solución difusa para (3.26). Este teorema provocará dos métodos de resolución:

1) mediante Puntos eficientes y Vectores de peso, y

2) haciendo uso de la Aritmética Intervalar.

Hay un segundo enfoque de resolución que se deducirá del uso de Métodos de Comparación de números difusos. No lo hemos incluido en esta memoria porque lleva a problemas de Programación no Lineal, que para resolverlos sería necesario utilizar procedimientos heurísticos de busqueda de solución, lo que cae fuera del ámbito que aquí nos hemos fijado.

3.2. RESOLUCION DEL PROBLEMA UTILIZANDO α-CORTES

Dado (3.26) y considerando las funciones de pertenencia (3.27), $\forall\ c \in \mathbf{R}^n$, se puede definir la función

$$\mu(c) = \operatorname*{Inf}_{j} \mu_j(c_j), \quad j \in N$$

donde $\mu(\cdot)$ es la función de pertenecia del objetivo difuso, que induce la relación difusa siguiente

$$\forall\ x,y \in X \quad \mu(x,y) = \operatorname{Sup} \{\alpha \ / \ cx \geq cy,\ \forall c \in \mathbf{R}^n\!: \ \mu(c) \geq 1\text{-}\alpha\}$$

que es un preorden difuso, como se demuestra en [70]. De modo que el objetivo difuso induce una relación de preferencia difusa entre los elementos de la región factible.

El hecho de que los α-cortes se tomen en los valores 1-α, y no en α como ha sido habitual, se justifica por lo siguiente. Si asociaramos el grado de pertenencia α al corte del objetivo de nivel α, significaría que el nivel de preferencia más alto (α=1) se le daría a los pares de elementos que se comparan sobre un conjunto, C_1, que está contenido en todos los demás. Sin embargo, si asociamos el valor α con el nivel 1-α, en el objetivo difuso, está claro que, un par de elementos tendrá grado de preferencia 1, cuando un punto sea más preferido que el otro, para todas las posibles funciones objetivo ordinarias que se puedan considerar en el problema. El razonamiento es válido para cualquier $\alpha \in [0,1]$ y obliga a asociar los grados de preferencia y los α-cortes del objetivo, en el modo en que lo hacemos.

Como se muestra en [70] la solución difusa para (3.26) se puede encontrar resolviendo el siguiente problema

$$\operatorname*{Max}_{x \in X} \ \{cx/ \ \forall c \in \mathbf{R}^n\!: \ \mu(c) \geq 1\text{-}\alpha\} \qquad (3.30)$$

En definitiva, una solución difusa para (3.26) se pueden encontrar resolviendo el siguiente problema paramétrico

$$\begin{aligned}
\text{Max: } z &= \sum_{j\in N} c_j x_j \\
\text{s.a: } & \\
& \sum_{j\in N} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in M, \\
& \mu(c) \ge 1-\alpha \\
& x_j \ge 0, \; x_j \in \mathbf{N}, \; j \in N, \\
& c \in \mathbf{R}^n, \quad \alpha \in [0,1]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Teniendo en cuenta que

$$\mu(c) \ge 1-\alpha \iff \operatorname*{Inf}_j \mu_j(c_j) \ge 1-\alpha \iff \mu_j(c_j) \ge 1-\alpha, \; j\in N, \; \alpha\in[0,1]$$

entonces se obtiene que

$$\mu_j(c_j) \ge 1-\alpha \iff h_j^{-1}(1-\alpha) \le c_j \le g_j^{-1}(1-\alpha), \quad j \in N$$

y notando

$$\phi_j \equiv h_j^{-1}, \qquad \psi_j \equiv g_j^{-1}, \qquad j\in N,$$

(3.31) quedará de la siguiente forma:

$$\text{Max } \left\{ cx \; / \; x\in X, \; \Phi(1-\alpha) \le c \le \Psi(1-\alpha), \; \alpha\in[0,1] \right\} \tag{3.32}$$

donde

$$\Phi(\cdot) = [\phi_1(\cdot), \ldots, \phi_n(\cdot)] \text{ y } \Psi(\cdot) = [\psi_1(\cdot), \ldots, \psi_n(\cdot)]$$

Por tanto, si notamos por $\Gamma(1-\alpha)$, $\alpha\in[0,1]$, al conjunto de vectores $c\in\mathbf{R}^n$ cuyas componentes c_j pertenecen al intervalo $[\phi_j(1-\alpha),\psi_j(1-\alpha)]$, $j\in N$, (3.32) se puede escribir finalmente de la siguiente forma:

$$\text{Max} \left\{ cx \;/\; x \in X,\; c \in \Gamma(1-\alpha),\; \alpha \in [0,1] \right\} \tag{3.33}$$

problema que notaremos como $P(\alpha)$.

Para cada $\alpha \in [0,1]$ tenemos un problema de Programación Lineal Entera con coeficientes intervalares, donde los coeficientes de la función objetivo toman valores en sus respectivos intervalos.

Como antes hemos dicho, para la resolución de este problema propondremos dos métodos: Un primer método, basado en el estudio de los problemas multiobjetivo lineales con coeficientes intervalares [4, 5, 6, 65] que nos permitirá obtener soluciones eficientes para el problema $P(\alpha)$, y un segundo método el cual hace uso de la aritmética intervalar, [36].

3.2.1. Obtención de una solución mediante Puntos Eficientes y Vectores Peso

Supuesto el problema (3.26) y su representación como problema de PLE con coeficientes intervalares (3.33), consideremos fijado $\alpha \in [0,1]$. El conjunto de puntos de interés del problema $P(\alpha)$ es el conjunto de puntos eficientes.

Definición 3.7. $x^* \in X$ es un punto eficiente de $P(\alpha)$ si no existe otro punto $x \in X$ satisfaciendo que $cx \geq cx^*$ $\forall$ $c \in \Gamma(1-\alpha)$ y $cx \neq cx^*$ para algún $c \in \Gamma(1-\alpha)$.

Notemos al conjunto de soluciones de $P(\alpha)$ como $S(1-\alpha)$.

De acuerdo al Teorema de Representación para conjuntos difusos se puede definir

$$\underset{\sim}{S} = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot S(1-\alpha) \tag{3.34}$$

que es un conjunto difuso que nos da la solución difusa al problema (3.26). Con lo cual, es necesario obtener para cada $\alpha \in [0,1]$ la solución para $P(\alpha)$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbf{N} \\ & \phi_j(1-\alpha) \leq c_j \leq \psi_j(1-\alpha) \\ & \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{3.35}$$

donde, para h_j y g_j funciones lineales dadas en la sección 3.2, Capítulo I.

Se tiene que

$$h_j^{-1}(\alpha) = r_j + \alpha(\underline{c}_j - r_j), \quad g_j^{-1}(\alpha) = R_j - \alpha(R_j - \bar{c}_j)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \phi_j(1-\alpha) &= h_j^{-1}(1-\alpha) = \underline{c}_j - \alpha(\underline{c}_j - r_j) \quad \forall \alpha \in [0,1] \\ \psi_j(1-\alpha) &= g_j^{-1}(1-\alpha) = \bar{c}_j + \alpha(R_j - \bar{c}_j) \quad \forall \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.36}$$

Claramente para todo $\alpha \in [0,1]$, $\Gamma(1-\alpha) \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto convexo con puntos extremos definidos por $c \in \Gamma(1-\alpha)$ tal que sus componentes son los extremos de los intervalos. $\phi_j(1-\alpha)$ ó $\psi_j(1-\alpha)$, respectivamente. Esta caracterización para variables reales fué estudiada en [5], los resultados allí obtenidos se pueden particularizar para variables enteras.

Siguiendo [5], si

$$V(c) = \{x \in \mathbf{R}^n / \ cx \geq 0\}, \ c \in \Gamma(1-\alpha)$$

es claro que $V(c)$ es un cono de preferencia asociado a c y considerando

$$V(\Gamma(1\text{-}\alpha)) = \bigcup_{c} V(c), \qquad c \in \Gamma(1\text{-}\alpha)$$

también es un cono: el cono de preferencia asociado al problema $P(\alpha)$.

Sea $E(1\text{-}\alpha) \subset \Gamma(1\text{-}\alpha)$ el subconjunto constituido por vectores cuyas j-ésimas componentes son extremos de los intervalos $[\phi_j(1\text{-}\alpha), \psi_j(1\text{-}\alpha)]$, $j \in N$.

$$c = (c_1, ..., c_n) \in E(1\text{-}\alpha) \Longleftrightarrow c_j = \phi j(1\text{-}\alpha) \text{ ó } \psi_j(1\text{-}\alpha) \ \forall j \in N$$

es evidente que el máximo número de elementos de $E(1\text{-}\alpha)$ es 2^n.

Se verifica, [5], que

$$V(\Gamma(1\text{-}\alpha)) = \bigcup_{c} V(c) \qquad c \in E(1\text{-}\alpha)$$

lo cual nos muestra que de una familia infinita de problemas con costos $c \in \Gamma(1\text{-}\alpha)$, se obtiene una familia finita de problemas cuyos costos son los extremos del convexo $\Gamma(1\text{-}\alpha)$, es decir, $c \in E(1\text{-}\alpha)$.

La obtención de los puntos eficientes para los coeficientes en $\Gamma(1\text{-}\alpha)$ es equivalente a resolver el problema considerando el objetivo con los vectores de $E(1\text{-}\alpha)$.

Este estudio puede aplicarse a variables enteras, y así la obtención de los puntos eficientes para $P(\alpha)$ es equivalente a resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\text{Max} \ \ c\,x \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad Ax \leq b \\ &\qquad x_j \geq 0, \ x_j \in \mathbf{N} \\ &\qquad c \in E(1\text{-}\alpha) \\ &\qquad \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.37}$$

o lo que es lo mismo,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Max}\,(c^{1}x,\ c^{2}x,\ \ldots,\ c^{2^{n}}x)\\
&\mathrm{s.a.:}\\
&\qquad Ax \le b\\
&\qquad x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbf{N}\\
&\qquad\quad c^{k} \in E(1-\alpha),\ \ k = 1, 2, \ldots, 2^{n}\\
&\qquad\quad \alpha \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

que es un problema de Programación Lineal Entera Multiobjetivo paramétrico que notaremos como $M(\alpha)$, $\forall\alpha\in[0,1]$. De cara a resolver este problema, pasaremos a reformularlo de una forma más conveniente.

Sea $t = 2^{n}$, T el conjunto de indices, $T = \{1,2,\ldots,t\}$. Definimos la matriz $H(\alpha)$, $(t{\times}n)$ como aquella que contiene en sus filas los t vectores de $E(1-\alpha)$.

Así $H(\alpha)\cdot x$ es un vector de dimensión $t{\times}1$.

$$H(\alpha)\cdot x = (c^{1}x,\ \ldots,\ c^{t}x),\quad c^{k} \in E(1-\alpha),\ k\in T$$

Consideremos la relación de orden parcial

$$
\begin{aligned}
\forall\ z,y \in \mathbf{R}^{n},\quad & z \ge y \quad \text{sii} \quad z_j \ge y_j\ \ j\in J\\
& z > y \quad \text{sii} \quad z_j \ge y_j\ \ j\in J \wedge \exists\ i\in N\ \ z_i > y_i
\end{aligned}
$$

Definición 3.8. $x^* \in X$ se dice eficiente para $M(\alpha)$ sii no existe otro $x \in X$ tal que $H(\alpha)\cdot x > H(\alpha)\cdot x^*$.

Notaremos al conjunto de puntos eficientes de $M(\alpha)$ como $S(1-\alpha)$ puesto que coincide con el conjunto de puntos eficientes de $P(\alpha)$.

Una importante diferencia entre el conjunto de puntos eficientes de un problema con variables continuas y este problema multiobjetivo entero, es que cada punto eficiente en el problema continuo maximiza una función lineal de la forma $\lambda H \cdot x$, $\lambda \in \mathbf{R}^t$, $\lambda > 0$, sobre el conjunto factible, X. Esto no ocurre en el caso discreto, como puede verse con sencillos contraejemplos. Pero si se tiene el recíproco, el siguiente resultado nos muestra esto.

Proposición 3.9. Sea $\beta \in \mathbf{R}^t$, $\beta > 0$ tal que x* optimize el problema Max $\{\beta H \cdot x \ / \ x \in X\}$ (P1) entonces x* es un punto eficiente del problema Max $\{H \cdot x / \ x \in X\}$ (P2).

Demostración. Sea x* la solución optimal de P1. Supongamos que existe $x' \in X$ tal que $H \cdot x' > H \cdot x^*$. Puesto que $\beta > 0$ y $\beta \neq 0$ esto implica que $\beta H \cdot x' > \beta H \cdot x^*$ lo cual contradice la maximalidad de x*. Por tanto x* es solución optimal de P2. ∎

Considerada la matriz $H(\alpha)$, cada fila de $H(\alpha)$, $H_i(\alpha)$ es un vector perteneneciente a $E(1-\alpha)$ y como sabemos este conjunto es de la forma:

$$E(1-\alpha) = \Big\{ \big[\phi_1(1-\alpha),\ \phi_2(1-\alpha), \dots, \phi_n(1-\alpha)\big],\ \big[\psi_1(1-\alpha),\ \phi_2(1-\alpha), \dots, \phi_n(1-\alpha)\big],$$

$$\dots,\ \big[\psi_1(1-\alpha),\ \psi_2(1-\alpha), \dots, \phi_n(1-\alpha)\big],\ \big[\psi_1(1-\alpha),\ \psi_2(1-\alpha), \dots, \psi_n(1-\alpha)\big] \Big\}$$

donde

$$\phi_j(0) = r_j \ , \quad \psi_j(0) = R_j \ , \ \phi_j(1) = \underline{c}_j \ , \ \psi_j(1) = \bar{c}_j \qquad \forall \ j \in N$$

y el problema (3.38) puede expresarse de la forma

$$\begin{aligned}
&\text{Max}\ \ H(\alpha)\cdot x \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad Ax \leq b \\
&\qquad x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbf{N}, \\
&\qquad h_{kj}(\alpha) \in \{\phi_j(1-\alpha),\ \psi_j(1-\alpha)\} \quad k \in T,\ j \in N \\
&\qquad \alpha \in [0,1]
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Así, tenemos el problema de Programación Entera Multiobjetivo paramétrico. (3.38), reformulado convenientemente como queríamos, es decir, como muestra (3.39).

En [72] se estudia la obtención de los puntos eficientes fijado α. Este es un problema bastante complejo, con la dificultad añadida del parámetro α. Esto hace que optemos por obtener diferentes soluciones no dominadas, pero no todas ellas, como estudiamos a continuación.

Definición 3.10. x^* es un punto eficiente con peso w, $w \in \mathbf{R}^t$, $\sum w_k = 1$, $w_k \geq 0$, si x^* maximiza el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
&\text{Max}\ wH(\alpha)\cdot x \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad Ax \leq b \\
&\qquad x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbf{N}, \\
&\qquad h_{kj}(\alpha) \in \{\phi_j(1-\alpha),\ \psi_j(1-\alpha)\} \quad k \in T,\ j \in N \\
&\qquad \alpha \in [0,1]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

problema de Programación Lineal Entera con objetivo paramétrico que notaremos de la forma $M_w(\alpha)$, y que se puede representar como:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & (F + G\alpha)x \\
\text{s.a.:} & \\
 & Ax \leq b \\
 & x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbf{N}, \\
 & \alpha \in [0,1]
\end{array}
\tag{3.41}
$$

donde F, G $\in R^n$ y tiene las siguientes expresiones:

$$F = w \cdot H(0) = \sum w\ h\ (0), \quad h\ (0) \in E(1)$$

$$E(1) = \{(\underline{c}_1, \underline{c}_2,\dots,\underline{c}_n),\ (c_1, \underline{c}_2,\dots,\underline{c}_n),\dots,(\bar{c}_1, \bar{c}_2,\dots,\underline{c}_n),(\bar{c}_1, \bar{c}_2,\dots,\bar{c}_n)\}$$

$$G = w \cdot D$$

y D es una matriz $t{\times}n$ cuyas filas son los vectores del siguiente conjunto E'.

$$E' = \{\{(\underline{b}_1, \underline{b}_2,\dots,\underline{b}_n),\ (\bar{b}_1, \underline{b}_2,\dots,\underline{b}_n),\dots,\ (\bar{b}_1, \bar{b}_2,\dots,\underline{b}_n),\ (\bar{b}_1, \bar{b}_2,\dots,\bar{b}_n)\}$$

donde $\underline{b}_j = -(\underline{c}_j - r_j)$ y $\bar{b}_j = (R_j - \bar{c}_j)$ y E' es el conjunto de vectores e $\in \mathbf{R}^n$ cuyas componentes son: $e_j \in \{\underline{b}_j, \bar{b}_j\}$.

Estas expresiones de los vectores F y G se obtiene de acuerdo a las expresiones de $h_{ij}(\alpha)$ que como sabemos son de la forma

$$h_{kj}(\alpha) \in \{\phi_j(1-\alpha), \psi_j(1-\alpha)\} = \{\ \underline{c}_j - \alpha(\underline{c}_j - r_j),\ \bar{c}_j + \alpha(R_j - \bar{c}_j)\ \} \quad j \in N,\ \alpha \in [0,1]$$

Puesto que los valores que identifican a los números difusos que representan los coeficientes de la función objetivo, son conocidos, $(r_j, \underline{c}_j, \bar{c}_j, R_j)$, dado el vector $w \in \mathbf{R}^t$, es fácil obtener la representación del problema $M_w(\alpha)$.

Notamos $S_w(1-\alpha)$ el conjunto de puntos optimales del problema $M_w(\alpha)$. Asociado al problema $M_w(\alpha)$, y de acuerdo con el Teorema de Representación para conjuntos difusos, se puede definir

Definición 3.11. La solución difusa con peso w para (3.26)

$$\underset{\sim}{S}_w = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot S_w(1-\alpha) \tag{3.42}$$

que es un subconjunto difuso de la solución difusa obtenida en (3.34), puesto que $S_w(1-\alpha) \subset S(1-\alpha)$.

Con respecto al vector peso, $w \in \mathbf{R}^n$, su elección dependerá de la situación concreta y la preferencia del decisor con respecto a los extremos a ponderar.

En la sección 5.1, Capítulo I, hemos estudiado un método de resolución del problema de Programación Lineal Entera con objetivo paramétrico $M_w(\alpha)$. Ahora lo ilustramos con un ejemplo.

3.2.1.1. Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Max: } & z = \underset{\sim}{c}_1\, x_1 + 5\, x_2 \\ \text{s.a: } & \\ & 2\, x_1 - x_2 \le 12 \\ & 2\, x_1 - 8\, x_2 \le 35 \\ & x_i \ge 0,\ x_i \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

donde $\underset{\sim}{c}_1 = (1, 2, 4, 5)$.

Se tienen las funciones

$$\phi_1(1-\alpha) = 2 - \alpha$$

$$\psi_1(1-\alpha) = 4 + \alpha$$

el problema intervalar asociado quedará como,

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } z = c_1\, x_1 + 5\, x_2 \\
&\text{s.a:} \\
&\quad 2\, x_1 - x_2 \le 12 \\
&\quad 2\, x_1 - 8\, x_2 \le 35 \\
&\quad 2 - \alpha \le c_1 \le 4 + \alpha \\
&\quad x_i \ge 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1]
\end{aligned}$$

equivalente a resolver

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } \{(2-\alpha)\, x_1 + 5\, x_2,\ (4+\alpha)\, x_1 + 5\, x_2\} \\
&\text{s.a:} \\
&\quad 2\, x_1 - x_2 \le 12 \\
&\quad 2\, x_1 - 8\, x_2 \le 35 \\
&\quad x_i \ge 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1]
\end{aligned}$$

A continuación calcularemos las soluciones difusas asociadas a los siguientes vectores peso:

$$w_1 = (1, 0),\ w_2 = (0.5, 0.5),\ w_3 = (0, 1)$$

Para w_1 el problema a resolver es

$$M_{w_1}(\alpha) \qquad \begin{aligned}
&\text{Max: } z = (2-\alpha)\, x_1 + 5\, x_2 \\
&\text{s.a:} \\
&\quad 2\, x_1 - x_2 \le 12 \\
&\quad 2\, x_1 - 8\, x_2 \le 35 \\
&\quad x_i \ge 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1]
\end{aligned}$$

y su solución es

$$x(\alpha) = (5, 3) \quad z(\alpha) = 25 - 5\alpha \qquad \alpha \in [0,\ 0.75]$$

$$x(\alpha) = (1, 4) \quad z(\alpha) = 22 - \alpha \qquad \alpha \in [0.75, 1]$$

$$\underset{\sim}{S}_{w_1} = \{(5,3)/0.75,\ (1,4)/1\}$$

Si tomamos w_2

$$M_{w_2}(\alpha) \quad \begin{aligned} &\text{Max: } z = 3\,x_1 + 5\,x_2 \\ &\text{s.a:} \\ &\quad 2\,x_1 - \ \ x_2 \le 12 \\ &\quad 2\,x_1 - 8\,x_2 \le 35 \\ &\quad x_i \ge 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

y la solución

$$x(\alpha) = (7,\ 2) \quad z(\alpha) = 31 \qquad \alpha \in [0,\ 1]$$

$$\underset{\sim}{S}_{w_2} = \{(7,2)/1\}$$

Finalmente, si tomamos w_3

$$M_{w_3}(\alpha) \quad \begin{aligned} &\text{Max: } z = (4+\alpha)\ x_1 + 5\ x_2 \\ &\text{s.a:} \\ &\quad 2\,x_1 - \ \ x_2 \le 12 \\ &\quad 2\,x_1 - 8\,x_2 \le 35 \\ &\quad x_i \ge 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

cuya solución es

$$x(\alpha) = (7,\ 2) \qquad z(\alpha) = 38 + 7\alpha \qquad \alpha \in [0,\ 1]$$

$$\underset{\sim}{S}_{w_3} = \{(7,2)/1\}$$

3.2.2. Obtención de una solución mediante el uso de la Aritmética Intervalar

Suponemos de nuevo el problema (3.26) y su representación como problema de Programación Lineal Entera con coeficientes intervalares,

$$\begin{aligned} \text{Max } & c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \le b \\ & x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbf{N} \\ & \phi_j(1-\alpha) \le c_j \le \psi_j(1-\alpha) \\ & \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

En [36] se hace uso de la aritmética intervalar para la resolución de un problema Multiobjetivo con coeficientes intervalares. En la seccion 5.4, Capítulo I, tenemos un breve desarrollo del mismo, del cual haremos uso para resolver $P(\alpha)$ y obtener una solución difusa para (3.26).

Notemos

$$A_j(\alpha) = [\phi_j(1-\alpha),\ \psi_j(1-\alpha)] = [a_j^i(\alpha),\ a_j^s(\alpha)] \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

o bien notado por su centro y su amplitud:

$$A_j(\alpha) = \langle a_j^c(\alpha),\ a_j^w(\alpha)\rangle = \{c_j /\ a_j^c(\alpha) - a_j^w(\alpha) \le c_j \le a_j^c(\alpha) + a_j^w(\alpha),\ c_j \in \mathbf{R}\}$$

donde $a_j^c(\alpha)$ es el centro del intervalo y $a_j^w(\alpha)$ es la amplitud de $A_j(\alpha)$.

Haciendo uso de las relaciones $\le_i$ y $\le_c$, estudiadas en la sección 5.4, se puede abordar la resolución de (3.26).

Para ello se define una relación de preferencia entre intervalos. Puesto que para cada solución factible $x \in X$ tenemos asociado un intervalo definido de la forma

$$Z(x,\alpha) = \sum_{j\in N} x_j A_j(\alpha) \tag{3.43}$$

la solución para (3.26)) se obtiene como la solución puntual que tiene asociado el intervalo no dominado. Este se obtendrá haciendo uso de la relación de orden $\leq_{ic}$ definida anteriormente.

Definición 3.12. Dado el problema (3.26), $x^*\in X$ es una solución para $P(\alpha)$ si y solo si no existe ningún $x'\in X$ tal que satisfaga

$$Z(x^*,\alpha) <_{ic} Z(x',\alpha) \tag{3.34}$$

Podemos calcular el extremo de la izquierda y el centro del intervalo $Z(x,\alpha)$ de la forma

$$z^i(x,\alpha) = (a_1{}^c(\alpha)x_1 + ... + a_n{}^c(\alpha)x_n) - (a_1{}^w(\alpha)x_1 + ... + a_n{}^w(\alpha)x_n)$$

$$z^c(x,\alpha) = a_1{}^c(\alpha)x_1+...+a_n{}^c(\alpha)x_n \tag{3.45}$$

Así, el conjunto de soluciones para el problema (3.26) definido como

$$S'(1-\alpha) = \{x\in X/ \text{ no existe } x' : A(x,\alpha) <_{ic} A(x',\alpha) \}$$

se puede obtener como la solución optimal para el siguiente problema multiobjetivo, que notaremos $P'(\alpha)$:

$$\text{Max} \left\{ z'(\alpha) = (z^i(x,\alpha), z^c(x,\alpha)) : x\in X \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha\in[0,1] \right\} \tag{3.46}$$

Calculado el conjunto de soluciones de (3.46), S'(1-α), y de acuerdo con Teorema de Representación para conjuntos difusos, podemos definir

Definición 3.13. Definimos la solución difusa para el problema (3.46) como el conjunto difuso

$$\underset{\sim}{S}' = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot S'(1-\alpha) \tag{3.47}$$

Para obtener las soluciones optimales para el anterior problema se puede dar el siguiente resultado.

Proposición 3.14. Sea $\beta \in \mathbf{R}^2$, $\beta > 0$, $\sum \beta_i = 1$, tal que $x^*(\alpha)$ maximize el problema Max $\{(\beta_1 z^i(x,\alpha) + \beta_2 z^c(x,\alpha)) : x \in X \subset \mathbf{R}^n, \alpha \in [0,1]\}$, entonces $x^*(\alpha)$ es una solución eficiente para el problema (3.46).

La demostración es idéntica a la de la Proposición 3.9.

Considerando vectores de peso $\beta \in \mathbf{R}^2$ para el problema (3.46)), se obtendrían problemas de la forma

$$\text{Max} \left\{ z'_\beta(\alpha) = \beta_1 z^i(x,\alpha) + \beta_2 z^c(x,\alpha)) : x \in X \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha \in [0,1] \right\} \tag{3.48}$$

que notaremos por $P'_\beta(\alpha)$.

Si definimos el conjunto $S'_\beta(1-\alpha)$, como el conjunto de puntos optimales para el problema (3.48), se definirá la solución difusa con peso β como:

$$\underset{\sim}{S}'_\beta = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot S'_\beta(1-\alpha) \tag{3.49}$$

subconjunto difuso de la solución difusa $\underset{\sim}{S}'$.

Con respecto al vector peso, $\beta \in \mathbf{R}^n$, su elección dependerá de la situación concreta y la preferencia del decisor con respecto a los extremos a ponderar.

A continuación desarrollaremos los anteriores resultados, sustituyendo z^c y z^i por sus valores asociados.

$$z^c(x,\alpha) = 1/2 \cdot \sum_j [\phi_j(1-\alpha)+\psi_j(1-\alpha)]\ x_j$$

$$z^i(x,\alpha) = \sum_j \phi_j(1-\alpha)\ x_j$$

$$z^c(x,\alpha) = 1/2 \cdot \left(\sum_j [(\underline{c}_j+\bar{c}_j) - \alpha(\underline{c}_j - r_j) + \alpha(R_j - \bar{c}_j)]\ x_j \right.$$

$$z^i(x,\alpha) = \sum_j [\underline{c}_j - \alpha(\underline{c}_j - r_j)]\ x_j$$

de modo que

$$\beta \cdot z'(\alpha) = (\beta_1 + 1/2\ \beta_2) \sum_j \phi_j(1-\alpha) + \beta_2\ 1/2 \sum_j \psi_j(1-\alpha)$$

Proposición 3.15. El problema (3.48), $P'_\beta(\alpha)$, es un caso particular del problema (3.41), $M_w(\alpha)$.

Demostración. Basta tomar el vector peso, $w \in \mathbf{R}^t$ de la siguiente forma $w_1 = (\beta_1+1/2\ \beta_2)$, $w_t = 1/2\ \beta_2$ y el resto de posiciones con valor 0, $w_i = 0$, $2 \leq i \leq t$. ■

Así, el problema (3.48) puede expresarse de la forma

$$\begin{aligned} &\text{Max } z'_\beta(\alpha) = (F+G\alpha)\,x \\ &\text{s.a:} \\ &\quad Ax \leq b \\ &\quad x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbf{N} \\ &\quad \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.50}$$

donde $F,G \in \mathbf{R}^n$

$$F = (\beta_1+1/2\beta_2)\ (\underline{c}_1,\ ...,\ \underline{c}_n) + 1/2\ \beta_2\ (\bar{c}_1,\ ....,\ \bar{c}_n)$$

$$G = (\beta_1+1/2\beta_2)\ (\underline{b}_1,\ ...,\ \underline{b}_n) + 1/2\ \beta_2\ (\bar{b}_1,\ ...,\ \bar{b}_n)$$

recordemos que $\underline{b}_j = (r_j - \underline{c}_j)$ y $\bar{b}_j = (R_j - \bar{c}_j)$.

Todo esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

3.2.2.1. Ejemplo

Consideremos el anterior ejemplo

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = \underset{\sim}{c}_1\ x_1 + 5\ x_2 \\ &\text{s .a:} \\ &2\ x_1 - \ \ x_2 \le 12 \\ &2\ x_1 - 8\ x_2 \le 35 \\ &x_i \ge 0,\ x_i \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

donde $\underset{\sim}{c}_1 = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$.

Se tienen las funciones

$$z^i(x,\alpha) = (2 - \alpha)\ x_1 + 5\ x_2$$

$$z^c(x,\alpha) = \psi_1(1-\alpha) = 3\ x_1 + 5\ x_2$$

el problema biobjetivo asociado es

$$\text{Max: } \{(2-\alpha)\ x_1 + 5\ x_2\ ,\ \ 3\ x_1 + 5\ x_2\}$$
$$\text{s.a:}$$
$$2\ x_1 - \ \ x_2 \leq 12$$
$$2\ x_1 - 8\ x_2 \leq 35$$
$$x_i \geq 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1]$$

A continuación calcularemos las soluciones difusas asociadas a los siguientes vectores peso:

$\beta_1 = (1, 0)$, $\beta_2 = (0.5, 0.5)$, $\beta_3 = (0, 1)$

Para β_1 se tiene el problema

$$P'_{\beta_1}(\alpha) \qquad \text{Max: } z = (2-\alpha)\ x_1 + 5\ x_2$$
$$\text{s.a:}$$
$$2\,x_1 - \ \ x_2 \leq 12$$
$$2\,x_1 - 8\ x_2 \leq 35$$
$$x_i \geq 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1]$$

su solución es

$$x(\alpha) = (5, 3) \quad z(\alpha) = 25 - 5\alpha \qquad \alpha \in [0, 0.75]$$

$$x(\alpha) = (1, 4) \quad z(\alpha) = 22 - \alpha \qquad \alpha \in [0.75, 1]$$

$$\underset{\sim}{S}'_{\beta_1} = \{(5,3)/0.75,\ (1,4)/1\}$$

Para β_2 el problema es el siguiente

$$P'_{\beta_2}(\alpha) \qquad \begin{array}{l} \text{Max}: z = (2.5 - 0.5\alpha)\, x_1 + 5\, x_2 \\ \text{s.a}: \\ \quad 2\,x_1 - \;\; x_2 \leq 12 \\ \quad 2\,x_1 - 8\,x_2 \leq 35 \\ \quad x_i \geq 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1] \end{array}$$

su solución es

$$x(\alpha) = (5,\ 3) \qquad \alpha \in [0,\ 1]$$

$$z(\alpha) = 27.5 - 2.5\,\alpha \qquad \alpha \in [0,\ 1]$$

$$\underset{\sim}{S}'_{\beta_2} = \{(7,2)/1\}$$

Por último para β_3 se tiene

$$P'_{\beta_3}(\alpha) \qquad \begin{array}{l} \text{Max}: z = 3\, x_1 + 5\, x_2 \\ \text{s.a}: \\ \quad 2\,x_1 - \;\; x_2 \leq 12 \\ \quad 2\,x_1 - 8\,x_2 \leq 35 \\ \quad x_i \geq 0,\ x_i \in \mathbf{N},\ \alpha \in [0,1] \end{array}$$

y su solución

$$x(\alpha) = (7,\ 2)$$

$$z(\alpha) = 31 \qquad \alpha \in [0,\ 1]$$

$$\underset{\sim}{S}'_{\beta_3} = \{(7,2)/1\}$$

CAPITULO IV:

PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL BOOLEANA DIFUSA

1. INTRODUCCION

El problema clásico de Programación Lineal Booleana consiste en

$$
\begin{aligned}
\text{Min: } & z = \sum_{j\in N} c_j x_j \\
\text{s.a: } & \\
& \sum_{j\in N} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in M \\
& x_j \ge 0, \quad j \in N \\
& x_j \in \mathbb{N}, \quad j \in I \subseteq N
\end{aligned}
$$

Si $I = N$ tenemos un problema de Programación Lineal Booleana Puro (PLB) y si $I \subset N$ se trata de un problema de Programación Lineal Booleana Mixto (PLBM).

Como hemos estudiado anteriormente, se pueden obtener diferentes problemas de Programación Lineal Booleana Difusa en sus formas canónicas de acuerdo a la naturaleza imprecisa de los componentes del problema. A continuación estudiaremos los problemas de Programación Lineal Booleana con restricciones difusas y posteriormente los problemas de Programación Lineal Booleana con costos difusos.

Evidentemente, suponer una naturaleza difusa a las variables, es lo mismo que permitir al problema que pierda su carácter booleano, por cuanto aquellas tomarían valores en el intervalo [0,1] y, reformulados adecuadamente son problemas convecionales de PL paramétrica con variables acotadas. No obstante, la aplicaciones de los mismos son muy relevantes.

2. PROBLEMAS DE PB CON RESTRICCIONES DIFUSAS

Consideremos un problema general de PB con restricciones difusas

$$
\begin{aligned}
\text{Min: } & z = f(x) \\
\text{s.a: } & \\
& g_i(x) \underset{\sim}{<} b_i, \; i \in M \\
& x_j \in \{0,1\}, \; j \in I \subset N
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Este caso, en que las restricciones son difusas, tiene perfecto sentido, y ya ha sido estudiado en [85], allí se obtenía una solución puntual cuya naturaleza es ajena a la del problema de partida. Por tanto proponemos enfocar la resolución del problema (4.1) a partir del problema booleano paramétrico que se obtendría, sustituyendo tales restricciones difusas, por sus correspondientes α-cortes, para así obtener una solución difusa. Cabe entonces plantearser el obtener aquella solución puntual como valor particular de la obtenida mediante técnicas paramétricas.

En lo que sigue, en primer lugar estudiamos el problema de Programación Boolena Puro, y a continuación el problema mixto enfocando igualmente su solución a partir de sus α-cortes y obteniendo una solución difusa.

2.1. FORMULACION DEL MODELO DE PBD PURO

Consideremos un modelo general de Programación Matemática Booleana Difusa Pura

$$\begin{aligned} &\text{Min: } z = f(x) \\ &\text{s.a:} \\ &\quad g_i(x) \underset{\sim}{<} b_i,\ i \in M \\ &\quad x_j \in \{0,1\},\ j \in N \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para cada restricción, notamos

$$\underset{\sim}{X}_i = \{x \in \mathbf{R}^n / \ g_i(x) \underset{\sim}{<} b_i,\ x_j \in \{0,1\}\}$$

el conjunto de restricciones se representa por

$$\underset{\sim}{X} = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

y (4.2) se puede escribir como

$$\text{Min } \{z = f(x) / \ x \in \underset{\sim}{X}\} \tag{4.3}$$

de forma similar al problema de PED, la naturaleza de las restricciones de (4.2) implica que para cada restricción, se tiene una función de pertenencia μ_i: $\mathbf{R}^n \longrightarrow (0,1]$, $\forall i \in M$, que nos da el grado de cumplimiento con el que cada $x \in \mathbf{R}^n$ satisface la correspondiente restricción.

Un α-corte, $\forall \alpha \in (0,1]$, del conjunto de restricciones se escribe de la forma:

$$X(\alpha) = \{x \in \mathbf{R}^n \ / \ \mu_X(x) \geq \alpha\}$$

donde

$$\forall\ x \in \mathbf{R}^n,\ \mu_X(x) = \inf\ \{\mu_i(x),\ i \in M\}.$$

$X_i(\alpha)$ notará un α-corte de la i-ésima restricción, $\forall i \in M$

Entonces, $\forall\ \alpha \in (0,1]$

$$X(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{m} X_i(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{m} \{x\in \mathbf{R}^n / \ \mu_i(x) \geq \alpha\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \{x\in \mathbf{R}^n / \ g_i(x) \leq r_i(\alpha), \ x_j\in \{0,1\}\}$$

donde $r_i(\alpha)$ queda unívocamente determinada a partir de la función de pertenencia $\mu_i(\cdot)$.

Así, (4.2) se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} &\text{Min: } z = f(x) \\ &\text{s.a:} \\ &\quad g_i(x) \leq r_i(\alpha), \ i \in M \\ &\quad x_j \in \{0,1\}, \ j \in N \\ &\quad \alpha\in (0,1] \end{aligned} \tag{4.4}$$

modelo que es similar al obtenido en [70] para el problema de Programación Lineal Difusa, y que nos permite estudiar (4.2) como un problema de programación paramétrica booleana.

Notando, $\forall \ \alpha\in (0,1]$,

$$S(\alpha) = \{y\in \mathbf{R}^n / \ f(y) = \text{Min } f(x), \ x\in X(\alpha)\},$$

definimos una solución difusa para el problema (4.2), [53].

Definición 4.1. La solución difusa para (4.2) es un conjunto difuso con función de pertenencia

$$\lambda(x) = \begin{cases} \displaystyle\sup_{x\in S(\alpha)} \alpha & x\in \bigcup_{\alpha} S(\alpha) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{4.5}$$

Consideremos ahora el problema de Programación Lineal Booleana Difusa, en el cual, sin falta de generalidad asumimos que todos los coeficientes son números enteros,

$$\begin{aligned} &\text{Min: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad a_i x \lesssim b_i, \ i \in M \\ &\qquad x_j \in \{0,1\}, \ j \in N \end{aligned} \tag{4.6}$$

y las funciones de pertenencia de las restricciones están definidas como funciones lineales.

(4.6) se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\text{Min: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad a_i x \le b_i + d_i(1-\alpha), \ i \in M \\ &\qquad x_j \in \{0,1\}, \ j \in N, \\ &\qquad \alpha \in (0,1] \end{aligned} \tag{4.7}$$

que es un problema de Programación Lineal Booleana paramétrico, no resuelto hasta ahora.

En lo que sigue, para cada valor fijado $\alpha \in (0,1]$, el problema será representado por $P(\alpha)$, su solución optimal por $x(\alpha)$ y $z(\alpha) = cx(\alpha)$.

2.2. RESOLUCION DEL PROBLEMA

Para estudiar un método que nos permita obtener una solución difusa de (4.6) utilizaremos $P(\alpha)$, $\forall \alpha \in (0,1]$, como problema intermedio. Como en el capítulo anterior se indicó, [x] notará la parte entera de x. Así, si $\{x\}$ nota el valor fraccional de $x \in \mathbf{R}$, entonces $x = [x] + \{x\}$, $0 \leq \{x\} < 1$.

A continuación estudiaremos una serie de resultados que son necesarios para resolver (4.7). No entraremos en su demostración, ya que estas se desarrollan de forma similar a las estudiadas en la sección 2.3, Capítulo III.

Proposición 4.2. Sea $x(\alpha')$ una solución optimal 0-1 para $P(\alpha')$ para algún valor fijado $\alpha' \in (0,1]$. Entonces

$$\lambda(x(\alpha')) = \min \{\mu_i(x(\alpha')),\ i \in M\}$$

donde $\lambda(\cdot)$ es la función de pertenencia de la solución difusa definida en (4.5).

Corolario 4.3. Sea $x(\alpha')$ solución optimal 0-1 para $P(\alpha')$ para algún valor fijado $\alpha' \in (0,1]$ y sea $\theta = \lambda(x(\alpha'))$. Entonces $x(\alpha')$ es la solución optimal para $P(\alpha)$ $\forall \alpha \in [\alpha', \theta]$.

Nota. De este corolario se obtiene que

$$\forall \alpha \in [\alpha', \theta],\ x(\alpha') = x(\alpha)$$

y en particular, si $\alpha' \neq \alpha$, $\lambda(x(\alpha')) = \lambda(x(\alpha)) = \theta$.

A continuación definimos unos parámetros que necesitamos para posteriores resultados.

Cosideremos $\forall \alpha \in (0,1]$,

$$l_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \max\limits_i \{b_i + d_i(1-\alpha)\} = 0 \\ \min\limits_i \left\{ \{b_i + d_i(1-\alpha)\} :\ \{b_i + d_i(1-\alpha)\} \neq 0 \right\} & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea $d' = \max_i \{d_i\}$, y notemos $\Delta\alpha = l_\alpha/d'$. Entonces, es evidente que

$$d_i \cdot \Delta\alpha \leq 1, \forall i \in M.$$

Lema 4.4. Si $\{b_i+d_i(1-\alpha)\} \neq 0$, entonces $[b_i+d_i(1-\alpha)] = [b_i+d_i(1 - (\alpha+\Delta\alpha))]$.

Proposición 4.5. Sea $\theta = \lambda(x(\theta)) \in (0, 1)$, y $\alpha' = \theta+\Delta\theta$, con $\Delta\theta$ como anteriormente hemos definido. Consideremos $\alpha'' = \lambda(x(\alpha'))$. Entonces $x(\alpha')$ es la solución optimal para $P(\alpha)$ $\forall\alpha \in (\theta, \alpha'']$.

Los anteriores resultados nos permiten construir un algoritmo para resolver el problema paramétrico (4.7), utilizado como problema intermedio para obtener la solución difusa para (4.6).

El algoritmo trabaja como sigue: Asignamos $\alpha_1 = 0$ y resolvemos $P(0)$ utilizando el Esquema de Enumeración de Glover ([66]). Se determina el máximo valor de α, llamado θ, para el cual la solución permanece optimal en el intervalo $[\alpha_1, \theta]$ a partir del corolario 4.3. Si $\theta \neq 1$, habrá que calcular la solución para $\alpha \in (\theta,1]$. Para ello aplicamos la proposición 4.5, resolviendo el problema $P(\alpha)$ para $\alpha = \theta+\Delta\theta$, estudiando el intervalo en el que $x(\alpha)$ permanece optimal $(\theta, \lambda(x(\alpha)]$. El proceso se repetirá hasta que obtengamos la solución $\forall\ \alpha \in [0,1]$.

El intervalo de valores de α para el cual x es solución para $P(\alpha)$ será notado como $I_{x(\alpha)}$. Es claro que $I_{x(\alpha)} \subseteq [0,1]$.

El algoritmo queda como sigue.

Algoritmo

Paso 0. Tomar $\alpha = 0 = \alpha_1$.

Paso 1. Resolver $P(\alpha)$. Sea $x(\alpha)$ la solución optimal para $P(\alpha)$.

$z(\alpha) = cx(\alpha)$.

Paso 2. Sea $\theta = \lambda(x(\alpha)) = \min \{\mu_i(x_\alpha), i \in M\}$.

$x(\alpha)$ es la solución optimal para $P(\alpha)$ $\forall \alpha \in (\alpha_1, \theta]$

Paso 3. Si $\theta < 1$ entonces $\alpha_1 = \theta$, $\alpha = \theta + \Delta\theta$. Ir al Paso 1

Paso 4. Fin.

La convergencia de este algoritmo está asegurada puesto que el número de puntos factibles es finito, con lo cual el número de valores puntuales $\alpha \in [0,1]$ para los que se resuelve $P(\alpha)$ es finito, y el algoritmo termina en un número finito de pasos. El funcionamiento de este algoritmo se ilustra con el siguiente ejemplo.

2.2.1. EJEMPLO

Consideremos el siguiente problema

$$
\begin{array}{l}
\text{Min: } z = -10x_1 - 7x_2 - 15x_3 \\
\text{s.a:} \\
\quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 \lesssim 4 \\
\quad 10x_2 + 5x_3 \lesssim 15 \\
\quad 2x_1 + x_3 \lesssim 2 \\
\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

siendo $d_1 = 3$, $d_2 = 3$ and $d_3 = 2$, los márgenes que el decisor tolera en el cumplimiento de cada restricción.

$P(\alpha)$ queda de la forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min: } z = -10x_1 - 7x_2 - 15x_3 \\
&\text{s.a:} \\
&\quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 + 3(1-\alpha) \\
&\quad 10x_2 + 5x_3 \leq 15 + 3(1-\alpha) \\
&\quad 2x_1 + x_3 \leq 2 + 2(1-\alpha) \\
&\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

y el algoritmo procede de acuerdo a:

Paso 0. $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$.

Paso 1. $x(0) =(1, 1, 1)$ solución optimal para $P(0)$.

$z(0) = -32$.

Paso 2. $\theta = 0.333$, $I_{x(0)} = (0, .333]$.

Paso 3. $\theta < 1$

Entonces $\alpha_1 = 0.333$, $\alpha = \theta + \Delta\theta = 0.444$. Ir al Paso 1.

Paso 1. $x(0.444) = (1, 0, 1)$, solución optimal para $P(0.444)$.

$z(0.444) = -25$.

Paso 2. $\theta = 0.5$, $I_{x(0.444)} = (0.333, 0.5]$.

Paso 3. $\theta < 1$

Entonces $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha = \theta + \Delta\theta = 0.666$. Ir al Paso 1.

Paso 1. $x(0.666) = (0, 1, 1)$ solución optimal para $P(0.666)$.

$z(0.666) = -22$.

Paso 2. $\theta = 1$, $I_{x(0.666)} = (0.5, 1]$.

Paso 3. $\theta = 1$

Paso 4. Fin.

Así se tiene

$$x(0) = (1, 1, 1), \quad z(0) = -32 \quad I_{x(0)} = (0, 0.333]$$

$$x(0.444) = (1, 0, 1), \quad z(0.444) = -25 \quad I_{x(0.444)} = (0.333, 0.5]$$

$$x(0.666) = (0, 1, 1), \quad z(0.666) = -22 \quad I_{x(0.666)} = (0.5, 1]$$

y la solución difusa obtenida finalmente, es el conjunto difuso

$$\underset{\sim}{S} = \{(1,1,1)/0.333,\ (1,0,1)/0.5,\ (0,1,1)/1\ \}$$

2.3. OTRO ENFOQUE DE RESOLUCION

Como se ha dicho, el problema fué estudiado inicialmente en [85] con la siguiente formulación

$$\begin{array}{ll} \text{Encontrar } x_j \quad j=1,\ldots,n \quad x_j \in \{0,1\} & \\ \text{s.a:} & \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underset{\sim}{<} b_i \quad i=1,\ldots,m & \end{array} \tag{4.8}$$

considerando el objetivo como una restricción más y no distinguiendo entre restricciones y función objetivo.

Para resolver (4.8) se utiliza el método propuesto en [83] que se extiende para variables 0-1. El desarrollo es el siguiente: Se suponen funciones de pertenencia lineales para cada una de las restricciones difusas, definidas como

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \le b_i \\ 1-(a_i x - b_i)/d_i & \text{si} \quad b_i \le a_i x \le b_i + d_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \ge b_i + d_i \end{cases}$$

Notemos que (4.8) es un caso especial de (4.6), en el cual se supone alguna meta sobre los valores de la función objetivo.

Siguiendo [3] y [83], se interpreta que una decisión difusa es la intersección de todos los conjuntos difusos que representan cada objetivo o restricción, y que la función de pertenencia de la intersección se calcula aplicando el operador **min** a las funciones de pertenencia de todos los conjuntos involucrados. Así, la función de pertenencia de la decisión del problema (4.8) se caracteriza por

$$\mu_D(x) = \min_i \, [\mu_1(x),...,\mu_m(x)] \tag{4.9}$$

La solución optimal de (4.8) es el valor puntual con más alto grado de pertenencia en (4.9). Su obtención se realiza a partir del siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\max \ \lambda \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad \lambda \le 1-(a_i x - b_i)/d_i \quad i=1,...,m \\ &\qquad x_j \in \{0,1\} \qquad j=1,...,n \\ &\qquad 0 \le \lambda \le 1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Si existe una solución para (4.10), (x^*,λ^*), la parte x de esta solución obviamente dará el máximo para (4.9). Si (4.8) no tiene solución, entonces no existen valores de x_j que induzcan un valor positivo para μ_D.

Por razones computacionales, en [85] este problema es reformulado como:

$$\max \left\{ 0,\ \min\left[1,\ 1+\max_x \min_i \left(\overline{b_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}\, x_j \right)\right]\right\} \tag{4.11}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j=1,\ldots,n$$

donde $\overline{b_i} = b_i / d_i$ y $\overline{a_{ij}} = a_{ij} / d_i$. Obviamente (4.11) es equivalente a (4.10).

Para

$$\overline{\lambda} = \max_x \min_i \left(\overline{b_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}\, x_j \right)$$

el problema quedará planteado como

$$\max \left\{ 0,\ \min[1 + \overline{\lambda}] \right\} \tag{4.12}$$

$$x_j = 0 \text{ ó } 1, \quad j=1,\ \ldots,\ n.$$

problema que se resuelve bajo un esquema de enumeración.

2.4. RELACION ENTRE AMBAS SOLUCIONES

Todos los desarrollos obtenidos para problemas de Decisión en Ambiente Difuso, tienen como base las definiciones y resultados que se muestran en [3]: Se tiene un conjunto de difuso de soluciones factibles C en $X \subset \mathbf{R}^n$, llamado conjunto de restricciones, y un conjunto difuso de metas u objetivos a alcanzar, $G \in \mathbf{R}^n$, llamado meta difusa. Notemos que X es el conjunto de puntos factibles en el problema de decisión. El valor de $\mu_G(x)$ indica el grado para el que $x \in X$ satisface G, y $\mu_C(x)$ el grado para el que $x \in X$ satisface C.

El problema planteado es como satisfacer el conjunto de restricciones C y alcanzar G. Esto se resuelve introduciendo un conjunto difuso de puntos factibles, $D \subset X$, llamado conjunto de decisión, y que se puede escribir como

$$\mu_D(x) = \mu_C(x) \wedge \mu_G(x) = \min \{\mu_C(x), \mu_G(x)\}, \quad \forall\ x \in X$$

La siguiente cuestión es elegir un $x \in X$ que sea solución del problema. Se define la solución como el conjunto de puntos factibles que tiene el más alto valor de la función de pertenecia del conjunto difuso decisión. La solución optimal es aquel x' tal que

$$\mu_D(x') = \sup_{x \in X} \mu_D(x) = \alpha^* \tag{4.13}$$

El operador $\wedge$ es usualmente el más utilizado, pero también se utilizan otros operadores para representar la intersección de las restricciones y el objetivo. Se asume el uso de los conectivos t-normas, T, para su representación, [46], de modo que

$$\mu_D(x) = T(\mu_C(x), \mu_G(x))$$

En [84] se puede ver el conectivo H_γ , que es una T-norma Arquimediana, como representación de la intersección de conjuntos difusos.

$$H_\gamma(\mu_A,\mu_B) = \frac{\mu_A\mu_B}{\gamma+(1-\gamma)\ \ (\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B)} \qquad \gamma > 0 \qquad (4.14)$$

donde γ es un parámetro arbitrario.

Si se toma el valor específico $\gamma = 1$, el conectivo H_γ representa el operador producto:

$$H_\gamma(\mu_A,\mu_B) = \mu_A \cdot \mu_B \qquad (4.15)$$

A continuación estudiaremos la relación entre la solución difusa aquí obtenida, y la solución puntual obtenida mediante T-normas, de la cual se obtendrá trivialmente para T = MIN la propuesta en [85].

Recordemos que X es el conjunto de puntos factibles, y notemos $\tilde{X}$ como conjunto de restricciones difusas siendo μ_X su función de pertenencia.

Proposición 4.6. Sea T una t-norma, μ_G y μ_X las funciones de pertenencia del objetivo las restricciones respectivamente. Entonces se verifica la siguiente relación.

$$\underset{\alpha}{\mathrm{Sup}}\ T(\alpha, \underset{X(\alpha)}{\mathrm{Max}}\ \mu_G(x)) = \underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ T(\mu_G(x), \mu_X(x)) \qquad (4.16)$$

Demostración. Sean $r = \underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ T(\mu_G(x), \mu_X(x))$

$$r' = \underset{\alpha}{\mathrm{Sup}}\ T(\alpha, \underset{X(\alpha)}{\mathrm{Max}}\ \mu_G(x))$$

demostraremos que r y r' son iguales.

Sea $x'\in X$ tal que $T(\mu_G(x'), \mu_X(x')) = r$ y $\beta = \mu_X(x')$, obviamente $x'\in X(\beta)$.

$$\operatorname*{Sup}_{\alpha} T(\alpha, \operatorname*{Max}_{X(\alpha)} \mu_G(x)) \geq T(\beta, \operatorname*{Max}_{X(\alpha)} \mu_G(x)) \geq T(\mu_G(x'), \mu_X(x')) = r$$

por lo tanto $r' \geq r$.

Por otro lado, sea $\alpha \in [0,1]$ un valor fijado y consideremos el problema

$$\operatorname*{Max}_{X(\alpha)} \mu_G(x)$$

Entonces $\exists\ y \in X(\alpha)$ tal que

$$\mu_G(y) = \operatorname*{Max}_{X(\alpha)} \mu_G(x)$$

y por consiguiente

$$T(\alpha, \operatorname*{Max}_{X(\alpha)} \mu_G(x)) = T(\alpha, \mu_G(y)).$$

como $\mu_X(y) \geq \alpha$, $T(\mu_X(y), \mu_G(y)) \geq T(\alpha, \operatorname*{Max}_{X(\alpha)} \mu_G(x))$

y

$$\operatorname*{Max}_{x \in X} T(\mu_X(x), \mu_G(x)) \geq \operatorname*{Sup}_{\alpha} T(\alpha, \operatorname*{Max}_{X(\alpha)} \mu_G(x))$$

luego $r \geq r'$.

Puesto que se dan ambas desigualdades, tenemos que $r = r'$. ■

En (4.13) la solución optimal obtenida es el valor x^*, tal que

$$\mu_D(x^*) = \operatorname*{Max}_{x \in X} \mu_D(x) = \operatorname*{Max}_{x \in X} T(\mu_G(x), \mu_X(x))$$

donde X es el espacio de puntos factibles, y $\mu_D(x) = T(\mu_G(x), \mu_X(x))$.

Por la proposición 4.6,

$$\mu_D(x^*) = \operatorname*{Sup}_{\alpha} T(\alpha, \operatorname*{Max}_{X(\alpha)} \mu_G(x)) = \alpha^*$$

obviamente, x^* es tal que, $\mu_G(x^*) = \operatorname*{Sup}_{X(\beta)} \mu_G(x)$, $\beta = \mu_X(x^*)$.

Por la linealidad del problema, α es lineal creciente en el intervalo (0,1] y toma todos los valores de este intervalo, y $\underset{X(\alpha)}{\mathrm{Sup}}\ \mu_G(x)$ es decreciente en este intervalo, por tanto el valor α^* siempre existirá.

Dado que la función de pertenencia del objetivo es linealmente decreciente, y la función objetivo es creciente, se tiene la siguiente equivalencia

$$\underset{X(\alpha)}{\mathrm{Max}}\ \mu_G(x) \longleftrightarrow \underset{X(\alpha)}{\mathrm{Min}}\ cx$$

Puesto que el problema (4.8) tiene restricciones lineales difusas,

$$X(\alpha) = \{x\in \mathbf{R}^n \ / \ x_j\in \{0,1\},\ a_i x \le b_i + d_i(1-\alpha) \quad i=2,...,m\}$$

y así se tiene el siguiente modelo alternativo para resolver (4.8)

$$\begin{array}{ll} \text{Min:} & z=cx \\ \text{s.a:} & \\ & a_i x \le b_i + d_i(1-\alpha) \qquad i \in M \\ & x=(x_1,\dots,x_n)\ \ x_j \in \{0,1\}, \qquad \alpha\in(0,1] \end{array}$$

Si $x(\alpha)$ es la solución difusa, entonces fijado α', $x(\alpha')$ es optimal para $P(\alpha)$ $\forall\ \alpha\in[\alpha_1,\alpha_2] = I_{x(\alpha')}$ intervalo deducido en el algoritmo que nos permite obtener la solución difusa.

La solución obtenida en (4.8) se obtiene como valor particular de $x(\alpha)$. La siguiente proposición nos garantiza esto.

Proposición 4.7. Sea α^*, valor obtenido en (4.13), y $x(\alpha)$ solución para el problema (4.6). Si por $\{x(\alpha_i)\}$ notamos el conjunto de puntos de la solución $x(\alpha)$, entonces

$$\alpha^* = \underset{\{x(\alpha_i)\}}{\mathrm{Max}} \quad T(\mu_G(x(\alpha_i), \lambda(x(\alpha_i))$$

y $x^* = x(\alpha_k)$ tal que $T(\mu_G(x(\alpha_k)), \lambda(x(\alpha_k)) = \alpha^*$.

Demostración. Sea

$$\alpha^* = \underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\ T(\mu_G(x), \mu_X(x)) = \underset{\alpha}{\mathrm{Sup}}\ T(\alpha, \underset{X(\alpha)}{\mathrm{Sup}}\ \mu_G(x))$$

y x^* la solución asociada, con $\beta = \mu_X(x^*)$.

$$\mu_G(x^*) = \underset{X(\alpha)}{\mathrm{Sup}}\ \mu_G(x) \Rightarrow cx^* = \underset{X(\beta)}{\mathrm{Min}}\ cx \Rightarrow cx^* = cx(\beta)$$

con lo cual, x^* es solución optimal para $P(\beta)$, y

$$\mu_G(x^*) = \mu_G(x(\beta))$$

y como $\lambda(x(\beta)) = \mu_X(x(\beta))$

$$\alpha^* = T(\mu_G(x(\beta)), \lambda(x(\beta)))$$

Por lo tanto, la solución optimal para (4.13) se obtiene por la expresión

$$\alpha^* = \underset{\{x(\alpha_i)\}}{\mathrm{Max}} \quad T(\mu_G(x(\alpha_i)),\lambda(x(\alpha_i))$$

y fijado α_k tal que $\alpha^* = T(\mu_G(x(\alpha_k)),\lambda(x(\alpha_k))$

se tiene $x^* = x(\alpha_k)$. ∎

Obviamente, la solución obtenida en [85] se obtiene como valor particular de la solución difusa aplicando la Proposición 4.7.

Si consideramos la T-norma del mínimo, el siguiente algoritmo nos permite obtener el resultado de la Proposición 4.7 a partir de la solución del problema (4.6), y obtenemos la solución de Zimmermann y Pollatschek a partir de la solución difusa encontrada.

Algoritmo

Sea $x(\alpha)$ la solución para (4.6),

Paso 0. Sea $\alpha_1 = 0$, $x' = x(0)$, $\alpha_2 = \lambda(x')$.

Paso 1. Si $\alpha_1 < \mu_G(x') \leq \alpha_2$ entonces $\alpha^* = \mu_G(x')$, $x^* = x'$, Ir al paso 4.

Paso 2. Si $\mu_G(x') < \alpha_1$ entonces $\alpha^* = \alpha_1$, $x^* = x(\alpha_1)$, Ir al paso 4.

Paso 3. $\alpha_1 = \alpha_2$, $x' = x(\alpha_1 + \Delta\alpha_1)$, $\alpha_2 = \lambda(x')$, Ir al paso 1.

Paso 4. Fin.

Por último cabe hacer las siguientes consideraciones. En primer lugar, este valor α^* claramente coincidirá con el correspondiente valor máximo de (4.13). Puesto que $\lambda(x(\alpha))$ es una función creciente para α y $\mu_G(x(\alpha))$ es una función decreciente para α, $\forall\ \alpha \in (0,1]$, este α^* es el valor obtenido en (4.13) para la t-norma del mínimo. En segundo lugar, que dado un problema de Programación Lineal Boolena con restricciones imprecisas como (4.6), el problema de PLB paramétrico (4.7) que hemos propuesto, nos da un contexto general para encontrar su solución. Hemos visto que resolviendo este problema paramétrico y aplicando la proposición 4.7, en los problemas propuestos utilizando T-normas, su solución es un valor particular de la solución difusa obtenida.

Queda claro que este último algoritmo solo tiene sentido si pretendemos encontrar la solución dada en [85] a partir de la solución difusa.

2.4.1. EJEMPLO

Consideremos el ejemplo propuesto en [85]

$$
\begin{array}{l}
\text{Encontrar } x_1,\ x_2,\ x_3 \in \{0,1\} \\
\text{s.a:} \\
\quad -10\,x_1 - 20\,x_2 - 20\,x_3 \lesssim -45 \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 \lesssim 2.5 \\
\quad 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 \lesssim 5 \\
\quad 0.5\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \lesssim 3
\end{array}
$$

con las siguientes violaciones toleradas: $d_1 = 10$, $d_2 = 0.75$, $d_3 = 1.5$, $d_3 = 2$.

Utilizando el modelo de Zimmermann y Pollatschek para este problema se obtiene la siguiente solución:

$$\alpha^* = 0.5,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$$

Par obtener la solución difusa se utiliza el siguiente modelo:

$$\begin{array}{l} \text{Min } -10\ x_1 - 20\ x_2 - 20\ x_3 \\ \text{s.a:} \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \underset{\sim}{<} 2.5 \\ \quad 2\ x_1 + x_2 + 3\ x_3 \underset{\sim}{<} 5 \\ \quad 0.5\ x_1 + 3\ x_2 + x_3 \underset{\sim}{<} 3 \\ \quad x_1,\ x_2,\ x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

la solución que se obtiene es la siguiente:

$$\alpha = 0,\ x(0) = (1,1,1), \qquad \theta=0.25,\ I_{x(0)} = (0,\ 0.25]$$

$$\alpha = \theta+\Delta\theta = 0.375,\ x(0.375) = (0,1,1), \qquad \theta=0.5,\ I_{x(0.375)} = (0.25,\ 0.5]$$

$$\alpha = \theta+\Delta\theta = 0.875,\ x(0.875) = (1,0,1), \qquad \theta=1,\ I_{x(0.875)} = (0.5,\ 1]$$

$$x(0) = (1,1,1), \qquad I_{x(0)} = (0,\ 0.25]$$

$$x(0.375) = (0,1,1), \qquad I_{x(0.375)} = (0.25,\ 0.5]$$

$$x(0.875) = (0,1,1), \qquad I_{x(0.875)} = (0.5,\ 1]$$

la solución difusa es:

$$\underset{\sim}{S} = \{(1,1,1)/0.25,\quad (0,1,1)/0.5,\quad (1,0,1)/1\ \}$$

y aplicando la Proposición 4.7 para la t-norma del mínimo obtenemos la solución de Zimmermann y Pollatschek:

$$\mu_G(x(0)) = 1, \qquad \lambda(x(0)) = 0.5$$

$$\mu_G(x(0.375)) = 0.5,\ \lambda(x(0.375)) = 0.5$$

$$\mu_G(x(0.875)) = 0, \quad \lambda(x(0.875)) = 1$$

$$\underset{\{x(\alpha_i)\}}{\text{Max}} \quad (\lambda(x(\alpha_i)) \wedge \mu_1(x(\alpha_i)) = 0.5$$

por lo tanto $\alpha^* = 0.5$, $x^* = (0, 1, 1)$ y se obtiene la solución de Zimmermann y Pollatschek.

2.5. FORMULACION DEL MODELO PBD MIXTO

En muchos problemas de Programación Boolena ocurre que no todas las variables son 0-1, sino que existen problemas que junto a las variables 0-1 tienen variables reales, estos son los problemas de Programación Boolena Mixtos. Así, parece lógico extender el anterior estudio para los problemas de Programación Boolena Difusa Mixtos. Esto más que una extensión es una versión adecuada a este caso concreto de los resultados de la sección 2.4, Capítulo III.

Consideremos un modelo general de Programación Matemática Booleana Difusa Mixto

$$
\begin{aligned}
&\text{Min: } z = f(x) + h(y) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad g_i(x) + t_i(y) \underset{\sim}{>} b_i, \quad i \in M, \\
&\qquad x_l \geq 0 \qquad l \in L = \{1, 2, \ldots, n_1\}, \\
&\qquad y_j \in \{0,1\}, \; j \in J = \{1, 2, \ldots, n_2\}, \quad N = J + L
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

suponemos $l=1,\ldots,n_1$, $j=1, \ldots, n_2$, $n_1+n_2=n$.

Para cada restricción, notamos

$$
\underset{\sim}{X_i} = \{x \in \mathbf{R}^n / \; g_i(x)+t_i(y) \underset{\sim}{>} b_i, \; x_l \geq 0, \; y_j \in \{0,1\}\}
$$

Entonces, el conjunto de restricciones se representa por

$$\underset{\sim}{X} = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

Suponiendo similares funciones de pertenencia que en el problema puro para representar la restricción difusa, es claro que un α-corte, $\forall\alpha\in(0,1]$, del conjunto de restricción tiene la forma:

$$X(\alpha) = \{v\in \mathbf{R}^n \ / \ \mu_X(v) \geq \alpha\}$$

donde $\forall v\in \mathbf{R}^n$, $\mu_X(v) = \inf \{\mu_i(v),\ i\in M\}$. Luego

$$X(\alpha) = \{(x,y)\in \mathbf{R}^n / \ g_i(x)+t_i(y)\geq r_i(\alpha) \ \ i\in M,\ x_l\geq 0 \ \ l\in L,\ y_j\in\{0,1\} \ \ j\in J\}$$

y (4.19) se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} &\text{Min: } z(\alpha) = f(x) + h(y) \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad g_i(x) + t_i(y) \geq r_i(\alpha) \quad i \in M, \\ &\qquad x_l \geq 0 \qquad\qquad l \in L, \\ &\qquad y_j \in \{0,1\},\ j \in J \end{aligned} \tag{4.20}$$

Problema que notaremos $P(\alpha)$, $\forall\ \alpha\in(0,1]$. Así mismo, notando

$$S'(\alpha) = \{(x',y')\in \mathbf{R}^n / z((x',y')) = \text{Min } f(x)+h(y),\ (x,y)\in X(\alpha)\}$$

definimos una solución difusa de (4.19), de acuerdo con [53].

Definición 4.8. La solución difusa para (4.19) es un conjunto difuso con función de pertenencia

$$\lambda(v) = \begin{cases} \underset{v\in S'(\alpha)}{\mathrm{Sup}}\ \alpha & v\in \underset{\alpha}{\cup} S'(\alpha) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

En particular, para el siguiente problema de PLBD

$$\begin{aligned} &\text{Min: } z = cx + hy \\ &\text{s.a:} \\ &\quad a_i x + q_i y \underset{\sim}{>} b_i, \ i \in M \\ &\quad x_l \geq 0, \quad l \in L, \\ &\quad y_j \in \{0,1\}, \ j \in J \end{aligned} \tag{4.21}$$

considerando funciones de pertenencia lineales, (4.21) se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\text{Min: } z(\alpha) = cx + hy \\ &\text{s.a:} \\ &\quad a_i x + q_i y \geq b_i - d_i(1-\alpha), \ i \in M \\ &\quad x_l \geq 0, \quad l \in L, \\ &\quad y_j \in \{0,1\}, \ j \in J \\ &\quad \alpha \in (0,1] \end{aligned} \tag{4.22}$$

En la sección 5.3, Capítulo I, se describió un algoritmo desarrollado en [53] que nos resuelve este problema de Programación Lineal Booleana Mixta paramétrica.

2.5.1. EJEMPLO

Consideremos el siguiente ejemplo,

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 3\,x_1 + 2\,x_2 + 8\,y_1 + 2\,y_2 \\ \text{s.a:} & \\ & 2\,x_1 - x_2 + 3\,y_1 - y_2 \gtrsim 6 \\ & x_1 + x_2 + 3\,y_1 + y_2 \gtrsim 5 \\ & x_l \geq 0, \quad l \in L = \{1,2\} \\ & y_j \in \{0,1\}, \quad j \in J = \{1,2\} \end{array}$$

con los siguientes márgenes tolerados $d_1 = 2$ y $d_2 = 2$.

El problema paramétrico asociado es:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 3\,x_1 + 2\,x_2 + 8\,y_1 + 2\,y_2 \\ \text{s.a:} & \\ & 2\,x_1 - x_2 + 3\,y_1 - y_2 \geq 6 - 2(1-\alpha) \\ & x_1 + x_2 + 3\,y_1 + y_2 \geq 5 - 2(1-\alpha) \\ & x_l \geq 0, \quad l \in L = \{1,2\} \\ & y_j \in \{0,1\}, \quad j \in J = \{1,2\} \\ & \alpha \in (0,1] \end{array}$$

Aplicamos el algoritmo, y la solución que se obtiene es:

$$x(\alpha) = \begin{cases} (2.3333 + 1.33332\alpha,\ 0.66667 + 0.66667\alpha,\ 0,\ 0) & 0<\alpha<0.5 \\ (o.3333 + 1.33332\alpha,\ -0.3333 + 0.66667\alpha,\ 1,\ 0) & 0.5\leq\alpha\leq 1 \end{cases}$$

$$z(\alpha) = 8.33333 + 5.3336\alpha \quad 0 < \alpha \leq 1$$

con lo que la solución del problema es

$$\underset{\sim}{S} = \{x(\alpha)/\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1\}$$

3. PROBLEMAS DE PLB CON COSTOS DIFUSOS

Un problema de Programación Lineal Booleana con costos difusos se establece como

$$
\begin{aligned}
\text{Max:}\ & z = \sum_{j \in N} \underset{\sim}{c}_j x_j \\
\text{s.a:}\ & \\
& \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in M \\
& x_j \in \{0,1\}, \quad j \in N,
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

donde a_{ij}, $b_i \in \mathbf{R}$, el conjunto de restricciones es convencional y $\underset{\sim}{c}_j \in F(\mathbf{R})$. Así se suponen funciones de pertenencia

$$\mu_j : \mathbf{R} \longrightarrow (0,1], \quad j \in N$$

que expresan la falta de precisión sobre los valores de los coeficientes que tiene el decisor.

El problema de Programación Lineal Booleana (4.23) puede reescribirse como

$$\underset{\sim}{\text{Max}} \left\{ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n / \ x \in X \right\} \tag{4.24}$$

con

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n / \ A\,x \leq b, \quad x_j \in \{0,1\} \right\}$$

donde'$\underset{\sim}{\ }$' implica la existencia de n funciones de pertenencia.

Para estudiar una solución de este problema de PLBD vamos a considerar dos alternativas: Una primera, que haciendo uso del teorema de representación nos permitirá obtener una solución difusa para (4.23), y una segunda que utilizando funciones ordenadoras y relaciones de orden de números difusos nos permita también obtener la solución al problema (4.23).

3.1. RESOLUCION DEL PROBLEMA UTILIZANDO α-CORTES

Dado el problema (4.23) y considerando las funciones de pertenencia $\forall\ c \in \mathbf{R}^n$, se puede definir la función

$$\mu(c) = \operatorname*{Inf}_{j} \mu_j(c_j),\ j \in N$$

donde $\mu(\cdot)$ es la función de pertenencia del objetivo difuso, la cual induce un preorden difuso, [70].

Como se muestra en [70], la solución difusa para (4.23) se puede encontrar resolviendo el siguiente problema

$$\operatorname*{Max}_{x \in X} \{cx /\ \forall c \in \mathbf{R}^n : \mu(c) \geq 1-\alpha\} \tag{4.25}$$

problema que queda de la forma

$$\begin{aligned}
\text{Max: } & z = \sum_{j \in N} c_j x_j \\
\text{s.a: } & \\
& \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i \in M, \\
& \mu(c) \geq 1-\alpha \\
& x_j \in \{0,1\},\ j \in N, \\
& c \in \mathbb{R}^n,\quad \alpha \in [0,1]
\end{aligned}$$

Mediante un desarrollo similar al del anterior problema (3.31), (4.26) queda de la siguiente forma:

$$\text{Max} \left\{ cx \ / \ x \in X, \ \Phi(1-\alpha) \leq c \leq \Psi(1-\alpha), \ \alpha \in [0,1] \right\} \tag{4.27}$$

donde

$$\Phi(\cdot) = [\phi_1(\cdot), ..., \phi_n(\cdot)] \ \text{y} \ \Psi(\cdot) = [\psi_1(\cdot), ..., \psi_n(\cdot)]$$

ϕ_i y ψ_i ya fueron definidos en (3.36).

Si notamos por $\Gamma(1-\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, al conjunto de vectores $c \in \mathbf{R}^n$ cuyas componentes c_j pertenecen al intervalo $[\phi_j(1-\alpha), \psi_j(1-\alpha)]$, $j \in N$, (4.27) se puede escribir finalmente de la siguiente forma:

$$\text{Max} \left\{ cx \ / \ x \in X, \ c \in \Gamma(1-\alpha), \ \alpha \in [0,1] \right\} \tag{4.28}$$

problema que notaremos como $P(\alpha)$.

Para cada $\alpha \in [0,1]$ tenemos un problema de Programación Lineal Booleana con coeficientes intervalares, donde los coeficientes de la función objetivo toman valores en sus respectivos intervalos.

Como ya se indicó en la sección 3.2, Capítulo III, existen dos métodos de resolución del mismo, un primero basado en el estudio de los problemas multiobjetivo lineales con coeficientes intervalares y un segundo haciendo uso de la aritmética intervalar.

3.1.1. Obtención de una solución mediante Puntos Eficientes y Vectores Peso

Consideremos el problema (4.23) y su representación como problema de Programación Lineal Booleana con coeficientes intervalares (4.28). Fijado

$\alpha \in [0,1]$, el conjunto de puntos de interés de (4.28) es el conjunto de soluciones eficientes.

Definición 4.9. $x^* \in X$ se dice que es un punto eficiente de (4.28) si no existe otro punto $x \in X$ satisfaciendo que $cx \geq cx^*$ $\forall$ $c \in \Gamma(1-\alpha)$ y $cx \neq cx^*$ para algún $c \in \Gamma(1-\alpha)$.

Notemos al conjunto de soluciones de (4.28), fijado α, como $S(1-\alpha)$. De acuerdo al Teorema de Representación para conjuntos difusos se puede definir

$$\underset{\sim}{S} = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot S(1-\alpha) \tag{4.29}$$

que es un conjunto difuso que nos da la solución difusa del problema (4.23).

En [5], tenemos una caracterización del problema (4.28) con variables reales. Los resultados allí obtenidos se pueden particularizar para variables 0-1. La obtención de los puntos eficientes para (4.28) es por tanto equivalente a resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{l} \text{Max: } z = cx \\ \text{s.a:} \\ \qquad Ax \leq b \\ \qquad x_j \in \{0,1\} \\ \qquad c \in E(1-\alpha) \\ \qquad \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{4.30}$$

donde $E(1-\alpha) \subset \Gamma(1-\alpha)$ es el subconjunto constituido por vectores cuyas j-ésimas componentes son extremos de los intervalos $[\phi_j(1-\alpha),\ \psi_j(1-\alpha)]$, $j \in N$. (4.30) puede reescribirse más explícitamente como

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } (c^1x,\ c^2x,\ \ldots,\ c^{2^n}x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad Ax \leq b \\
&\qquad x_j \in \{0,1\} \\
&\qquad\quad c^k \in E(1-\alpha),\ \ k = 1, 2, \ldots, 2^n \\
&\qquad \alpha \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

que es un problema de Programación Lineal Boolena Multiobjetivo paramétrico que notaremos como $M(\alpha)$, $\alpha\in[0,1]$.

Si notamos $t = 2^n$, $H(\alpha)$ es la matriz $t{\times}n$ que contiene en sus filas los t vectores de $E(1-\alpha)$. Así $H(\alpha)\cdot x$ es un vector $t{\times}1$.

Definición 4.10. $x^* \in X$ se dice eficiente para $M(\alpha)$ sii no existe otro $x \in X$ tal que $H(\alpha)\cdot x \geq H(\alpha)\cdot x^*$.

Notaremos al conjunto de puntos eficientes de $M(\alpha)$ como $S(1-\alpha)$ puesto que coincide con el conjunto de puntos eficientes de (4.28).

Proposición 4.11. Sea $\beta\in\mathbf{R}^t$, $\beta>0$ tal que x^* sea la solución optimal de Max $\{\beta H\cdot x \ /\ x\in X\}$. Entonces x^* es un punto eficiente de Max $\{H\cdot x/\ x\in X\}$.

La demostración es similar a la de la proposición 3.9.

Considerada la matriz $H(\alpha)$, cada fila de $H(\alpha)$, $H_i(\alpha)$ es un vector perteneneciente a $E(1-\alpha)$ y el problema (4.31) queda expresado de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & H(\alpha) \cdot x \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0.1\} \\ & h_{kj}(\alpha) \in \{\phi_j(1-\alpha),\ \psi_j(1-\alpha)\},\ k \in T,\ j \in N \\ & \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{4.32}$$

Definición 4.12. x^* es un punto eficiente con peso w, $w \in \mathbf{R}^t$, $\sum w_k = 1$, $w_k \geq 0$, si x^* optimiza el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & wH(\alpha) \cdot x \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \\ & h_{kj}(\alpha) \in \{\phi_j(1-\alpha),\ \psi_j(1-\alpha)\}\quad k \in T,\ j \in N \\ & \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{4.33}$$

problema de Programación Lineal Boolena con objetivo paramétrico que notaremos de la forma $M_w(\alpha)$ y que se puede representar como:

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & (F + G\alpha)x \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \\ & \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{4.34}$$

donde F, G $\in R^n$ y tiene las siguientes expresiones:

$$F = wH(0) = \sum w_k\ h_k(0), \quad h_k(0) \in E(1)$$

$$E(1) = \{(\underline{c}_1,\underline{c}_2,...,\underline{c}_n),\ (c_1,\underline{c}_2,...,\underline{c}_n),...,\ (\bar{c}_1,\bar{c}_2,...,\underline{c}_n),\ (\bar{c}_1,\bar{c}_2,...,\bar{c}_n)\}$$

$$G = wD,$$

y D es una matriz $t{\times}n$ cuyas filas son los vectores del siguiente conjunto E'.

$$E' = \{(\underline{b}_1,\underline{b}_2,...,\underline{b}_n),\ (\bar{b}_1,\underline{b}_2,...,\underline{b}_n)\ ,...,\ (\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\underline{b}_n),\ (\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n)\}$$

$$\underline{b}_j = -(\underline{c}_j - r_j) \quad y \quad \bar{b}_j = (R_j - \bar{c}_j)$$

Si notamos $S_w(1-\alpha)$ como el conjunto de puntos que optimizan el problema $M_w(\alpha)$, asociado a este y de acuerdo con el acuerdo al Teorema de Representación se puede dar la siguiente definición

Definición 4.13. La solución difusa con peso w para (4.34) es

$$\underset{\sim}{S}_w = \bigcup_{\alpha} \alpha\cdot S_w(1-\alpha) \tag{4.35}$$

que es un subconjunto difuso de la solución obtenida en (4.29) la solución difusa (4.29), obtenida para (4.23), puesto que $S_w(1-\alpha) \subset S(1-\alpha)$.

La elección del vector peso, $w \in \mathbf{R}^n$, su elección dependerá de la situación concreta y de la preferencia del decisor con respecto a los extremos a ponderar. Un método de resolución para este problema paramétrico se puede encontrar aplicando el algoritmo propuesto en la sección 5.1, Capítulo I, en su versión de variables 0-1.

3.1.2. Obtención de una solución mediante el uso de la Aritmética Intervalar

Supongamos el problema (4.23) y su representación como problema de Programación Lineal Booleana con coeficientes intervalares (4.28).

$$\text{Max}\left\{ cx \ / \ x \in X,\ c \in \Gamma(1\text{-}\alpha),\ \alpha \in [0,1] \right\}$$

o más explícitamente

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \\ & \phi_j(1\text{-}\alpha) \leq c_j \leq \psi_j(1\text{-}\alpha) \\ & \alpha \in [0,1] \end{array}$$

Si hacemos uso de la aritmética intervalar para la resolución de un problema multiobjetivo con coeficientes intervalares, [36], de forma similar al problema con variables enteras tenemos el siguiente desarrollo.

Definición 4.14. Sea $x^* \in X$. x^* es una solución para el problema $P(\alpha)$ si y solo si no existe ningún $x' \in X$ tal que satisfaga

$$Z(x^*,\alpha) <_{ic} Z(x',\alpha). \tag{4.36}$$

donde la relación $<_{ic}$ fué definida en la sección 5.4., Capítulo I.

Así el conjunto de soluciones para $P(\alpha)$, definido como

$$S'(1-\alpha) = \{x \in X / \text{ no existe } x' : A(x,\alpha) <_{ic} A(x',\alpha) \}$$

se puede obtener como la solución optimal para el siguiente problema multiobjetivo, $P'(\alpha)$:

$$\text{Max} \left\{ z'(\alpha) = (z^i(x,\alpha),\ z^c(x,\alpha)) : x \in X \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha \in [0,1] \right\} \tag{4.37}$$

donde $z^i(x,\alpha)$ y $z^c(x,\alpha)$ ya fueron definidos en la sección 4.4, Capítulo I.

Calculado el conjunto de soluciones para (4.37), fijado α, $S'(1-\alpha)$, y de acuerdo al Teorema de Representación, se tiene la siguiente definición

Definición 4.15. La solución difusa para (4.27) es

$$\underset{\sim}{S'} = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot S'(1-\alpha) \tag{4.38}$$

Considerando vectores de peso $\beta \in \mathbf{R}^2$ para el problema $P'(\alpha)$, se obtendrían problemas de la forma

$$\text{Max} \left\{ z'_\beta(\alpha) = \beta_1 z^i(x,\alpha) + \beta_2 z^c(x,\alpha)) : x \in X \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha \in [0,1] \right\} \tag{4.39}$$

que notaremos, $P'_\beta(\alpha)$. Si definimos el conjunto $S'_\beta(1-\alpha)$, como el conjunto de puntos optimales para el problema (4.39), se definirá la solución difusa con peso β como:

$$\underset{\sim}{S'}_\beta = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot S'_\beta(1-\alpha) \tag{4.40}$$

subconjunto difuso de la solución (4.38).

Proposición 4.16. El problema (4.39), $P'_\beta(\alpha)$, es un caso particular del problema (4.34), $M_w(\alpha)$.

La demostración es similar a la de la proposición 3.15.

Así, el problema (4.39) puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z'_\beta(\alpha) = (F+G\alpha)x \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad Ax \leq b \\ &\qquad x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{4.41}$$

donde H, G $\in \mathbf{R}^n$ y

$$H = (\beta_1+1/2\beta_2)\ (\underline{c}_1, ..., \underline{c}_n) + 1/2\ \beta_2\ (\underline{c}_1, ..., \underline{c}_n)$$

$$G = (\beta_1+1/2\beta_2)\ (\underline{b}_1, .., \underline{b}_n) + 1/2\ \beta_2\ (\bar{b}_1, ..., \bar{b}_n)$$

Es evidente que (4.41) es un modelo ya estudiado de PLB paramétrica, sección 5.1, Capítulo I.

3.2. RESOLUCION DEL PROBLEMA UTILIZANDO METODOS DE COMPARACION DE NUMEROS DIFUSOS

Consideremos el problema de Programación Lineal Booleana con costos difusos, (4.23), escrito como

$$\underset{\sim}{\text{Max}} \left\{ c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n / \ x \in X \right\}$$

donde

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n / \ A\ x \leq b, \quad x_j \in \{0,1\} \right\}$$

es el conjunto finito de soluciones factibles del mismo. Sea g una función del conjunto de alternativas en el conjunto de números difusos F(**R**),

$$g: X \longrightarrow F(\mathbf{R})$$

definida por

$$g(x) = \underset{\sim}{c}x = \sum_{i \in S} \underset{\sim}{c_i} \qquad S = \{i \in N \ / \ x_i = 1\} \tag{4.42}$$

$\underset{\sim}{c_i} \in F(\mathbf{R})$.

Diremos que una alternativa $x^* \in X$ es optimal si el número $g(x^*)$ es el mayor en el siguiente conjunto finito de números $A = \{g(x)/ \ x \in X\}$.

Para determinar el mayor número de la familia finita $A = \{A^1, \ ..., \ A^k\} \subset F(\mathbf{R})$ disponemos de tres posibles métodos.

1. Utilizando Métodos de alternativas óptimas.

Sea el conjunto de números $A = \{A^1, \ ..., \ A^l\}$, con S_i el soporte del número A^i,

$$S_i = \ \mathrm{Sop}\ \underset{\sim}{A^i} = \{x \in \mathbf{R}/ \ \mu_{A^j}(x)>0\} \subset I$$

las restricciones del dominio de definición de los conjuntos al intervalo I no supone pérdida de generalización.

Los autores que utilizan este método, tratan de obtener un conjunto de alternativas optimales:

$$\tilde{O} = \{i, \mu_{\tilde{O}}(i)\}, \quad \mu_{\tilde{O}}(i) = \mu_{\tilde{O}}(A^i), \; A^i \in A.$$

donde $\mu_{\tilde{O}}(i)$ representa el grado con el cual la alternativa i-ésima puede ser considerada la mejor.

2. El segundo método consiste en la definición de una función de ordenación f, función del conjunto A en **R**, donde existe un orden natural.

Supuesto $f: A \longrightarrow \mathbf{R}$, f es tal que si

$$f(A^i) < f(A^j) \Rightarrow A^i \text{ es menor que } A^j$$

$$f(A^i) > f(A^j) \Rightarrow A^i \text{ es mayor que } A^j$$

$$f(A^i) = f(A^j) \Rightarrow A^i \text{ es igual que } A^j$$

de modo que el mayor número A^k será aquel para el que $f(A^k)$ sea máximo. f se llamada Función Ordenadora.

3. Un tercer método consiste en utilizar el concepto de Orlovsky de relaciones de preferencia difusas y alternativas no dominadas [54]. Para comparar los elementos en A, se define la relación R, descrita desde el producto cartesiano $F(\mathbf{R}) \times F(\mathbf{R})$ en el intervalo [0,1].

$$\mu_R: F(\mathbf{R}) \times F(\mathbf{R}) \longrightarrow [0,1]$$

e interpretada como el valor de verdad de la expresión "A^i es mayor o igual que A^j".

Dada esta relación R se tienen otras dos relaciones difusas definidas como sigue:

$$\mu_S(A^i,A^j) = \max \{ 0, \mu_R(A^i,A^j) - \mu_R(A^j,A^i) \}$$

la relación $\mu_S(A^i,A^j)$ es una relación de preferencia estricta. Se puede decir que A^j es dominado por A^i a grado $\mu_S(A^j,A^i)$.

La segunda relación viene dada por:

$$\mu_{ND}(A^i) = 1 - \max_{A^j \in A} \mu_S(A^j,A^i)$$

Así, $\mu_{ND}(A^i)$ determina el mayor grado para el cual A^i no es dominada por ningún elemento del conjunto A. En otras palabras $\mu_{ND}(A^i)$ es el valor para el cual el número A^i puede considerarse como el más grande.

De esta forma, el mayor número difuso en A, es cualquiera de los elementos del conjunto

$$\{A^i \in A \ / \ \mu_{ND}(A^i) = \max_{A^j \in A} \mu_{ND}(A^j)\}$$

En la sección 2, Capítulo I, se ha descrito una selección de métodos de comparación de números difusos.

Dependiendo del método utilizado tendremos las siguiente definición de solución optimal para el problema (4.23).

Definición 4.17. Dado el problema (4.23), $x^* \in X$ es una solución optimal para el mismo:

i) Dado un método de alternativas optimales, $\tilde{O} = \{i, \mu_{\tilde{O}}(i)\}$, entonces $\mu_{\tilde{O}}(g(x^*)) \geq \mu_{\tilde{O}}(g(x)) \quad \forall x \in X$.

ii) Dada una función ordenadora f, $f(g(x^*)) \geq f(g(x))$.

iii) Dada una Relación difusa R, y obtenida la relación de no-dominacia $\mu_{ND}(\cdot)$ entonces $\mu_{ND}(g(x^*)) = \underset{x \in X}{Max}\ \mu_{ND}(g(x))$

Así para obtener la solución optimal de (4.23), bastará aplicar un algoritmo de enumeración que nos permita obtener todas las soluciones factibles del problema, y consiguientemente obtener el conjunto A de números difusos asociados a las soluciones factibles. Para ello se puede aplicar el algoritmo de Glover ([66], p. 89-94). Así a este conjunto se le puede aplicar uno de los métodos anteriormente descritos, y obtener el mayor A^k, para el que el valor $x^* \in X$ asociado es la solución optimal.

A continuación desarrollamos los distintos problemas planteados al utilizar los distintos métodos de comparación. Ya indicamos con anterioridad que por simplificación de los cálculos consideraremos números triangulares lineales.

3.2.1. Obtención de una solución utilizando comparación de alternativas

a. Método de Jain

Considerando k = 1, la aplicación de este método quedaría de la siguiente forma.

Sea $\underset{\sim}{c}x = A^k$ y $A = \{\underset{\sim}{c}x / \forall x \in X\}$. El soporte es de la forma

$$S = \bigcup_{A^k \in A} \text{Sop } A^k$$

y el valor máximo $z_{max} = \underset{z}{\text{Sup}} \{z / x \in S\}$ se obtendrá como el máximo valor del soporte para $\underset{\sim}{c}x$, $\forall\ x \in X$. Este se obtendrá como resultado del problema

$$\begin{aligned} &\text{Max}: \ z = Rx \\ &\text{s.a}: \\ &\qquad Ax \le b \\ &\qquad x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{4.43}$$

donde x_{max} es la solución asociada, y $z_{max} = Rx_{max}$.

Proposición 4.18. Dado el problema (4.23), $x^* \in X$ es una solución optimal para el mismo utilizando el Método de Jain si x^* es la solución optimal para el siguiente problema de Programación Booleana,

$$\begin{aligned} &\text{Max}: \ T(x) \\ &\text{s.a}: \\ &\qquad Ax \le b \\ &\qquad x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{4.44}$$

donde $T(x) = \dfrac{Rx \cdot z_{max} - cx(Rx-cx)}{z_{max} \cdot z_{max}}$, y z_{max} es el obtenido en (4.43).

Demostración. x^* es la solución para (4.23) si

$$g(x^*) = A^k \text{ y } \mu_{\tilde{O}}(k) = \mu_{\tilde{O}}(g(x^*)) = \operatorname{Sup}_z \{\mu_{max}(z) \wedge \mu_{A^k}(z)\}$$

donde $\mu_{max}(z) = \left(\dfrac{z}{z_{max}}\right)$.

Esta expresión se desarrolla como sigue. Notemos $\underset{\sim}{cx} = A^k = (rx, cx, Rx) \quad \forall x \in X$:

Si $cx=Rx$ entonces $\mu_{\tilde{O}}(k) = cx/\, z_{max}$.

Si $cx \neq Rx$ entonces $\mu_{\tilde{O}}(k)$ corresponde al valor de la función $\mu_{max}(\cdot)$ en el punto intersección de la función lineal de la derecha del número difuso y $\mu_{\tilde{O}}(\cdot)$.

Este es el punto $z_o \in \mathbf{R}$ tal que

$$(Rx-z_o)/(Rx-cx) = cx/\ z_{max}$$

$$z_o = Rx\ -cx(Rx-cx)/z_{max}$$

$$\mu_{\tilde{O}}(k) = z_o/\ z_{max} = \frac{Rx \cdot z_{max} - cx(Rx-cx)}{z_{max} \cdot z_{max}}$$

y definimos la función $T(x) = \dfrac{Rx \cdot z_{max} - cx(Rx-cx)}{z_{max} \cdot z_{max}}$

Si $cx' = Rx'$, entonces $T(x') = Rx'/z_{max}$, expresión que es similar a la obtenida para $\mu_{\tilde{O}}(k)$ cuando $cx' = Rx'$.

Así $\mu_{\tilde{O}}(g(x^*)) = \mathrm{Sup}_z \{\mu_{max}(z) \wedge \mu_{A^k}(z)\}$ si $T(x^*) \geq T(x)$, $\forall\ x \in X$. Por lo tanto, x^* es optimal para (4.23) si es solución optimal para (4.44). ∎

3.2.2. Obtención de una solución uilizando funciones ordenadoras

Si utilizamos funciones ordenadoras, $f: A \longrightarrow \mathbf{R}$, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 4.19. Dado el problema (4.23), $x^* \in X$ es una solución optimal del mismo, utilizando una función ordenadora f, si y solo si x^* es la solución optimal para el siguiente problema de Programación Boolena

$$\begin{aligned} \text{Max:}\quad & z = f(\underset{\sim}{c}x) \\ \text{s.a:}\quad & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{4.45}$$

Demostración. Dado el problema (4.23), $x^* \in X$ es una solución optimal para el mismo, si dada una función ordenadora f, $f(g(x^*)) \geq f(g(x))$, $\forall$ $x \in X$. Y como $g(x) = \tilde{c}x$, esto es similar a resolver el problema de Programación Booleana (4.45). ■

a. Indice de Chang

Aplicando la función ordenadora definida por Chang (2.3.1.a, C. I), x* es la solución optimal para (4.23), si y solo si, x* es la solución optimal para el siguiente problema de Programación Cuadrática Booleana,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max:} \quad z = \frac{dx + d'x}{6} \, (3\ cx + dx - d'x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad Ax \leq b \\
&\qquad x_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

b1. Primer Indice de Yager

Aplicando el Primer Indice de Yager (2.3.1.b1, C. I), $x^* \in X$ es la solución optimal para el problema (4.23), si y solo si, x* es optimal para el siguiente problema de Programación Lineal Boolena,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max:} \quad z = cx + 1/3\ (dx - d'x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad Ax \leq b \\
&\qquad x_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Proposición 4.20. La solución obtenida para (4.47) es un valor particular de la solución obtenida para (4.39).

Demostración. Basta considerar $\beta = (0,1)$ y $\alpha = 2/3$. Puesto que $\underline{c} = \bar{c}$ entonces para $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 1$ se tiene

$$H = (\beta_1 + 1/2\beta_2)\ (\underline{c}_1, ..., \underline{c}_n) + 1/2\ \beta_2\ (\underline{c}_1, ..., \underline{c}_n) = c$$

$$G = (\beta_1 + 1/2\beta_2)\ (\underline{b}_1, .., \underline{b}_n) + 1/2\ \beta_2\ (\bar{b}_1, ..., \bar{b}_n) = 1/2\ (\underline{b} + \bar{b})$$

y para $\alpha = 2/3$

$$\alpha \cdot G = 2/3 \cdot 1/2\ (d\text{-}d') = 1/3\ (d\text{-}d')$$

por tanto $H + G \cdot \alpha = c + 1/3\ (d\text{-}d')$ ■

b2. Segundo Indice de Yager

Aplicando el Segundo Indice de Yager (2.3.1.b2, C. I), $x^* \in X$ es la solución optimal para (4.23), si y solo si, x^* es solución optimal del siguiente problema de Programación Fraccional Booleana

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = (cx + dx)/(dx + 1) \\ \text{s . a:} & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \end{array} \qquad (4.48)$$

b3. Tercer Indice de Yager

Aplicando el Tercer Indice de Yager (2.3.1.b3, C. I), $x^* \in X$ es la solución optimal para (4.23), si y solo si, x^* es solución optimal del siguiente problema de Programación Lineal Booleana

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max:} & z = cx + 1/4\ (dx - d'x) \\
\text{s.a:} & \\
& Ax \leq b \\
& x_j \in \{0,1\}
\end{array}
\tag{4.49}
$$

Proposición 4.21. La solución optimal para el problema (4.23), utilizando el Tercer Indice de Yager, es un valor particular de la solución obtenida para (4.39).

Demostración. Basta considerar $\beta = (0,1)$ y $\alpha = 1/2$. Puesto que $\underline{c} = \bar{c}$ entonces para $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 1$ se tiene

$$H = (\beta_1 + 1/2\beta_2)\ (\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n) + 1/2\ \beta_2\ (\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n) = c$$

$$G = (\beta_1 + 1/2\beta_2)\ (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n) + 1/2\ \underline{\beta}_2\ (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) = 1/2\ (\underline{b} + \bar{b})$$

y para $\alpha = 1/2$

$$\alpha \cdot G = 1/2 \cdot 1/2\ (d - d') = 1/4\ (d - d')$$

por tanto $H + G\alpha = c + 1/4\ (d - d')$ ∎

c. Relación de Adamo

Aplicando el Tercer de Adamo (2.3.1.c, C. I), se obtendrá una solución para cada valor de α, $x^*(\alpha)$ es una solución optimal para (4.23), si y solo si, $x^*(\alpha)$ es solución optimal del siguiente problema de Programación Lineal Booleana paramétrico,

$$
\begin{aligned}
\text{Max:} \quad & z = cx + dx\ (1\text{-}\alpha) \\
\text{s.a:} \quad & \\
& \Lambda x \leq b \\
& x_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

d. Indice Promedio

Aplicando el Indice Promedio (2.3.1.d, C. I), $x^* \in X$ es la solución optimal para (4.23), si y solo si, x^* es solución optimal del siguiente problema de Programación Lineal Booleana

$$
\begin{aligned}
\text{Max:} \quad & z = cx + d'x/(t+1) + \lambda(Rx\text{-}rx)/(t+1) \\
\text{s.a:} \quad & \\
& Ax \leq b \\
& x_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

3.2.3. Obtención de una solución utilizando relaciones difusas

a. Grado de posibilidad de Dominancia de $\underset{\sim}{u}_i$ sobre $\underset{\sim}{u}_j$

Dada la relación de posibilidad (2.3.2.b1, C. I), se tiene la siguiente relación de preferencia estricta,

$$\mu_S(\underset{\sim}{u}_i, \underset{\sim}{u}_j) = \max \{\ 0,\ \mu_R(\underset{\sim}{u}_i, \underset{\sim}{u}_j) - \mu_R(\underset{\sim}{u}_j, \underset{\sim}{u}_i)\ \}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{S}}(\underset{\sim}{cy}, \underset{\sim}{cx}) = \begin{cases} 0 & \text{si } cy \leq cx \\ \dfrac{cy - cx}{dx + d'y} & \text{si } cy > cx \text{ y } ry < Rx \\ 1 & \text{si } ry \geq Rx \end{cases}$$

y la relación de no-dominancia queda definida como

$$\mu_{ND}(\underset{\sim}{u_i}) = 1 - \max_{\underset{\sim}{u_j}} \mu_S(\underset{\sim}{u_j}, \underset{\sim}{u_i})$$

Es claro que si dado $x^* \in X$ tal que $cx^* \geq cx$, $\forall\ x \in X$, entonces $\mu_S(\underset{\sim}{cx}, \underset{\sim}{cx^*}) = 0$, y por tanto $\mu_{ND}(\underset{\sim}{cx^*}) = 1$, de modo que $\underset{\sim}{cx^*}$ tiene grado de no-dominacia 1, y $\underset{\sim}{cx^*}$ es no-dominado en A.

x^* es la solución optimal para (4.23), si y solo si es la solución optimal para el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{Max: } & cx \\ \text{s.a: } & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \qquad (4.52)$$

Proposición 4.22. La solución optimal para el problema (4.23), utilizando la relación de Posibilidad, coincide con la obtenida para (4.39) con $\alpha = 0$, $\forall\ \beta \in \mathbf{R}^2$, $\beta_i \geq 0$, $\sum \beta_i = 1$.

Demostración. Basta considerar el problema (4.39).

Si $\alpha = 0$ entonces $G\alpha = 0$

y puesto que

$$\sum \beta_i = 1, \quad H = (\beta_1 + 1/2\beta_2)\ c + 1/2\ \beta_2\ c = c \qquad \blacksquare$$

b. Grado de Necesidad de Dominancia de $\tilde{u}_i$ sobre $\tilde{u}_j$

Dada la relación de posibilidad (2.3.2.b2, C. I), se tiene la siguiente relación de preferencia estricta,

$$\mu_S(\tilde{u}_i,\tilde{u}_j) = \max \{ 0, \mu_R(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) - \mu_R(\tilde{u}_j,\tilde{u}_i) \}$$

$$\mu_S(\tilde{c}y, \tilde{c}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } cy \leq rx \\ \dfrac{cy+ry - (cx+rx)}{d'x + d'y} & \text{si } cx > ry \text{ y } cy > rx \\ 1 & \text{si } cx \leq ry \end{cases}$$

y la relación de no-dominancia queda definida como

$$\mu_{ND}(\tilde{u}_i) = 1 - \max_{\tilde{u}_j} \mu_S(\tilde{u}_j,\tilde{u}_i)$$

$\forall$ $x' \in X$, resolviendo el problema

$$\begin{aligned} \text{Max: } & z(x') = \frac{cx+rx - (cx'+rx')}{d'(x+x')} \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{4.53}$$

obtenemos el grado de no-dominancia para $\tilde{c}x'$ de la forma:

$$\mu_{ND}(\tilde{c}x') = \begin{cases} 1-z(x') & \text{si } z(x') \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La solución optimal será x^* tal que $\mu_{ND}(\tilde{c}x^*) \geq \mu_{ND}(\tilde{c}x)$, $\forall$ $x \in X$.

3.3. EJEMPLO

Consideraremos el siguiente problema

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } \underset{\sim}{55}\, x_1 + \underset{\sim}{40}\, x_2 + \underset{\sim}{50}\, x_3 + \underset{\sim}{28}\, x_4 + \underset{\sim}{35}\, x_5 + \underset{\sim}{43}\, x_6 \\
\text{s.a:} \\
\qquad 14\, x_1 + 11\, x_2 + 17\, x_3 + 7\, x_4 + 13\, x_5 + 10\, x_6 \le 32 \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\
\qquad x_3 + \quad + x_5 + x_6 \ge 1 \\
\qquad x_j \in \{0,1\},\ 1 \le j \le 6
\end{array}
$$

donde los costos difusos son los siguientes números difusos triangulares

$$\underset{\sim}{c}_1 = (47,\ 55,\ 63) \qquad \underset{\sim}{c}_2 = (35,\ 40,\ 45) \qquad \underset{\sim}{c}_3 = (38,\ 50,\ 62)$$

$$\underset{\sim}{c}_4 = (18,\ 28,\ 38) \qquad \underset{\sim}{c}_5 = (28,\ 35,\ 42) \qquad \underset{\sim}{c}_6 = (31,\ 43,\ 55)$$

A continuación aplicaremos los distintos métodos de resolución anteriormente estudiados.

Se tienen las funciones

$$\phi_1(1-\alpha) = 55 - 8\alpha \qquad \psi_1(1-\alpha) = 55 + 8\alpha$$

$$\phi_2(1-\alpha) = 40 - 5\alpha \qquad \psi_2(1-\alpha) = 40 + 5\alpha$$

$$\phi_3(1-\alpha) = 50 - 12\alpha \qquad \psi_3(1-\alpha) = 50 + 12\alpha$$

$$\phi_4(1-\alpha) = 28 - 10\alpha \qquad \psi_4(1-\alpha) = 28 + 10\alpha$$

$$\phi_5(1-\alpha) = 35 - 7\alpha \qquad \psi_5(1-\alpha) = 35 + 7\alpha$$

$$\phi_6(1-\alpha) = 43 - 12\alpha \qquad \psi_6(1-\alpha) = 43 + 12\alpha$$

Aplicamos el método desarrollado en la sección 3.1.1 y estudiamos las soluciones difusas con pesos asociados. Para ello consideraremos los siguientes vectores de peso:

$$w^1,\ w_1^1 = 1,\ w_i^1 = 0,\ 2 \le i \le 16, \qquad y \qquad w^2,\ w_i^2 = 0,\ 1 \le i \le 15,\ w_{16}^2 = 1.$$

El problema $M_{w^1}(\alpha)$ es el siguiente:

$$\text{Max } (55-8\alpha)x_1 + (40-5\alpha)x_2 + (50-12\alpha)x_3 + (28-10\alpha)x_4 + (35-7\alpha)x_5 + (43-12\alpha)x_6$$

s.a:

$$\begin{aligned} 14x_1 + 11x_2 + 17x_3 + 7x_4 + 13x_5 + 10x_6 &\le 32 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\ge 1 \\ x_3 + \quad + x_5 + x_6 &\ge 1 \end{aligned}$$

$$x_j \in \{0,1\},\ 1 \le j \le 6$$

su solución es

$$x(\alpha) = (1, 0, 0, 1, 0, 1) \quad \forall\ \alpha \in [0,1]$$

$$z(\alpha) = 126 - 30\alpha \ \forall\ \alpha \in [0,1]$$

$$\underset{\sim}{S}_{w^1} = \{(1, 0, 0, 1, 0, 1)/1\}$$

El problema $M_{w^2}(\alpha)$ es el siguiente:

$$\text{Max } (55+8\alpha)x_1 + (40+5\alpha)x_2 + (50+12\alpha)x_3 + (28+10\alpha)x_4 + (35+7\alpha)x_5 + (43+12\alpha)x_6$$

s.a:

$$\begin{aligned} 14x_1 + 11x_2 + 17x_3 + 7x_4 + 13x_5 + 10x_6 &\le 32 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\ge 1 \\ x_3 + \quad + x_5 + x_6 &\ge 1 \end{aligned}$$

$$x_j \in \{0,1\},\ 1 \le j \le 6$$

y su solución coincide con la del problema $M_{w^1}(\alpha)$

$$x(\alpha) = (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)\ \forall\ \alpha\in[0,1]$$

$$z(\alpha) = 126 + 30\alpha\ \forall\ \alpha\in[0,1]$$

$$S_{\sim w^2} = \{(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)/1\}$$

Ahora aplicamos el método desarrollado en la sección 3.1.2, así obtenemos

$$z^c(x,\alpha) = (55,\ 40,\ 50,\ 28,\ 35,\ 43)$$

$$z^i(x,\alpha) = (55\text{-}8\alpha)x_1+(40\text{-}5\alpha)x_2+(50\text{-}12\alpha)x_3+(28\text{-}10\alpha)x_4+(35\text{-}7\alpha)x_5+(43\text{-}12\alpha)x_6$$

y si resolvemos el problema biobjetivo para cualquier vector de peso $\beta\in\mathbf{R}^2$, vamos a obtener la misma solución que hemos obtenido en los problemas anteriores.

Pasamos a aplicar los diferentes métodos de comparación y resolver los problemas asociados a los mismos.

Método de Jain: z_{max} = 156.00 x* = (1 0 0 1 0 1) g(x*) = (96, 126, 156)

Método de Chang: x* = (1 0 0 1 0 1) g(x*) = (96, 126, 156)

Primer Indice de Yager: x* = (1 0 0 1 0 1) g(x*) = (96, 126, 156)

Segundo Indice de Yager: x* = (0 1 0 0 1 0) g(x*) = (63, 75, 87)

Tercer Indice de Yager: x* = (1 0 0 1 0 1) g(x*) = (96, 126, 156)

Método de Adamo: x* =(1 0 0 1 0 1) g(x(α)) = (96, 126, 156) $\forall\ \alpha\in[0,1]$

Indice promedio:

Obtenemos la solución para: λ = 1, 0.5, 0 y t = 2, 1, 0.5

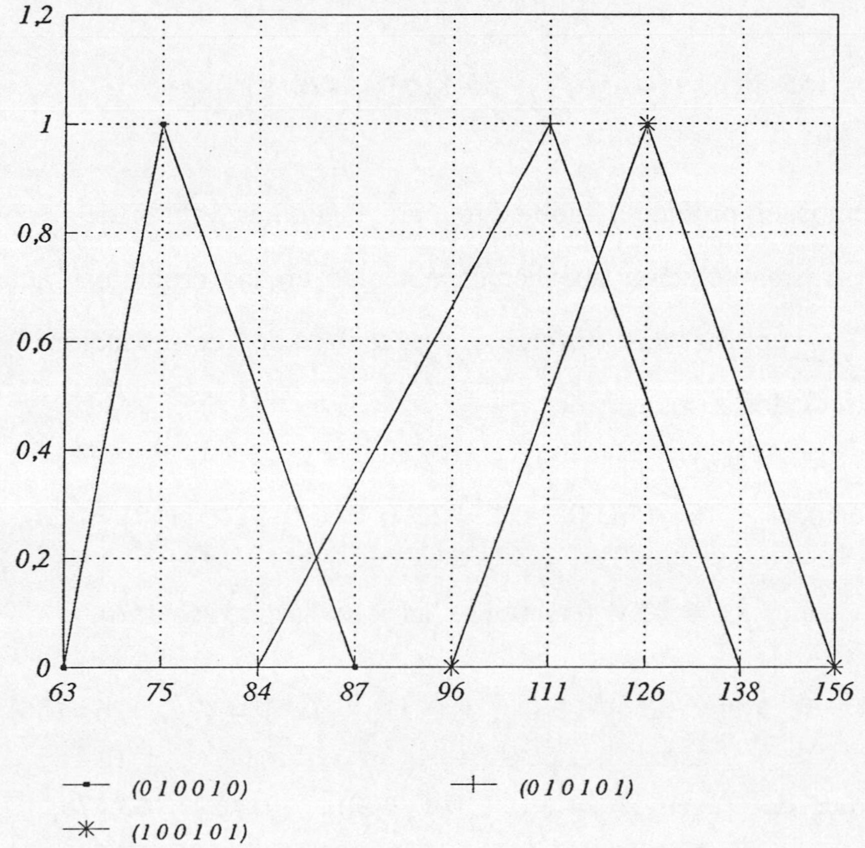
x = (1 0 0 1 0 1) g(x*) = (96, 126, 156)

Grado de Posibilidad: x* = (1 0 0 1 0 1)   z = (96, 126, 156)

Grado de Necesidad: x* = (0 1 0 1 0 1)   z = (84, 111, 138)

Grado de no-dominancia: 1.000

El siguiente gráfico representa los costos difusos asociados a las diferentes soluciones para el problema estudiado.



COMENTARIOS FINALES

En el trabajo que hemos desarrollado se han estudiado diferentes modelos de PED, así como métodos y algoritmos de resolución para los mismos.

En el capítulo II hemos presentado una clasificación de los modelos de PED, que consideramos era necesaria en este ámbito. Dichos modelos han quedado descritos atendiendo a que las variables sean casi enteras, a que las restricciones sean difusas, a que el objetivo fuera difuso y, finalmente, a que el conjunto de restricciones estuviera definido por ceficientes imprecisos. Lógicamente, se podrían haber considerdo los problemas deducidos de las posibles combinaciones de estos cuatro modelos elementales, pero por comodidad de cara a elaborar los diferentes metodos que hemos presentado, optamos por no incluirlos. En esta clasificación se ha distinguido también entre problemas con variables enteras y problemas con variables booleanas.

En este mismo capítulo se han estudiado los problemas de PLE con variables difusas, y se ha presentado un método de resolución y un algoritmo para el mismo basado en la técnica Branch and Bound.

En el Capítulo III, se ha abordado el estudio de los problemas de PLE con restricciones y costos difusos. Para el primero se ha diseñado un algoritmo que permite resolver el problema de PLED puro, y para el segundo se han propuesto dos diferentes métodos de resolución: uno mediante puntos eficientes, y otro que utiliza la aritmética intervalar, estando ambos basados en un algoritmo mostrado en el Capítulo I.

Finalmente, se han estudiado los problemas de PLB difusa. En este caso, se ha diseñado un algoritmo que nos permite resolver el problema puro con restricciones difusas, y otro que permite obtener a partir de la solucion que el anterior encuentra, la solucion que para dicho problema propusieron otros autores. Para el problema de PLB con costos difusos, hemos propuesto también diferentes métodos de resolución, demostrando la relación existente entre ellos.

Por ultimo, hay que destacar que esta memoria no contiene todo el trabajo que sobre el tema tratado se puede realizar. En efecto, como problemas abiertos para desarrollar en el futuro se tiene:

1) El estudio de los problemas de PLE con números difusos en la matriz tecnológica y en el vector de la derecha.

2) La aplicación de los métodos de comparación de números difusos a la resolución de problemas de PLE con costos imprecisos, asi como la aplicación de métodos heurísticos para la obtención de soluciónes en los problemas no lineales que se han obtenido. Cabe destacar la Búsqueda Tabu como posible heurística de búsqueda de solución.

3) El desarrollo de metodos de resolucion para problemas de PE convencional, a partir de los algoritmos de PED aqui mostrados, y por último, pero no lo menos importante,

4) La aplicación de los modelos aquí descritos y resueltos a la resolucion de problemas de inferencia, y de razonamiento aproximado, en sistemas basados en el conocimiento.

BIBLIOGRAFIA

[1] **Alefeld, G. y J. Herzberger (1983)**: Introduction to Interval Computations (Translated by J. Rokne). *Academic Press. New York.*

[2] **Bailey, M.G. y B.E. Gillet (1989)**: Parametric Integer Programming: A Contraction approach. *Journal of the Operational Research Society 31, pp. 253-262.*

[3] **Bellman, R.E. y L.A. Zadeh (1970)**: Decision Making in a Fuzzy Environment. *Man. Sci. 17 (B), 4, pp. 141-164.*

[4] **Benson, H.P. (1985)**: Multiple objective linear programming with parametric criteria coefficients. *Man. Scien., 31, 4, pp. 461-474.*

[5] **Bitran, G.R. (1980)**: Linear multiple objective problems with interval coefficients. *Man. Scien., 26, 7, pp. 694-706.*

[6] **Bitran, G.R. (1977)**: Linear multiple objective programs with zero-one variables. *Man. Scien., 13, pp. 121-139.*

[7] **Bortolan, G. y R. Degani (1985)**: A review of some methods for ranking fuzzy subsets. *Fuzzy Sets and Systems 15, pp. 1-19.*

[8] **Campos, L. (1986)**: Modelos de la Programación Lineal Difusa, para la Resolución de Juegos Matriciales imprecisos. *Tesis Doctoral. Universidad de Granada.*

[9] **Campos, L. y J.L. Verdegay (1989)**: Linear Programming Problems and Ranking of Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems, 32, pp. 1-11.*

[10] **Campos, L. (1989)**: Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games. *Fuzzy Sets and Systems,32, pp. 275-289.*

[11] **Chankong, V. y Y.Y. Haimes (1983)**: Multiobjective Decision Making. Theory and Methodology. *North-Holland.*

[12] **Dechter, R., A. Dechter y J. Pearl (1988)**: Optimization in Constraint Networks. *Proceedings of the Conference on Influence Diagrams for Decision Analysis, Inference and Prediction. Engineering Systems Research Center, University of California at Berkeley.*

[13] **Delgado, M. (1983)**: A resolution Method for Multiobjective Problems. *E.J.O.R. 13, pp. 165-172.*

[14] **Delgado, M., J.L. Verdegay y M.A. Vila (1985)**: Solving the Biobjective Linear Programming Problem: A fuzzy Approach. *En Approximate Reasoning in Expert Systems (M.M. Gupta et al. Eds.), North-Holland, pp. 327-322.*

[15] **Delgado, M., J.L. Verdegay y M.A. Vila (1987)**: Imprecise costs in mathematical programming problems. *Control and Cybernetics, 16, 2, pp. 113-121.*

[16] **Delgado, M., J.L. Verdegay y M.A. Vila (1989)**: A General Model for Fuzzy Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems 29, pp. 21-29.*

[17] **Delgado, M., J.L. Verdegay y M.A. Vila (1989)**: Dealing with imprecision and uncertainty in Decision Making problems. *En Workshops on Approximate Reasoning for Expert System. Blanes (Gerona).*

[18] **Delgado, M., J.L. Verdegay y M.A. Vila (1990)**: Relating different approaches to solve linear programming problems with imprecise costs. *Fuzzy Sets and Systems 37, pp. 33-42.*

[19] **Delgado, M., J.L. Verdegay y M.A. Vila (1990)**: Optimization models in fuzzy-logic-based decision support systems. *Dept. Computer Science and A.I. Technical Report N. 90-1-3 (December 1990).*

[20] **Delgado, M., J. Kacprzyk, S.A. Orlowski, J.L. Verdegay y M.A. Vila (1990)**: A Survey of fuzzy optimization and fuzzy mathematical programming. *Por aparecer.*

[21] **Dubois, D. y H. Prade (1978)**: Operations on Fuzzy Numbers. *Int. J. Systems Science, 9, pp. 613-626.*

[22] **Dubois, D. y H. Prade (1980)**: Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications. *Academic Press, New York.*

[23] **Dubois, D. y H. Prade (1987)**: The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and System, 24, pp. 279-300.*

[24] **Fabian, C. y M. Stoica (1984)**: Fuzzy Integer Programming. *In Fuzzy Sets and Decision Analysis. H.J. Zimmermann, L. A. Zadeh and B. R. Gaines (Eds). North-Holland, pp. 123-131.*

[25] **Gal, T. (1979)**: Postoptimal Analyses, Parametric Programming and Related Topics. *McGraw Hill.*

[26] **Garcia Aguado, M.C. (1990)**: Estudio de la Sensibilidad de las Funciones de Pertenencia en Problemas de Optimización con Restricciones Imprecisas. *Tesis Doctoral. Universad de Granada.*

[27] **Garfinkel, R.S. y G.L. Nemhauser (1972)**: Integer Programming. *Wiley Interscience, New York.*

[28] **Geoffrion, A.M. y R.M. Nauss (1977)**: Parametric and Postoptimality analysis in integer programming. *Management Science 23, pp. 453-456.*

[29] **Gonzalez, A. (1988)**: Métodos Subjetivos para la Comparación de Números Difusos. *Tesis Doctoral. Universidad de Granada.*

[30] **Gonzalez, A. (1990)**: A studing of the ranking function approach through mean values. *Fuzzy Sets and System, 35, pp. 29-41.*

[31] **Glover, F. (1986)**: Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence. *Computer and operating Research, Vo. 13, 5 pp. 533-549*

[32] **Goguen, J.A. (1967)**: L-Fuzy Sets. *J. Math. Ana. and Appl., 18, pp. 145-174.*

[33] **Hammer, P.L. y S. Rudeanu (1968)**: Boolean Methods in Operations Research and Related Areas. *Springer-Verlag, Berlin.*

[34] **Holm, S. y D. Klein (1978)**: Discrete right hand side parametrization for linear integer programs. *European Journal of Operational Research 2, pp. 40-53.*

[35] **Ignizio, P. y C. Daniels, (1983)**: Fuzzy multicriteria integer programming via fuzzy generalized networks. *Fuzzy Sets and Systems, 10, pp. 261-270.*

[36] **Ishibuchi, H. y H. Tanaka. (1990)**: Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. *E.J.O.R., 48, pp. 219-225.*

[37] **Jenkins, L. (1982)**: Parametric mixed integer programming: An application to solid waste managemet. *Management Science 28, pp. 1270-1284.*

[38] **Jenkins, L. (1987)**: Parametric-objective integer programming using knapsack facets and Gomory cutting planes. *E.J.O.R., 32, pp. 102-109.*

[39] **Jeroslow, R.G. (1989)**: Logic-Based Decision Support. Mixed Integer Model Formulation. *North-Holland.*

[40] **Klein, D. y S. Holm (1979)**: Integer programming post-optimal analysis with cutting planes. *Management Science 25, pp. 64-72.*

[41] **Kolodziejczyk, W. (1988)**: On equivalence of two optimization methods for fuzzy discrete programming problems. *E.J.O.R., 36, pp. 85-91.*

[42] **Loukakis, E. y A. P. Muhlemann (1984):** Parametrization Algorithms for the Integer Linear Programs in Binary Variables. *E.J.O.R., 17, pp. 104-115.*

[43] **Marsten, R.E. y T.L. Morin (1977)**: Parametric integer programming: The right-hand-side case. *Annals of Discrete Mathematics 1, pp. 375-390.*

[44] **Marsten, R.E. y T.L.Morin (1978)**: A hybrid approach to discrete mathematical programming. *Mathematical Programming, 14, pp. 21-40.*

[45] **Mckinnon, K.I.M. y H.P. Williams (1989)**: Constructing Integer Programming models by the Predicate Calculus. *Annals of Operations Research (Switzerland), Vol 21, pp. 227-245*

[46] **Mizumoto, M. (1989)**: Pictorial representations of fuzzy connectives, Part I: Cases of t-norms, t-conorms and averaging operators. *Fuzzy Sets and Systems, 31, pp. 217-242.*

[47] **Moore, R.E. (1979)**: Method and Applications of Interval Analysis. *SIAM, Philadelphia (1979).*

[48] **Nauss, R.M. (1979)**: Parametric Integer Programming. *University of Missouri Press.*

[49] **Negoita, C.V. y D.A. Ralescu (1975)**: Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. *Birkhauser.*

[50] **Negoita, C.V. y D.A. Ralescu (1977)**: On Fuzzy Optimization. *Kybernetes, 6, pp. 193-195.*

[51] **Negoita, C.V. (1981)**: The Current Insterest in Fuzzy Optimization. *Fuzzy Sets and Systems, 6, pp. 261-269.*

[52] **Ohtake, Y. y N. Nishida (1985)**: A branch-and-bound algorithm for 0-1 parametric mixed integer programming. *Operations Research Letters 4, 1, pp. 41-45.*

[53] **Orlovski, S.A. (1977)**: On Programming with Fuzzy Constraint Sets. *Kybernetes 6, pp. 197-201.*

[54] **Orlovski, S.A. (1978)**: Decision-Making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems 1, pp. 155-167.*

[55] **Orlovski, S.A. (1980)**: On formalization a general fuzzy mathematical problems. *Fuzzy Sets and Systems, 3, pp. 311-321.*

[56] **Piper, C.J. y A.A. Zoltners (1976)**: Some easy postoptimality analysis for zero-one programming. *Man. Scien. 22, pp. 759-765.*

[57] **Post, S. (1987)**: Reasoning with Incomplete and Uncertain Knowledge as an Integer Linear Program. *Joint National Meeting ORSA/TIMS (St. Louis).*

[58] **Ralescu, D. (1979)**: A survey of representation of fuzzy concepts and its applications. *In Advances in fuzzy sets theory and applications. (M.M. Gupta, R.K. Ragade and R.R. Yager, Eds.). North-Holland, pp. 77-91.*

[59] **Rommelfanger, R. Hanuscheck y J. Wolf (1989)**: Linear programming with fuzzy objectives. *Fuzzy Sets and Systems, 29, pp. 31-48.*

[60] **Rountree, S.L.K. y B.E. Gillet (1982)**: Parametric Integer Linear Programming: A synthesis of Branch-and-Bound with cutting planes. *E.J.O.R., 10, pp. 183-189.*

[61] **Salkin, H.M. y K. Mathur (1989)**: Foundations of integer programming. *North-Holland, New-york, 1989.*

[62] **Schrage, L. (1985)**: Sensitivity Analysis for Branch-and-Bound Integer Programming. *Operations Research, pp. 1008-1023.*

[63] **Shapiro, J.F. (1977)**: Sensitivity Analysis in Integer Programming. *Annals of Discrete Mathematics 1, pp. 467-477.*

[64] **Singhal, J., R.E. Marsten y T.L. Morin (1989)**: Fixed Order Branch-and-Bound Methods for Mixed-Integer Programming: The Zoom System. *ORSA Journal on Computing, 1, pp. 44-51.*

[65] **Steuer, R.E. (1981)**: Algorithms for linear programming problems with interval objective function coefficients. *Math. of O.R., 6, 3, pp. 333-348.*

[66] **Taha, H.A. (1975)**: Integer Programming. Theory, Applications and Computations. *Academic Press.*

[67] **Tanaka, H., Okuda, T. y K. Asai (1974)**: On Fuzzy Mathematical Programming. *Journal of Cyberneteecis, 13, pp. 185-194.*

[68] **Tanaka, H., H. Hichihashi y K. Asai (1984)**: A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers. *Control and Cybernet, 13, pp. 185-194.*

[69] **Tayi, G.K. (1985)**: Sensitivity Analysis of Mixed Integer Programs: An Application to Envirommental Policy making. *E.J.O.R. 22, pp. 224-233.*

[70] **Verdegay, J.L. (1982)**: Fuzzy Mathematical Programming. *In Fuzzy Information and Decision Processes. M.M. Gupta and E. Sanchez (Eds). North-Holland, pp. 231-237.*

[71] **Verdegay, J.L. (1984)**: A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem. *Fuzzy Sets and Systems, 14, pp. 131-141.*

[72] **Villarreal, B. y M.H. Karwan (1981)**: Multicriteria integer Programming: A (hybrid) dynamic Programming recursive approach. *Mathematical Programming, 21, pp. 204-223.*

[73] **Villarreal, B. y M.N. Karwan (1981)**: Parametric multicriteria integer Programming. *En Studies on Graphs and Discrete Programming. P. Hansen (Ed). North-Holland Publishing Company.*

[74] **Von Randow, R. (1985)**: Integer Programming and Related Areas: A classified Bibliography. 1981-1984. *Springer-Verlag, Berling.*

[75] **Weber, S. (1983)**: A general concept of fuzzy connectives, negations and implications bases on t-norms and t-conorms. *Fuzzy Sets and Systems, 11, pp. 115-134.*

[76] **Williams, H.P. (1985)**: Model Building in Mathematical Programing. *John Wiley and Sons.*

[77] **Williams, H.P. (1987)**: Linear and integer programming applied to the propositional calculus. *Systems Research and Information Science, Vol. 2.*

[78] **Wilson, J.M. (1990)**: Compact normal forms in propositional logic and integer programming formulations. *Computer and Operating Research (U.K.), Vol. 17, 3, pp. 309-314*

[79] **Yager, R.R. (1988):** A Mathematica Programming Approach to Inference with the Capability of Implementig Default Rules. *Int. J. of Man-Machine Studies 29, pp. 685-714.*

[80] **Zadeh L.A. (1978)**: Fuzzy Sets as a Basis for a Theory Possibility. *Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 33-28.*

[81] **Zadeh, L.A. (1979)**: Calculus of Fuzzy restrictions. *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes (L.A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, Eds.), Academic Press, pp. 1-40.*

[82] **Zeleny, M. (1982)**: Multiple Criteria Decision Making. *McGraw-Hill, new York, 1982.*

[83] **Zimmermann, H.J. (1976)**: Description and Optimization of Fuzzy Systems. *International Journal of General Systems 2, pp. 209-215.*

[84] **Zimmermann, H.J. (1978)**: Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions. *Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 45-55.*

[85] **Zimmermann, H.J. y M.A. Pollatschek (1984)**: Fuzzy 0-1 Linear Programs. *In Fuzzy Sets and Decision Analysis. H. J. Zimmermann, L. A. Zadeh and B. R. Gaines (Eds). North-Holland, pp. 133-145.*

[86] **Zimmermann, H.J. (1987)**: Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems. *Kluwer Academic Publishers.*