

TRABAJO FINAL DE GRADO



INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

**INVENCION DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
POR ALUMNADO DE SEGUNDO DE
EDUCACIÓN PRIMARIA**

Alumno: Jesús Cortacero Macías

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Grado en Educación Primaria

Curso académico 2015-2016

ÍNDICE

	Página
1. Introducción	1
2. Objeticos	1
3. Marco de referencia	2
4. Concreción del estudio	6
Contexto	6
Instrumento	7
Proceso de aplicación	8
5. Análisis de resultados	9
6. Conclusiones	18
7. Referencias	20
8. Anexos	21

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo vamos a llevar a cabo una investigación exploratoria en la que estudiaremos la habilidad de escolares de educación primaria para inventar problemas de matemáticas que se resuelvan con las operaciones de suma y resta, haciendo una comparación de los resultados obtenidos con el nivel académico de la asignatura de matemáticas en la que realizaremos dicho estudio. Para ello, analizaremos las producciones obtenidas con una serie de variables pertinentes para el tema.

Como establece la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013) del 28 de febrero de 2014, se puede observar como esta tarea va apareciendo en el área de matemáticas. No solo nos encontramos con la resolución de problemas, sino que, además, se va introduciendo diversas tareas de invención de problemas en los diferentes nivel o etapas, así como formando parte de los criterios de evaluación.

A la vez que se introdujo la invención de problemas en el currículo básico de educación primaria, los libros de texto están incluyéndolas en todos los temarios, dedicando apartados específicos para ello. Además, en las pruebas oficiales realizadas a nivel autonómico y nacional, están acompañando a la resolución de problemas.

La invención de problemas es una tarea bastante amplia y, que difícilmente, podrían abarcar en una sola investigación de este tipo. Nos centraremos en una sola situación para analizar los diferentes aspectos de cada enunciado, como pueden ser: los tipos de números que utilizan, las preguntas que hace o el tipo de problema que han planteado. Para todo ello, haremos una revisión a varios autores con bastante conocimiento en esta área y que han estudiando e investigado a su vez a autores internacionales de gran índole.

2. OBJETIVOS

El objetivo central de este TFG es evaluar la competencia de alumnado de 2º curso de Educación Primaria para inventar problemas matemáticos de estructura aditiva. Para lograrlo, pretendemos abordar los siguientes objetivos específicos:

1. Diseñar y aplicar una tarea de invención de problemas
2. Analizar los enunciados de los alumnos de acuerdo a una serie de categorías y variables

3. Comparar la cantidad de enunciados resolubles con el rendimiento en matemáticas de su clase.

3. MARCO DE REFERENCIA

Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2013), tras revisar varios trabajos de investigación, concluyen que el término invención de problemas implica la formulación de nuevos problemas y la reformulación de situaciones previamente dadas (pp. 2-3).

Inventar un problema se convierte en una tarea en la que los alumnos deben poner en juego varios conocimientos y razonamientos matemáticos para decidir cual de ellos es el más correcto.

Es posible identificar tres tipos momentos que permiten plantear e implementar una actividad de invención. Podemos partir de una situación presentada en clase en la que se reparten una serie de etiquetas o contextos y a partir de estos reactivos los alumnos deben inventar un enunciado como paso previo a su resolución. Lo que se persigue no es la solución del mismo, sino formular problemas matemáticos a partir de una situación o experiencia dada previamente al estudiante (Silver, 1994, citado por Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2014). Además, cuando se nos presenta un problema común, sea cual sea su temática, es posible que no se comprenda lo que debemos hacer. Estaríamos ante el segundo momento en el que podemos reformular el enunciado para simplificarlo y hacerlo más cercano a nosotros durante la solución del problema. Y el tercer momento, después de la solución. Se modifica la pregunta para así buscar y plantear nuevas situaciones a resolver y enriquecer el propio problema.

Además, dentro de la invención de problemas, como señalan Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2014), se pueden destacar tres formas para la realización de esta actividad atendiendo a la situación que se le presente al alumnado (p. 3). Por un lado, nos encontramos con la situación en la que los alumnos desarrollan la tarea con total libertad, sin ninguna restricción a la que atender; estaríamos así dentro de una situación libre. Ej. *Diseña un problema matemático (de suma)*. Por otro lado, situaciones semiestructuradas, en las que se les presenta un etiquetas o imágenes para que produzcan un enunciado. Ej. *Diseña un problema matemático de suma empleando los números que aparecen en la tabla proporcionada*. Por último, tenemos el problema completamente formulado y se nos pide reformularlo para conseguir nuevos retos, nuevas preguntas y sacarle el máximo a ese enunciado original. En este último caso,

hablaríamos de situaciones estructurales. Ej. *Inventa preguntas que se puedan resolver con este enunciado: mi hermano tiene 23 canicas y mi primo tiene 12 canicas.*

Como señalan Ayllón y Gómez (2014), tras indagar en trabajos de autores como Freudenthal, Kilpatrick y Polya, la acción de inventar problemas es una manera eficiente de aprender matemáticas. Cuando un individuo inventa un problema alcanza niveles de reflexión complejos, por tanto llega a una etapa de razonamiento donde es posible el conocimiento matemático (p. 30). Esos beneficios potenciales para el aprendizaje se concretan en una serie de factores.

El primer factor es el “aumento del conocimiento matemático”. Con esta tareas de invención conseguimos que el alumnado ponga de manifiesto todo lo adquirido hasta el momento para plantear y resolver el problema: desde un análisis y síntesis del enunciado hasta una clara y organizada solución. Un segundo factor lo relacionamos con la “motivación” que tendrá el alumnado para enfrentarse a una tarea de invención que le dará como resultado un ejercicio propio creado por el mismo. En tercer lugar situamos la “ansiedad” que presentan algunos alumnos al enfrentarse a tareas matemáticas. Con esta tarea eliminamos esa sensación de miedo y malestar que presentan ante las matemáticas. En cuarto lugar, como factor positivo hace referencia a la “superación de errores” cometidos frecuentemente por el alumnado. De nuevo, la invención de problemas propia la estimulación de los alumnos favoreciendo la mejora en la consecución adecuada de las estrategias necesarias para la resolución del problema presentado. En penúltimo factor a señalar alude a la “creatividad”, que según establece Ayllón y Gómez (2014) tras revisar los trabajos de Edwards Silver, atiende a tres variables: “Fluidez asociándola al número de problemas generados, flexibilidad la que relaciona con el número de categorías diferentes de los problemas propuestos y el grado de originalidad que lo vincula con el número de soluciones que admiten los problemas propuestos” (p. 32). El sexto y último factor se relaciona con la actividad del profesor pues tiene que ver con la evaluación. Ayllón y Gómez (2014) exponen que, “la invención de problemas permite evaluar, en los estudiantes, su conocimiento, su manera de razonar y su desarrollo conceptual.” (p. 32)

Para poder analizar con detalle las producciones, debemos comenzar con la distinción entre problema matemático del que no lo es. Para ello, como señala Castro (1991), citado por Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2015), diferenciamos cinco componentes que debe incluir una producción matemática: “una proposición, unos datos

conocidos, una intención (movilizar una o más personas para que lo resuelvan), una meta y un proceso”.

Después de conocer si es o no matemático, debemos comprobar si es o no resoluble. Para ello nos basaremos en que el enunciado tenga los datos necesarios y una pregunta acorde con los datos proporcionados.

Una vez que conozcamos la validez matemática de los enunciados, analizaremos las variables de cada uno de ellos. Para ello, como bien recogen Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2015), estableceremos tres categorías de análisis, estructura sintáctica, estructura matemática y estructura semántica. Cada una de ellas incluye diferentes variables.

Estructura sintáctica

El objeto de análisis aquí es la complejidad del enunciado propuesto por el sujeto, subdividiéndose en longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado.

- La longitud del enunciado viene determinada por el número de proposiciones que aparecen en la producción, distinguiéndose dos tipos de proposiciones, aquellas que aportan datos al problema y aquellas otras que aportan datos superfluos, es decir, datos que no son necesarios para la resolución.
- Proposición interrogativa: hace referencia a la pregunta del problema, pudiendo diferenciar tres tipos de preguntas. Proposición interrogativa de asignación (¿Cuántas pelotas tiene Juan?); relacional (¿Cuántas veces tiene Juan los juguetes de Antonio?) y condicional (Si Jesús metió 5 goles mas que Iván, ¿cuántos goles marcó Iván?).
- En cuanto al tipo de número empleado, Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2015) realizan una distinción entre números naturales y números racionales, pero en nuestro caso, al adaptarnos al nivel académico de los alumnos, analizaremos si los números naturales empleados son de una, dos o tres cifras.

Estructura matemática

En esta segunda categoría de análisis, se estudiara el proceso de resolución del problema, destacando tres variables: Tipo de estructura operatoria, tipo de operación y cantidad de procesos implicados.

- Tipo de estructura operatoria. Esta variable de análisis trata de hacer, en primer lugar, una distinción entre estructura aditiva (suma o resta) y en segundo lugar,

si es de una o más etapas. Como los enunciados presentados en la ficha de los alumnos pedirá específicamente que sea de suma o de resta, nos servirá para verificar que el enunciado tiene una estructura matemática acorde con lo que pedíamos.

- Tipo de operación y cantidad de procesos implicados. En esta segunda variable, a diferencia de Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2015), analizaremos el tipo de operación necesaria para la resolución del problema, pudiendo ser operaciones de suma o resta solamente o suma y resta en un mismo enunciado. Quedando enmarcado como un solo proceso el primer caso, operación de suma o resta, y de dos procesos cuando se intercalen ambas operaciones (pp. 68-70).

Estructura semántica

Como establecen Cañadas y Castro (2011), adentrándonos en la clasificación semántica de los enunciados aditivos, “distinguimos cuatro tipos: a) Problemas de cambio, b) problemas de combinación, c) problemas de comparación y d) problemas de igualación” (p. 84). Quedando definidos particularmente de la siguiente manera:

En los problemas de cambio partimos de una cantidad inicial que es alterada que da consecuencia una cantidad final. Ej. Problema 1. *Antonio tenía 8 caramelos y le dan 5, ¿cuántos caramelos tiene ahora Antonio?* Problema 2. *Pedro tenía 8 caramelos y le quitan 5, ¿cuántos caramelos tiene ahora?*

En los problemas de combinación partimos de dos cantidades iniciales que se unen para formar un total. Ej. Problema 3. *Daniel tiene 6 canicas verdes y 7 canicas rojas, ¿cuántas canicas tiene Daniel?* Problema 4. *Daniel tiene 13 canicas, unas verdes y otras rojas. Si tiene 6 canicas verdes, ¿cuántas canicas rojas tiene Daniel?*

En los problemas de comparación partimos de dos cantidades independientes que se comparan entre sí. Ej. Problema 5. *Patricia tiene 6 juguetes y Francisco tiene 9. ¿Cuántos juguetes tiene Francisco más que Patricia?* Problema 6. *Patricia tiene 6 juguetes y Francisco tiene 9. ¿Cuántos juguetes tiene Patricia menos que Francisco?* Un caso particular de problemas de comparación son los de igualación. Ej. Problema 7. *Tengo 8 cartas y mi primo tiene 4. ¿Cuántas cartas necesita recibir mi primo para tener las mismas que yo?* Problema 8. *Tengo 8 cartas y mi primo tiene 4. ¿Cuántas cartas tengo que perder para tener tantas como mi primo?*

Una vez expuestos los principales principios teóricos sobre invención de problemas, las tipologías en las que se puede presentar la tarea, los factores positivos

que aportan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las categorías de análisis empleadas para las producciones de los sujetos, sintetizamos las características que tendrá nuestra exploración en el aula, y justificaremos el diseño de una tarea de invención.

4. CONCRECIÓN DEL ESTUDIO

En este apartado describimos el contexto, instrumento y proceso de aplicación de nuestro estudio.

Contexto

El lugar donde realizaremos el estudio será en el Colegio Público Abadía, en la población de Albolote (Granada), colegio de Educación Infantil, Primaria y Especial. La elección de este centro se justifica en que es el lugar donde realice el periodo de prácticas del segundo cuatrimestre del cuarto y último curso del grado en Educación Primaria.

Se trata de un centro público de línea 3, en el que se trata todo tipo de alumnado, sin exclusión alguna, ni cultural ni académica. A día de hoy encontramos alumnos con diferentes niveles académicos, varios con síndrome de Asperger y uno con síndrome de Down. Además cuenta con alumnos de origen árabe, origen asiático y origen sudamericano.

Como explicaba anteriormente, el estudio se llevará a cabo en el contexto de las prácticas y por tanto en la misma clase en la que hago mi estancia en el colegio. Segundo curso de Educación Primaria será el curso elegido para ello, puesto que es donde más contacto tengo y donde mas facilidades me dan para poder realizarlo.

En el aula hay 26 alumnos, 11 niños y 15 niñas. Entre todos ellos distinguimos 3 alumnos con un nivel académico alto, 2 con un nivel académico por debajo de la media, otros 2 alumnos que están repitiendo curso y un alumno que, aun teniendo un nivel académico normal, su actitud es pasiva, sin participación en clase ni realizando las tareas tanto de clase como las de casa. Nos encontramos con un aula con bastante variedad académica, lo que nos dará suficientes datos para realizar un estudio completo sobre la producción de problemas.

El día que se pasó hubo dos alumnos que faltaron y por tanto no la realizaron. Además, el alumno cuya actitud es pasiva durante todo el día, no rellenó absolutamente

nada de la ficha proporcionada, no quiso dedicar un tiempo a pensar ni plantear ningún enunciado. Por tanto, si quitamos este alumno y los dos que no asistieron, partimos de 23 sujetos para analizar sus propuestas.

Para situar el nivel matemático del alumnado, utilizaremos la pasada evaluación trimestral llevada a cabo por la tutora, incluyendo en ella las calificaciones de los temarios correspondientes al libro de texto y otra segunda calificación referente a cálculo mental, que es realizado semanalmente. Tras este previo un análisis de la situación matemática de este alumnado, establecemos una media aritmética de un 6,55 sobre 10.

El desarrollo de la producción de enunciados, tendrá lugar durante una sesión de la asignatura de matemáticas, en la que los alumnos dispondrán de 45 minutos aproximadamente, pudiendo emplear parte de la siguiente sesión en caso de necesitarlo.

Instrumento

Como ya hemos introducido, nuestro propósito es llevar a cabo un estudio exploratorio sobre una tarea de invención de problemas. La tarea que emplearemos emplea como reactivo una tabla con números naturales escogidos aleatoriamente (ver Anexo 1).

Este proceso aleatorio de elección de números ha sido realizado mediante una plataforma web¹, la cual genera automáticamente y de forma aleatoria tantos números como necesites dentro del rango que le establezcas. A continuación adjuntamos una miniatura de la tabla presentada a los alumnos.

6	605	580	8
315	91	88	625
16	326	7	37

Figura 1. Tabla de números aleatorios

¹ <http://www.alazar.info/generador-de-numeros-aleatorios>

El alumnado deberá producir dos enunciados: uno que se resuelva con operaciones de suma y otro que sea resuelto con operaciones de resta. Para dicha producción se utilizará una ficha individual con los apartados correspondientes (ver Anexo 2).

La ficha constará de dos partes. Una primera parte en la que los alumnos deberán producir un enunciado de un problema matemático que se resuelva con operaciones de suma y empleando, al menos, dos cantidades que aparezcan en la tabla entregada. En la misma ficha se divide la respuesta en dos espacios, uno para desarrollar el enunciado y otro para la pregunta.

En la segunda parte de la tarea, se repite el procedimiento, pero en este caso, cambiaríamos la suma por la resta, es decir, pedimos al alumnado producir un problema con al menos dos cantidades que aparezcan en la tabla y que se resuelva mediante una suma.

Con esta tarea obtendremos diferentes producciones, las cuales analizaremos, siguiendo el esquema presentado anteriormente, según su estructura sintáctica, matemática y semántica.

Proceso de aplicación

En primer lugar, presentaremos una situación semiestructurada previa al enunciado del problema. La distribución de la clase para la realización de la tarea será por grupos de 5 o 6 alumnos, tal y como permanecen sentados durante el resto de horas. Aun estando por grupos, la producción de problemas será de forma individual. En esta situación repartiremos una tabla con 12 números naturales seleccionados aleatoriamente, una tabla por grupo.. De esos doce números, habrá 3 números de una cifra, 4 de dos cifras y 5 de tres cifras para que haya variedad de cantidad y poder estudiar la preferencia de los alumnos.

A continuación, antes de repartir las fichas individuales, explicamos la tarea al alumnado para así captar toda su atención y que ninguno se distraiga observando la ficha o rellenándola sin conocer el funcionamiento.

Tomaremos de referencia el esquema de análisis elaborado por Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2015) después de revisar varios autores. Este esquema nos facilitará el análisis de las producciones, comenzando desde su validez matemática

hasta el análisis detallado de cada una de las estructuras de análisis desarrolladas en epígrafes anteriores (Figura 1).

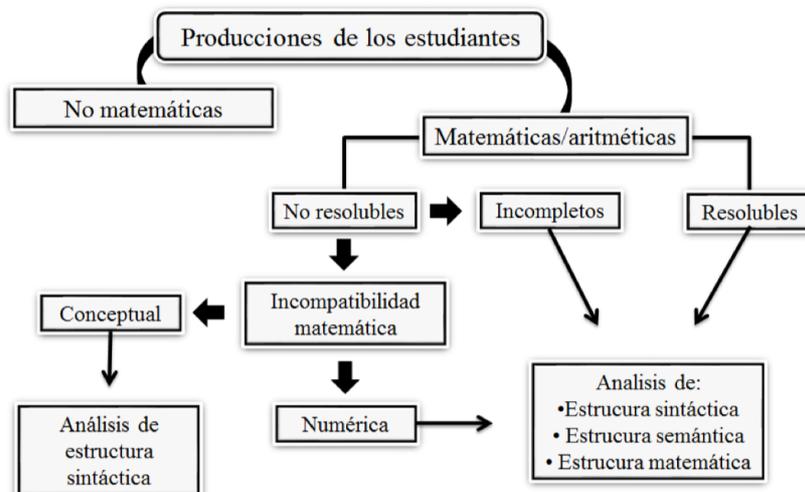


Figura 2. Esquema para el análisis de los enunciados de los problemas

En este análisis secuenciado, comenzamos con una diferenciación entre producciones no matemáticas y matemáticas, utilizando los componentes que señalan Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2015). Las producciones matemáticas a su vez, las dividiremos en dos, no resolubles y resolubles, pasando en esta última categoría al análisis detallado de cada una de las estructuras. Aquellas producciones categorizadas dentro de no resolubles, analizaremos la incompatibilidad matemática que presentan, pudiendo ser incompatibilidad conceptual o numérica. Si se trata de una numérica, al igual que las producciones resolubles, analizaremos las diferentes estructuras, pero en el caso de las incompatibilidades conceptuales, solamente se analizará la estructura sintáctica.

Comenzamos a continuación a describir los resultados y obstáculos con los que nos hemos encontrado durante el desarrollo de esta tarea en el contexto del que hablábamos anteriormente.

5. ANALISIS DE RESULTADOS

Dividiremos el análisis de los resultados en dos partes. La primera parte contendrá todo el análisis referente a las producciones de suma elaboradas por los sujetos y en una segunda parte el referente a la resta.

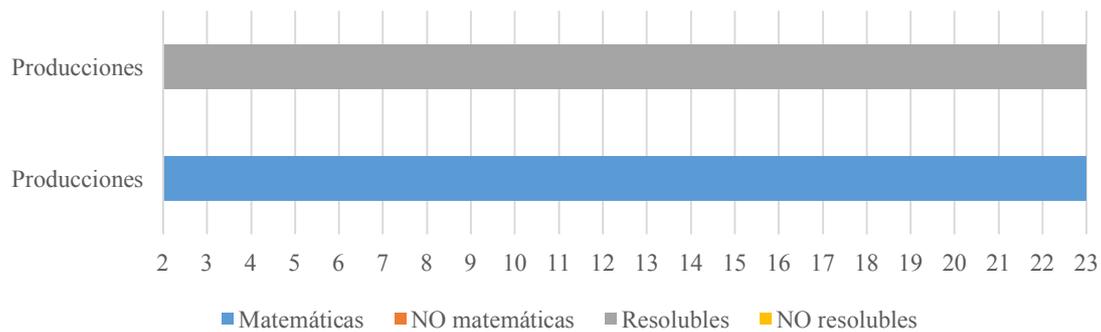


Figura 3. Gráfica de producciones de suma

Comenzando por la distinción entre las producciones de suma que son matemáticas y de las que no, como podemos ver en la gráfica, hemos obtenido 23 producciones de las 23 posibles. A simple vista y sin adentrarnos en la calidad de ellas, podemos decir que ha sido satisfactorio el nivel de concentración de los sujetos para realizar producciones, al menos, aptas para su análisis. Además, las 23 producciones matemáticas son a su vez resolubles, por lo que pasamos a presentar los resultados del análisis de las diferentes categorías.

Comenzando por la estructura sintáctica de las producciones de nuestros sujetos, subdividimos este análisis en el número de proposiciones que presentan, el tipo de proposición interrogativa y por último, el tipo de números naturales elegidos de la tabla presentada grupalmente.

El número de proposiciones por enunciado ha sido, en las 23 producciones, de dos, siendo cada una de ellas un dato relevante para la resolución del problema. En todas ellas había una cantidad en la primera proposición y en la segunda, bien una cantidad que modificaba la primera cantidad o bien, una cantidad que la combinaba. Ej. *“Laura tiene 8 caramelos y le dan 31. ¿Cuántos caramelos tiene en total?”*

El tipo de proposición interrogativa empleada, de nuevo, ha sido la misma para los 23 casos, siendo de asignación esta proposición. En todas ellas la pregunta correspondía a calcular un total, ¿cuánto hay en total?, ¿cuántas tienen entre los dos? o ¿cuántos tiene ahora?

Las primeras variaciones que obtenemos vienen con el tipo de números naturales elegidos. Recordamos que se les presentaba una tabla en la que aparecían 12 números (3 de una cifra, 4 de dos cifras y 5 de tres cifras.) de los cuales, al menos, debían elegir 2. Ej. Enunciado 1: *“Yo tengo 8 chicles y mi hermano me da 7 más, ¿cuántos chicles hay*

en total?” Enunciado 2: “En una floristería hay 33 margaritas y 16 claveles, ¿cuántas flores hay en total?” Enunciado 3: “En una tienda venden 605 chuches y en otra hay 326, ¿cuántas chuches hay en las dos tiendas?” Dicho esto y como podemos observar en la grafica, analizamos el tipo de número empleado en la primera proposición y en segundo lugar, el número elegido para la segunda proposición.

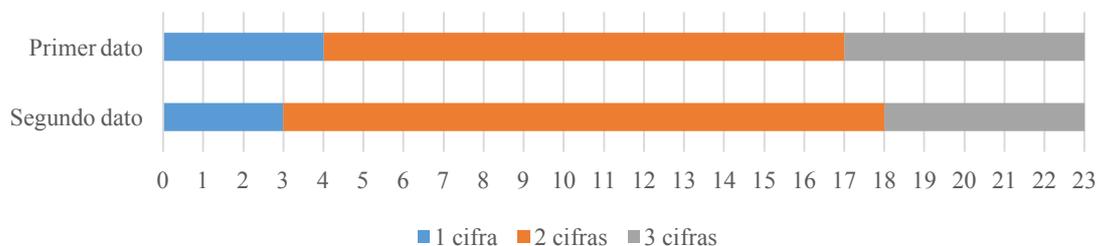


Figura 4. Tipo de números elegidos

Vemos claramente como en las dos proposiciones, los números elegidos corresponden a aquellos de dos cifras y en segundo y tercer lugar, con muy poca variación, los de tres y 1 cifra, respectivamente.

Pasando a la estructura matemática, los resultados obtenidos no han sido muy variados, de las 23 producciones obtenidas, 22 de ellas han sido de tipo aditivo (suma), como pedía el enunciado de la tarea y una de ellas, por error del sujeto, ha resultado ser multiplicativa.

Lo que sí han coincidido todas ellas es en que son de una etapa. Ningún sujeto a producido ningún enunciado con más de una etapa posiblemente porque los problemas de mas de una etapa apenas se han trabajado en clase y por tanto no están acostumbrados a ello. Ej. “En un quiosco hay 7 revistas y en otro hay 16, ¿cuántas revistas hay entre las dos?”

Para ya da por cerrado el análisis de las producciones de suma, pasamos a detallar la estructura semántica que han tenido los enunciados de nuestros sujetos.

Las producciones de nuestros sujetos se han repartido entre problemas de cambio y problemas de combinación, siendo 5 los enunciados para el primer tipo y 17 para el segundo tipo. Para verlo con más claridad, en la siguiente grafica vemos como se reparten las 22 producciones (descartamos de este análisis el problema multiplicativo).

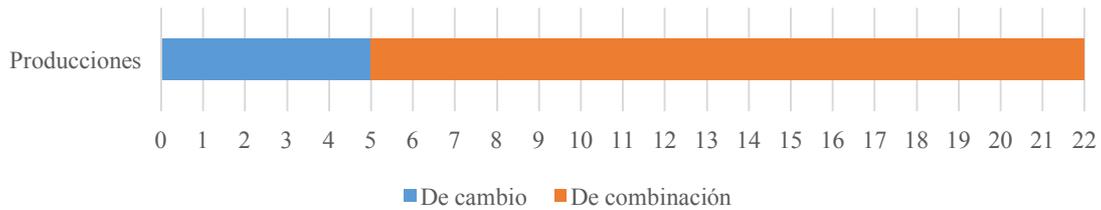


Figura 5. Estructura semántica

A continuación dejamos algunos ejemplos de las producciones de nuestros sujetos que hemos obtenido:

Enunciado	Fabio tiene 91 cartas y se compra 16
Preguntas	¿cuántas cartas tiene Fa- bio a hora?

Figura 6A. Imagen de enunciado de cambio.

Enunciado	En una floristería hay 33 margaritas y 16 claveles
Preguntas	¿Cuántas flores hay en total?

Figura 6B. Imagen de enunciado de combinación.

Comenzamos con las producciones obtenidas relacionadas con la resta. Llevando el mismo orden que el anterior análisis, la distinción entre producciones matemáticas de las que no lo son se concreta en que todas han sido aptas para pasar al siguiente nivel. Independientemente de la calidad y de que puedan o no ser resolubles hay que remarcar que todas ellas se enmarcan dentro de las producciones matemáticas.

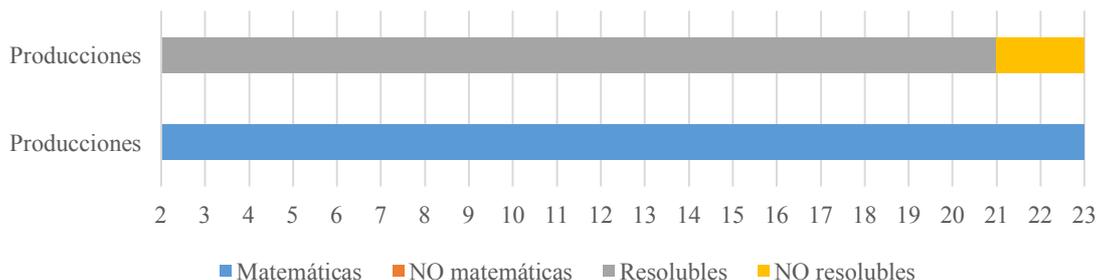


Figura 7. Producciones de resta

Nos encontramos aquí con la primera variación. De las 23 producciones obtenidas, 2 de ellas no son resolubles mientras que las 21 restantes sí son resolubles. Para ir en orden, primero analizaremos las 2 producciones no resolubles y después las producciones restantes como resolubles.

Ambas producciones no resolubles tienen incompatibilidades matemáticas de tipo conceptual, por lo que pasamos directamente a analizar la estructura sintáctica que presentan para detallar el por qué de esta incompatibilidad.

La primera producción (figura 8A. Incompatibilidad conceptual) presenta un enunciado correcto, con dos proposiciones (Yo tengo 8 caramelos – Mi hermano 7) y con números elegidos correctamente de los 12 posibles que presentábamos. En concreto, nuestro sujeto se decanta por números de una cifra en ambas proposiciones. La incompatibilidad la encontramos cuando plantea la proposición interrogativa. ¿Cuántos caramelos me quedan? El sujeto nos enuncia dos proposiciones independientes y sin ningún factor que las modifique, por tanto no podemos responder a esta pregunta. Si interpretamos el problema partiendo de la pregunta, que está correctamente planteada, lo que presentaría la incompatibilidad sería el enunciado, es decir, si el enunciado se fuera completado con algún factor que modifique la primera proposición, la pregunta si encajaría y la producción podría ser correcta.

Enunciado	Yo tengo 8 caramelos y mi hermano 7
Preguntas	¿Cuántos caramelos me quedan?

Figura 8A. Incompatibilidad conceptual

En cambio la segunda producción (figura 8B. Incompatibilidad conceptual) presenta una incompatibilidad más clara. Partimos de tres proposiciones independientes (Pablo se va a comprar 16 tomates – 7 lechugas – 8 brócolis) con tres números elegidos correctamente de la tabla presentada, un primer número de 2 cifras y los otros dos de 1 cifra. Pero como podemos observar el enunciado no tiene nada que ver con la pregunta que se plantea. A diferencia del anterior, para sacarle una posible variación que encajara con la pregunta o la pregunta con el enunciado habría que reformular por completo ambas proposiciones. Por tanto estamos ante una producción incompatible matemáticamente de tipo conceptual.

Enunciado	Pablo se va a comprar 16 tomates. 7 lechuga y 8 bro- colis
Preguntas	¿Cuanto tiene que gastar si tiene 605€?

Figura 8B. Incompatibilidad conceptual

Una vez detalladas las dos producciones no resolubles pasamos a analizar de modo general las producciones enmarcadas como resolubles.

Empezando por la estructura sintáctica, al igual que ocurría con las producciones de suma, todas los enunciados obtenidos cuentan con dos proposiciones. En algunas producciones la segunda proposición modifica la primera y en otras, son dos proposiciones independientes.

Las variaciones comienzan cuando analizamos tanto el tipo de proposición interrogativa como los tipos de números elegidos.

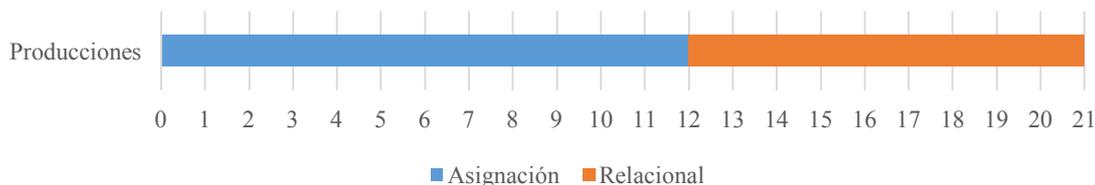


Figura 9. Proposiciones interrogativas

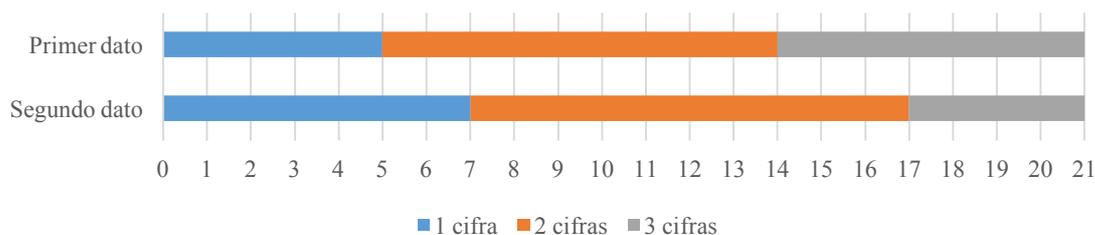


Figura 10. Tipo de números elegidos

Como vemos en la primera gráfica, esta vez las producciones se reparten entre preguntas de asignación y preguntas de tipo relacional. Del primer tipo, 12 producciones, han sido del tipo ¿cuántas le quedan? y las 9 restantes, relacionales, del tipo: ¿cuántos loros hay más que perros?

Pasando a la segunda gráfica, analizamos el tipo de número elegidos, siendo los mismos que para las producciones de suma. Como vemos, al igual que ocurría con la suma, son los números de dos cifras los que abundan en las elecciones, pero ahora con menos diferencia respecto al resto de cantidades. Además, profundizando en el segundo dato seleccionado, vemos como aumenta la cantidad de números de una y dos cifras elegidos. Ej. Enunciado 1: *“Ismael ha llamado a Luis y han quedado de 6 a 7 de la tarde, ¿cuánto tiempo han estado juntos?”* Enunciado 2: *En una clase hay 37 niñas y se van 16 niñas, ¿cuántas niñas quedan?* Enunciado 3: *Hugo tiene 625 sacapuntas y Carmen 326 sacapuntas, ¿cuántos sacapuntas tiene Hugo más que Carmen?”*

En la segunda estructura de análisis, estructura matemática, hay poca variación que observar. De las 21 producciones obtenidas, todas ellas han sido categorizadas con una etapa. Al igual que detallábamos en la suma, puede ser debido a que los problemas con más de una etapa apenas de han trabajado en clase.

En cuanto al tipo de operatoria empleada ha sido, como pedía el enunciado, de 20 producciones de resta mientras que un sujeto, pensamos que por equivocación, la ha realizado de suma. Por tanto, prácticamente en su totalidad, han sido de producciones de resta de una etapa.

Por último, la estructura semántica de las producciones se reparten entre restas de cambio y de comparación, quedando una solo, la de suma, enmarcada dentro del tipo de combinación. Como vemos, casi la mitad (9 de 20) de las producciones son de cambio y la otra mitad (11 de 20) de combinación.



Figura 11. Estructura semántica

A continuación dejamos algunos ejemplos de las producciones de nuestros sujetos que hemos obtenido:

Enunciado	Si Nora tiene 625 cromas y se le pierden 580.
Preguntas	¿Cuántos cromas le quedan a Nora?

Figura 12A. Enunciado de cambio

Enunciado	Hugo tiene 625 sacapuntas y Carmen 326 sacapuntas.
Preguntas	¿Cuántas sacapuntas tiene Hugo más que Carmen?

Figura 12B. Enunciado de comparación

Haciendo un análisis general, como podemos apreciar en la gráfica adjunta, la comparación entre las producciones matemáticas de suma y de resta han presentado los mismos resultados. Todas las producciones obtenidas han sido categorizadas como matemáticas, en cambio, al comparar las resolubles de suma con las de resta apreciamos la primera variación. En la resta son 2 los sujetos que no han diseñado un enunciado de resta resoluble. La suma, todas las producciones las enmarcaríamos como resolubles.

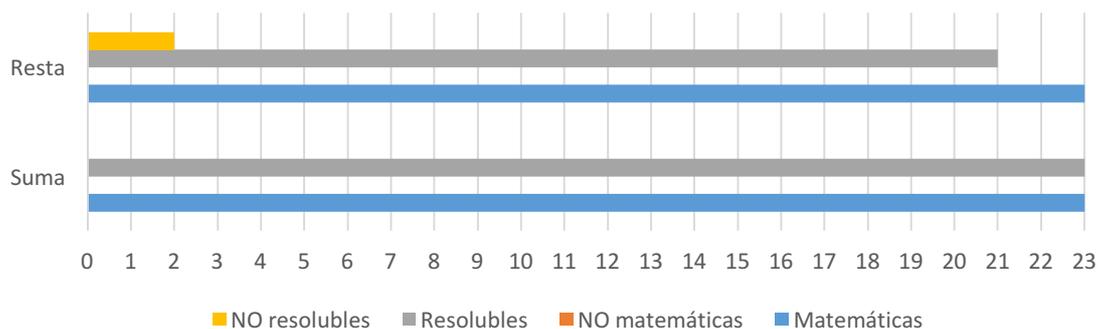


Figura 13. Producciones suma y resta

En esta primera comparación hemos obtenidos buenos resultados, puesto que, prácticamente, todos los alumnos han sido capaces de producir enunciados aptos para su resolución, tanto de suma como de resta.

Haciendo referencia a la estructura sintáctica de ambas producciones apreciamos, por un lado, unas semejanzas entre las producciones de suma y las de resta. Estas semejanza se dan en el número de proposiciones empleadas para los enunciados, siendo dos en cada uno de los casos. Además, encontramos otra semejanza, en el tipo de números elegidos. En ambas producciones las cantidades elegidas son de dos cifras, aunque presentan leves variaciones, el mayor número de producciones se decanta por estas cantidades. Por otro lado, las diferencias vienen cuando interpretamos los resultados del tipo de proposición interrogativa. En las producciones de suma, todos los sujetos realizaron preguntas de asignación. En cambio, en las producciones de resta, el total de enunciados se reparten entre preguntas de asignación y preguntas de tipo relacional.

La estructura matemática no hay diferencias notables. Ambas producciones son de tipo aditivo, de suma y resta respectivamente, y el numero de etapas necesarias para su resolución, ha sido siempre de 1 sola etapa.

En cuanto a la estructura semántica, si ha presentado más diferencia que la anterior estructura. En las producciones de suma, 5 de los sujetos se decantaron por enunciados de cambio y los otros 17 restantes, realizaron problemas de combinación. En cuanto a las producciones de resta, 9 de los sujetos realizaron enunciados de cambio, prácticamente igual que las de suma, pero el resto de sujetos (11) eligieron problemas de comparación. Por tanto, aquí es donde encontramos la diferencia, en la suma los

problemas empleados son de cambio y combinación mientras que en la resta, los problemas planteados han sido de cambio y de comparación.

Desarrollados los resultados obtenidos, pasamos al redactar las conclusiones a las que hemos llegado con esta tarea y comprobar así si los objetivos que planteábamos al comienzo los hemos conseguido y los aspectos llamativos con los que nos encontramos al pasar estas pruebas a los alumnos de segundo de Educación Primaria.

6. CONCLUSIONES

Cuando comenzábamos esta investigación, redactamos una serie de objetivos que queríamos cumplir al término de este.

En el primero de ellos, queríamos diseñar y plantear una tarea de invención de problemas apta para los alumnos de segundo de educación primaria. El diseño de la tarea ha sido muy satisfactorio, tanto a los alumnos como a la tutora del grupo les pareció interesante, mostrando gran interés por su correcta realización y por comprobar los resultados obtenidos para conocer los alumnos a los que más les cuesta.

Enlazado a este objetivo, planteábamos el análisis de los enunciados obtenidos en base a una serie de categorías y variables. Gracias a la buena realización de los alumnos y al esquema de análisis citado, ha sido bastante interesante analizar la variedad de enunciados con los que nos hemos encontrado y, sobre todo, nos ha permitido ver como prácticamente toda la clase ha sido capaz de realizar producciones acordes con lo que pedíamos.

En cuanto al último objetivo planteado, hacíamos referencia a la capacidad de los alumnos para elaborar enunciados y estos, compararlos con el rendimiento matemático en el aula.

Como ya hemos visto, ha sido una tarea muy satisfactoria que nos ha facilitado los datos necesarios para concluir con que los sujetos de segundo de primaria tienen un buen nivel para inventar o producir enunciados matemáticos tanto de suma como de resta a partir de, solamente, una tabla con doce números aleatorios. Comparándolo con el nivel matemático del aula, situado en el 6,5, creemos que aun siendo un poco bajo, en la invención de problemas si que están capacitados, al menos en operaciones de suma y resta. Es cierto, que la asignatura de matemáticas engloba más aspectos, pero aun así esperábamos tener más resultados negativos, puesto que, como decía, la calificación media del aula no era muy alta.

Por último, y para concluir con la investigación, haciendo un balance del desarrollo de esta, podemos decir que ha sido una tarea que gustó a los alumnos y no tuvieron complicaciones en su realización. A pesar de estar sentados en grupo, no hubo ninguna intención de copiarse unos de otros, al contrario, hubo varios sujetos que estaban muy entusiasmados en sus producciones y no querían que ninguno eligiera ni el mismo contexto.

Lo más satisfactorio del estudio ha sido que aun habiendo alumnos con un nivel bajo académicamente hablando, no han tenido problemas para llevarla a cabo, por lo que es posible que si esta tarea se profundizara abarcando enunciados más complejos, situaciones diferentes, más variedad de tareas de invención e incluso con otras operaciones, multiplicaciones o divisiones, podríamos conseguir que el nivel matemáticos de los alumnos elevara en estas cuatro operaciones básicas.

Creemos por tanto que, en concreto para nosotros y en general para la educación, la invención de problemas matemáticos como tarea favorecemos la consecución de los diferentes factores de los que hablábamos al comienzo de la investigación.

La realización de la investigación en el colegio donde realizaba las prácticas me ha facilitado todo el trabajo, ayudando en la preparación de las fichas para cada alumno, preocupándose para que saliera lo mejor posible y como decía anteriormente, ha mostrado interés en la tarea y los resultados obtenidos para que no solo fuera una tarea para realizar este trabajo, sino que le aportara datos a la maestra para conocer el nivel de sus alumnos en este tema.

Para concluir y cerrar el trabajo final de grado, agradecer toda la formación recibida durante los cuatro años en todas las asignaturas y en especial, las relacionadas con las matemáticas, puesto que nos ha aportado los conocimientos necesarios para poder llevar a cabo este estudio con la mayor precisión posible y la motivación y confianza para abarcar este tipo de tareas en un contexto como es el de las prácticas, donde no tenemos el apoyo físico de los docentes de la facultad y dependemos de nosotros mismos.

7. REFERENCIAS

- Ayllón, M. F. y Gómez, I. A., (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *EA, Escuela abierta: revista de Investigación Educativa*, 17, 29-40.
- Cañadas, M. C., y Castro, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 75-98). Madrid: Pirámide.
- Espinoza, J., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 14(2), 2-8.
- Espinoza, J., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas. *Uniciencia*, 29(1), 58-81.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE*, 52, 19349-19420.
- Silver, E. A.. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

8. ANEXOS

Anexo 1

6	605	580	8
315	91	88	625
16	326	7	37

Inventa un problema utilizando dos o más números de los que aparecen en la tabla con una o más preguntas que se resuelvan utilizando la SUMA.

Enunciado	
Preguntas	

Inventa un problema diferente al anterior utilizando dos números de los que aparecen en la tabla con una o más preguntas que se resuelvan utilizando la RESTA.

Enunciado	
Preguntas	