El modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis de tareas matemáticas de Educación Primaria

The model of algebrization levels as instrument of mathematical task analysis for Elementary School

Lilia Aké Tec

Universidad de Colima

Resumen

Se presenta el modelo de niveles de algebrización, articulado desde el Enfoque Ontosemiótico, como herramienta de análisis de las tareas matemáticas que se proponen en la Educación Primaria. A través de una tarea propuesta en un libro de texto de primaria se evidencia que el modelo de niveles de algebrización es útil para determinar el carácter algebraico de la tarea a partir de la práctica matemática que conlleva su resolución. También se reporta que, aunque la tarea no está intencionalmente dirigida para el desarrollo del pensamiento algebraico, es posible orientarla para que la práctica matemática de los niños transite hacia niveles progresivos de algebrización.

Palabras clave: Niveles de algebrización, tareas matemáticas, educación primaria

Abstract

In this paper we present the algebrisation levels model, articulated from the Onto-semiotic Approach, as an instrument to analyse mathematical tasks proposed in elementary school. From a task proposed in an elementary textbook we provide evidence that this model is useful to determine the algebraic character of the task, basing on the mathematical practices involved in their solution. We also report that, despite the task is not intentionally focused on the development of algebraic thinking; it is possible to guide it so the children's mathematical practice transits towards progressive levels of algebrisation.

Keywords: Algebrisation levels, mathematical tasks, primary school

1. Introducción

Las múltiples dificultades manifestadas en el aprendizaje del álgebra se ven reflejadas en las diversas investigaciones que se han realizado a lo largo de las últimas décadas y que destacan (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Kieran, 1992; Sfard, 1987): a) una limitada interpretación del signo igual, b) errores sobre el significado de las letras, c) dificultad al resolver ecuaciones con variables en ambos lados del signo igual, d) rechazo a aceptar una expresión como $3a + 7$ como respuesta a un problema, entre otros. De hecho, se pone de manifiesto que los estudiantes, en la mayoría de los casos, interpretan la expresión x+3 sólo como el procedimiento de añadir 3 a x, mientras que en álgebra esta expresión, además de representar el procedimiento de añadir 3 a x también es un objeto visto como x+3 en su "totalidad" (Van Amerom, 2002).

Como respuesta a esta problemática es que las investigaciones en educación matemática se han centrado en estudios sobre la introducción de formas de razonamiento algebraico en la Educación Primaria, propuesta conocida como "Early Algebra". Al respecto, son diversos los estudios que han desarrollado en el área, tal y como lo revelan Kieran, Pang, Schifter y Fong (2016) quienes realizan un recorrido en las investigaciones que se focalizan en el estudio del razonamiento algebraico en la escuela primaria, en su

Aké, L. P. (2017). El modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis de tareas matemáticas de Educación Primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

aprendizaje y enseñanza. Los autores apuntan que son numerosas las investigaciones que se han centrado en esclarecer la naturaleza del razonamiento algebraico describiendo las características que hacen de una práctica matemática como de índole algebraica. Enfatizan el desarrollo reciente realizado por Radford en el 2014, quien propone un marco para caracterizar el razonamiento algebraico a partir de tres nociones claves (a) indeterminación: los números desconocidos están involucrados en el problema dado, (b) denotación de lo indeterminado: los números se nombran o simbolizan de varias maneras, tales como con gestos, palabras, signos alfanuméricos o alguna combinación de éstos, y (c) analiticidad: las cantidades indeterminadas se tratan como si fueran números conocidos.

Por otro lado, Kieran et al. (2016) también mencionan que los estudios sobre el aprendizaje del álgebra en la escuela primaria se han centrado en la generalización a través del reconocimiento de patrones y la generalización a través de propiedades de las operaciones y estructura numérica. Sin embargo, también hay estudios sobre las funciones (Blanton y Kaput, 2011; Ellis, 2011) y la comprensión del signo igual (Molina, Castro y Castro, 2009; Prediger, 2010), lo que investigadores en didáctica del álgebra llaman pensamiento funcional y pensamiento relacional, respectivamente. Estos estudios informan que los niños ciertamente pueden resolver tareas que tradicionalmente se han considerado propias del álgebra (Carpenter, Frankle y Levi, 2003).

En lo relativo a la enseñanza del álgebra, aún se cuentan con pocos estudios de procesos instruccionales para la formación inicial y continua del profesorado de este nivel educativo y se reconoce la necesidad de apoyo a los profesores en esta área para promover el razonamiento algebraico en los niños (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran et al., 2016)

Como se evidencia en líneas previas, la inclusión del razonamiento algebraico en la escuela primaria implica seguir varias líneas de cambios sobre lo que ya se sabe de la enseñanza y aprendizaje del álgebra: su naturaleza en los primeros grados, la práctica matemática de los niños de la escuela elemental, la formación de profesores de primaria y las tareas que permiten su desarrollo. En este sentido, el presente documento se interesa por esclarecer cuándo una tarea matemática de la educación primaria puede o no promover un razonamiento algebraico en los niños de la escuela elemental. Este aspecto cobra relevancia sobre todo porque las tareas matemáticas en la escuela primaria están orientadas generalmente hacia la aritmética y el cálculo (Kaput y Blanton, 2001) por lo que tener criterios de análisis puede proporcionar información que permita reorientarlas para promover un razonamiento algebraico en los estudiantes. Distinguir la potencialidad de una tarea para promover el razonamiento algebraico es importante para avanzar en su desarrollo en el aula; los docentes deben tener la capacidad de encontrar, crear o “algebrizar” tareas matemáticas, además de verlas no de forma aislada y como actividades de una sola vez, sino como las tareas cuya ejecución puede ser ejercida sobre una diversidad de experiencias en el aula (Kaput y Blanton, 2002; Blanton y Kaput, 2003).

En el siguiente apartado se contextualiza la articulación del modelo de niveles de algebrización dentro del marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). En el apartado tres, se ejemplifica el análisis de una tarea matemática de Educación Primaria a partir de dicho modelo, y finalmente en el apartado cuatro se realizan comentarios finales sobre las implicaciones del modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis.

2. Modelo de niveles de algebrización

El modelo de niveles de algebrización surge como respuesta a la falta de consenso en la interpretación del razonamiento algebraico en la escuela primaria. Se trata de una propuesta teórica que puede contribuir al desarrollo progresivo de formas de razonamiento algebraico en los estudiantes. Se considera que esta teorización es necesaria, en el mismo sentido que Kieran et al (2016) enfatizan: “queda mucho por hacer en lo que respecta a la introducción del álgebra en la primaria, especialmente con respecto a la teorización de los aspectos algebraicos del trabajo de los estudiantes con número, operaciones y propiedades” (p. 31).

La articulación de la propuesta de niveles de algebrización engrana, dos aspectos: las investigaciones realizadas en torno a la inclusión del álgebra en la escuela primaria, y desde la perspectiva del EOS, las herramientas de análisis que permiten distinguir qué objetos matemáticos tienen una naturaleza algebraica y en qué medida pueden ser introducidos en la escuela elemental. Según esta perspectiva, el razonamiento algebraico conlleva prácticas matemáticas con diferentes niveles de algebrización que están definidos en función de objetos de índole algebraicos (conceptos, propiedades, lenguajes, procedimientos y argumentos) que se requieren y surgen en la solución de una tarea matemática en la escuela primaria (Aké, 2013). A partir de esta interpretación se articuló un modelo que propone una diferenciación de cuatro niveles para la práctica algebraica (Aké, Godino, Gonzato y Wilhelmi, 2013; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) y que queda representado en la Figura 1.

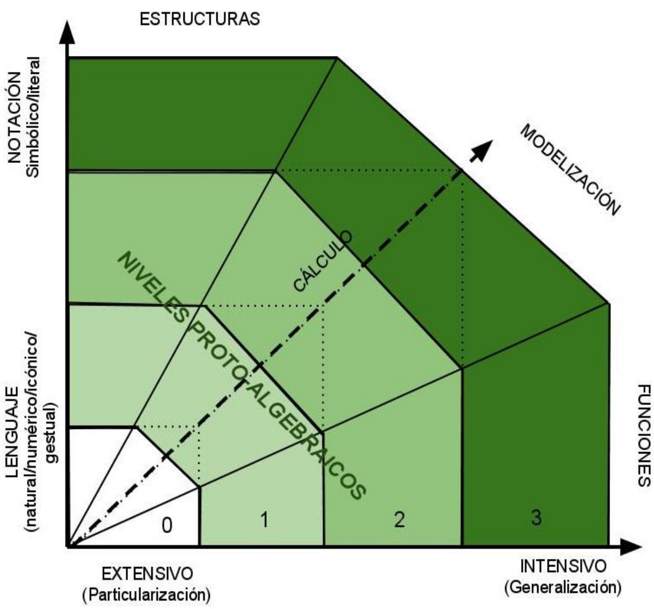

Figura 1. Niveles de algebrización de la actividad matemática (Godino et al., 2014, p. 216)

El nivel cero indica ausencia de razonamiento algebraico, es decir, no se trabaja sobre conceptos y propiedades de índole estructural o funcional. En el aspecto estructural no se reconocen propiedades y se utiliza al signo igual en su acepción de resultado de operaciones. En el aspecto funcional se expresa una regla recursiva. El lenguaje puede ser de índole numérico, icónico, verbal, y los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita.

El nivel uno indica un primer acercamiento incipiente a las formas de razonamiento protoalgebraico. En el aspecto estructural se comienzan a reconocer propiedades de las operaciones, también se reconoce el significado relacional del signo igual por lo que el concepto de equivalencia emerge. En el aspecto funcional se expresa una regla general. El lenguaje puede ser de índole numérico, icónico, verbal, y los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita.

El nivel dos indica un primer acercamiento intermedio a las formas de razonamiento protoalgebraico. En el aspecto estructural se comienzan a utilizar propiedades de las operaciones, se utiliza el significado relacional del signo igual por lo que la noción de equivalencia emerge. En el aspecto funcional se expresa una regla general. Lo que hace distintivo al nivel 2 es el lenguaje, que, aunque puede ser de índole numérico, icónico, verbal, necesariamente comienza a familiarizarse a los niños de la escuela elemental con el uso de símbolos (no precisamente registros alfanuméricos); sin embargo, los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita.

El nivel tres indica formas consolidadas de razonamiento algebraico. Lo que caracteriza a este nivel es la introducción de elementos simbólicos o alfanuméricos, pero sobre todo el cálculo analítico para obtener formas equivalentes en las expresiones, en el sentido que Puig y Rojano (2004) manifiestan.

3. Propuesta de análisis para tareas matemáticas

Para evidenciar la operatividad del modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis, se ejemplifica, a partir de una tarea matemática la identificación de objetos algebraicos (conceptos, propiedades, lenguaje, procedimientos). Se muestra cómo a partir de reorientaciones, la tarea puede incentivar a una práctica matemática en los niños con diferentes grados de algebrización.

3.1 Método

El presente trabajo de tipo cualitativo (Vasilachis, 2009), se interesa por analizar las tareas que se proponen en la educación primaria, atendiendo a 3 criterios del modelo de Niveles de Algebrización (Godino et al., 2014):

1. Tipo de conceptos y propiedades de índole algebraica.
2. Tipo de lenguaje, notación o representaciones.
3. Tipo de procedimientos, transformaciones o cálculo analítico.

Para llevar a cabo el análisis se identifican conceptos y propiedades algebraicos de carácter estructural (propiedades de las operaciones, equivalencia, etc.) o funcional (patrones, relación de cambio que puede ser constante, proporcional, etc.) que pudieran potenciarse en la tarea y que conlleven a una práctica matemática de índole algebraica. Posteriormente se centra en las representaciones y cálculo analítico que se realiza sobre los objetos algebraicos. A continuación, se evidencia el análisis de una tarea perteneciente al libro de segundo grado de primaria y que se aprecia en la Figura 2.

Análisis previo: La tarea solicita al niño de entre 7 y 8 años de edad, escribir de varias maneras los números 30, 63 y 85. El niño procederá a escribir las posibles soluciones haciendo hincapié en agrupar de 10 en 10 para que el cálculo sea más rápido. También se identifica que se promueve el significado operacional del signo igual, por lo que la cantidad desconocida es el resultado de la operación indicada. La tarea se desarrolla en un contexto puramente numérico. Con base en lo anterior, se establece que la tarea no tiene la intención inmediata de situar a los estudiantes en contextos de análisis de propiedades y de situar al signo igual en su significado relacional a través de comparaciones entre cantidades equivalentes.

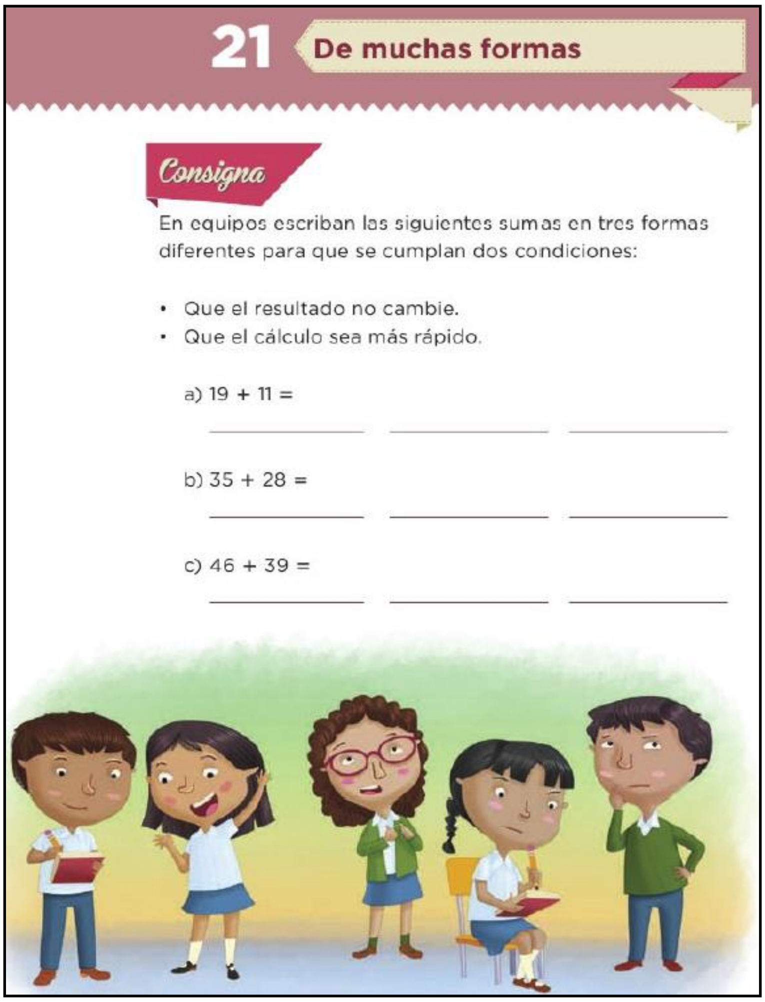

Figura 2. Tarea 21 del libro de texto del alumno de segundo año de primaria (SEP, 2015, p. 44)

Análisis de objetos algebraicos: El planteamiento propuesto en la Figura 2 puede reorientarse para atender aspectos estructurales del álgebra, como la noción de equivalencia a través del significado relacional del signo igual y las propiedades de las operaciones. De esta manera, se puede plantear una modificación como el que se presenta en la siguiente Figura 3 que sugiere una práctica matemática protoalgebraica de nivel 1.

Tarea 1. Determina los posibles dos sumandos que proporcionen como resultado 30. Mira los ejemplos siguientes:

19 +11=30
18+12 =30

Se pueden obtener los siguientes posibles casos y motivar a la comparación de los resultados:

17+13=30
16+14=30
15+15=30
14+16=30

Figura 3. Variante de la Tarea 21, para introducir la noción de equivalencia

Tipo de conceptos y propiedades algebraicos: Se advierte que es posible introducir al niño en el reconocimiento del signo igual, en su significado relacional comparando las expresiones que proporcionan un mismo resultado, emerge así el concepto de equivalencia. Lo anterior conllevaría a que los niños utilicen la propiedad "dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí". Es importante mencionar que el niño no necesariamente tiene que nombrar la propiedad, sino más bien reconocerla y aplicarla.

Tipo de lenguaje, notación o representaciones: El contexto que se propone en la Figura 2 es numérico, pero es posible desarrollar la tarea con fichas y utilizando balanzas.

Tipo de transformaciones o cálculo analítico: No se opera con los objetos algebraicos.

También es posible a través de la comparación de esas expresiones planteadas en la Figura 3, introducir otras propiedades con ayuda de la descomposición numérica, lo cual permitiría una práctica protoalgebraica, también de nivel 1. Utilizando la misma tarea planteada en la Figura 2 podría proponerse a los estudiantes lo siguiente:

Tarea 2. Determina si la igualdad se cumple. Es importante que no realices la operación indicada.

19+11= 14+16

Se puede dar el siguiente tratamiento:

(10+9)+(10+1) = (10+4)+(10+6)
(10+4+5)+(10+1+6-6) = (10+4)+(10+6)
(10+4)+5+(10+6)+1-6 = (10+4)+(10+6)
(10+4) + (10+6)+5+1-6 = (10+4)+(10+6)
(10+4)+(10+6) = (10+4)+(10+6)
30 = 30

Figura 4. Variante de la Tarea 21, para introducir las propiedades de las operaciones

Tipo de conceptos y propiedades algebraicas: El planteamiento realizado en la Figura 4 orienta a la manifestación de la noción de equivalencia y el uso de la propiedad asociativa. También se expresa el signo igual en su significado relacional. Es importante mencionar que el docente de primaria tiene que propiciar y orientar este tratamiento en el aula.

Tipo de lenguaje, notación o representaciones: El tratamiento que incentiva en el planteamiento de la Figura 4 se enmarca en el registro numérico, aunque es posible utilizar registros pictóricos.

Tipo de transformaciones o cálculo analítico: No se opera con los objetos algebraicos.

Por otra parte, la tarea de la Figura 2 podría motivar al estudiante a desarrollar formas de pensamiento protoalgebraico de nivel 2, considerando que en este nivel se familiariza a los estudiantes con la noción de cantidad desconocida. Por ejemplo:

Tarea 3. Determina el valor que debiera tener ■ para que la igualdad se cumpla. Es importante que no realices la operación indicada.

$$19 + 11 = 14 + \blacksquare$$

Se puede dar el siguiente tratamiento:

$$19 + 11 = 14 + \blacksquare$$
$$(10 + 9) + 11 = 10 + 4 + \blacksquare$$
$$(10 + 4 + 5) + 11 = 10 + 4 + \blacksquare$$
$$(10 + 4) + 11 + 5 = 10 + 4 + \blacksquare$$
$$(10 + 4) + 16 = 10 + 4 + \blacksquare$$

Figura 5. Variante de la Tarea 21, para introducir notación simbólica

Tipo de conceptos y propiedades algebraicas: La tarea de la Figura 5 motiva al reconocimiento de la equivalencia a través del significado relacional del signo igual, y el uso de la propiedad asociativa a través de la descomposición numérica; emerge la noción de cantidad desconocida representada por el símbolo ■ . Nuevamente, es importante mencionar que el niño no necesariamente tiene que nombrar la propiedad, sino más bien reconocerla y aplicarla. Esta situación podría representar un primer acercamiento a la noción de incógnita, concepto ampliamente trabajado en el álgebra de secundaria.

Tipo de lenguaje, notación o representaciones: Se utiliza un registro numérico, también se manifiesta el uso de símbolos.

Tipo de transformaciones o cálculo analítico: No se opera con los objetos algebraicos.

Finalmente, una tarea que potencialice un nivel de algebrización 3 tendría la orientación siguiente:

Tarea 4. Determina el valor que debiera tener ■ para que la igualdad se cumpla. Es importante que no realices la operación indicada.

$$19 + 5 + \blacksquare = 14 + 4 + \blacksquare + \blacksquare$$

Se puede dar el siguiente tratamiento:

$$19 + 5 + \blacksquare = 14 + 4 + \blacksquare + \blacksquare$$
$$10 + 9 + 5 + \blacksquare = 10 + 4 + 4 + \blacksquare + \blacksquare$$
$$10 + 4 + 5 + 5 + \blacksquare = 10 + 4 + 4 + \blacksquare + \blacksquare$$
$$10 + 4 + 4 + 6 + \blacksquare = 10 + 4 + 4 + \blacksquare + \blacksquare$$

Figura 6. Variante de la Tarea 21, operar con la cantidad desconocida

Tipo de conceptos y propiedades algebraicas: Con el planteamiento realizado en la Figura 6 se motiva al reconocimiento de la equivalencia a través del significado relacional del signo igual, y de las propiedades asociativa y cancelativa que se estudian a partir de la descomposición numérica. Emerge la noción de cantidad desconocida representada por el símbolo ■ y se advierte que está presente en ambos lados de la expresión numérica.

Tipo de lenguaje, notación o representaciones: Se utiliza un registro numérico, también se manifiesta el uso de símbolos.

Tipo de transformaciones o cálculo analítico: Se opera con el símbolo ■ y se aplica la propiedad cancelativa.

Se aprecia que a partir de la tarea de la Figura 2 es posible establecer orientaciones instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación de niveles progresivos del razonamiento algebraico. La intención es considerar los temas ya existentes en la matemática elemental, y hacer explícito su carácter algebraico (Carraher y Schliemann, 2007). Lo que previamente se expuso son posibles modificaciones que son factibles de realizar en las tareas que se proponen en la Educación Primaria para hacer emerger elementos algebraicos y que el maestro de primaria podría considerar en la planificación de su práctica docente en el aula.

4. Comentarios finales

El análisis realizado sobre la tarea refleja que, a pesar de no estar intencionalmente dirigida a promover un pensamiento algebraico en los niños, es posible identificar los objetos algebraicos implícitos que permiten una orientación que promueva una actividad matemática protoalgebraica. Se evidencia, que la potencialidad de la tarea para promover el razonamiento algebraico en los estudiantes depende de la práctica matemática que se pueda realizar a partir de ella. Es por esta razón que los docentes de primaria necesitan estar capacitados para mirar “más allá” de las tareas, en el mismo sentido que Kaput y Blanton (2001) mencionan que es necesaria la construcción en el maestro de “ojos y oídos algebraicos" para que puedan identificar las oportunidades para la generalización y la expresión sistemática de la generalidad en actividades que no parezcan algebraicas a simple vista (Kaput y Blanton, 2001).

El análisis realizado sobre la tarea resulta útil en la formación inicial y continua del profesorado de la Educación Primaria, ya que según la propuesta “Early Algebra”, los docentes han de suscitar la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y crear un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2003; 2005). El reconocimiento de elementos algebraicos implícitos en la tarea es una competencia que debiera ser considerada en la formación inicial de los maestros de primaria si la intención es el desarrollo del razonamiento algebraico en los niños.

Referencias

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 2, pp. 1-8). Kiel, Germany: PME.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears: Understanding Characteristics of Professional Development that Promote Generative and Self-Sustaining Change in Teacher Practice". *Teaching Children Mathematics*, *10*, 70-77.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En, J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 5-21). Berlin: Springer-Verlag.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87.

Ellis, A. (2011). Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. En Rowland T. y Ruthven K. (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-25). London: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Kaput, J. y Blanton, M. L. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming Task Structure. En H. Chick, K. Stacey, J. Vicent., y J. Vicent (Eds). Paper presented at the Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 344-350). Melbourne: University of Melbourne.

Kaput, J. y Blanton, M. L. (2002). Design principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 105-112). Norwich: University of East Anglia.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Fong, S. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Hamburgo: Springer.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 341-368.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 73-93.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189- 224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Secretaría de Educación Pública (2015). *Desafíos matemáticos. Segundo grado*. México: SEP

Sfard, A. (1987). Mathematical practices, anomalies and classroom communication problems. En P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education.* London: The Falmer Press

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrech: CD-B Press.

Vasilachis, I. (2009). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.